

**MINKOWSKI UZAYINDA SLANT HELİSLERİN
KARAKTERİZASYONLARI
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

Serhat ÖZKAN

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Derya SAĞLAM

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Haziran, 2012

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MINKOWSKI UZAYINDA SLANT HELİSLERİN
KARAKTERİZASYONLARI

Serhat ÖZKAN

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Derya SAĞLAM

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran, 2012

TEZ ONAY SAYFASI

Serhat ÖZKAN tarafından hazırlanan “Minkowski Uzayında Slant Helislerin Karakterizasyonları” adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 29/05/2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı’nda** **YÜKSEK LİSANS TEZİ/DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Derya SAĞLAM

Başkan : Prof. Dr. Emine SOYTÜRK SEYRANTEPE
Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi,

Üye : Doç. Dr. Murat PEKER
Afyon Kocatepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi,

Üye : Yrd. Doç. Dr. Derya SAĞLAM
Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi,

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun
...../...../..... tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

.....

Enstitü Müdürü
(Ünvanı, Adı ve Soyadı)

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

29.05.2012
Serhat ÖZKAN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MINKOWSKI UZAYINDA SLANT HELİSLERİN KARAKTERİZASYONLARI

Serhat ÖZKAN

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Derya SAĞLAM

Bu tez çalışması yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümüne ayrılmıştır. İkinci bölümde, temel kavramlardan söz edilmiştir. Üçüncü bölümde, 3 boyutlu Öklid uzayında slant helislerin karakterizasyonları incelenmiştir. Dördüncü bölümde $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında slant helislerin karakterizasyonları, beşinci bölümde, $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında slant helislerin karakterizasyonları incelenmiştir. Altıncı bölümde n boyutlu $\mathbb{E}_v^n$ Minkowski uzayında slant helislerin karakterizasyonları ve son olarak yedinci bölümde dual Lorentz uzayında slant helislerin bazı karakterizasyonları elde edilmiştir.

2012, vi+104 sayfa

Anahtar Kelimeler: Öklid uzayı, Minkowski uzayı, dual uzay, dual Lorentz uzayı, slant helis.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

CHARACTERIZATIONS OF SLANT HELICES IN THE MINKOWSKI SPACE

Serhat ÖZKAN

Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Derya SAĞLAM

This thesis consists of seven chapters. The first chapter is devoted to the introduction section. In the second chapter, we have given about the basic concepts needed. In the third chapter, we have studied some charecterizations of slant helices in three dimension Euclidean space. In the fourth chapter and fifth chapter some charecterizations of slant helices were investigated in the Minkowski space $\mathbb{E}_1^3$ and the Euclidean space $\mathbb{E}^n$. In the sixth chapter, we have obtained some characteriaztion of slant helices in n-dimension Minkowski space $\mathbb{E}_v^n$ and finally seventh chapter we obtained some characterization of dual Lorentz space.

2012, vi+104 pages

Key Words: Euclidean space, Minkowski space, dual space, dual Lorentz space, slant helix.

TEŞEKKÜR

Bu tezin gerçekleştirilmesinde ve yüksek lisans eğitimimin, başlangıcından sonuna kadar, gerekli bütün yardım, tavsiye ve yönlendirmeleri yapan, karşılaştığım sorunların çözümünde deneyimlerinden yararlandığım danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Derya SAĞLAM (Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi)'a, her türlü yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen Sayın Prof. Dr. Emine SOYTÜRK SEYRANTEPE (Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi)'ye teşekkür ederim.

Ayrıca eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme teşekkür ederim.

Serhat ÖZKAN

AFYONKARAHİSAR, 2012

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
SİMGELER DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	2
2.1. Öklid Uzayı.....	2
2.2. Öklid Uzayında Eğriler.....	2
2.3. Öklid Uzayında Frenet Vektör Alanları.....	3
2.4. Minkowski Uzayı.....	5
3. $\mathbb{E}^3$ ÖKLİD UZAYINDA SLANT HELİSLERİN KARAKTERİZASYONLARI.....	11
3.1. Slant Helislerin Küresel Göstergeleri.....	11
3.2. Slant Helislerin Karakterizasyonları.....	19
4. $\mathbb{E}_1^3$ MINKOWSKİ UZAYINDA SLANT HELİSLERİN KARAKTERİZASYONLARI.....	36
4.1. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski Uzayında Slant Helisler.....	36
4.2. Işıksı Olmayan Slant Helislerin İnvolut ve Göstergeleri	42
5. $\mathbb{E}^n$ ÖKLİD UZAYINDA SLANT HELİSLERİN KARAKTERİZASYONLARI.....	48
5.1. $\mathbb{E}^n$ Öklid Uzayında Slant Helisler.....	48
5.2. 2. Tipten Harmonik Eğrilikler ve Slant Helisler.....	59
6. $\mathbb{E}_v^n$ MINKOWSKİ UZAYINDA SLANT HELİSLERİN KARAKTERİZASYONLARI.....	68
6.1. $\mathbb{E}_v^n$ Minkowski Uzayında Slant Helisler.....	68

7. $\mathbb{D}_1^3$ DUAL LORENTZ UZAYINDA SLANT HELİSLER.....	90
7.1. $\mathbb{D}_1^3$ Dual Lorentz Uzayda Slant Helisler.....	90
7.2. $\mathbb{D}_1^3$ de Dual Slant Helislerin Bazı Karakterizasyonları.....	94
7.3. $\mathbb{D}_1^3$ de Bir Dual Slant Helisin İnvolut ve Göstergeleri.....	98
KAYNAKLAR.....	102
ÖZGEÇMİŞ.....	104

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{E}^3$	Öklid Uzayı
$\mathbb{E}^4$	4 – boyutlu Öklid Uzayı
$\mathbb{E}_1^3$	3 – boyutlu Minkowski Uzayı
$\mathbb{E}_v^n$	n – boyutlu Minkowski Uzayı
$\mathbb{D}^3$	Dual Uzay
$\mathbb{D}_1^3$	Lorentz $\mathbb{D}$ -uzay
$\langle, \rangle$	İç çarpım veya Lorentz metriği
$\ , \ $	Norm fonksiyonu
$\times$	Vektörel çarpım
κ	Eğrilik fonksiyonu
τ	Burulma fonksiyonu
$\hat{\kappa}$	Dual eğrilik fonksiyonu
$\hat{\tau}$	Dual burulma fonksiyonu

1. GİRİŞ

Helisler diferensiyel geometride en iyi bilinen eğrilerden biridir. Helis, 3 boyutlu Öklid uzayında, teğet vektörü belirli bir doğrultu ile sabit açı yapan eğri olarak tanımlanır. Bir helis eğrisi, burulması τ ve eğriliği κ olmak üzere eğri boyunca τ/κ oranının sabit olması ile karakterize edilir. κ ve τ her ikisi de sıfırdan farklı sabit fonksiyonlar ise τ/κ sabit olduğundan eğri bir helistir ve dairesel helis olarak adlandırılır. Doğru ve çember dejenere helis örnekleridir. Eğri bir doğru ise $\kappa = 0$ ve çember ise $\tau = 0$ dır. Son yıllarda bu tip eğriler üzerine çalışmalar yapılmıştır (Scofield 1995, Gluck 1996, Barros 1997, Izumiya 2006).

$\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında bir slant helis, asli normal vektörü belirli bir doğrultu ile sabit açı yapan eğridir. Eğriliği sıfırdan farklı bir α eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart α eğrisinin (n) asli normal göstergesinin küresel görüntüsünün jeodezik eğriliği olan

$$\sigma_n(s) = \left(\frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{3/2}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \right) (s)$$

fonksiyonun sabit olmasıdır, (Izumiya and Takeuchi 2004).

Daha sonra slant helisler $\mathbb{E}^4$ ve $\mathbb{E}^n$ Öklid uzaylarında, $\mathbb{E}_1^4$, $\mathbb{E}_v^n$ Minkowski uzaylarında incelenerek, karakterizasyonları verilmiştir, (Ahmad and Turgut 2010, Sağlam ve Kalkan 2010).

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Öklid Uzayı

Burada referansımız Sabuncuoğlu (2006) olacaktır.

$\mathbb{R}$ reel sayılar cismi olmak üzere $\mathbb{E}^n = \{(p_1, p_2, \dots, p_n)\}$ kümesinde toplama işlemi

$$(p_1, p_2, \dots, p_n) + (q_1, q_2, \dots, q_n) = (p_1 + q_1, p_2 + q_2, \dots, p_n + q_n)$$

ile tanımlanır. $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $(p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{E}^n$ için skalerle çarpma işlemi,

$$\lambda(p_1, p_2, \dots, p_n) = (\lambda p_1, \lambda p_2, \dots, \lambda p_n)$$

ile tanımlanır. Bu işlemlere göre $\mathbb{E}^n$ kümesi $\mathbb{E}$ cismi üstünde bir vektör uzayıdır. $\mathbb{E}^n$ vektör uzayında $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ve $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ olmak üzere

$$\langle p, q \rangle = \sum p_i q_i$$

eşitliği ile tanımlanan fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur. Bu iç çarpıma $\mathbb{E}^n$ uzayının Öklid iç çarpımı denir. İç çarpım fonksiyonundan yararlanarak $p \in \mathbb{E}^n$ olmak üzere,

$$\|p\| = \sqrt{\langle p, p \rangle}$$

fonksiyonuna $\mathbb{E}^n$ de p vektörünün normu denir.

$$d(p, q) = \|p - q\|$$

şeklinde tanımlanan

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonuna $\mathbb{E}^n$ uzayında bir metrik denir. Böylece $\mathbb{E}^n$ bir metrik uzaydır. Her metrik uzay bir topolojik uzay olduğundan $\mathbb{E}^n$ uzayı bir topolojik uzaydır. Bu topoloji ile $\mathbb{E}^n$ uzayına Öklid uzayı denir.

2.2 Öklid Uzayında Eğriler

Tanım 2.2.1 $I, \mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olmak üzere $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ biçiminde düzgün bir α dönüşümüne $\mathbb{E}^n$ uzayı içinde bir eğri denir.

$\mathbb{E}^n$ uzayında dik koordinat fonksiyonları $x_1, x_2, \dots, x_n$ olsun. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ eğrisinin bileşenleri $1 \leq j \leq n$ için $\alpha_j = x_j \circ \alpha$ biçimindedir. Her bir α_j fonksiyonu I aralığından $\mathbb{R}$ ye giden bir fonksiyondur.

Tanım 2.2.2 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ bir eğri olsun. J açık bir aralık olmak üzere bir $h : J \rightarrow I$ diffeomorfizmine α eğrisi için bir parametre dönüşümü denir. $\alpha \circ h$ eğrisine, α eğrisinin h ile parametrelendirilmiş denir.

Tanım 2.2.3 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisi verilsin. Her $t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise, α eğrisine düzenli (regüler) eğri denir.

Tanım 2.2.4 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisi verilsin. Her $t \in I$ için $\|\alpha'(t)\| = 1$ ise α eğrisine birim hızlı denir.

2.3 Öklid Uzayında Frenet Vektör Alanları

$\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı bir eğri olsun. $s \in I$ için $\alpha_* \left(\frac{d}{dx}(s) \right)$ vektörü $\alpha'(s)$ ile gösterilir ve α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki hız vektörü denir. $\alpha'(s)$ vektörü $\alpha(s)$ noktasında eğriye teğet bir vektördür ve uzunluğu bir birimdir.

Tanım 2.3.1 $\mathbb{E}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi için

$$t(s) = \alpha'(s)$$

eşitliği ile belirli $t(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü denir. t vektör alanına da birim teğet vektör alanı denir.

Tanım 2.3.2 $\mathbb{E}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi için

$$\begin{aligned} \kappa & : I \rightarrow \mathbb{R} \\ \kappa(s) & = \|t'(s)\| \end{aligned}$$

fonksiyonuna α eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa(s)$ sayısına α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir. $t = \alpha'(s)$ olduğundan $\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|$ dir.

Tanım 2.3.3 $\mathbb{E}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi için

$$n(s) = \frac{1}{\kappa(s)} t'(s)$$

eşitliği ile belirlenen $n(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki asli normal vektörü denir. n vektör alanına da asli normal vektör alanı denir.

Tanım 2.3.4 $\mathbb{E}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi için

$$b(s) = t(s) \times n(s)$$

eşitliği ile belirlenen $b(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki binormal vektörü denir. b vektör alanına da binormal vektör alanı denir.

Tanım 2.3.5 $t(s), n(s), b(s)$ vektörlerine $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri denir. $\{t(s), n(s), b(s)\}$ kümesine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısı denir. t, n, b vektör alanlarına α eğrisinin Frenet vektör alanları denir.

Tanım 2.3.6 $\mathbb{E}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi için

$$\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\tau(s) = -\langle b'(s), n(s) \rangle$$

fonksiyonuna, α eğrisinin burulma fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması denir.

Tanım 2.3.7 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı bir eğri olsun, α eğrisi boyunca sabit bir U vektörü için $\langle t, u \rangle = \cos \theta$ sabit ise α eğrisine birim hızlı bir genel helis denir. Burada $t(s) = \alpha'(s)$ dir.

Teorem 2.3.1 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisi için Serret-Frenet formülleri

$$t'(s) = \kappa(s)n(s)$$

$$n'(s) = -\kappa(s)t(s) + \tau(s)b(s)$$

$$b'(s) = -\tau(s)n(s)$$

dir.

Teorem 2.3.2 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin genel bir helis olması için gerek ve yeter şart

$$\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s) = \text{sabit}$$

olmasıdır. Eğer $\kappa(s) \neq 0$ ve $\tau(s)$ ikisi birden sabit iseler bunu dairesel helis olarak adlandırırız.

2.4 Minkowski Uzayı

Burada referansımız O'Neil (1983) ve Lopez (2008) olacaktır.

Teorem 2.4.1 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$, olsun. $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_n(s)\}$ birim hızlı α eğrisinin hareketli Frenet çatısı ise burada V_i ($i = 1, 2, \dots, n$) *i.ci* Frenet vektör alanı olmak üzere Frenet formülleri

$$\begin{aligned} V_1'(s) &= \kappa_1(s)V_2(s) \quad , \\ V_i'(s) &= -\kappa_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + \kappa_i(s)V_{i+1}(s) \quad , \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \\ V_n'(s) &= -\kappa_{n-1}(s)V_{n-1}(s). \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

şeklindedir. Burada $\kappa_i(s)$ α eğrisinin *i.ci* eğriligidir.

Tanım 2.4.1 $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ve $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ olmak üzere

$$\langle u, v \rangle = -\sum_{i=1}^v u_i v_i + \sum_{i=v+1}^n u_i v_i$$

metriği ile birlikte $\mathbb{E}^n$ vektör uzayına n boyutlu Minkowski uzayı denir. $\mathbb{E}_v^n$ ile gösterilir. $\langle, \rangle$ metriğine de Minkowski metriği denir.

Tanım 2.4.2 $v \in \mathbb{E}_v^n$ olsun.

- i) $\langle v, v \rangle > 0$ ya da $v = 0$ ise v vektörüne uzaysı vektör,
- ii) $\langle v, v \rangle < 0$ ise v vektörüne zamansı vektör,
- iii) $\langle v, v \rangle = 0$ ve $v \neq 0$ ise v vektörüne ışıksı vektör denir.

Tanım 2.4.3 Bir $v \in \mathbb{E}_v^n$ olsun, $\|v\| = \sqrt{|\langle v, v \rangle|}$ sayısına v vektörünün normu (boyu) denir.

Tanım 2.4.4 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_v^n$ düzgün fonksiyonuna $\mathbb{E}_v^n$ de bir eğri denir.

Tanım 2.4.5 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_v^n$ regüler eğri olsun. α uzaysı veya zamansı ise ışıksı olmayan (non-null) eğri denir. Işıksı olmayan bir eğri için $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise eğriye birim hızlı eğri denir. α yı birim hızlı olacak biçimde yeniden parametrelendirebiliriz. Bu durumda α eğrisine yay uzunluğu ile parametrelendirilmiş denir. Eğer α ışıksı bir eğri ise ivme vektörü olan $\alpha''(s) \forall t \in I$ için uzaysı vektördür. $\|\alpha''(s)\| = 1$ olacak şekilde α yı yeniden parametrelendirebiliriz. Bu durumda α ya pseudo yay uzunluğu ile parametrelendirilmiş deriz. Her iki durumda da α eğrisine bir birim hızlı eğri denir.

Tanım 2.4.6 $\alpha, \mathbb{E}_v^n$ Minkowski uzayında bir eğri olsun.

- i) $\forall t \in I$ için $\alpha'(t)$ hız vektörü bir uzaysı vektör ise α eğrisine uzaysı eğri,
- ii) $\forall t \in I$ için $\alpha'(t)$ hız vektörü bir zamansı vektör ise α eğrisine zamansı eğri,
- iii) $\forall t \in I$ için $\alpha'(t)$ hız vektörü bir ışıksı vektör ise α eğrisine ışıksı (null) eğri denir.

Teorem 2.4.2 $\mathbb{E}_v^n$ de $\alpha = \alpha(s)$ birim hızlı ışıksı olmayan eğri ve $\{V_1(s), \dots, V_n(s)\}$, α boyunca hareketli çatısı olsun. Burada V_i vektörleri $\langle V_i, V_i \rangle = \varepsilon_i = \pm 1$ eşitliğini sağlayan ortogonal vektörlerdir. α eğisi için Frenet eşitlikleri

$$\begin{bmatrix} V'_1 \\ V'_2 \\ V'_3 \\ \vdots \\ V'_{n-1} \\ V'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 \varepsilon_3 \kappa_2 & 0 & \kappa_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \kappa_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\varepsilon_{n-1} \varepsilon_n \kappa_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_{n-1} \\ V_n \end{bmatrix} \quad (2.4.2)$$

eşitliği ile verilebilir.

α nın i -nci eğriligi $\kappa_i(s)$ ile gösterilir. Her $s \in I$ için $\kappa_{n-1}(s) = 0$ ise $V_n(s)$ sabit bir vektördür ve α eğrisi $V_n(s)$ ye dik $(n-1)$ boyutlu afin alt uzaydadır. Buna göre $s \in I$

için $\kappa_i(s) \neq 0$, $1 \leq i \leq n-1$ dir. Burada referansımız Petroviç-Torgasev and Sucurovic (2002) dir.

$\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında birim hızlı bir α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki $\{T(s), N(s), B(s)\}$ Frenet çatısını Öklid uzayındaki gibi tanımlayabiliriz. Burada T teğet vektör alanı, N normal vektör alanı, B binormal vektör alanıdır. Şimdi Frenet eşitliklerini uzaysı, zamansız ve ışıksız eğriler için elde edelim.

Zamansız Durum:

α bir zamansız eğri olsun. $T(s) = \alpha'(s)$ o zaman $T'(s) \neq 0$ bir uzaysı vektördür ve $T(s)$ vektörüne diktir. α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği $\kappa(s) = \|T'(s)\|$ biçiminde belirlenir. $N(s)$ normal vektörü

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa(s)} = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

dir. Ayrıca

$$\kappa(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle$$

olur.

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

vektörüne binormal vektör denir. $B(s)$ birim ve uzaysı bir vektördür. Her bir $s \in I$ için $\{T, N, B\}$ $\mathbb{E}_1^3$ in bir ortonormal tabanıdır ve α eğrisinin Frenet çatısı olarak adlandırılır.

$$\tau(s) = \langle N'(s), B(s) \rangle = - \langle B'(s), N(s) \rangle$$

sayısına α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması denir. Zamansız bir eğrinin Frenet eşitliklikleri

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Uzaysı Durum:

T' nin causal karakterine bağılı olarak 3 durum vardır;

i) $T'(s)$ bir uzaysı vektör olsun.

$$\begin{aligned}\kappa(s) &= \|T'(s)\| \\ N(s) &= T'(s)/\kappa(s) \\ B(s) &= T(s) \times N(s)\end{aligned}$$

ise Frenet eşitlikleri:

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$
$$\tau(s) = - \langle N'(s), B(s) \rangle = \langle B'(s), N(s) \rangle$$

şeklindedir.

ii) $T'(s)$ bir zamansı vektör olsun.

$$\begin{aligned}N(s) &= T'(s)/\kappa(s) \\ \kappa(s) &= \sqrt{- \langle T'(s), T'(s) \rangle}\end{aligned}$$

ise Frenet eşitlikleri:

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$
$$\tau(s) = \langle N'(s), B(s) \rangle$$

şeklindedir.

iii) $T'(s)$ bir ışıksı vektör olsun. $T(s)$ vektörü ile lineer bağımsız olan normal vektörü $N(s) = T'(s)$ olarak tanımlayalım. $\langle N(s), B(s) \rangle = 1$ olacak biçimde $T(s)$ vektörüne dik bir tek ışıksı $B(s)$ vektörü vardır. Buna göre Frenet eşitlikleri:

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ -1 & 0 & -\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Işıksı Durum:

α , $\mathbb{E}_1^3$ de birim hızlı bir ışıksı eğri olsun. $T(s) = \alpha'(s)$ ile tanımlanır ve ışıksı bir vektördür. Normal vektör $N(s) = T'(s)$ uzaysı vektördür. $\langle T(s), B(s) \rangle = 1$ olacak biçimde $N(s)$ ye dik bir tek ışıksı $B(s)$ binormal vektörü vardır. Buna göre Frenet eşitlikleri:

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tau & 0 & -1 \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Tanım 2.4.7

i) Hiperbolik Açı: Minkowski uzayında x ve y aynı zaman konisinde iki zamansı vektör olsun.

$$\langle x, y \rangle = -\|x\|\|y\| \cosh \theta$$

eşitliğini sağlayan bir tek $\theta \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu sayıya x ve y arasındaki hiperbolik açı denir.

ii) Merkez Açı : Minkowski uzayında x ve y bir zamansı alt vektör uzayını geren iki zamansı vektör olsun.

$$|\langle x, y \rangle| = \|x\|\|y\| \cosh \theta$$

eşitliğini sağlayan bir tek $\theta \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu sayıya x ve y arasındaki merkez açı denir.

iii) Uzaysı Açı : Minkowski uzayında x ve y bir uzaysı alt vektör uzayını geren iki uzaysı vektör olsun.

$$\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\| \cos \theta$$

eşitliğini sağlayan bir tek $\theta \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu sayıya x ve y arasındaki uzaysı açı denir.

iv) Lorentz Zamansı Açı : Minkowski uzayında bir uzaysı vektör x , bir zamansı vektör y olsun.

$$| \langle x, y \rangle | = \|x\| \|y\| \cos \theta$$

eşitliğini sağlayan bir tek $\theta \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu sayıya x ve y arasındaki Lorentz zamansı açı denir. Burada referansımız O'Neill (1983) ve Kazaz (2007) dir.

3. 3 BOYUTLU $\mathbb{E}^3$ ÖKLİD UZAYINDA SLANT HELİSLERİN KARAKTERİZASYONLARI

3.1 Slant Helislerin Küresel Göstergeleri

Tanım 3.1.1 α , 3 boyutlu Öklid uzayında Frenet vektörleri t, n, b olan düzenli bir eğri olsun. α eğrisi boyunca birim teğet vektörleri, orjin merkezli 1 yarıçaplı küre üzerinde bir (t) eğri üretir. Bu (t) eğrisi α eğrisinin teğet göstergesi olarak adlandırılır. Yani α nın teğet göstergesi $(t)(s) = t(s)$ eşitliğiyle tanımlanan bir eğridir. Benzer olarak α nın asli normal göstergesi $(n)(s) = n(s)$ ve binormal göstergesi $(b)(s) = b(s)$ biçiminde tanımlanır, (Kula ve Yaylı 2005).

Teorem 3.1.1 Eğriliği sıfırdan farklı bir α eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart α eğrisinin (n) asli normal göstergesinin küresel görüntüsünün jeodezik eğriliği olan

$$\sigma_n(s) = \left(\frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{3/2}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \right) (s) \quad (3.1.1)$$

fonksiyonun sabit olmasıdır, (Izumiya 2004).

İspat

Yüzey üstünde tanımlanan birim hızlı olmayan bir α eğrisinin jeodezik eğriliği

$$\kappa_g = \frac{1}{v^2} \langle \alpha'', Y \rangle$$

eşitliğiyle verilir. Burada $v = \|\alpha'\|$ ve $Y = (Z \circ \alpha) \times t$ (Z yüzeyin birim dik vektör alanıdır). (n) asli normal göstergesi birim küre üzerinde birim hızlı olmayan bir eğridir. Kürenin birim normal vektör alanı $Z(p) = (y_1(p), y_2(p), y_3(p))$ eşitliğinin belirlediği $Z = (y_1, y_2, y_3)$ vektör alanıdır. Buna göre

$$Z \circ n = (y_1 \circ n, y_2 \circ n, y_3 \circ n) = (n_1, n_2, n_3) = n$$

dir. (n) asli normal göstergesinin birim teğet vektör alanı t_n olsun. (n) birim hızlı olmadığından

$$t_n = \frac{n'}{\|n'\|}$$

dir.

$$n' = -\kappa t + \tau b$$

ve

$$\| n' \| = \sqrt{\langle n', n' \rangle} = \sqrt{\kappa^2 \langle t, t \rangle + \tau^2 \langle b, b \rangle} = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$$

olduğundan

$$t_n = \frac{-\kappa t + \tau b}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} = -\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}t + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}b$$

dir.

$$\begin{aligned} Y_n &= (Z \circ n) \times t_n \\ &= n \times \left(-\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}t + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}b \right) \\ &= -\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}n \times t + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}n \times b \\ &= -\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}b + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}t \end{aligned}$$

ve

$$n' = -\kappa t + \tau b$$

olduğundan

$$\begin{aligned} n'' &= -\kappa' t - \kappa^2 n + \tau' b - \tau^2 n \\ &= -\kappa' t - (\kappa^2 + \tau^2)n + \tau' b \end{aligned}$$

dir. Buna göre asli normal göstergesinin jeodezik eğriliğini σ_n ile gösterirsek

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{1}{(\sqrt{\kappa^2 + \tau^2})^2} \langle -\kappa' t - (\kappa^2 + \tau^2)n + \tau' b, \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}b + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}t \rangle \\ &= \frac{\tau' \kappa - \kappa' \tau}{(\kappa^2 + \tau^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

elde edilir. α eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart, (n) nin görüntüsünün, küre üstünde bir çemberin parçası olmasıdır. Diğer taraftan (n) nin görüntüsü olan eğrinin küre üstünde bir çemberin parçası olması için gerek ve yeter şart jeodezik eğriliğinin sabit olmasıdır.

Uyarı 3.1.1 α eğrisinin (t) teğet göstergesinin Frenet çatısı $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$ ise Frenet-Serret formülleri

$$\begin{aligned} D_{\mathcal{T}}\mathcal{T} &= \kappa_t \mathcal{N} \\ D_{\mathcal{T}}\mathcal{N} &= -\kappa_t \mathcal{T} + \tau_t \mathcal{B} \\ D_{\mathcal{T}}\mathcal{B} &= -\tau_t \mathcal{N} \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{t'}{\|t'\|} = \frac{\kappa n}{\kappa} = n \\ t' \times t'' &= \kappa n \times [\kappa' n + \kappa(-\kappa t + \tau b)] \\ &= \kappa^3 b + \kappa^2 \tau t \\ &= \kappa^2(\kappa b + \tau t) \end{aligned}$$

ve

$$\|t' \times t''\| = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \frac{t' \times t''}{\|t' \times t''\|} = \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} b + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} t \\ &= \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} (\tau t + \kappa b) \end{aligned}$$

dir. Buna göre

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \mathcal{B} \times \mathcal{T} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} (\tau t + \kappa b) \times n = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} [\tau(t \times n) + \kappa(b \times n)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} (\tau b - \kappa t) \end{aligned}$$

olur. Böylece (t) nin Frenet vektör alanları

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= n \\ \mathcal{N} &= \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} (-\kappa t + \tau b) \\ \mathcal{B} &= \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} (\tau t + \kappa b) \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

burada t, n, b α nın Frenet vektör alanları, κ ve τ α eğrisinin eğrilik ve burulmasıdır.

(t) nin eğriligi

$$\kappa_t = \frac{\|t' \times t''\|}{\|t'\|^3} = \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\kappa}$$

ve burulması

$$\tau_t = \frac{\langle t' \times t'', t''' \rangle}{\|t' \times t''\|^2}$$

formülünden

$$t''' = (-\kappa'\kappa - 2\kappa\kappa')t + (\kappa'' - 3\kappa^3 - \kappa\tau^2)n + (2\kappa'\tau + \kappa\tau')b$$

ve

$$\langle t' \times t'', t''' \rangle = -\kappa'\kappa^3\tau - 2\kappa^3\kappa'\tau + 2\kappa'\kappa^3\tau + \kappa^4\tau' = \kappa^3(-\kappa'\tau + \kappa\tau')$$

olduğundan

$$\tau_t = \frac{\kappa\tau' - \kappa'\tau}{\kappa(\kappa^2 + \tau^2)}$$

dır.

Uyarı 3.1.2 α eğrisinin (n) asli normal göstergesinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ ise Frenet-Serret formülleri

$$\begin{aligned} D_T T &= \kappa_n N \\ D_T N &= -\kappa_n T + \tau_n B \\ D_T B &= -\tau_n N \\ T &= \frac{n'}{\|n'\|} = \frac{-\kappa t + \tau b}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \\ B &= \frac{n' \times n''}{\|n' \times n''\|} \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

$$\begin{aligned} n' \times n'' &= (-\kappa t + \tau b) \times (-\kappa' t - (\kappa^2 + \tau^2)n + \tau' b) \\ &= \kappa(\kappa^2 + \tau^2)b + \kappa\tau'n - \tau\kappa'n + \tau(\kappa^2 + \tau^2)t \\ &= (\kappa^2 + \tau^2)(\tau t + \kappa b) + (\tau\kappa' - \tau'\kappa)n \end{aligned}$$

ve

$$\|n' \times n''\| = (\kappa^2 + \tau^2)^3 + (\tau'\kappa - \tau\kappa')^2$$

olduğundan

$$B = \frac{(\kappa^2 + \tau^2)(\tau t + \kappa b) + (\kappa\tau' - \kappa'\tau)n}{\sqrt{(\kappa\tau' - \kappa'\tau)^2 + (\kappa^2 + \tau^2)^3}}$$

dir.

$$\begin{aligned} N &= B \times T \\ &= \frac{(\kappa^2 + \tau^2)(\tau t + \kappa b) + (\kappa\tau' - \kappa'\tau)n}{\sqrt{(\kappa\tau' - \kappa'\tau)^2 + (\kappa^2 + \tau^2)^3}} \times \frac{-\kappa t + \tau b}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \\ &= \frac{-(\kappa^2 + \tau^2)(\kappa^2 + \tau^2)n + (\kappa\tau' - \kappa'\tau)(\tau t + \kappa b)}{\sqrt{(\kappa^2 + \tau^2)(\kappa\tau' - \kappa'\tau)^2 + (\kappa^2 + \tau^2)^4}} \\ &= \frac{-(\kappa^2 + \tau^2)^2 n + (\kappa\tau' - \kappa'\tau)(\tau t + \kappa b)}{\sqrt{(\kappa^2 + \tau^2)(\kappa\tau' - \kappa'\tau)^2 + (\kappa^2 + \tau^2)^4}} \end{aligned}$$

olur. Böylece (n) nin Frenet vektör alanları

$$\begin{aligned} T &= \frac{-\kappa t + \tau b}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \\ N &= \frac{(\kappa\tau' - \kappa'\tau)(\tau t + \kappa b) - (\kappa^2 + \tau^2)^2 n}{(\kappa^2 + \tau^2)(\kappa\tau' - \kappa'\tau)^2 + (\kappa^2 + \tau^2)^4} \\ B &= \frac{(\kappa^2 + \tau^2)(\tau t + \kappa b) + (\kappa\tau' - \kappa'\tau)n}{\sqrt{(\kappa\tau' - \kappa'\tau)^2 + (\kappa^2 + \tau^2)^3}} \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

burada t, n, b α nın Frenet vektör alanları, κ ve τ , α eğrisinin eğrilik ve burulmasıdır.

