

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**AKTÜERYAL RİSK ANALİZİNDE EŞLENİKLERİN KULLANIMI ÜZERİNE
BİR ÇALIŞMA**

Esra AYDIN

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2012

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

AKTÜERYAL RİSK ANALİZİNDE EŞLENİKLERİN KULLANIMI ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Esra AYDIN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ömer L. GEBİZLİOĞLU

Bu çalışmada sıra istatistikleri ve eşlenikleri, kopulalar, iki değişkenli olasılık integral dönüşümü, Riske Maruz Değer (Value-at-Risk) ve bunun Sarmanov Dağılımlar ailesine uygulanması üzerinde durulmuştur.

Sıra istatistikleri, iki boyutlu dağılım fonksiyonları, kopulalar ve sıra istatistiklerinin eşlenikleri hakkında temel kavram ve teoremler verildikten sonra çalışmanın amacını oluşturan iki değişkenli olasılık integral dönüşümleri gösterilmiştir. Çok kullanılan risk ölçüm değerlerinden biri olan Riske Maruz Değer (Value-at-Risk)'den konuyla ilgili olarak kısaca bahsedilmiştir. Tüm bu kavram ve teoremler kullanılarak Sarmanov dağılımlar ailesi için gerekli uygulamalar yapılmıştır. Bu kapsamda bağımlılık yapıları da ele alınmış ve analitik sonuçlar sunulmuştur. Bu uygulamalar sonucunda tolerans aralıklarının belirlenmesine ve Riske Maruz Değer ile ilişkilendirilmesine yer verilmiştir.

Ocak 2012, 54 sayfa

Anahtar Kelimeler: İki Değişkenli Olasılık İntegral Dönüşümü, Kopula, Kuantiller, Riske Maruz Değer (Value-at-Risk), Sarmanov Dağılım Ailesi, Sıra İstatistikleri ve Eşlenikleri, Stokastik Sıralama, Tolerans Aralığı

ABSTRACT

Master Thesis

A STUDY ON THE USE OF CONCOMITANTS IN AKTUARIAL RISK ANALYSIS

Esra AYDIN

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Statistics

Supervisor: Prof. Dr. Ömer L. GEBİZLİOĞLU

In this study; order statistics and their concomitants, copulas, bivariate probability integral transform, Value-at-Risk (VaR) and Sarmanov Distribution Family are considered.

Basic concepts of order statistics and their concomitants, two dimensional distribution functions, copulas and the related theorems are given. Bivariate probability integral transforms, which sets the basis of the study, are shown. Value-at-Risk (VaR), as a risk measure, and quantiles of distributions are presented in conjunction with each other. All the basic concepts and teorems about the Sarmanov distributions, that are utilized in the thesis, are presented. In this regard; quantiles, VaR and tolerans intervals are investigated and some analytical results are presented.

January 2012, 54 pages

Key Words: Bivariate Probability Integral Transform, Copulas, Order Statistics and Their Concomitants, Quantiles, Sarmanov Distribution, Stochastic Ordering, Tolerance Intervals, Value-at-Risk (VaR)

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim boyunca bana bilimsel araştırma niteliği kazandıran, beni tez konumun yer aldığı alanda bilgi ve önerileriyle çalışmaya yönlendiren sevgili danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ömer L. GEBİZLİOĞLU'(Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı)'na minnetlerimi sunarım. Tezimin sonuçlanmasında yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Doç. Dr. Fatih TANK(Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı)'a teşekkür ederim.

Tez çalışmam süresince her zaman yanımda olan, tez alanımdaki bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşan, desteğini esirgemeyen sevgili Dr. Banu ALTINSOY' a içten teşekkürlerimi sunarım.

Bu süreçte manevi destekleriyle beni yalnız bırakmayan ve büyük sabır gösteren sevgili nişanım Yener ÜNAL'a ve destek ve fedakarlıkları için değerli aileme sonsuz sevgilerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	1
2. SIRA İSTATİSTİKLERİ VE DAĞILIMLARI	5
3. İKİ DEĞİŞKENLİ OLASILIK İNTEGRAL DÖNÜŞÜMLERİ.....	8
3.1 İki Boyutlu Dağılımlar ve Kopulalar	8
3.2 Dağılım Fonksiyonlarının Kopulaları	10
3.3 Kopulaların Kümesi Üzerinde Sıralama.....	13
3.4 Birlikteliğin Ölçüleri	16
4. SIRA İSTATİSTİKLERİNİN EŞLENİKLERİ	19
5. SIRA İSTATİSTİKLERİ VE EŞLENİKLERİNİN ORTAK DAĞILIMLARINA İKİ DEĞİŞKENLİ OLASILIK İNTEGRAL DÖNÜŞÜMLERİNİN UYGULANMASI.....	24
5.1 İki Değişkenli Olasılık İntegral Dönüşümleri için Örnekler.....	25
5.2 Yeni Genelleştirilmiş Sarmanov Dağılımlar Ailesi için Örnekler	28
6. İKİ DEĞİŞKENLİ OLASILIK İNTEGRAL DÖNÜŞÜMÜ KULLANARAK...36 DAĞILIMDAN BAĞIMSIZ KİTLE KUANTİLLERİ İÇİN GÜVEN.....36 ARALIKLARININ İFADE EDİLİŞİ.....36	36
6.1 Tolerans Limitleri ve Aralıkları	36
6.2 Kuantiller ve Güven Aralıkları.....	37

6.3 Yeni Genelleştirilmiş Sarmanov Dağılımlar Ailesi İçin Örnekler.....	40
7. BAĞIMLI RİSKLER İÇİN RİSKE MARUZ DEĞER (VaR)	45
7.1 İki Değişkenli Kuantiller, Kopulalar ve İki Bağımlı Risk için VaR	
Değerlendirmesi	47
8. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	49
KAYNAKLAR	50
ÖZGEÇMİŞ.....	54

SİMGELER DİZİNİ

R	Reel sayılar
$\bar{R}$	Genişletilmiş reel sayılar
$\bar{R}^2$	Genişletilmiş reel düzlem
I	Birim aralık
I^2	Birim kare
C	Kopula fonksiyonunun göstergesi
W	Frechet-Hoeffding alt sınır kopulası
M	Frechet-Hoeffding üst sınır kopulası
Π	Çarpım kopulası
μ_C	C kopulasının I^2 üzerindeki ölçüsü
δ_C	C kopulasının diagonal (köşegen) kısmı
$X_{r:n}$	r -inci sıra istatistiği
$Y_{[r:n]}$	r -inci sıra istatistiğinin eşleniği
$\prec$	Sıralama bağıntısı
$U_i(t)$	i -inci sıra istatistiğinin dağılım fonksiyonu
$U_{r:n}$	Uniform dağılımlı rasgele değişkenlerinin r -inci sıra istatistiği
$V_{[r:n]}$	r -inci sıra istatistiğinin eşleniği
FGM	Farlie-Gumbel-Morgenstern dağılımlar ailesi
VaR	Riske Maruz Değer (Value-at-Risk)

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1 Çeşitli bağımlılık sıralamaları arasındaki gerektirmeler.....	18
---	----

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1 $C_1, C_2 \in \{M, \Pi, W\}$ için $\langle C_1 C_2 \rangle$ 'nin dağılım fonksiyonları	12
--	----

1. GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Sıra istatistikleri istatistik teorisinin önemli kavramlarından biri olup, temel istatistik yöntemlerinde ve istatistiksel sonuç çıkarımında kullanılmaktadır. Sıra istatistiklerinin kullanım alanlarından biri de eşleniklerdir. Sıra istatistiklerinden elde edilen eşlenikler özellikle risk gruplaması, sıralama ve tahmin problemleri olmak üzere birçok uygulama alanında kullanılmaktadır.

Gerçek yaşamda yer alan etkenler ve değişkenler doğal yapıları gereği birbirinden bağımsız değildir. Bu bağımlılıktan dolayı olasılık dağılımlarını modellemek için çok değişkenli dağılımların kullanılması oldukça uygundur. Bu sahada ele alınan çok değişkenli dağılım modellerinden birisi olan Sarmanov dağılımlar ailesi literatürde ilk kez Sarmanov (1966) tarafından incelenmiştir (Yağcı 2002). Bu çalışmaların yarattığı zemin üzerine inşa edilmiş diğer çok değerli çalışmalar mevcuttur. Ayrıca, çok değişkenli dağılımlarda sıra istatistikleri ve eşleniklerinin ortak dağılımlarını karakterize etme problemi istatistik bilimi açısından hem kuram hem de uygulama yönleriyle bir değer taşımakta olup risk, aktüerya, finans, tıp, biyoloji, jeoloji, hidroloji, ekonomi, ziraat gibi pek çok uygulama alanında çözümleyici ve sonuç çıkarıcı yaklaşımlara dayanak oluşturmaktadır.

Çok değişkenli dağılımlarda dağılıma konu olan değişkenler arasındaki bağımlılık yapısının ortaya konulmasında “kopula” kavramı son yıllarda istatistik literatüründe sıkça kullanılmaktadır. Rastgele değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını ortaya koyan kopulalar, tek değişkenli marjinalleri $[0;1]$ aralığı üzerinde düzgün dağılıma bağlarken, çok değişkenli dağılımları kendi tek değişkenli marjinallerine bağlayan fonksiyonlardır. İki değişkenli olasılık integral dönüşümleri yapılırken, bu dönüşümü kopula ile ifade etmek işlemleri daha da kolaylaştırmaktadır.

