ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mehmet ONAT

SERBEST LİE CEBİRLERİNİN MODÜL PARÇALANIŞLARI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2012

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SERBEST LİE CEBİRLERİNİN MODÜL PARÇALANIŞLARI

Mehmet ONAT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez 07/06/2012 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

....	....	....
Yrd.Doç. Dr. Dilek ERSALAN	Prof. Dr. Naime EKİCİ	Doç. Dr. Perihan DİNÇ ARTUT
DANIŞMAN	ÜYE	ÜYE

Bu Tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. M. Rifat ULUSOY
Enstitü Müdürü

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SERBEST LİE CEBİRLERİNİN MODÜL PARÇALANIŞLARI

Mehmet ONAT

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Dilek ERSALAN
Yıl : 2012, Sayfa: 71
Jüri : Yrd. Doç. Dr. Dilek ERSALAN
: Prof. Dr. Naime EKİCİ
: Doç. Dr. Perihan DİNÇ ARTUT

Bu çalışmada sol normlu temel Lie monomiallerinin Lie çapımlarından meydana gelen serbest Lie cebirinin bazı yeni bazlarını elde etmek için eliminasyon olarak bilinen teknik kullanılmıştır. Bir serbest Lie cebirinin bir serbest *K*-modül olarak direkt parçalanışı elde edilmiş ve direkt bileşenleri metabelyen Lie kuvvetlerinin tensör çarpımları olan serbest Lie cebirinin homojen bileşenlerinin direkt parçalanışları elde edilmiştir. Ayrıca derecelendirilmiş cebir otomorfizmlerinin grupları için modüller olarak serbest Lie cebirlerinin yeni filtrasyonları ve parçalanışları elde edilmiştir. Bununla birlikte sırasıyla karakteristiği 0 ve pozitif karakteristikli cisimler üzerinde *KG*- modüller olarak serbest Lie cebirlerinin bazı yeni parçalanışları elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Eliminasyon, Bazlar, Modül parçalanışları

ABSTRACT

MSc. THESIS

MODULE DECOMPOSITIONS OF FREE LIE ALGEBRAS

Mehmet ONAT

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor : Asst. Prof. Dr. Dilek ERSALAN
Year : 2012, Pages: 71
Jury : Asst. Prof. Dr. Dilek ERSALAN
: Prof. Dr. Naime EKİCİ
: Assoc. Prof. Dr. Perihan DİNÇ ARTUT

In this study, the technique known as elimination to devise some new bases of the free Lie algebra which consist of Lie products of left normed basic Lie monomials is used. In section 2, the direct decomposition as a free *K*-module of a free Lie algebra is obtained and the direct decompositions of the homogeneous components of the free Lie algebra with direct summands that are tensor products of metabelian Lie powers are obtained. Furthermore, the new filtrations and decompositions of free Lie algebras as modules for groups of graded algebra automorphisms are obtained. Besides, some new decompositions for free Lie algebras as *KG*- modules over fields of characteristic zero and positive characteristic, respectively, are obtained.

Keywords: Elimination, Basis, Module decompositions

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında bilgi ve tecrübeleriyle beni aydınlatan, her aşamasında yardımlarını esirgemeyen ve değerli zamanlarını ayırarak çalışmanın tamamlanmasını sağlayan saygıdeğer hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Dilek ERSALAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu çalışma sırasında sorularımı geri çevirmeyen, bilgi ve çok yönlülüğüyle de kendisini örnek aldığım saygıdeğer hocam Sayın Prof. Dr. Yusuf ÜNLÜ'ye teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Bu çalışmanın başından sonuna kadar bilgi ve tecrübeleriyle beni aydınlatan, bilgi ve kişiliğiyle kendilerini örnek aldığım saygıdeğer hocalarım Sayın Prof. Dr. Naime EKİCİ'ye, Doç. Dr. Ahmet TEMİZYÜREK'e ve Doç. Dr. Ali Arslan ÖZKURT'a sonsuz teşekkür ederim.

Ayrıca yardımlarından dolayı tüm Matematik Bölümü akademik personeline bu çalışmanın oluşmasında yardımlarını esirgemedikleri için çok teşekkür ederim. Bana her konuda yardımcı olan sevgili arkadaşım Serkan AKOĞUL'a sonsuz sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

Bugüne kadar desteklerini esirgemeyen her zaman yanımda olan aileme sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

1.GİRİŞ

$L = L(X)$, birimli ve değişmeli bir K halkası üzerinde serbest üreteç kümesi X olan bir serbest Lie cebiri olsun. $L_n = L_n(X)$, L de derecesi n olan homojen bileşen olmak üzere $L = \bigoplus_{n\geq 1} L_n$ dir. $L_n = L_n(X)$ homojen bileşeni n-inci ***Lie kuvveti*** olarak adlandırılır.

X kümesinin tam sıralı olduğunu kabul edelim. X üzerinde derecesi n olan bir sol normlu temel Lie monomiali, $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ ve $x_1 > x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_n$ olmak üzere $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ şeklinde bir Lie çarpımıdır. Derecesi n olan tüm sol normlu temel Lie monomiallerinin kümesi $H_n = H_n(X)$ ile ve derecesi 2 den büyük ya da eşit olan tüm sol normlu temel Lie monomiallerinin kümesi de H ile gösterilir. Sol normlu temel Lie monomialleri L nin asıl Hall bazları tarafından içerilir. Ayrıca bu bazlar sol normlu temel Lie monomiallerinin Lie çarpımlarından meydana gelir. Derecesi 2 den büyük ya da eşit olan sol normlu temel Lie monomialleri $L' = \bigoplus_{n\geq 2} L_n$ türetilmiş cebirinin bir serbest üreteç kümesini oluşturur. Bundan dolayı her $n \geq 1$ için $\{v + L'' : v \in H_n\}$ kümesi X üzerinde $M = {}^{L}/_{L''}$ serbest metabelyen Lie cebirinin $M_n = M_n(X)$ n-inci homojen bileşeninin bir bazıdır. M_n, n-inci ***metabelyen Lie kuvveti*** olarak adlandırılır. Hall'un makalesinden sonra (Hall, 1950) serbest Lie cebiri için bir çok baz yapısı tanımlandı. Lyndon-Shirshov bazı (Chen, Fox, Lyndon, 1958; Shirshov, 1958) ve Bokut'un bazı (Bokut, 1963) bunlardan bazılarıdır.

Bu çalışma Stöhr (2008) tarafından yazılan makalenin Türkçe çevirisi olup, örnekler ve temel tanımlar ile genişletilmiştir.

Son zamanlardaki baz yapıları ile ilgili çalışmalar (Chibrikov, 2006) da bulunabilir. Bu çalışmada sol normlu temel Lie monomiallerinin Lie çarpımlarından meydana gelen serbest L Lie cebiri için bazı yeni bazlar elde edilmiştir. Bu bazlar, özellikle tanımlanması kolay olan direkt bileşenleri ile K-modüller olarak L_n Lie kuvvetlerinin direkt parçalanışlarını oluştururlar. Bu bazlar metabelyen Lie kuvvetleri ve metabelyen Lie kuvvetlerinin tensör çarpımlarıdır. Örneğin, eğer

$n > m \geq 2$ ise bu bazlar öyle bir şekilde seçilebilir ki $u \in H_n, w_1, w_2, \dots, w_k \in H_m$ olmak üzere

$$[u, w_1, w_2, \dots, w_k] \tag{1.1}$$

biçimindeki tüm Lie çarpımlarını içerir. Bu baz elemanlarının gereni bir serbest K-modül olarak k tane M_m tensör çarpanları ile $M_n \otimes M_m \otimes \dots \otimes M_m$ tensör çarpımına izomorfiktir. Diğer taraftan bir Hall bazı sadece $w_1 \leq w_2 \leq \cdots \leq w_k$ ile (1.1) biçimindeki Lie çarpımlarını içerir ve bunların gereni $S_k(M_m)$, M_m nin k-ıncı simetrik kuvveti olmak üzere $M_n \otimes S_k(M_m)$ tensör çarpımına izomorfiktir. Bu bazlar sadece K-modüller olarak değil aynı zamanda derecelendirilmiş cebir otomorfizmlerinin bir G grubu için de modüller olarak L_n nin filtrasyonlarını oluştururlar. Bu filtrasyonların bölümleri metabelyen Lie kuvvetlerinin tensör çarpımlarının direkt toplamlarıdır. Filtrasyonlar (Stöhr, 1987) de Hall bazları kullanılarak elde edilen filtrasyonlara benzer. K, karakteristiği 0 olan bir cisim olduğu durumda daha iyisi yapılabilir ve filtrasyonların yerine aslında KG-modüller olarak L_n nin parçalanışları elde edilir. Bu parçalanışları (Wall, 1978) tarafından elde edilen benzer parçalanışlar ile karşılaştırmak ilginçtir. (Wall, 1978) deki direkt bileşenler metabelyen Lie kuvvetlerinin ((Stöhr, 1987) deki filtrelerin bölümlerine benzer) simetrik kuvvetlerinin tensör çarpımlarıdır.

Pozitif karakteristikli cisimler üzerinde Lie kuvvetlerinin bir çok uygulaması elde edilir. Bir serbest A, K-modülü verildiğinde A üzerinde serbest Lie cebiri için $L(A)$ yazılır. Yani X, A nın bir keyfi K-bazı olduğu durumda X üzerindeki serbest Lie cebiri için $L(A)$ ve n-inci Lie kuvveti için $L_n(A)$ yazılır. Benzer notasyon serbest metabelyen Lie cebirleri için de kullanılacaktır. Eğer G, K-lineer otomorfizmler ile A üzerinde bir grup etkisi ise böylece A bir KG-modül olur. G nin etkisi derecelendirilmiş cebir otomorfizmleri tarafından G etkisi ile $L(A)$ nın tümüne tek bir şekilde genişler. Özellikle $L_n(A)$ Lie kuvvetleri KG-modüllerdir. Benzer şekilde $M_n(A)$ ve $T_n(A)$ lar da KG-modüller olarak göz önünde bulundurulacaktır. En genel durumda G, $L = L(X)$ serbest Lie cebirinin derecelendirilmiş cebir otomorfizmlerinin tam grubudur. Yani $V = L_1 = \langle X \rangle$ olduğunda $G = GL(V)$ dir. Bu çalışmanın asıl amacı bir *KG*-modül olarak serbest Lie cebirlerinin yapısı hakkında bilgi elde etmektir ve bunun en büyük kısmı modül yapısıyla ilgilidir.

Son bölüm modüler Lie kuvvetleriyle ilgilidir. Son yıllarda bu konuda bir çok çalışma yapıldı. Bu çalışmanın anahtar kelimesi serbest Lie cebirleri için eliminasyondur. Bu teknik yaygın olarak Lazard eliminasyonu olarak bilinir. (Shirshov, 1953). Başka bir önemli yöntem eliminasyonun değişimidir. (Kukin, 1972 ye göre)

Burada Lie braketleri için sol norm kuralı kullanılır. Yani

$$[u, v, w] = \big[[u, v], w\big]$$

dir. Ayrıca bir *K*-modülde U kümesinin gereni için $\langle U \rangle$ yazılır.

2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

2.1. Temel Yapılar

Tanım 2.1.1: G boş olmayan bir küme olmak üzere $G \times G$ den G ye tanımlı bir

$$* : G \times G \to G, (a, b) \to a * b$$

fonksiyonuna G üzerinde bir ***ikili işlem*** denir. Eğer $*$, G üzerinde bir ikili işlem ise $(G,*)$ ifadesine G de bir ***cebirsel yapı*** denir.

Tanım 2.1.2: G boş olmayan bir küme ve G üzerinde bir $*$ ikili işlemi tanımlı olsun. Buna göre eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa $(G,*)$ cebirsel yapısına ya da G kümesine $*$ işlemine göre bir ***grup*** denir.

i) Her $a, b, c \in G$ için $(a * b) * c = a * (b * c)$ (Birleşme özelliği)

ii) Her $a \in G$ için $a * e = e * a = a$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır. (Birim elemanın varlığı)

iii) Her $a \in G$ için $a * a' = a' * a = e$ olacak şekilde bir $a' \in G$ vardır. (Ters elemanın varlığı)

Eğer $(G,*)$ grubunda her $a, b \in G$ için

$$a * b = b * a$$

ise bu gruba ***değişmeli*** ya da ***abelyen grup*** denir.

Tanım 2.1.3: $(G,*)$ bir grup ve H, G nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer her $a, b \in H$ için $a * b \in H$ ise o zaman H, G nin $*$ işlemine göre ***kapalıdır*** denir.

Tanım 2.1.4: G bir grup ve H, G nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer H, G nin işlemine göre kapalı ve bu işleme göre bir grup ise o zaman H ye G nin bir ***alt grubu*** denir ve $H \leq G$ ile gösterilir.

G ve $\{e\}$, G nin alt grupları olduğu açıktır. $\{e\}$ ve G ye G nin ***aşikar alt grubu*** denir. G nin kendisinden ve $\{e\}$ den farklı her alt grubuna G nin bir ***öz alt grubu*** denir.

Teorem 2.1.5: G bir grup ve H, G nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. O zaman $H \leq G$ olması için gerek ve yeter koşul $a, b \in H$ için $ab^{-1} \in H$ olmasıdır.

Tanım 2.1.6: $(G,*)$ ve $(H,\circ)$ iki grup olmak üzere eğer $\varphi: G \to H$ dönüşümü her $x, y \in G$ için

$$\varphi(x * y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$$

koşulunu sağlarsa φ ye bir *grup homomorfizmi* ya da kısaca bir *homomorfizm* denir.

Tanım 2.1.7: $\varphi: G \to H$ grup homomorfizmi bire bir ise φ ye bir *monomorfizm* denir.

Tanım 2.1.8: $\varphi: G \to H$ grup homomorfizmi örten ise φ ye bir *epimorfizm* denir.

Tanım 2.1.9: $\varphi: G \to H$ grup homomorfizmi hem bire bir hem de örten ise φ ye bir *izomorfizm* denir ve $G \cong H$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.10: $\varphi: G \to G$ grup homomorfizmine bir *endomorfizm* denir.

Tanım 2.1.11: $\varphi: G \to G$, bire bir ve örten bir grup homomorfizmi ise φ ye *grup otomorfizmi* denir.

Tanım 2.1.12: G bir grup ve X bir küme olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $G \times X \longrightarrow X$, $(g, x) = g.x$ dönüşümüne G grubunun X kümesi üzerine bir *sol grup etkisi* denir.

i) $1.x = x$

ii) Her $g, h \in G$ ve her $x \in X$ için $g.(h.x) = (gh).x$ dir.

Bazı durumlarda $g.x$ işlemi gx ya da ${}^{g}x$ ile gösterilir.

Benzer şekilde bir $X \times G \longrightarrow X$, $(x, g) = x.g$ *sağ grup etkisi*

i) $x.1 = x$

ii) Her $g, h \in G$ ve her $x \in X$ için $(x.g).h = x.(gh)$ dir.

şeklinde tanımlanır. $x.g$ işlemi xg ya da x^{g} ile gösterilir.

Tanım 2.1.13: $R \neq \emptyset$ bir küme ve R üzerinde $''+''$ ve $''.''$ ikili işlemleri tanımlanmış olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanırsa $(R, +, .)$ cebirsel yapısına bir *halka* denir.

i) $(R, +)$ bir değişmeli gruptur.

ii) Her $a, b, c \in R$ için $(a.b).c = a.(b.c)$ dır.

iii) Her $a, b, c \in R$ için $a.(b + c) = a.b + a.c$ ve $(a + b).c = a.c + b.c$ dir.

Eğer her $a, b \in R$ için $a.b = b.a$ oluyorsa R ye ***değişmeli halka*** denir.

Eğer her $a \in R$ için $a.1_R = 1_R.a = a$ olacak şekilde bir $1_R \in R$ varsa R ye *birimli halka* denir.

Tanım 2.1.14: R bir halka ve $0 \neq a \in R$ olmak üzere $a.b = 0$ olacak şekilde $0 \neq b \in R$ varsa a elemanına *sol sıfır bölen* denir. Benzer şekilde $0 \neq a \in R$ olmak üzere $b.a = 0$ olacak şekilde $0 \neq b \in R$ varsa a elemanına *sağ sıfır bölen* denir.

Eğer a elemanı hem sağ sıfır bölen hem de sol sıfır bölen ise a elemanına *sıfır bölen* denir.

Tanım 2.1.15: Birimli, değişmeli ve sıfırdan farklı her elemanın çarpmaya göre tersi varsa o zaman bu halkaya bir *cisim* denir.

Tanım 2.1.16: R bir halka ve $\emptyset \neq S \subseteq R$ olsun. Eğer S kümesi R halkasındaki işlemlerle birlikte bir halka oluyorsa S kümesine R halkasının bir ***alt halkası*** denir.

Teorem 2.1.17: R bir halka ve $\emptyset \neq S \subseteq R$ olsun. S kümesinin R halkasının bir alt halkası olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır.

i) Her $a, b \in S$ için $a - b \in S$ olmasıdır.
ii) Her $a, b \in S$ için $a.b \in S$ olmasıdır.

Tanım 2.1.18: R bir halka ve I, R nin bir alt halkası olsun. Eğer her $r \in R$ ve her $a \in I$ için $r.a \in I$ ve $a.r \in I$ ise I ya R nin bir *ideali* denir.

Tanım 2.1.19: R ve S iki halka olsun. Eğer $\varphi: R \rightarrow S$ fonksiyonu her $a, b \in R$ için

i) $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$
ii) $\varphi(a.b) = \varphi(a).\varphi(b)$

koşullarını sağlıyorsa φ ye bir *halka homomorfizmi* denir.

Eğer φ bire bir ise φ ye *monomorfizma* denir.
Eğer φ örten ise φ ye *epimorfizma* denir.
Eğer φ bire bir ve örten ise φ ye *izomorfizm* denir.

Tanım 2.1.20: R bir halka olmak üzere eğer her $a \in R$ için $na = 0$ olacak şekilde bir pozitif n tamsayısı varsa bu özelliği sağlayan en küçük pozitif tamsayıya halkanın *karakteristiği* denir. Eğer böyle bir pozitif n tamsayısı yoksa yani her $a \in R$ için $na = 0$ iken $n = 0$ oluyorsa o zaman halkanın karakteristiği sıfırdır denir.