(n) nin eğriliği

$$\kappa_n = \frac{\|n' \times n''\|}{\|n'\|^3} = \frac{\sqrt{(\kappa^2 + \tau^2)^3 + (\kappa\tau' - \kappa'\tau)^2}}{(\kappa^2 + \tau^2)^{3/2}}$$

ve burulması

$$\tau_n = \frac{\langle n' \times n'', n''' \rangle}{\|n' \times n''\|^2}$$

formülünden

$$n''' = -\kappa''t - \kappa'\kappa n - 2\kappa\kappa'n - 2\tau\tau'n - (\kappa^2 + \tau^2)(-\kappa t + \tau b) + \tau'b - \tau'(\tau n)$$

ve

$$\begin{aligned} \langle n' \times n'', n''' \rangle &= \tau(\kappa^2 + \tau^2)(-\kappa'' + (\kappa^2 + \tau^2)\kappa) + (\kappa\tau' - \kappa'\tau)(-\kappa'\kappa - 2\kappa\kappa' - 3\tau\tau') + \\ &\quad \kappa(\kappa^2 + \tau^2)(-(\kappa^2 + \tau^2)\tau + \tau'') \\ &= (\kappa^2 + \tau^2)(-\kappa''\tau + \kappa\tau'') - 3(\kappa\tau' - \kappa'\tau)(\kappa'\kappa - \tau'\tau) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\tau_n = \frac{(\kappa\tau'' - \kappa''\tau)(\kappa^2 + \tau^2) - 3(\kappa\tau' - \kappa'\tau)(\kappa'\kappa + \tau'\tau)}{(\kappa^2 + \tau^2)^3 + (\kappa\tau' - \kappa'\tau)^2}$$

dir.

Uyarı 3.1.3 α eğrisinin (b) binormal göstergesinin Frenet çatısı $\{\mathbb{T}, \mathbb{N}, \mathbb{B}\}$ ise Frenet-Serret formülleri

$$D_{\mathbb{T}}\mathbb{T} = \kappa_b\mathbb{N} \quad (3.1.6)$$

$$D_{\mathbb{T}}\mathbb{N} = -\kappa_b\mathbb{T} + \tau_b\mathbb{B}$$

$$D_{\mathbb{T}}\mathbb{B} = -\tau_b\mathbb{N}$$

$$\mathbb{T} = \frac{b'}{\|b'\|} = -\frac{\tau n}{\tau} = -n$$

$$\mathbb{B} = \frac{b' \times b''}{\|b' \times b''\|} = \frac{\kappa b + \tau t}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$$

$$b'' = -\tau'n - \tau(-\kappa t + \tau b) = -\tau'n + \tau\kappa t - \tau^2 b$$

ve

$$b' \times b'' = -\tau n \times (-\tau'n + \tau\kappa t - \tau^2 b) = \tau^2(\kappa b + \tau t)$$

ve

$$\|b' \times b''\| = \tau^2\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$$

olduğundan

$$\mathbb{B} = \frac{\tau^2(\kappa b + \tau t)}{\tau^2\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}(\kappa b + \tau t)$$

dir.

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \mathbb{B} \times \mathbb{T} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}(\kappa b + \tau t) \times (-n) \\ &= \frac{\kappa t - \tau b}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \end{aligned}$$

olur. Böylece (n) nin Frenet vektör alanları

$$\begin{aligned} \mathbb{T} &= -n \\ \mathbb{N} &= \frac{\kappa t - \tau b}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \\ \mathbb{B} &= \frac{\kappa b + \tau t}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

burada t, n, b α nın Frenet vektör alanları, κ ve τ α eğrisinin eğrilik ve burulmasıdır.

(b) nin eğriliği

$$\kappa_b = \frac{\|b' \times b''\|}{\|b'\|^3} = \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\tau}$$

ve burulması

$$\tau_b = \frac{\langle b' \times b'', b''' \rangle}{\|b' \times b''\|^2}$$

formülünden

$$b''' = -\tau''n - \tau'(-\kappa t + \tau b) - \tau'(-\kappa t + \tau b) - \tau(-\kappa't - \kappa\kappa n + \tau'b + \tau^2n)$$

ve

$$\langle b' \times b'', b''' \rangle = -\tau^2\kappa.3\tau'\tau + \tau^3(2\tau'\kappa + \tau\kappa') = \tau^4\kappa' - \tau^3\kappa\tau' = \tau^3(\tau\kappa' - \kappa\tau')$$

olduğundan

$$\tau_b = \frac{\tau\kappa' - \kappa\tau'}{\tau(\kappa^2 + \tau^2)}$$

dir.

Tanım 3.1.2 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisinin birim teğet vektörü, sabit bir U vektörü ile eğri boyunca sabit bir açı yapıyorsa yani

$$\langle t, u \rangle = \cos \theta = \text{sabit}$$

ise α eğrisine genel helis denir.

Teorem 3.1.2 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin bir helis olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{\tau}{\kappa} = \text{sabit}$$

olmasıdır.

$\kappa \neq 0$ ve τ ikisi birden sabit ise α eğrisini dairesel helis olarak adlandırılır.

Şimdi, bir slant helisin teğet gösterge ve binormal göstergesinin küresel görüntülerinin küresel helisler olduğunu göstereceğiz.

Teorem 3.1.3 α bir slant helis olsun. α eğrisinin (t) teğet göstergesinin küresel görüntüsü bir küresel helistir, (Kula 2005).

İspat

(t) nin eğriliği κ_t , burulması τ_t olmak üzere uyarı 3.1.1 eşitliklerinden

$$\kappa_t = \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\kappa}$$

ve

$$\tau_t = \frac{\kappa\tau' - \kappa'\tau}{\kappa(\kappa^2 + \tau^2)}$$

dir. Buna göre

$$\begin{aligned} \frac{\tau_t}{\kappa_t} &= \frac{\kappa\tau' - \kappa'\tau}{\kappa(\kappa^2 + \tau^2)} \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \\ &= \frac{\kappa\tau' - \kappa'\tau}{(\kappa^2 + \tau^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{3/2}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \\ &= \sigma_n \end{aligned}$$

Teorem 3.1.3 ten σ_n sabit bir fonksiyondur. Dolayısıyla $\frac{\tau_t}{\kappa_t}$ sabit olduğundan (t) bir helistir.

Teorem 3.1.4 α bir slant helis olsun. α eğrisinin (b) binormal göstergesinin küresel görüntüsü bir küresel helistir (Kula 2005).

İspat

κ_b (b) nin eğriliği, τ_b (b) nin burulmasıdır.

$$\kappa_b = \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\tau}$$

ve

$$\tau_b = \frac{\tau\kappa' - \kappa\tau'}{\tau(\kappa^2 + \tau^2)}$$

(3.1.7) eşitliğinden sahibiz. Öyleyse

$$\begin{aligned} \frac{\tau_b}{\kappa_b} &= \frac{\tau\kappa' - \kappa\tau'}{\tau(\kappa^2 + \tau^2)} \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \\ &= \frac{\kappa\tau' - \kappa'\tau}{(\kappa^2 + \tau^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{3/2}} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \\ &= -\sigma(s) \end{aligned}$$

$\sigma(s)$ sabit olduğundan $\frac{\tau_b}{\kappa_b}$ sabittir.

3.2 Slant Helislerin Karakterizasyonları

Burada $\mathbb{E}^3$ de birim hızlı bir α eğrisinin slant helis olması için, (t) teğet göstergesi, (n) asli normal göstergesi ve (b) binormal göstergesini kullanarak bazı karakterizasyonlarını veriyoruz. Burada refereansımız Kula (2009) olacaktır.

Teorem 3.2.1 $\mathbb{E}^3$ te eğriliği ve burulması sıfırdan farklı olan birim hızlı bir α eğrisinin Frenet vektörleri t, n, b olsun. α nın bir slant helis olması için gerek ve yeter şart (n) asli normal göstergesinin asli normal vektör alanı N olmak üzere

$$D_T^2 N + \kappa_n^2 N = 0 \quad (3.2.1)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada κ_n , α eğrisinin (n) asli normal göstergesinin eğriliğidir.

İspat

Kabul edelim ki α bir slant helis olsun. Uyarı (3.1.2) den (n) in eğriliği

$$\begin{aligned} \kappa_n &= \frac{\sqrt{(\kappa^2 + \tau^2)^3 + (\kappa\tau' - \kappa'\tau)^2}}{(\kappa^2 + \tau^2)^{3/2}} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{\kappa\tau' - \kappa'\tau}{(\kappa^2 + \tau^2)^{3/2}}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 + \sigma_n^2} \end{aligned}$$

dir. α slant helis olduğundan σ_n sabittir. Buna göre κ_n sabittir.

$$\begin{aligned}\tau_n &= \frac{(\kappa\tau'' - \kappa''\tau)(\kappa^2 + \tau^2) - 3(\kappa\tau' - \kappa'\tau)(\kappa'\kappa + \tau'\tau)}{(\kappa^2 + \tau^2)^3 + (\kappa\tau' - \kappa'\tau)^2} \\ &= \frac{(\kappa^2 + \tau^2)^{5/2}}{(\kappa\tau' - \kappa'\tau)^2 + (\kappa^2 + \tau^2)^3} \frac{\sqrt{(\kappa^2 + \tau^2)}((\kappa\tau'' - \kappa''\tau)(\kappa^2 + \tau^2) - 3(\kappa\tau' - \kappa'\tau)(\kappa'\kappa + \tau'\tau))}{(\kappa^2 + \tau^2)^3} \\ &= \frac{(\kappa^2 + \tau^2)^{5/2}}{(\kappa\tau' - \kappa'\tau)^2 + (\kappa^2 + \tau^2)^3} \sigma'_n(s)\end{aligned}$$

ve

$$\sigma_n(s) = \text{sabit} \implies \sigma'_n(s) = 0$$

olduğundan $\tau_n = 0$ dır. Bu nedenle α nın asli normal göstergesi bir çemberdir. (3.1.4)

eşitliğinden

$$D_T N = -\kappa_n T + \tau_n B$$

ve κ_n sabit olduğundan

$$D_T^2 N = -\kappa'_n T - \kappa_n(\kappa_n N) = -\kappa_n N \implies D_T^2 N - \kappa_n N = 0$$

elde edilir.

Karşıt olarak (3.2.1) eşitliğinin geçerli olduğunu varsayalım. α eğrisinin bir slant helis olduğunu göstermeliyiz. (3.1.4) eşitliğinden

$$D_T N = -\kappa_n T + \tau_n B$$

dir. Türev alırsak

$$D_T^2 N = -\kappa'_n T - \kappa_n^2 N + \tau'_n B - \tau_n^2 N$$

olduğundan

$$D_T^2 N + \kappa_n^2 N = -\kappa'_n T + \tau'_n B - \tau_n^2 N = 0$$

olur. T, N, B lineer bağımsız olduğundan

$$-\kappa'_n = 0 \implies \kappa_n = \text{sabit}$$

$$\tau'_n = 0 \text{ ve } \tau_n^2 = 0 \implies \tau_n = 0$$

$$\kappa_n = \sqrt{1 + \sigma_n^2(s)} = \text{sabit}$$

$$\tau_n = \frac{(\kappa^2 + \tau^2)^{5/2}}{(\kappa\tau' - \kappa'\tau)^2 + (\kappa^2 + \tau^2)^3} \sigma'_n(s) = 0$$

olduğundan σ_n sabittir, bunun anlamı α bir slant helistir.

Teorem 3.2.2 $\mathbb{E}^3$ te eğriliği ve burulması sıfırdan farklı olan birim hızlı bir α eğrisinin Frenet vektörleri t, n, b olsun. α eğrisinin bir slant helis olması için gerek ve yeter şart (t) teğet göstergesinin teğet vektör alanı $\mathcal{T}$ olmak üzere

$$D_{\mathcal{T}}^3 \mathcal{T} - 3 \frac{\kappa'_t}{\kappa_t} D_{\mathcal{T}}^2 \mathcal{T} - \left\{ \frac{\kappa''_t}{\kappa_t} - 3 \left(\frac{\kappa'_t}{\kappa_t} \right)^2 - \lambda_1 \kappa_t^2 \right\} D_{\mathcal{T}} \mathcal{T} = 0 \quad (3.2.2)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada $\lambda_1 \in \mathbb{R}^+$ ($\lambda_1 = 1 + \frac{1}{c_1}$ ve $c_1 \in \mathbb{R}_0$) ve κ_t α eğrisinin (t) teğet göstergesinin eğriliğidir.

İspat

Kabul edelim ki α bir slant helis olsun. Böylece α nın teğet göstergesi bir genel helistir. (3.1.2) eşitliğinden $D_{\mathcal{T}} \mathcal{T} = \kappa_t \mathcal{N}$ dir. Buradan iki kez türev alarak

$$\begin{aligned} D_{\mathcal{T}} \mathcal{T} &= \kappa_t \mathcal{N} \\ D_{\mathcal{T}}^2 \mathcal{T} &= \kappa'_t \mathcal{N} - \kappa_t^2 \mathcal{T} + \kappa_t \tau_t \mathcal{B} \end{aligned}$$

$$D_{\mathcal{T}}^3 \mathcal{T} = -2\kappa'_t \kappa_t \mathcal{T} - \kappa_t^2 D_{\mathcal{T}} \mathcal{T} + \kappa_t'' \mathcal{N} - \kappa'_t \kappa_t \mathcal{T} + \kappa'_t \tau_t \mathcal{B} + \kappa_t' \tau_t \mathcal{B} + \kappa_t \tau'_t \mathcal{B} - \kappa_t \tau_t \tau'_t \mathcal{N} \quad (3.2.3)$$

elde edilir. Teğet göstergesi genel helis olduğundan

$$\frac{\tau_t}{\kappa_t} = \text{sabit} \implies \tau'_t \kappa_t - \tau_t \kappa'_t = 0 \implies \tau'_t \kappa_t = \tau_t \kappa'_t$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{\tau_t}{\kappa_t} = \frac{1}{c_1} &\implies \tau_t^2 = \frac{\kappa_t^2}{c_1^2} \\ &\implies \kappa_t^2 + \tau_t^2 = \kappa_t^2 \left(1 + \frac{1}{c_1^2} \right) \\ &\implies \kappa_t^2 + \tau_t^2 = \kappa_t^2 \lambda_1, \quad \lambda_1 = 1 + \frac{1}{c_1^2} \end{aligned}$$

dir. Buna göre (3.2.3) eşitliği

$$\begin{aligned}
D_{\mathcal{T}}^3 \mathcal{T} &= -3\kappa'_t \kappa_t \mathcal{T} - \kappa_t^2 D_{\mathcal{T}} \mathcal{T} + (\kappa_t'' - \kappa_t \tau_t^2) \mathcal{N} + 3\kappa'_t \tau_t \mathcal{B} \\
&= 3 \frac{\kappa'_t}{\kappa_t} (-\kappa_t^2 + \kappa_t \tau_t \mathcal{B}) + \kappa_t \mathcal{N} \left(-\kappa_t^2 + \frac{\kappa_t''}{\kappa_t} - \tau_t^2 \right) \\
&= 3 \frac{\kappa'_t}{\kappa_t} (-\kappa_t^2 + \kappa_t \tau_t \mathcal{B}) + \kappa_t \mathcal{N} \left(-\kappa_t^2 + \frac{\kappa_t''}{\kappa_t} - \tau_t^2 \right) + 3 \frac{(\kappa'_t)^2 \kappa_t \mathcal{N}}{\kappa_t^2} - 3 \frac{(\kappa'_t)^2 \kappa_t \mathcal{N}}{\kappa_t^2} \\
&= 3 \frac{\kappa'_t}{\kappa_t} (-\kappa_t^2 \mathcal{T} + \kappa_t \tau_t \mathcal{B} + \kappa'_t \mathcal{N}) + \kappa_t \mathcal{N} \left(-\kappa_t^2 + \frac{\kappa_t''}{\kappa_t} - \tau_t^2 - 3 \left(\frac{\kappa'_t}{\kappa_t} \right)^2 \right) \\
&= 3 \frac{\kappa'_t}{\kappa_t} D_{\mathcal{T}}^2 \mathcal{T} + \kappa_t \mathcal{N} \left(\frac{\kappa_t''}{\kappa_t} - 3 \left(\frac{\kappa'_t}{\kappa_t} \right)^2 - \lambda_1 \kappa_t^2 \right)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$D_{\mathcal{T}}^3 \mathcal{T} - 3 \frac{\kappa'_t}{\kappa_t} D_{\mathcal{T}}^2 \mathcal{T} - \left(\frac{\kappa_t''}{\kappa_t} - 3 \left(\frac{\kappa'_t}{\kappa_t} \right)^2 - \lambda_1 \kappa_t^2 \right) D_{\mathcal{T}} \mathcal{T} = 0$$

elde edilir.

Karşıt olarak (3.2.2) eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. (3.1.2) Frenet formüllerinden

$$D_{\mathcal{T}} \mathcal{N} = -\kappa_t \mathcal{T} + \tau_t \mathcal{B}$$

yazabiliriz. Buna göre

$$\mathcal{B} = \frac{1}{\tau_t} D_{\mathcal{T}} \mathcal{N} + \frac{\kappa_t}{\tau_t} \mathcal{T}$$

dir. Bu eşitliğin türevini alırsak

$$\begin{aligned}
D_{\mathcal{T}} \mathcal{B} &= \frac{1}{\kappa_t \tau_t} \left\{ D_{\mathcal{T}}^3 \mathcal{T} - 3 \frac{\kappa'_t}{\kappa_t} D_{\mathcal{T}}^2 \mathcal{T} - \left(\frac{\kappa_t''}{\kappa_t} - 3 \left(\frac{\kappa'_t}{\kappa_t} \right)^2 - \lambda_1 \kappa_t^2 \right) D_{\mathcal{T}} \mathcal{T} \right\} + \\
&\quad \frac{1}{\kappa_t^2} \left(\frac{\kappa_t}{\tau_t} \right)' D_{\mathcal{T}}^2 \mathcal{T} - \left(\frac{\tau_t}{\kappa_t} + \frac{\kappa'_t}{\kappa_t^3} \left(\frac{\kappa_t}{\tau_t} \right)' \right) D_{\mathcal{T}} \mathcal{T} + \left(\frac{\kappa_t}{\tau_t} \right)' \mathcal{T} \quad (3.2.4)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.1.2) Frenet formülleri ve (3.2.2) eşitliğinden

$$\left(\frac{\kappa_t}{\tau_t} \right)' = 0 \implies \frac{\kappa_t}{\tau_t} = \text{sabit}$$

bulunur. Uyarı 3.1.1. eşitliklerinden

$$\frac{\tau_t}{\kappa_t} = \frac{\kappa_t \tau'_t - \tau_t \kappa'_t}{\kappa_t (\kappa_t^2 + \tau_t^2)} \frac{\kappa_t}{\sqrt{\kappa_t^2 + \tau_t^2}} = \frac{\kappa_t \tau'_t - \tau_t \kappa'_t}{(\kappa_t^2 + \tau_t^2)^{3/2}} = \sigma_n$$

bulunur. $\frac{\tau_t}{\kappa_t}$ sabit olduğundan σ_n sabit olur. Öyleyse α bir slant helistir.

Genel helis özelliklerini kullanarak α eğrisinin (t) teğet göstergesinin τ_t burulmasına bağlı olarak Teorem 3.2.2 ye benzer olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.2.3 $\mathbb{E}^3$ te eğriliği ve burulması sıfırdan farklı olan birim hızlı bir α eğrisinin Frenet vektörleri t, n, b olsun. α eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart α eğrisinin (t) teğet göstergesinin teğet vektör alanı T olmak üzere

$$D_T^3 \mathcal{T} - 3 \frac{\tau'_t}{\tau_t} D_T^2 \mathcal{T} - \left(\frac{\tau''_t}{\tau_t} - 3 \left(\frac{\tau'_t}{\tau_t} \right)^2 - \mu_1 \tau_t^2 \right) D_T \mathcal{T} = 0 \quad (3.2.5)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada $\mu_1 \in \mathbb{R}^+$ ($\mu_1 = 1 + c_1^2$ ve $c_1 \in \mathbb{R}_0$) ve τ_t , α eğrisinin (t) teğet göstergesinin burulmasıdır.

İspat

α slant helis ise Teorem 3.1.2. e göre (t) teğet göstergesi genel helistir, öyleyse

$$\frac{\tau_t}{\kappa_t} = \frac{1}{c_1} \implies \kappa_t = c_1 \tau_t$$

dir.

$$\begin{aligned} \tau_t^2 + \kappa_t^2 &= \frac{\kappa_t^2}{c_1^2} + \kappa_t^2 \\ &= \kappa_t^2 \left(1 + \frac{1}{c_1^2} \right) \\ &= \kappa_t^2 \left(\frac{c_1^2 + 1}{c_1^2} \right) \\ &= \kappa_t^2 \lambda_1 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} D_T^3 \mathcal{T} - 3 \frac{c_1 \tau'_t}{c_1 \tau_t} D_T^2 \mathcal{T} - \left(\frac{c_1 \tau''_t}{c_1 \tau_t} - 3 \left(\frac{c_1 \tau'_t}{c_1 \tau_t} \right)^2 - \lambda_1 c_1^2 \tau_t^2 \right) D_T \mathcal{T} &= 0 \\ D_T^3 \mathcal{T} - 3 \frac{\tau'_t}{\tau_t} D_T^2 \mathcal{T} - \left(\frac{\tau''_t}{\tau_t} - 3 \left(\frac{\tau'_t}{\tau_t} \right)^2 - \left(\frac{c_1^2 + 1}{c_1^2} \right) c_1^2 \tau_t^2 \right) D_T \mathcal{T} &= 0 \\ D_T^3 \mathcal{T} - 3 \frac{\tau'_t}{\tau_t} D_T^2 \mathcal{T} - \left(\frac{\tau''_t}{\tau_t} - 3 \left(\frac{\tau'_t}{\tau_t} \right)^2 - \mu_1 \tau_t^2 \right) D_T \mathcal{T} &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.4 $\mathbb{E}^3$ te eğriliği ve burulması sıfırdan farklı olan birim hızlı bir α eğrisinin Frenet vektörleri t, n, b olsun. α eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart α eğrisinin (t) teğet göstergesinin asli normal vektör alanı N olmak üzere

$$D_T^2 \mathcal{N} - \frac{\kappa'_t}{\kappa_t} D_T \mathcal{N} + \lambda_1 \kappa_t^2 \mathcal{N} = 0 \quad (3.2.6)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada $\lambda_1 \in \mathbb{R}^+$ ($\lambda_1 = 1 + \frac{1}{c_1^2}$ ve $c_1 \in \mathbb{R}_0$) ve κ_t , α eğrisinin (t) teğet göstergesinin eğriliğidir.

İspat

Kabul edelim ki α bir slant helis olsun. Öyleyse Teorem 3.1.2 ye göre α eğrisinin teğet göstergesi bir genel helistir.

$$D_T \mathcal{N} = -\kappa_t T + \tau_t \mathcal{B}$$

eşitliğinin türevini alırsak

$$\begin{aligned} D_T^2 \mathcal{N} &= -\kappa'_t T - \kappa_t^2 \mathcal{N} + \tau'_t \mathcal{B} - \tau_t^2 \mathcal{N} \\ &= -\kappa'_t T - (\kappa_t^2 + \tau_t^2) \mathcal{N} + \tau'_t \mathcal{B} \end{aligned}$$

ve

$$\mathcal{T} = \frac{\tau_t}{\kappa_t} \mathcal{B} - \frac{1}{\kappa_t} D_T \mathcal{N}$$

olduğundan

$$D_T^2 \mathcal{N} = -\kappa'_t \left(\frac{\tau_t}{\kappa_t} \mathcal{B} - \frac{1}{\kappa_t} D_T \mathcal{N} \right) - (\kappa_t^2 + \tau_t^2) \mathcal{N} + \tau'_t \mathcal{B}$$

elde edilir. (t) bir genel helis olduğundan

$$\frac{\tau_t}{\kappa_t} = \frac{1}{c_1}$$

dersek

$$\tau_t^2 + \kappa_t^2 = \kappa_t^2 \left(\frac{1}{c_1^2} + 1 \right) = \lambda_1 \kappa_t^2 \quad , \quad \lambda_1 = 1 + \frac{1}{c_1^2}$$

olur. Buna göre

$$\begin{aligned}
D_T^2 \mathcal{N} &= -\kappa'_t \left(\frac{\tau_t}{\kappa_t} \mathcal{B} - \frac{1}{\kappa_t} D_T \mathcal{N} \right) + \tau'_t \mathcal{B} - (\kappa_t^2 + \tau_t^2) \mathcal{N} \\
&= \frac{\kappa'_t}{\kappa_t} D_T \mathcal{N} - \frac{\kappa'_t}{c_1} \mathcal{B} + \frac{\kappa'_t}{c_1} \mathcal{B} - \lambda_1 \kappa_t^2 \mathcal{N} \\
&= \frac{\kappa'_t}{\kappa_t} D_T \mathcal{N} - \lambda_1 \kappa_t^2 \mathcal{N}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$D_T^2 \mathcal{N} - \frac{\kappa'_t}{\kappa_t} D_T \mathcal{N} + \lambda_1 \kappa_t^2 \mathcal{N} = 0$$

bulunur.

Karşıt olarak (3.2.6) eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. (3.1.2) eşitliğinden

$$\mathcal{T} = \frac{\tau_t}{\kappa_t} \mathcal{B} - \frac{1}{\kappa_t} D_T \mathcal{N} \quad (3.2.7)$$

yazabiliriz. (3.2.7) eşitliğinin türevini alırsak

$$\begin{aligned}
D_T \mathcal{T} &= \frac{\kappa'_t}{\kappa_t^2} D_T \mathcal{N} - \frac{1}{\kappa_t} D_T^2 \mathcal{N} + \left(\frac{\tau_t}{\kappa_t} \right)' \mathcal{B} - \frac{\tau_t^2}{\kappa_t} \mathcal{N} \\
&= -\frac{1}{\kappa_t} \left(-\frac{\kappa'_t}{\kappa_t} D_T \mathcal{N} + D_T^2 \mathcal{N} + \tau_t^2 \mathcal{N} \right) + \left(\frac{\tau_t}{\kappa_t} \right)' \mathcal{B} + \kappa_t \mathcal{N} - \kappa_t \mathcal{N} \\
&= -\frac{1}{\kappa_t} \left(-\frac{\kappa'_t}{\kappa_t} D_T \mathcal{N} + D_T^2 \mathcal{N} + (\tau_t^2 + \kappa_t^2) \mathcal{N} \right) + \left(\frac{\tau_t}{\kappa_t} \right)' \mathcal{B} + \kappa_t \mathcal{N} \\
&= -\frac{1}{\kappa_t} \left(-\frac{\kappa'_t}{\kappa_t} D_T \mathcal{N} + D_T^2 \mathcal{N} + \kappa_t^2 (1 + \frac{1}{c_1^2}) \mathcal{N} \right) + \left(\frac{\tau_t}{\kappa_t} \right)' \mathcal{B} + \kappa_t \mathcal{N}
\end{aligned}$$

dir. Buna göre (3.2.6) eşitliğinden

$$D_T \mathcal{T} = \left(\frac{\tau_t}{\kappa_t} \right)' \mathcal{B} + \kappa_t \mathcal{N}$$

ve

$$D_T \mathcal{T} = \kappa_t \mathcal{N}$$

eşitliğinden

$$\left(\frac{\tau_t}{\kappa_t} \right)' = 0$$

elde edilir. Öyleyse $\frac{\tau_t}{\kappa_t}$ sabittir.

Böylece (3.1.4) eşitliğinden

$$\sigma_n = \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{3/2}} \left(\frac{\tau_t}{\kappa_t} \right)' = 0$$

bulunur. σ_n sabit olduğundan Teorem 3.1.3 e göre α bir slant helistir.

Genel helis özelliklerini kullanarak α eğrisinin (t) teğet göstergesinin τ_t burulmasına bağlı olarak Teorem 3.2.4'e benzer olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.2.5 $\mathbb{E}^3$ te eğriliği ve burulması sıfırdan farklı olan birim hızlı bir α eğrisinin Frenet vektörleri t, n, b olsun. α eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart α eğrisinin (t) teğet göstergesinin asli normal vektör alanı N olmak üzere

$$D_T^2 \mathcal{N} - \frac{\tau_t'}{\tau_t} D_T \mathcal{N} + \mu_1^2 \tau_t \mathcal{N} = 0 \quad (3.2.8)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada $\mu_1 \in \mathbb{R}^+$ ($\mu_1 = 1 + c_1^2$ ve $c_1 \in \mathbb{R}_0$) ve τ_t , α eğrisinin (t) teğet göstergesinin burulmasıdır.

İspat

α slant helis olsun, öyleyse (t) teğet göstergesi genel helistir. Buna göre

$$\frac{\tau_t}{\kappa_t} = \frac{1}{c_1} \implies \kappa_t = c_1 \tau_t$$

$$\tau_t^2 + \kappa_t^2 = \kappa_t^2 \left(\frac{1}{c_1^2} + 1 \right)$$

dır. (3.2.6) eşitliğinde yerine yazarsak

$$D_T^2 \mathcal{N} - \frac{c_1 \tau_t'}{c_1 \tau_t} D_T \mathcal{N} + \frac{(1 + c_1^2)}{c_1^2} c_1^2 \tau_t^2 \mathcal{N} = 0$$

$$D_T^2 \mathcal{N} - \frac{\tau_t'}{\tau_t} D_T \mathcal{N} + \mu_1^2 \tau_t^2 \mathcal{N} = 0$$

elde edilir. Burada $\mu_1 \in \mathbb{R}^+$ ($\mu_1 = 1 + c_1^2$ ve $c_1 \in \mathbb{R}_0$) dır.

Teorem 3.2.6 $\mathbb{E}^3$ te eğriliği ve burulması sıfırdan farklı olan birim hızlı bir α eğrisinin Frenet vektörleri t, n, b olsun. α eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart α eğrisinin (t) teğet göstergesinin binormal vektör alanı B olmak üzere

$$D_T^3 \mathcal{B} - 3 \frac{\tau_t'}{\tau_t} D_T^2 \mathcal{B} - \left(\frac{\tau_t''}{\tau_t} - 3 \left(\frac{\tau_t'}{\tau_t} \right)^2 - \mu_1 \tau_t^2 \right) D_T \mathcal{B} = 0 \quad (3.2.9)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada $\mu_1 \in \mathbb{R}^+$ ($\mu_1 = 1 + c_1^2$ ve $c_1 \in \mathbb{R}_0$) ve τ_t , α eğrisinin (t) teğet göstergesinin burulmasıdır.

İspat

α slant helis olsun, öyleyse (t) teğet göstergesi genel helistir. (3.1.2) Frenet eşitliklerinden iki kez türev alırsak

$$\begin{aligned}
D_T \mathcal{B} &= -\tau_t \mathcal{N} \\
D_T^2 \mathcal{B} &= -\tau'_t \mathcal{N} + \tau_t \kappa_t \mathcal{T} - \tau_t^2 \mathcal{B} \\
D_T^3 \mathcal{B} &= -\tau''_t \mathcal{N} + \tau'_t \kappa_t \mathcal{T} - \tau'_t \tau_t \mathcal{B} + \tau'_t \kappa_t \mathcal{T} + \tau_t \kappa'_t \mathcal{T} + \tau_t \kappa_t^2 \mathcal{N} - 2\tau_t \tau'_t \mathcal{B} - \tau_t^2 D_T \mathcal{B} \\
&= -\tau''_t \mathcal{N} + 3\tau'_t \kappa_t \mathcal{T} - 3\tau'_t \tau_t \mathcal{B} + \tau_t \kappa_t^2 \mathcal{N} - \tau_t^2 D_T \mathcal{B} \\
&= 3 \frac{\tau'_t}{\tau_t} (\tau_t \kappa_t \mathcal{T} - \tau_t^2 \mathcal{B}) - \tau_t \mathcal{N} \left(\frac{\tau''_t}{\tau_t} - \kappa_t^2 - \tau_t^2 \right) \\
&= 3 \frac{\tau'_t}{\tau_t} (\tau_t \kappa_t \mathcal{T} - \tau_t^2 \mathcal{B}) - \tau_t \mathcal{N} \left(\frac{\tau''_t}{\tau_t} - \kappa_t^2 - \tau_t^2 \right) + 3 \frac{\tau'_t \tau'_t \tau_t}{\tau_t^2} \mathcal{N} - 3 \frac{\tau'_t \tau'_t \tau_t}{\tau_t^2} \mathcal{N} \\
&= 3 \frac{\tau'_t}{\tau_t} (\tau_t \kappa_t \mathcal{T} - \tau_t^2 \mathcal{B} - \tau'_t \mathcal{N}) - \tau_t \mathcal{N} \left(\frac{\tau''_t}{\tau_t} - 3 \left(\frac{\tau'_t}{\tau_t} \right) - \kappa_t^2 - \tau_t^2 \right) \\
&= 3 \frac{\tau'_t}{\tau_t} D_T^2 \mathcal{B} - \tau_t \mathcal{N} \left(\frac{\tau''_t}{\tau_t} - 3 \left(\frac{\tau'_t}{\tau_t} \right) - \kappa_t^2 - \tau_t^2 \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. (t) genel helis olduğundan

$$\frac{\tau_t}{\kappa_t} = \frac{1}{c_1} \implies \kappa_t = c_1 \tau_t$$

ve

$$\tau_t^2 + \kappa_t^2 = \kappa_t^2 \left(\frac{1}{c_1^2} + 1 \right) = \kappa_t^2 \mu_1, \quad \mu_1 = 1 + \frac{1}{c_1^2}$$

dir. Buna göre

$$D_T^3 \mathcal{B} - 3 \frac{\tau'_t}{\tau_t} D_T^2 \mathcal{B} - \left(\frac{\tau''_t}{\tau_t} - 3 \left(\frac{\tau'_t}{\tau_t} \right)^2 - \mu_1 \tau_t^2 \right) D_T^2 \mathcal{B} = 0$$

Teorem 3.2.7 $\mathbb{E}^3$ te eğriliği ve burulması sıfırdan farklı olan birim hızlı bir α eğrisinin

Frenet vektörleri t, n, b olsun. α eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart α eğrisinin (t) teğet göstergesinin binormal vektör alanını B olmak üzere

$$D_T^3 \mathcal{B} - 3 \frac{\kappa'_t}{\kappa_t} D_T^2 \mathcal{B} - \left(\frac{\kappa''_t}{\kappa_t} - 3 \left(\frac{\kappa'_t}{\kappa_t} \right)^2 - \lambda_1 \kappa_t^2 \right) D_T^2 \mathcal{B} = 0 \quad (3.2.10)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada $\lambda_1 \in \mathbb{R}^+$ ($\lambda_1 = 1 + \frac{1}{c_1^2}$ ve $c_1 \in \mathbb{R}_0$) ve κ_t , α eğrisinin (t) teğet göstergesinin eğriliğidir.