İki değişkenli olasılık integral dönüşümleri ve dağılım fonksiyonlarının kopulaları ile ilgili literatürde yer alan önemli çalışmalar; Nelsen vd. (2001), Bairamov ve Kotz (2002), Rodriguez-Lallena, Jose A. ve Ubeda-Flores M. (2003) 'in çalışmalarıdır.

Aktüerya biliminde, risk yönetiminde bağımlılığı modelleme konusu doğal risk niceliklerinden dolayı son yıllarda artan bir önem kazanmıştır. Kayıp miktarları gibi birçok sigorta portföyünün içinde ya da arasında bağımlılık söz konusudur. Bu tip bağımlı riskleri modelleme çalışmalarında; yükümlülük ve uygun fiyatlama (prim hesapları) meseleleri için bir sigorta risk yönetimi planlaması anlamlı risk ölçümlerinin kullanılmasını gerektirmektedir.

Bağımlı risklerin dağılımlarının kuantilleri, birçok risk ölçüsü için bağımlı riskleri modellemek amacıyla kullanılarak dağılımlar temelinde esas değerleri oluşturur. Kopulalar, bağımlılığın modellenmesinde, risk niceliklerinin ortak dağılımlarını bağımlılık yapısı ve marjinal davranışı olarak ifade etme özelliğine sahip olduğundan kullanışlı bir matematiksel araçtır. Denuit vd. (2005) tarafından yapılan bir çalışmada, yeni ve kontrol edilebilir sigorta alanı teorisindeki risk ölçümleri ve kopulalar açısından bağımlı aktüeryal risk modelleri ile uygulamalar sunulmuştur. Ayrıca Joe (1997) ve Mari ve Kotz (2001)' un çalışmalarında; bağımlılık, korelasyon ve çok değişkenli modelleme hakkında açık ve oldukça geniş bir istatistiksel bakış açısı sunulmaktadır.

Genel terimlerle, bazı risk ölçümleri, kuantiller, olasılık integral dönüşümleri ve kopulalar arasında kavramsal ve analitik bir ilişki mevcuttur. Kuantiller; olasılık dağılımlarının genelleştirilmiş tersi olarak tanımlanır ve risk yönetimi pratiğinde Riske Maruz Değer (VaR) risk ölçüsü bakımından esaslı oluşturur. Chen ve Welsh (2002), tek değişkenli kuantiller, iki değişkenli kuantiller ve çok değişkenli kuantillerin genelleştirilmeleri tanımlamak için iki değişkenli dağılım fonksiyonlarını kullanmışlardır. Bağımlı risklerin bazı fonksiyonlarını alarak; bazı risk yönetimi problemleri bakımından teknik enstrümanlar olarak kopulaların kullanımı ile bir p -kuantil risk ölçüsü olan VaR risk ölçümü için sınırlar ortaya konulabilmektedir (Embrechts vd. (2003)). Rüschendorf (2005) tarafından yapılan çalışma bazı risk fonksiyonlarının üzerinde bağımlılığın etkisinin sınırlandırılması hakkında ayrıntı genişlemelerini önermektedir.

Embrechts vd. (2005)' un yapmış oldukları çalışmada; kopula teorisi kullanılarak VaR' a dayandırılan risk yönetimi için mümkün en kötü senaryolar ve ko-monotonluğu destekleyen alternatif bir yaklaşım üzerinde durulmuştur.

Bedford (2006) tarafından yapılan çalışmada risk problemlerini hesaplamada kullanılan kuantil testlerinden bahsetmiş ve kopulaları kullanarak engelleyici ödeme yükümlülüğünün etkililiğini anlamada ek bir araç önererek, güvenilirlik alanı içinde risk hesaplamasının önemli bir örneğini vermiştir.

Gebizlioğlu ve Kızılok (2007) bir portföydeki mevcut riskleri açıklamak için iki adımlı yaklaşımı ile iki değişkenli bir model önermişlerdir. İlk adımı risk faktörlerinin marjinal dağılımlarının belirlenmesi, ikinci adımı ise bir kopula fonksiyonu aracılığı ile risklerin ortak dağılımlarının belirlenmesi işlemleri oluşturmaktadır. Ayrıca kopula fonksiyonundan, Koşullu Riske Maruz Değer (CVaR, Conditional Value-at-Risk) ölçüsü çıkarılmış ve bu temel üzerinde, en uygun portföyün seçimi problemi için bir uygun optimizasyon yöntemi önerilmiştir.

Fernandez (2008) sigortacılıkta bilanço gelirlerinde bağımlılık yapısının ölçülerini kopula teorisi temellinde irdelemiş ve bu bakışla kuyruk bağımlılığı, VaR ve beklenen bakiye hesapları ortaya koymuştur.

Denneberg ve Leufer (2008) stokastik değişimlilik (volatility) ve bağımlılık parametreleri üzerine yaptıkları çalışmada ikili değişimlilik ve bağımlılık parametresi ile ilgilenmişler ve yapılan diğer çalışmalarda olduğu gibi kopula fonksiyonları kullanmışlardır.

Gebizlioğlu ve Yagcı (2008) iki değişkenli riskler ve risk ölçümlerinin kuantilleri için kopula fonksiyonları yardımıyla güven aralıkları oluşturmuşlardır. Ayrıca aktueryal risk yönetiminin önemli ölçüm araçlarından VaR' ı ele alarak tolerans aralıkları konusunda özgün ve önemli kuramsal bulgular ortaya koymuşlardır.

Tezin bölümleri şöyle oluşturulmuştur: İkinci Bölümde sıra istatistikleri ve dağılımları hakkında temel kavram ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü Bölümde Nelsen vd. (2001)' un çalışmalarına bağlı kalınarak, kopula kavramı hakkında genel bilgiler verilmiş ve iki değişkenli olasılık integral dönüşümleri ile ilgili

teoremler ve sonuçlarından bahsedilmiştir. Bu bölümde ayrıca birlikteliğin ölçüleri konusu da ele alınmıştır.

Dördüncü Bölümde, sıra istatistiklerinin eşleniklerinin dağılımları teorisi ele alınmıştır. Sıra istatistiklerinin eşleniklerinin dağılımları ve ortak dağılımlarının elde edilmesinde kullanılan temel teoremler verilmiştir.

Çalışmanın temel amacını oluşturan Beşinci Bölümde, sıra istatistikleri ve eşleniklerine iki değişkenli olasılık integral dönüşümlerinin uygulanması gösterilmiş, minimum, maksimum ve çarpım kopulaları kullanılarak Sarmanov dağılımlar ailesi üzerine analitik yapılar oluşturulmuştur.

Altıncı Bölüm; çalışmanın diğer özgün sonuçlarını oluşturmaktadır. Bu bölümde, iki değişkenli olasılık integral dönüşümleri kullanılarak kuantiller için tolerans aralıklarının kurulumu gerçekleştirilmiş ve Sarmanov dağılımlar ailesi için tolerans aralıkları üzerine özgün örnekler verilmiştir.

Yedinci Bölümde, Gebizlioğlu ve Yağcı (2008) tarafından FGM için yapılan çalışmadan yola çıkarak Sarmanov dağılım ailesi için VaR (Riske Maruz Değer)' ın ifade edilmesi ve ileride yapılabilecek çalışmalar konusunda önerilerde bulunmaktadır.

2. SIRA İSTATİSTİKLERİ VE DAĞILIMLARI

$X_1, X_2, \dots, X_n$, birbirinden bağımsız ve aynı $F(x)$ dağılım fonksiyonuna sahip n birimlik bir örneklem olmak üzere $X_{r:n}$ ($1 \leq r \leq n$) ile bu örneklem r-inci en küçük değeri gösterilsin. Bu durumda, bu örneklem sıra istatistikleri $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ şeklinde ifade edilir ve $X_{r:n}$ 'ye r-inci sıra istatistiği denir. r-inci sıra istatistiği olan $X_{r:n}$ 'nin dağılım fonksiyonu,

$$F_r(x) = P\{X_{r:n} \leq x\} = \sum_{i=r}^n \binom{n}{i} [F(x)]^i [1-F(x)]^{n-i} \quad , \quad 1 \leq r \leq n \quad (2.1)$$

biçiminde verilmektedir.

$1 \leq r < s \leq n$ için r-inci ve s-inci sıra istatistiklerinin ortak dağılım fonksiyonu ;

$$\begin{aligned} F_{r,s}(x,y) &= P\{X_{r:n} \leq x, X_{s:n} \leq y\} \\ &= \sum_{i=r}^n \sum_{j=\max(0,s-i)}^n \frac{n!}{i! j! (n-i-j)!} F(x)^i (F(y)-F(x))^j (1-F(y))^{n-i-j} \quad x < y, \quad 1 \leq r < s \leq n \end{aligned} \quad (2.2)$$

$F(x)$ dağılım fonksiyonu mutlak sürekli olup $f(x)$ gibi bir olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olması durumunda r-inci sıra istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_r(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} [F(x)]^{r-1} [1-F(x)]^{n-r} f(x) \quad -\infty < x < \infty \quad , \quad 1 \leq r \leq n \quad (2.3)$$

$1 \leq r < s \leq n$ için r-inci ve s-inci sıra istatistiklerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\begin{aligned} f_{r,s}(x,y) &= \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} \times [F(x)]^{r-1} [F(y)-F(x)]^{s-r-1} [1-F(y)]^{n-s} f(x) f(y) \\ &\quad -\infty < x < y < \infty \quad , \quad 1 \leq r < s \leq n \end{aligned} \quad (2.4)$$

dir. $1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_k \leq n$ ($1 \leq k \leq n$) için, $X_{r_1:n}, X_{r_2:n}, \dots, X_{r_k:n}$ 'nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{r_1, r_2, \dots, r_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{n!}{(r_1 - 1)!(r_2 - r_1 - 1)! \dots (n - r_k)!} \times [F(x_1)]^{r_1 - 1} [F(x_2) - F(x_1)]^{r_2 - r_1 - 1} \dots [1 - F(x_k)] \times f(x_1)f(x_2) \dots f(x_k) \quad -\infty < x_1 < x_2 < \dots < x_k < \infty \quad (2.5)$$

olarak elde edilir. Burada $x_0 = -\infty$, $x_{k+1} = +\infty$, $r_0 = 0$ ve $r_{k+1} = n+1$ olarak alınması durumunda

$$f_{r_1, r_2, \dots, r_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) = n! \prod_{i=0}^k \left[\frac{[F(x_{i+1}) - F(x_i)]^{r_{i+1} - r_i - 1}}{(r_{i+1} - r_i - 1)!} \right] \left[\prod_{i=1}^k f(x_i) \right] \quad (2.6)$$

olmaktadır. Ayrıca $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$ rasgele değişkenlerinin (n tane sıra istatistiğinin) ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{1, 2, \dots, n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = n! f(x_1)f(x_2) \dots f(x_n) \quad -\infty < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \infty \quad (2.7)$$

olarak verilir (David ve Nagaraja 2003).