Tanım 2.1.21: *R* bir halka ve $(M, +)$ abelyen bir grup olsun. Eğer her $r \in R$, $m \in M$ için, $f: R \times M \longrightarrow M$, $(r, m) \longrightarrow f(r, m) = r.m$ olarak tanımlanan f fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa, *M* ye *R* halkası üzerinde bir ***sol R-modül*** denir.
Her $r, r_1, r_2 \in R$ ve her $m, m_1, m_2 \in M$ için,

i) $r.(m_1 + m_2) = r.m_1 + r.m_2$
ii) $(r_1 + r_2).m = r_1.m + r_2.m$
iii) $(r_1 r_2).m = r_1.(r_2.m)$

Eğer *R* birimli bir halka ise *f* fonksiyonu her $m \in M$ için,

iv) $1.m = m$

koşulunu sağlıyorsa M ye bir ***üniter sol R-modül*** denir. Aksi belirtilmedikçe sol ***R***-modül denildiği zaman üniter sol ***R***-modül kastedilecektir. ***Sağ R-modül*** de benzer şekilde tanımlanır.

Tanım 2.1.22: *M* bir ***R***-modül olsun. $r_1, r_2, \ldots, r_n \in R$ ve $m_1, m_2, \ldots, m_n \in M$ olmak üzere $r_1 m_1 + r_2 m_2 + \cdots + r_n m_n = 0$ iken $r_1 = r_2 = \cdots = r_n = 0$ oluyorsa *M* kümesinin $\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ alt kümesine *lineer bağımsızdır* denir.

Tanım 2.1.23: *M* bir ***R***-modül ve $B \subset M$ olsun. Her $m \in M$ elemanı $r_1, r_2, \ldots, r_n \in R$ ve $b_1, b_2, \ldots, b_n \in B$ olmak üzere $m = r_1 b_1 + r_2 b_2 + \cdots + r_n b_n$ şeklinde yazılabiliyorsa *B* ye *M* nin ***üreteç kümesidir*** denir.

Tanım 2.1.24: *M* bir ***R***-modül olsun. *M* nin lineer bağımsız bir üreteç kümesi varsa *M* ye ***serbest R-modüldür*** denir.

Tanım 2.1.25: *G* bir çarpımsal grup ve *K* bir halka olsun.

$$KG = \left\{ \sum_{i=1}^{n} k_{g_i} g_i \;\middle|\; k_{g_i} \in K \; ve \; g_i \in G \right\}$$

kümesi

$$\sum_{i=1}^{n} k_{g_i} g_i + \sum_{i=1}^{n} k'_{g_i} g_i = \sum_{i=1}^{n} \left(k_{g_i} + k'_{g_i}\right) g_i$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} k_{g_i} g_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} k'_{h_j} h_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left(k_{g_i} k'_{h_j}\right) g_i h_j$$

toplama ve çarpma işlemleri ile bir halka olur. Bu halka *K* üzerinde *G* nin ***grup halkası*** olarak adlandırılır. *KG* nin değişmeli olması için gerek ve yeter koşul hem *K* hem de *G* nin değişmeli olmasıdır. Eğer *K* birimli ise *KG*, birim elemanı $1_K 1_G$ (veya 1_{KG}) olan birim elemanlı bir halkadır.

Tanım 2.1.26: *KG* bir grup halkası ve *A* toplamsal, değişmeli bir grup olmak üzere eğer $KG \times A \longrightarrow A$ dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa *A* ya bir (*sol*) ***KG*-modül** denir. Her $k, k_1, k_2 \in K$ ve $a, b \in A$ için;

i) $k.(a + b) = k.a + k.b$

ii) $(k_1 + k_2).a = k_1.a + k_2.a$

iii) $(k_1 k_2).a = k_1.(k_2.a)$

Eğer 1_{KG}, *KG* nin birim elemanı ve her $a \in A$ için $1_{KG}.a = a$ ise *A* ya ***üniter KG*-modül** denir.

Tanım 2.1.27: M bir ***R*-**modül ve $\emptyset \neq N \subseteq M$ olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyor ise *N* alt kümesine *M* nin bir ***alt modülü denir***.

i) N, M nin bir alt grubudur.

ii) Her $r \in R$ ve $n \in N$ için $r.n \in N$ dir.

Tanım 2.1.28: M ve N, R halkası üzerinde iki sol R-modül olmak üzere $\varphi : M \longrightarrow N$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa φ dönüşümüne M den N ye bir *sol R-modül homomorfizmi* denir.

i) Her $m_1, m_2 \in M$ için, $\varphi(m_1 + m_2) = \varphi(m_1) + \varphi(m_2)$

ii) Her $m \in M$ ve $r \in R$ için, $\varphi(r.m) = r.\varphi(m)$

Tanım 2.1.29: Bir R değişmeli halkası üzerinde bir *cebir* ya da *R-cebir*, bir bilineer (Her $a, b, c \in A$ ve $r \in R$ için $a(b + c) = ab + ac$, $(a + b)c = ac + bc$ ve $(ra)b = a(rb) = r(ab)$), asosyatif (Her $a, b, c \in A$ için $(ab)c = a(bc)$) ve bir 1 birim elemana (Her $a \in A$ için $1a = a = a1$) sahip çarpma işlemi ile birlikte bir A R-modüldür.

Buna denk olarak, bir R-cebir, her $a, b \in A$ ve $r \in R$ için $(ra)b = a(rb) = r(ab)$ olmak üzere bir R-modül yapısı ile birlikte (birim elemanlı) bir halkadır.

Yukarıda tanımlanan cebirler birim elemanlı, asosyatif cebirlerdir. Benzer şekilde asosyatif ve birim elemanlı olmayan cebirler tanımlanabilir. Fakat çarpma işlemi asosyatif ya da birim elemana sahip olmak zorunda değildir.

Tanım 2.1.30: *R-cebirlerinin bir homomorfizmi*, bir R-modül homomorfizmi ile birlikte bir halka homomorfizmidir.

Eşdeğer olarak, bir $\varphi : A \longrightarrow B$, R-cebir homomorfizmi her $a, b \in A$ ve $r \in R$ için;

i) $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$

ii) $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$

iii) $\varphi(ra) = r\varphi(a)$

iv) $\varphi(1) = 1$

koşullarını sağlayan bir $\varphi: A \longrightarrow B$ dönüşümüdür.

Tanım 2.1.31: Bir A, R-cebirinin bir ***alt cebiri***, hem A nın bir alt halkası hem de A nın bir alt modulü olan A nın bir S alt kümesidir.

Tanım 2.1.32: Bir *derecelendirilmiş R-cebir*, $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ ve her $m, n \geq 0$ için $A_m A_n \subseteq A_{m+n}$ olmak üzere $(A_n)_{n \geq 0}$ alt modülleri ile bir A, R-cebiridir.

Tanım 2.1.33: Bir derecelendirilmiş $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ R-cebirinin bir ***derecelendirilmiş alt modülü*** (*alt halkası*, *alt cebiri*) $S = \bigoplus_{n \geq 0} (A_n \cap S)$ olmak üzere A nın bir S alt modülüdür. (alt halkasıdır, alt cebiridir.)

Tanım 2.1.34: $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ ve $B = \bigoplus_{n \geq 0} B_n$ derecelendirilmiş R-cebirlerinin bir $\varphi: A \longrightarrow B$ homomorfizmi, her $n \geq 0$ için $\varphi(A_n) \subseteq B_n$ olmak üzere ***R-cebirlerinin bir homomorfizmidir***.

Tanım 2.1.35: G bir lineer sıralı yarıgrup olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanırsa bir P, K-cebirinin $\{P^\alpha : \alpha \in G\}$ K-modül ailesine bir *artan filtrasyon* denir.

i) $P = \bigcup_{\alpha \in G} P^\alpha$

ii) $\alpha \leq \beta$ için $P^\alpha \subseteq P^\beta$

iii) $P^\alpha P^\beta \subseteq P^{\alpha+\beta}$

iv) $\bigcap_{\alpha \in G} P^\alpha = \{0\}$

Benzer şekilde *azalan filtrasyon* da tanımlanabilir.

Tanım 2.1.36: A, B ve C üç abelyen grup olsun. $h: A \times B \longrightarrow C$ fonksiyonu

i) Her $a_1, a_2 \in A$ ve $b \in B$ için, $h(a_1 + a_2, b) = h(a_1, b) + h(a_2, b)$

ii) Her $a \in A$ ve $b_1, b_2 \in B$ için, $h(a, b_1 + b_2) = h(a, b_1) + h(a, b_2)$

koşullarını sağlıyorsa *h* fonksiyonuna ***bilineer fonksiyon*** denir.

Tanım 2.1.37: R birimli bir halka, A bir sağ R-modül, B bir sol R-modül ve C bir abelyen grup olsun. Eğer $h: A \times B \longrightarrow C$ fonksiyonu her $r \in R$, $a \in A$, $b \in B$ için,

$$h(ar, b) = h(a, rb)$$

koşulunu sağlıyor ise *h* fonksiyonuna ***dengeli*** (*balanced*) ***fonksiyon*** denir.

Tanım 2.1.38: R birimli bir halka, A, bir sağ R-modül, B bir sol R-modül, $A \otimes_R B$ bir abelyen grup ve $h: A \times B \longrightarrow A \otimes_R B$ bilineer ve dengeli bir fonksiyon olsun. Eğer her *C* abelyen grubu ve her $T: A \times B \longrightarrow C$ bilineer ve dengeli dönüşümü için

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[r, "T"] \arrow[d, "h"'] & C \\
A \otimes_R B \arrow[ur, dashed, "\bar{T}"'] &
\end{tikzcd}$$

diagramı değişmeli olacak şekilde bir tek $\bar{T}: A \otimes_R B \longrightarrow C$ grup homomorfizmi varsa $(A \otimes_R B, h)$ ikilisine (veya kısaca $A \otimes_R B$ grubuna) A ile B nin R üzerinde ***tensör çarpımı*** denir. $h(a, b) = a \otimes b$ olarak yazılır. h çoğu zaman örten değildir. Yani $h(A \times B) \neq A \otimes_R B$ dir. Fakat $\langle h(A \times B) \rangle = A \otimes_R B$ dir. Yani $h(A \times B)$, $A \otimes_R B$ grubunu gerer. $h(A \times B) = \{a \otimes b \mid a \in A, b \in B\}$ olur.

Tanım 2.1.39: L, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. L üzerinde her (x, y) ikilisine $[x, y]$ elemanını karşılık getiren ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir çarpım tanımlanmış olsun.

i) Her $x \in L$ için,

$$[x, x] = 0$$

ii) Her $x, y, z \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ için,

$$[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z]$$

(Bilineerlik Aksiyomu)

$$[x, \alpha y + \beta z] = \alpha[x, y] + \beta[x, z]$$

iii) Her $x, y, z \in L$ için,

$$\big[[x, y], z\big] + \big[[y, z], x\big] + \big[[z, x], y\big] = 0$$ (Jacobi Özdeşliği)

Bu koşulları sağlayan $[x, y]$ çarpımına bir *Lie çarpımı* (*komutatörü*) ve L ye de bu çarpımla bir *Lie cebiri* denir. Eğer L, vektör uzayı olarak sonlu boyutlu ise Lie cebiri olarak da sonlu boyutludur. Ayrıca Jacobi özdeşliğinden dolayı Lie cebirleri birleşmeli değillerdir.

Tanım 2.1.40: M ve N aynı F cismi üzerinde iki Lie cebiri olsun. $\varphi: M \longrightarrow N$ fonksiyonu her $x, y \in M$ için,

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$$

eşitliğini sağlayan bir lineer fonksiyon ise φ ye M den N ye bir *Lie homomorfizmi* denir. Eğer φ, bire bir ve örten bir dönüşüm ise φ ye bir *izomorfizm* denir. Bu durumda M ile N izomorfik cebirlerdir. $\varphi: M \longrightarrow M$ bir izomorfizm ise φ ye bir *otomorfizm* denir.

Tanım 2.1.41: L, bir Lie cebiri ve A da L nin bir alt uzayı olsun. Eğer A, L deki Lie çarpımı altında kapalı ise (yani her $a, b \in A$ için $[a, b] \in A$ ise) A ya L nin bir ***Lie alt cebiri*** denir ve $A \leq L$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.42: L, bir Lie cebiri ve I da L nin bir alt cebiri olsun. Eğer $[I, L] \subseteq I$ koşulu sağlanıyorsa I ya L nin bir ***ideali*** denir ve $I \lhd L$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.43: L, bir Lie cebiri ve $M \lhd L$ olsun. $L/_M$ bölüm cebiri aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$L/_M = \{x + M \mid x \in L\}$$

olmak üzere $L/_M$ içerisinde çarpma ve toplama işlemini;
$x + M, y + M \in L/_M$ için

$$(x + M) + (y + M) = (x + y) + M$$
$$[x + M, y + M] = [x, y] + M$$

olarak tanımlayalım. $L/_M$ bu işlemlerle birlikte bir Lie cebiri olur. Bu cebire L nin M ile ***bölüm cebiri*** denir.

2.2. Seriler

Tanım 2.2.1: $n = 1,2, \ldots$ için L_n terimleri tümevarımla aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$L_1 = L \, , L_{n+1} = [L_n, L]$$

Böylece L nin ideallerinin bir azalan serisi elde edilir.

$$L = L_1 \supseteq L_2 \supseteq \cdots \supseteq L_n \supseteq L_{n+1} \supseteq \cdots$$

Bu seriye L nin ***alt merkezi serisi*** denir.
L nin $L_2 = [L, L]$ alt cebirine ***türetilmiş*** (***komutatör***) ***alt cebir*** denir.
Eğer $L_{k-1} \neq \{0\}$ ve $L_k = \{0\}$ olacak şekilde bir k pozitif tamsayısı varsa L ye ***k-yıncı dereceden nilpotent Lie cebiri*** denir. Eğer L, 2-inci dereceden nilpotent yani $[L, L] = 0$ ise L ye ***abelyen Lie cebiri*** denir.

Tanım 2.2.2: $n = 1,2, \ldots$ için L^n terimleri tümevarımla aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$L^1 = L,\ L^{n+1} = [L^n, L^n]$$

Böylece L nin ideallerinin bir azalan serisi elde edilir.

$$L = L^1 \supseteq L^2 \supseteq \cdots \supseteq L^n \supseteq L^{n+1} \supseteq \cdots$$

Bu seriye L nin ***türetilmiş serisi*** denir.
Eğer $L^{k-1} \neq \{0\}$ ve $L^k = \{0\}$ olacak şekilde bir pozitif k tamsayısı varsa L ye ***k-yıncı dereceden çözülebilir Lie cebiri*** denir.

Tanım 2.2.3: $L \neq \{0\}$ bir Lie cebiri olsun. Eğer L nin sıfırdan farklı çözülebilir idealleri yoksa L ye ***yarı basit*** (***semisimple***) ***Lie cebiri*** denir.

Tanım 2.1.4: L abelyen olmayan bir Lie cebiri olsun. Eğer L nin $\{0\}$ ve kendisinden başka idealleri yoksa L ye ***basit Lie cebiri*** denir.

Tanım 2.2.5: $i = 1,2, \ldots, k, \ldots$ için $n_i \geq 1$ olmak üzere pozitif tamsayıların bir $\{n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\}$ dizisi için L nin polisentral serisi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

L_{n_1}; L nin alt merkezi serisinin n_1-inci terimi

$L_{n_1,\ldots,n_i,n_{i+1}} = \left(L_{n_1,\ldots,n_i}\right)_{n_{i+1}}$, $L_{n_1,\ldots,n_i}$ nin alt merkezi serisinin n_{i+1}-inci terimi

olsun. Böylece elde edilen

$$L \supseteq L_{n_1} \supseteq L_{n_1,n_2} \supseteq \cdots \supseteq L_{n_1,\ldots,n_i} \supseteq L_{n_1,\ldots,n_i,n_{i+1}} \supseteq \cdots$$

serisine *L nin polisentral serisi* denir.

Eğer $L_{n_1,\dots,n_k} = \{0\}$ ve n_i lerin hiçbiri bu eşitlik sağlanacak şekilde daha küçük pozitif tamsayılarla değiştirilemiyor ise L ye $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ dizisine göre *polinilpotent Lie cebiri* denir.

Eğer $n_1 = n_2 = 2$ ve $L_{2,2} = \{0\}$ ise L ye *metabelyen Lie cebiri* denir.

2.3. Serbest Lie cebirleri

Tanım 2.3.1: X herhangi bir küme, F bir Lie cebiri ve $i: X \longrightarrow F$ bir dönüşüm olsun. Her B Lie cebiri ve her $\varphi: X \longrightarrow B$ dönüşümü için $\varphi = \eta i$ olacak şekilde bir tek $\eta: F \longrightarrow B$ Lie homomorfizmi varsa (F, i) çiftine X üzerinde bir *serbest Lie cebiri* denir. Bunu aşağıdaki diyagramla ifade ederiz:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i"'] & B \\ F \arrow[ur, dashed, "n"'] & \end{tikzcd}$$

Bir X kümesi üzerinde bir serbest Lie cebirini aşağıdaki gibi kurarız. Her n pozitif tamsayısı için X_n kümesini,

$$X_1 = X,\ X_2 = X \times X, \dots, X_n = \bigcup_{p=1}^{n-1} \left(X_p \times X_{n-p}\right)$$

şeklinde tanımlayalım. $M(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ olsun. Her $a, b \in M(X)$ için $a \in X_p$, $b \in X_q$ ve $(a, b) \in \left(X_p \times X_q\right)$ olacak şekilde p ile q sayıları vardır. $n = p + q$ olsun. O zaman, $(a, b) \in \left(X_p \times X_{n-p}\right)$ dır. (a, b) nin $X_p \times X_{n-p} \longrightarrow X_n$ kanonik injeksiyonu altındaki görüntüsünü ab ile gösterelim. Böylece, her $a, b \in M(X)$ için (ab) çarpımını tanımlayabiliriz. $a \in X_p$ olacak şekildeki p pozitif tamsayısına ***a nın uzunluğu*** denir ve $l(a)$ ile gösterilir. Bu tanıma göre uzunluğu 1 olan elemanlar X in elemanlarıdır. Uzunluğu ≥ 2 olan elemanlar a ve b nin uzunluğu c den küçük olmak üzere $c = ab$ şeklindedir.