İspat

α slant helis olsun, öyleyse (t) teğet göstergesi genel helistir. Buna göre

$$\frac{\tau_t}{\kappa_t} = \frac{1}{c_1} \implies \kappa_t = c_1 \tau_t$$

$$\begin{aligned} \tau'_t &= \frac{\kappa'_t}{c_1} \\ \tau''_t &= \frac{\kappa''_t}{c_1} \end{aligned}$$

eşitliklerini (3.2.9) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} D_{\mathcal{T}}^3 \mathcal{B} - 3 \frac{\frac{\kappa'_t}{c_1}}{\frac{\kappa_t}{c_1}} D_{\mathcal{T}}^2 \mathcal{B} - \left(\frac{\frac{\kappa''_t}{c_1}}{\frac{\kappa_t}{c_1}} - 3 \left(\frac{\frac{\kappa'_t}{c_1}}{\frac{\kappa_t}{c_1}} \right)^2 - (1 + c_1^2) \frac{\kappa_t^2}{c_1^2} \right) D_{\mathcal{T}} \mathcal{B} &= 0 \\ D_{\mathcal{T}}^3 \mathcal{B} - 3 \frac{\kappa'_t}{\kappa_t} D_{\mathcal{T}}^2 \mathcal{B} - \left(\frac{\kappa''_t}{\kappa_t} - 3 \left(\frac{\kappa'_t}{\kappa_t} \right)^2 - \lambda_1 \kappa_t^2 \right) D_{\mathcal{T}} \mathcal{B} &= 0 \end{aligned}$$

eşitliği bulunur.

Teorem 3.2.8 $\mathbb{E}^3$ te eğriliği ve burulması sıfırdan farklı olan birim hızlı bir α eğrisinin Frenet vektörleri t, n, b olsun. α eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart α eğrisinin (b) binormal göstergesinin teğet vektör alanını $\mathbb{T}$ olmak üzere

$$D_{\mathbb{T}}^3 \mathbb{T} - 3 \frac{\kappa'_b}{\kappa_b} D_{\mathbb{T}}^2 \mathbb{T} - \left(\frac{\kappa''_b}{\kappa_b} - 3 \left(\frac{\kappa'_b}{\kappa_b} \right)^2 - \lambda_2 \kappa_b^2 \right) D_{\mathbb{T}} \mathbb{T} = 0 \quad (3.2.11)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada $\lambda_2 \in \mathbb{R}^+$ ($\lambda_2 = 1 + \frac{1}{c_2^2}$ ve $c_2 \in \mathbb{R}_0$) ve κ_b , α eğrisinin (b) teğet göstergesinin eğriliğidir.

İspat

Kabul edelim ki α bir slant helis olsun. Böylece α eğrisinin (b) binormal göstergesi genel helistir.

$$\begin{aligned} D_{\mathbb{T}} \mathbb{T} &= \kappa_b \mathbb{N} \\ D_{\mathbb{T}}^2 \mathbb{T} &= \kappa'_b \mathbb{N} - \kappa_b^2 \mathbb{T} + \kappa_b \tau_b \mathbb{B} \end{aligned}$$

$$D_{\mathbb{T}}^3 \mathbb{T} = -2\kappa'_b \kappa_b \mathbb{T} - \kappa_b^2 D_{\mathbb{T}} \mathbb{T} + \kappa_b'' \mathbb{N} - \kappa'_b \kappa_b \mathbb{T} + \kappa'_b \tau_b \mathbb{B} + \kappa'_b \tau_b \mathbb{B} + \kappa_b \tau'_b \mathbb{B} - \kappa_b \tau_b \tau'_b \mathbb{N} \quad (3.2.12)$$

elde edilir. Binormal göstergesi genel helis olduğundan

$$\frac{\tau_b}{\kappa_b} = \text{sabit} \implies \tau'_b \kappa_b - \tau_b \kappa'_b = 0 \implies \tau'_b \kappa_b = \tau_b \kappa'_b$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{\tau_b}{\kappa_b} = \frac{1}{c} &\implies \tau_b^2 = \frac{\kappa_b^2}{c^2} \\ &\implies \kappa_b^2 + \tau_b^2 = \kappa_b^2 \left(1 + \frac{1}{c^2}\right) \\ &\implies \kappa_b^2 + \tau_b^2 = \kappa_b^2 \lambda_2, \quad \lambda_2 = 1 + \frac{1}{c^2} \end{aligned}$$

dir. Buna göre (3.2.12) eşitliği

$$\begin{aligned} D_{\mathbb{T}}^3 \mathbb{T} &= -3\kappa'_b \kappa_b \mathbb{T} - \kappa_b^2 D_{\mathbb{T}} \mathbb{T} + (\kappa_b'' - \kappa_b \tau_b^2) \mathbb{N} + 3\kappa'_b \tau_b \mathbb{B} \\ &= 3 \frac{\kappa'_b}{\kappa_b} (-\kappa_b^2 + \kappa_b \tau_b \mathbb{B}) + \kappa_b \mathbb{N} \left(-\kappa_b^2 + \frac{\kappa_b''}{\kappa_b} - \tau_b^2 \right) \\ &= 3 \frac{\kappa'_b}{\kappa_b} (-\kappa_b^2 + \kappa_b \tau_b \mathbb{B}) + \kappa_b \mathbb{N} \left(-\kappa_b^2 + \frac{\kappa_b''}{\kappa_b} - \tau_b^2 \right) + 3 \frac{(\kappa'_b)^2 \kappa_b \mathbb{N}}{\kappa_b^2} - 3 \frac{(\kappa'_b)^2 \kappa_b \mathbb{N}}{\kappa_b^2} \\ &= 3 \frac{\kappa'_b}{\kappa_b} (-\kappa_b^2 \mathbb{T} + \kappa_b \tau_b \mathbb{B} + \kappa'_b \mathbb{N}) + \kappa_b \mathbb{N} \left(-\kappa_b^2 + \frac{\kappa_b''}{\kappa_b} - \tau_b^2 - 3 \left(\frac{\kappa'_b}{\kappa_b} \right)^2 \right) \\ &= 3 \frac{\kappa'_b}{\kappa_b} D_{\mathbb{T}}^2 \mathbb{T} + \kappa_b \mathbb{N} \left(\frac{\kappa_b''}{\kappa_b} - 3 \left(\frac{\kappa'_b}{\kappa_b} \right)^2 - \lambda_2 \kappa_b^2 \right) \end{aligned}$$

olduğundan

$$D_{\mathbb{T}}^3 \mathbb{T} - 3 \frac{\kappa'_b}{\kappa_b} D_{\mathbb{T}}^2 \mathbb{T} - \left(\frac{\kappa_b''}{\kappa_b} - 3 \left(\frac{\kappa'_b}{\kappa_b} \right)^2 - \lambda_2 \kappa_b^2 \right) D_{\mathbb{T}} \mathbb{T} = 0$$

elde edilir.

Karşıt olarak (3.2.11) eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. (3.1.6) Frenet formüllerinden

$$D_{\mathbb{T}} \mathbb{N} = -\kappa_b \mathbb{T} + \tau_b \mathbb{B}$$

yazabiliriz. Buna göre

$$\mathbb{B} = \frac{1}{\tau_b} D_{\mathbb{T}} \mathbb{N} + \frac{\kappa_b}{\tau_b} \mathbb{T}$$

dir. Bu eşitliğin türevini alırsak

$$\begin{aligned}
D_{\mathbb{T}}\mathbb{B} &= \frac{1}{\kappa_b \tau_b} \left\{ D_{\mathbb{T}}^3 \mathbb{T} - 3 \frac{\kappa'_b}{\kappa_b} D_{\mathbb{T}}^2 \mathbb{T} - \left(\frac{\kappa''_b}{\kappa_b} - 3 \left(\frac{\kappa'_b}{\kappa_b} \right)^2 - \lambda_2 \kappa_b^2 \right) D_{\mathbb{T}} \mathbb{T} \right\} + \\
&\quad \frac{1}{\kappa_b^2} \left(\frac{\kappa_b}{\tau_b} \right)' D_{\mathbb{T}}^2 \mathbb{T} - \left(\frac{\tau_b}{\kappa_b} + \frac{\kappa'_b}{\kappa_b^3} \left(\frac{\kappa_b}{\tau_b} \right)' \right) D_{\mathbb{T}} \mathbb{T} + \left(\frac{\kappa_b}{\tau_b} \right)' \mathbb{T} \quad (3.2.13)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.1.6) Frenet formülleri ve (3.2.11) eşitliğinden

$$\left(\frac{\kappa_b}{\tau_b} \right)' = 0 \implies \frac{\kappa_b}{\tau_b} = \text{sabit}$$

bulunur. Uyarı 3.1.3 eşitliklerinden

$$\frac{\tau_b}{\kappa_b} = \frac{\kappa_b \tau'_b - \tau_b \kappa'_b}{\kappa_b (\kappa_b^2 + \tau_b^2)} \frac{\kappa_b}{\sqrt{\kappa_b^2 + \tau_b^2}} = \frac{\kappa_b \tau'_b - \tau_b \kappa'_b}{(\kappa_b^2 + \tau_b^2)^{3/2}} = \sigma_n$$

bulunur. $\frac{\tau_b}{\kappa_b}$ sabit olduğundan σ_n sabit olur. Öyleyse α bir slant helistir.

Teorem 3.2.9 $\mathbb{E}^3$ te eğriliği ve burulması sıfırdan farklı olan birim hızlı bir α eğrisinin Frenet vektörleri t, n, b olsun. α eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart α eğrisinin (b) binormal göstergesinin teğet vektör alanını $\mathbb{T}$ olmak üzere

$$D_{\mathbb{T}}^3 \mathbb{T} - 3 \frac{\tau'_b}{\tau_b} D_{\mathbb{T}}^2 \mathbb{T} - \left(\frac{\tau''_b}{\tau_b} - 3 \left(\frac{\tau'_b}{\tau_b} \right)^2 - \mu_2 \tau_b^2 \right) D_{\mathbb{T}} \mathbb{T} = 0 \quad (3.2.14)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada $\mu_2 \in \mathbb{R}^+$ ($\mu_2 = 1 + c_2^2$ ve $c_2 \in \mathbb{R}_0$) ve τ_b , α eğrisinin (b) binormal göstergesinin burulmasıdır.

İspat

α slant helis ise (b) teğet göstergesi genel helistir, öyleyse

$$\frac{\tau_b}{\kappa_b} = \frac{1}{c_2} \implies \kappa_b = c_2 \tau_b$$

dir.

$$\begin{aligned}
\tau_b^2 + \kappa_b^2 &= \frac{\kappa_b^2}{c_2^2} + \kappa_b^2 \\
&= \kappa_b^2 \left(1 + \frac{1}{c_2^2} \right) \\
&= \kappa_b^2 \left(\frac{c_2^2 + 1}{c_2^2} \right) \\
&= \kappa_b^2 \lambda_2
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
D_{\mathbb{T}}^3 \mathbb{T} - 3 \frac{c_2 \tau'_b}{c_2 \tau_b} D_{\mathbb{T}}^2 \mathbb{T} - \left(\frac{c_2 \tau''_b}{c_2 \tau_b} - 3 \left(\frac{c_2 \tau'_b}{c_2 \tau_b} \right)^2 - \lambda_2 c_2^2 \tau_b^2 \right) D_{\mathbb{T}} \mathbb{T} &= 0 \\
D_{\mathbb{T}}^3 \mathbb{T} - 3 \frac{\tau'_b}{\tau_b} D_{\mathbb{T}}^2 \mathbb{T} - \left(\frac{\tau''_b}{\tau_b} - 3 \left(\frac{\tau'_b}{\tau_b} \right)^2 - \left(\frac{c_2^2 + 1}{c_2^2} \right) c_b^2 \tau_b^2 \right) D_{\mathbb{T}} \mathbb{T} &= 0 \\
D_{\mathbb{T}}^3 \mathbb{T} - 3 \frac{\tau'_b}{\tau_b} D_{\mathbb{T}}^2 \mathbb{T} - \left(\frac{\tau''_b}{\tau_b} - 3 \left(\frac{\tau'_b}{\tau_b} \right)^2 - \mu_2 \tau_b^2 \right) D_{\mathbb{T}} \mathbb{T} &= 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.10 $\mathbb{E}^3$ te eğriligi ve burulması sıfırdan farklı olan birim hızlı bir α eğrisinin Frenet vektörleri t, n, b olsun. α eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart α eğrisinin (b) binormal göstergesinin asli normal vektör alanı $\mathbb{N}$ olmak üzere

$$D_{\mathbb{T}}^2 \mathbb{N} - \frac{\kappa'_b}{\kappa_b} D_{\mathbb{T}} \mathbb{N} + \lambda_2 \kappa_b^2 \mathbb{N} = 0 \quad (3.2.15)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada $\lambda_2 \in \mathbb{R}^+$ ($\lambda_2 = 1 + \frac{1}{c_2^2}$ ve $c_2 \in \mathbb{R}_0$) ve κ_b , α eğrisinin (b) binormal göstergesinin eğriligidir.

İspat

Kabul edelim ki α bir slant helis olsun. Öyleyse Teorem 3.1.2 ye göre α eğrisinin teğet göstergesi bir genel helistir.

$$D_{\mathbb{T}} \mathbb{N} = -\kappa_b \mathbb{T} + \tau_b \mathbb{B}$$

eşitliğinin türevini alırsak

$$\begin{aligned}
D_{\mathbb{T}}^2 \mathbb{N} &= -\kappa'_b \mathbb{T} - \kappa_b^2 \mathbb{N} + \tau'_b \mathbb{B} - \tau_b^2 \mathbb{N} \\
&= -\kappa'_b \mathbb{T} - (\kappa_b^2 + \tau_b^2) \mathbb{N} + \tau'_b \mathbb{B}
\end{aligned}$$

ve

$$\mathbb{T} = \frac{\tau_b}{\kappa_b} \mathbb{B} - \frac{1}{\kappa_b} D_{\mathbb{T}} \mathbb{N}$$

olduğundan

$$D_{\mathbb{T}}^2 \mathbb{N} = -\kappa'_b \left(\frac{\tau_b}{\kappa_b} \mathbb{B} - \frac{1}{\kappa_b} D_{\mathbb{T}} \mathbb{N} \right) - (\kappa_b^2 + \tau_b^2) \mathbb{N} + \tau'_b \mathbb{B}$$

elde edilir. (b) bir genel helis olduğundan

$$\frac{\tau_b}{\kappa_b} = \frac{1}{c_2}$$

dersek

$$\tau_b^2 + \kappa_b^2 = \kappa_b^2 \left(\frac{1}{c_2^2} + 1 \right) = \lambda_2 \kappa_b^2 \quad , \quad \lambda_2 = 1 + \frac{1}{c_2^2}$$

olur. Buna göre

$$\begin{aligned} D_{\mathbb{T}}^2 \mathbb{N} &= -\kappa'_b \left(\frac{\tau_b}{\kappa_b} \mathbb{B} - \frac{1}{\kappa_b} D_{\mathbb{T}} \mathbb{N} \right) + \tau'_b \mathbb{B} - (\kappa_b^2 + \tau_b^2) \mathbb{N} \\ &= \frac{\kappa'_b}{\kappa_b} D_{\mathbb{T}} \mathbb{N} - \frac{\kappa'_b}{c_2} \mathbb{B} + \frac{\kappa'_b}{c_2} \mathbb{B} - \lambda_2 \kappa_b^2 \mathbb{N} \\ &= \frac{\kappa'_b}{\kappa_b} D_{\mathbb{T}} \mathbb{N} - \lambda_2 \kappa_b^2 \mathbb{N} \end{aligned}$$

olduğundan

$$D_{\mathbb{T}}^2 \mathbb{N} - \frac{\kappa'_b}{\kappa_b} D_{\mathbb{T}} \mathbb{N} + \lambda_2 \kappa_b^2 \mathbb{N} = 0$$

bulunur.

Karşıt olarak (3.2.15) eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. (3.1.4) eşitliğinden

$$\mathbb{T} = \frac{\tau_b}{\kappa_b} \mathbb{B} - \frac{1}{\kappa_b} D_{\mathbb{T}} \mathbb{N} \tag{3.2.16}$$

yazabiliriz. (3.2.16) eşitliğinin türevini alırsak

$$\begin{aligned} D_{\mathbb{T}} \mathbb{T} &= \frac{\kappa'_b}{\kappa_b^2} D_{\mathbb{T}} \mathbb{N} - \frac{1}{\kappa_b} D_{\mathbb{T}}^2 \mathbb{N} + \left(\frac{\tau_b}{\kappa_b} \right)' \mathbb{B} - \frac{\tau_b^2}{\kappa_b} \mathbb{N} \\ &= -\frac{1}{\kappa_b} \left(-\frac{\kappa'_b}{\kappa_b} D_{\mathbb{T}} \mathbb{N} + D_{\mathbb{T}}^2 \mathbb{N} + \tau_b^2 \mathbb{N} \right) + \left(\frac{\tau_b}{\kappa_b} \right)' \mathbb{B} + \kappa_b \mathbb{N} - \kappa_b \mathbb{N} \\ &= -\frac{1}{\kappa_b} \left(-\frac{\kappa'_b}{\kappa_b} D_{\mathbb{T}} \mathbb{N} + D_{\mathbb{T}}^2 \mathbb{N} + (\tau_b^2 + \kappa_b^2) \mathbb{N} \right) + \left(\frac{\tau_b}{\kappa_b} \right)' \mathbb{B} + \kappa_b \mathbb{N} \\ &= -\frac{1}{\kappa_b} \left(-\frac{\kappa'_b}{\kappa_b} D_{\mathbb{T}} \mathbb{N} + D_{\mathbb{T}}^2 \mathbb{N} + \kappa_b^2 \left(1 + \frac{1}{c_2^2} \right) \mathbb{N} \right) + \left(\frac{\tau_b}{\kappa_b} \right)' \mathbb{B} + \kappa_b \mathbb{N} \end{aligned}$$

dir. Buna göre (3.2.16) eşitliğinden

$$D_{\mathbb{T}} \mathbb{T} = \left(\frac{\tau_b}{\kappa_b} \right)' \mathbb{B} + \kappa_b \mathbb{N}$$

ve

$$D_{\mathbb{T}} \mathbb{T} = \kappa_b \mathbb{N}$$

eşitliğinden

$$\left(\frac{\tau_b}{\kappa_b}\right)' = 0$$

elde edilir. Öyleyse $\frac{\tau_b}{\kappa_b}$ sabittir.

Buna göre Uyarı 3.1.3. eşitliklerinden

$$\frac{\tau_b}{\kappa_b} = \frac{\kappa_b \tau'_b - \tau_b \kappa'_b}{\kappa_b(\kappa_b^2 + \tau_b^2)} \frac{\kappa_b}{\sqrt{\kappa_b^2 + \tau_b^2}} = \frac{\kappa_b \tau'_b - \tau_b \kappa'_b}{(\kappa_b^2 + \tau_b^2)^{3/2}} = \sigma_n$$

bulunur. $\frac{\tau_b}{\kappa_b}$ sabit olduğundan σ_n sabit olur. Öyleyse α bir slant helistir.

Teorem 3.2.11 $\mathbb{E}^3$ te eğriliği ve burulması sıfırdan farklı olan birim hızlı bir α eğrisinin Frenet vektörleri t, n, b olsun. α eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart α eğrisinin (b) binormal göstergesinin asli normal vektör alanını $\mathbb{N}$ olmak üzere

$$D_{\mathbb{T}}^2 \mathbb{N} - \frac{\tau'_b}{\tau_b} D_{\mathbb{T}} \mathbb{N} + \mu_2^2 \tau_b \mathbb{N} = 0 \quad (3.2.17)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada $\mu_2 \in \mathbb{R}^+$ ($\mu_2 = 1 + c_2^2$ ve $c_2 \in \mathbb{R}_0$) ve τ_b , α eğrisinin (b) teğet göstergesinin burulmasıdır.

İspat

α slant helis olsun, öyleyse (t) teğet göstergesi genel helistir. Buna göre

$$\frac{\tau_b}{\kappa_b} = \frac{1}{c_2} \implies \kappa_b = c_2 \tau_b$$

$$\tau_b^2 + \kappa_b^2 = \kappa_b^2 \left(\frac{1}{c_2^2} + 1 \right)$$

dır. (3.2.15) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} D_{\mathbb{T}}^2 \mathbb{N} - \frac{c_2 \tau'_b}{c_2 \tau_b} D_{\mathbb{T}} \mathbb{N} + \frac{(1 + c_2^2)}{c_2^2} c_2^2 \tau_b^2 \mathbb{N} &= 0 \\ D_{\mathbb{T}}^2 \mathbb{N} - \frac{\tau'_b}{\tau_b} D_{\mathbb{T}} \mathbb{N} + \mu_2^2 \tau_b^2 \mathbb{N} &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\mu_2 \in \mathbb{R}^+$ ($\mu_2 = 1 + c_2^2$ ve $c_2 \in \mathbb{R}_0$) dir.

Teorem 3.2.12 $\mathbb{E}^3$ te eğriliği ve burulması sıfırdan farklı olan birim hızlı bir α eğrisinin Frenet vektörleri t, n, b olsun. α eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart α

eğrisinin (b) binormal göstergesinin binormal vektör alanını $\mathbb{B}$ olmak üzere

$$D_{\mathbb{T}}^3 \mathbb{B} - 3 \frac{\tau'_b}{\tau_b} D_{\mathbb{T}}^2 \mathbb{B} - \left(\frac{\tau''_b}{\tau_b} - 3 \left(\frac{\tau'_b}{\tau_b} \right)^2 - \mu_2 \tau_b^2 \right) D_{\mathbb{T}} \mathbb{B} = 0 \quad (3.2.18)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada $\mu_2 \in \mathbb{R}^+$ ($\mu_2 = 1 + c_2^2$ ve $c_2 \in \mathbb{R}_0$) ve τ_b , α eğrisinin (b) binormal göstergesinin burulmasıdır.

İspat

α slant helis olsun, öyleyse (b) teğet göstergesi genel helistir. (3.1.4) Frenet eşitliklerinden iki kez türev alırsak

$$\begin{aligned} D_{\mathbb{T}} \mathbb{B} &= -\tau_b \mathbb{N} \\ D_{\mathbb{T}}^2 \mathbb{B} &= -\tau'_b \mathbb{N} + \tau_b \kappa_b \mathbb{T} - \tau_b^2 \mathbb{B} \\ D_{\mathbb{T}}^3 \mathbb{B} &= -\tau''_b \mathbb{N} + \tau'_b \kappa_b \mathbb{T} - \tau'_b \tau_b \mathbb{B} + \tau'_b \kappa_b \mathbb{T} + \tau_b \kappa'_b \mathbb{T} + \tau_b \kappa_b^2 \mathbb{N} - 2\tau_b \tau'_b \mathbb{B} - \tau_b^2 D_{\mathbb{T}} \mathbb{B} \\ &= -\tau''_b \mathbb{N} + 3\tau'_b \kappa_b \mathbb{T} - 3\tau'_b \tau_b \mathbb{B} + \tau_b \kappa_b^2 \mathbb{N} - \tau_b^2 D_{\mathbb{T}} \mathbb{B} \\ &= 3 \frac{\tau'_b}{\tau_b} (\tau_b \kappa_b \mathbb{T} - \tau_b^2 \mathbb{B}) - \tau_b \mathbb{N} \left(\frac{\tau''_b}{\tau_b} - \kappa_b^2 - \tau_b^2 \right) \\ &= 3 \frac{\tau'_b}{\tau_b} (\tau_b \kappa_b \mathbb{T} - \tau_b^2 \mathbb{B}) - \tau_b \mathbb{N} \left(\frac{\tau''_b}{\tau_b} - \kappa_b^2 - \tau_b^2 \right) + 3 \frac{\tau'_b \tau'_b \tau_b}{\tau_b^2} \mathbb{N} - 3 \frac{\tau'_b \tau'_b \tau_b}{\tau_b^2} \mathbb{N} \\ &= 3 \frac{\tau'_b}{\tau_b} (\tau_b \kappa_b \mathbb{T} - \tau_b^2 \mathbb{B} - \tau'_b \mathbb{N}) - \tau_b \mathbb{N} \left(\frac{\tau''_b}{\tau_b} - 3 \left(\frac{\tau'_b}{\tau_b} \right) - \kappa_b^2 - \tau_b^2 \right) \\ &= 3 \frac{\tau'_b}{\tau_b} D_{\mathbb{T}}^2 \mathbb{B} - \tau_b \mathbb{N} \left(\frac{\tau''_b}{\tau_b} - 3 \left(\frac{\tau'_b}{\tau_b} \right) - \kappa_b^2 - \tau_b^2 \right) \end{aligned}$$

elde edilir. (b) genel helis olduğundan

$$\frac{\tau_b}{\kappa_b} = \frac{1}{c_2} \implies \kappa_b = c_2 \tau_b$$

ve

$$\tau_b^2 + \kappa_b^2 = \kappa_b^2 \left(\frac{1}{c_2^2} + 1 \right) = \kappa_b^2 \mu_2 \quad , \quad \mu_2 = 1 + \frac{1}{c_2^2}$$

dir. Buna göre

$$D_{\mathbb{T}}^3 \mathbb{B} - 3 \frac{\tau'_b}{\tau_b} D_{\mathbb{T}}^2 \mathbb{B} - \left(\frac{\tau''_b}{\tau_b} - 3 \left(\frac{\tau'_b}{\tau_b} \right)^2 - \mu_2 \tau_b^2 \right) D_{\mathbb{T}}^2 \mathbb{B} = 0$$

dır.

Teorem 3.2.13 $\mathbb{E}^3$ te eğriliği ve burulması sıfırdan farklı olan birim hızlı bir α eğrisinin Frenet vektörleri t, n, b olsun. α eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart α eğrisinin (b) binormal göstergesinin binormal vektör alanını $\mathbb{B}$ olmak üzere

$$D_{\mathbb{T}}^3 \mathbb{B} - 3 \frac{\kappa'_b}{\kappa_b} D_{\mathbb{T}}^2 \mathbb{B} - \left(\frac{\kappa''_b}{\kappa_b} - 3 \left(\frac{\kappa'_b}{\kappa_b} \right)^2 - \lambda_2 \kappa_b^2 \right) D_{\mathbb{T}} \mathbb{B} = 0 \quad (3.2.19)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada $\lambda_2 \in \mathbb{R}^+$ ($\lambda_2 = 1 + \frac{1}{c_2^2}$ ve $c_2 \in \mathbb{R}_0$) ve κ_b , α eğrisinin (b) binormal göstergesinin eğriligidir.

İspat

α slant helis olsun, öyleyse (b) binormal göstergesi genel helistir. Buna göre

$$\frac{\tau_b}{\kappa_b} = \frac{1}{c_2} \implies \kappa_b = c_2 \tau_b$$

$$\begin{aligned} \tau'_b &= \frac{\kappa'_b}{c_1} \\ \tau''_b &= \frac{\kappa''_b}{c_2} \end{aligned}$$

eşitliklerini (3.2.18) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} D_{\mathbb{T}}^3 \mathbb{B} - 3 \frac{\frac{\kappa'_b}{c_2}}{\frac{\kappa_b}{c_2}} D_{\mathbb{T}}^2 \mathbb{B} - \left(\frac{\frac{\kappa''_b}{c_2}}{\frac{\kappa_b}{c_2}} - 3 \left(\frac{\frac{\kappa'_b}{c_2}}{\frac{\kappa_b}{c_2}} \right)^2 - (1 + c_2^2) \frac{\kappa_b^2}{c_2^2} \right) D_{\mathbb{T}} \mathbb{B} &= 0 \\ D_{\mathbb{T}}^3 \mathbb{B} - 3 \frac{\kappa'_b}{\kappa_b} D_{\mathbb{T}}^2 \mathbb{B} - \left(\frac{\kappa''_b}{\kappa_b} - 3 \left(\frac{\kappa'_b}{\kappa_b} \right)^2 - \lambda_2 \kappa_b^2 \right) D_{\mathbb{T}} \mathbb{B} &= 0 \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

4. $\mathbb{E}_1^3$ MINKOWSKİ UZAYINDA SLANT HELİSLERİN KARAKTERİZASYONLARI

4.1 Minkowski Uzayında Slant Helisler

$\mathbb{E}_1^3$, 3 boyutlu Minkowski uzayında bir α eğrisini göz önüne alalım. Bu eğrinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ ile gösterilsin. Biz burada α eğrisinin eğrilik ve burulmasına bağlı olarak slant helislerin karakterizasyonunu vereceğiz. Son olarak slant helislerin teğet ve binormal göstergesini vererek onların $\mathbb{E}_1^3$ de genel helis olduğunu göstereceğiz. Bu bölümde referansımız Lopez (2008) olacaktır.

$\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında bir eğrinin teğet doğrusu belirli bir doğrultuyla sabit bir açı yapıyorsa eğriye helis denir. τ/κ oranı eğri boyunca sabit ise eğri bir helistir. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında helis benzer şekilde tanımlanır. Farklı Frenet formülleri olmasına rağmen bir helis τ/κ fonksiyonunun sabitliği ile karakterize edilir. $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında α eğrisinin bir slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{3/2}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \quad (4.1.1)$$

eşitliğinin sabit olmasıdır (Izumiya 2004).

Tanım 4.1.1 α , $\mathbb{E}_1^3$ de birim hızlı bir eğri olsun. Sıfırdan farklı bir belirli U vektör alanı $\langle N, U \rangle$ fonksiyonu sabit olacak şekilde var ise α eğrisine slant helis denir.

Teorem 4.1.1 $\mathbb{E}_1^3$ de α birim hızlı bir zamansı eğri olsun. α eğrisinin bir slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{\kappa^2}{(\tau^2 - \kappa^2)^{3/2}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \quad ya \quad da \quad \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 - \tau^2)^{3/2}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \quad (4.1.2)$$

fonksiyonlarından birinin sabit olmasıdır. Burada $(\tau^2 - \kappa^2 \neq 0)$ dır.

İspat

$\mathbb{E}_1^3$ de α birim hızlı bir zamansı eğri olsun. Öyleyse α eğrisinin $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı

$$\begin{aligned} T(s) &= \alpha'(s) \\ N(s) &= \frac{T'(s)}{\kappa(s)} = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} \\ B(s) &= T(s) \times N(s) \end{aligned}$$

eşitliğiyle tanımlanır. Frenet formülleri

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \quad (4.1.3)$$

şeklindedir. Burada κ eğrinin eğriliği, τ eğrinin burulmasıdır.

α eğrisinin bir slant helis olduğunu varsayalım. $\langle N, U \rangle = c$ (sabit) olacak şekilde sabit vektör alanı U olsun. a_1 ve a_3 düzgün fonksiyonları

$$U = a_1(s)T(s) + cN(s) + a_3(s)B(s) \quad , \quad s \in I \quad (4.1.4)$$

olacak biçimde vardır. Burada

$$\begin{aligned} \langle U, T(s) \rangle &= -a_1(s) \\ \langle U, N(s) \rangle &= c \\ \langle U, B(s) \rangle &= a_3(s) \end{aligned}$$

(4.1.4) eşitliğinin türevi alınıp ve (4.1.3) Frenet formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} U' &= a_1' T + a_1 T' + c N' + a_3' + a_3 B' \\ &= a_1' T + a_1 \kappa N + c(\kappa T + \tau B) + a_3' + a_3(-\tau N) \\ &= (a_1' + c\kappa)T + (a_1 \kappa - a_3 \tau)N + (c\tau + a_3')B \end{aligned}$$

elde edilir.