Teorem 2.1. X rasgele değişkeni için, $F(x)$ mutlak sürekli keyfi bir dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu ise $f(x)$ olsun. $S(r, n)$ ' lerin sonlu kümesi olmak üzere

$$\sum_S \alpha_{r,n} f_{r:n}(x) = 0, \quad \forall x \in R \quad (2.8)$$

lineer ilişkisi vardır. (Balasubramanian ve Beg 1997).

Teorem 2.2. $X_1, X_2, \dots, X_n$, birbirinden bağımsız ve aynı $F(x)$ dağılım fonksiyonuna sahip n birimlik bir örneklem olsun. Sırasıyla $F_{r:n}(x)$ ile r -inci sıra istatistiğinin dağılım

fonksiyonu, $f_{r:n}(x)$ ile olasılık yoğunluk fonksiyonu, $\mu_{r:n}^k$ ile k-ıncı momenti ve $M_{r:n}(t)$ ile moment çıkaran fonksiyonu gösterilsin. O zaman,

$$F_{r:n}(x) = \sum_{i=n-r+1}^n (-1)^{i-n+r-1} \binom{i-1}{n-r} \binom{n}{i} F_{l:i}(x) \quad (2.9)$$

$$f_{r:n}(x) = \sum_{i=n-r+1}^n (-1)^{i-n+r-1} \binom{i-1}{n-r} \binom{n}{i} f_{l:i}(x) \quad (2.10)$$

$$\mu_{r:n}^k = \sum_{i=n-r+1}^n (-1)^{i-n+r-1} \binom{i-1}{n-r} \binom{n}{i} \mu_{l:i}^k \quad (2.11)$$

ve

$$M_{r:n}(t) = \sum_{i=n-r+1}^n (-1)^{i-n+r-1} \binom{i-1}{n-r} \binom{n}{i} M_{l:i}(t) \quad (2.12)$$

dir (David ve Nagaraja 2003).

3. İKİ DEĞİŞKENLİ OLASILIK İNTEGRAL DÖNÜŞÜMLERİ

3.1 İki Boyutlu Dağılımlar ve Kopulalar

R ile $(-\infty, +\infty)$ aralığındaki gerçel sayılar kümesi, $\bar{R}$ ile ise bu aralıktaki genişletilmiş gerçel sayılar kümesi gösterilsin. Bu durumda, $\bar{R}^2 = \bar{R} \times \bar{R}$ genişletilmiş gerçel düzlemdir. $\bar{R}^2$ ’deki bir dikdörtgen; iki kapalı aralığın kartezyen çarpımı B ile gösterilirse, bu durumda $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ ’dir. Burada $(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2)$ noktaları köşegen noktalardır. Birim kare I^2 , $I = [0, 1]$ ’in kartezyen çarpımı olan $I \times I$ ’dır. Bir 2-boyutlu gerçel fonksiyon H , tanım kümesi $\bar{R}^2$ ’nin bir altkümesi olan $DomH$ ve değer kümesi R ’nin bir alt kümesi olan $RanH$ şeklinde tanımlanan bir fonksiyondur.

Tanım 3.1 S_1 ve S_2 $\bar{R}$ ’nin boş olmayan altkümeleri ve H ise tanım kümesi $DomH = S_1 \times S_2$ olan bir fonksiyon olsun. $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ tüm köşegen noktaları $DomH$ ’de olan bir dikdörtgen olsun. Bu durumda B ’nin H -hacmi

$$V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1) \quad (3.1)$$

biçiminde verilebilir (Nelsen, 1999)

Aynı zamanda, B dikdörtgeni üzerindeki H ’nin birinci dereceden farkları aşağıdaki gibi verilirse $V_H(B)$ ’ye, B dikdörtgenin H -hacmi denir:

$$\Delta_{x_1}^{x_2} H(x, y) = H(x_2, y) - H(x_1, y)$$

$$\Delta_{y_1}^{y_2} H(x, y) = H(x, y_2) - H(x, y_1).$$

O halde; B dikdörtgenin H -hacmi, H ’nin B üzerindeki ikinci dereceden farkı olacaktır:

$$V_H(B) = \Delta_{x_1}^{x_2} \Delta_{y_1}^{y_2} H(x, y)$$

Tanım 3.2 Eğer köşegen noktaları $DomH$ ' de olan tüm B dikdörtgenleri için $V_H(B) \geq 0$ ise, H 2-boyutlu gerçel fonksiyonuna 2-artandır denir (Nelsen 1999).

X , F dağılım fonksiyonlu sürekli bir rasgele değişken olduğunda $U = F(X)$ rasgele değişkeni (X 'in olasılık integral dönüşümü) $I = [0,1]$ aralığında düzgün dağılıma sahip olup ya da $P(F(X) \leq t) = t$, $t \in [0,1]$ biçiminde yazılır. İki boyut için aynı durum göz önüne alındığında; X ve Y , sırasıyla F ve G dağılım fonksiyonlu rasgele değişkenler olmak üzere H_1 ve H_2 , tek değişkenli marjinalleri F ve G olan iki değişkenli dağılım fonksiyonları olsun. H_1 ve H_2 için ortak marjinallere kısıtlama yapmak, X ve Y ' nin tek değişkenli olasılık integral dönüşümüne bağlı olmasını garantileyecektir. Bu durumda $H_1(X, Y)$ tek boyutlu bir rasgele değişken olacaktır. Eğer X ve Y ' nin ortak dağılım fonksiyonu H_2 ise $H_1(X, Y)$ ' nin dağılım fonksiyonu hakkında ne söylenebileceği sorusunu cevaplamak için ilk olarak sürekli iki değişkenli dağılım fonksiyonlarının kümesi üzerinde sıralamaya gitmek ve ikinci olarak rank korelasyon katsayıları (Spearman rho' su, Kendall tau' su, Gini katsayısı ve Spearman footrule-kuralı) dağılım fonksiyonları bakımından özlü olarak ifade edilmelidir (Nelsen vd. 2001).

Tanım 3.3 Kopula, aşağıdaki özelliklere sahip I^2 'den I ' ya bir C fonksiyonudur:

(i) I 'daki her u ve v için,

$$C(u, 0) = 0 = C(0, v) \quad (3.2)$$

ve

$$C(u, 1) = u \text{ ve } C(1, v) = v; \quad (3.3)$$

(ii) $u_1 \leq u_2$ ve $v_1 \leq v_2$ olmak üzere I 'daki her u_1, u_2, v_1, v_2 için,

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0 \quad (3.4)$$

şeklinde olmalıdır (Nelsen 1999).

Kopulaların, bileşik ve marjinal dağılımları ilişkilendiren özelliği aşağıdaki teoremle belirtilmiştir:

Teorem 3.1 (Sklar'ın Teoremi) H fonksiyonu F ve G marjinal dağılımlı bir ortak dağılım fonksiyonu olsun. O zaman öyle bir C kopulası mevcuttur ki $\bar{R} = [-\infty, +\infty]$ 'daki bütün x ve y 'ler için,

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)) \quad (3.5)$$

dır (Sklar 1959).

Eğer F ve G sürekli ise, C tektir; diğer durumda $RanF \times RanG$ üzerinde tek olarak belirlenir. Burada $RanF$ ve $RanG$, R 'nin altkümeleri olan değer kümeleridir. Diğer taraftan, eğer C bir kopula ve F ve G dağılım fonksiyonları ise (3.5) ile verilen H, F ve G marjinal dağılımlı bir ortak dağılım fonksiyonudur (Nelsen 1999).

3.2 Dağılım Fonksiyonlarının Kopulaları

M ve W , sırasıyla Frechet-Hoeffding üst ve alt sınır kopulaları olmak üzere, herhangi bir C kopulası

$$W(u, v) = \max(u + v - 1, 0) \leq C(u, v) \leq \min(u, v) = M(u, v) \quad (3.6)$$

eşitsizliği sağlamaktadır.

Sürekli X ve Y rasgele değişkenleri için, ancak ve ancak kopulaları $M(W)$ ise X ve Y 'nin her biri diğerinin hemen hemen her yerde artan (azalan) bir fonksiyonudur. Bağımsız sürekli rasgele değişkenlerin kopulası $\Pi(u, v) = uv$ 'dir. X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu $df(X)$ yada F harfiyle ifade edilecektir. $X \leq_{st} Y \Leftrightarrow df(X) \geq df(Y)$ dir. Burada " $\leq_{st}$ " stokastik eşitsizliği göstermektedir. μ_H iki değişkenli dağılım fonksiyonu H 'nin R^2 üzerindeki ölçüsünü, benzer biçimde

μ_C 'de C kopulasının I^2 üzerindeki ölçüsünü gösterecektir. Son olarak, δ_C , $\delta_C(t) = C(t,t)$ olarak verilen C 'nin diagonal (köşegen) kısmıdır.