Şimdi F cismi üzerinde $M(X)$ bazı ile bir vektör uzayı kuralım. $M(X)$ deki çarpımı bu vektör uzayınının tümüne lineer olarak genişletelim. Böylece F üzerinde birleşmeli olmayan bir serbest cebir elde etmiş oluruz. Bu cebire $N(X)$ diyelim. $N(X)$ cebiri, $M(X)$ bazı ile birleşmeli olmayan çarpma işlemiyle birlikte bir F-modül olur. $N(X)$ içinde,

$$Q(a) = aa$$

ve

$$J(a, b, c) = \big((ab)c\big) + \big((ca)b\big) + \big((bc)a\big)$$

şeklindeki elemanlar tarafından doğurulan ideal A olsun. Bu durumda, $N(X)/A = F(X)$ bölüm cebiri X üzerinde bir serbest Lie cebiridir. X kümesine, $F(X)$ in bir ***serbest üreteç kümesi*** denir. F nin serbest üreteç kümesinin eleman sayısına ***F nin rankı*** denir. Şimdi serbest Lie cebirlerinde önemli bir yeri olan Hall bazının inşasını inceleyelim:

2.4. Serbest Lie Cebirlerinin Hall Bazları

Daha önce tanımlanan $M(X)$ kümesi birleşmeli olmayan $N(X)$ cebirinin vektör uzayı olarak bazıdır. $M(X)$, $N(X)$ içinde lineer bağımsız olmasına rağmen $F(X)$ içinde lineer bağımsız değildir. Örneğin $a, b \in M(X)$ için ab ve ba formundaki elemanlar $N(X)$ de lineer bağımsız olmakla beraber $F(X)$ de lineer bağımlıdırlar. $(ab) = -(ba)$ dır. Bu nedenle $F(X)$ için $M(X)$ bir baz olamaz. Bu bölümde $F(X)$ i bir vektör uzayı olarak düşündüğümüzde $F(X)$ Lie cebiri için bir baz kümesi oluşturacağız.

$M^n(X)$ ile $M(X)$ içindeki uzunluğu n olan elemanları gösterelim. Açıkça görülür ki $M^1(X) = X$ dir.

Tanım 2.4.1: Bir $H \subseteq M(X)$ Hall kümesi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

i) X ⊆ H ve X e bir keyfi tam sıralama verilmiş olsun.

ii) $H \cap M^2(X)$ kümesi $x, y \in X$ ve $x > y$ olmak üzere (xy) formundaki elemanlardan meydana gelir.

iii) $H \cap M^m(X)$, $m = 1,2,\dots,n-1$ için tanımlanmış ve uzunluğu koruyan bir sıralama verilmiş olsun. Yani $u, v \in M(X)$ ve $l(u) < l(v)$ ise $u < v$ yazalım ve aynı uzunluklu elemanları keyfi olarak sıralayalım. O zaman $n \geq 3$ için $H \cap M^n(X) = \left\{(ab)c \mid a,b,c,ab \in \bigcup_{k=1}^{n-1}\left(H \cap M^k(X)\right), a > b \leq c, ab > c\right\}$ dir.

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(H \cap M^n(X)\right)$$

olsun. Kısalık olması bakımından $H_n = H \cap M^n(X)$ yazarsak $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ kümesi $F(X)$ in bir bazıdır. $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ kümelerine ***Hall kümeleri,*** $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ bazına da $F(X)$ in ***Hall bazı*** denir.

Örnek 2.4.2: $X = \{a, b, c\}$ olsun.

$H_1 = X$ ve kabul edelim ki $a > b > c$ olsun.

$H_2 = \{ab, ac, bc\}$ ve kabul edelim ki $ab > ac > bc$ olsun.

$H_3 = \{(ab)a, (ab)b, (ac)a, (ac)b, (ac)c, (bc)a, (bc)b, (bc)c\}$

ve kabul edelim ki yazıldıkları sırada sıralanmış olsunlar.

$$\begin{aligned} H_4 = \{&((ab)a)a, ((ab)b)a, ((ab)b)b, ((ac)a)a, ((ac)b)a, ((ac)b)b, \\ &((ac)c)a, ((ac)c)b, ((ac)c)c, ((bc)a)a, ((bc)b)a, ((bc)b)b, \\ &((bc)c)a, ((bc)c)b, ((bc)c)c, (ab)(ac), (ab)(bc), (ac)(bc)\} \end{aligned}$$

Eğer X sonlu bir küme ise H_n nin içindeki elemanların sayısını belirlemenin bir metodu vardır. Bunun için öncelikle aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 2.4.3: N pozitif tamsayıların kümesini göstersin. Möbius fonksiyonu $\mu : N \longrightarrow \{-1,0,1\}$ şöyle tanımlanır:

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{Eğer } n \text{ bir asal sayının karesi ile bölünebiliyorsa} \\ 1 & n = 1 \\ (-1)^k & \text{Eğer } n = p_1 p_2 \dots p_k \quad (\, p_i \text{ ler farklı asal sayılar }) \end{cases}$$

Örnek 2.4.4:

$\mu(1) = 1$		
$\mu(2) = (-1)^1 = -1$,	2=2 ,	$k = 1$
$\mu(3) = (-1)^1 = -1$,	3=3 ,	$k = 1$
$\mu(4) = 0$,	$4 = 2^2$,	
$\mu(5) = (-1)^1 = -1$,	5=5 ,	$k = 1$
$\mu(6) = (-1)^2 = 1$,	6=2.3 ,	$k = 2$
$\vdots$		
$\mu(12) = 0$,	$12 = 2^2.3$	
$\vdots$		

Teorem 2.4.5: (Bourbaki, 1975) X bir küme ve $|X| = r$, X in elemanlarının sayısını göstersin. O zaman H, X üzerinde bir Hall kümesi ise H_n içindeki elemanların sayısı $n \geq 1$ için

$$|H_n| = \frac{1}{n} \sum_{\substack{d \\ d|n}} \mu(d).r^{\frac{n}{d}}$$

dir.

Örnek 2.4.6: Kabul edelim ki $|X| = 3$ olsun. O zaman;

$$|H_1| = \frac{1}{1}\mu(1).3^{\frac{1}{1}} = 3$$

$$|H_2| = \frac{1}{2}\left(\mu(1).3^{\frac{2}{1}} + \mu(2).3^{\frac{2}{2}}\right) = 3$$

$$|H_3| = \frac{1}{3}\left(\mu(1).3^{\frac{3}{1}} + \mu(3).3^{\frac{3}{3}}\right) = 8$$

$$|H_4| = \frac{1}{4}\left(\mu(1).3^{\frac{4}{1}} + \mu(2).3^{\frac{4}{2}} + \mu(4).3^{\frac{4}{4}}\right) = 18$$

$$|H_5| = \frac{1}{5}\left(\mu(1).3^{\frac{5}{1}} + \mu(5).3^{\frac{5}{5}}\right) = 48$$

ve genel olarak H_n in eleman sayısı

$$\frac{1}{n}\sum_{\substack{d \\ d|n}} \mu(d).3^{\frac{n}{d}}$$

şeklindedir.

2.5. Bir Serbest Lie Cebirinin Alt Merkezi Serisinin Terimleri İçin Serbest Üreteçler

$m \geq 2$ için K üzerindeki bir serbest Lie cebirinin F_m alt merkezi serisinin terimleri F nin bir alt cebiri gibi sonlu üretilmiş değildir. Tek istisna durum serbest abelyen olan, bir eleman tarafından üretilen serbest Lie cebirleridir. Alt merkezi serilerin terimleri için serbest üreteç kümelerini bulma problemi ilk kez Gruenberg (1957) tarafından grup teorisinde ele alınmıştır. Bir benzer sonuç Witt (1956) tarafından serbest Lie halkaları için ifade edilmiştir. F bir serbest Lie cebiri olmak üzere F_m için serbest üreteç kümeleri Shmel'kin (1963) tarafından verilmiştir. Gruplar ve serbest Lie halkaları için detaylı bilgi Warm (1972) de bulunabilir.

F, K cismi üzerinde bir X serbest üreteç kümesi tarafından üretilen serbest Lie cebiri olsun. H, X üzerinde kurulmuş F için bir Hall bazı ve H_n de uzunluğu n olan H daki elemanların kümesini göstersin. F_m, F nin m-inci alt merkezi serisinin terimi olsun.

Teorem 2.5.1: (Shmel'kin, 1963) C_m kümesini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$C_m = \{x = a_1a_2 \,|a_1, a_2 \in H, l(x) \geq m, x \in H, l(a_2) < m\}$$

C_m, F_m için bir serbest üreteç kümesidir.

H nin tanımı kullanılarak C_m kümesi aşağıdaki gibi daha açık bir şekilde ifade edilebilir.

$$C_m = \Big\{x = \Big(\dots\big((a_1a_2)a_3\big)\dots a_r\Big): l(x) \geq m, a_i \in \textstyle\bigcup_{k=1}^{m-1} H_k\,,$$
$$a_1 > a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_r, r \geq 2, eğer\; a_r = b_1b_2 \; ise \; a_{r-1} \leq b_1\Big\}$$

C_m nin elemanlarını oluşturarak F_m Lie cebiri için C_m serbest üreteçleri üzerinde bir H^{C_m} Hall bazı yapısını kurarız. Eğer h, C_m formundaki elemanların bir kelimesi ise h nin C_m-$l(h)$ ve X-$l(h)$ ile sırasıyla C_m ve X den kullanılan harflerin sayısını gösterelim. C_m, H nin bir alt kümesi olduğundan C_m ye H deki ile aynı olan sıralama verilebilir.

$$H_1^{C_m} = C_m$$
$$H_2^{C_m} = \{a_1a_2 | a_1, a_2 \in C_m, a_1 \geq a_2\}$$

Şimdi $H_2^{C_m}$ ye aşağıdaki gibi bir sıralama veririz: $h, g \in H_2^{C_m}$, $h = h_1h_2$ ve $g = g_1g_2$, $h_1, h_2, g_1, g_2 \in C_m$ olsun. Eğer $X - l(h) < X - l(g)$ ise $h < g$ yazalım. h ve g nin aynı uzunlukta olduğunu kabul edelim. O zaman $h < g \Leftrightarrow h_1 < g_1$ veya $h_1 = g_1$ ise $h_2 < g_2$ dir.

$H_1^{C_m}, \dots, H_{n-1}^{C_m}$ tanımlanmış ve sıralanmış olsun.

$$H_n^{C_m} = \{x = (a_1a_2)a_3 : C_m - l(x) = n, a_1 > a_2 \leq a_3, a_1a_2 > a_3,$$
$$a_1, a_2, a_3, (a_1a_2) \in \textstyle\bigcup_{i=1}^{n-1} H_i^{C_m}\}$$

Burada eşitsizliğin yönü için $\bigcup_{i=1}^{n-1} H_i^{C_m}$ deki sıralama göz önüne alınır. Bu sıralamayı $H^{C_m} = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i^{C_m}$ olarak tanımlanan H^{C_m} ye genişletebiliriz.

H^{C_m} nin sıralaması H nin sıralaması ile uyumlu olmak zorunda değildir. $H_1^{C_m} = C_m$ nin bir elemanından X-uzunluğu daha küçük olan $H_2^{C_m}$ de elemanlar vardır.

2.6. Serbest Lie Cebirlerinin Otomorfizmleri

L, F cismi üzerinde X serbest üreteç kümesi tarafından üretilen serbest Lie cebiri olsun. L nin herhangi bir α otomorfizmi X kümesini başka bir X_α serbest üreteç kümesine dönüştürür ve α tamamen onun X üzerindeki etkisiyle belirlenir. Aksine, L nin bir serbest üreteç kümesinden başka bir serbest üreteç kümesine herhangi bir bire bir ve örten dönüşüm L nin bir tek otomorfizmini tanımlar. Bu otomorfizmleri tanımlamak için aşağıdaki gibi L de *elemanter Lie dönüşümleri* tanımlanır:

Eğer U, L nin herhangi bir alt kümesi ise o zaman

i) U nun elemanlarına uygulanan singüler olmayan lineer dönüşümler,

ii) Bir $u \in U$ için $u \longrightarrow u + f(u_1, \dots, u_n)$, $u_1, \dots, u_n \in U \setminus \{u\}$

şeklinde tanımlanan dönüşümlerdir.

L nin bir serbest üreteç kümesine uygulanan herhangi bir elemanter Lie dönüşümü bir otomorfizm belirler. Şimdi ise L nin sonlu ranklı olması durumunda herhangi bir otomorfizmin bir dizi böyle adımdan sonra elde edilebileceğini gösteren teoremi ifade edelim.

Teorem 2.6.1: L, F cismi üzerinde bir sonlu X serbest üreteç kümesi tarafından üretilen serbest Lie cebiri olsun. O zaman L nin her otomorfizmi X kümesine bir dizi elemanter Lie dönüşümü uygulayarak elde edilebilir.

Bu teoremin ispatı (Cohn, 1964) de bulunabilir.

Sonuç 2.6.2: L, F cismi üzerinde $\{x, y\}$ üreteçleri tarafından üretilen bir serbest Lie cebiri olsun. L nin herhangi bir otomorfizmi x ve y nin bir lineer dönüşümü ile belirlenir.

Yani $\varphi: L \longrightarrow L$ otomorfizmi, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in F$ ve $\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$ olmak üzere

$$\varphi(x) = \alpha x + \beta y$$
$$\varphi(y) = \gamma x + \delta y$$

şeklindedir.

Teorem 2.6.3: L, F cismi üzerinde bir X serbest üreteç kümesi tarafından üretilen serbest Lie cebiri olsun. Eğer, Y, L nin herhangi bir sonlu alt kümesi ise o zaman Y, L nin bir serbest alt kümesine denktir.

Bu teoremin ispatı (Cohn, 1964) de bulunabilir. Teoremdeki denkliğin anlamı; Y nin elemanter Lie dönüşümler ile bir sonlu kümeden elde edilebilir olmasıdır. Bu teoremin bir sonucu olarak; bir Y serbest üreteç kümesinin X kümesine denk olduğu söylenebilir.

2.7. Serbest Üreteç Kümelerinin Değişimi

$L = L(X)$, X serbest üreteç kümesi tarafından üretilen serbest Lie cebiri olsun. Kabul edelim ki $L(\leq z)$ ve $L(< z)$ sırasıyla $x \leq z$ ve $x < z$ olan tüm $x \in X$ elemanları tarafından üretilen L nin Lie alt cebirleri olsun. Bir serbest Lie cebrinin bir serbest üreteç kümesini başka bir serbest üreteç kümesi ile değiştirmek için kabul edelim ki X kümesi her i için $x_{i,1} < x_{i,2} < \cdots < x_{i,k_i}$ ve $x_{i,k_i} < x_{i+1,1}$ olmak üzere

$X_i = \{x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,k_i}\}$ kümelerinin bir $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4 \cup$ ...ayrık birleşimine parçalanmış olsun. Her i için ϕ_i, serbest $\langle X_i \rangle$ K-modülünün herhangi bir otomorfizmi olsun. Ayrıca, $\phi: X \longrightarrow L(X)$ dönüşümü; $w_{i,j} \in L(< x_{i,1})$ olmak üzere

$$\phi(x_{i,j}) = \phi_i(x_{i,j}) + w_{i,j} \tag{2.1}$$

olarak tanımlanmış olsun. L, X üzerinde serbest olduğu için ϕ, L serbest Lie cebirinin bir Φ endomorfizmini belirler. Aslında bu endomorfizm bir otomorfizmdir. Her i için $x_{i,j} \longrightarrow \phi_i(x_{i,j}) + w_{i,j}$ ve $k \neq i$ için $x_{k,l} \longmapsto x_{k,l}$ ile tanımlı $X \longrightarrow L(X)$ dönüşümü L serbest Lie cebirinin bir Ψ_i otomorfizmini belirler. Dikkat edelim ki her i için Φ dönüşümünün $L(\leq x_{i,k_i})$ alt cebirine kısıtlanmışı $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_i$ otomorfizmlerinin bir bileşkesidir. Sonuç olarak, tüm bu kısıtlamalar bire bir ve örtendir ve bu Φ nin kendisinin bire bir ve örten olmasını gerektirir. Bundan dolay Φ bir otomorfizmdir. Buradan X in ϕ altındaki görüntüsü $L(X)$ serbest Lie cebirinin bir serbest üreteç kümesidir. Bu durum şöyle ifade edilir.

Lemma 2.7.1: (Bryant, R. M., Kovács, L. G., Stöhr, R., 2002b) Eğer $\phi: X \longrightarrow L(X)$, (2.1) biçiminde bir dönüşüm ise o zaman $\phi(X)$, $L(X)$ serbest Lie cebirinin bir serbest üreteç kümesidir.

3. ELİMİNASYONLA PARÇALANIŞ

X kardinalitesi en az 2 olan sayılabilir bir küme ve $L = L(X)$ birimli ve değişmeli bir K halkası üzerinde X serbest üreteç kümesi tarafından üretilen serbest Lie cebiri olsun.

Teorem 3.1.1:(Eliminasyon Teoremi) Y ve Z, X in öz alt kümeleri olmak üzere $X = Y \cup Z$ nin ayrık birleşimi olsun. O zaman

$$Z \wr Y = \{[z, y_1, y_2, \dots, y_k]: z \in Z, y_i \in Y, k \geq 0\}$$

olmak üzere

$$L(X) = L(Y \cup Z) = L(Y) \oplus L(Z \wr Y)$$

dir.

$Z \wr Y$ kümesine Y ve Z nin *wreath kümesi* denir. Amacımız bu teoremi tekrar tekrar uygulamaktır. Yani önce $L(X)$ e sonra $L(Z \wr Y)$ ye ve daha sonra önceki eliminasyondan elde edilen wreath kümesi üzerinde serbest Lie cebirine ve böyle devam ederek K üzerinde $L(X)$ in parçalanışlarını elde etmektir.

Tanım 3.1.2: $\{E_i\}_{i\geq 1}$ ve $\{\hat{E}_i\}_{i\geq 0}$ aşağıdaki koşulları sağlayan $L(X)$ serbest Lie cebirinin boş olmayan alt kümelerinin dizileri olsun.

i) $\hat{E}_0 = X$

ii) Her $i > 0$ için E_i kümesi $\hat{E}_{i-1}$ kümesinin bir öz alt kümesidir ve $\hat{E}_i = \left(\hat{E}_{i-1} \setminus E_i\right) \wr E_i$ dir.