U sabit olduğundan $U' = 0$ dır ve T, N, B lineer bağımsız olduğundan

$$0 = (a_1' + c\kappa)T + (a_1 \kappa - a_3 \tau)N + (c\tau + a_3')B$$

eşitliğinden

$$\begin{cases} a'_1 + c\kappa = 0 \\ a_1\kappa - a_3\tau = 0 \\ c\tau + a'_3 = 0 \end{cases} \quad (4.1.5)$$

elde edilir. (4.1.5) deki ikinci eşitliğe göre $a_1\kappa - a_3\tau = 0$

$$a_1 = a_3 \left(\frac{\tau}{\kappa} \right) \quad (4.1.6)$$

dir. Üstelik U sabit olduğundan

$$< U, U > = -a_1^2 + c + a_3^2 = \text{sabit} \quad (4.1.7)$$

dir. Buna göre (4.1.6) ve (4.1.7) eşitliklerinden

$$-a_3^2 \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)^2 + c^2 + a_3^2 = -a_3^2 \left(\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)^2 - 1 \right) + c^2 = \text{sabit}$$

olduğundan

$$-a_3^2 \left(\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)^2 - 1 \right) = c^2 - D(\text{sabit})$$

elde edilir. Bu eşitlikte, m bir pozitif sayı olmak üzere

$$c^2 - D = \epsilon m^2$$

dersek

$$\epsilon m^2 = a_3^2 \left(\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)^2 - 1 \right), \quad m > 0, \quad \epsilon \in \{-1, 0, 1\}$$

olur. Eğer $\epsilon = 0$ ise $a_3 = 0$ dir. Buna göre (4.1.5) deki eşitliklerden $a_1 = c = 0$ olur.

Bunun anlamı $U = 0$ dir bu da bir çelişkidir. Öyleyse $\epsilon = 1$ ya da $\epsilon = -1$ olmalıdır ve böylece $\tau^2 - \kappa^2 \neq 0$ dir.

$$a_3^2 \left(\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)^2 - 1 \right) = \epsilon m^2$$

eşitliğinde $\epsilon = -1$ ise

$$-m^2 = a_3^2 \left(\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)^2 - 1 \right)$$

olduğundan

$$a_3^2 = \frac{m^2}{1 - \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)^2} \implies a_3 = \pm \frac{m}{\sqrt{1 - \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)^2}}$$

ya da $\epsilon = 1$ ise

$$m^2 = a_3^2 \left(\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)^2 - 1 \right)$$

olduğundan

$$a_3^2 = \frac{m^2}{\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)^2 - 1} \implies a_3 = \pm \frac{m}{\sqrt{\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)^2 - 1}}$$

dir. (4.1.5) in üçüncü eşitliğinden aşağıdakiler elde edilir:

$\epsilon = -1$ için

$$\frac{da_3}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\pm \frac{m}{\sqrt{1 - \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)^2}} \right) = c\tau,$$

$\epsilon = 1$ için

$$\frac{da_3}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\pm \frac{m^2}{\sqrt{\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)^2 - 1}} \right) = c\tau$$

dir. Bu eşitlikleri;

$$\begin{aligned} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)^2 - 1}} \right)' &= \frac{c\tau}{m} \implies \left(\left(\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)^2 - 1 \right)^{\frac{-1}{2}} \right)' = \pm \frac{c\tau}{m} \\ \implies \frac{-1}{2} \left(\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)^2 - 1 \right)^{\frac{-3}{2}} 2 \frac{\tau}{\kappa} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' &= \pm \frac{c\tau}{m} \\ \implies \left(\frac{\tau^2 - \kappa^2}{\kappa^2} \right)^{\frac{-3}{2}} \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' &= \pm \frac{c}{m} \\ \implies \frac{\kappa^3}{(\tau^2 - \kappa^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' &= \pm \frac{c}{m} \\ \implies \frac{\kappa^2}{(\tau^2 - \kappa^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' &= \pm \frac{c}{m} \end{aligned}$$

ya da

$$\begin{aligned}
\left(\pm \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2}}\right)' = \frac{c\tau}{m} &\implies \left(\left(1-\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2\right)^{\frac{-1}{2}}\right)' = \pm \frac{c\tau}{m} \\
&\implies \frac{-1}{2} \left(1-\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2\right)^{\frac{-3}{2}} 2\frac{\tau}{\kappa} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = \pm \frac{c\tau}{m} \\
&\implies \left(\frac{\kappa^2-\tau^2}{\kappa^2}\right)^{\frac{-3}{2}} \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = \pm \frac{c}{m} \\
&\implies \frac{\kappa^3}{(\kappa^2-\tau^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = \pm \frac{c}{m} \\
&\implies \frac{\kappa^2}{(\kappa^2-\tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = \pm \frac{c}{m}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Böylece (4.1.2) eşitliğini elde etmiş olduk.

Karşıt olarak (4.1.2) eşitliği sağlansın. Varsayalım ki (4.1.2) eşitliğinin ilk fonksiyonu sabit olsun, diğer durum da benzer biçimde gösterilebilir. c bir sabit olmak üzere

$$\frac{\kappa^2}{(\kappa^2-\tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = c$$

olsun. Şimdi

$$U = \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2-\kappa^2}}T + cN + \frac{\kappa}{\sqrt{\tau^2-\kappa^2}}B \quad (4.1.8)$$

vektör alanını tanımlayalım.

(4.1.8) eşitliğinin türevi alınarak ve Frenet formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
U' &= \left(\frac{\tau}{\sqrt{\tau^2-\kappa^2}}\right)' T + \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2-\kappa^2}} \kappa N + c\kappa T + c\tau B + \left(\frac{\kappa}{\sqrt{\tau^2-\kappa^2}}\right)' B + \frac{\kappa}{\sqrt{\tau^2-\kappa^2}}(-\tau N) \\
&= \left\{ \left(\frac{\tau}{\sqrt{\tau^2-\kappa^2}}\right)' + c\kappa \right\} T + \left\{ c\tau + \left(\frac{\kappa}{\sqrt{\tau^2-\kappa^2}}\right)' \right\} B \\
&= \left\{ \frac{\tau'}{\sqrt{\tau^2-\kappa^2}} + \frac{-\tau^2\tau' + \tau\kappa\kappa'}{(\tau^2-\kappa^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\kappa^2\tau' - \tau\kappa\kappa'}{(\tau^2-\kappa^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} T \\
&\quad + \left\{ \frac{\kappa^2}{(\tau^2-\kappa^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\tau'\kappa - \tau\kappa'}{\kappa^2} \tau + \frac{\kappa'}{\sqrt{\tau^2-\kappa^2}} + \frac{-\kappa\tau\tau' + \kappa^2\kappa'}{(\tau^2-\kappa^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} B \\
&= \frac{1}{\sqrt{\tau^2-\kappa^2}}(T\tau' + B\kappa') - \frac{\tau^2-\kappa^2}{(\tau^2-\kappa^2)^{\frac{3}{2}}} T\tau' - \frac{\tau^2-\kappa^2}{(\tau^2-\kappa^2)^{\frac{3}{2}}} B\kappa' \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğundan U sabit bir vektördür. Diğer taraftan

$$\langle N, U \rangle = \langle N, \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - \kappa^2}}T + cN + \frac{\kappa}{\sqrt{\tau^2 - \kappa^2}}B \rangle = c$$

olduğundan α bir slant helistir. Bu teoremin ispatını sonlandırır.

Uyarı 4.1.1 Teorem 4.1.1 de $\tau^2 - \kappa^2$ fonksiyonunu her yerde sıfırdan farklı almıştık. Diğer yandan $\tau^2(s) - \kappa^2(s) = 0$ eşitliğini sağlayan her zamansı eğri slant eğridir. Gerçekten, basit olması için sadece $\tau = \kappa$ durumunu düşünelim. $U = T(s) + B(s)$ şeklinde tanımladığımız vektör alanının türevini alıp (4.1.3) eşitliğindeki Frenet eşitlikleri kullanılırsa

$$U' = \kappa N - \tau N = \kappa N - \kappa N = 0$$

olduğundan U vektör alanı sabittir ve

$$\langle N, U \rangle = 0$$

olduğundan α bir slant eğridir.

Teorem 4.1.2 $\mathbb{E}_1^3$ de α birim hızlı bir uzaysı eğri olsun

(a) α eğrisinin normal vektörü uzaysı ise α nın bir slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{\kappa^2}{(\tau^2 - \kappa^2)^{3/2}} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \quad \text{ya da} \quad \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 - \tau^2)^{3/2}} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \quad (4.1.9)$$

fonksiyonlarından birinin sabit olmasıdır, burada $\tau^2 - \kappa^2$ sıfırdan farklıdır.

(b) α eğrisinin normal vektörü zamansı ise α eğrisinin bir slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{\kappa^2}{(\tau^2 + \kappa^2)^{3/2}} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \quad (4.1.10)$$

fonksiyonun sabit olmasıdır.

(c) Normal vektörü ışıksı olan her uzaysı eğri bir slant helistir.

İspat

(a) ve (b) nin ispatı α eğrisinin zamansı olma durumuna benzer olarak yapılabilir. Biz burada normal vektörün ışıksı olduğu durumun ispatını yapacağız.

Her $s \in I$ için eğrinin normal vektörü $N(s)$ ışıksı olsun.

$T(s) = \alpha'(s), T'(s) = N(s)$ dir. Ayrıca $\langle N(s), B(s) \rangle = 1$ olacak biçimde $T(s)$ ye dik bir tek $B(s)$ ışıksı vektörü vardır. Öyleyse Frenet eşitlikleri

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ -1 & 0 & -\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Burada τ , eğrinin sıfırdan farklı burulmasıdır. Şimdi her ışıksı eğrinin bir slant helis olduğunu göstereceğiz. $y'(s) + \tau(s)y(s) = 0$ adi diferensiyel denkleminin aşikar olmayan her hangi bir çözümü $a_2(s)$ olsun.

$$U = a_2(s)N(s)$$

olarak tanımlayalım. Bu eşitliğin türevini alırsak

$$U' = a_2'N + a_2(\tau N) = (a_2' + a_2\tau)N$$

ve

$$a_2' + a_2\tau = 0$$

olduğundan

$$U' = 0N = 0 \implies U = \text{sabit}$$

olur, diğer taraftan

$$\langle N, U \rangle = \langle N, a_2N \rangle = 0$$

olduğundan α eğrisi bir slant helistir.

4.2 Işıksı (Null) Olmayan Slant Helislerin İnvolut ve Göstergeleri

Bu bölümde bir slant helisin teğet göstergesi, binormal göstergesi ve involütleri incelenecektir. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ bir birim hızlı bir eğrinin teğet göstergesi $T : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$, binormal

göstergesi $B : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ birer eğrilerdir. Hiperbolik uzay $\mathbb{H}^2 = \{x \in \mathbb{E}_1^3, \langle x, x \rangle = -1\}$ De Sitter uzay (Lorentz küresi) $\mathbb{S}_1^2 = \{x \in \mathbb{E}_1^3, \langle x, x \rangle = 1\}$ ile verilir. Bu uzaylar $\mathbb{E}_1^3$ deki birim küre ile aynı rolü oynarlar. $\mathbb{H}^2$ ve $\mathbb{S}^2$, üstünde olan bir eğriye küresel denir. Özellikle teğet ve binormal göstergeleri küreseldir.

Teorem 4.2.1 $\alpha, \mathbb{E}_1^3$ de birim hızlı zamansı veya uzaysı (normal vektörü uzaysı veya zamansı olan) eğri olsun. α bir slant helis ise α nın T teğet göstergesi bir küresel helistir.

İspat

κ_T ve τ_T ile T nin sırasıyla eğriliği ve burulmasını gösteriyoruz. τ_T/κ_T oranının bir sabit olduğunu ispatlamaya çalışacağız. Böylece $\mathbb{E}_1^3$ de T bir (küresel) helisi gösterir. Teğet göstergesi birim hızlı olmayabilir. Genel olarak eğer $\beta(t)$ yay uzunluk ile parametre edilmemiş eğriyse, eğrilik ve burulma

$$\begin{aligned}\kappa_\beta^2(t) &= \epsilon \frac{\|\beta'(t)\|^2 \|\beta''(t)\|^2 - \langle \beta'(t), \beta''(t) \rangle^2}{\|\beta'(t)\|^6} \\ \tau_\beta(t) &= -\epsilon \frac{\det(\beta'(t), \beta''(t), \beta'''(t))}{\kappa_\beta^2(t) \|\beta'(t)\|^6}\end{aligned}$$

dır, burada $\epsilon, \beta''(t)$ nin sırasıyla bir uzaysı ya da zamansı vektör olmasına bağlı olarak 1 veya -1 dir.

α eğrisinin N asli normal vektörü uzaysı ya da zamansı olan bir eğri olduğunu düşünelim. N nin sırasıyla uzaysı ya da zamansı olmasına bağlı olarak ϵ_0 1 veya -1 dir. Teğet göstergesi T bir uzaysı ya da bir zamansı eğridir. Her iki durum için de

$$\begin{aligned}\kappa_T^2 &= \frac{1}{\kappa^2}(\kappa^2 - \epsilon_0^2 \tau), \\ \det(T', T'', T''') &= \epsilon_0 \kappa^5 \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)', \\ \tau_T &= \epsilon_0 \frac{\kappa \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'}{\kappa^2 - \epsilon_0^2 \tau}\end{aligned}$$

dır. α bir zamansı eğri ise, T bir uzaysı eğridir ve

$$\begin{aligned}\kappa_T^2 &= -\frac{1}{\kappa^2}(\kappa^2 - \tau^2), \\ \det(T', T'', T''') &= -\kappa^5 \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)', \\ \tau_T &= \epsilon_0 \frac{\kappa \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'}{\kappa^2 - \tau^2}.\end{aligned}$$

dır. Sonuç olarak

$$\frac{\tau_T}{\kappa_T} = \epsilon_0 \frac{\kappa^2 \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'}{(\kappa^2 - \epsilon_0^2 \tau)^{3/2}} \quad \text{veya} \quad \frac{\tau_T}{\kappa_T} = \frac{\kappa^2 \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'}{(\tau^2 - \kappa^2)^{3/2}}$$

oranları Teorem 4.1.1 ve 4.1.2 de sabittir. Buna göre T bir helistir.

Teorem 4.2.2 α , $\mathbb{E}_1^3$ de birim hızlı zamansı veya uzaysı (normal vektörü uzaysı veya zamansı olan) eğri olsun. α bir slant helis ise α nın B binormal göstergesi bir küresel helistir.

İspat

κ_B ve τ_B ile B nin sırasıyla eğriliği ve burulmasını gösteriyoruz. α eğrisinin bir uzaysı eğri olduğunu düşünelim. O zaman B binormal göstergesi N nin sırasıyla zamansı ya da uzaysı olmasına bağlı olarak zamansı ya da uzaysı eğridir. Buna göre

$$\begin{aligned} \kappa_B^2 &= \frac{\kappa^2 - \epsilon_0^2 \tau}{\tau^2}, \\ \det(B', B'', B''') &= \epsilon_0^2 \kappa \tau^3 \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)', \\ \tau_B &= \epsilon_0 \frac{\kappa^2}{\tau^2 (\kappa^2 - \epsilon_0 \tau^2)} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)', \end{aligned}$$

dır, burada N nin uzaysı ya da zamansı olmasına bağlı olarak ϵ_0 sırasıyla 1 ya da -1 dir.

Eğer α zamansı ise B uzaysı eğridir. Öyleyse

$$\begin{aligned} \kappa_B^2 &= \left(\frac{\tau^2 - \kappa^2}{\tau^2}\right), \\ \det(B', B'', B''') &= \kappa^2 \tau^3 \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)', \\ \tau_B &= \frac{\kappa^2}{\tau(\tau^2 - \kappa^2)} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\frac{\tau_B}{\kappa_B} = \delta(\tau) \frac{\kappa^2 \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'}{(\kappa^2 - \epsilon_0^2 \tau)^{3/2}} \quad \text{veya} \quad \frac{\tau_B}{\kappa_B} = \delta(\tau) \frac{\kappa^2 \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'}{(\kappa^2 - \epsilon_0^2 \tau)^{3/2}}$$

dir. Burada τ nin pozitif ya da negatif olmasına bağlı olarak δ sırasıyla 1 ya da -1 dir. Her durumda (4.1.2), (4.1.9) ve (4.1.10) ifadeleri dual sabit olduğundan $\mathbb{E}_1^3$ de B binormal göstergesinin bir helis olduğu ispatlanır.

Bu bölümde slant helislerin involütlerinin karakterizasyonunu vereceğiz. Birim hızlı bir $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisi ile aynı aralıkta tanımlı $\beta : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ eğrisi verilsin. Her bir $s \in I$ için α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki teğeti $\beta(s)$ noktasından geçiyorsa ve $\langle \alpha'(s), \beta'(s) \rangle = 0$ ise β eğrisine α eğrisinin bir involütü denir. α ışıksı olmayan bir eğri ise α eğrisinin bir involütü

$$\beta(s) = \alpha(s) + (c - s)T(s)$$

eşitliği ile verilebilir, burada c bir sabit T ise α nın birim teğet vektörüdür.

Teorem 4.2.3 α bir birim hızlı bir zamansız veya uzaysı (normal vektörü uzaysı veya zamansız olan) eğri ve α nın involütü β olsun. α nın bir slant helis olması için gerek ve yeter şart β nın bir genel helis olmasıdır.

İspat

β eğrisinin eğriliği ve burulması κ_β ve τ_β ile gösterilsin.

α bir zamansız eğri ise,

$$\kappa_\beta = \frac{\tau^2 - \kappa^2}{\kappa^2(c - s)^2}$$

ve

$$\tau_\beta = -\frac{\kappa}{(c - s)(\tau^2 - \kappa^2)} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'$$

ise

$$\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} = -\frac{\kappa^2}{(\tau^2 - \kappa^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \quad (4.2.1)$$

dir. Eğer α bir uzaysı eğri ise

$$\begin{aligned} \kappa_\beta &= \frac{\kappa^2 - \epsilon_0^2 \tau}{\kappa^2(c - s)^2}, \\ \tau_\beta &= \frac{\kappa}{(c - s)(\kappa^2 - \epsilon_0^2 \tau)} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \end{aligned}$$

dir. O zaman

$$\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} = \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 - \epsilon_0^2 \tau)^{3/2}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \quad (4.2.2)$$

dir. Burada N nin uzaysı ya da zamansı vektör olmasına bağlı olarak ϵ_0 sırasıyla 1 ya da -1 dir. (4.2.1), (4.2.2) eşitlikleri ve Teorem 4.2.1 ve Teorem 4.2.2 kullanılarak ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.4 $\mathbb{E}_1^3$ de α birim hızlı ışıksı eğri olsun. α eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart α eğrisinin burulmasının

$$\tau(s) = \frac{a}{(bs + c)^2} \quad (4.2.3)$$

olmasıdır, burada a, b ve c sabittir.

İspat

$\mathbb{E}_1^3$ de α birim hızlı ışıksı eğri olsun. $T(s) = \alpha'(s)$, $N(s) = T'(s)$ ve $N(s)$ ye dik, $\langle T(s), B(s) \rangle = 1$ olmak üzere bir tek $B(s)$ ışıksı vektörü vardır. Frenet eşitlikleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ -1 & 0 & \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (4.2.4)$$

eşitliğiyle verilir. Burada τ α eğrisinin sıfırdan farklı burulmasıdır.

α eğrisinin bir slant helis olduğunu kabul edelim. Öyleyse $\langle N, U \rangle$, sabit fonksiyon olacak biçimde U sabit vektör alanı vardır. c bir sabit sayı olmak üzere

$$U = a_1(s)T(s) + cN(s) + a_3(s)B(s)$$

şeklindedir. Türev alırsak

$$\begin{aligned} U' &= a_1' T + a_1 T' + c N' + a_3' B + a_3 B' \\ &= a_1 T + a_1 N + c(\tau T - B) + a_3 B + a_3(-\tau N) \\ &= (a_1' + c\tau)T + (a_1 - a_3\tau)N + (-c + a_3')B \end{aligned}$$

ve $U' = 0$ olduğundan

$$\left. \begin{aligned} a_1' + c\tau &= 0 \\ a_1 - a_3\tau &= 0 \\ a_3' - c &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2.5)$$

olur. Öyleyse $m \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$a_3(s) = cs + m$$

ve

$$a_1(s) = (cs + m)\tau$$

bulunur. (4.2.5) in ilk eşitliği kullanılarak

$$(cs + m)\tau' + 2c\tau = 0$$

elde edilir. Bu denklemin çözümü, m ve n sabit olmak üzere

$$\tau(s) = \frac{a}{(bs + c)^2}$$

dir.

Karşıt olarak (4.2.3) eşitliği sağlansın.

$$U = \frac{a}{bs + c}T(s) + bN(s) + (bs + c)B(s)$$

eşitliğiyle U vektörünü tanımlayalım. U nun türevini alıp Frenet eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} U' &= \left(\frac{a}{bs + c} \right)' T + \frac{a}{bs + c} T' + bN' + (bs + c)' B + (bs + c) B' \\ &= -\frac{ab}{(bs + c)^2} T + \frac{a}{bs + c} N + b(\tau T - B) + bB + (bs + c)(-\tau N) \\ &= \left(-\frac{ab}{(bs + c)^2} + b\tau \right) T + \left(\frac{a}{bs + c} - \tau(bs + c) \right) N + (-b - b)B \end{aligned}$$

ve

$$\tau(s) = \frac{a}{(bs + c)^2}$$

olduğundan $U' = 0$ bulunur. Buna göre U sabittir. Ayrıca $\langle N, U \rangle = b$ olduğundan α bir slant helistir.

5. $\mathbb{E}^n$ ÖKLİD UZAYINDA SLANT HELİSLERİN BAZI KARAKTERİZASYONLARI

Bu bölümde referansımız Ahmad and Turgut (2010) olacaktır.

5.1 $\mathbb{E}^n$ Öklid Uzayında Slant Helisler

Tanım 5.1.1 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin V_2 birim asli normali belirli bir U doğrultusuyla bir sabit açı yapıyorsa α eğrisine slant helis denir.

Tanım 5.1.2 κ_i , $1 \leq i \leq n-1$ eğrilikleri sabit olan düzenli bir $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisine W -eğri denir (Petrović 2002).

Tanım 5.1.3 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisi için $\frac{\kappa_{i+1}}{\kappa_i}$ oranlarının hepsi sabit ise α eğrisine sabit eğrilikli oranlara sahip yada (ccr-eğri) denir (Monterde 2007, Öztürk 2008).

Tanım 5.1.4 α , $\mathbb{E}^n$ de birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin harmonik eğrilikleri $i = 0, 1, \dots, n-1$ için $H_i : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları

$$H_i = \begin{cases} 0 & i = 0, \\ \kappa_1/\kappa_2 & i = 1, \\ \frac{1}{\kappa_{i+1}}[\kappa_i H_{i-2} + H'_{i-1}] & i = 2, 3, \dots, n-2 \end{cases} \quad (5.1.1)$$

olacak şekilde tanımlanır. $\mathbb{E}^4$ te bir α eğrisinin harmonik eğrilikleri

$$\begin{aligned} H_0 &= 0 \\ H_1 &= \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \\ H_2 &= \frac{1}{\kappa_3}[\kappa_2 H_0 + H'_1] \implies H_2 = \frac{1}{\kappa_3} \left[\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right)' \right] \\ H_3 &= \frac{1}{\kappa_4}[\kappa_3 H_1 + H'_2] = \frac{1}{\kappa_4} \left[\kappa_3 \frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \left[\frac{1}{\kappa_3} \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right)' \right]' \right] = \frac{\kappa_3 \kappa_1}{\kappa_4 \kappa_2} + \frac{1}{\kappa_4} \left[\frac{1}{\kappa_3} \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right)' \right]' \end{aligned}$$

şeklindedir. H_i fonksiyonlarına eğrinin 1. tipten harmonik eğrilikleri de denir.

Teorem 5.1.1 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ birim hızlı bir eğri olsun. Öyleyse α eğrisinin bir slant helis olması için gerek ve yeter şart $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$G_i = \begin{cases} \int \kappa_1 ds & i = 1, \\ 1 & i = 2 \\ \frac{\kappa_1}{\kappa_2} G_1 & i = 3 \\ \frac{1}{\kappa_{i-1}} [\kappa_{i-2} G_{i-2} + G'_{i-1}] & i = 4, \dots, n \end{cases} \quad (5.1.2)$$

eşitliklerini ve

$$\frac{dG_n}{ds} = -\kappa_{n-1}(s)G_{n-1}(s) \quad (5.1.3)$$

koşulunu sağlayan C^2 sınıfından G_i fonksiyonlarının bulunmasıdır.

İspat

$\alpha, \mathbb{E}^n$ de birim hızlı bir slant helis olsun. U, V_2 ile bir θ sabit açısı yapan doğrultu olsun ($\cos \theta \neq 0$). Genelliği bozmaksızın $\langle U, V \rangle = 1$ alabiliriz. $1 \leq i \leq n$ için a_i diferansiyellenebilir fonksiyonları

$$U = \sum_{i=1}^n a_i V_i \quad , \quad s \in I \quad (5.1.4)$$

yani

$$a_i = \langle V_i, U \rangle \quad , \quad 1 \leq i \leq n$$

vardır.

$$\begin{aligned} \langle V_i, U \rangle &= \left\langle V_i, \sum_{j=1}^n a_j V_j \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \langle V_i, a_j V_j \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n a_j \langle V_i, V_j \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n a_i \delta_{ij} = a_i \\ &= a_i \end{aligned}$$

olduğundan

$$a_2 = \langle V_2, U \rangle = \|V_2\| \|U\| \cos \theta = \cos \theta = \text{sabit} \quad (5.1.5)$$

olur. U vektör alanı sabit olduğundan türevi 0 dır. Yani $U' = 0$ dır. Buna göre

$$a_i = \langle V_i, U \rangle$$

eşitliğinin türevini alırsak

$$\begin{aligned} a'_i &= \langle V_i, U \rangle' \\ &= \langle V'_i, U \rangle + \langle V_i, U' \rangle \\ &= \langle V'_i, U \rangle \end{aligned}$$

elde edilir. (2.4.1) Frenet eşitliklerinden

$$\begin{aligned} a'_1 &= \langle V_1, U \rangle' = \langle V'_1, U \rangle + \langle V_1, U' \rangle = \kappa_1 \langle V_2, \sum a_i V_i \rangle = \kappa_1 a_2 \\ \implies a'_1 - \kappa_1 a_2 &= 0 \\ a'_2 &= \langle V_2, U \rangle' = \langle V'_2, U \rangle + \langle V_2, U' \rangle = \langle -\kappa_1 V_1 + \kappa_2 V_3, U \rangle = -\kappa_1 a_1 + \kappa_2 a_3 \\ \implies a'_2 + \kappa_1 a_1 - \kappa_2 a_3 &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu işlemleri $i = 3, 4, \dots, n-1$ için yaparsak

$$\begin{aligned} a_i &= \langle V_i, U \rangle \\ \implies a'_i &= \langle V'_i, U \rangle \\ &= \langle -\kappa_{i-1} v_{i-1} + \kappa_i v_{i+1}, U \rangle \\ &= \left\langle -\kappa_{i-1} v_{i-1} + \kappa_i v_{i+1}, \sum_{j=1}^n a_j v_j \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^n a_j \langle -\kappa_{i-1} v_{i-1} + \kappa_i v_{i+1}, v_j \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n a_j (-\kappa_{i-1} \langle v_{i-1}, v_j \rangle + \kappa_i \langle v_{i+1}, v_j \rangle) \\ &= \sum_{j=1}^n a_j (-\kappa_{i-1} \delta_{i-1,j} + \kappa_i \delta_{i+1,j}) \\ &= a_{i-1}(-\kappa_{i-1}) + a_{i+1}\kappa_{i+1} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\implies a'_i + a_{i-1}\kappa_{i-1} - a_{i+1}\kappa_{i+1} = 0$$

elde edilir. $a_n = \langle V_n, U \rangle$ eşitliğinin türevini alırsak

$$\begin{aligned}
a'_n &= \langle V_n, U \rangle' \\
&= \langle V'_n, U \rangle \\
&= \langle -\kappa_{n-1} V_{n-1}, U \rangle \\
&= \left\langle -\kappa_{n-1} V_{n-1}, \sum_{j=1}^n a_j v_j \right\rangle \\
&= - \sum_{j=1}^n \kappa_{n-1} a_j \langle V_{n-1}, v_j \rangle \\
&= -\kappa_{n-1} \sum_{j=1}^n a_j \langle V_{n-1}, v_j \rangle \\
&= -\kappa_{n-1} a_{n-1} \langle V_{n-1}, v_{n-1} \rangle \\
&= -\kappa_{n-1} a_{n-1}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$a'_n + \kappa_{n-1} a_{n-1} = 0$$

elde edilir. Böylece

$$\left. \begin{aligned}
a'_1 - \kappa_1 a_2 &= 0 \\
a'_2 + \kappa_1 a_1 - \kappa_2 a_3 &= 0 \\
a'_i + a_{i-1} \kappa_{i-1} - a_{i+1} \kappa_{i+1} &= 0, \quad 3 \leq i \leq n-1 \\
a_n + \kappa_{n-1} a_{n-1} &= 0
\end{aligned} \right\} \quad (5.1.6)$$

adi diferensiyel denklem sistemi bulunur. $a_2 \neq 0$ olduğundan $a_i, (i = 1, \dots, n)$ fonksiyonlarını $G_i, (i = 1, \dots, n)$ fonksiyonları cinsinden

$$a_i(s) = G_i(s) a_2(s) \quad , \quad 1 \leq i \leq n \quad (5.1.7)$$

şeklinde ifade edebiliriz. (5.1.7) eşitliği (5.1.6) eşitliğinin ilk (n-1) eşitliğinden yararlanarak (5.1.2) deki eşitlikleri ve, ayrıca (5.1.6) nın son eşitliğinden (5.1.3) koşulu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$a'_1 - \kappa_1 a_2 = 0 \implies a'_1 = \kappa_1 a_2$$

ve

$$G_1 = \frac{a_1}{a_2}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} G'_1 = \frac{a'_1}{a_2} = \frac{\kappa_1 a_2}{a_2} = \kappa_1 &\implies \int G_1 ds = \int \kappa_1 ds \\ &\implies G_1 = \int \kappa_1 ds \end{aligned}$$

bulunur.

$$G_2 = \frac{a_2}{a_2} = 1$$

(5.1.6) eşitliğinin ikinci eşitliğinden

$$\begin{aligned} \kappa_1 a_1 - \kappa_2 a_3 = 0 &\implies a_3 = \frac{\kappa_1 a_1}{\kappa_2} \\ &\implies G_3 = \frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{\kappa_1 a_1}{\kappa_2}}{a_2} = \frac{\kappa_1 a_1}{\kappa_2 a_2} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2} G_1 \end{aligned}$$

bulunur. (5.1.6) eşitliğinin üçüncü eşitliğinden

$$a'_3 + \kappa_2 a_2 - \kappa_3 a_4 = 0 \implies a_4 = \frac{a'_3 + \kappa_2 a_2}{\kappa_3}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} G_4 &= \frac{\frac{a'_3 + \kappa_2 a_2}{\kappa_3}}{a_2} = \frac{1}{\kappa_3} \left[\frac{a'_3 + \kappa_2 a_2}{a_2} \right] \\ &= \frac{1}{\kappa_3} \left[\frac{a'_3}{a_2} + \kappa_2 \frac{a_2}{a_2} \right] \\ &= \frac{1}{\kappa_3} [G'_3 + \kappa_2 G_2] \\ &= \frac{1}{\kappa_3} [\kappa_2 G_2 + G'_3] \end{aligned}$$

elde edilir ve böyle sürdürülerek

$$G_i = \frac{1}{\kappa_{i-1}} [\kappa_{i-2} G_{i-2} + G'_{i-1}] \quad , \quad 3 \leq i \leq n$$

olduğu kolayca görülebilir. (5.1.6) eşitliğinin son eşitliğinden

$$a'_n = -\kappa_{n-1} a_{n-1}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\Rightarrow G'_n &= \frac{a'_n}{a_2} \\
&= -\frac{\kappa_{n-1}a_{n-1}}{a_2} \\
&= -\kappa_{n-1}a_{n-1}
\end{aligned}$$

bulunur.