Tanım 3.4 H_1 ve H_2 , ortak F ve G sürekli marjinal dağılım fonksiyonlu iki değişkenli dağılım fonksiyonları olsun. X ve Y 'nin ortak dağılım fonksiyonları H_2 olmak üzere, $\langle H_1|H_2 \rangle(X,Y)$ $H_1(X,Y)$ rasgele değişkenini gösterebilir. H_1 'in dağılım fonksiyonu H_2 , yani $df(\langle H_1|H_2 \rangle(X,Y))$ (kısaca $(H_1|H_2)$ ile gösterilsin) aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$(H_1|H_2)(t) = \Pr[\langle H_1|H_2 \rangle(X,Y) \leq t] = \mu_{H_2}(\{(x,y) \in R^2 | H_1(X,Y) \leq t\}), \quad t \in I \quad (3.7)$$

Kopulalar, Düzgün $[0,1]$ dağılımına sahip marjinal dağılımları olan iki değişkenli dağılım fonksiyonu olduğundan aynı tanım kopulalar için yazılabilir. Bu durumda, eğer C_1 ve C_2 herhangi iki kopula ve U, V ortak dağılım fonksiyonları C_2 olan düzgün $[0,1]$ rasgele değişkenler ise o zaman $\langle C_1|C_2 \rangle(U,V)$ $C_1(U,V)$ rasgele değişkenini gösterir ve C_1 'in dağılım fonksiyonu C_2

$$(C_1|C_2)(t) = \Pr[\langle C_1|C_2 \rangle(U,V) \leq t] = \mu_{C_2}(\{(u,v) \in I^2 | C_1(U,V) \leq t\}), \quad t \in I \quad (3.8)$$

biçiminde verilir (Nelsen *et. al.* 2001).

Teorem 3.2 (Nelsen vd.. 2001) H_1, H_2, F, G, X ve Y Tanım 3.4'deki gibi olsun, C_1 ve C_2 H_1 ve H_2 'ye karşılık gelen kopulalar olmak üzere;

$$(H_1|H_2) = (C_1|C_2) \quad (3.9)$$

dır.

$\langle C_1|C_2 \rangle$ için dağılım fonksiyonu aşağıdaki çizelge 3.1' de gösterilmiştir.

Çizelge 3.1 $C_1, C_2 \in \{M, \Pi, W\}$ için $\langle C_1|C_2 \rangle$ 'nin dağılım fonksiyonları (Nelsen vd. 2001)

$C_2 \backslash C_1$	M	Π	W
M	t	$2t - t^2$	$\min(2t, 1)$
Π	$\sqrt{t}$	$t - t \ln t$	$1 - \sqrt{\max(0, 1 - 4t)}$
W	$(1+t)/2$	$1 - (1-t)^2/2$	1

İspat. $t \in I$ için,

$$\begin{aligned}
 (H_1|H_2)(t) &= \mu_{H_2}(\{(x, y) \in R^2 | H_1(X, Y) \leq t\}) = \mu_{H_2}(\{(x, y) \in R^2 | C_1(F(x), G(y)) \leq t\}), \\
 &= \mu_{C_2}(\{(u, v) \in I^2 | C_1(U, V) \leq t\}) = (C_1|C_2)(t),
 \end{aligned}$$

$u = F(x)$, $v = G(y)$ dönüşümü yoluyla elde edilir.

Bunun anlamı, X ve Y 'nin kesin sürekli dönüşümleri altında değişmezliğin sağlanmasıyla H_1 'in dağılım fonksiyonu H_2 , C_1 'in dağılım fonksiyonu C_2 'ye benzerdir.

Örnek 3.1 M , Π ve W 'nun dağılım fonksiyonu M , Π ve W (3.8) 'den hesaplanıp Çizelge 3.1'de gösterilmektedir ($t \in I$ için).

Bu durumda örneğin, $\langle M|M \rangle$ I ’da düzgün dağılıma $\langle M|II \rangle$ $\alpha = 1, \beta = 2$ parametreli beta dağılımına, $\langle M|W \rangle$ $[0,1/2]$ ’de düzgün dağılıma, $\langle II|M \rangle$ $\alpha = 1/2, \beta = 1$ parametreli beta dağılımına sahiptirler.

Örnek 3.2 U ve V ortak dağılım fonksiyonları C olan düzgün $[0,1]$ dağılıma sahip rasgele değişkenler olsun. $\delta_C(t) = C(t,t)$ köşegen kopula olmak üzere kolaylıkla $t \in I$ için $(M|C)(t) = 2t - \delta_C(t)$ olduğu gösterilebilir ve bu nedenle U ve V ’nin sıra istatistiklerinin dağılım fonksiyonları M ’nin C dağılımına göre ifade edilebilir:

$$df(\min(U,V))(t) = 2t - \delta_C(t) = (M|C)(t),$$

$$df(\max(U,V))(t) = \delta_C(t) = 2t - (M|C)(t)$$

biçiminde ifade edilebilir.

Ayrıca $(C|M)(t) = \delta_C^{(-1)}(t)$ ’dir; burada $\delta_C^{(-1)}$, δ_C ’nin sağdan sürekli “yarı-tersi”dir, yani $t \in I$ için $\delta_C^{(-1)}(t) = \sup\{u | \delta_C(u) \leq t\}$ ’dir.

3.3 Kopulaların Kümesi Üzerinde Sıralama

Kopulaların kümesi üzerinde sıralama bağıntısı kurmak için kopulaların dağılım fonksiyonu kullanılacaktır. Bu işlem, Sklar’ın teoremi yardımıyla sürekli rasgele değişkenlerin iki değişkenli dağılım fonksiyonlarının kümesi üzerinde yapılacaktır.

Tanım 3.5 C , C_1 ve C_2 kopula olsun. Bu durumda,

1. Eğer $\langle C_1|C_1 \rangle \geq_{st} \langle C_2|C_2 \rangle$ ise C_1 C_2 ’den *df-larger*’dir.

2. Eğer $\langle C_1|C \rangle \geq_{st} \langle C_2|C \rangle$ ise C_1 C_2 'den C -larger' dır.

Burada df -larger dağılımda daha geniş, C -larger C kopulasına göre daha geniş anlamında kullanılmıştır.

df -larger Caperaa et al tarafından 1997'de önerilmiştir. Kopulalar için iyi bilinen sıralama konkordant (concordance) sıralamadır: Eğer I^2 'de $C_1 \geq C_2$ ise C_1 C_2 'den daha konkordanttır denir ve $C_1 \succ C_2$ şeklinde gösterilir.

Teorem 3.3 (Nelsen vd. 2001) C_1 ve C_2 kopula olsun. Bu durumda $C_1 \succ C_2$ 'dir ancak ve ancak C_1 C_2 'den her C kopulası için C -larger ise.

İspat. Öncelikle $C_1 \geq C_2$ olduğu varsayalım. I 'daki tüm t 'ler için:

$$\{(u, v) \in I^2 | C_1(u, v) \leq t\} \subseteq \{(u, v) \in I^2 | C_2(u, v) \leq t\}$$

ve buradan

$$\mu_C \left(\{(u, v) \in I^2 | C_1(u, v) \leq t\} \right) \leq \mu_C \left(\{(u, v) \in I^2 | C_2(u, v) \leq t\} \right)$$

(her C kopulası için). Bu nedenle $(C_1|C) \leq (C_2|C)$ 'dir, yani $\langle C_1|C \rangle \geq_{st} \langle C_2|C \rangle$ ' dir.

I^2 'de $t_1 = C_1(a, b) < C_2(a, b) = t_2$ ve $t = \frac{t_1 + t_2}{2}$ olacak şekilde bir (a, b) noktası olduğu varsayalım. $(C_1|C)(t) > (C_2|C)(t)$ özelliğine sahip bir C kopulası ele alınsın; öyle ki C_1 C_2 'den C -larger olmaz. Varsayalımki $a \leq b$ 'dir ($a \geq b$ durumu benzerdir). I^2 'de 3 çizgi segmentleri (parçaları) üzerinde olasılık yoğunluğu normal dağılımlı olan bir C

kopulası göz önüne alınsın, L_1 $(0,0)$ 'dan $((t+a)/2, (t+a)/2)$ 'ye, L_2 $((t+a)/2, (t-a+2b)/2)$ 'den $(a-b+1,1)$ 'e ve L_3 $(a-b+1, (t-a+2b)/2)$ 'den $(1, (t+a)/2)$ 'ye olsun. $(a,b) \in L_2$ olduğuna dikkat edilirse, $S_1 = \{(u,v) \in I^2 | C_1(u,v) \leq t\}$ ve $S_2 = \{(u,v) \in I^2 | C_2(u,v) \leq t\}$ olsun. O zaman $(a,b) \in \text{int}(S_1) \cap S_2^c$ ve $\mu_C(S_2) < \mu_C([0,a] \times [0,b]) = a < \mu_C(S_1)$ 'dir, öyle ki $(C_1|C)(t) > (C_2|C)(t)$ demektir. Bu sonuç ile ispat tamamlanmaktadır.