O zaman $\{E_i\}_{i\geq 1}$ dizisi $L(X)$ in bir *eliminasyon dizisi* olarak ve $\{\hat{E}_i\}_{i\geq 0}$ dizisi de onun ilgili *wreath dizisi* olarak adlandırılır.

$\{\hat{E}_i\}_{i\geq 0}$ ilgili wreath dizisi $\hat{E}_0$ ilk terimi ve $\{E_i\}_{i\geq 1}$ eliminasyon dizisi tarafından tek bir şekilde tanımlanır. Bir wreath kümesinin tanımından E_i ve $\hat{E}_i$ nın tüm elemanları X de Lie monomialleridir ve bundan dolayı X e göre iyi tanımlı bir dereceye sahiptirler.

Lemma 3.1.3: $\{E_i\}_{i\geq 1}$, $\{\hat{E}_i\}_{i\geq 0}$ ilgili wreath dizisi ile $L(X)$ in bir eliminasyon dizisi olsun. O zaman her $k \geq 1$ için bir serbest *K*-modül olarak $L(X)$ in bir

$$L(X) = L(E_1) \oplus L(E_2) \oplus \dots \oplus L(E_k) \oplus L(\hat{E}_k) \tag{3.5}$$

direkt parçalanışı vardır.

İspat: İspatı *k* üzerinden tümevarım ile yapalım:

$k = 1$ için $L(X) = L(E_1) \oplus L(\hat{E}_1)$ dır. Eliminasyon teoreminde $Y = E_1$ ve $Z = X \setminus E_1$ alınırsa $Z \wr Y = (X \setminus E_1) \wr E_1 = \hat{E}_1$ olduğundan

$$L(X) = L(Y) \oplus L(Z \wr Y) = L(E_1) \oplus L(\hat{E}_1)$$

eşitliği elde edilir.

k için iddia doğru olsun. O halde

$$L(X) = L(E_1) \oplus L(E_2) \oplus \dots \oplus L(E_k) \oplus L(\hat{E}_k)$$

dır.

$\hat{E}_{k+1} = (\hat{E}_k \setminus E_{k+1}) \wr E_{k+1}$ ve E_{k+1}, $\hat{E}_k$ nın öz alt kümesi olduğundan dolayı $\hat{E}_k$ kümesine eliminasyon teoremini uygularsak

$$L(\hat{E}_k) = L(E_{k+1}) \oplus L((\hat{E}_k \setminus E_{k+1}) \wr E_{k+1}) = L(E_{k+1}) \oplus L(\hat{E}_{k+1})$$

dir. O halde

$$L(X) = L(E_1) \oplus L(E_2) \oplus \dots \oplus L(E_k) \oplus L(\hat{E}_k)$$
$$= L(E_1) \oplus L(E_2) \oplus \dots \oplus L(E_k) \oplus L(E_{k+1}) \oplus L(\hat{E}_{k+1})$$

elde edilir. Böylece $k + 1$ için iddianın doğru olduğu sonucu elde edilir.

Tanım 3.1.4: Eğer

$$L(X) = \bigoplus_{i \geq 1} L(E_i) \qquad (3.6)$$

ise $L(X)$ in bir $\{E_i\}_{i\geq 1}$ eliminasyon dizisi *yakınsak* olarak adlandırılır.

Şimdi bir eliminasyon dizisinin yakınsaklığı için bazı koşullar elde edeceğiz. Bu koşullar $L(X)$ de derece fikrine dayanır. X in elemanlarının 1 den farklı derecelerle gösterildiği durumlar için onları ifade etmek uygun olacaktır. Yani X kümesi $\alpha \in I$ olmak üzere X_α alt kümelerinin $X = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$ ayrık birleşimi olarak bir ayrık parçalanışa sahip ise X e bir ***derecelendirilmiş küme*** denir. Burada $n(\alpha)$ bir doğal sayı olmak üzere her X_α alt kümesinin elemanlarının derecesi $n(\alpha)$ dır. Eğer her $n \geq 1$ için en çok sonlu sayıda $\alpha \in I$ için $n(\alpha) = n$ ise X e ***sonlu derecelendirilmiş*** denir. $L(X)$ in ***n***-inci L_n homojen bileşeni

$$degw_1 + degw_2 + \cdots + degw_k = n$$

olmak üzere $w_i \in L(X)$ için $[w_1, w_2, \dots, w_k]$ şeklindeki tüm Lie çarpımları tarafından gerilir ve $L(X) = \bigoplus_{n\geq 1} L_n$ dir. $L(X)$ de homojen elemanların bir B kümesi için $\delta(B)$ en küçük doğal sayıyı göstersin öyle ki B kümesi $\delta(B)$ dereceli bir eleman içerir. Eğer B nin tüm elemanları aynı dereceye sahip ise tüm bu elemanların ortak derecesi ***degB*** ile gösterilir.

$\hat{E}_i = (\hat{E}_{i-1} \setminus E_i) \wr E_i$ kümesinin tanımından $\{E_i\}_{i\geq 1}$ eliminasyon dizisi için $\{\delta(\hat{E}_i)\}_{i\geq 0}$ dizisi azalmayandır. Gerçekten; $\hat{E}_{i+1} = (\hat{E}_i \setminus E_{i+1}) \wr E_{i+1}$ kümesi $\hat{E}_i \setminus E_{i+1}$ kümesinin elemanları ve daha yüksek dereceli elemanlardan oluşur.

Dolayısıyla $\delta(\hat{E}_{i+1}) \geq \delta(\hat{E}_i \setminus E_{i+1})$ dir. Ayrıca $\delta(\hat{E}_i \setminus E_{i+1}) \geq \delta(\hat{E}_i)$ olduğundan $\delta(\hat{E}_{i+1}) \geq \delta(\hat{E}_i)$ dir. O halde $\{\delta(\hat{E}_i)\}_{i\geq 0}$ dizisinin azalmayan olduğu sonucu elde edilir.

Lemma 3.1.5: $X = \bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha$ derecelendirilmiş bir küme ve $\{E_i\}_{i\geq 1}$ dizisi $\{\hat{E}_i\}_{i\geq 0}$ ilgili wreath dizisi ile $L(X)$ in bir eliminasyon dizisi olsun. Eğer

$$\lim_{i\to\infty} \delta(\hat{E}_i) = \infty$$

ise $\{E_i\}_{i\geq 1}$ yakınsaktır.

İspat: Kabul edelim ki $\lim_{i\to\infty} \delta(\hat{E}_i) = \infty$ olsun. $L(X)$ homojen bileşenlerin direkt toplamı olduğu için her $n \geq 1$ için L_n homojen bileşeninin $\bigoplus_{i\geq 1} L(E_i)$ de içerildiğini göstermek yeterlidir. Limit koşulundan $\hat{E}_k$ tamamen derecesi *n* den büyük olan elemanlardan meydana gelecek şekilde bir $k \geq 1$ vardır. Böylece $L(\hat{E}_k) \subseteq \bigoplus_{i>n} L_i$ dir. Fakat bu durumda (3.5) den L_n, $\bigoplus_{i=1}^{k} L(E_i)$ de içerilir. Bu yüzden $L_n \subseteq \bigoplus_{i\geq 1} L(E_i)$ dir.

Burada yakınsaklık için başka bir yeterli koşul elde etmek için lemmayı kullanacağız. Kabul edelim ki $X = \bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha$ bir derecelendirilmiş küme ve $\beta \in I$ olsun. O zaman $(X \setminus X_\beta) \wr X_\beta$ wreath kümesi $\alpha \in I \setminus \{\beta\}$, $k \geq 0$ olmak üzere

$$X_{\alpha,k} = [X_\alpha, \underbrace{X_\beta, \dots, X_\beta}_{k\ tane}] = \{[u, v_1, \dots, v_k] : u \in X_\alpha, v_i \in X_\beta\}$$

homojen kümelerinin ayrık birleşimi olarak bir ayrık parçalanışa sahiptir. Bu parçalanış $(X \setminus X_\beta) \wr X_\beta$ wreath kümesinin ***doğal derecelendirmesi*** olarak adlandırılır. $X_{\alpha,k}$ kümelerine doğal derecelendirmenin ***bileşenleri*** denir. Eğer bir $\beta \in I$ için $E_1 = X_\beta$ ve $i > 1$ için her E_i kümesi $\hat{E}_{i-1} = (\hat{E}_{i-2} \setminus E_{i-1}) \wr E_{i-1}$ wreath kümesinin doğal derecelendirmesinin bir bileşeni ise $L(X)$ in $\{E_i\}_{i\geq 1}$ eliminasyon dizisine ***doğal*** denir. Eğer her E_i mümkün olan en küçük dereceli (yani degE_i= $\delta\left(\hat{E}_{i-1}\right)$) bir küme ise bir doğal eliminasyon dizisine ***düzenli*** denir.

Örnek 3.1.6: $degY_i = i$ olmak üzere $Y = Y_2 \cup Y_3 \cup Y_4 \cup$ ... olsun. $L(Y)$ nin bir düzenli $\{E_i\}_{i\geq 1}$ eliminasyon dizisini elde etmek için önce $E_1 = Y_2$ alalım. Y_2, $\hat{E}_0 = Y$ nin (doğal) derecelendirmesinde en küçük dereceli kümedir. O zaman

$$\hat{E}_1 = \{Y_3, Y_4, Y_5, [Y_3, Y_2], Y_6, [Y_4, Y_2], Y_7, [Y_5, Y_2], [Y_3, Y_2, Y_2], \dots\}$$

elde edilir. Düzenlilik koşulu $E_2 = Y_3$ olmasını gerektirir. Y_3, $\hat{E}_1$ nın doğal derecelendirmesinde en küçük dereceli bileşendir. O zaman

$$\hat{E}_2 = \{Y_4, Y_5, [Y_3, Y_2], Y_6, [Y_4, Y_2], Y_7, [Y_5, Y_2], [Y_3, Y_2, Y_2], [Y_4, Y_3], \dots,$$
$$Y_{10}, [Y_8, Y_2], [Y_6, Y_2, Y_2], [Y_4, Y_2, Y_2, Y_2], [Y_7, Y_3], [Y_5, Y_2, Y_3], [Y_3, Y_2, Y_2, Y_3], \dots\}$$

şeklindedir. Buradan $E_3 = Y_4$ dür. Fakat sonra $\hat{E}_3$ minimal dereceli iki bileşen içerdiği için (yani Y_5 ve $[Y_3, Y_2]$) farklı seçimler olacaktır. Farklı seçimler farklı eliminasyon dizilerine yol açacaktır. Derecesi 8 e kadar olan eliminasyon dizisinin ilk terimleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{gathered} Y_2\,, Y_3\,, Y_4\,, Y_5\,, [Y_3, Y_2]\,, Y_6\,, [Y_4, Y_2], Y_7\,, [Y_5, Y_2]\,, [Y_3, Y_2, Y_2]\,, \\ [Y_4, Y_3], Y_8, [Y_6, Y_2], [Y_4, Y_2, Y_2], [Y_5, Y_3], [Y_3, Y_2, Y_3] \end{gathered} \tag{3.7}$$

Bu kümeler seçim yaptığımız sıralamaya bağlı değildir. Fakat sıralama daha yüksek derecelerde bir önemli etkiye sahiptir. Örneğin; eğer $Y_5 > [Y_3, Y_2]$ alınırsa derecesi 20 olan $[Y_5, [Y_3, Y_2], [Y_3, Y_2], Y_5]$ kümesi elde edilir. Fakat bu küme aksi bir seçim yapılırsa elde edilemeyecektir.

Lemma 3.1.7: $X = \bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha$ bir sonlu derecelendirilmiş küme olsun. O zaman $L(X)$ in her düzenli eliminasyon dizisi yakınsaktır.

İspat: $\{E_i\}_{i\geq 1}$, $L(X)$ in bir düzenli eliminasyon dizisi ve $\hat{E}_i = \bigcup_{\alpha\in I_i} U_\alpha$, $\hat{E}_i$ nın bir doğal derecelendirmesi olsun. X sonlu derecelendirilmiş bir küme olduğundan dolayı her $i \geq 1$ ve her $n \geq 1$ için en çok sonlu sayıda $\alpha \in I_i$ vardır öyle ki $degU_\alpha = n$ dir. Kabul edelim ki $\alpha \in J_i$ için U_α minimal dereceli olmak üzere J_i kümesi I_i kümesinin alt kümesi olsun. Yani $degU_\alpha = \delta(\hat{E}_i)$ olsun. O zaman eliminasyon dizisindeki düzenlilik koşulu bir $\beta \in J_i$ için $E_{i+1} = U_\beta$ olmasını gerektirir. Fakat bu durumda $\hat{E}_{i+1}$ kümesi $\alpha \in (J_i \setminus \beta)$ olmak üzere U_α kümelerinden ve daha yüksek dereceli kümelerden oluşur. Özellikle, $\hat{E}_{i+1}$ kümesinin doğal derecelendirmesinde $\delta(\hat{E}_i)$ dereceli kümelerin sayısı $\hat{E}_i$ kümesinin doğal derecelendirmesindeki $\delta(\hat{E}_i)$ dereceli kümelerin sayısından daha küçüktür. Bundan dolayı bir $j > i$ için $\hat{E}_j$ kümesinin doğal derecelendirmesinde $\delta(\hat{E}_i)$ dereceli kümeler bulunamaz. $\{\delta(\hat{E}_i)\}_{i\geq 1}$ dizisi azalmayan olduğu için $\delta(\hat{E}_j) > \delta(\hat{E}_i)$ olduğu sonucu elde edilir. Fakat bu eliminasyon dizisinin Lemma 3.1.5 in koşulunu sağladığı anlamına gelir. Dolayısıyla eliminasyon dizisi yakınsaktır.

Yakınsak eliminasyon dizileri $L(X)$ serbest Lie cebirinin homojen K-bazlarını inşa etmek için kullanılabilir. Böyle bir uygulamanın en açık örneği her bir E_i terimi bir tek elemanlı (bir $w_i \in L(X)$ için $E_i = \{w_i\}$) olduğu durumda yakınsak $\{E_i\}_{i\geq 1}$ eliminasyon dizilerinden elde edilir. Bu durumda (3.6) nın sağ tarafındaki direkt bileşenlerin her biri rankı 1 ($L(E_i) = \langle w_i \rangle$) olan bir serbest Lie cebiridir. Ayrıca (3.6) nın sağ tarafı rankı 1 olan $\langle w_i \rangle$ ($i = 1,2,3,\ldots$) alt modüllerinin bir direkt toplamı olarak $L(X)$ in bir parçalanışıdır. Diğer bir değişle $\{w_i : i \geq 1\}$ kümesi $L(X)$ in bir K-bazıdır. Eğer Lemma 3.1.5 deki X in derecelendirmesinde her X_α bir tek elemanlı ise ($X_\alpha = \{x_\alpha\}$) o zaman $\hat{E}_i$ wreath kümelerinin doğal derecelendirmelerindeki tüm kümeler tek elemanlıdırlar. Sonuç olarak tüm E_i eliminasyon kümeleri tek elemanlıdırlar. Bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.8: $X = \bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha$ bir sonlu dercelendirilmiş küme ve her X_α bir tek elemanlı olsun. O zaman her düzenli $\{E_i\}_{i\geq 1}$ eliminasyon dizisinde E_i eliminasyon kümeleri tek elemanlıdırlar. $w_i \in L(X)$ olmak üzere $E_i = \{w_i\}$ ve $\{w_i : i = 1,2,3,\ldots\}$ kümesi $L(X)$ in bir K-bazıdır.

Sonuç 3.1.9: X bir derecelendirilmiş küme olsun öyle ki her $n \geq 1$ için X de derecesi n olan en çok sonlu sayıda eleman vardır. Ayrıca $\{E_i\}_{i\geq 1}$ bir eliminasyon dizisi olsun öyle ki her bir E_i, $\hat{E}_{i-1}$ da mümkün olan en küçük dereceli bir tek w_i elemanından meydana gelsin. O zaman $\{E_i\}_{i\geq 1}$ yakınsaktır ve $\{w_i : i = 1,2,3,\ldots\}$ kümesi $L(X)$ in bir K-bazıdır.

İspat: X kümesini $X = \bigcup_{x\in X}\{x\}$ şeklinde sonlu derecelendirilmiş bir küme olarak yazalım. O zaman sonuçtaki koşulu sağlayan herhangi bir eliminasyon dizisi bu derecelendirmeye göre düzenli olacaktır. Bundan dolayı yakınsaktır.

Sonuç 3.1.9, X sonlu bir küme ve X in tüm elemanlarının derecesi 1 olduğu standart durumu içerir. Bu durumda eğer $\{E_i\}_{i\geq 1}$ Sonuç 3.1.9 daki gibi bir eliminasyon dizisi ise o zaman $\{w_1, w_2, w_3, \ldots\}$ K-bazının tam olarak bir klasik Hall bazı olduğu gösterilebilir.

Temel Hall monomialleri tümevarımla tanımlanır ve baz elemanlarının bir sıralamasına bağlıdır.

Bir Hall bazını elde etmek için yukarıdaki gibi bir eliminasyon dizisi kullanıldığı zaman bu sıralama sadece w_i elemanlarını elimine eden $w_1 < w_2 < w_3 < \cdots$ şeklinde bir sıralamadır.

Daha sonra bir düzenli eliminasyon dizisinde E_i kümelerinin bir başka tanımı verilecektir.

Son olarak $L(X)$ serbest Lie cebirinin alt kümelerinin bir sınıfını tanımlayalım.

Tanım 3.1.10: $X = \bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha$ bir derecelendirilmiş küme olsun. $L(X)$ in bir *baz küme koleksiyonu* $L(X)$ serbest Lie cebirinin alt kümelerinin bir tam sıralı $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$ kümesidir. Bu alt kümelere ***B*-kümeler** denir ve aşağıdaki gibi tümevarımla tanımlanır. Minimal dereceli B-kümeler bir keyfi şekilde sıralanmış X deki minimal dereceli X_α kümeleridir. Şimdi kabul edelim ki derecesi n den küçük olan B-kümeler tanımlanmış ve sıralanmış olsun öyle ki sıralama dereceye göre olsun.