Karşıt olarak α , (5.1.2) ve (5.1.3) eşitliklerini sağlayan G_i fonksiyonu ile birlikte bir birim hızlı eğri olsun. $U = \cos \theta \left[\sum_{i=1}^n G_i V_i \right]$ olacak şekilde tanımlayalım, burada θ bir sabit açı ve $\cos \theta \neq 0$ dır. U sabittir, gerçekten

$$\begin{aligned}
U' &= \left(\sum_{i=1}^n G_i V_i \right)' \\
&= \cos \theta \left(\sum_{i=1}^n (G'_i V_i + G_i V'_i) \right) \\
&= \cos \theta (G'_1 V_1 + G_1 V'_1 + G'_2 V_2 + G_2 V'_2 + \dots + G'_n V_n + G_n V'_n) \\
&= \cos \theta (\kappa_1 V_1 + G_1 \kappa_1 V_2 - \kappa_1 V_1 + \kappa_3 V_3 + (G_4 \kappa_3 - \kappa_2 G_2) V_3 + \frac{1}{\kappa_2} \kappa_1 G_1 (-\kappa_2 V_2 + \kappa_3 V_4) + \dots) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur. Diğer yandan

$$\begin{aligned}
\langle V_2, U \rangle &= \left\langle V_2, \cos \theta \left(\sum_{i=1}^n G_i V_i \right) \right\rangle \\
&= \cos \theta \sum_{i=1}^n G_i \langle V_2, V_i \rangle \\
&= \cos \theta G_2 \\
&= \cos \theta
\end{aligned}$$

dır. Böylece α slant helistir.

Şimdi 2. tipten harmonik eğrilikleri tanımlayalım.

Tanım 5.1.5 α , $\mathbb{E}^n$ de birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin 2. tipten harmonik

eğrilikleri $i = 1, \dots, n$ olmak üzere

$$G_i = \begin{cases} \int \kappa_1 ds & i = 1, \\ 1 & i = 2 \\ \frac{1}{\kappa_{i-1}} [\kappa_{i-2} G_{i-2} + G'_{i-1}] & i = 3, 4, \dots, n \end{cases}$$

eşitliğini sağlayan $G_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ ye fonksiyonlardır.

Sonuç 5.1.1 $\mathbb{E}^n$ de birim hızlı bir α eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart

2. tipten G_n ve G_{n-1} harmonik eğriliklerin (5.1.3) eşitliğini sağlamasıdır, yani

$$\frac{dG_n}{ds} = -\kappa_{n-1} G_{n-1}$$

dir.

Bu yeni karakterizasyonu elde etmek için aşağıdaki değişken değişikliğini yapalım.

$$t(s) = \int^s \kappa_{n-1}(u) du, \quad \frac{dt}{ds} = \kappa_{n-1}$$

Özel olarak (5.1.3) eşitliğine göre

$$G_i = \frac{1}{\kappa_{i-1}} [\kappa_{i-2} G_{i-2} + G'_{i-1}]$$

olduğundan

$$\begin{aligned} G'_{n-1}(s) &= \kappa_{n-1}(s) G_n(s) - \kappa_{n-2}(s) G_{n-2}(s) \\ G'_{n-1}(t) \frac{dt}{ds} &= \kappa_{n-1}(t) G_n(t) - \kappa_{n-2}(t) G_{n-2}(t) \\ G'_{n-1} \kappa_{n-1} &= \kappa_{n-1} G_n - \kappa_{n-2} G_{n-2} \\ G'_{n-1}(t) &= G_n(t) - \frac{\kappa_{n-2}(t)}{\kappa_{n-1}(t)} G_{n-2}(t) \end{aligned}$$

Sonuç olarak α bir slant helis olduğundan (5.1.2) eşitliğinin son eşitliğine göre

$$\begin{aligned} G'_n(s) &= -\kappa_{n-1}(s) G_{n-1}(s) \\ \implies G'_n \frac{dt}{ds} &= -\kappa_{n-1}(t) G_{n-1}(t) \\ \implies G'_n(t) \kappa_{n-1}(t) &= -\kappa_{n-1}(t) G_{n-1}(t) \\ \implies G'_n(t) &= -G_{n-1}(t) \\ \implies G''_n(t) &= -G'_{n-1}(t) \end{aligned}$$

olur.

$$G'_{n-1}(t) = G_n(t) - \frac{\kappa_{n-2}(t)}{\kappa_{n-1}(t)} G_{n-2}(t)$$

ve

$$G''_n(t) = -G'_{n-1}(t)$$

olduğundan

$$G''_n(t) + G_n(t) = \frac{\kappa_{n-2}(t)}{\kappa_{n-1}(t)} G_{n-2}(t)$$

bulunur. Parametre değıştirme metoduyla bu denklemin genel çözümü

$$G_n(t) = \left(A - \int \frac{\kappa_{n-2}(t)G_{n-2}(t)}{\kappa_{n-1}(t)} \sin t dt \right) \cos t + \left(B + \int \frac{\kappa_{n-2}(t)G_{n-2}(t)}{\kappa_{n-1}(t)} \cos t dt \right) \sin t \quad (5.1.8)$$

şeklindedir, burada A ve B integral sabitleridir.

$$t = \int^s \kappa_{n-1}(u) du \implies dt = \kappa_{n-1}(s) ds$$

dir, dt ve t yi (5.1.8) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} G_n(s) = & \left[A - \int \left(\kappa_{n-2}(s)G_{n-2}(s) \sin \int \kappa_{n-1}(s) ds \right) ds \right] \cos \int \kappa_{n-1}(s) ds \\ & + \left[B + \int \left(\kappa_{n-2}(s)G_{n-2}(s) \cos \int \kappa_{n-1}(s) ds \right) ds \right] \sin \int \kappa_{n-1}(s) ds \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

eşitliğini elde ederiz. (5.1.2) eşitliğinde G_{n-1} fonksiyonu ise

$$G'_n = -\kappa_{n-1}G_{n-1} \implies G_{n-1} = -\frac{G'_n}{\kappa_{n-1}}$$

biçimindedir. (5.1.9) eşitliğinin türevini alırsak

$$\begin{aligned} (I) &= A - \int \left(\kappa_{n-2}(s)G_{n-2}(s) \sin \int \kappa_{n-1}(s) ds \right) ds \\ (II) &= B + \int \left(\kappa_{n-2}(s)G_{n-2}(s) \cos \int \kappa_{n-1}(s) ds \right) ds \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} G'_n = & \left(\kappa_{n-2}G_{n-2} \sin \int \kappa_{n-1} ds \right) \cos \int \kappa_{n-1} ds - (I) \kappa_{n-1} \sin \int \kappa_{n-1} ds \\ & + \left(-\kappa_{n-2}G_{n-2} \cos \int \kappa_{n-1} ds \right) \sin \int \kappa_{n-1} ds + (II) \cos \int \kappa_{n-1} ds \end{aligned}$$

olduğundan

$$G_{n-1} = -\frac{G'_n}{\kappa_{n-1}}$$

eşitliğini de gözönüne alırsak

$$G_{n-1}(s) = (I) \sin \int \kappa_{n-1}(s) ds - (II) \cos \int \kappa_{n-1}(s) ds \quad (5.1.10)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikten Sonuç 5.1.1' in bir sonucu olarak bir slant helisin bir integral karakterizasyonunu verelim.

Teorem 5.1.2 $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ birim hızlı bir eğri olsun. Öyleyse α nın bir slant helis olması için gerek ve yeter şart bazı A ve B sabitleri için

$$\begin{aligned} G_{n-1}(s) = & \left[A - \int \left(\kappa_{n-2}(s) G_{n-2}(s) \sin \int \kappa_{n-1}(s) ds \right) ds \right] \sin \int^s \kappa_{n-1}(u) du \\ & - \left[B + \int \left(\kappa_{n-2}(s) G_{n-2}(s) \cos \int \kappa_{n-1}(s) ds \right) ds \right] \cos \int^s \kappa_{n-1}(u) du \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

eşitliğinin sağlamasıdır.

İspat

Kabul edelim ki α bir slant helis olsun. $m(s)$ ve $n(s)$ fonksiyonlarını

$$\left. \begin{aligned} m(s) &= G_n(s) \cos \phi + G_{n-1}(s) \sin \phi + \int \kappa_{n-2} G_{n-2} \sin \phi ds \\ n(s) &= G_n(s) \sin \phi - G_{n-1}(s) \cos \phi - \int \kappa_{n-2} G_{n-2} \cos \phi ds \end{aligned} \right\} \quad (5.1.12)$$

şeklinde tanımlayalım, burada

$$\phi(s) = \int^s \kappa_{n-1}(u) du$$

dur ve G_i $i = n-2, n-1, n$ fonksiyonları Teorem 5.1.1 deki gibidir. (5.1.12) eşitliklerini s değişkenine bağlı olarak türevini alırsak ve (5.1.2) ve (5.1.3) eşitliklerindeki hesaplamaları alırsak

$$\begin{aligned} \frac{dm}{ds} &= G'_n \cos \phi - G_n \sin \phi \phi' + G'_{n-1}(s) \sin \phi + G_{n-1}(s) \cos \phi \phi' + \kappa_{n-2} G_{n-2} \sin \phi \\ \phi' &= \kappa_{n-1} \\ G'_n &= -\kappa_{n-1} G_{n-1} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\frac{dm}{ds} &= -\kappa_{n-1}G_{n-1}\cos\phi - G_n\sin\phi\kappa_{n-1} + G'_{n-1}(s)\sin\phi + G_{n-1}(s)\cos\phi\kappa_{n-1} + \kappa_{n-2}G_{n-2}\sin\phi \\ &= 0\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\frac{dn}{ds} &= G'_n(s)\sin\phi + G_n(s)\cos\phi\phi' - G'_{n-1}(s)\cos\phi + G_{n-1}\sin\phi\phi' - \kappa_{n-2}G_{n-2}\cos\phi \\ \phi' &= \kappa_{n-1} \\ G'_n &= -\kappa_{n-1}G_{n-1}\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\frac{dn}{ds} &= -\kappa_{n-1}G_{n-1}\sin\phi + G_n(s)\cos\phi\kappa_{n-1} - G'_{n-1}(s)\cos\phi + G_{n-1}\sin\phi\kappa_{n-1} - \kappa_{n-2}G_{n-2}\cos\phi \\ &= 0\end{aligned}$$

elde ederiz. Öyleyse $m = A$ ve $n = B$ olacak şekilde A ve B sabitleri vardır. (5.1.12)

eşitliğinde bunları yerine yazarsak,

$$A = G_n\cos\phi + G_{n-1}\sin\phi + \int \kappa_{n-2}G_{n-2}\sin\phi$$

ve

$$B = G_n\sin\phi - G_{n-1}\cos\phi - \int \kappa_{n-2}G_{n-2}\cos\phi$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}\sin\phi A &= \sin\phi G_n\cos\phi + G_{n-1}\sin^2\phi + \sin\phi \int \kappa_{n-2}G_{n-2}\sin\phi \\ -\cos\phi B &= -\cos\phi G_n\sin\phi + G_{n-1}\cos^2\phi + \cos\phi \int \kappa_{n-2}G_{n-2}\cos\phi\end{aligned}$$

eşitliklerini taraf tarafa toplarsak

$$\sin\phi A - \cos\phi B = G_{n-1} + \sin\phi \int \kappa_{n-2}G_{n-2}\sin\phi + \cos\phi \int \kappa_{n-2}G_{n-2}\cos\phi$$

olduğundan

$$G_{n-1} = \sin\phi(A - \int \kappa_{n-2}G_{n-2}\sin\phi) - \cos\phi(B + \int \kappa_{n-2}G_{n-2}\cos\phi)$$

bulunur.

Karşıt olarak $G_i, i = 1, \dots, n-1$ için (5.1.2) eşitliğini sağlasın ve (5.1.11) eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. Teorem 5.1.1 i uygulamak için

$$G_n(s) = \left[A - \int \kappa_{n-2}(s)G_{n-2}(s) \sin \phi ds \right] \cos \phi + \left[B + \int \kappa_{n-2}(s)G_{n-2}(s) \cos \phi ds \right] \sin \phi$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Burada

$$\phi(s) = \int^s \kappa_{n-1}(u) du$$

dır. (5.1.11) eşitliğinin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} G'_{n-1} &= -\kappa_{n-2}G_{n-2} \sin \phi \sin \phi + \cos \phi \phi'(I) - \kappa_{n-2}G_{n-2} \cos \phi \cos \phi + \sin \phi \phi'(II) \\ &= -\kappa_{n-2}G_{n-2} + \cos \phi \left(A - \int \kappa_{n-2}G_{n-2} \sin \phi ds \right) \kappa_{n-1} + \\ &\quad \sin \phi \left(B + \int \kappa_{n-2}G_{n-2} \cos \phi ds \right) \kappa_{n-1} \\ &= -\kappa_{n-2}G_{n-2} + \\ &\quad \kappa_{n-1} \left[\cos \phi \left(A - \int \kappa_{n-2}G_{n-2} \sin \phi ds \right) + \sin \phi \left(B + \int \kappa_{n-2}G_{n-2} \cos \phi ds \right) \right] \\ &= -\kappa_{n-2}G_{n-2} + \kappa_{n-1}G_n \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik $i = n$ için (5.1.2) eşitliğini sağlar. Buna göre

$$(I) = A - \int \kappa_{n-2}(s)G_{n-2}(s) \sin \phi ds$$

ve

$$(II) = B + \int \kappa_{n-2}(s)G_{n-2}(s) \cos \phi ds$$

olmak üzere

$$G_n = \left[A - \int \kappa_{n-2}(s)G_{n-2}(s) \sin \phi ds \right] \cos \phi + \left[B + \int \kappa_{n-2}(s)G_{n-2}(s) \cos \phi ds \right] \sin \phi$$

olduğundan

$$\begin{aligned} G'_n &= -\kappa_{n-2}G_{n-2} \sin \phi \cos \phi - \sin \phi \phi'(I) + \kappa_{n-2}G_{n-2} \cos \phi \sin \phi + \cos \phi \phi'(II) \\ &= -\kappa_{n-1} \sin \phi \left(A - \int \kappa_{n-2}G_{n-2} \sin \phi ds \right) - \cos \phi \kappa_{n-1} \left(B + \int \kappa_{n-2}G_{n-2} \cos \phi ds \right) \\ &= -\kappa_{n-1} \left[\sin \phi \left(A - \int \kappa_{n-2}G_{n-2} \sin \phi ds \right) - \cos \phi \left(B + \int \kappa_{n-2}G_{n-2} \cos \phi ds \right) \right]' \\ &= -\kappa_{n-1}G_{n-1} \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikler sağlandığına göre eğri bir slant helistir.

5.2 2. Tipten Harmonik Eğrilikler ve Slant Helisler

Bu bölümde eğrinin 2. tip harmonik eğrilikler açısından slant helisler için bazı karakterizasyonlarını veriyoruz. İlk olarak aşağıdaki teoremi ifade ediyoruz.

Teorem 5.2.1 $\mathbb{E}^n$ n boyutlu Öklid uzayında $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ birim hızlı bir eğri olsun. $\{V_1, \dots, V_n\}$, $\{G_1, \dots, G_n\}$ ile sırasıyla eğrinin Frenet çatısını ve yüksek dereceden 2. tip harmonik eğriliğini gösteriyoruz. Öyleyse α nın slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{i=1}^n G_i^2 = c$$

olmasıdır, burada c sıfırdan farklı bir sabittir. Ayrıca $c = \sec^2 \theta$ dır, θ ise V_2 nin belirli bir U doğrultusuyla yaptığı açıdır.

İspat

Teorem 5.1.1 den

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-2} G_i G'_i &= G_1 G'_1 + G_2 G'_2 + \sum_{i=3}^{n-2} G_i G'_i \\ &= \kappa_1 G_1 + \sum_{i=3}^{n-2} G_i (\kappa_i G_{i+1} - \kappa_{i-1} G_{i-1}) \\ &= \kappa_1 G_1 + \sum_{i=3}^{n-2} (\kappa_i G_i G_{i+1} - \kappa_{i-1} G_{i-1} G_i) \\ &= \kappa_1 G_1 + \kappa_3 G_3 G_4 - \kappa_2 G_2 G_3 + \kappa_4 G_4 G_5 - \kappa_3 G_3 G_4 \\ &\quad + \kappa_5 G_5 G_6 + \kappa_4 G_4 G_5 + \dots + \kappa_{n-2} G_{n-2} G_{n-1} - \kappa_{n-3} G_{n-3} G_{n-2} \\ &= \kappa_{n-2} G_{n-2} G_{n-1} \end{aligned}$$

olur.

$$G_n = \frac{1}{\kappa_{n-1}} [\kappa_{n-1} G_{n-2} + G'_{n-1}]$$

olduğundan

$$\kappa_{n-2} G_{n-2} = \kappa_{n-1} G_n - G'_{n-1}$$

dir ve ayrıca

$$G'_n = -\kappa_{n-1} G_{n-1}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-2} G_i G'_i &= \kappa_{n-2} G_{n-2} G_{n-1} \\ &= (\kappa_{n-1} G_n - G'_{n-1}) G_{n-1} \\ &= \kappa_{n-1} G_n G_{n-1} - G'_{n-1} G_{n-1} \\ &= -G_n G'_n - G'_{n-1} G_{n-1} \end{aligned}$$

dir. Buna göre

$$\sum_{i=1}^n G_i G'_i = 0$$

olur. Öyleyse

$$\sum_{i=1}^n G_i^2 = \text{sabittir.}$$

U birim olduğundan

$$\begin{aligned} \langle U, U \rangle = 1 &\implies \langle \sum_{i=1}^n a_i V_i, \sum_{i=1}^n a_i V_i \rangle = 1 \\ &\implies \sum_{i=1}^n a_i^2 \langle V_i, V_i \rangle = 1 \\ &\implies \sum_{i=1}^n a_i^2 = 1 \end{aligned}$$

olur.

$$G_i = \frac{a_i}{a_2}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n G_i^2 &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{a_2} \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{a_2} \right)^2 a_i^2 \\ &= \left(\frac{1}{a_2} \right)^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 \\ &= \left(\frac{1}{a_2} \right)^2 1 \end{aligned}$$

ve

$$a_2 = \langle V_2, U \rangle = \cos \theta$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n G_i^2 &= \left(\frac{1}{a_2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{\cos^2 \theta} \\ &= \sec^2 \theta = c \end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 5.2.1 $\mathbb{E}^n$ n boyutlu Öklid uzayında α birim hızlı bir slant helis olsun. $\{V_1, \dots, V_n\}$, $\{G_1, \dots, G_n\}$ sırasıyla eğrinin Frenet çatısını ve yüksek dereceden 2. tip harmonik eğriliği olsun. Öyleyse

$$\langle V_i, U \rangle = G_i \langle V_2, U \rangle, \quad 1 \leq i \leq n$$

dır, burada U , α slant helisinin eksenidir.

İspat

$$G_i \langle V_2, U \rangle = \frac{a_i}{a_2} \langle V_2, \sum_{i=1}^n a_i V_i \rangle = \frac{a_i}{a_2} a_2 = a_i = \langle V_i, U \rangle$$

Sonuç 5.2.1 U , α slant helisinin eksenidir ise

$$U = \sum_{i=1}^n \lambda_i V_i$$

şeklinde yazabiliriz. Lemma 5.2.1 den $\lambda_i = \langle U, V_i \rangle = G_i \langle V_2, U \rangle$ dir ve burada $\langle V_2, U \rangle = \cos \theta = \text{sabittir}$ Buna göre eğrinin 2. tip harmonik eğriliği

$$U = \cos \theta \left(\sum_{i=1}^n G_i V_i \right)$$

$$\begin{aligned}
U &= \sum_{i=1}^n a_i V_i \\
&= \sum_{i=1}^n G_i < V_2, U > V_i \\
&= \sum_{i=1}^n G_i \cos \theta V_i \\
&= \cos \theta \sum_{i=1}^n G_i V_i
\end{aligned}$$

olur. $\cos \theta$ =sabit olduğundan

$$D = \sum_{i=1}^n G_i V_i$$

vektörü de α slant helisinin eksenidir.

Tanım 5.2.1 $\mathbb{E}^n$ n boyutlu Öklid uzayında $\alpha(s)$ nondejenere (yoz olmayan) birim hızlı bir eğri olsun. $\{V_1, \dots, V_n\}$, $\{G_1, \dots, G_n\}$ sırasıyla eğrinin Frenet çatısı ve yüksek dereceden 2. tip harmonik eğriliği olsun.

$$D = \sum_{i=1}^n G_i V_i \quad (5.2.1)$$

vektörüne α eğrisinin 2. tip Darboux vektörü denir.

Lemma 5.2.2 $\mathbb{E}^n$ n boyutlu Öklid uzayında $\alpha(s)$ birim hızlı bir eğri olsun. $\{V_1, \dots, V_n\}$, $\{G_1, \dots, G_n\}$ sırasıyla eğrinin Frenet çatısı ve yüksek dereceden 2. tip harmonik eğriliği olsun. α nın slant helis olması için gerek ve yeter şart D'nin sabit vektör olmasıdır.

İspat

α bir slant helis ise sonuç 5.2.1. den

$$U = \cos \theta \left(\sum_{i=1}^n G_i V_i \right)$$

yazabiliriz. U ve $\cos \theta$ sabit olduğundan D sabit bir vektördür.

Karşıt olarak D sabit olsun.

$$< D, V_2 > = < \sum_{i=1}^n G_i V_i, V_2 > = \sum_{i=1}^n G_i < V_i, V_2 > = G_2 = \frac{a_2}{a_2}$$

D ile V_2 arasındaki açı θ olsun. Buna göre

$$1 = \langle D, V_2 \rangle = \|D\| \|V_2\| \cos \theta \implies \cos \theta = \frac{1}{\|D\|} = \text{sabit}$$

olur. Bu durumda slant helisin bir tek eksenini

$$U = \cos \theta D$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Öyleyse burada

$$\begin{aligned} \langle U, V_2 \rangle &= \langle \cos \theta D, V_2 \rangle \\ &= \cos \theta \langle D, V_2 \rangle \\ &= \cos \theta = \text{sabit} \end{aligned}$$

ve U sabit olduğundan eğri slant helistir.

Sonuç 5.2.2 3 boyutlu Öklid uzayında, nondejenere (yoz olmayan) bir eğrinin eksenini (5.2.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned} D &= \sum_{i=1}^3 G_i V_i \\ &= G_1 V_1 + G_2 V_2 + G_3 V_3 \\ &= \left(\int \kappa_1 ds \right) V_1 + V_2 + \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \int \kappa_1 ds \right) V_3 \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Burada κ_1 ve κ_2 eğrinin eğrilikleridir.

Eğri boyunca D nin türevini alırsak

$$D' = \kappa_1 V_1 + \left(\int \kappa_1 ds \right) V_1' + V_2' + \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \int \kappa_1 ds \right)' V_3 + \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \int \kappa_1 ds \right) V_3'$$

ve Frenet formülleri

$$\begin{aligned} V_1' &= \kappa_1 V_2, \\ V_2' &= -\kappa_1 V_1 + \kappa_2 V_3, \\ V_3' &= -\kappa_2 V_2 \end{aligned}$$

olduğundan

$$D' = \kappa_1 V_1 + \left(\int \kappa_1 ds \right) \kappa_1 V_2 + (-\kappa_1 V_1 + \kappa_2 V_3) + \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \int \kappa_1 ds \right)' V_3 + \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \int \kappa_1 ds \right) (-\kappa_2 V_2)$$

elde edilir. Sadeleştirmeler yapılırsa

$$D' = \left[\kappa_2 + \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \int \kappa_1 ds \right)' \right] V_3 \quad (5.2.2)$$

bulunur. Böylece yukarıdaki eşitlikten eğri slant helis ise Lemma 5.2.2'den $D' = 0$ dır.

Öyleyse

$$\kappa_2 + \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \int \kappa_1 ds \right)' = 0$$

olur. Yukarıdaki eşitliği $\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \int \kappa_1 ds$ ile çarparsak

$$\begin{aligned} \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \int \kappa_1 ds \right) \left[\kappa_2 + \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \int \kappa_1 ds \right)' \right] &= 0 \\ \kappa_1 \int \kappa_1 ds + \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \int \kappa_1 ds \right) \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \int \kappa_1 ds \right)' &= 0 \end{aligned}$$

ve integralini alırsak

$$\begin{aligned} \int \kappa_1 \left(\int \kappa_1 ds \right) + \int \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \int \kappa_1 ds \right) \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \int \kappa_1 ds \right)' &= 0 \\ \frac{\left(\int \kappa_1 ds \right)^2}{2} + c_1 + \frac{\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \int \kappa_1 ds \right)^2}{2} + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. $2(c_1 + c_2) = -c$ (c integral sabiti) dersek

$$\left(\int \kappa_1 ds \right)^2 \left(1 + \frac{\kappa_1^2}{\kappa_2^2} \right) = c^2 \quad (5.2.3)$$

elde ederiz. Bu eşliği düzenlersek

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\kappa_2^2 + \kappa_1^2}{\kappa_2^2}\right) \left(\int \kappa_1 ds\right)^2 &= c^2 \\
\left(\frac{\sqrt{\kappa_2^2 + \kappa_1^2}}{\kappa_2}\right) \int \kappa_1 ds &= c \\
\frac{\kappa_2}{\sqrt{\kappa_2^2 + \kappa_1^2}} \frac{1}{\int \kappa_1 ds} &= \frac{1}{c} \\
\frac{\kappa_2' \sqrt{\kappa_2^2 + \kappa_1^2} - \kappa_2 \frac{1}{2} \frac{(2\kappa_1' \kappa_1 + 2\kappa_2' \kappa_2)}{\sqrt{\kappa_2^2 + \kappa_1^2}}}{\kappa_2^2 + \kappa_1^2} &= \left(\frac{\int \kappa_1 ds}{c}\right)' \\
\frac{\kappa_2' (\kappa_2^2 + \kappa_1^2) - \kappa_2 (\kappa_1' \kappa_1 + \kappa_2' \kappa_2)}{(\kappa_2^2 + \kappa_1^2)^{3/2}} &= \frac{\kappa_1}{c} \\
\frac{\kappa_2' \kappa_2^2 + \kappa_2' \kappa_1^2 - \kappa_2 \kappa_1' \kappa_1 - \kappa_2 \kappa_2' \kappa_2}{(\kappa_2^2 + \kappa_1^2)^{3/2}} &= \frac{\kappa_1}{c} \\
\frac{\kappa_1 (\kappa_2' \kappa_1 - \kappa_2 \kappa_1')}{(\kappa_2^2 + \kappa_1^2)^{3/2}} &= \frac{\kappa_1}{c} \\
\frac{\kappa_1}{(\kappa_2^2 + \kappa_1^2)^{3/2}} \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)' &= \frac{\kappa_1}{c}
\end{aligned}$$

elde edilir, burada $c \neq 0$ dir.

Lemma 5.2.3 $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında sıfırdan farklı sabit eğrilikli slant helisler (yani W-slant helisler) yoktur.

İspat

4 boyutlu Öklid uzayında nondejenere bir eğrinin eksenini (5.2.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
D &= \sum_{i=1}^4 G_i V_i \\
&= G_1 V_1 + G_2 V_2 + G_3 V_3 + G_4 V_4 \\
&= \left(\int \kappa_1 ds\right) V_1 + V_2 + \left(\frac{1}{\kappa_2} [\kappa_1 G_1 + G_2']\right) V_3 + \left(\frac{1}{\kappa_3} [\kappa_2 G_2 + G_3']\right) V_4 \\
&= \left(\int \kappa_1 ds\right) V_1 + V_2 + \left(\frac{1}{\kappa_2} \left[\kappa_1 \int \kappa_1 ds\right]\right) V_3 + \left(\frac{1}{\kappa_3} \left[\kappa_2 + \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \int \kappa_1 ds\right)'\right]\right) V_4
\end{aligned}$$

biçiminde yazabiliriz. Eğrinin eğrilikleri sıfırdan farklı sabitler ve

$$\begin{aligned}
D &= (\kappa_1 s + c) V_1 + V_2 + \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} [\kappa_1 s + c] \right) V_3 + \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_3} + \frac{1}{\kappa_3} \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \int \kappa_1 ds \right)' \right) V_4 \\
&= V_1 (\kappa_1 s + c) + V_2 + V_3 \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} [\kappa_1 s + c] \right) + V_4 \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_3} + \frac{1}{\kappa_3} \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \kappa_1 \right) \\
&= V_1 (\kappa_1 s + c) + V_2 + V_3 \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} [\kappa_1 s + c] \right) + V_4 \left(\frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{\kappa_2 \kappa_3} \right)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$D = (\kappa_1 s + c) V_1 + V_2 + \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} [\kappa_1 s + c] \right) V_3 + \left(\frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{\kappa_2 \kappa_3} \right) V_4 \quad (5.2.4)$$

elde edilir. Burada κ_1 , κ_2 ve κ_3 eğrinin eğrilikleridir. Eğrinin eğrilikleri sıfırdan farklı sabitlerse, yani W-eğrileri için, (5.2.4) eşitliğini elde ederiz. Eğri boyunca (5.2.4) eşitliğinin türevini alırsak

$$D' = \kappa_1 V_1 + (\kappa_1 s + c) V_1' + V_2' + \frac{\kappa_1^2}{\kappa_2} V_3 + \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} [\kappa_1 s + c] \right) V_3' + \left(\frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{\kappa_2 \kappa_3} \right) V_4'$$

ve Frenet formülleri

$$\begin{aligned}
V_1' &= \kappa_1 V_2 \\
V_2' &= -\kappa_1 V_1 + \kappa_2 V_3 \\
V_3' &= -\kappa_2 V_2 + \kappa_3 V_4 \\
V_4' &= -\kappa_3 V_3
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
D' &= \kappa_1 V_1 + (\kappa_1 s + c) (\kappa_1 V_2) + (-\kappa_1 V_1 + \kappa_2 V_3) + \frac{\kappa_1^2}{\kappa_2} V_3 \\
&\quad + \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} [\kappa_1 s + c] \right) (-\kappa_2 V_2 + \kappa_3 V_4) + \left(\frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{\kappa_2 \kappa_3} \right) (-\kappa_3 V_3)
\end{aligned}$$

olur. Buna göre

$$D' = \frac{\kappa_1 \kappa_3}{\kappa_2} (\kappa_1 s + c) V_4 \quad (5.2.5)$$

elde ederiz. Böylece D' vektörünün sıfıra eşit olmadığını kolaylıkla görüyoruz. D sabit vektör değildir. Öyleyse Lemma 5.2.2. ye göre eğri slant helis değildir.

Lemma 5.2.4 $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında sıfırdan farklı sabit eğrilik oranlı slant helis (yani ccr-slant helis) yoktur.

İspat

$\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında sabit eğrilik oranlı bir eğri için $\frac{\kappa_2}{\kappa_1}, \frac{\kappa_3}{\kappa_2}$ oranları sabittir. Bir önceki Lemma'nın ispatında

$$D = \left(\int \kappa_1 ds \right) V_1 + V_2 + \left(\frac{1}{\kappa_2} \left[\kappa_1 \int \kappa_1 ds \right] \right) V_3 + \left(\frac{1}{\kappa_3} \left[\kappa_2 + \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \int \kappa_1 ds \right) \right] \right) V_4$$

biçiminde yazılmıştı. Sabit eğrilik oranlı bir eğri için

$$\begin{aligned} D &= \left(\int \kappa_1 ds \right) V_1 + V_2 + \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \int \kappa_1 ds \right) V_3 + \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_3} + \frac{1}{\kappa_3} \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \kappa_1 \right) V_4 \\ &= \left(\int \kappa_1 ds \right) V_1 + V_2 + \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \int \kappa_1 ds \right) V_3 + \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_3} + \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \frac{\kappa_1}{\kappa_3} \right) V_4 \end{aligned}$$

olur. Eğri. boyunca D ekseninin türevini alırsak D' vektörünün sıfırdan farklı olduğunu kolayca görebiliriz. Lemma 5.2.2. ye göre eğri slant helis değildir.

6. n-BOYUTLU $\mathbb{E}_v^n$ MINKOWSKI UZAYINDA SLANT HELİSLERİN KARAKTERİZASYONLARI

6.1 n-Boyutlu $\mathbb{E}_v^n$ Minkowski Uzayında Slant Helisler

Tanım 6.1.1 Birim hızlı bir $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_v^n$ nin V_2 teğet vektörü belirli bir U doğrultusuyla sabit bir açı yapıyorsa, bu α eğrisine slant helis denir.

3 boyutlu Öklid uzayında slant helis için (3.1.1) eşitliğiyle verilen karakterizasyon, 3 boyutlu Minkowski uzayı için aşağıdaki iki teoremle verilmişti (Ahmad and Lopez 2011).

Teorem 6.1.1 $\mathbb{E}_1^3$ de α , birim hızlı bir zamansı eğri olsun. α eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{\kappa^2}{(\tau^2 - \kappa^2)^{3/2}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'$$

ya da

$$\frac{\kappa^2}{(\kappa^2 - \tau^2)^{3/2}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'$$

fonksiyonlarından birinin sabit olmasıdır, burada $\tau^2 - \kappa^2$ sıfırdan farklıdır.