Teorem 3.3' ün bir sonucu olarak, tüm C ' ler için, C_1 'in C_2 'den C -larger olarak C_1 ve C_2 sıralaması çok güçlü bir gerekli koşuldur ve konkordant sıralamaya denktir.

Örnek 3.3 “ M -larger” sıralama. $i = 1, 2$ için U_i ve V_i C_i kopulalı $U(0,1)$ dağılımına sahip rasgele değişkenler olsunlar. Bu durumda

$$\begin{aligned}
C_1 \text{ } C_2 \text{ 'den } M\text{-larger'dır} &\Leftrightarrow \langle C_1 | M \rangle \geq_{st} \langle C_2 | M \rangle \\
&\Leftrightarrow (C_1 | M) \leq (C_2 | M) \Leftrightarrow \delta_{C_1}^{(-1)} \leq \delta_{C_2}^{(-1)} \Leftrightarrow \delta_{C_1} \geq \delta_{C_2} \\
&\Leftrightarrow df(\max(U_1, V_1)) \geq df(\max(U_2, V_2)) \\
&\text{ve } df(\min(U_1, V_1)) \leq df(\min(U_2, V_2)) \\
&\Leftrightarrow \min(U_2, V_2) \leq_{st} \min(U_1, V_1) \leq_{st} \max(U_1, V_1) \leq_{st} \max(U_2, V_2)
\end{aligned}$$

Bunun anlamı; ancak ve ancak U_1 ve V_1 'in sıra istatistikleri, U_2 ve V_2 'nin sıra istatistikleri tarafından belirlenen aralığın içinde yer alıyorsa C_1 C_2 'den M -larger'dır.

3.4 Birlikteliğin Ölçüleri

Birlikteliğin bazı ölçüleri konkordant ve diskonkordant ifadelerine bağlıdır. Eğer $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0$ ise, reel sayıların (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) sıralı iki çifti konkordant ve eğer $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0$ ise diskonkordant olarak adlandırılır. Bu bölümdeki konkordant ve diskonkordantın olasılıkları üzerine bağlı olan birliktelik ölçüleri ve kopulaların dağılım fonksiyonları arasındaki temel ilişki açıklamaları Nelsen *et. al.* (2001)' un çalışmalarından yararlanılarak sunulmuş olup, ilgili kuramsal temel aşağıdaki teoremden belirtilmektedir.

Teorem 3.4 (Nelsen vd. 2001) (X_1, Y_1) ve (X_2, Y_2) sırasıyla H_1 ve H_2 ortak dağılım fonksiyonlu, ortak F marjinal dağılım fonksiyonlu (X_1 ve X_2 'nin) ve ortak G marjinal dağılım fonksiyonlu (Y_1 ve Y_2 'nin) sürekli rasgele değişkenlerin rasgele vektörleri olsunlar. C_1 ve C_2 sırasıyla (X_1, Y_1) ve (X_2, Y_2) 'nin kopulalarını gösterebilir. Q (X_1, Y_1) ve (X_2, Y_2) 'nin konkordant ve diskonkordantlarının olasılıkları arasındaki farkı gösterebilir, yani:

$$Q = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]. \quad (3.10)$$

O zaman Q C_1 ve C_2 'nin bir fonksiyonudur ve

$$Q = Q(C_1, C_2) = 3 - 4 \int_0^1 (C_1|C_2)(t) dt = 3 - 4 \int_0^1 (C_2|C_1)(t) dt \quad (3.11)$$

şeklinde verilir.

İspat. Nelsen (1999)' in sunduğu ve yayında ifade edilen Teorem 5.1.1'de

$$Q = Q(C_1, C_2) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C_1(u, v) dC_2(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 \int_0^1 C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1 \quad (3.12)$$

ifadesi, denk bir ifade olarak,

$$Q = 4E\left((C_1|C_2)(U_2, V_2)\right) - I = 4E\left((C_2|C_1)(U_1, V_1)\right) - I \quad (3.13)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $U_i = F(X_i)$ ve $V_i = G(Y_i)$ $i = 1, 2$ 'dir. Fakat, eğer T I 'da bir rasgele değişken ve dağılım fonksiyonu $K(t)$ ise, o zaman $E(T) = I - \int_0^I K(t)dt$ 'dir.

Sonuç olarak şu söylenebilir ki; X ve Y C kopulalı sürekli rasgele değişken olsun ve τ_C, ρ_C, γ_C ve φ_C sırasıyla Kendall'ın τ 'sunun, Spearman'ın ρ 'sunun, Gini'nin γ 'sının ve Spearman'ın footrule φ 'sinin kitle versiyonu olsun; bu takdirde

$$1. \tau_C = Q(C, C) = 3 - 4 \int_0^I (C|C)(t)dt$$

$$2. \rho_C = 3Q(C, \Pi) = 9 - 12 \int_0^I (C|\Pi)(t)dt$$

$$3. \gamma_C = 2Q(C, A) = 6 - 8 \int_0^I (C|A)(t)dt$$

$$4. \varphi_C = \frac{3}{2}Q(C, M) - \frac{I}{2} = 4 - 6 \int_0^I (C|M)(t)dt$$

saptamaları yapılır. Burada $A = (M + W)/2$ 'dir.

Kendall'ın τ 'su ve $(C|C)$ 'nin arasındaki ilişki Caperaa vd. (1997) tarafından verilmiştir. Burada $(C|C)$ Kendall'ın τ 'sunun bir analizi olarak önerilmiştir (Genest ve Rivest 1993). Spearman'ın ρ 'su ve $(C|\Pi)$ arasındaki benzer ilişki Garralda Guillem (1997) tarafından verilmiştir. Diğer birliktelik ölçüleri, kopulaların diğer dağılım fonksiyonlarından kolayca oluşturulabilir.

C_1, C_2 kopula ve $\tau_1, \tau_2, \rho_1, \rho_2, \gamma_1, \gamma_2, \varphi_1, \varphi_2$ sırası ile Kendall'ın τ 'su, Spearman'ın ρ 'su, Gini'nin γ 'sı ve Spearman'ın footrule φ 'sine uygun değerler olsun. O zaman, aşağıda Şekil 3.1' de gösterilen gerektirmeler dağılım fonksiyonlarının kopulaları ve birliktelik ölçüsüne bağlı sıralamalardır ve bunlar Tanım 3.5 ve yukarıdaki sonuç 1-4' ten elde edilir:

$$\begin{array}{c}
\langle C_1 | C_1 \rangle \leq_{st} \langle C_2 | C_2 \rangle \Rightarrow \tau_1 \leq \tau_2 \\
\uparrow \\
\begin{array}{l}
\Box \quad \langle C_1 | \Pi \rangle \leq_{st} \langle C_2 | \Pi \rangle \Rightarrow \rho_1 \leq \rho_2 \\
C_1 \prec C_2 \Leftrightarrow \left[\forall C, \langle C_1 | C \rangle \leq_{st} \langle C_2 | C \rangle \right] \rightarrow \langle C_1 | A \rangle \leq_{st} \langle C_2 | A \rangle \Rightarrow \gamma_1 \leq \gamma_2 \\
\Box \quad \langle C_1 | M \rangle \leq_{st} \langle C_2 | M \rangle \Rightarrow \varphi_1 \leq \varphi_2
\end{array}
\end{array}$$

Şekil 3.1 Çeşitli bağımlılık sıralamaları arasındaki gerektirmeler

C_1 ve C_2 ’nin konkordant sıralaması ($C_1 \prec C_2$) arasındaki gerektirmelerin dört birliktelik ölçüsüne uygun sıralamayı gerektirdiği iyi bilinmektedir; bu demektir ki $\tau_1 \leq \tau_2$, $\rho_1 \leq \rho_2$, $\gamma_1 \leq \gamma_2$, $\varphi_1 \leq \varphi_2$. Üç “*C-larger*” sıralamada ($C = \Pi, A$ ve M için) ara durumlar bulunmaktadır; gerektirmede, konkordant sıralama karşılaştırılabilir değilken, “*df-larger*” sıralama var iken Kendall’ın τ ‘sunun değerleri üzerinde sıralama gerekmektedir (Nelsen vd.. 2001).

4. SIRA İSTATİSTİKLERİNİN EŞLENİKLERİ

Tanım 4.1. $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ rasgele vektörü bağımsız ve aynı $F(x, y)$ dağılımına sahip n birimlik örneklem olsun. $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ örneklem ilk koordinatı olan X ' in sıra istatistikleri olmak üzere $1 \leq r \leq n$ için $X_{r:n}$ ile r -inci sıra istatistiği gösterilsin. Eğer

$$Y_{[r:n]} = Y_j \ni X_j = X_{r:n} \quad , \quad j=1, 2, \dots, n \quad (4.1)$$

ise $Y_{[r:n]}$ ' ye r -inci istatistiğinin eşleniği denir (Nagaraja ve David 1994 , David ve Nagaraja 1998).

Teorem 4.1. $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ rasgele vektörü bağımsız ve aynı $F(x, y)$ sürekli dağılımına sahip n birimlik bir örneklem olmak üzere r -inci sıra istatistiğinin eşleniği olan $Y_{[r:n]}$ ' nin dağılım fonksiyonu

$$G_{[r:n]}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(y|x) f_{r:n}(x) dx \quad (4.2)$$

ve olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$g_{[r:n]}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y|x) f_{r:n}(x) dx \quad (4.3)$$

dir (Bhattacharya 1984, Balasubramanian ve Beg 1998).