O zaman derecesi n olan B-kümeler $degX_\alpha = n$ olmak üzere X_α kümeleridir ve

i) $degU + degV = n$ olmak üzere U ve V, B-kümelerdir.

ii) $U > V$

iii) Eğer U_1, U_2 B-kümeleri için $U = [U_1, U_2]$ ise o zaman $V \geq U_2$ dir.

koşullarını sağlayan $[U, V] = \{[u, v]: u \in U, v \in V\}$ kümeleridir.

O zaman derecesi n olan kümeler keyfi bir şekilde sıralanır ve derecesi n den daha küçük olan B-kümelerinden daha büyük olarak ifade edilir.

Derecesi n olan tüm B-kümelerinin kümesi $\mathcal{B}_n$ ve tüm B-baz kümelerinin kümesi de $\mathcal{B}(X)$ ya da $\mathcal{B}$ ile gösterilir.

Eğer X sonlu derecelendirilmiş bir küme ise o zaman her $\mathcal{B}_n$ sonlu çoklukta kümelerden oluşur ve bundan dolayı kabul edebiliriz ki $\mathcal{B}$ nin sıralaması $\aleph_0$ şekline sahiptir: $E_1 < E_2 < E_3 < \cdots$ olmak üzere $\mathcal{B} = \{E_1, E_2, E_3, \ldots\}$ dir.

Örnek 3.1.11: Kabul edelim ki $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4 \cup X_5 \cup X_6 \cup X_7$ ve $degX_1 = 1$, $degX_2 = 1$, $degX_3 = 2$, $degX_4 = 2$, $degX_5 = 2$, $degX_6 = 3$, $degX_7 = 3$ olsun. Bu durumda B-kümelerini oluşturalım. $X_1 < X_2 < X_3 < X_4 < X_5 < X_6 < X_7$ keyfi sıralamasını verelim. X de derecesi en küçük olan küme X_1 olduğundan $E_1 = X_1$ olur.

Derecesi:

1	$E_1 = X_1$
1	$E_2 = X_2$
2	$E_3 = X_3$
2	$E_4 = X_4$
2	$E_5 = X_5$
2	$E_6 = [X_2, X_1] = [E_2, E_1]$
3	$E_7 = X_6$

3	$E_8 = X_7$
3	$E_9 = [X_3, X_1] = [E_3, E_1]$
3	$E_{10} = [X_3, X_2] = [E_3, E_2]$
3	$E_{11} = [X_4, X_1] = [E_4, E_1]$
3	$E_{12} = [X_4, X_2] = [E_4, E_2]$
3	$E_{13} = [X_5, X_1] = [E_5, E_1]$
3	$E_{14} = [X_5, X_2] = [E_5, E_2]$
3	$E_{15} = \big[[X_2, X_1], X_1\big] = \big[[E_2, E_1], E_1\big] = [E_6, E_1]$
3	$E_{16} = \big[[X_2, X_1], X_2\big] = \big[[E_2, E_1], E_2\big] = [E_6, E_2]$
4	$E_{17} = [X_4, X_3] = [E_4, E_3]$
4	$E_{18} = [X_5, X_3] = [E_5, E_3]$
4	$E_{19} = [X_5, X_4] = [E_5, E_4]$
$\vdots$	

Teorem 3.1.12: $X = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$ bir sonlu derecelendirilmiş küme ve $\mathcal{B} = \{E_1, E_2, E_3, \dots\}$, $L(X)$ in bir baz küme koleksiyonu olsun. O zaman $\{E_i\}_{i \geq 1}$, $L(X)$ in bir düzenli eliminasyon dizisidir. Özellikle, bir serbest K-modül olarak $L(X)$ in bir

$$L(X) = \bigoplus_{i \geq 1} L(E_i) = \bigoplus_{n \geq 1} \bigoplus_{U \in \mathcal{B}_n} L(U)$$

direkt parçalanışı vardır.

İspat: Tanımdan minimal dereceli X_α kümelerinden biri olan E_1 kümesi bir düzenli eliminasyon dizisinin ilk terimidir. Bundan dolayı teoremi ispatlamak için $i > 1$ olmak üzere her E_i kümesinin $\widehat{E}_{i-1}$ wreath kümesinin doğal derecelendirmesinde minimal dereceli bir bileşen olduğunu göstermeliyiz. Göz önünde bulundurulacak iki durum vardır. Eğer bir $\alpha \in I$ için $E_i = X_\alpha$ ise o zaman X_α, $\widehat{E}_{i-1}$ nın bir bileşenidir. Ayrıca tümevarım hipotezinden $\{E_j\}_{j<i}$ bir eliminasyon dizisinin ilk kısmı olduğundan ve bu yüzden $m < degE_i$ olmak üzere E_j nin gereni tüm homojen L_m

bileşenlerini içerdiği için E_i, $\hat{E}_{i-1}$ da minimal dereceli bileşen olmak zorundadır. Böylece $\hat{E}_{i-1}$ kümesi degE_i den daha az dereceli elemanları içeremez. Diğer taraftan eğer U ve V, B-kümeleri için $E_i = [U, V]$ ise o zaman Tanım 3.1.10 dan dolayı bir $k < l < i$ için $E_i = [E_l, E_k, \dots, E_k]$ dır. Fakat o zaman E_i , $\hat{E}_k$ nın bir bileşenidir. Bu yüzden $\hat{E}_{i-1}$ ya kadar olan wreath dizisinin tüm sonraki terimlerinin bileşenidir. Aslında $\{E_j\}_{j<i}$ bir eliminasyon dizisinin ilk kısmı olduğu için E_i, i-inci adımdan daha önceki bir adımda yok edilemez. Çünkü aksi halde E_i kümesi $E_i < E_i$ çelişkisine yol açan B-kümelerinin dizisinde daha önce gözükecektir. Ayrıca $E_i = X_\alpha$ durumunda kullanılan aynı fikir ile E_i, $\hat{E}_{i-1}$ da minimal dereceli olmak zorundadır.

Bu teoremin önemli bir sonucu şudur :
$[U, V]$ biçimindeki her B-kümesinin gereni bir serbest K-modül olarak $\langle U\rangle \otimes \langle V\rangle$ tensör çarpımına izomofiktir. Bu gerektirir ki $\mathcal{B}_n$ deki her baz kümesinin gereni $\langle X_\alpha\rangle$ $(\alpha \in I)$ tensör çarpanları ile bir tensör çarpıma izomorfiktir. Sonuç 3.1.8 den dolayı sırasıyla $t_1, t_2, \dots, t_q$ katlılıkları ile $X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}, \dots, X_{\alpha_q}$ baz kümelerinin bir verilmiş kümesini içeren B-baz kümelerinin sayısı $t_1, t_2, \dots, t_q$ katlılıkları ile $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_q}$ elemanlarını içeren tüm Lie çarpımları tarafından gerilen $X = \{x_\alpha : \alpha \in I\}$ ile $L(X)$ serbest Lie cebirinin homojen bileşeninin boyutuna eşittir. Bu boyut Witt formülüyle verilir. (Magnus, Karras, Solitar, 1966, Teorem 5.11)

Sonuç 3.1.13: Sırasıyla $t_1, t_2, \dots, t_q$ katlılıkları ile $X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}, \dots, X_{\alpha_q}$ kümelerini içeren U, B-kümelerinin sayısı

$$\frac{1}{t} \sum_{d|(t_1, t_2, \dots, t_q)} \mu(d) \frac{\left(t/d\right)!}{\left(t_1/d\right)! \left(t_2/d\right)! \dots \left(t_q/d\right)!} \tag{3.8}$$

olur. Burada $t = t_1 + t_2 + \cdots + t_q$ ve toplam $t_1, t_2, \dots, t_q$ nun en büyük ortak böleni olan $(t_1, t_2, \dots, t_q)$ nun tüm d bölenleri üzerinden alınır. Herhangi böyle bir U baz kümesi için serbest K-modüller olarak

$$\langle U\rangle \cong \langle X_{\alpha_1}\rangle^{\otimes t_1} \otimes \langle X_{\alpha_2}\rangle^{\otimes t_2} \otimes \ldots \otimes \langle X_{\alpha_q}\rangle^{\otimes t_q}$$

izomorfizmi vardır.

Örnek 3.1.14: $Y = Y_2 \cup Y_3 \cup \ldots$ bir önceki örnekteki gibi ise derecesi 12 olan 3 tane Y_2 ve 2 tane Y_3 kümesini içeren 2 tane *B*-baz kümesini elde ederiz. Bunların her birinin gereni $\langle Y_2\rangle^{\otimes 3} \otimes \langle Y_3\rangle^{\otimes 2}$ tensör çarpımına izomorfiktir.

4. $L(X)$ İÇİN PARÇALANIŞ TEOREMİ

X sonlu bir küme ve $L = L(X)$, birimli ve değişmeli bir K halkası üzerinde X tarafından üretilen serbest Lie cebiri olsun. X in her bir elemanının derecesinin 1 olduğunu ve X kümesinin tam sıralı olduğunu kabul edelim. L', L nin türetilmiş cebiri olmak üzere L yi $L = \langle X\rangle \oplus L'$ direkt toplamı olarak yazalım. O zaman L' sonsuz ranklı bir serbest Lie cebiridir ve $n \geq 2$ olmak üzere Y_n nin elemanlarının X-e göre derecesi n olduğunda $(degY_n = n)$ L', $Y = Y_2 \cup Y_3 \cup Y_4 \ldots$ biçiminde bir derecelendirilmiş Y serbest üreteç kümesine sahiptir. Bu şekilde bir derecelendirilmiş serbest üreteç kümesine L' nün bir ***standart serbest üreteç kümesi*** denir. Bir standart serbest üreteç kümesinin en önemli örneği X de derecesi 2 den büyük ya da eşit olan sol normlu temel Lie monomiallerinin kümesidir. Yani H, Bölüm 1 de tanımlandığı gibi olmak üzere $Y = H$ dır. Bu (Bokut, 1963) tarafından oluşturuldu. Bunun için (Bakhturin, 1987) ya da (Bryant, Kovács, Stöhr, 2002b) ye bakılabilir. L' nün herhangi standart serbest üreteç kümesi sonlu derecelendirilmiştir.

Bu bölümün ana sonucu, bir standart $Y = Y_2 \cup Y_3 \cup \ldots$ serbest üreteç kümesi ile bir serbest Lie cebiri olarak L' türetilmiş cebiri için bir baz küme koleksiyonunu elde etmektir.

Y nin derecelendirilmesi basittir ve $L(Y)$ nin bir baz küme koleksiyonu oldukça açıktır. Böyle bir koleksiyon Bölüm 3 deki örnekte verildi. Derecesi 8 e kadar olan B-kümeleri (3.7) de listelendi.

Teorem 4.1.1: Y, L' türetilmiş cebiri için bir standart serbest üreteç kümesi ve $\mathcal{B} = \mathcal{B}(Y)$, $L' = L(Y)$ nin bir baz küme koleksiyonu olsun. O zaman bir serbest K-modül olarak L nin bir

$$L = \langle X\rangle \oplus \bigoplus_{U\in\mathcal{B}} L(U) \tag{4.1}$$

direkt parçalanışı vardır.

Teoremden $L(X)$ in homojen bileşenleri için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.2: Her $n \geq 2$ için bir

$$L_n(X) = \bigoplus_{\substack{d|n \\ d\neq n}} \bigoplus_{U\in \mathcal{B}n/_d} L_d(U)$$

direkt parçalanışı vardır.

Özellikle, tüm p asal sayıları için

$$L_p(X) = \bigoplus_{U\in\mathcal{B}_p} L_1(U) = \bigoplus_{U\in\mathcal{B}_p} \langle U\rangle$$

dır. Bundan dolayı $\mathcal{B}(Y)$ de derecesi p olan B-kümelerinin birleşimi $L_p(X)$ in bir bazıdır.

Teorem 4.1.1 in başka bir sonucu şudur:
$\mathcal{B}(Y)$ deki B-kümeleri L de lineer bağımsızdır ve $\mathcal{B}$ deki tüm B-kümelerinin birleşiminin K-gereni L de her B-kümesinin gerenlerinin K üzerinde direkt toplamıdır. Ayrıca, Y_n nin gereni bir K-uzay olarak $M_n = M_n(X)$ metabelyen Lie kuvvetine izomorfik ve $U = [U_1, U_2]$ biçimindeki bir baz kümesinin gereni $\langle U_1\rangle \otimes \langle U_2\rangle$ tensör çarpımına izomorfiktir. Herhangi bir B-kümesinin K-gereni metabelyen Lie kuvvetlerinin bir tensör çarpımına izomorfiktir.

Tanım 4.1.3: Kabul edelim ki Y ve $\mathcal{B}$, Teorem 4.1.1 deki gibi olsun. Bir $U \in \mathcal{B}(Y)$, B-kümesinin $t(U)$ *ilgili tensör çarpımı* aşağıdaki şekilde verilir.

Eğer $U = Y_n$ ise $t_B(U) = M_n(X)$
$U = [U_1, U_2]$ ise $t_B(U) = t_B(U_1) \otimes t_B(U_2)$
şeklinde tanımlanır.

Tanımdan dolayı derecesi n olan bir U, B-kümesinin $t_B(U)$ ilgili tensör çarpımı ya bir M_n metabelyen Lie kuvvetidir ya da $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ olmak üzere $M_{n_1} \otimes M_{n_2} \otimes \ldots \otimes M_{n_k}$ biçiminde bir tensör çarpımdır. Sonuç 4.1.2 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.4: Her $U \in \mathcal{B}(Y)$ için K-modüllerin bir $\langle U \rangle \cong t_B(U)$ izomorfizmi vardır öyle ki $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ olmak üzere 2 den büyük ya da eşit olan doğal sayılardan oluşan bir $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ $(k \geq 1)$ k-lısı için

$$t_B(U) = M_{n_1} \otimes M_{n_2} \otimes \ldots \otimes M_{n_k}$$

şeklindedir.

$t_B(U)$, sırasıyla $t_1, t_2, \ldots, t_k$ katlılıkları ile tensör çarpanlardan meydana gelen verilmiş bir $M_{n_1}, M_{n_2}, \ldots, M_{n_k}$ kümesinde bir tensör çarpım olduğu için derecesi n olan B-baz kümelerinin sayısı (3.8) ile verilir.

5. BAZLAR

Şimdi Teorem 4.1.1 i L nin yeni *K*-bazlarını elde etmek için kullanacağız. Sonuç 4.1.2 den dolayı teorem *p* asal dereceli homojen bileşenler için *K*-bazlarını verir: $\mathcal{B}(Y)$ de derecesi *p* olan *U*, *B*-kümelerinin birleşimi L_p nin bir bazıdır.

Keyfi dereceli homojen bileşenlerin bazlarını elde etmek için ve bu yüzden *L* nin tümü için bir keyfi şekilde tüm sonlu $U \in \mathcal{B}(Y)$ baz kümelerini sıralarız ve Teorem 4.1.1 i (4.1) deki tüm $L(U)$ direkt bileşenlerine uygularız. Buradan $Y(U)$, $L'(U)$ türetilmiş cebirinin bir standart serbest üreteç kümesi olmak üzere bir

$$L(X) = \langle X \rangle \oplus \bigoplus_{U \in \mathcal{B}(Y)} \langle U \rangle \oplus \bigoplus_{U \in \mathcal{B}(Y)} \bigoplus_{V \in \mathcal{B}(Y(U))} L(V)$$

direkt parçalanışı elde edilir.

Sonra Teorem 4.1.1 i tüm $L(V)$ direkt bileşenlerine uygulayabiliriz ve bu işlemin sonsuz kez tekrarlanmasıyla sonunda *L* serbest Lie cebirinin bir direkt parçalanışı elde edilir. *L* nin direkt bileşenleri, türetilmiş cebirin standart serbest üreteç kümelerine *B*-küme yapılarının tekrar uygulanmasıyla *X* den elde edilen bazlar ile serbest *K*-modüllerdir.

Bu sonucu bir teoreme dönüştürmek için öncelikle aşağıdaki tanımı yapalım:

Tanım 5.1.1: $L(X)$ in bir $\mathcal{T}$ *tam baz küme koleksiyonu* bir

$$\mathcal{T} = \cup_{k \geq 0} \mathcal{T}^{(k)}(X)$$

birleşimidir. Burada her $\mathcal{T}^{(k)}$, $L(X)$ in alt kümelerinin bir ailesidir. $\mathcal{T}^{(k)}$ nın elemanlarına *k* seviyeli (*k*=0,1,2,…) *T-kümeleri* denir. Burada

$$\mathcal{T}^{(0)}(X) = \{X\}$$

ve $k > 0$ için

$$\mathcal{T}^{(k)}(X) = \{U : U \in \mathcal{B}(Y(V)), V \in \mathcal{T}^{(k-1)}(X)\}$$

biçimindedir. Burada $Y(V)$, $L'(V)$ türetilmiş cebirinin bir standart serbest üreteç kümesidir. Tanım 3.1.10 dan $\mathcal{B}(Y(V))$, $L(Y(V))$ nin bir baz küme koleksiyonudur. $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{T}^{(k)}$ da derecesi n olan tüm T-kümelerinin kümesi için sırasıyla $\mathcal{T}_n$ ve $\mathcal{T}_n^{(k)}$ yazılır. $Y = Y(X)$, $L' = L'(X)$ türetilmiş cebirinin bir standart serbest üreteç kümesi olmak üzere 1 seviyeli T-baz kümeleri tam olarak $\mathcal{B}(Y)$ de B-kümeleridir. Bu tanım ile şimdi aşağıdaki baz teoremini ifade edebiliriz.

Teorem 5.1.2: $\mathcal{T}$, $L(X)$ in bir tam baz küme koleksiyonu olsun. O zaman $\mathcal{T}$ de tüm T-kümelerinin birleşimi L nin bir K-bazıdır.