Teorem 6.1.2 $\mathbb{E}_1^3$ de α birim hızlı bir uzaysı eğri olsun.

1) α eğrisinin normal vektörü uzaysı ise α eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{\kappa^2}{(\tau^2 - \kappa^2)^{3/2}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'$$

ya da

$$\frac{\kappa^2}{(\kappa^2 - \tau^2)^{3/2}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'$$

fonksiyonlarından birinin sabit olmasıdır, burada $\tau^2 - \kappa^2$ sıfırdan farklıdır.

2) α eğrisinin normal vektörü zamansı ise α eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{\kappa^2}{(\tau^2 + \kappa^2)^{3/2}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır.

3) Normal vektörü ışıksı olan her eğri bir slant helistir.

Bu bölümde $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayındaki gibi, n boyutlu Minkowski uzayında da eğrinin eğrilikleri açısından slant helislerin farklı karakterizasyonlarını vereceğiz.

Teorem 6.1.3 $\mathbb{E}_v^n$ de $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_v^n$ birim hızlı ışıksı olmayan bir eğri olsun.

$$\begin{aligned} G_1 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \int \kappa_1(s) ds \\ G_2 &= 1 \\ G_3 &= \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{\kappa_1}{\kappa_2} G_1 \\ G_i &= \frac{\varepsilon_{i-1} \varepsilon_i}{\kappa_{i-1}} [\kappa_{i-2} G_{i-2} + G'_{i-1}] , 4 \leq i \leq n \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

eşitlikleriyle verilen G_i fonksiyonları için α eğrisi bir slant helistir ancak ve ancak

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i G_i^2 = c \quad (6.1.2)$$

olmasıdır. Burada c bir sabittir.

Bu teorem keyfi boyutların genelleştirmesidir. Eğer (6.1.2) eşitliğinde $n = 3$ yazarsak

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i G_i^2 &= \varepsilon_1 G_1^2 + \varepsilon_2 G_2^2 + \varepsilon_3 G_3^2 \\ &= \varepsilon_1 G_1^2 + \varepsilon_2 1 + \varepsilon_3 \left(\varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{\kappa_1}{\kappa_2} G_1 \right)^2 \\ &= \varepsilon_1 G_1^2 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \frac{\kappa_1^2}{\kappa_2^2} G_1^2 \\ &= \varepsilon_2 + G_1^2 \left(\varepsilon_1 + \frac{\kappa_1^2}{\kappa_2^2} \varepsilon_3 \right) \\ &= \varepsilon_2 + \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_3 \frac{\kappa_1^2}{\kappa_2^2} \right) G_1^2 = c \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} c - \varepsilon_2 &= G_1^2 \left(\frac{\varepsilon_1 \kappa_2^2 + \varepsilon_3 \kappa_1^2}{\kappa_2^2} \right) \\ &= \left(\int \kappa_1(s) ds \right)^2 \left(\frac{\varepsilon_1 \kappa_2^2 + \varepsilon_3 \kappa_1^2}{\kappa_2^2} \right) \end{aligned}$$

dır. Bu eşitliğin her iki tarafının karekökünü aldığımızda

$$\sqrt{c - \varepsilon_2} = \int \kappa_1(s) ds \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \kappa_2^2 + \varepsilon_3 \kappa_1^2}{\kappa_2^2}}$$

eşitliği elde edilir ve gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\frac{\sqrt{c - \varepsilon_2}}{\int \kappa_1(s) ds} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \kappa_2^2 + \varepsilon_3 \kappa_1^2}{\kappa_2^2}}$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikte pay ve payda yer değiştirildikten sonra eşitliğin her iki tarafının türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \left(\frac{\int \kappa_1(s) ds}{\sqrt{c - \varepsilon_2}} \right)' &= \left(\frac{\kappa_2}{\sqrt{\varepsilon_1 \kappa_2^2 + \varepsilon_3 \kappa_1^2}} \right)' \\ \frac{\kappa_1(s) (\sqrt{c - \varepsilon_2})}{(\sqrt{c - \varepsilon_2})^2} &= \frac{\kappa_2' \sqrt{\varepsilon_1 \kappa_2^2 + \varepsilon_3 \kappa_1^2} - \frac{\kappa_2}{2} \frac{(\varepsilon_1 2 \kappa_2 \kappa_2' + \varepsilon_3 2 \kappa_1 \kappa_1')}{(\sqrt{\varepsilon_1 \kappa_2^2 + \varepsilon_3 \kappa_1^2})}}{\varepsilon_1 \kappa_2^2 + \varepsilon_3 \kappa_1^2} \\ \frac{\kappa_1(s)}{\sqrt{c - \varepsilon_2}} &= \frac{\kappa_2' (\varepsilon_1 \kappa_2^2 + \varepsilon_3 \kappa_1^2) - \kappa_2 (\varepsilon_1 \kappa_2 \kappa_2' + \varepsilon_3 \kappa_1 \kappa_1')}{(\varepsilon_1 \kappa_2^2 + \varepsilon_3 \kappa_1^2)^{3/2}} \\ \frac{\kappa_1(s)}{\sqrt{c - \varepsilon_2}} &= \frac{\varepsilon_1 \kappa_2^2 \kappa_2' + \varepsilon_3 \kappa_1^2 \kappa_2' - \varepsilon_1 \kappa_2^2 \kappa_2' - \varepsilon_3 \kappa_2 \kappa_1 \kappa_1'}{(\varepsilon_1 \kappa_2^2 + \varepsilon_3 \kappa_1^2)^{3/2}} \\ \frac{\kappa_1(s)}{\sqrt{c - \varepsilon_2}} &= \frac{\varepsilon_3 \kappa_1 (\kappa_1 \kappa_2' - \kappa_2 \kappa_1')}{(\varepsilon_1 \kappa_2^2 + \varepsilon_3 \kappa_1^2)^{3/2}} \\ \frac{\varepsilon_3}{\sqrt{c - \varepsilon_2}} &= \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right)' \frac{\kappa_1^2}{(\varepsilon_1 \kappa_2^2 + \varepsilon_3 \kappa_1^2)^{3/2}} \\ \frac{\varepsilon_3}{\sqrt{c - \varepsilon_2}} &= \text{sabit} \end{aligned}$$

elde edilir, burada $c \neq \varepsilon_2$ dir. Bu eşitlik Teorem 6.1.1 ve Teorem 6.1.2 deki eşitliklerin genel formülüdür.

İspat

$\mathbb{E}_v^n$ de α birim hızlı ışıksız olmayan eğri olsun. Kabul edelim ki α bir slant helis olsun.

U, V_2 ile sabit bir θ açısı yapan doğrultu olsun ve $\langle U, V_2 \rangle = \text{sabit}$ olsun. Differansiyellenebilir $a_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları için

$$U = \sum_{i=1}^n a_i(s) \cdot V_i(s) \quad , \quad s \in I \quad (6.1.3)$$

olsun. Buna göre

$$\begin{aligned}
\langle U, V_j \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n a_i V_i, V_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n a_i \langle V_i, V_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n a_i \delta_{ij} \varepsilon_j \\
&= a_j \varepsilon_j
\end{aligned}$$

dir. Bu eşitliğin her iki tarafını ε_j ile çarparsak,

$$\varepsilon_j \langle U, V_j \rangle = a_j, \quad 1 \leq j \leq n$$

olduğundan

$$U = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle U, V_i \rangle V_i$$

eşitliği bulunur. α , slant helis olduğundan

$$a_2(s) = \varepsilon_2 \langle V_2(s), U \rangle$$

fonksiyonu her s için sabittir.

$$a_1 = \varepsilon_1 \langle V_1, U \rangle$$

eşitliğinin türevini alıp (2.4.2) Frenet eşitliklerini kullanırsak

$$\begin{aligned}
a'_1 &= \varepsilon_1 (\langle V'_1, U \rangle + \langle V_1, U' \rangle) \\
&= \varepsilon_1 \langle \kappa_1 V_2, U \rangle \\
&= \varepsilon_1 \left\langle \kappa_1 V_2, \sum_{i=1}^n a_i V_i \right\rangle \\
&= \varepsilon_1 \kappa_1 \sum_{i=1}^n a_i \langle V_2, V_i \rangle \\
&= \varepsilon_1 \kappa_1 a_2 \varepsilon_2 \\
&= \varepsilon_1 \varepsilon_2 a_2 \kappa_1
\end{aligned}$$

olduğundan

$$a'_1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 a_2 \kappa_1 = 0$$

eşitliği bulunur.

$$a_2 = \varepsilon_2 \langle V_2, U \rangle$$

$\langle U, V_2 \rangle$ sabit olduğu için

$$a_2 = \text{sabit}$$

ve

$$a'_2 = \varepsilon_2 \langle V'_2, U \rangle$$

olduğundan

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon_2 \langle -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \kappa_1 V_1 + \kappa_2 V_3, U \rangle \\ &= \varepsilon_2 \left\langle -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \kappa_1 V_1 + \kappa_2 V_3, \sum_{i=1}^n a_i V_i \right\rangle \\ &= -\varepsilon_1 \kappa_1 \left\langle V_1, \sum_{i=1}^n a_i V_i \right\rangle + \varepsilon_2 \kappa_2 \left\langle V_3, \sum_{i=1}^n a_i V_i \right\rangle \\ &= -\varepsilon_1 \kappa_1 a_1 \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \kappa_2 a_3 \varepsilon_3 \\ &= -\kappa_1 a_1 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \kappa_2 a_3 \end{aligned}$$

eşitliği bulunur.

$$a_3 = \varepsilon_3 \langle V_3, U \rangle$$

eşitliğinin her iki tarafının türevi alınır

$$\begin{aligned} a'_3 &= \varepsilon_3 \langle V'_3, U \rangle \\ &= \varepsilon_3 \langle -\varepsilon_2 \varepsilon_3 \kappa_2 V_2 + \kappa_3 V_4, U \rangle \\ &= \varepsilon_3 \left\langle -\varepsilon_2 \varepsilon_3 \kappa_2 V_2 + \kappa_3 V_4, \sum_{i=1}^n a_i V_i \right\rangle \\ &= -\varepsilon_3 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \kappa_2 \sum_{i=1}^n a_i \langle V_2, V_i \rangle + \varepsilon_3 \kappa_3 \sum_{i=1}^n a_i \langle V_4, V_i \rangle \\ &= -\varepsilon_3^2 \varepsilon_2 \kappa_2 a_2 \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \kappa_3 a_4 \varepsilon_4 \\ &= -\kappa_2 a_2 + \kappa_3 a_4 \varepsilon_3 \varepsilon_4 \end{aligned}$$

eşitliği bulunur ve

$$a'_3 + \kappa_2 a_2 - \kappa_3 a_4 \varepsilon_3 \varepsilon_4 = 0$$

eşitliğine ulaşılır.

$$a_i = \varepsilon_i \langle V_i, U \rangle$$

eşitliğinin her iki tarafının türevi alınarak

$$\begin{aligned} a'_i &= \varepsilon_i \langle V'_i, U \rangle \\ &= \varepsilon_i \left\langle -\varepsilon_{i-1} \varepsilon_i \kappa_{i-1} V_{i-1} + \kappa_i V_{i+1}, \sum_{i=1}^n a_i V_i \right\rangle \\ &= -\varepsilon_{i-1} \kappa_{i-1} \left\langle V_{i-1}, \sum_{i=1}^n a_i V_i \right\rangle + \varepsilon_i \kappa_i \left\langle V_{i+1}, \sum_{i=1}^n a_i V_i \right\rangle \\ &= -\varepsilon_{i-1} \kappa_{i-1} a_{i-1} \varepsilon_{i-1} + \varepsilon_i \kappa_i a_{i+1} \varepsilon_{i+1} \\ &= -\kappa_{i-1} a_{i-1} + \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \kappa_i a_{i+1} \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlik $i=n-1$ için yazılırsa

$$a'_{n-1} = -\kappa_{n-2} a_{n-2} + \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n \kappa_{n-1} a_n$$

olduğundan

$$a'_{n-1} + \kappa_{n-2} a_{n-2} - \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n \kappa_{n-1} a_n = 0$$

eşitliği bulunur.

$$a_n = \varepsilon_n \langle V_n, U \rangle$$

eşitliğinin türevini alıp, (2.4.2) Frenet eşitliklerini kulanırsak

$$\begin{aligned} a'_n &= \varepsilon_n \langle V'_n, U \rangle \\ &= \varepsilon_n \langle U, -\varepsilon_{n-1} \varepsilon_n \kappa_{n-1} V_{n-1} \rangle \\ &= -\varepsilon_{n-1} \kappa_{n-1} \langle U, V_{n-1} \rangle \\ &= \varepsilon_{n-1} \kappa_{n-1} \left\langle \sum_{i=1}^n a_i V_i, V_{n-1} \right\rangle \\ &= -\varepsilon_{n-1} \kappa_{n-1} \sum_{i=1}^n a_i \langle V_i, V_{n-1} \rangle \\ &= -\kappa_{n-1} a_{n-1} \end{aligned}$$

olduğundan

$$a'_n + \kappa_{n-1} a_{n-1}$$

bulunur. Böylece

$$\left. \begin{aligned} a_1' - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \kappa_1 a_2 &= 0 \\ \kappa_1 a_1 - \varepsilon_2 \varepsilon_3 \kappa a_3 &= 0 \\ a_3' + \kappa_2 a_2 - \varepsilon_3 \varepsilon_4 \kappa_3 a_4 &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n-1}' + \kappa_{n-2} a_{n-2} - \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n \kappa_{n-1} a_n &= 0 \\ a_n' + \kappa_{n-1} a_{n-1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.1.4)$$

G_i fonksiyonunu

$$a_i(s) = G_i(s) a_2 \quad , \quad 1 \leq i \leq n \quad (6.1.5)$$

şeklinde tanımlayalım,

$$G_1 = \frac{a_1}{a_2}$$

eşitliğinin türevini alırsak

$$G_1' = \frac{1}{a_2} a_1' = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 a_2 \kappa_1}{a_2} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \kappa_1$$

olduğundan integral alırsak

$$G_1 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \int \kappa_1 ds$$

bulunur.

$$G_2 = \frac{a_2}{a_2} = 1$$

(6.1.4) eşitliğinin ikinci eşitliğinden

$$\begin{aligned} \kappa_1 a_1 &= \varepsilon_2 \varepsilon_3 \kappa_2 a_3 \\ a_3 &= \frac{\kappa_1 a_1}{\varepsilon_2 \varepsilon_3 \kappa_2} \end{aligned}$$

olduğundan

$$G_3 = \frac{a_3}{a_2} = \frac{\kappa_1 a_1}{\varepsilon_2 \varepsilon_3 \kappa_2 a_2} = \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{\kappa_1}{\kappa_2} G_1$$

şeklinde bulunur. (6.1.4) eşitliğinin üçüncü eşitliğinden

$$a_3' + \kappa_2 a_2 = \varepsilon_3 \varepsilon_4 \kappa_3 a_4 \implies a_4 = \frac{a_3' + \kappa_2 a_2}{\varepsilon_3 \varepsilon_4 \kappa_3}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
G_4 &= \frac{a_4}{a_2} = \frac{a'_3 + \kappa_2 a_2}{\varepsilon_3 \varepsilon_4 \kappa_3 a_2} \\
&= \frac{\varepsilon_3 \varepsilon_4 a'_3}{\kappa_3 a_2} + \frac{\varepsilon_3 \varepsilon_4 \kappa_2 G_2}{\kappa_3} \\
&= \frac{\varepsilon_3 \varepsilon_4}{\kappa_3} \left(\frac{a'_3}{a_2} + \kappa_2 G_2 \right) \\
&= \frac{\varepsilon_3 \varepsilon_4}{\kappa_3} (G'_3 + \kappa_2 G_2)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu işlemleri $5 \leq i \leq n$ için sürdürürsek (6.1.4) eşitliklerinden

$$a'_{i-1} + \kappa_{i-2} a_{i-2} = \varepsilon_{i-1} \varepsilon_i \kappa_{i-1} a_i$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
a_i &= \frac{a'_{i-1} + \kappa_{i-2} a_{i-2}}{\varepsilon_{i-1} \varepsilon_i \kappa_{i-1}} \\
&= \frac{a'_{i-1} \varepsilon_{i-1} \varepsilon_i}{\kappa_i} + \frac{\kappa_{i-2} a_{i-2} \varepsilon_{i-1} \varepsilon_i}{\kappa_i}
\end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned}
G_i &= \frac{a_i}{a_2} = \frac{a'_{i-1} \varepsilon_{i-1} \varepsilon_i}{\kappa_i a_2} + \frac{\kappa_{i-2} a_{i-2} \varepsilon_{i-1} \varepsilon_i}{\kappa_i a_2} \\
&= \frac{\varepsilon_{i-1} \varepsilon_i}{\kappa_i} \left(\frac{a'_{i-1}}{a_2} + \frac{\kappa_{i-2} a_{i-2}}{a_2} \right) \\
&= \frac{\varepsilon_{i-1} \varepsilon_i}{\kappa_i} (G'_{i-1} + \kappa_{i-2} G_{i-2})
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlik $i = n - 1$ için yazılırsa

$$G_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_2} \frac{\varepsilon_{n-2} \varepsilon_{n-1}}{\kappa_{n-2}} (G'_{n-2} + \kappa_{n-3} G_{n-3})$$

eşitliği bulunur. Burada $a_2 \neq 0$ olduğunu belirtelim, aksi taktirde (6.1.5) eşitliğinden $1 \leq i \leq n$ için $a_i = 0$ olur ve böylece $U = 0$ dır, bu ise bir çelişkidir. (6.1.4) nin ilk

$n - 1$ eşitliğinden

$$\begin{aligned}
G_1 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \int \kappa_1(s) ds \\
G_2 &= 1 \\
G_3 &= \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{\kappa_1}{\kappa_2} G_1 \\
&\vdots \\
G_{n-1} &= \frac{\varepsilon_{n-2} \varepsilon_{n-1}}{\kappa_{n-2}} [\kappa_{n-3} G_{n-3} + G'_{n-2}] \\
G_n &= \frac{\varepsilon_{n-1} \varepsilon_n}{\kappa_{n-1}} [\kappa_{n-2} G_{n-2} + G'_{n-1}]
\end{aligned} \tag{6.1.6}$$

elde edilir. (6.1.4) eşitliğinin son eşitliğinden

$$a'_n = -\kappa_{n-1} a_{n-1}$$

olduğundan

$$G'_n = \frac{a'_n}{a_2} = \frac{-\kappa_{n-1} a_{n-1}}{a_2} = -\kappa_{n-1} G_{n-1}$$

eşitliği bulunur. Buna göre

$$G'_n + \kappa_{n-1} G_{n-1} = 0 \tag{6.1.7}$$

dir. Özel olarak (6.1.6) nın son eşitliği.

$$G_n = \frac{\varepsilon_{n-1} \varepsilon_n}{\kappa_{n-1}} [\kappa_{n-2} G_{n-2} + G'_{n-1}]$$

olduğundan

$$G_n \kappa_{n-1} - \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n \kappa_{n-2} G_{n-2} = G'_{n-1} \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n$$

dır.

$$t(s) = \int^s \kappa_{n-1}(u) du \quad , \quad \frac{dt}{ds} = \kappa_{n-1}(s)$$

değişken değişikliği yapılırsa

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{n-1} \varepsilon_n G'_{n-1}(t) \frac{dt}{ds} &= \kappa_{n-1}(t) G_n(t) - \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n \kappa_{n-2}(t) G_{n-2}(t) \\
\varepsilon_{n-1} \varepsilon_n G'_{n-1}(t) \kappa_{n-1}(t) &= \kappa_{n-1}(t) G_n(t) - \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n \kappa_{n-2}(t) G_{n-2}(t)
\end{aligned}$$

eşitliğinin her iki tarafını $\varepsilon_{n-1} \varepsilon_n$ ile bölüp yeniden düzenlediğimizde

$$G'_{n-1}(t) = \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n G_n(t) - \frac{\kappa_{n-2}(t)}{\kappa_{n-1}(t)} G_{n-2}(t) \tag{6.1.8}$$

eşitliğine ulaşılır. Sonuç olarak, α slant helis ise (6.1.7) eşitliğinden

$$G'_n(s) = -\kappa_{n-1}(s)G_{n-1}(s)$$

ve değişken değişikliği ile

$$\begin{aligned} G'_n \frac{dt}{ds} &= -\kappa_{n-1}(t)G_{n-1}(t) \\ G'_n \kappa_{n-1}(t) &= -\kappa_{n-1}(t)G_{n-1}(t) \\ G'_n &= -G_{n-1}(t) \end{aligned}$$

elde edilir. bu eşitliği (6.1.8) eşitliğinde yerine yazarsak

$$G''_n = -\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n G_n + \frac{\kappa_{n-2}(t)}{\kappa_{n-1}(t)} G_{n-2}(t)$$

olduğundan

$$G''_n(t) + \varepsilon_{n-1}\varepsilon_n G_n(t) = \frac{\kappa_{n-2}(t)}{\kappa_{n-1}(t)} G_{n-2}(t)$$

eşitliği elde edilir. Parametre değiştirme metodu ile, $\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n$ değerine bağlı olarak, bu eşitliğin iki genel çözümünü elde ederiz.

1) $\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n = 1$ ise

$$G_n(t) = \left(A - \int \frac{\kappa_{n-2}(t)G_{n-2}(t)}{\kappa_{n-1}(t)} \sin t dt \right) \cos t + \left(B - \int \frac{\kappa_{n-2}(t)G_{n-2}(t)}{\kappa_{n-1}(t)} \cos t dt \right) \sin t$$

burada A ve B keyfi sabitlerdir. Bu çözüm $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayındaki slant helis için aynıdır (5.1.8) eşitliğine bak.

2) $\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n = -1$ ise

$$G_n(t) = \left(A - \int \frac{\kappa_{n-2}(t)G_{n-2}(t)}{\kappa_{n-1}(t)} \sinh t dt \right) \cosh t + \left(B + \int \frac{\kappa_{n-2}(t)G_{n-2}(t)}{\kappa_{n-1}(t)} \cosh t dt \right) \sinh t$$

burada A ve B keyfi sabitlerdir. Öyleyse yukarıdaki eşitlik

$$\begin{aligned} G_n(s) &= \left[A - \int \left(\kappa_{n-2}(s)G_{n-2}(s) \sinh \int \kappa_{n-1}(s) ds \right) ds \right] \cosh \int \kappa_{n-1}(s) ds \\ &\quad + \left[B + \int \left(\kappa_{n-2}(s)G_{n-2}(s) \cosh \int \kappa_{n-1}(s) ds \right) ds \right] \sinh \int \kappa_{n-1}(s) ds \end{aligned} \tag{6.1.9}$$

şeklindedir.

$$t(s) = \int \kappa_{n-1}(u) du \implies dt = \kappa_{n-1}(s) ds$$

ve

$$G'_n = -\kappa_{n-1} G_{n-1} \implies G_{n-1} = -\frac{G'_n}{\kappa_{n-1}}$$

olduğundan (6.1.9) eşitliğinin türevi alınır

$$\begin{aligned} (I) &= A - \int \left(\kappa_{n-2}(s) G_{n-2}(s) \sinh \int \kappa_{n-1}(s) ds \right) ds \\ (II) &= B + \int \left(\kappa_{n-2}(s) G_{n-2}(s) \cosh \int \kappa_{n-1}(s) ds \right) ds \end{aligned}$$

olmak üzere

$$G_{n-1} = -\frac{G'_n}{\kappa_{n-1}}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} G'_n &= \left(\kappa_{n-2} G_{n-2} \sinh \int \kappa_{n-1} ds \right) \cosh \int \kappa_{n-1} ds - (I) \kappa_{n-1} \sinh \int \kappa_{n-1} ds \\ &\quad - \left(\kappa_{n-2} G_{n-2} \cosh \int \kappa_{n-1} ds \right) \sinh \int \kappa_{n-1} ds + (II) \cosh \int \kappa_{n-1} ds \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafını $-\frac{1}{\kappa_{n-1}}$ ile çarptığımızda

$$G_{n-1} = -(I) \sinh \int \kappa_{n-1} ds + (II) \cosh \int \kappa_{n-1} ds$$

bulunur. (6.1.7) eşitliğinden G_{n-1} fonksiyonu

$$\begin{aligned} G_{n-1}(s) &= \left[-A + \int \left(\kappa_{n-2}(s) G_{n-2}(s) \sinh \int \kappa_{n-1}(s) ds \right) ds \right] \sinh \int \kappa_{n-1}(s) ds \\ &\quad - \left[B + \int \left(\kappa_{n-2}(s) G_{n-2}(s) \cosh \int \kappa_{n-1}(s) ds \right) ds \right] \cosh \int \kappa_{n-1}(s) ds \end{aligned} \tag{6.1.10}$$

eşitliği ile verilebilir. (6.1.6) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-2} \varepsilon_i G_i G'_i &= \varepsilon_1 G_1 G'_1 + \varepsilon_2 G_2 G'_2 + \sum_{i=3}^{n-2} \varepsilon_i G_i G'_i \\
&= \varepsilon_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \kappa_1 G_1 + \sum_{i=3}^{n-2} \varepsilon_i G_i (\varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \kappa_i G_{i+1} - \kappa_{i-1} G_{i-1}) \\
&= \varepsilon_2 \kappa_1 G_1 + \sum_{i=3}^{n-2} (\varepsilon_{i+1} \kappa_i G_i G_{i+1} - \varepsilon_i \kappa_{i-1} G_{i-1} G_i) \\
&= \varepsilon_2 \kappa_1 G_1 + \sum_{i=3}^{n-2} (\varepsilon_{i+1} \kappa_i G_i G_{i+1} - \varepsilon_i \kappa_{i-1} G_{i-1} G_i) \\
&= \varepsilon_2 \kappa_1 G_1 + \varepsilon_3 \kappa_3 G_3 G_4 - \varepsilon_3 \kappa_2 G_2 G_3 \\
&\quad + \varepsilon_5 \kappa_4 G_4 G_5 - \varepsilon_4 \kappa_3 G_3 G_4 + \varepsilon_6 \kappa_5 G_5 G_6 + \varepsilon_5 \kappa_4 G_4 G_5 \\
&\quad + \dots + \varepsilon_{n-1} \kappa_{n-2} G_{n-2} G_{n-1} - \varepsilon_{n-2} \kappa_{n-3} G_{n-3} G_{n-2} \\
&= \varepsilon_{n-1} \kappa_{n-2} G_{n-2} G_{n-1}
\end{aligned}$$

dır.

$$G_n = \frac{\varepsilon_{n-1} \varepsilon_n}{\kappa_{n-1}} [\kappa_{n-2} G_{n-2} + G'_{n-1}]$$

olduğundan

$$\kappa_{n-2} G_{n-2} = G_n \kappa_{n-1} \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n - G'_{n-1}$$

dır ve

$$\frac{G'_n}{\kappa_{n-1}} = -G_{n-1}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-2} \varepsilon_i G_i G'_i &= -\varepsilon_{n-1} (\varepsilon_{n-1} \varepsilon_n \kappa_{n-1} G_n - G'_n) \frac{G'_n}{\kappa_{n-1}} \\
\sum_{i=1}^{n-2} \varepsilon_i G_i G'_i &= -(\varepsilon_{n-1} G_{n-1} G'_{n-1} + \varepsilon_n G_n G'_n)
\end{aligned}$$

dir. Yukarıdaki eşitliğin integralini alırsak

$$\sum_{i=1}^{n-2} \varepsilon_i G_i^2 = -(\varepsilon_{n-1} G_{n-1}^2 + \varepsilon_n G_n^2) + c$$

eşitliğine sahip oluruz, burada c integral sabitidir. Bu eşitliğin son hali

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i G_i^2 = c$$

şeklindedir.

Karşıt olarak, kabul edelim ki (6.1.6) durumu α eğrisi için sağlanmış olsun. $a_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere U birim vektörünü

$$U = \sum_{i=1}^n a_2 G_i V_i$$

biçiminde tanımlayalım. U nun türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{dU}{ds} &= a_2 \left(\sum_{i=1}^n (G'_i V_i + G_i V'_i) \right) \\ &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \kappa_1 V_1 + G_1 \kappa_1 V_2 + (-\varepsilon_1 \varepsilon_2 \kappa_1 V_1 + \kappa_2 V_3) \\ &\quad + (\varepsilon_3 \varepsilon_4 \kappa_3 G_4 - \kappa_2 G_2) V_3 + (-\varepsilon_2 \varepsilon_3 \kappa_2 V_2 + \kappa_3 V_4) G_3 \\ &\quad + (\varepsilon_4 \varepsilon_5 \kappa_4 G_5 - \kappa_3 G_3) V_4 + (-\varepsilon_3 \varepsilon_4 \kappa_3 V_3 + \kappa_4 V_5) G_4 \\ &\quad + \dots + (\varepsilon_{n-1} \varepsilon_n \kappa_{n-1} G_n - \kappa_{n-2} G_{n-2}) V_{n-1} + (-\varepsilon_{n-2} \varepsilon_{n-1} \kappa_{n-2} V_{n-2} + \kappa_{n-1} V_n) G_{n-1} \\ \frac{dU}{ds} &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan U bir sabit bir vektör alanıdır. Diğer taraftan V_2 birim asli normal vektörü ile U nun skaler çarpımı alınırsa

$$\langle V_2(s), U \rangle = \langle V_2, a_2 \sum_{i=1}^n G_i V_i \rangle = \varepsilon_2 a_2$$

sabittir. Böylece α bir slant helis eğridir.

Sonuç 6.1.1 θ açısına bağlı olarak, yukarıdaki teoremdeki c sabiti;

- 1) θ hiperbolik açı ise $c = -\sec h^2 \theta$
- 2) θ merkez açı ise $c = \sec h^2 \theta$
- 3) θ uzaysı ise $c = \sec^2 \theta$
- 4) θ Lorentz açı ise $c = -\varepsilon_2 \csc h^2 \theta$ şeklindedir.

İspat

1) V_2 ve U aynı zaman konisindeki zamansı vektörler olduğundan

$$a_2 = \varepsilon_2 \langle V_2, U \rangle = - \langle V_2, U \rangle = \cosh \theta$$

dir. $\langle U, U \rangle = -1$ ve (6.1.5) eşitliği ve (6.1.6) eşitliğinin (n-2) eşitliği ile birlikte

$$\begin{aligned} c &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i G_i^2 \\ &= \frac{1}{a_2^2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i^2 \\ &= -\frac{1}{a_2^2} \\ &= -\sec h^2 \theta \end{aligned}$$

dır.

2) θ merkez açı ise U ve V_2 uzaysı olduğundan

$$a_2^2 = |a_2|^2 = |\varepsilon_2 \langle v_2, U \rangle|^2 = |\langle v_2, U \rangle|^2 = (\cosh \theta)^2 = \cosh^2 \theta$$

$$\begin{aligned} c &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i G_i^2 \\ &= \frac{1}{a_2^2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i^2 \\ &= \frac{1}{a_2^2} \\ &= \frac{1}{\cosh^2 \theta} \\ &= \sec h^2 \theta \end{aligned}$$

dır.

3) θ uzaysı açı ise U ve V_2 uzaysı olduğundan

$$a_2^2 = (\varepsilon_2 \langle v_2, U \rangle)^2 = (\varepsilon_2 \cos \theta)^2 = \cos^2 \theta$$

dır.

$$\begin{aligned} c &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i G_i^2 \\ &= \frac{1}{a_2^2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i^2 \\ &= \frac{1}{a_2^2} \end{aligned}$$

olduğundan

$$c = \frac{1}{\cos^2 \theta} = \sec^2 \theta$$

dır.

4) θ Lorentz açısı ise

a) v_2 uzayısı U zamansı olsun,

$$a_2 = \varepsilon_2 < v_2, U > = |\sinh \theta|$$

olduğundan

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{a_2^2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i^2 \\ &= -\frac{1}{a_2^2} \\ &= -\frac{1}{\sinh^2 \theta} \\ &= -\csc^2 \theta \end{aligned}$$

dır.

b) v_2 zamansı U uzayısı olsun.

$$a_2 = \varepsilon_2 < v_2, U > = -\sinh \theta$$

olduğundan

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{a_2^2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i^2 \\ &= \frac{1}{a_2^2} \\ &= \frac{1}{\sinh^2 \theta} \\ &= \csc^2 \theta \end{aligned}$$

dır. Öyleyse her iki durumu $\varepsilon_2 = \langle V_2, V_2 \rangle$ ye bağlı olarak

$$c = -\varepsilon_2 \csc h^2 \theta$$

şeklinde yazabiliriz.

Sonuç 6.1.2 $\mathbb{E}_v^n$ uzayında, sıfırdan farklı sabit eğrilikli hiç bir slant helis yoktur (W-slant helis).