İspat. r -inci sıra istatistiğinin eşleniği olan $Y_{[r:n]}$ ' nin dağılımı,

$$P\{Y_{[r:n]} \leq y\} = P\left\{\bigcup_{k=1}^n \{Y_k \leq y, X_k = X_{r:n}\}\right\} \quad (4.4)$$

olsun ve (4.4) eşitliğindeki olaylar ayrık olaylar olduğundan,

$$\begin{aligned} P\{Y_{[r:n]} \leq y\} &= P\{Y_1 \leq y, X_1 = X_{r:n}\} + P\{Y_2 \leq y, X_2 = X_{r:n}\} \\ &+ \dots + P\{Y_n \leq y, X_n = X_{r:n}\} \end{aligned} \quad (4.5)$$

biçiminde yazılabilir.

$$\begin{aligned}
& P\{Y_{[r:n]} \leq y\} \\
&= P\{Y_1 \leq y, X_1 \geq X_2, X_1 \geq X_3, \dots, X_1 \geq X_r, X_1 \leq X_{r+1}, \dots, X_1 \leq X_n\} \\
&\quad + P\{Y_2 \leq y, X_2 \geq X_1, X_2 \geq X_3, \dots, X_2 \geq X_r, X_2 \leq X_{r+1}, \dots, X_2 \leq X_n\} \\
&\quad + \dots + \\
&\quad + P\{Y_n \leq y, X_n \geq X_1, X_n \geq X_2, \dots, X_n \geq X_{r-1}, X_n \leq X_r, \dots, X_n \leq X_{n-1}\}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

(4.6) eşitliğinde $\binom{n}{r-1} \binom{n-(r-1)}{1} \binom{n-r}{n-r} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}$ tane aynı olasılık olduğundan

$$\begin{aligned}
P\{Y_{[r:n]} \leq y\} &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \\
&\times P\{Y_1 \leq y, X_1 \geq X_2, X_1 \geq X_3, \dots, X_1 \geq X_r, X_1 \leq X_{r+1}, \dots, X_1 \leq X_n\}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

(4.7) eşitliği yazılabilir ve

$$P(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(A|X=x) dF(x) \tag{4.8}$$

Toplam Olasılık teoremine dayalı olarak;

$$\begin{aligned}
P\{Y_{[r:n]} \leq y\} &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_{-\infty}^{+\infty} P\{Y_1 \leq y, \\
&X_1 \geq X_2, X_1 \geq X_3, \dots, X_1 \geq X_r, X_1 \leq X_{r+1}, \dots, X_1 \leq X_n | X_1 = x\} dF(x)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

olur. (4.9) eşitliğinde $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ Koşullu Olasılık Formülü kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
P\{Y_{[r:n]} \leq y\} &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \\
&\times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P\{Y_1 \leq y, X_2 \leq x, X_3 \leq x, \dots, X_r \leq x, X_{r+1} \geq x, \dots, X_n \geq x, X_1 = x\}}{P(X_1 = x)} dF(x)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

olur. (4.10) eşitliğinde $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$ eşitliği kullanılırsa

$$P\{Y_{[r:n]} \leq y\} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P\{Y_1 \leq y, X_2 \leq x, X_3 \leq x, \dots, X_r \leq x, X_{r+1} \geq x, \dots, X_n \geq x | X_1 = x\} P(X_1 = x)}{P(X_1 = x)} dF(x) \quad (4.11)$$

yazılır. $X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele değişkenleri bağımsız olduğundan

$$P\{Y_{[r:n]} \leq y\} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \times \int_{-\infty}^{+\infty} P\{Y_1 \leq y | X_1 = x\} P(X_2 \leq x) P(X_3 \leq x) \dots P(X_r \leq x) P(X_{r+1} \geq x) \dots P(X_n \geq x) dF(x) \quad (4.12)$$

ve (4.12) eşitliğinde $X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele değişkenleri aynı $F(x)$ dağılımına sahip olduğundan

$$P\{Y_{[r:n]} \leq y\} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \times \int_{-\infty}^{+\infty} P\{Y_l \leq y | X_l = x\} [F(x)]^{r-l} [1-F(x)]^{n-r} dF(x) \quad (4.13)$$

$$P\{Y_{[r:n]} \leq y\} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \times \int_{-\infty}^{+\infty} P\{Y \leq y | X_l = x\} [F(x)]^{r-l} [1-F(x)]^{n-r} dF(x) \quad (4.14)$$

r -inci sıra istatistiğinin dağılım fonksiyonu $F_r(x)$ ve olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_r(x)$ olmak üzere

$$G_{[r:n]}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(y|x) f_{r:n}(x) dx$$

ve

$$g_{[r:n]}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y|x)f_{r:n}(x)dx$$

olarak bulunur.

Teorem 4.2. $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ bağımsız ve aynı $F(x, y)$ sürekli dağılım fonksiyonuna sahip n birimlik bir örneklem olmak üzere, $1 \leq r < s \leq n$ için r -inci ve s -inci sıra istatistiklerinin eşlenikleri olan $Y_{[r:n]}$ ve $Y_{[s:n]}$ 'nin ortak dağılım fonksiyonu

$$G_{[r,s:n]}(y_1, y_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{x_2} F(y_1|x_1)F(y_2|x_2)f_{r,s:n}(x_1, x_2)dx_1 dx_2 \quad (4.15)$$

ve olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$g_{[r,s:n]}(y_1, y_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{x_2} f(y_1|x_1)f(y_2|x_2)f_{r,s:n}(x_1, x_2)dx_1 dx_2 \quad (4.16)$$

dir.

Benzer şekilde, $1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_k \leq n, (1 \leq k \leq n)$ için k tane sıra istatistiğinin eşleniğinin ortak dağılımı ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\begin{aligned} & G_{[r_1, r_2, \dots, r_k:n]}(y_1, y_2, \dots, y_k) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{x_k} \dots \int_{-\infty}^{x_2} F(y_1|x_1)F(y_2|x_2) \dots F(y_k|x_k) \\ & \quad \times f_{r_1, r_2, \dots, r_k:n}(x_1, x_2, \dots, x_k)dx_1 dx_2 \dots dx_k \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} & g_{[r_1, r_2, \dots, r_k:n]}(y_1, y_2, \dots, y_k) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{x_k} \dots \int_{-\infty}^{x_2} f(y_1|x_1)f(y_2|x_2) \dots f(y_k|x_k) \\ & \quad \times f_{r_1, r_2, \dots, r_k:n}(x_1, x_2, \dots, x_k)dx_1 dx_2 \dots dx_k \end{aligned} \quad (4.18)$$

ve n tane eşleniğin ortak dağılımı ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu ise:

$$\begin{aligned}
& G_{[1,2,...,n:n]}(y_1, y_2, \dots, y_n) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{x_n} \dots \int_{-\infty}^{x_2} F(y_1|x_1)F(y_2|x_2) \dots F(y_n|x_n) \\
&\quad \times f_{1,2,...,n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n
\end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
& g_{[1,2,...,n:n]}(y_1, y_2, \dots, y_n) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{x_n} \dots \int_{-\infty}^{x_2} f(y_1|x_1)f(y_2|x_2) \dots f(y_n|x_n) \\
&\quad \times f_{1,2,...,n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n
\end{aligned} \tag{4.20}$$

olarak elde edilir (Bekçi 2003).

5. SIRA İSTATİSTİKLERİ VE EŞLENİKLERİNİN ORTAK DAĞILIMLARINA İKİ DEĞİŞKENLİ OLASILIK İNTEGRAL DÖNÜŞÜMLERİNİN UYGULANMASI

$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ rasgele vektörü bağımsız ve aynı dağılımına sahip n birimlik bir örneklem olsun. $H_1(x, y) = C_1(F_X(x), F_Y(y))$ ise aynı marjinallere sahip başka bir dağılım fonksiyonu olsun. $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ X 'in sıra istatistikleri olmak üzere, $1 \leq r \leq n$ için $X_{r:n}$ ile r -inci sıra istatistiği gösterilsin. $Y_{[r:n]} = Y_j \ni X_j = X_{r:n}, j = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $Y_{[r:n]}$ r -inci sıra istatistiğinin eşleniği olsun. Bölüm boyunca Gebizlioğlu ve Yağcı (2008) ve Altınsoy (2009)' un çalışmalarından yararlanılmıştır. Buna göre; H_1 ve C_1 ' e ait rasgele olayların olasılıklarının (olasılık dağılımı) eşitliği aşağıdaki teorem ile gösterilir:

Teorem 5.1 $(U_1, V_1), (U_2, V_2), \dots, (U_n, V_n)$ rasgele vektörü bağımsız ve aynı $C_2(u, v)$ kopulasına sahip rasgele değişkenler olmak üzere:

$$P\{H_1(X_{r:n}, Y_{[r:n]}) \leq t\} = P\{C_1(U_{r:n}, V_{[r:n]}) \leq t\} \quad (5.1)$$

dir. Burada $1 \leq r \leq n$ için $U_{r:n}$, düzgün $(0,1)$ dağılımlı $U_1, U_2, \dots, U_n$ rasgele değişkenlerinin r -inci sıra istatistiğini, $V_{[r:n]} = V_j \ni U_j = U_{r:n}, j = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $V_{[r:n]}$ r -inci sıra istatistiğinin eşleniğini göstermektedir.

İspat. 3. bölümde anlatıldığı gibi, $X_{r:n}$ ve $Y_{[r:n]}$ 'nin ortak dağılım fonksiyonları H_1 olmak üzere, $\langle H_1 | H_2 \rangle (X_{r:n}, Y_{[r:n]}) = H_1(X_{r:n}, Y_{[r:n]})$ rasgele değişkenini gösterebiliriz. H_1 'in dağılım fonksiyonu H_2 , yani $df(\langle H_1 | H_2 \rangle \langle X, Y \rangle)$ (kısaca $(H_1 | H_2)$ ile gösterilsin)

$$(H_1 | H_2)(t) = Pr[\langle H_1 | H_2 \rangle (X_{r:n}, Y_{[r:n]}) \leq t] = \mu_{H_2} \left(\left\{ (x, y) \in R^2 \mid H_1(X_{r:n}, Y_{[r:n]}) \leq t \right\} \right), t \in I. \quad (5.2)$$

biçiminde ifade edilir.