Bu tür bir baz için *T-baz* terimini kullanırız. T-kümelerinin tanımını daha uygun bir şekilde yazalım. Yeniden hatırlayalım ki tanımdan dolayı $k \geq 1$ seviyeli her T-kümesi; $Y(V) = Y_2(V) \cup Y_3(V) \cup \ldots$ standart serbest üreteç kümesi ile bir $L(Y(V))$ serbest Lie cebiri olarak göz önünde bulundurulan bir $L' = L'(V)$ türetilmiş cebiri için bir B-kümesidir. Burada V, $k-1$ seviyeli bir T-kümesidir. $V = X$ olduğu durumda $Y(X)$ için basit bir şekilde Y yazarız. Önceki bölümde söz edildiği gibi $L(X)$ in 1 seviyeli T-kümeleri (3.7) de listelendi. O zaman derecesi 8 e kadar olan 2 seviyeli T-baz kümeleri

$$Y_2(Y_2), Y_2(Y_3), Y_3(Y_2), Y_2(Y_4), \; Y_4(Y_2)$$

dir ve derecesi ≤ 8 ve 3 seviyeli tek T-baz kümesi $Y_2(Y_2(Y_2))$ dir. Eğer $\mathcal{T}$ tam baz küme koleksiyonun tanımındaki tüm standart serbest üreteç kümeleri sol normlu temel Lie monomiallerinden meydana gelen kanonik serbest üreteç kümeleri ise bir önemli özel durum ortaya çıkar. Bu durumda girişte bahsedildiği gibi T-bazı X de sol normlu temel Lie monomiallerinin Lie çarpımlarından meydana gelir.

Örneğin; eğer $x < y < z$ sıralaması ile $X = \{x, y, z\}$ ise o zaman

$$Y_2 = \{[y, x], [z, x], [z, y]\}$$

dir ve

$$[y, x] < [z, x] < [z, y]$$

kabul edilirse

$$Y_2(Y_2) = \big\{\big[[z, x], [y, x]\big], \big[[z, y], [y, x]\big], \big[[z, y], [z, x]\big]\big\}$$

ve

$$Y_3(Y_2) = \big\{\big[[z, x], [y, x], [y, x]\big], \big[[z, x], [y, x], [z, x]\big], \dots, \big[[z, y], [z, x], [z, y]\big]\big\}$$

kümeleri elde edilir. Derecesi 10 olan 2 seviyeli bir T-kümesinin örneği

$$[Y_3, Y_2](Y_2) = \Big\{\Big[\big[[z, x], [y, x], [y, x]\big], \big[[z, x], [y, x]\big]\Big], \Big[\big[[z, x], [y, x], [y, x]\big], \big[[z, y], [y, x]\big]\Big], \dots\Big\}$$

kümesidir.

Önceki bölümde bir B-kümesinin ilgili tensör çarpımını tanımlamıştık. Eğer U,

$$\langle U\rangle \cong t(U) = M_{n_1}(V) \otimes M_{n_2}(V) \otimes \dots \otimes M_{n_k}(V)$$

olmak üzere $\mathcal{B}\big(Y(V)\big)$ de bir B-kümesi ve V nin kendisi

$$\langle V\rangle \cong t(V) = M_{m_1}(W) \otimes M_{m_2}(W) \otimes \ldots \otimes M_{m_k}(W)$$

olmak üzere $\mathcal{B}\big(Y(W)\big)$ da bir B-küme ise o zaman $t(U)$ nun parçalanışındaki her tensör çarpan için

$$M_{n_i}(V) = M_{n_i}\big(M_{m_1}(W) \otimes M_{m_2}(W) \otimes \ldots \otimes M_{m_k}(W)\big)$$

dır. Bu bir T-kümesinin ilgili tekrarlanmış tensör çarpımının aşağıdaki tanımını verir.

Tanım 5.1.3: $\mathcal{T} = \bigcup_{k\geq 0} \mathcal{T}^{(k)}(X)$, $L(X)$ in bir tam baz küme koleksiyonu olsun. Bir $U \in \mathcal{T}$, T-kümesi için $t(U)$ *ilgili tekrarlanmış tensör çarpımı* aşağıdaki gibi tanımlanır. 0 seviyeli tek T-kümesi olan X için

$$t(X) = M_1(X) = \langle X\rangle$$

tanımlanır ve eğer U, $k > 0$ seviyeli bir T-kümesi ise yani $V \in \mathcal{T}^{(k-1)}(X)$ olmak üzere $\mathcal{B}\big(Y(V)\big)$ de bir B-kümesi ise ve $Y(V)$,

$$t_B(U) = M_{n_1}(V) \otimes M_{n_2}(V) \otimes \ldots \otimes M_{n_k}(V)$$

ilgili tensör çarpımı ile (Tanım 4.1.3 deki gibi) $L'(V)$ için bir standart serbest üreteç kümesi ise

$$t(U) = M_{n_1}\big(t(V)\big) \otimes M_{n_2}\big(t(V)\big) \otimes \ldots \otimes M_{n_k}\big(t(V)\big)$$

şeklinde tanımlanır. 1 seviyeli olan herhangi bir U, T-kümesi için $t(U) = t_B(U)$ dir. Çünkü $V \in \mathcal{T}^{(0)}(X) = \{X\}$ olduğundan $V = X$ olur.

$$\begin{aligned} t(U) &= M_{n_1}\big(t(V)\big) \otimes M_{n_2}\big(t(V)\big) \otimes \ldots \otimes M_{n_k}\big(t(V)\big) \\ &= M_{n_1}\big(t(X)\big) \otimes M_{n_2}\big(t(X)\big) \otimes \ldots \otimes M_{n_k}\big(t(X)\big) \end{aligned}$$

$$= M_{n_1}(\langle X\rangle) \otimes M_{n_2}(\langle X\rangle) \otimes \ldots \otimes M_{n_k}(\langle X\rangle)$$
$$= M_{n_1}(X) \otimes M_{n_2}(X) \otimes \ldots \otimes M_{n_k}(X) = t_B(U)$$

Aşağıdaki sonuç baz teoreminin bir sonucudur:

Sonuç 5.1.4: Herhangi bir $U \in \mathcal{T}$ için serbest K-modüller olarak bir

$$\langle U\rangle \cong t(U)$$

izomorfizmi vardır.

Örnek 5.1.5: L_6 homojen bileşeninin parçalanışını elde edelim.
Sonuç 4.1.2 ve Sonuç 4.1.4 den dolayı

$$L_6(X) = \bigoplus_{\substack{d|6 \\ d\neq 6}} \bigoplus_{U\in \mathcal{B}_{6/d}} L_d(U) = \bigoplus_{U\in B_6} L_1(U) \oplus \bigoplus_{U\in B_3} L_2(U) \oplus \bigoplus_{U\in B_2} L_3(U)$$

dır.

$$B_2 = \{Y_2\},\ B_3 = \{Y_3\},\ B_6 = \{Y_6, [Y_4, Y_2]\}$$

$$\bigoplus_{U\in B_6} L_1(U) = \bigoplus_{U\in B_6} \langle U\rangle = \langle Y_6\rangle \oplus \langle [Y_4, Y_2]\rangle \cong M_6 \oplus M_4 \otimes M_2$$

$$\bigoplus_{U\in B_3} L_2(U) = L_2(Y_3) = \bigoplus_{\substack{d|2 \\ d\neq 2}} \bigoplus_{U\in \mathcal{B}_{2/d}(Y_3)} L_d(U) = \bigoplus_{U\in \mathcal{B}_2(Y_3)} L_1(U) = L_1\big(Y_2(Y_3)\big)$$
$$= \langle Y_2(Y_3)\rangle = M_2(Y_3) = M_2(M_3)$$

$$\bigoplus_{U\in B_2} L_3(U) = L_3(Y_2) = \bigoplus_{\substack{d|3 \\ d\neq 3}} \bigoplus_{U\in \mathcal{B}_{3/d}(Y_2)} L_d(U) = \bigoplus_{U\in \mathcal{B}_3(Y_2)} L_1(U) = L_1\big(Y_3(Y_2)\big)$$
$$= \langle Y_3(Y_2)\rangle = M_3(Y_2) = M_3(M_2)$$

$$L_6(X) = \bigoplus_{U \in B_6} L_1(U) \oplus \bigoplus_{U \in B_3} L_2(U) \oplus \bigoplus_{U \in B_2} L_3(U) \cong M_6 \oplus M_4 \otimes M_2 \oplus M_2(M_3) \oplus M_3(M_2)$$

elde edilir.

6. FİLTRASYONLAR

Bu bölümde ve sonraki bölümlerde L nin derecelendirilmiş cebir otomorfizminin bir G grubu için modüller olarak $n \geq 2$ olmak üzere L_n Lie kuvvetlerinin yapısı ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir. L_n Lie kuvvetleri, M_n metabelyen Lie kuvvetleri *G* için modüller olarak göz önünde bulundurulacaktır.

$Y = \bigcup_{n\geq 2} Y_n$, L' türetilmiş cebiri için bir standart serbest üreteç kümesi olsun. L' türetilmiş cebirinin alt merkezi serisi $n \geq 2$ olmak üzere L_n Lie kuvvetleri üzerinde

$$L_n = L_{n,1} \geq L_{n,2} \geq L_{n,3} \geq \cdots \geq L_{n,l(n)} \geq L_{n,l(n)+1} = 0 \tag{6.1}$$

şeklinde bir filtrasyon belirler. Burada $L_{n,k}$, *Y* ye göre derecesi *k* dan büyük ya da eşit ve toplam derecesi *n* olan *Y* deki tüm Lie çarpımları tarafında gerilir. Burada eğer *n* çift ise $l(n) = \frac{n}{2}$ ve n tek ise $l(n) = \frac{n-1}{2}$ dir. $L_{n,k}$, L nin *KG*-alt modülleridir ve $L_{n,2} = L_n \cap L''$ dür. Buradan

$$L_{n,1}\big/L_{n,2} \cong M_n$$

dir. $\mathcal{B} = \mathcal{B}(Y)$, $L' = L(Y)$ için bir baz küme koleksiyonu olsun. Tanımdan $\mathcal{B}$ deki tüm *U*, *B*-kümeleri hem *X* hem de *Y* ye göre homojendirler ve bundan dolayı bunların her biri hem *X* hem de *Y* ye göre iyi tanımlı derecelere sahiptir. Genel olarak *X* e göre derece için ***deg*** ve Y ye göre derece için ***Deg*** yazılır. Sonuç 4.1.2 den dolayı $L_{n,k}\big/L_{n,k+1}$ bölümü homojen $L_d(U)$ bileşenleri tarafından gerilir. Burada *d*, *n* ve *k* nın tüm ortak bölenleridir. Ayrıca U, X e göre $\frac{n}{d}$ ve Y ye göre $\frac{k}{d}$ dereceli tüm *B*-kümeleri üzerindendir. $n \geq 2$ ve $1 \leq k \leq l(n)$ olmak üzere *n*, *k* ve *n* ile *k* nın bir ortak *d* böleni verilmiş olsun.

$$\mathcal{B}_{n,k,d} = \left\{U \in \mathcal{B}: degU = {}^{n}\!/_{d}, DegU = {}^{k}\!/_{d}\right\}$$

olarak tanımlayalım.

Teorem 6.1.1: Y, L' nün bir standart serbest üreteç kümesi ve $\mathcal{B}$, $L' = L(Y)$ için bir baz küme koleksiyonu olsun. O zaman (6.1) filtrasyonunun terimleri *KG*-alt modüllerdir ve bölümleri için

$$L_{n,k}\big/L_{n,k+1} \cong \bigoplus_{d|(n,k)} \bigoplus_{U\in\mathcal{B}_{n,k,d}} L_d\big(t(U)\big) \tag{6.2}$$

KG-modül izomorfizmleri vardır.

İspat: Sonuç 4.1.2 ve Sonuç 4.1.4 den dolayı (6.1) filtrasyonunun bölümleri için (6.2) deki gibi serbest *K*-modüllerin izomorfizmleri elde edilir. Aslında *KG*-modüllerin izomorfizmlerinin varlığını göstermek için her $U \in \mathcal{B}$ için $\hat{t}(U)$ Lie kuvvetlerinin ilgili tensör çarpımı ve $n = degU$ olmak üzere bir $\gamma_U: \hat{t}(U) \to L_n$ homomorfizmi aşağıdaki gibi tanımlanır.

Eğer $U = Y_n$ ise $\hat{t}(Y_n) = L_n$ ve $\gamma_{Y_n} = id: L_n \longrightarrow L_n$ şeklinde tanımlanır ve eğer $U = [U_1, U_2]$ ise $\hat{t}(U) = \hat{t}(U_1)\otimes\hat{t}(U_2)$ ve γ_U

$$(u_1\otimes u_2)\gamma_U = \left[u_1\gamma_{U_1}, u_2\gamma_{U_2}\right] \quad (u_i \in \hat{t}(U_i), i = 1,2)$$

şeklinde tanımlanır. Buradan her $\hat{t}(U)$, $n_i \geq 2$ olmak üzere bazı $n_1, n_2, \dots, n_s$ pozitif tamsayıları için

$$\hat{t}(U) = L_{n_1} \otimes L_{n_2} \otimes \dots \otimes L_{n_s}$$

dir. Her $U \in \mathcal{B}$ için $L_{n_i} \longrightarrow M_{n_i}$ $(n_i \geq 2)$ doğal örten dönüşümlerden kaynaklanan bir aşikar

$$\pi_U: \hat{t}(U) \longrightarrow t(U)$$

örten dönüşümü vardır. π_U nun çekirdeği $u_i \in L_{n_i}$ olmak üzere tüm

$$u = u_1 \otimes u_2 \otimes \ldots \otimes u_s$$

tensör çarpımları tarafından gerilir öyle ki u_i çarpanlarından en az biri $L_{n_i} \cap L''$ ye aittir. Gerçekten;
$\pi_U(u_1 \otimes u_2 \otimes \ldots \otimes u_s) = 0$ ise $(u_1 + L'') \otimes (u_2 + L'') \otimes \ldots \otimes (u_s + L'') = 0$ dır. Buradan en az bir $i \in \{1,2,\ldots,s\}$ için $u_i + L'' = 0$ yani $u_i \in L''$ dür. O halde $u_i \in L_{n_i} \cap L''$ dür. Bu durum $n = degu$ ve $s = Degu$ olmak üzere $u\gamma_U \in L_{n,s+1}$ olmasını gerektirir. Her d doğal sayısı için γ_U homomorfizmi bir $\gamma_U^{(d)}: L_d(\hat{t}(U)) \longrightarrow L_{dn}$ homomorfizmine neden olur. Bu homomorfizm $v_1, v_2, \ldots, v_d \in \hat{t}(U)$ için

$$[v_1, v_2, \ldots, v_d]\gamma_U^{(d)} = [v_1\gamma_U, v_2\gamma_U, \ldots, v_d\gamma_U] \in L_{dn}$$

şeklinde verilir. Ayrıca π_U homomorfizmi

$$[v_1, v_2, \ldots, v_d]\pi_U^{(d)} = [v_1\pi_U, v_2\pi_U, \ldots, v_d\pi_U] \in L_{dn}$$

şeklinde verilen

$$\pi_U^{(d)}: L_d(\hat{t}(U)) \longrightarrow L_d(t(U))$$

homomorfizmine neden olur. Özellikle $\gamma_U^{(1)} = \gamma_U$ ve $\pi_U^{(1)} = \pi_U$ dur. $\pi_U^{(d)}$ nin çekirdeği $v = [v_1, v_2, \dots, v_d]$ sol normlu Lie çarpımları tarafından gerilir öyle ki v_i nin en az biri $ker\pi_U$ ya aittir. Sonuç olarak bu, $s = dDegU$ olmak üzere $v\gamma_U^{(d)} \in L_{dn,s+1}$ olmasını gerektirir. $n \geq 2$ ve $1 \leq k \leq l(n)$ için $\gamma_U^{(d)}: L_d\big(\hat{t}(U)\big) \longrightarrow L_n$ ile tanımlanan

$$\Gamma_{n,k}: \bigoplus_{d|(n,k)} \bigoplus_{U \in \mathcal{B}_{n,k,d}} L_d\big(\hat{t}(U)\big) \longrightarrow L_n$$

homomorfizmini göz önünde bulunduralım. Ayrıca uygun $\pi_U^{(d)}$ nin direkt toplamı olarak tanımlanan

$$\Pi_{n,k}: \bigoplus_{d|(n,k)} \bigoplus_{U \in \mathcal{B}_{n,k,d}} L_d\big(\hat{t}(U)\big) \longrightarrow \bigoplus_{d|(n,k)} \bigoplus_{U \in \mathcal{B}_{n,k,d}} L_d\big(t(U)\big)$$

örten dönüşümü göz önünde bulunduralım. (6.2) izomorfizmini kurmak için aşağıdaki durumları göz önünde bulunduralım:

i) $\Gamma_{n,k}$ homomorfizminin görüntüsü $L_{n,k}$ da içerilir.

ii) $\Gamma_{n,k}$ homomorfizmi $\Pi_{n,k}$ homomorfizminin çekirdeğini $L_{n,k+1}$ homojen bileşeninin içine dönüştürür.

i) şıkkından $\Gamma_{n,k}$ homomorfizmi bir

$$\bigoplus_{d|(n,k)} \bigoplus_{U \in \mathcal{B}_{n,k,d}} L_d\big(\hat{t}(U)\big) \longrightarrow {}^{L_{n,k}}\big/_{L_{n,k+1}}$$

homomorfizmine neden olur. ii) şıkkından bu homomorfizmler

$$\bigoplus_{d|(n,k)} \bigoplus_{U \in \mathcal{B}_{n,k,d}} L_d\big(t(U)\big)$$

boyunca çarpanlarına ayrılır. Yani

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{d|(n,k)} \bigoplus_{U \in \mathcal{B}_{n,k,d}} L_d\big(\hat{t}(U)\big) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{d|(n,k)} \bigoplus_{U \in \mathcal{B}_{n,k,d}} L_d\big(t(U)\big) \arrow[dl, dashed] \\
L_{n,k}/L_{n,k+1} &
\end{tikzcd}$$

diagramı değişmelidir.