İspat

Kabul edelim ki α sıfırdan farklı sabit eğriliklere sahip bir slant helis olsun. $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n$ sıfırdan farklı sabitlerdir. Öyleyse (6.1.4) ve (6.1.6) eşitliğinden

$$G_1 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \delta_1 s + c$$

$$G_2 = 1 = \text{sabit}$$

$$G_3 = \varepsilon_2 \varepsilon_3 \delta_2 (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \delta_1 s + c) = \varepsilon_1 \varepsilon_3 \delta_1 \delta_2 s + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \delta_2 c$$

$$G_4 = \varepsilon_3 \varepsilon_4 \delta_3 (\delta_4 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 \delta_1 \delta_2) = \text{sabit}$$

$$G_5 = \varepsilon_4 \varepsilon_5 \delta_5 (\delta_6 \varepsilon_1 \varepsilon_3 \delta_1 \delta_2 s + 0) = \text{sabit}$$

Tek i indisleri için $\lambda_i, \gamma_i \in R$ olmak üzere $G_i = \lambda_i s + \gamma_i$ dir. Çift i indisleri için $G_i = \lambda_i$ dir. Öyleyse

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i G_i^2 = \varepsilon_1 (\lambda_1 s + \gamma_1)^2 + \varepsilon_2 \lambda_2 + \varepsilon_3 (\lambda_3 s + \gamma_3)^2 + \dots$$

nin hiç bir yerde sabit olmadığını söylemek kolaydır. Teorem 6.1.3'ten $\mathbb{E}_v^n$ uzayında sıfırdan farklı sabit eğrilikli bir slant helis var olmadığını görüyoruz.

Teorem 6.1.4 $\mathbb{E}_v^n$ de $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_v^n$ birim hızlı ışıksı olmayan bir eğri olsun. α nın slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$G_n = \frac{\varepsilon_{n-1} \varepsilon_n}{\kappa_{n-1}} [\kappa_{n-2} G_{n-2} + G'_{n-1}] \quad , \quad \frac{dG_n}{ds} = -\kappa_{n-1} G_{n-1} \quad (6.1.11)$$

eşitliklerini sağlayan bir G_n fonksiyonunun var olmasıdır. Burada

$$G_1 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \int \kappa_1 ds,$$

$$G_2 = 1,$$

$$G_3 = \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{\kappa_1}{\kappa_2} G'_1,$$

$$G_i = \frac{\varepsilon_{i-1} \varepsilon_i}{\kappa_{i-1}} [\kappa_{i-2} G_{i-2} + G'_{i-1}] \quad , \quad 4 \leq i \leq n-1$$

dir.

İspat

Kabul edelim ki α bir slant helis olsun. Teorem 6.1.3'ü kullanarak ve (6.1.2) eşitliğindeki fonksiyonunun türevini alarak

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i G_i G'_i \\ &= \varepsilon_2 \kappa_1 G_1 + \varepsilon_3 G_3 (\varepsilon_3 \varepsilon_4 \kappa_3 G_4 - \kappa_2 G_2) + \varepsilon_4 G_4 (\varepsilon_4 \varepsilon_5 \kappa_4 G_5 - \kappa_3 G_3) \\ &\quad + \varepsilon_5 G_5 (\varepsilon_5 \varepsilon_6 \kappa_5 G_6 - \kappa_4 G_4) + \varepsilon_6 G_6 (\varepsilon_6 \varepsilon_7 \kappa_6 G_7 - \kappa_5 G_5) \\ &\quad + \dots + \varepsilon_{n-1} G_{n-1} (\varepsilon_{n-1} \varepsilon_n \kappa_{n-1} G_n - \kappa_{n-1} G_{n-1}) + \varepsilon_n G_n G'_n \\ &= \varepsilon_n \kappa_{n-1} G_{n-1} G_n + \varepsilon_n G_n G'_n \\ &= \varepsilon_n G_n (G'_n + \kappa_{n-1} G_{n-1}) \\ &= G'_n + \kappa_{n-1} G_{n-1} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Karşıt olarak (6.1.11) sağlansın. $a_2 \in \mathbb{R}$ bir sabit olmak üzere

$$U = a_2 \left[\sum_{i=1}^n G_i V_i \right]$$

eşitliğiyle tanımlanan vektörün türevi alınıp Frenet eşitlikleri kullanılırsa

$$\frac{dU}{ds} = 0$$

dır. Yani U sabittir. Diğer yandan

$$\langle V_2, U \rangle = \varepsilon_2 a_2$$

sabit olduğundan α bir slant helistir.

Teorem 6.1.5 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_v^n$, n - boyutlu Minkowski uzayında birim hızlı ışık olmayan eğri olsun. $\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n = -1$ olmak üzere α eğrisinin bir slant helis olması için gerek ve yeter şart bazı A ve B sabitleri için

$$\begin{aligned} G_{n-1} = & (-A + \int [\kappa_{n-2} G_{n-2} \sinh \int \kappa_{n-1} ds] ds) \sinh \int^s \kappa_{n-1}(u) du \\ & - (B + \int [\kappa_{n-2} G_{n-2} \cosh \int \kappa_{n-1} ds] ds) \cosh \int^s \kappa_{n-1}(u) du \end{aligned} \quad (6.1.12)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat

Varsayalım ki α bir slant helis olsun. Teorem 6.1.4 ü kullanarak $m(s)$ ve $n(s)$ yi

$$\phi(s) = \int^s \kappa_{n-1}(u) du$$

olmak üzere

$$\left. \begin{aligned} m(s) &= G_n(s) \cosh \theta + G_{n-1}(s) \sinh \theta + \int \kappa_{n-2}(s) G_{n-2}(s) \sinh \theta ds \\ n(s) &= -G_n(s) \sinh \theta - G_{n-1}(s) \cosh \theta + \int \kappa_{n-2}(s) G_{n-2}(s) \cosh \theta ds \end{aligned} \right\} \quad (6.1.13)$$

ile tanımlayalım. (6.1.13) eşitliğini s 'ye bağlı olarak türevini alırsak ve (6.1.11) ile (6.1.12) eşitliklerini kullanırsak,

$$\frac{dm}{ds} = 0 \text{ ve } \frac{dn}{ds} = 0$$

elde ederiz. Böylece öyle A ve B sabitleri

$$m(s) = A \text{ ve } n(s) = B$$

olacak biçimde vardır. (6.1.13) te bunları yerine yazalım ve $G_{n-1}(s)$ yi çekersek

$$\begin{aligned} G_{n-1} = & (-A + \int [\kappa_{n-2} G_{n-2} \sinh \theta] ds) \sinh \theta \\ & - (B + \int [\kappa_{n-2} G_{n-2} \cosh \theta] ds) \cosh \theta \end{aligned}$$

elde edilir.

Karşıt olarak, (6.1.12) eşitliği sağlansın. Teorem 6.1.4 ü uygulamak için, $G_n(s)$ fonksiyonunu

$$\begin{aligned} G_n(s) &= (A - \int [\kappa_{n-2} G_{n-2} \sinh \theta] ds) \cosh \theta \\ &\quad + (B + \int [\kappa_{n-2} G_{n-2} \cosh \theta] ds) \sinh \theta \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım.

$$\phi(s) = \int^s \kappa_{n-1}(u) du$$

olduğundan. (6.1.12) eşitliğinin türevi alınarak

$$G'_{n-1} = -\kappa_{n-1} G_n - \kappa_{n-2} G_{n-2}$$

eşitliği bulunur. Burada G'_{n-1} ve G_n fonksiyonlarını yerine yazarsak

$$G'_n = -\kappa_{n-1} G_{n-1}$$

eşitliği elde edilir, bu durum ispatı tamamlar.

Teorem 6.1.6 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_v^n$ n-boyutlu Minkowski uzayında birim hızlı ışıksı olmayan eğri olsun. $\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n = -1$ olmak üzere α eğrisinin bir slant helis olması için gerek ve yeter şart bazı A ve B sabitleri için

$$\begin{aligned} G_{n-1}(s) &= (A - \int [\kappa_{n-2} G_{n-2} \sin \int \kappa_{n-1} ds] ds) \sin \int \kappa_{n-1}(u) du \\ &\quad - (B + \int [\kappa_{n-2} G_{n-2} \cos \int \kappa_{n-1} ds] ds) \cos \int \kappa_{n-1}(u) du \quad (6.1.14) \end{aligned}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Bu bölümde aşağıdaki şekilde α eğrisinin eğrilikleri açısından slant helislerin bir karakterizasyonunu vereceğiz.

$$\begin{aligned} G_i^{(i)} &= \frac{d^{(i)}(G_3)}{ds^i} \\ G_1^{(0)} &= G_1 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \int \kappa_1(s) ds \end{aligned}$$

olmak üzere

$$G_j = B_j + \sum_{i=1}^{j-3} A_{ji} G_i^{(i)} \quad , \quad 1 \leq j \leq n \quad (6.1.15)$$

Gerçekten

$$G_2 = 1$$

$$G_3 = \varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{\kappa_1}{\kappa_2} G_1 = A_{30} G_1$$

$$G_4 = \varepsilon_3 \varepsilon_4 \kappa_3^{-1} (\kappa_2 + A'_{30} G_1 + A_{30} G'_1) = B_4 + A_{41} G'_1 + A_{40} G_1$$

$$B_4 = \varepsilon_3 \varepsilon_4 \kappa_3^{-1} \kappa_2$$

$$A_{41} = \varepsilon_3 \varepsilon_4 \kappa_3^{-1} A_{30}$$

$$A_{40} = \varepsilon_3 \varepsilon_4 \kappa_3^{-1} A'_{30}$$

$$\begin{aligned} G_5 &= \varepsilon_4 \varepsilon_5 \kappa_4^{-1} (\kappa_3 A_{30} G_1 + B'_4 + A'_{40} G_1 + A_{40} G'_1 + A'_{41} G'_1 + A_{41} G''_1) \\ &= \varepsilon_4 \varepsilon_5 [\kappa_4^{-1} B'_4 + \kappa_4^{-1} (\kappa_3 A_{30} + A'_{40}) G_1 + \kappa_4^{-1} (A_{40} + A'_{41}) G'_1 + \kappa_4^{-1} A_{41} + G''_1] \\ &= B_5 + A_{52} G''_1 + A_{51} G'_1 + A_{50} G_1 \end{aligned}$$

$$B_5 = \varepsilon_4 \varepsilon_5 \kappa_4^{-1} B'_4$$

$$A_{52} = \varepsilon_4 \varepsilon_5 \kappa_4^{-1} A_{41}$$

$$A_{52} = \varepsilon_4 \varepsilon_5 \kappa_4^{-1} (A_{40} + A'_{41})$$

$$A_{50} = \varepsilon_4 \varepsilon_5 \kappa_4^{-1} (\kappa_3 A_{30} + A'_{40})$$

$$\begin{aligned} G_6 &= \varepsilon_5 \varepsilon_6 \kappa_5^{-1} (\kappa_4 G_4 + G'_5) \\ &= \varepsilon_5 \varepsilon_6 \kappa_5^{-1} (\kappa_4 (B_4 + A_{40} G_1 + A_{41} G'_1) + B'_5 + A'_{50} G_1 + A_{50} G'_1 + A'_{51} G'_1 + A_{51} G''_1 + A_{52} G'''_1) \\ &= \varepsilon_5 \varepsilon_6 \kappa_5^{-1} (\kappa_4 B_4 + B'_5 + [\kappa_4 A_{40} A'_{50}] G_1 + [\kappa_4 A_{41} + A_{50} + A'_{51}] G'_1 + [A_{51} + A'_{52}] G''_1 + A_{52} G'''_1) \end{aligned}$$

ve böylece sürdürerek G_n i yazabiliriz. Şimdi aşağıdaki fonksiyonları

$$B_1 = 0,$$

$$B_2 = 1,$$

$$B_j = \varepsilon_{j-1}\varepsilon_j\kappa_{j-1}^{-1}[\kappa_{j-2}B_{j-2} + B'_{j-1}] \quad , \quad 3 \leq j \leq n$$

$$A_{10} = 1,$$

$$A_{20} = 0,$$

$$A_{j0} = \varepsilon_{j-1}\varepsilon_j\kappa_{j-1}^{-1}[\kappa_{j-2}A_{(j-2)0} + A'_{(j-1)0}] \quad , \quad 3 \leq j \leq n$$

$$A_{j(j-3)} = \varepsilon_2\varepsilon_j\kappa_{j-1}^{-1}\kappa_{j-2}^{-1}\kappa_{j-3}^{-1}\dots\kappa_3^{-1}\kappa_2^{-1}\kappa_1 \quad , \quad 4 \leq j \leq n$$

ve diğer durumlarda

$$A_{ji} = 0$$

şeklinde tanımlayalım. (6.1.11) eşitliğinin ikinci eşitliği

$$G'_n = -\kappa_{n-1}G_{n-1}$$

olduğundan (6.1.5) eşitliğini kullanırsak

$$\begin{aligned} & B'_n + \kappa_{n-1}B_{n-1} + A_{n(n-3)}G_1^{(n-2)} + (A'_{n(n-3)} + A_{n(n-4)})G_1^{(n-3)} \\ & + \sum_{i=1}^{n-4}[A'_{ni} + A_{n(i-1)} + \kappa_{n-1}A_{(n-1)i}]G_1^{(i)} + (A'_{n0} + \kappa_{n-1}A_{(n-1)0})G_1 = 0 \quad , n \geq 0 \end{aligned} \quad (6.1.16)$$

eşitliğini elde ederiz. (6.1.16) nın bir sonucu ve Teorem 6.1.3 ile aşağıdaki sonuca ulaşırız.

Sonuç 6.1.3 $\mathbb{E}_v^n$ uzayında $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_v^n$ birim hızlı ışıksı olmayan bir eğri olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

1) α bir slant helistir.

2) $n \geq 3$ için

$$\begin{aligned} 0 &= B'_n + \kappa_{n-1}B_{n-1} + A_{n(n-3)}\kappa_1^{(n-3)} + (A'_{n(n-3)} + A_{n(n-4)})\kappa_1^{(n-4)} \\ &+ \sum_{i=1}^{n-4}[A'_{ni} + A_{n(i-1)} + \kappa_{n-1}A_{(n-1)i}]\kappa_1^{(i-1)} \\ &+ (A'_{n0} + \kappa_{n-1}A_{(n-1)0}) \int \kappa_1(s)ds \end{aligned}$$

dir.

3)

$$\sum_{j=1}^n \varepsilon_j \left[B_j^2 + 2B_j \sum_{i=0}^{j-3} A_{ji} \kappa_1^{(i-1)} + \sum_{i=0}^{j-3} \sum_{k=0}^{j-3} A_{ji} A_{jk} \kappa_1^{(i-1)} \kappa_1^{(k-1)} \right] = c$$

$$j - i \geq 3,$$

$$j - k \geq 3$$

fonksiyonu sabittir.

İspat

1) $\iff$ 2) α bir slant helis ise (6.1.16) eşitlik doğrudur. (6.1.16) eşitliğinden

$$\begin{aligned} 0 &= B'_n + \kappa_{n-1} B_{n-1} + A_{n(n-3)} \left(\int \kappa_1 ds \right)^{(n-2)} + (A'_{n(n-3)} + A_{n(n-4)}) \left(\int \kappa_1 ds \right)^{(n-4)} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-4} [A'_{ni} + A_{n(i-1)} + \kappa_{n-1} A_{(n-1)i}] \left(\int \kappa_1 ds \right)^i + (A'_{n0} + \kappa_{n-1} A_{(n-1)0}) \left(\int \kappa_1 ds \right) \\ 0 &= B'_n + \kappa_{n-1} B_{n-1} + A_{n(n-3)} \kappa_1^{(n-3)} + (A'_{n(n-3)} + A_{n(n-4)}) \kappa_1^{(n-4)} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-4} [A'_{ni} + A_{n(i-1)} + \kappa_{n-1} A_{(n-1)i}] \kappa_1^{(i-1)} + (A'_{n0} + \kappa_{n-1} A_{(n-1)0}) \left(\int \kappa_1 ds \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Karşıtı kolayca görülebilir.

1) $\iff$ 3) α , bir slant helis ise $\sum_{j=1}^n \varepsilon_j G_j^2 = c$ eşitliği doğrudur.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \varepsilon_j G_j^2 &= c \\ \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \left(B_j + \sum_{i=0}^{j-3} A_{ji} G_1^{(i)} \right) \left(B_j + \sum_{k=0}^{j-3} A_{jk} G_1^{(k)} \right) &= c \\ \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \left[B_j^2 + B_j \left(\sum_{i=0}^{j-3} A_{ji} G_1^{(i)} + \sum_{k=0}^{j-3} A_{jk} G_1^{(k)} \right) + \sum_{i=0}^{j-3} \sum_{k=0}^{j-3} A_{ji} A_{jk} G_1^{(i)} G_1^{(k)} \right] &= c \\ \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \left[B_j^2 + 2B_j \sum_{i=0}^{j-3} A_{ji} G_1^{(i)} + \sum_{i=0}^{j-3} \sum_{k=0}^{j-3} A_{ji} A_{jk} G_1^{(i)} G_1^{(k)} \right] &= c \\ \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \left[B_j^2 + 2B_j \sum_{i=0}^{j-3} A_{ji} \kappa_1^{(i-1)} + \sum_{i=0}^{j-3} \sum_{k=0}^{j-3} A_{ji} A_{jk} \kappa_1^{(i-1)} \kappa_1^{(k-1)} \right] &= c \\ j - i \geq 3, j - k \geq 3 \end{aligned}$$

karşıtı da kolayca görülebilir.

7. $\mathbb{D}_1^3$ DUAL LORENTZ UZAYINDA SLANT HELİSLER

7.1 $\mathbb{D}_1^3$ Dual Lorentz Uzayda Slant Helisler

$\mathbb{E}^3$ ün yerine $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayını alırsak E.Study dönüşümü şöyledir: Dual Lorentz uzay $\mathbb{D}_1^3$ de pseudo dual hiperbolik uzay $\mathbb{H}_0^2$ ve pseudo dual küre $\mathbb{S}_1^2$ nin sırasıyla dual zamansı ve dual uzaysı birim vektörleri, $\mathbb{E}_1^3$ de zamansı ve uzaysı yönlü doğrularla bire bir eşlenir (Uğurlu ve Çalışkan 1996).

Tanım 7.1.1 $\langle, \rangle = dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2$ Lorentz metriği ile birlikte 3-boyutlu Lorentz uzayı $\mathbb{E}_1^3$ olsun. $\mathbb{E}_1^3$ de eğriler ve vektörler uzaysı, zamansı ve ışıksı olmak üzere 3 sınıftır. Lorentz uzayının bir teğet vektörü $\vec{x}$ olsun.

- i) $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$ ya da $\vec{x} = \vec{0}$ ise $\vec{x}$ vektörüne uzaysı vektör,
- ii) $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle < 0$ ise $\vec{x}$ vektörüne zamansı vektör,
- iii) $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$ ve $\vec{x} \neq \vec{0}$ ise $\vec{x}$ vektörüne ışıksı (null) vektör denir.

Tanım 7.1.2 $\mathbb{R}_1^3$ de $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ düzenli bir eğri olsun. O zaman α eğrisinin tüm hız vektörleri uzaysı ise α eğrisine uzaysı denir. Benzer olarak eğrinin tüm hız vektörleri zamansı ve ışıksı vektörler ise eğri sırasıyla zamansı ya da ışıksı olarak adlandırılır.

Bir $\vec{x}$ dual sayısı x ve x^* reel sayı olmak üzere $\vec{x} = x + \varepsilon x^*$ biçimindedir ve

$$\varepsilon \neq 0, \quad 0\varepsilon = \varepsilon 0 = 0, \quad 1\varepsilon = \varepsilon 1 = \varepsilon, \quad \varepsilon^2 = 0$$

ε dual birimdir. $\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \widehat{x}_3$ birer dual sayı olmak üzere Bir $(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \widehat{x}_3)$ sıralı üçlüsü bir dual vektör olarak adlandırılır ve dual vektörlerin kümesi

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^3 &= \mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \mathbb{D} = \{ \vec{\widehat{x}} \mid \vec{\widehat{x}} = (x_1 + \varepsilon x_1^*, x_2 + \varepsilon x_2^*, x_3 + \varepsilon x_3^*) \\ &= (x_1, x_2, x_3) + \varepsilon(x_1^*, x_2^*, x_3^*) \\ &= \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^*, \quad \vec{x}, \vec{x}^* \in \mathbb{R}^3 \} \end{aligned}$$

biçimindedir. $\mathbb{D}^3, \mathbb{D}$ dual sayılar halkası üstünde bir modüldür.

Tanım 7.1.3 Her $\vec{\widehat{x}} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^*, \vec{\widehat{y}} = \vec{y} + \varepsilon \vec{y}^*, \in \mathbb{D}^3$ için $\vec{\widehat{x}}$ ve $\vec{\widehat{y}}$ dual vektörlerinin Lorentz iç çarpımı

$$\langle \vec{\widehat{x}}, \vec{\widehat{y}} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \varepsilon (\langle \vec{x}, \vec{y}^* \rangle + \langle \vec{x}^*, \vec{y} \rangle)$$

eşitliğiyle tanımlanır. Sağ tarftaki metrik, Lorentz metriğidir.

$\mathbb{D}^3$, bu Lorentz iç çarpımı ile birlikte dual Lorentz uzayı olarak adlandırılır ve $\mathbb{D}_1^3$ ile gösterilir.

Tanım 7.1.4 $\mathbb{D}_1^3$ de $\vec{\hat{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ ve $\vec{\hat{y}} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$ ise vektörel çarpımı

$$\vec{\hat{x}} \wedge \vec{\hat{y}} = (\hat{x}_3\hat{y}_2 - \hat{x}_2\hat{y}_3, \hat{x}_3\hat{y}_1 - \hat{x}_1\hat{y}_3, \hat{x}_1\hat{y}_2 - \hat{x}_2\hat{y}_1)$$

eşitliğiyle tanımlanır.

Tanım 7.1.5. Sıfırdan farklı $\vec{\hat{x}} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^* \in \mathbb{D}_1^3$, dual vektörünün normu

$$\|\vec{\hat{x}}\| = \sqrt{|\vec{\hat{x}}, \vec{\hat{x}}|}$$

eşitliği ile tanımlanır.

Bir dual vektörün normu 1 yani $\|\vec{\hat{x}}\| = 1$ ise bu dual vektöre bir dual birim vektör denir.

Tanım 7.1.6 $\vec{\hat{x}} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^* \in \mathbb{D}_1^3$ dual vektörünün reel kısmı olan $\vec{x}$ vektörü uzaysı, zamansı ve ışıksı ise $\vec{\hat{x}}$ dual vektörüne sırasıyla uzaysı, zamansı ve ışıksı denir.

Tanım 7.1.7 $\vec{\hat{x}} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^* \in \mathbb{D}_1^3$ olsun,

i) $S_1^2 = \{\vec{\hat{x}} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^* \mid \|\vec{\hat{x}}\| = (1, 0); \vec{x}, \vec{x}^* \in \mathbb{E}_1^3 \text{ ve } \vec{x} \text{ vektörü uzaysı}\}$ kümesi $\mathbb{D}_1^3$ de merkezi $\vec{0}$ olan pseudo dual küre olarak adlandırılır.

ii) $H_0^2 = \{\vec{\hat{x}} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^* \mid \|\vec{\hat{x}}\| = (1, 0); \vec{x}, \vec{x}^* \in \mathbb{E}_1^3 \text{ ve } \vec{x} \text{ vektörü zamansı}\}$ kümesi $\mathbb{D}_1^3$ de pseudo dual hiperbolik uzay olarak adlandırılır (Uğurlu ve Çalışkan 1996).

Tanım 7.1.8 Her reel değerli $x_i(t)$ ve $x_i^*(t)$, $1 \leq i \leq 3$, fonksiyonları diferansiyellenebilir ise

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} : I \subset R &\rightarrow D_1^3 \\ t &\rightarrow \hat{\alpha}(t) = (\alpha_1(t) + \varepsilon \alpha_1^*(t), \alpha_2(t) + \varepsilon \alpha_2^*(t), \alpha_3(t) + \varepsilon \alpha_3^*(t)) \\ &= \overrightarrow{\alpha(t)} + \varepsilon \overrightarrow{\alpha^*(t)} \end{aligned}$$

dönüşümüne $\mathbb{D}_1^3$ de dual Lorentz eğrisi denir.

Tanım 7.1.9 $\overrightarrow{\alpha(t)}$ reel kısmı $\widehat{\alpha}(t)$ nin göstergesi olarak adlandırılır. $\widehat{x}(t)$ eğrisinin dual yay uzunluğu t_1 den t ye aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\widehat{s} = \int_{t_1}^t \|\overrightarrow{\alpha(t)}'\| dt = \int_{t_1}^t \|\overrightarrow{\alpha(t)}'\| dt + \int_{t_1}^t \langle \vec{t}, \overrightarrow{\alpha^*(t)}' \rangle dt = s + \varepsilon s^*, \quad (7.1.1)$$

burada $\vec{t}, \overrightarrow{\alpha(t)}$ nin bir birim teğet vektörüdür. Bundan sonra $\overrightarrow{\alpha(t)}$ nin t yay uzunluğu parametresi yerine s alacağız (Özbey ve Oral 2009).

Şimdi birim hızlı dual zamansı ve uzaysı eğriler için dual Frenet eşitliklerini veriyoruz.

Zamansı Durum:

$\widehat{\alpha}$ bir dual zamansı eğri olsun. $\overrightarrow{T}(s) = \widehat{\alpha}'(s)$ olduğundan $\overrightarrow{T}'(s) \neq 0$ bir dual uzaysı vektördür ve $\overrightarrow{T}'(s) \perp \overrightarrow{T}(s)$ dir. $\widehat{\alpha}$ nın dual eğriliği $\widehat{\kappa}(s) = \|\overrightarrow{T}'(s)\|$ dir. $\overrightarrow{N}(s)$ dual asli normal vektörü $\overrightarrow{N}(s) = \frac{\overrightarrow{T}'(s)}{\widehat{\kappa}(s)} = \frac{\widehat{\alpha}''(s)}{\|\widehat{\alpha}''(s)\|}$ eşitliğiyle tanımlanır. Ayrıca $\widehat{\kappa}(s) = \langle \overrightarrow{T}'(s), \overrightarrow{N}(s) \rangle$ biçiminde verebiliriz. $\overrightarrow{B}(s) = \overrightarrow{T}(s) \times \overrightarrow{N}(s)$ vektörüne dual binormal vektör denir. $\overrightarrow{B}(s)$ birim dual uzaysı bir vektördür. $\mathbb{D}_1^3$ de $\{\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}, \overrightarrow{B}\}$ bir ortonormal tabandır ve $\widehat{\alpha}$ nın Frenet çatısı olarak adlandırılır. $\widehat{\tau}(s) = \langle \overrightarrow{N}'(s), \overrightarrow{B}(s) \rangle = - \langle \overrightarrow{B}'(s), \overrightarrow{N}(s) \rangle$ dual sayısına $\widehat{\alpha}$ eğrisinin $\widehat{\alpha}(s)$ noktasındaki dual burulması denir. Dual zamansı bir eğri için Frenet eşitliklikleri

$$\frac{d}{d\widehat{s}} \begin{pmatrix} \overrightarrow{T} \\ \overrightarrow{N} \\ \overrightarrow{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \widehat{\kappa} & 0 \\ \widehat{\kappa} & 0 & \widehat{\tau} \\ 0 & -\widehat{\tau} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{T} \\ \overrightarrow{N} \\ \overrightarrow{B} \end{pmatrix}$$

ile verilir. Burada $\widehat{\kappa} = \kappa + \varepsilon \kappa^*$ ve $\widehat{\tau} = \tau + \varepsilon \tau^*$ pure dual olmayan fonksiyonlardır.

Uzaysı Durum:

$\overrightarrow{T}'$ nin causal karakterine bağlı olarak 3 durum vardır.

i) $\vec{T}'(s)$ bir dual uzaysı vektör olsun. $\widehat{\kappa}(s) = \|\vec{T}'(s)\| = \sqrt{\langle \vec{T}'(s), \vec{T}'(s) \rangle}$, $\widehat{\tau}(s) = -\langle \vec{N}'(s), \vec{B}(s) \rangle = \langle \vec{B}'(s), \vec{N}(s) \rangle$, $\vec{N}(s) = \vec{T}'(s)/\widehat{\kappa}(s)$ ve $\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \times \vec{N}(s)$. Dual Frenet eşitlikleri

$$\frac{d}{d\hat{s}} \begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \widehat{\kappa} & 0 \\ -\widehat{\kappa} & 0 & \widehat{\tau} \\ 0 & \widehat{\tau} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{pmatrix}$$

dir. Burada $\widehat{\kappa} = \kappa + \varepsilon\kappa^*$ ve $\widehat{\tau} = \tau + \varepsilon\tau^*$ pure dual olmayan fonksiyonlardır.

ii) $\vec{T}'(s)$ bir dual zamansı vektör olsun. $\vec{N}(s) = \vec{T}'(s)/\widehat{\kappa}(s)$, $\widehat{\kappa}(s) = \|\vec{T}'(s)\| = \sqrt{-\langle \vec{T}'(s), \vec{T}'(s) \rangle}$, $\widehat{\tau}(s) = \langle \vec{N}'(s), \vec{B}(s) \rangle$. Dual Frenet eşitlikleri

$$\frac{d}{d\hat{s}} \begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \widehat{\kappa} & 0 \\ \widehat{\kappa} & 0 & \widehat{\tau} \\ 0 & \widehat{\tau} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{pmatrix}$$

dir, burada $\widehat{\kappa} = \kappa + \varepsilon\kappa^*$ ve $\widehat{\tau} = \tau + \varepsilon\tau^*$ pure dual olmayan fonksiyonlardır.

iii) $\vec{T}'(s)$ bir dual ışıksı vektör olsun. $\vec{T}(s) = \vec{\alpha}'(s)$, $\vec{N}(s) = \vec{T}'(s)$ ve $\vec{T}(s)$ vektörüne dik bir tek $\vec{B}(s)$ dual vektörü $\langle \vec{N}(s), \vec{B}(s) \rangle = 1$ olacak biçimde vardır. Buna göre dual Frenet eşitlikleri

$$\frac{d}{d\hat{s}} \begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \widehat{\tau} & 0 \\ -1 & 0 & -\widehat{\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{pmatrix}$$

dir. Burada $\widehat{\tau} = \tau + \varepsilon\tau^*$ dual burulma fonksiyonu pure dual değildir.

Tanım 7.1.10 $\mathbb{D}_1^3$ Dual Lorentz uzayında bir $\widehat{\alpha}$ dual Lorentz eğrisini göz önüne alalım. Bu eğrinin Frenet çatısı $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ ile gösterilsin. $\mathbb{D}_1^3$ de belirli bir $\vec{U}$ doğrultusu için $\langle \vec{N}, \vec{U} \rangle$ dual sabit bir fonksiyon ise $\widehat{\alpha}$ ya bir dual slant helis denir.

Bu bölümde $\widehat{\alpha}$ nın eğrilik ve burulmasına bağlı olarak slant helislerin karakterizasyonunu vereceğiz. Son olarak slant helislerin dual teğet ve dual binormal göstergesini vererek $\mathbb{D}_1^3$ de dual helis olduğunu göstereceğiz.

7.2 $\mathbb{D}_1^3$ de Dual Slant Helislerin Bazı Karakterizasyonları

Teorem 7.2.1 $\mathbb{D}_1^3$ de $\hat{\alpha}$ birim hızlı dual zamansı eğri olsun. $\hat{\alpha}$ eğrisinin bir dual slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{\hat{\kappa}^2}{(\hat{\tau}^2 - \hat{\kappa}^2)^{3/2}} \left(\frac{\hat{\tau}}{\hat{\kappa}} \right)' \quad \text{veya} \quad \frac{\hat{\kappa}^2}{(\hat{\kappa}^2 - \hat{\tau}^2)^{3/2}} \left(\frac{\hat{\tau}}{\hat{\kappa}} \right)' \quad (7.2.1)$$

fonksiyonlarından birinin dual sabit olmasıdır, burada $\hat{\tau}^2 - \hat{\kappa}^2$ pure dual değildir.