$t \in I$ için,

$$\begin{aligned}
(H_1|H_2)(t) &= P\left\{\langle H_1|H_2 \rangle(X_{r:n}, Y_{[r:n]}) \leq t\right\} = P\left\{H_1(X_{r:n}, Y_{[r:n]}) \leq t\right\} \\
&= \iint_{\{(x,y): H_1(x,y) \leq t\}} dF_{X_{r:n}, Y_{[r:n]}}(x, y) \\
&= \iint_{\{(x,y): H_1(x,y) \leq t\}} f(y|x) f_{r:n}(x) dx dy \\
&= \iint_{\{(x,y): H_1(x,y) \leq t\}} \frac{f(x, y)}{f(x)} \frac{I}{B(r, n-r+1)} (F_X(x))^{r-1} (1-F_X(x))^{n-r} f(x) dx dy \\
&= \frac{I}{B(r, n-r+1)} \iint_{\{(x,y): H_1(x,y) \leq t\}} (F_X(x))^{r-1} (1-F_X(x))^{n-r} f(x, y) dx dy \\
&= \frac{I}{B(r, n-r+1)} \iint_{\{(x,y): H_1(x,y) \leq t\}} (F_X(x))^{r-1} (1-F_X(x))^{n-r} dH_2(x, y) \\
&= \frac{I}{B(r, n-r+1)} \iint_{\{(x,y): C_1(F_X(x), F_Y(y)) \leq t\}} (F_X(x))^{r-1} (1-F_X(x))^{n-r} dC_2(F_X(x), F_Y(y)) \\
&= \{F_X(x) = u, F_Y(y) = v\} \\
&= \frac{I}{B(r, n-r+1)} \iint_{\{(x,y): C_1(u,v) \leq t\}} (u)^{r-1} (1-u)^{n-r} dC_2(u, v).
\end{aligned}$$

O zaman, $(H_1|H_2) = (C_1|C_2)$ olur.

Burada $F_X(x)$ $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ rasgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonunu, $F_Y(y)$ $Y_i, i = 1, 2, \dots, n$ rasgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonunu göstermektedir (Altınsoy 2009).

5.1 İki Değişkenli Olasılık İntegral Dönüşümleri için Örnekler

Bu bölümde yazımda kolaylığın sağlanması için; $U_{r:n}$ yerine U , $V_{[r:n]}$ yerine V

kullanılmıştır. $U_r(t)$ ile $U_r(t) = \frac{I}{B(r, n-r+1)} \int_0^t u^{r-1} (1-u)^{n-r} du$ gösterilecektir.

Örnek 5.1 $C_1 = M(u, v)$, $C_2 = \Pi(u, v)$ ve $t \in I$ için $(C_1|C_2)(t)$ hesaplamaları:

$$\begin{aligned}
(C_1|C_2)(t) &= \mu_{C_2} \left(\{(u,v) \in I^2 | C_1(U,V) \leq t\} \right) \\
&= \mu_{C_2} \left(\{(u,v) \in I^2 | \min(U,V) \leq t\} \right) \\
&= P_{C_2} \{ \min(U,V) \leq t \} = 1 - P_{C_2} \{ \min(U,V) > t \} \\
&= 1 - P_{C_2} \{ U > t, V > t \} \\
&= 1 - \frac{I}{B(r, n-r+1)} \int_t^I \int_t^I u^{r-1} (1-u)^{n-r} du dv \\
&= 1 - (1-t)(1-U_r(t)) \\
&= t + (1-t)U_r(t).
\end{aligned}$$

(Altınsoy 2009)

Örnek 5.2 $C_1 = \Pi(u,v)$ ve $C_2 = \Pi(u,v)$ için $(C_1|C_2)(t)$ değerlerinin hesaplanması:

$$\begin{aligned}
(C_1|C_2)(t) &= \mu_{C_2} \left(\{(u,v) \in I^2 | C_1(U,V) \leq t\} \right) \\
&= \mu_{C_2} \left(\{(u,v) \in I^2 | UV \leq t\} \right) \\
&= P_{C_2} \{ UV \leq t \} = \frac{I}{B(r, n-r+1)} \iint_{\{(u,v) \in I^2 | uv \leq t\}} u^{r-1} (1-u)^{n-r} du dv
\end{aligned}$$

olacaktır. $UV = X$ denilerek aşağıdaki iki değişkenli dönüşüm yapılır:

$$\left. \begin{matrix} UV = X \\ U = Y \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} U = Y \\ V = X/Y \end{matrix} \right\} \Rightarrow |\det J| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1/y & -x/y^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{y}.$$

Yeni rasgele değişkenler X ve Y 'nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonları:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{I}{B(r, n-r+1)} y^{r-2} (1-y)^{n-r}, \quad 0 < x < y < I$$

olacaktır. X 'in marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu ($UV = X$ 'in dağılımı araştırıldığı için)

$$f_X(x) = \frac{n}{r-1} [1 - U_{r-1}(x)]$$

olarak bulunur. Bu durumda problem $(C_1|C_2)(t) = P\{X \leq t\}$ olasılığını hesaplamaya dönüşecektir. Olasılık, gerekli integral hesaplamaları yapıldığında

$$\begin{aligned}(C_1|C_2)(t) &= \int_0^t f_X(x) dx = \int_0^t \frac{n}{r-1} [1 - U_{r-1}(x)] dx \\ &= t \left[\frac{n}{r-1} - U_{r-1}(t) \right] + \frac{r-1}{n} U_r(t)\end{aligned}$$

(Altınsoy 2009)

Burada:

$$U_{r-1}(t) = \frac{1}{B(r-1, n-r+1)} \int_0^t u^{r-2} (1-u)^{n-r} du$$

ve

$$U_r(t) = \frac{1}{B(r, n-r+1)} \int_0^t u^{r-1} (1-u)^{n-r} du$$

dır.

Örnek 5.3 $C_1 = W(u, v)$ ve $C_2 = \Pi(u, v)$ için $(C_1|C_2)(t)$ değerleri hesaplamaları:

$$\begin{aligned}(C_1|C_2)(t) &= \mu_{C_2} \left(\{(u, v) \in I^2 | C_1(U, V) \leq t\} \right) = \mu_{C_2} \left(\{(u, v) \in I^2 | \max(U + V - 1, 0) \leq t\} \right) \\ &= P_{C_2} \{U + V \leq t + 1\}\end{aligned}$$

dır.

$U + V - 1 \leq 0 \Rightarrow U + V \leq 1$ olacağından $U + V = Y_1$ $U = Y_2$ denilerek iki değişkenli dönüşüm yapılır:

$$\left. \begin{array}{l} U + V = Y_1 \\ U = Y_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} U = Y_2 \\ V = Y_1 - Y_2 \end{array} \right\} \Rightarrow |det J| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

Burada Y_1 ve Y_2 rasgele değişkenlerinin değer aldığı küme aşağıdaki gibidir:

$$D_{(Y_1, Y_2)} = \{(y_1, y_2) : 0 \leq y_1 < 1, 0 < y_2 < y_1\} \cup \{(y_1, y_2) : 1 < y_1 \leq 2, y_1 - 1 < y_2 < 1\}.$$

Y_1 ve Y_2 'nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonları aşağıdaki gibidir:

$$f(y_1, y_2) = \frac{I}{B(r, n-r+1)} y_2^{r-1} (1-y_2)^{n-r}.$$

Y_1 'in olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$$f_{Y_1}(y_1) = \begin{cases} U_r(y_1) & , 0 \leq y_1 < 1 \\ 1-U_r(y_1) & , 1 \leq y_1 < 2 \\ 0 & , d.y. \end{cases}$$

dir. $(C_1|C_2)(t) = P(Y_1 \leq t+1)$ olasılığı çözümlediğinde dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$(C_1|C_2)(t) = 1+t[1-U_r(t)] - \frac{r}{n+1}[1-U_{r+1}(t)].$$

Burada:

$$U_r(t) = \frac{I}{B(r, n-r+1)} \int_0^t u^{r-1} (1-u)^{n-r} du, U_{r+1}(t) = \frac{I}{B(r+1, n-r+1)} \int_0^t u^r (1-u)^{n-r} du$$

dır (Altınsoy 2009).

5.2 Yeni Genelleştirilmiş Sarmanov Dağılımlar Ailesi için Örnekler

Bağımlı rasgele değişkenlerin olasılık dağılımlarının modellenmesinde kullanılan çok değişkenli dağılımlardan birisi olan Sarmanov dağılımlar ailesi literatürde ilk kez Sarmanov (1966) tarafından incelenmiştir. Sarmanov dağılımlar ailesinin genelleştirilmesinde ortaya çıkan dağılım fonksiyonlarının basit bir yapıya sahip olması, bu dağılımların bağımlılık yapılarını saptamakta ve korelasyon katsayısını hesaplamakta kolaylık sağlamaktadır.

Geçmiş yıllara bakıldığında Altınsoy (2009) tarafından Farlie Gumbel Morgenstern (FGM) kopulaları için yapılan örnekler bu bölümde yeni genelleştirilmiş Sarmanov dağılımlar ailesi için uygulanacaktır. Tezin özgün kısmı yeni genelleştirilmiş Sarmanov dağılımlar ailesi için uygulanacak örneklerden oluşacaktır.