Son olarak

$$\bigoplus_{d|(n,k)} \bigoplus_{U \in \mathcal{B}_{n,k,d}} L_d\big(t(U)\big) \longrightarrow L_{n,k}/L_{n,k+1}$$

homomorfizminin tanım ve görüntü kümesinin K-bazları arasında bir bijeksiyona neden olduğunu gözlemlemek kalır. (6.2) bir K-izomorfizm olduğu için bu açıktır. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Örnek 6.1.2: $n = 8$ için $l(8) = 4$ olur ve (6.1) filtrasyonu $L_8 = L_{8,1} \geq L_{8,2} \geq L_{8,3} \geq L_{8,4} \geq 0$ biçimine sahiptir. Derecesi 8 e kadar olan B-baz kümeleri (3.7) de listelendi.

$$\mathcal{B}_{8,1,1} = \{Y_8\}$$
$$\mathcal{B}_{8,2,1} = \{[Y_6, Y_2], [Y_5, Y_3]\}$$
$$\mathcal{B}_{8,2,2} = \{Y_4\}$$
$$\mathcal{B}_{8,3,1} = \{[Y_4, Y_2, Y_2], [Y_3, Y_2, Y_3]\}$$

$$\mathcal{B}_{8,4,1} = \mathcal{B}_{8,4,2} = \emptyset$$
$$\mathcal{B}_{8,4,4} = \{Y_2\}$$

elde edilir. Filtrasyonun bölümleri için

$$L_{8,1}/L_{8,2} \cong \bigoplus_{d|(8,1)} \bigoplus_{U\in\mathcal{B}_{8,1,d}} L_d\big(t(U)\big) = \bigoplus_{U\in\mathcal{B}_{8,1,1}} L_1\big(t(U)\big) = L_1\big(t(Y_8)\big) = \langle t(Y_8)\rangle$$
$$= t(Y_8) \cong M_8$$

$$L_{8,2}/L_{8,3} \cong \bigoplus_{d|(8,2)} \bigoplus_{U\in\mathcal{B}_{8,2,d}} L_d\big(t(U)\big) = \bigoplus_{U\in\mathcal{B}_{8,2,1}} L_1\big(t(U)\big) \oplus \bigoplus_{U\in\mathcal{B}_{8,2,2}} L_2\big(t(U)\big)$$
$$= L_1\big(t([Y_6,Y_2])\big) \oplus L_1\big(t([Y_5,Y_3])\big) \oplus L_2\big(t(Y_4)\big)$$
$$= \langle t([Y_6,Y_2])\rangle \oplus \langle t([Y_5,Y_3])\rangle \oplus L_2\big(t(Y_4)\big)$$
$$= t([Y_6,Y_2]) \oplus t([Y_5,Y_3]) \oplus L_2\big(t(Y_4)\big)$$
$$= M_6\otimes M_2\oplus M_5\otimes M_3\oplus L_2(M_4)$$

$$L_{8,3}/L_{8,4} \cong \bigoplus_{d|(8,3)} \bigoplus_{U\in\mathcal{B}_{8,3,d}} L_d\big(t(U)\big) = \bigoplus_{U\in\mathcal{B}_{8,3,1}} L_1\big(t(U)\big)$$
$$= L_1\big(t([Y_4,Y_2,Y_2])\big) \oplus L_1\big(t([Y_3,Y_2,Y_3])\big)$$
$$= \langle t([Y_4,Y_2,Y_2])\rangle \oplus \langle t([Y_3,Y_2,Y_3])\rangle = t([Y_4,Y_2,Y_2]) \oplus t([Y_3,Y_2,Y_3])$$
$$= M_4\otimes M_2\otimes M_2\oplus M_3\otimes M_2\otimes M_3$$

$$L_{8,4} = \bigoplus_{d|(8,4)} \bigoplus_{U\in\mathcal{B}_{8,4,d}} L_d\big(t(U)\big) = \bigoplus_{U\in\mathcal{B}_{8,4,4}} L_4\big(t(U)\big) = L_4\big(t(Y_2)\big) \cong L_4(M_2)$$

elde edilir.

Örnek 6.1.2: $n = 12$ için daha aydınlatıcı bir örnek elde ederiz. Burada $l(12) = 6$ dır ve (6.1) filtrasyonu

$$L_{12} = L_{12,1} \geq L_{12,2} \geq L_{12,3} \geq L_{12,4} \geq L_{12,5} \geq L_{12,6} \geq 0$$

şeklindedir. Filtrasyonun bölümleri için

$$L_{12,1}/L_{12,2} \cong t(Y_{12})$$

$$L_{12,2}/L_{12,3} \cong t([Y_{10},Y_2])\oplus t([Y_9,Y_3])\oplus t([Y_8,Y_4])\oplus t([Y_7,Y_5])\oplus L_2\big(t(Y_6)\big)$$

$$L_{12,3}/L_{12,4} \cong t([Y_8,Y_2,Y_2])\oplus t([Y_7,Y_2,Y_3])\oplus t\big([Y_7,[Y_3,Y_2]]\big)\oplus \ldots \oplus L_3\big(t(Y_4)\big)$$

$$L_{12,4}/L_{12,5} \cong t([Y_6,Y_2,Y_2,Y_2])\oplus \ldots \oplus L_2(t([Y_4,Y_2])\oplus L_4\big(t(Y_3)\big)$$

$$L_{12,5}/L_{12,6} \cong t([Y_4,Y_2,Y_2,Y_2,Y_2])\oplus t([Y_3,Y_2,Y_2,Y_2,Y_3])\oplus t\big([Y_3,Y_2,Y_2,[Y_3,Y_2]]\big)$$

$$L_{12,6} \cong L_6\big(t(Y_2)\big)$$

elde edilir.

Derecesi 12 olan 1 seviyeli T-baz kümelerini listelemek için çok fazla vardır. Fakat *Deg* si 1, 2 ve 5 e eşit olanları daha küçük dereceli 1 seviyeli *T*-baz kümelerinden kaynaklanan tüm direkt bileşenler kadar iyi listeledik. $L_{12,3}/L_{12,4}$ de

$$t([Y_7,Y_2,Y_3]) = M_7\otimes M_2\otimes M_3$$
$$t\big([Y_7,[Y_3,Y_2]]\big) = M_7\otimes(M_3\otimes M_2)$$

olmak üzere $[Y_7,Y_2,Y_3]$ ve $\big[Y_7,[Y_3,Y_2]\big]$ baz kümeleri vardır. Yani bunların ilgili tensör çarpımları tensör çarpanların sıralamasına eşittir.

Şimdi Teorem 6.1.1 deki (6.2) direkt parçalanışlarına geri dönelim. Filtrenin bölümlerinde $d > 1$ olmak üzere $L_d\big(t(U)\big)$ direkt bileşenlerini göz önünde bulunduralım. O zaman

$$L_{d,k}\big(t(U)\big) \Big/ L_{d,k+1}\big(t(U)\big) \cong \bigoplus_{d_1|(d,k)} \bigoplus_{V \in \mathcal{B}_{d,k,d_1}(Y)} L_{d_1}\big(t(V)\big)$$

bölümleri ile bir

$$L_d\big(t(U)\big) = L_{d,1}\big(t(U)\big) \geq L_{d,2}\big(t(U)\big) \geq \cdots \geq L_{d,l(d)}\big(t(U)\big) \geq L_{d,l(d)+1}\big(t(U)\big) = 0$$

filtrasyonunu elde etmek için teoremi bu homojen bileşenlere uygulayabiliriz. Burada Y, $L'\big(t(U)\big)$ türetilmiş cebiri için bir standart serbest üreteç kümesidir. Şimdi Teorem 6.1.1 deki $\mathcal{B}$ yi $L(X)$ in bir $\mathcal{T}$ tam baz küme koleksiyonunda $\mathcal{T}^{(1)}$ olarak düşünelim. O zaman büyük direkt toplam altındaki her V, bir 2 seviyeli T-kümedir ve $t(V)$, Tanım 5.1.3 deki gibi onun ilgili tekrarlanmış tensör çarpımıdır. O zaman Teorem 6.1.1, $d_1 > 1$ olmak üzere $L_{d_1}\Big(t\big(V(U)\big)\Big)$ direkt bileşenlerine uygulanabilir ve bu işlem; (6.1) filtrasyonunun kalan kısmındaki tüm bölümler, seviyesi 1 den büyük ya da eşit olan bir U, T-kümesi için

$$L_1\big(t(U)\big) = t(U)$$

biçimine sahip olduğu bir duruma ulaşana kadar tekrarlanabilir. L_n nin asıl filtrasyonunun son durumundaki direkt bileşenlerin, derecesi n olan T-baz kümeleri ile birebir aynı olacağını göstermek zor değildir. Bu fikir aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

Teorem 6.1.4: $\mathcal{T}$, $L(X)$ in bir tam T-baz küme koleksiyonu olsun. O zaman $n \geq 2$ olmak üzere her L_n Lie kuvveti bir sonlu filtrasyona sahiptir. L_n nin bölümleri

$\bigoplus_{U} t(U)$ biçiminde *KG*-modüllerin direkt toplamlarına izomorfiktir. Burada *U*, derecesi *n* olan *T*-baz kümelerinin bir uygun alt kümesi üzerinden alınır. Derecesi *n* olan *T*-kümeleri ve bu bölümlerde gözüken direkt bileşenler arasında birebir bir bağıntı vardır.

Örnek 6.1.5: Örnek 6.1.2 deki L_8 için filtrasyonu göz önünde bulunduralım. Burada

$$L_2(M_4) = L_2\big(t(Y_4)\big)$$

ve

$$L_4(M_2) = L_4\big(t(Y_2)\big)$$

hariç bölümlerin tüm direkt bileşenleri bir 1 seviyeli *U*, *T*-baz kümesi için $t(U)$ biçimine sahiptir. Teorem 6.1.1 i istisna bölümlere uygularsak

$$L_2\big(t(Y_4)\big) \cong t\big(Y_2(Y_4)\big) = M_2(M_4)$$

elde edilir. Ayrıca

$$L_{4,1}\big(t(Y_2)\big) \Big/ L_{4,2}\big(t(Y_2)\big) \cong t\big(Y_4(Y_2)\big) = M_4(M_2)$$

ve

$$L_{4,2}\big(t(Y_2)\big) = L_2\Big(t\big(Y_2(Y_2)\big)\Big) = L_1\Big(t\Big(Y_2\big(Y_2(Y_2)\big)\Big)\Big) = \Big\langle t\Big(Y_2\big(Y_2(Y_2)\big)\Big)\Big\rangle$$
$$= t\Big(Y_2\big(Y_2(Y_2)\big)\Big) = M_2\big(M_2(M_2)\big)$$

bölümleri ile 2 uzunluklu bir

$$L_4\big(t(Y_2)\big) = L_{4,1}\big(t(Y_2)\big) \geq L_{4,2}\big(t(Y_2)\big) \geq 0$$

filtrasyonu elde edilir. Açıkçası, eşitliklerin bu zincirindeki son kısım Teorem 6.1.1 in başka bir uygulaması ile elde edilir. Bu yüzden L_8 için Teorem 6.1.4 deki filtrasyon 5 uzunluğuna sahiptir ve bölümlerin direkt toplamları tam olarak derecesi 8 olan 8 tane U, T-baz kümesi için $t(U)$ modülleridir.

L_{12} için filtrasyonda

$$L_2\big(t(Y_6)\big),\ L_3\big(t(Y_4)\big),\ L_2\big(t([Y_4, Y_2])\big),\ L_4\big(t(Y_3)\big) \text{ ve } L_6\big(t(Y_2)\big)$$

direkt bileşenleri Teorem 6.1.1 in daha ileri uygulamalarını gerektirir. $L_4\big(t(Y_3)\big)$ için

$$L_4\big(t(Y_3)\big) = L_{4,1}\big(t(Y_3)\big) \geq L_{4,2}\big(t(Y_3)\big) \geq 0$$

2 uzunluklu bir filtrasyon elde edilir. Bu filtrasyonun bölümleri

$$L_{4,1}\big(t(Y_3)\big) \big/ L_{4,2}\big(t(Y_3)\big) = L_1\Big(t\big(Y_4(Y_3)\big)\Big) = \langle t\big(Y_4(Y_3)\big)\rangle = M_4(M_3)$$

ve

$$L_{4,2}\big(t(Y_3)\big) \big/ L_{4,3}\big(t(Y_3)\big) = L_2\Big(t\big(Y_2(Y_3)\big)\Big) = L_1\Big(t\Big(Y_2\big(Y_2(Y_3)\big)\Big)\Big)$$

$$= \langle t\Big(Y_2\big(Y_2(Y_3)\big)\Big)\rangle = t\Big(Y_2\big(Y_2(Y_3)\big)\Big) = M_2\big(M_2(M_3)\big)$$

dür. $L_6(t(Y_2))$ için 3 uzunluklu

$$L_6\big(t(Y_2)\big) = L_{6,1}\big(t(Y_2)\big) \geq L_{6,2}\big(t(Y_2)\big) \geq L_{6,3}\big(t(Y_2)\big) \geq 0$$

filtrasyonu elde edilir. Bu filtrasyonun üst bölümü

$$L_{6,1}\big(t(Y_2)\big)\Big/L_{6,2}\big(t(Y_2)\big) = L_1\Big(t\big(Y_6(Y_2)\big)\Big) = \langle t\big(Y_6(Y_2)\big)\rangle = t\big(Y_6(Y_2)\big) = \langle Y_6(Y_2)\rangle$$
$$= M_6(M_2)$$

orta bölümü

$$L_{6,2}\big(t(Y_2)\big)\Big/L_{6,3}\big(t(Y_2)\big) = L_1\Big(t\big([Y_4,Y_2](Y_2)\big)\Big)\oplus L_2\Big(t\big(Y_3(Y_2)\big)\Big)$$
$$= L_1\Big(t\big([Y_4,Y_2](Y_2)\big)\Big)\oplus L_1\Big(t\Big(Y_2\big(Y_3(Y_2)\big)\Big)\Big)$$
$$= \langle t\big([Y_4,Y_2](Y_2)\big)\rangle\oplus\langle t\Big(Y_2\big(Y_3(Y_2)\big)\Big)\rangle$$
$$= t\big([Y_4,Y_2](Y_2)\big)\oplus t\Big(Y_2\big(Y_3(Y_2)\big)\Big)$$
$$= M_4(M_2)\otimes M_2(M_2)\oplus M_2\big(M_3(M_2)\big)$$

ve alt bölümü

$$L_{6,3}\big(t(Y_2)\big) = L_3\Big(t\big(Y_2(Y_2)\big)\Big) = L_1\Big(t\Big(Y_3\big(Y_2(Y_2)\big)\Big)\Big) = \langle t\Big(Y_3\big(Y_2(Y_2)\big)\Big)\rangle$$
$$= t\Big(Y_3\big(Y_2(Y_2)\big)\Big) = M_3\big(M_2(M_2)\big)$$

dir.

Buradan L_{12} için Teorem 6.1.4 deki filtrasyon 8 uzunluğuna sahiptir ve onun alt terimi

$$L_3(L_2(L_2)) \cong M_3\big(M_2(M_2)\big)$$

alt modülüdür.

7. KARAKTERİSTİK 0 OLDUĞUNDA $L(X)$ İN MODÜL PARÇALANIŞLARI

Her bir Y_n nin gereni G nin etkisi altında invaryant olmak üzere, L' türetilmiş cebirinin bir $Y = Y_2 \cup Y_3 \cup \ldots$ standart serbest üreteç kümesinin var olduğunu kabul edelim. Diğer bir değişle her $n \geq 2$ için $\langle Y_n \rangle$, L' nün bir KG-alt modülü olsun. O zaman bir $\mathcal{B}(Y)$ baz küme koleksiyonundaki her U, B-kümesinin gereni G-invaryanttır ve Sonuç 4.1.4 deki $\langle U \rangle \cong t(U)$ izomorfizmi KG-modüllerin bir izomorfizmidir. Eğer $\mathcal{T}$, özellikle G-invaryant standart serbest üreteç kümeleri kullanılarak elde edilen $L(X)$ in bir tam baz küme koleksiyonu ise o zaman her $U \in \mathcal{T}$, T-kümesinin gereni G-invaryanttır ve Sonuç 5.1.4 deki $\langle U \rangle \cong t(U)$ izomorfizmi KG-modüllerin bir izomorfizmidir. Bundan dolayı L nin herhangi bir T-bazı, L' nün bir G-invaryant standart serbest üreteç kümesinin var olması koşulu ile direkt bileşenleri $\mathcal{T}$ deki T-kümeleri ile birebir aynı olan bir modül parçalanışını verir. Bu bölümde bu durumun, K nın karakteristiği 0 olan bir cisim olması durumunda mümkün olacağı gösterilecektir.

Lemma 7.1.1: $L = L(X)$, birimli, değişmeli bir K halkası üzerinde sonlu ranklı bir serbest Lie cebiri ve $n \geq 2$ bir tamsayı olmak üzere $(n-2)!$, K da tersinir olsun. O zaman Y_n nin gereni G-invaryant olmak üzere L' türetilmiş cebiri bir $Y = Y_2 \cup Y_3 \cup \ldots$ standart serbest üreteç kümesine sahiptir.

İspat: $\emptyset_n\colon L_n \longrightarrow M_n$, doğal örten dönüşüm olsun. Bu lemmanın ispatı için $\psi_n\colon M_n \longrightarrow L_n$, KG-modül homomorfizminin varlığı önemlidir öyle ki ψ_n ve ϕ_n nin bileşkesi M_n de $(n-2)!$ ile çarpma anlamına gelir. Böyle bir homomorfizm (Bryant, Kovács, Stöhr, 2002a) da sayfa 349-350 de gösterildi. Eğer $(n-2)!$, K da tersinirse o zaman $\tilde{\psi}_n = {}^{1}\!/_{(n-2)!}\,\psi_n$ dönüşümü, $\phi_n \circ \tilde{\psi}_n = 1_{M_n}$ olacağından ϕ_n doğal örten dönüşümü için bir parçalayan dönüşümdür. Buradan $\tilde{\psi}_n$ dönüşümü bire bir ve $0 \longrightarrow L_n \cap L'' \longrightarrow L_n \longrightarrow M_n \longrightarrow 0$ tam dizisi parçalanırdır. O halde

$$L_n = (L_n \cap L'') \oplus \tilde{\psi}_n(M_n) \cong (L_n \cap L'') \oplus M_n$$

dir.