İspat

$\mathbb{D}_1^3$ de $\hat{\alpha}$ bir birim hızlı dual zamansı eğri olsun. $\hat{\alpha}$ nın dual Frenet çatısı $\{\vec{\hat{T}}, \vec{\hat{N}}, \vec{\hat{B}}\}$

$$\hat{T}(s) = \hat{\alpha}'(s), \quad \hat{N}(s) = \frac{\hat{T}'(s)}{\hat{\kappa}(s)} = \frac{\hat{\alpha}''(s)}{\|\hat{\alpha}''(s)\|}, \quad \hat{B}(s) = \hat{T}(s) \times \hat{N}(s)$$

Dual Frenet eşitliklikleri

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \vec{\hat{T}} \\ \vec{\hat{N}} \\ \vec{\hat{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\kappa} & 0 \\ \hat{\kappa} & 0 & \hat{\tau} \\ 0 & -\hat{\tau} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\hat{T}} \\ \vec{\hat{N}} \\ \vec{\hat{B}} \end{pmatrix} \quad (7.2.2)$$

dır. Burada $\hat{\kappa} = \kappa + \varepsilon \kappa^*$ ve $\hat{\tau} = \tau + \varepsilon \tau^*$ pure dual olmayan fonksiyonlardır. $\hat{\alpha}$ eğrisinin bir slant helis olduğunu kabul edelim. Buna göre bir $\vec{\hat{U}}$ dual sabit vektör alanı için $\langle \vec{\hat{N}}, \vec{\hat{U}} \rangle$ fonksiyonu dual sabittir. $\hat{a}_1$ ve $\hat{a}_3$ düzgün dual fonksiyonları

$$\vec{\hat{U}} = \hat{a}_1(s) \vec{\hat{T}}(s) + \hat{c} \vec{\hat{N}}(s) + \hat{a}_3(s) \vec{\hat{B}}(s) \quad , \quad s \in I \quad (7.2.3)$$

olacak biçimde vardır. $\vec{\hat{U}}$ dual sabit olduğundan (7.2.3) eşitliğinin türevi alınır ve (7.2.2) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \vec{\hat{U}}' &= \hat{a}_1' \vec{\hat{T}} + \hat{a}_1 \vec{\hat{T}}' + \hat{c} \vec{\hat{N}}' + \hat{a}_3' \vec{\hat{B}} + \hat{a}_3 \vec{\hat{B}}' \\ &= \hat{a}_1' \vec{\hat{T}} + \hat{a}_1 \hat{\kappa} \vec{\hat{N}} + \hat{c} (\hat{\kappa} \vec{\hat{T}} + \hat{\tau} \vec{\hat{B}}) + \hat{a}_3' \vec{\hat{B}} + \hat{a}_3 (-\hat{\tau} \vec{\hat{N}}) \\ 0 &= (\hat{a}_1' + \hat{c} \hat{\kappa}) \vec{\hat{T}} + (\hat{a}_1 \hat{\kappa} - \hat{a}_3 \hat{\tau}) \vec{\hat{N}} + (\hat{c} \hat{\tau} + \hat{a}_3') \vec{\hat{B}} \end{aligned}$$

elde edilir. $\vec{\hat{T}}, \vec{\hat{N}}, \vec{\hat{B}}$ lineer bağımsız olduğundan,

$$\begin{cases} \hat{a}_1' + \hat{c} \hat{\kappa} = 0 \\ \hat{a}_1 \hat{\kappa} - \hat{a}_3 \hat{\tau} = 0 \\ \hat{c} \hat{\tau} + \hat{a}_3' = 0 \end{cases} \quad (7.2.4)$$

dır. (7.2.4) eşitliğinin ikinci eşitliğinden

$$\widehat{a}_1 = \widehat{a}_3 \left(\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}} \right) \quad (7.2.5)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\langle \vec{\widehat{U}}, \vec{\widehat{U}} \rangle = -\widehat{a}_1^2 + \widehat{c}^2 + \widehat{a}_3^2 = D = \text{dual sabit} \quad (7.2.6)$$

dır. (7.2.5) ve (7.2.6) eşitliğinden $\widehat{m}$ bir pure dual olmayan sabit olmak üzere

$$\epsilon \widehat{m}^2 = \widehat{a}_3^2 \left(\left(\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}} \right)^2 - 1 \right), \quad \widehat{m} > 0, \quad \epsilon \in \{-1, 0, 1\}$$

elde edilir. Eğer $\epsilon = 0$ ise $\widehat{a}_3 = 0$ dır ve (7.2.4) eşitliğinden $\widehat{a}'_3 = 0$, $\widehat{a}_1 = \widehat{c} = 0$ dır. Bunun anlamı $\vec{\widehat{U}} = 0$; dır. Bu ise bir çelişkidir. Öyleyse $\epsilon = 1$ yada $\epsilon = -1$ ve böylece $\widehat{\tau}^2 - \widehat{\kappa}^2 \neq 0$ dır. Eğer $\epsilon = -1$ ise

$$\begin{aligned} -\widehat{m}^2 &= \widehat{a}_3^2 \left(\left(\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}} \right)^2 - 1 \right) \Rightarrow \widehat{a}_3^2 = \frac{\widehat{m}^2}{1 - \left(\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}} \right)^2} \\ &\Rightarrow \widehat{a}_3 = \pm \frac{\widehat{m}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}} \right)^2}} \end{aligned}$$

ve eğer $\epsilon = 1$ ise

$$\begin{aligned} \widehat{m}^2 &= \widehat{a}_3^2 \left(\left(\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}} \right)^2 - 1 \right) \Rightarrow \widehat{a}_3^2 = \frac{\widehat{m}^2}{\left(\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}} \right)^2 - 1} \\ &\Rightarrow \widehat{a}_3 = \pm \frac{\widehat{m}}{\sqrt{\left(\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}} \right)^2 - 1}} \end{aligned}$$

bulunur. (7.2.4) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \epsilon = -1 \text{ için } \widehat{a}'_3 &= \frac{d}{d\widehat{s}} \left(\pm \frac{\widehat{m}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}} \right)^2}} \right) = -\widehat{c\tau}, \\ \epsilon = 1 \text{ için } \widehat{a}'_3 &= \frac{d}{d\widehat{s}} \left(\pm \frac{\widehat{m}}{\sqrt{\left(\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}} \right)^2 - 1}} \right) = \widehat{c\tau} \end{aligned}$$

dir. Bu eşitlikler aynı zamanda;

$$\frac{\hat{\kappa}^2}{(\hat{\tau}^2 - \hat{\kappa}^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\hat{\tau}}{\hat{\kappa}} \right)' = \pm \frac{\hat{c}}{m} \quad veya \quad \frac{\hat{\kappa}^2}{(\hat{\kappa}^2 - \hat{\tau}^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\hat{\tau}}{\hat{\kappa}} \right)' = \pm \frac{\hat{c}}{m}$$

biçiminde yazılabilir. Bu eşitlikler (7.2.1) i eşitliğini gösterir.

Karşıt olarak (7.2.1) eşitliği sağlansın. Varsayalım ki (7.2.1) eşitliğinin ilk fonksiyonu dual sabit olsun (diğer durum da benzer olarak gösterilebilir). Buna göre

$$\frac{\hat{\kappa}^2}{(\hat{\tau}^2 - \hat{\kappa}^2)^{3/2}} \left(\frac{\hat{\tau}}{\hat{\kappa}} \right)' = \hat{c}$$

olur. Şimdi $\vec{\hat{U}}$ vektörünü

$$\vec{\hat{U}} = \frac{\hat{\tau}}{\sqrt{\hat{\tau}^2 - \hat{\kappa}^2}} \vec{\hat{T}} + \hat{c} \vec{\hat{N}} + \frac{\hat{\kappa}}{\sqrt{\hat{\tau}^2 - \hat{\kappa}^2}} \vec{\hat{B}} \quad (7.2.7)$$

şeklinde tanımlayalım. (7.2.7) eşitliğinin türevi alınarak ve dual Frenet eşitlikleri ile birlikte kullanılarak

$$\begin{aligned} \vec{\hat{U}}' &= \left(\frac{\hat{\tau}}{\sqrt{\hat{\tau}^2 - \hat{\kappa}^2}} \right)' \vec{\hat{T}} + \frac{\hat{\tau}}{\sqrt{\hat{\tau}^2 - \hat{\kappa}^2}} \hat{\kappa} \vec{\hat{N}} + \hat{c} \hat{\kappa} \vec{\hat{T}} + \hat{c} \hat{\tau} \vec{\hat{B}} \\ &\quad + \left(\frac{\hat{\kappa}}{\sqrt{\hat{\tau}^2 - \hat{\kappa}^2}} \right)' \vec{\hat{B}} + \frac{\hat{\kappa}}{\sqrt{\hat{\tau}^2 - \hat{\kappa}^2}} (-\hat{\tau} \vec{\hat{N}}) \\ &= \left\{ \left(\frac{\hat{\tau}}{\sqrt{\hat{\tau}^2 - \hat{\kappa}^2}} \right)' + \hat{c} \hat{\kappa} \right\} \vec{\hat{T}} + \left\{ \hat{c} \hat{\tau} + \left(\frac{\hat{\kappa}}{\sqrt{\hat{\tau}^2 - \hat{\kappa}^2}} \right)' \right\} \vec{\hat{B}} \\ &= \left\{ \frac{\hat{\tau}'}{\sqrt{\hat{\tau}^2 - \hat{\kappa}^2}} + \frac{-\hat{\tau}^2 \tau' + \hat{\tau} \hat{\kappa} \hat{\kappa}'}{(\hat{\tau}^2 - \hat{\kappa}^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\hat{\kappa} 2\hat{\tau}' - \hat{\tau} \hat{\kappa} \hat{\kappa}'}{(\hat{\tau}^2 - \hat{\kappa}^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} \vec{\hat{T}} \\ &\quad + \left\{ \frac{\hat{\kappa}^2}{(\hat{\tau}^2 - \hat{\kappa}^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\hat{\tau}' \hat{\kappa} - \hat{\tau} \hat{\kappa}'}{\hat{\kappa}^2} \tau + \frac{\hat{\kappa}'}{\sqrt{\hat{\tau}^2 - \hat{\kappa}^2}} + \frac{-\hat{\kappa} \hat{\tau} \hat{\tau}' + \hat{\kappa}^2 \hat{\kappa}'}{(\hat{\tau}^2 - \hat{\kappa}^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} \vec{\hat{B}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\hat{\tau}^2 - \hat{\kappa}^2}} (\vec{\hat{T}} \hat{\tau}' + \vec{\hat{B}} \hat{\kappa}') - \frac{\hat{\tau}^2 - \hat{\kappa}^2}{(\hat{\tau}^2 - \hat{\kappa}^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{\hat{T}} \hat{\tau}' - \frac{\hat{\tau}^2 - \hat{\kappa}^2}{(\hat{\tau}^2 - \hat{\kappa}^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{\hat{B}} \hat{\kappa}' \end{aligned}$$

dır. Böylece $\vec{\hat{U}}' = 0$ dır. Bunun anlamı $\vec{\hat{U}}$ bir dual sabit vektördür. Diğer taraftan

$$\langle \vec{\hat{N}}(s), \vec{\hat{U}} \rangle = \langle \vec{\hat{N}}(s), \frac{\hat{\tau}}{\sqrt{\hat{\tau}^2 - \hat{\kappa}^2}} \vec{\hat{T}} + \hat{c} \vec{\hat{N}} + \frac{\hat{\kappa}}{\sqrt{\hat{\tau}^2 - \hat{\kappa}^2}} \vec{\hat{B}} \rangle = \hat{c}$$

sabittir ve bunun anlamı $\hat{\alpha}$ bir slant helistir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 7.2.2 $\mathbb{D}_1^3$ de $\hat{\alpha}$ birim hızlı bir dual uzaysı eğri olsun.

(a) Eğer $\hat{\alpha}$ eğrisinin dual asli normal vektörü uzaysı ise $\hat{\alpha}$ nın bir slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{\hat{\kappa}^2}{(\hat{\tau}^2 - \hat{\kappa}^2)^{3/2}} \left(\frac{\hat{\tau}}{\hat{\kappa}} \right)' \quad \text{veya} \quad \frac{\hat{\kappa}^2}{(\hat{\kappa}^2 - \hat{\tau}^2)^{3/2}} \left(\frac{\hat{\tau}}{\hat{\kappa}} \right)' \quad (7.2.8)$$

fonksiyonlarından birinin dual sabit olmasıdır, burada $\hat{\tau}^2 - \hat{\kappa}^2$ pure dual olmayan fonksiyondur.

(b) Eğer $\hat{\alpha}$ eğrisinin dual asli normal vektörü zamansı ise $\hat{\alpha}$ nın bir slant helis olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{\hat{\kappa}^2}{(\hat{\tau}^2 + \hat{\kappa}^2)^{3/2}} \left(\frac{\hat{\tau}}{\hat{\kappa}} \right)' \quad (7.2.9)$$

fonksiyonun dual sabit olmasıdır, burada $\hat{\tau}^2 + \hat{\kappa}^2$ pure dual olmayan fonksiyondur.

(c) Dual asli normal vektörü ışıksı olan her uzaysı eğri bir dual slant helistir.

İspat

$\mathbb{D}_1^3$ de $\hat{\alpha}$ birim hızlı bir dual uzaysı eğri olsun. Bu durumda $\hat{\alpha}$ eğrisinin dual asli normal vektörü $\vec{\hat{N}}$ uzaysı veya zamansı olduğunda ispat Teorem 7.2.1 e benzer olarak yapılır. Biz burada $s \in I$ için bir dual eğrinin dual asli normal vektörü $\vec{\hat{N}}$ in ışıksı olduğu durumun ispatını yapacağız. $\vec{\hat{T}}(s) = \hat{\alpha}'(s)$, $\vec{\hat{N}}(s) = \vec{\hat{T}}'(s)$ ve $\vec{\hat{T}}(s)$ vektörüne dik bir tek dual vektör $\vec{\hat{B}}(s)$ vardır öyleki $\langle \vec{\hat{N}}(s), \vec{\hat{B}}(s) \rangle = 1$ dir. O zaman dual Frenet eşitlikleri

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \vec{\hat{T}} \\ \vec{\hat{N}} \\ \vec{\hat{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \hat{\tau} & 0 \\ -1 & 0 & -\hat{\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\hat{T}} \\ \vec{\hat{N}} \\ \vec{\hat{B}} \end{pmatrix} \quad (7.2.10)$$

dir, burada $\hat{\tau} = \tau + \varepsilon \tau^*$ pure dual olmayan fonksiyondur. Burada dual asli normal vektörü ışıksı olan her uzaysı eğrinin bir dual slant helis olduğunu göstereceğiz. $\hat{y}'(s) + \hat{\tau}(s)\hat{y}(s) = 0$ adi differansiyel denkleminin aşıkâr olmayan bir çözümü $\hat{a}_2(s)$ olsun ve $\vec{\hat{U}} = \hat{a}_2(s)\vec{\hat{N}}(s)$ şeklinde tanımlayalım. U nun türevini alarak (7.2.10) eşitliğini kullanarak

$$\vec{\hat{U}}' = \hat{a}_2' \vec{\hat{N}} + \hat{a}_2(\tau \vec{\hat{N}}) = \hat{a}_2' \vec{\hat{N}} + \hat{a}_2(\tau \vec{\hat{N}}) = (\hat{a}_2' + \hat{a}_2 \hat{\tau}) \vec{\hat{N}}$$

ve $\widehat{a}'_2 + \widehat{a}_2 \widehat{\tau} = 0$ olduğundan $\widehat{U}' = 0$ elde edilir. Buna göre $\widehat{U}$, $\mathbb{D}_1^3$ in sıfırdan farklı dual sabit vektör alanıdır ve $\langle \widehat{N}, \widehat{U} \rangle = \langle \widehat{N}, \widehat{a}_2 \widehat{N} \rangle = \widehat{0}$ dır. Bu $\widehat{\alpha}$ eğrisinin bir dual slant helis olduğunu gösterir.

7.3 $\mathbb{D}_1^3$ de Bir Dual Slant Helisin İnvolutleri ve Göstergeleri

Bu bölümde bir dual slant helisin dual teğet göstergesi, dual binormal göstergesi ve involütleri incelenecektir. Burada dual zamansı eğrileri ve dual asli normal vektörü uzayı ve zamansı olan dual uzayı eğrileri göz önüne alacağız.

Tanım 7.3.1 Bir $\widehat{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{D}_1^3$ birim hızlı dual eğrinin dual teğet göstergesi ve dual binormal göstergesi sırasıyla

$$\begin{aligned} \widehat{T} : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{D}_1^3 \\ t &\rightarrow \widehat{T} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \widehat{B} : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{D}_1^3 \\ t &\rightarrow \widehat{B} \end{aligned}$$

dual eğrileridir. Bir dual eğrinin görüntüsü $\mathbb{H}_0^2$ ve $\mathbb{S}_1^2$ üstündeyse, eğriye dual küresel eğri denir. Özellikle dual teğet göstergesi ve dual binormal göstergeleri dual küreseldir.

Tanım 7.3.2 Dual Lorentz uzayında eğer $\mathbb{D}_1^3$ in belirli bir $\widehat{U}$ doğrultusu için $\left\langle \widehat{T}, \widehat{U} \right\rangle$ dual fonksiyonu dual sabit ise $\widehat{\alpha}$ ya dual helis denir. Dual helisler eğri boyunca $\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}}$ oranının dual sabit olma durumuyla karakterize edilir, burada $\widehat{\kappa}$ dual eğriliği ve $\widehat{\tau}$ dual burulması pure dual olmayan fonksiyonlardır.

Teorem 7.3.1 $\widehat{\alpha}$ birim hızlı dual zamansı veya uzayı (asli normal vektörü dual uzayı veya zamansı olan) eğri olsun. $\widehat{\alpha}$, $\mathbb{D}_1^3$ de bir dual slant helis ise $\widehat{\alpha}$ eğrisinin $\widehat{T}$ dual teğet göstergesi bir dual (küresel) helistir.

İspat

$\widehat{\kappa}_{\widehat{T}}$ ve $\widehat{\tau}_{\widehat{T}}$ ile $\widehat{T}$ nin sırasıyla dual eğriliği ve dual burulmasını gösteriyoruz. $\widehat{\tau}_T/\widehat{\kappa}_T$ oranının dual bir sabit olduğunu ispatlamaya çalışacağız. Böylece $\mathbb{D}_1^3$ de $\widehat{T}$ bir dual

(küresel) helis olur. Dual teğet göstergesi birim hızlı olmayabilir. Genel olarak $\widehat{\beta}(t)$ yay uzunluk ile parametre edilmemiş dual eğri ise, dual eğrilik ve dual burulma fonksiyonları

$$\begin{aligned}\widehat{\kappa}_{\widehat{\beta}}^2(t) &= \epsilon \frac{\left\| \widehat{\beta}'(t) \right\|^2 \left\| \widehat{\beta}''(t) \right\|^2 - \left\langle \widehat{\beta}'(t), \widehat{\beta}''(t) \right\rangle^2}{\left\| \widehat{\beta}'(t) \right\|^6}, \\ \widehat{\tau}_{\widehat{\beta}}(t) &= -\epsilon \frac{\det(\widehat{\beta}'(t), \widehat{\beta}''(t), \widehat{\beta}'''(t))}{\widehat{\kappa}_{\widehat{\beta}}^2(t) \left\| \widehat{\beta}'(t) \right\|^6}\end{aligned}$$

dır, burada $\epsilon, \widehat{\beta}''(t)$ nin bir dual uzaysı yada dual zamansı vektör olmasına bağlı olarak sırasıyla 1 veya -1 dir.

$\widehat{\alpha}$ nın $\overrightarrow{\widehat{N}}$ dual asli normal vektörü uzaysı yada zamansı olan bir dual uzaysı eğri olduğunu düşünelim. $\overrightarrow{\widehat{N}}$ nin uzaysı yada zamansı olmasına bağlı olarak ϵ_0 sırasıyla 1 veya -1 olur. Dual teğet göstergesi $\widehat{T}$ bir dual uzaysı yada bir dual zamansı eğridir. Her iki durum için de

$$\begin{aligned}\widehat{\kappa}_{\widehat{T}}^2 &= \frac{1}{\widehat{\kappa}^2}(\widehat{\kappa}^2 - \epsilon_0^2 \widehat{\tau}), \\ \det(\widehat{T}', \widehat{T}'', \widehat{T}''') &= \epsilon_0 \widehat{\kappa}^5 \left(\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}} \right)', \\ \widehat{\tau}_{\widehat{T}} &= \epsilon_0 \frac{\widehat{\kappa} \left(\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}} \right)'}{\widehat{\kappa}^2 - \epsilon_0^2 \widehat{\tau}}\end{aligned}$$

dır. $\widehat{\alpha}$ bir dual zamansı eğri ise, $\widehat{T}$ bir dual uzaysı eğridir ve

$$\begin{aligned}\widehat{\kappa}_{\widehat{T}}^2 &= -\frac{1}{\widehat{\kappa}^2}(\widehat{\kappa}^2 - \widehat{\tau}^2), \\ \det(\widehat{T}', \widehat{T}'', \widehat{T}''') &= -\widehat{\kappa}^5 \left(\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}} \right)', \\ \tau_{\widehat{T}} &= \frac{\widehat{\kappa} \left(\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}} \right)'}{\widehat{\kappa}^2 - \widehat{\tau}^2}\end{aligned}$$

dır. Sonuç olarak

$$\frac{\widehat{\tau}_{\widehat{T}}}{\widehat{\kappa}_{\widehat{T}}} = \epsilon_0 \frac{\widehat{\kappa}^2 \left(\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}} \right)'}{(\widehat{\kappa}^2 - \epsilon_0^2 \widehat{\tau})^{3/2}} \quad \text{veya} \quad \frac{\widehat{\tau}_{\widehat{T}}}{\widehat{\kappa}_{\widehat{T}}} = \frac{\widehat{\kappa}^2 \left(\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}} \right)'}{(\widehat{\tau}^2 - \widehat{\kappa}^2)^{3/2}}$$

oranları Teorem 7.2.1 ve 7.2.2 den dual sabittir. Buna göre $\widehat{T}$ bir dual helistir.

Teorem 7.3.2 $\hat{\alpha}$ birim hızlı dual zamansı veya uzaysı (asli normal vektörü dual uzaysı veya zamansı olan) eğri olsun. $\hat{\alpha}, \mathbb{D}_1^3$ de bir dual slant helis ise $\hat{\alpha}$ nın $\hat{B}$ dual binormal göstergesi bir dual (küresel) helistir.

İspat

$\hat{\kappa}_{\hat{B}}$ ve $\hat{\tau}_{\hat{B}}$ ile $\hat{B}$ nin sırasıyla dual eğriliği ve dual burulmasını gösteriyoruz. $\hat{\alpha}$ nın bir dual uzaysı eğri olduğunu düşünelim. O zaman $\hat{B}$ dual binormal göstergesi $\hat{N}$ nin sırasıyla zamansı yada uzaysı olmasına bağlı olarak zamansı yada uzaysı eğridir. Buna göre

$$\begin{aligned}\hat{\kappa}_{\hat{B}}^2 &= \frac{\hat{\kappa}^2 - \epsilon_0^2 \hat{\tau}}{\hat{\tau}^2}, \\ \det(\hat{B}', \hat{B}'', \hat{B}''') &= \epsilon_0^2 \hat{\kappa} \hat{\tau}^3 \left(\frac{\hat{\tau}}{\hat{\kappa}} \right)', \\ \hat{\tau}_{\hat{B}} &= \epsilon_0 \frac{\hat{\kappa}^2}{\hat{\tau} (\hat{\kappa}^2 - \epsilon_0^2 \hat{\tau}^2)} \left(\frac{\hat{\tau}}{\hat{\kappa}} \right)',\end{aligned}$$

dır, burada $\overrightarrow{\hat{N}}$ nin uzaysı yada zamansı olmasına bağlı olarak ϵ_0 sırasıyla 1 yada -1 dir.

Eğer $\hat{\alpha}$ zamansı ise $\hat{B}$ dual uzaysı eğridir. Öyleyse

$$\begin{aligned}\hat{\kappa}_{\hat{B}}^2 &= \left(\frac{\hat{\tau}^2 - \hat{\kappa}^2}{\hat{\tau}^2} \right), \\ \det(\hat{B}', \hat{B}'', \hat{B}''') &= \hat{\kappa}^2 \hat{\tau}^3 \left(\frac{\hat{\tau}}{\hat{\kappa}} \right)', \\ \hat{\tau}_{\hat{B}} &= \frac{\hat{\kappa}^2}{\hat{\tau} (\hat{\tau}^2 - \hat{\kappa}^2)} \left(\frac{\hat{\tau}}{\hat{\kappa}} \right)'\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\frac{\hat{\tau}_{\hat{B}}}{\hat{\kappa}_{\hat{B}}} = \delta(\hat{\tau}) \frac{\hat{\kappa}^2 \left(\frac{\hat{\tau}}{\hat{\kappa}} \right)'}{(\hat{\kappa}^2 - \epsilon_0^2 \hat{\tau})^{3/2}} \quad veya \quad \frac{\hat{\tau}_{\hat{B}}}{\hat{\kappa}_{\hat{B}}} = \delta(\hat{\tau}) \frac{\hat{\kappa}^2 \left(\frac{\hat{\tau}}{\hat{\kappa}} \right)'}{(\hat{\kappa}^2 - \epsilon_0^2 \hat{\tau})^{3/2}}$$

dir. Burada $\hat{\tau}$ nin pozitif yada negatif olmasına bağlı olarak δ sırasıyla 1 yada -1 dir. Her durumda (7.2.1), (7.2.8) ve (7.2.9) eşitlikleri dual sabit olduğundan $\mathbb{D}_1^3$ de $\hat{B}$ dual binormal göstergesinin bir dual helis olduğu ispatlanır.

Tanım 7.3.3 Birim hızlı bir $\hat{\alpha} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{D}_1^3$ dual eğrisi ile aynı aralıkta tanımlı $\hat{\beta} : I \rightarrow \mathbb{D}_1^3$ dual eğrisi verilsin. Her bir $s \in I$ için $\hat{\alpha}$ dual eğrisinin $\hat{\alpha}(s)$ noktasındaki

dual teğeti $\widehat{\beta}(s)$ noktasından geçiyorsa ve $\langle \widehat{\alpha}'(s), \widehat{\beta}'(s) \rangle = 0$ ise $\widehat{\beta}$ ye $\widehat{\alpha}$ nın bir involütü denir. $\widehat{\beta}$ dual eğrisi $\widehat{\alpha}$ eğrisinin bir involütü ise

$$\widehat{\beta}(s) = \widehat{\alpha}(s) + (\widehat{c} - s) \overrightarrow{T}(s)$$

dir , burada $\widehat{c}$ bir dual sabittir ve $\overrightarrow{T}(s)$, $\widehat{\alpha}$ eğrisinin birim dual teğet vektörüdür.

Teorem 7.3.3 $\widehat{\alpha}$ birim hızlı dual zamansı veya uzaysı (asli normal vektörü dual uzaysı veya zamansı olan) eğri olsun. $\widehat{\beta}$, $\widehat{\alpha}$ nın bir involütü olsun. α eğrisinin dual slant helis olması için gerek ve yeter şart $\widehat{\beta}$ nın bir dual helis olmasıdır.

İspat

$\widehat{\beta}$ nın dual eğriliği ve dual burulması $\widehat{\kappa}_{\widehat{\beta}}$ ve $\widehat{\tau}_{\widehat{\beta}}$ ile gösterilsin. Eğer $\widehat{\alpha}$ bir dual zamansı eğri ise

$$\widehat{\kappa}_{\widehat{\beta}} = \frac{\widehat{\tau}^2 - \widehat{\kappa}^2}{\widehat{\kappa}^2(\widehat{c} - s)^2}, \quad (7.3.1)$$

$$\widehat{\tau}_{\widehat{\beta}} = -\frac{\widehat{\kappa}}{(\widehat{c} - s)(\widehat{\tau}^2 - \widehat{\kappa}^2)} \left(\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}}\right)' \quad (7.3.2)$$

dir. O zaman

$$\frac{\widehat{\tau}_{\widehat{\beta}}}{\widehat{\kappa}_{\widehat{\beta}}} = -\frac{\widehat{\kappa}^2}{(\widehat{\tau}^2 - \widehat{\kappa}^2)^{3/2}} \left(\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}}\right)' \quad (7.3.3)$$

dır. Eğer $\widehat{\alpha}$ bir dual uzaysı eğri ise

$$\widehat{\kappa}_{\widehat{\beta}} = \frac{\widehat{\kappa}^2 - \epsilon_0^2 \widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}^2(\widehat{c} - s)^2},$$

$$\widehat{\tau}_{\widehat{\beta}} = \frac{\widehat{\kappa}}{(\widehat{c} - s)(\widehat{\kappa}^2 - \epsilon_0^2 \widehat{\tau})} \left(\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}}\right)'$$

dir. O zaman

$$\frac{\widehat{\tau}_{\widehat{\beta}}}{\widehat{\kappa}_{\widehat{\beta}}} = \frac{\widehat{\kappa}^2}{(\widehat{\kappa}^2 - \epsilon_0^2 \widehat{\tau})^{3/2}} \left(\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}}\right)' \quad (7.3.4)$$

dir .Burada $\overrightarrow{N}$ nın uzaysı ya da zamansı dual vektör olmasına bağlı olarak ϵ_0 sırasıyla 1 ya da -1 dir. (7.3.3), (7.3.4) eşitlikleri ve Teorem 7.3.1 ve Teorem 7.3.2 kullanılarak ispat tamamlanır.

KAYNAKLAR

- Ahmad, T. A. and Lopez, R. (2011). On Slant Helices in Minkowski Space $\mathbb{E}_1^3$ *Journal of the Korean Mathematical Society*, **48**(1): 159-167.
- Ahmad, T. A. and Lopez, R. (2010). Timelike B_2 - Slant Helices in Minkowski Space $\mathbb{E}_1^4$. *Archivum Mathematicum Tomus*, **46**: 39-46.
- Ahmad, T. A. and Turgut, M. (2010). Some Characterizations of Slant Helices in the Euclidean Space $\mathbb{E}^n$. *Hacettepe J. Mathematics and Statics*, **39**(3): 327-336.
- Barros, M. (1997). General Helices and a Theorem of Lancert, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125**: 1503-1509.
- Çalışkan, A. and Uğurlu, H. H. (1996). The Study Mapping for Directed Spacelike and Timelike Lines in Minkowski 3-Space $\mathbb{R}_1^3$. *Mathematical and Computational Applications*, **1**(2): 142-148.
- Gluck, H. (1996). Higher Curvatures of Curves in Euclidean Space. *Amer. Math. Monthly*, **73**: 699-704.
- Izumiya, S. and Takeuchi, N. (2004). New Special Curves and Developable Surfaces. *Turk. J. Math.*, **28**: 153-163.
- Kazaz, M. and Önder, M. and Kocayiğit, H. and Kilic, O. (2008). B_2 -Slant Helix in Euclidean 4-Space $\mathbb{E}^4$. *Int. J. Contemp. Math. Sci.*, **3**(29): 1433-1440.
- Kula, L. and Ekmekçi, N. and Yaylı, Y. and İlarslan, K. (2009). Characterizations of Slant Helices in Euclidean 3-Space. *Turk. J. Math.*, **34**: 261-173.
- Kula, L. and Yaylı, Y. (2005). On Slant Helix and its Spherical Indicatrix, *Appl. Math. Comp.*, **169** (1): 600-607.
- Lopez, R. (2008). *Departamento de Geometria*, Topologia Universidad de Granada, 18071 Granada, Spain.
- Monterde, J. (2007). Curves with Constant Curvature Ratios, *Bull. Mexican Math. Soc. Ser. 3A*, **13**(1): 177-186.
- O'Neill, B. (1983). Semi-Riemannian Geometry, New York, *Academic Press*.

- Oral, and Özbey, E. (2009). A Study on Rectifying Curves in the Dual Lorentzian Space. *Bull. Korean Math. Soc.*, **46**(5): 967-978.
- Öztürk, G. and Arslan, K. and Hacısalihoğlu, H. H. (2008). A Characterizations of CCR Curves in $\mathbb{R}^m$. *Proc. Estonian Acad. Sci.*, **57**(4): 217-224.
- Petrovic - Torgasev, M. and Sucurovic, E. (2002). W-Curves in Minkowski Spacetime. *Novi. Sad. J. Math.*, **32**(2): 55-65.
- Sabuncuoğlu, A. (2006). Diferensiyel Geometri. NobelYayınları.
- Sağlam, D. and Kalkan, Ö. (2011). Some Characterizations of Slant Helices in Minkowski n-space $\mathbb{E}_v^n$. *Compres Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences Tome*, **64**, (2):173-184.
- Scofield, P. D. (1995). Curves of Constant Precessions. *Amer. Math. Monthly*, **102**: 531-537.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Serhat ÖZKAN

Doğum Yeri : Alaşehir

Doğum Tarihi : 01.01.1987

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Ahmet Altan Anadolu Lisesi, 2005

Lisans : Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi
Matematik Bölümü, 2010

Yüksek Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2012

Yayımları

1. "Slant Helices in Dual Lorentzian $\mathbb{D}_1^3$ " başlıklı makale yayına sunulmuştur.
2. "Mannheim Partner $\mathbb{D}$ -curves in Lorentzian $\mathbb{D}$ -space" başlıklı makale yayına sunulmuştur.