Şimdi $Y = Y_2 \cup Y_3 \cup \ldots$ L' nün bir standart serbest üreteç kümesi olsun. O zaman Y_n, modülo $L'' \cap L_n$ e göre L_n nin bir bazıdır ve $\tilde{Y}_n = \tilde{\psi}_n \phi_n Y_n$ kümesi de modülo $L'' \cap L_n$ e göre L_n nin bir bazıdır. $\tilde{Y}_n$, $\tilde{\psi}_n$, G-dönüşümü altında M_n, *KG*-modülünün L_n de görüntüsü olduğundan $\tilde{Y}_n$, *G*-invaryanttır.

$$L'' \cap L_n = L(Y_2 \cup Y_3 \cup \ldots \cup Y_{n-1}) \cap L_n$$

olduğu için her $y \in Y_n$ için $\tilde{y}_n = \tilde{\psi}_n \emptyset_n y \in \tilde{Y}_n$ görüntüsü $\tilde{y}_n = \eta y + w_y$ biçimine sahiptir. Burada η, $\langle Y_n \rangle$ serbest *K*-modülünün bir otomorfizmi ve $w_y \in L(Y_2 \cup Y_3 \cup \ldots \cup Y_{n-1}) \cap L_n$ dir. O halde Lemma 2.7.1 den dolayı

$$\tilde{Y} = Y_2 \cup \ldots \cup Y_{n-1} \cup \tilde{Y}_n \cup Y_{n+1} \cup \ldots$$

L' nün bir serbest üreteç kümesidir.

Buradan aşağıdaki sonuç elde edilir:

K karakteristiği 0 olan bir cisim olsun. O zaman $(n-2)!$, $n \geq 2$ için tersinirdir ve Lemma 7.1.1. den K üzerinde sonlu ranklı herhangi bir serbest Lie cebirinin türetilmiş cebiri bir G-invaryant serbest üreteç kümesine sahiptir. Yukarıda gözlemlendiği gibi bu $L' = L(Y)$ için G-invaryant $\mathcal{B}(Y)$ baz küme koleksiyonlarının ve *G*-invaryant $\mathcal{T}$ tam baz küme koleksiyonlarının varlığını gerektirir.

Teorem 7.1.2: $L = L(X)$, karakteristiği 0 olan bir K cismi üzerinde en az 2 sonlu ranklı bir serbest Lie cebiri olsun. O zaman her *T*-kümesinin gereni $L(X)$ in bir *KG*-alt modülü olmak üzere $L(X)$ in $\mathcal{T}$ tam baz küme koleksiyonları vardır. Böyle bir $\mathcal{T}$ için, Teorem 4.1.1 ve Sonuç 4.1.2 deki ($\mathcal{B} = \mathcal{T}^{(1)}$ ile) direkt parçalanışlar *KG*-modüllerin direkt parçalanışlarıdır ve Sonuç 4.1.4 (yine $\mathcal{B} = \mathcal{T}^{(1)}$ ile) ve Sonuç 5.1.4 deki izomorfizmler *KG*-modüllerin izomorfizmleridir.

Örneğin, L_8 Lie kuvveti için

$$L_8 \cong M_8 \oplus M_6 \otimes M_2 \oplus M_4 \otimes M_2 \otimes M_2 \oplus M_5 \otimes M_3 \oplus M_4(M_2) \oplus M_3 \otimes M_2 \otimes M_3 \oplus M_2(M_4) \oplus M_2\big(M_2(M_2)\big)$$

elde edilir.

Özellikle, p asal derecede sadece 1 seviyeli baz kümeleri (yani B-kümeler) meydana geldiği için bu parçalanışlarımız basittir. Ayrıca $t(U)$, tensör çarpanların (katlılıkları sayarak) bir verilmiş kümesine sahip olduğunda U, B-kümelerinin sayısı Sonuç 3.1.13 de verildi. L_p de meydana gelen ilgili tensör çarpımlar tüm parçaları 2 den büyük ya da eşit olmak üzere p nin bölümleri ile birebir aynıdır. n_i ve t_i pozitif tamsayılar, $n_1 > n_2 > \cdots > n_q$ ve $t_1 n_1 + t_2 n_2 + \cdots + t_q n_q = n$ olmak üzere n nin bir parçalanışı $\lambda = \left(n_1^{t_1}, n_2^{t_2}, \dots, n_q^{t_q}\right)$ dizisidir. M_λ tensör çarpımını

$$M_\lambda = \left(M_{n_1}\right)^{\otimes t_1} \otimes \left(M_{n_2}\right)^{\otimes t_2} \otimes \ \dots \otimes (M_{n_q})^{\otimes t_q}$$

olarak ve $t = t_1 + t_2 + \cdots + t_q$ olmak üzere

$$m(\lambda) = \frac{1}{t} \sum_{d|(t_1,\dots,t_q)} \mu(d) \frac{\left({}^{t}/_{d}\right)!}{\left({}^{t_1}/_{d}\right)!\left({}^{t_2}/_{d}\right)! \dots \left({}^{t_q}/_{d}\right)!}$$

olarak tanımlayalım. Kabul edelim ki $\Lambda(n)$, $n_q \geq 2$ için n nin tüm $\lambda = \left(n_1^{t_1}, n_2^{t_2}, \dots, n_q^{t_q}\right)$ parçalanışlarının kümesini göstersin. O zaman herhangi bir p asal sayısı için bir

$$L_p \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda(p)} (M_\lambda)^{\oplus m(\lambda)} \tag{7.1}$$

izomorfizmi elde edilir. G, $L = L(X)$ in tüm derecelendirilmiş cebir otomorfizmlerinin grubu olduğunda yani $r = |X|$ olmak üzere $G = GL(r, K)$ olduğunda L_n Lie kuvvetleri, en çok r parçasında (yukarıdaki gibi bir λ parçalanışı için parçaların sayısı $t_1 + t_2 + \cdots + t_q$ dur.) n nin parçalanışları tarafından gösterilen basit direkt bileşenlerin izomorfizm tipleri ile yarı basittirler. λ parçalanışına karşılık gelen basit modül için $[\lambda]$ yazılır. (ve eğer λ, r parçadan daha fazlasına sahip ise $[\lambda] = 0$ olmasını kabul edebiliriz.) n-inci M_n metabelyen Lie kuvveti basit olarak bilinir ve aslında $n \geq 3$ için $M_n \cong [n-1,1]$ dir ve $M_2 \cong [1^2]$ dir. Bundan dolayı (7.1) ifadesi L_p yi basit modüllerin tensör çarpımlarının bir direkt toplamı olarak ifade eder. Sonuç olarak, L_p nin indirgenemez çarpanları ve onların katlılıkları Littlewood-Richardson formülü kullanılarak hesaplanabilir. (Macdonald, 1979)

Örneğin, $p = 7$ için (7.1) ifadesinden

$$L_7 \cong M_7 \oplus M_5 \otimes M_2 \oplus M_3 \otimes M_2 \otimes M_2 \oplus M_4 \otimes M_3$$

elde edilir. Burada $M_7 \cong [6,1]$ dir ve

$$M_5 \otimes M_2 \cong [5,2] \oplus [5,1^2] \oplus [4,2,1] \oplus [4,1^3]$$
$$M_3 \otimes M_2 \otimes M_2 \cong [4,3] \oplus [4,2,1]^{\oplus 2} \oplus [4,1^3] \oplus [3^2,1]^{\oplus 2} \oplus [3,2^2]^{\oplus 2} \oplus [3,2,1^2]^{\oplus 4}$$
$$\oplus [3,1^4]^{\oplus 2} \oplus [2^3,1]^{\oplus 2} \oplus [2^2,1^3]^{\oplus 2} \oplus [2,1^5]$$
$$M_4 \otimes M_3 \cong [5,2] \oplus [5,1^2] \oplus [4,3] \oplus [4,2,1]^{\oplus 2} \oplus [4,1^3] \oplus [3^2,1] \oplus [3,2^2] \oplus [3,2,1^2]$$

elde edilir. Böylece (Thrall, 1942) tarafından ilk kez yayınlandığı gibi

$$L_7 \cong [6,1] \oplus [5,2]^{\oplus 2} \oplus [5,1^2]^{\oplus 2} \oplus [4,3]^{\oplus 2} \oplus [4,2,1]^{\oplus 5} \oplus [4,1^3]^{\oplus 3} \oplus [3^2,1]^{\oplus 3}$$
$$\oplus [3,2^2]^{\oplus 3} \oplus [3,2,1^2]^{\oplus 5} \oplus [3,1^4]^{\oplus 2} \oplus [2^3,1]^{\oplus 2} \oplus [2^2,1^3]^{\oplus 2} \oplus [2,1^5]$$

dir.

8. POZİTİF KARAKTERİSTİKLİ CİSİMLER ÜZERİNDE MODÜL PARÇALANIŞLARI

Bu bölümde p keyfi fakat sabit bir asal sayıdır ve K karakteristiği p olan bir cisimdir. O zaman L' türetilmiş cebiri bir G-invaryant standart serbest üreteç kümesine sahip olmayacağı için modül parçalanışları ile birlikte bu durum karakteristik 0 olduğu durumdan daha karışıktır. Fakat Lemma 7.1.1. den dolayı K cismi üzerinde serbest L Lie cebirinin L' türetilmiş cebiri $2 \leq n \leq p + 1$ için $\langle Y_n \rangle$ gerenleri G-invaryant olmak üzere bir $Y = Y_2 \cup Y_3 \cup \ldots$ standart serbest üreteç kümesine sahiptir. Sonuç olarak eğer $\mathcal{T}$, sadece bu tür standart serbest üreteç kümeleri kullanılarak elde edilen $L(X)$ in bir tam baz küme koleksiyonu ise o zaman sadece $2,3, \ldots, p + 1$ dereceli baz kümelerini içeren tüm *T*-kümeleri *G*-invaryanttır. Bu durum derecesi $\leq p + 1$ olan tüm *T*-kümeleri için doğrudur.

Teorem 8.1.1: $L = L(X)$, pozitif p karakteristikli bir K cismi üzerinde en az 2 sonlu ranklı bir serbest Lie cebiri olsun. O zaman derecesi $n \leq p + 1$ olan herhangi bir *T*-kümesinin gereni $L(X)$ in bir *KG*-alt modülü olacak şekilde $L(X)$ in $\mathcal{T}$ tam baz küme koleksiyonları vardır ve

i) Her $2 \leq n \leq p + 1$ için *KG*-modüller olarak

$$L_n(X) = \bigoplus_{d|n \; d \neq n} \bigoplus_{U \in \mathcal{T}^{(1)}_{n/d}} L_d(U) = \bigoplus_{U \in \mathcal{T}_n} \langle U \rangle$$

direkt parçalanışları vardır.

ii) $2 \leq n \leq p + 1$ olmak üzere her $U \in \mathcal{T}_n$ için *KG*-modüller olarak bir $\langle U \rangle \cong t(U)$ izomorfizmi vardır.

Özellikle, eğer q bir asal sayı olmak üzere $n = q$ ise (7.1) biçimindeki parçalanışlar (p nin yerine q alarak) $q \leq p$ olmak üzere karakteristiği p olan cisimler üzerinde geçerlidir.

Teorem 8.1.1 in bir uygulaması olarak (Bryant, Stöhr, 2005) in ana sonucu yeniden bulunabilir. p, K nın karakteristiği olmak üzere $L_p(X)$ Lie kuvvetini göz önünde bulunduralım. O zaman teoremden dolayı

$$L_p = \bigoplus_{U \in \mathcal{T}_p^{(1)}} \langle U \rangle$$

elde edilir. $L_p \cap L''$ arakesiti $DegU \geq 2$ olmak üzere $U \in \mathcal{T}_p^{(1)}$, T-kümelerinin gereni ile çakışır. Diğer bir değişle, Y_p hariç $\mathcal{T}_p^{(1)}$ deki tüm T-kümeleri ile çakışır. Herhangi böyle bir U için $t(U)$ ilgili tensör kuvveti uygun bir $n_1, n_2, \dots, n_k$ için $k \geq 2$, $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = p$ olmak üzere

$$t(U) \cong M_{n_1} \otimes M_{n_2} \otimes \dots \otimes M_{n_k} \tag{8.1}$$

biçimine sahiptir. $M_n(X)$ metabelyen Lie kuvveti için (birimli, değişmeli bir keyfi K halkası üzerinde) M_n den $T_n = \langle X \rangle^{\otimes n}$ tensör kuvveti içine bir $\mu_n: M_n \longrightarrow T_n$, KG-modül homomorfizmi vardır öyle ki μ_n nin

$$x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_n \longmapsto [x_1, x_2, \dots, x_n] \; (x_i \in X)$$

ile tanımlanan $\rho_n: T_n \longrightarrow M_n$ kanonik örten dönüşümü ile bileşkesi M_n üzerinde $n(n-2)!$ ile çarpma anlamına gelir. (Stöhr, 1987; Hannebauer, Stöhr, 1989). Buradan $n(n-2)!$, K da tersinir olduğunda M_n, T_n nin KG-modül olarak bir direkt bileşenidir. K karakteristiği p olan bir cisim olduğunda her $n < p$ için M_n, T_n nin bir direkt bileşenidir. Bu, (8.1) in sağ tarafındaki tensör çarpanlar için sağlanır ve bu yüzden bütün tensör çarpım

$$T_p = T_{n_1} \otimes T_{n_2} \otimes \dots \otimes T_{n_k}$$

tensör kuvvetinin bir direkt bileşenidir. $L_p \cap L''$, (8.1) deki gibi $t(U)$ ile $\langle U \rangle$, *KG*-modüllerinin bir direkt toplamı olduğu için aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 8.1.2: (Bryant, Stöhr, 2005, Teorem 3.1) $L = L(X)$, pozitif p karakteristikli bir K cismi üzerinde en az 2 sonlu ranklı bir serbest Lie cebiri olsun. O zaman $L_p \cap L''$ alt modülü

$$T_p = \langle X \rangle^{\otimes p}$$

tensör kuvvetinin bir direkt bileşenidir.

KAYNAKLAR

BAKHTURIN, Y. A., 1985. Identities in Lie Algebras Nauka, Moscow, (in Russian).

________, 1987. Identical Relations in Lie Algebras. VNU Science Press, Utrecht.

BRYANT, R. M., KOVÁCS, L. G., STÖHR, R., 2002a. Lie powers of modules for groups of prime order, Proc. London Math. Soc., 84: 343-374.

________, 2002b. Invariant bases for free Lie rings, Q. J. Math., 53: 1-17.

BRYANT, R. M., STÖHR, R., 2005. Lie powers in prime degree, Q. J. Math., 56: 473-489.

BOKUT, L. A., 1963. A basis for free polynilpotent Lie Algebras, Algebra Logika, 3: 13-20 (in Russian).

BOURBAKI, N., 1975. Lie groups and Lie algebras. Addison-Wesley, France, 450s.

CHEN, K. -T., FOX, R. H., LYNDON, R. C., 1958. Free differential calculus. IV. The quotient groups of the lower central series, Ann. of Math., 68 (2): 81-95.

CHIBRIKOV, E. S., 2006. A right normed basis for free Lie algebras and Lyndon-Shirshov words, J. Algebra, 302: 593-612.

COHN, P. M., 1964. Subalgebras of Free Associative Algebras. Proc. London, Math. Soc., 3, 14: 618-632.

GRILLET, P. A., 2007. Abstract Algebra, Second Edition, Dept. Mathematics, Tulane University, New Orleans, LA 70118, USA.

GRUENBERG, K. W., 1957. Resudual properties of infinite soluble, Proc. London Math. Soc., 3, 7: 29-62.

HALL, M., 1950. A basis for free Lie rings and higher commutators in free groups, Proc. Amer. Math. Soc., 1: 575-581.

HANNEBAUER, T., STÖHR, R., 1990. Homology of groups with coeffecients in free metabelian Lie powers and exterior powers of relation modules and applications to group theory, in: Proc. Second Internat. Group Theory Conf., Bressanone: Brixen, June 11-17, 1989, Rend. Circ. Mat., Palermo (2) (Suppl. 23): 77-113.

KUKİN, G. P., 1972. The Subalgebra of free Lie p-algebras, Algebra Logika 11:535-550 (in Russian).

________, 1974. The Subalgebra of free Lie p-algebras, Algebra Logic 11:294-303 (in English)

MACDONALD, I. G., 1979. Symmetric Functions and Hall Polynomials, Clarendon Press, Oxford.

MAGNUS, W., KARRAS, A., SOLİTAR, D.,1966. Combinatorial Group Theory, Wiley-Interscience, New York.

SHIRSHOV, A. I., 1953. Subalgebras of free Lie algebras, Mat. Sb. N.S., 33 (75): 441-452 (in Russian).

________, 1958. On free Lie rings, Mat. Sb. N.S., 45 (87): 113-122 (in Russian).

SHMEL'KIN, A. L., 1963. Free polynilpotent groups, Soviet Math. Dokl. (Engl. Trans.), 4: 950-953.

STÖHR, R., 1987. On torsion in free central extensions of some torsion-free groups, J. Pure Appl. Algebra, 46: 249-289.

________, 2008. Bases, filtrations and module decompositions of free Lie algebras, Journal of Pure and Applied Algebra, 212: 1187-1206.

THRALL, R. M., 1942. On symmetrized Kronecker powers and the structure of the free Lie ring, Amer. J. Math., 64: 371-388.

WALL, G. E., 1978. Commutator collection and module structure, in:Topics in Algebra (Proc. 18th Summer Res. Inst., Austral. Math. Soc., Austral. Nat. Univ., Canberra, 1978), in: Lecture Notes in Math., vol. 697, Springer, Berlin, pp. 174-196.

WARM, M.**,** 1972. Basic for polynilpotent groups, Proc. London Math. Soc. Ser 3, 24

WITT, E., 1956. Die unterrine der freien Liesschen ringe, Math. Zeitschrift, 64:195-216

ÖZGEÇMİŞ

1986 tarihinde Osmaniye'nin Düziçi ilçesinde doğdu. 2003 yılında Osmaniye Dervişpaşa Lisesi'nden mezun oldu. 2007 yılında Cumhuriyet Üniversitesi Matematik Bölümünü bitirdi. 2008 yılında Çukurova Üniversitesi Matematik Bölümü Yüksek lisansını kazandı. YADİM'de 1 yıl İngilizce hazırlık eğitimi aldıktan sonra 2009 yılında Matematik Bölümünde Yüksek lisansa başladı. 2010 yılında Çukurova Üniversitesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi oldu. Halen görevine devam etmektedir.