Bu bölümde C_2 , Sarmanov kopulası olarak alınacaktır. Bu durumda C_2 kopulası

$$C_2(u, v) = u^q + v^q - (q+1)u^q v^q - \frac{1}{q+1} \quad 0 \leq u, v \leq 1; q > 0$$

ve $dC_2(u, v)$

$$dC_2(u, v) = 1 + \alpha \left\{ u^q + v^q - (q+1)u^q v^q - \frac{1}{q+1} \right\}$$

dir. Burada, α Sarmanov dağılımında yer alan bağımlılık parametresidir. α değeri arttıkça bağımlı iki değişken için bağımlılık derecesi artmaktadır.

Örnek 5.4 $C_1(u, v) = M(u, v) = \min(u, v)$ olduğunda:

$$\begin{aligned} (C_1|C_2)(t) &= P\{\min(U, V) \leq t\} = 1 - P\{\min(U, V) \geq t\} \\ &= 1 - P\{U > t, V > t\} \\ &= 1 - \frac{I}{B(r, n-r+1)} \int_t^1 \int_t^1 u^{r-1} (1-u)^{n-r} \left\{ 1 + \alpha \left[u^q + v^q - (q+1)u^q v^q - \frac{1}{q+1} \right] \right\} dudv \\ &= 1 - \frac{I}{B(r, n-r+1)} \left\{ \int_t^1 \int_t^1 u^{r-1} (1-u)^{n-r} dudv + \right. \\ &\quad \left. + \alpha \int_t^1 \int_t^1 u^{r-1} (1-u)^{n-r} \left[u^q + v^q - (q+1)u^q v^q - \frac{1}{q+1} \right] dudv \right\} \end{aligned}$$

ve gerekli integral işlemleri yapıldığında $(C_1|C_2)(t)$, $t \in I$ için aşağıdaki gibi elde edilir:

$$(C_1|C_2)(t) = 1 - \left\{ \left[1 - t \left(1 - \frac{\alpha}{q+1} (1-t^q) \right) \right] \left[1 - U_r(t) \right] - \alpha \frac{n!(r+q-1)!}{(r-1)!(n+q)!} t (1-t^q) \left[1 - U_{r+q}(t) \right] \right\}$$

Burada

$$U_r(t) = \frac{I}{B(r, n-r+1)} \int_0^t u^{r-1} (1-u)^{n-r} du$$

$$U_{r+q}(t) = \frac{I}{B(r+q, n-r+1)} \int_0^t u^{r+q-1} (1-u)^{n-r} du$$

dır.

Örnek 5.5 $C_1(u, v) = W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$ olduğunda:

$$\begin{aligned} (C_1|C_2)(t) &= P\{\max(U + V - 1, 0) \leq t\} \\ &= \frac{1}{B(r, n-r+1)} \iint_{\{(u,v): \max(u+v-1, 0) \leq t\}} u^{r-1} (1-u)^{n-r} \left\{ 1 + \alpha \left[u^q + v^q - (q+1)u^q v^q - \frac{1}{q+1} \right] \right\} du dv \\ &= P(U + V \leq t + 1) \end{aligned}$$

dir. $U + V - 1 \leq 0 \Rightarrow U + V \leq 1$ olacağından $U + V = Y_1$ $U = Y_2$ denilerek iki değişkenli dönüşüm yapılır:

$$\left. \begin{array}{l} U + V = Y_1 \\ U = Y_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} U = Y_2 \\ V = Y_1 - Y_2 \end{array} \right\} \Rightarrow |\det J| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

Burada Y_1 ve Y_2 rasgele değişkenlerinin değer aldığı küme aşağıdaki gibidir:

$$D_{(Y_1, Y_2)} = \{(y_1, y_2) : 0 \leq y_1 < 1, 0 < y_2 < y_1\} \cup \{(y_1, y_2) : 1 < y_1 \leq 2, y_1 - 1 < y_2 < 1\}.$$

Y_1 ve Y_2 'nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonları aşağıdaki gibidir:

$$f(y_1, y_2) = \frac{I}{B(r, n-r+1)} y_2^{r-1} (1-y_2)^{n-r} \left\{ 1 + \alpha \left[y_2^q + (y_1 - y_2)^q - (q+1)y_2^q (y_1 - y_2)^q - \frac{1}{q+1} \right] \right\}.$$

Y_1 'in olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$$\begin{aligned}
f_{Y_l}(y_l) = & \left\{ \begin{aligned}
& \left[1 - \frac{\alpha}{q+1} \right] U_r(y_l) + \alpha \frac{n!(r+q-1)!}{(r-1)!(n+q)!} U_{r+q}(y_l) \\
& + \alpha \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} y_l^k (-1)^{q-k} \frac{n!(r+q-k-1)!}{(r-1)!(n+q-k)!} U_{r+q-k}(y_l) \\
& - \alpha (q+1) \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} y_l^k (-1)^{q-k} \frac{n!(r+2q-k-1)!}{(r-1)!(n+2q-k)!} U_{r+2q-k}(y_l) & 0 \leq y_l < 1 \\
& \left[1 - \frac{\alpha}{q+1} \right] [1 - U_r(y_l - 1)] + \alpha \frac{n!(r+q-1)!}{(r-1)!(n+q)!} [1 - U_{r+q}(y_l - 1)] \\
& + \alpha \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} y_l^k (-1)^{q-k} \frac{n!(r+q-k-1)!}{(r-1)!(n+q-k)!} [1 - U_{r+q-k}(y_l - 1)] & 1 \leq y_l < 2 \\
& 0 & d.y.
\end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

dir. $(C_1|C_2)(t) = P(Y_l \leq t+1)$ olasılığının çözümlediğinde dağılım fonksiyonu şu şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned}
(C_1|C_2)(t) &= t \left[1 - \frac{\alpha}{q+1} \right] - \left[1 + \frac{\alpha}{q+1} \right] t U_r(t) + \left[1 + \frac{\alpha}{q+1} \right] \frac{r}{n+1} U_{r+1}(t) \\
&+ \alpha \frac{n!(r+q-1)!}{(r-1)!(n+q)!} t - \alpha \frac{n!(r+q-1)!}{(r-1)!(n+q)!} t U_{r+q}(t) \\
&- \alpha \frac{n!(r+q-1)!}{(r-1)!(n+q)!} t U_{r+q+1}(t) \\
&+ \alpha \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} (-1)^{q-k} \frac{n!(r+q-k-1)!}{(r-1)!(n+q-k)!} \left[\frac{(t+1)^{k+1} - 1}{k+1} \right] \\
&- \alpha \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} (-1)^{q-k} \frac{n!(r+q-k-1)!}{(r-1)!(n+q-k)!} \frac{(t+1)^{k+1}}{k+1} U_{r+q-k}(t) \\
&+ \alpha \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} (-1)^{q-k} \frac{n!}{(r-1)!} \frac{1}{k+1} \sum_{z=0}^{k+1} \binom{k+1}{z} \frac{(r+q+z-k-1)!}{(n+q+z-k)!} U_{r+q+z-k}(t) \\
&- \alpha (q+1) \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} (-1)^{q-k} \frac{n!(r+2q-k-1)!}{(r-1)!(n+2q-k)!} \left[\frac{(t+1)^{k+1} - 1}{k+1} \right] \\
&+ \alpha (q+1) \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} (-1)^{q-k} \frac{n!(r+2q-k-1)!}{(r-1)!(n+2q-k)!} \frac{(t+1)^{k+1}}{k+1} U_{r+2q-k}(t) \\
&+ \alpha (q+1) \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} (-1)^{q-k} \frac{n!}{(r-1)!} \frac{1}{k+1} \sum_{z=0}^{k+1} \binom{k+1}{z} \frac{(r+2q+z-k-1)!}{(n+2q+z-k)!} U_{r+2q+z-k}(t)
\end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned}
U_r(t) &= \frac{I}{B(r, n-r+1)} \int_0^t u^{r-1} (1-u)^{n-r} du \\
U_{r+1}(t) &= \frac{I}{B(r+1, n-r+1)} \int_0^t u^r (1-u)^{n-r} du \\
U_{r+q}(t) &= \frac{I}{B(r+q, n-r+1)} \int_0^t u^{r+q-1} (1-u)^{n-r} du \\
U_{r+q+1}(t) &= \frac{I}{B(r+q+1, n-r+1)} \int_0^t u^{r+q+2} (1-u)^{n-r} du
\end{aligned}$$

$$U_{r+q-k}(t) = \frac{I}{B(r+q-k, n-r+1)} \int_0^t u^{r+q-k-1} (1-u)^{n-r} du$$

$$U_{r+q+z-k}(t) = \frac{I}{B(r+q+z-k, n-r+1)} \int_0^t u^{r+q+z-k-1} (1-u)^{n-r} du$$

$$U_{r+2q-k}(t) = \frac{I}{B(r+2q-k, n-r+1)} \int_0^t u^{r+2q-k-1} (1-u)^{n-r} du$$

$$U_{r+2q+z-k}(t) = \frac{I}{B(r+2q+z-k, n-r+1)} \int_0^t u^{r+2q+z-k-1} (1-u)^{n-r} du$$

dır.

Örnek 5.6 $C_I(u, v) = \Pi(u, v) = uv$ olduğunda:

$$\begin{aligned} (C_I|C_2)(t) &= P\{UV \leq t\} \\ &= \frac{I}{B(r, n-r+1)} \iint_{\{(u,v): uv \leq t\}} u^{r-1} (1-u)^{n-r} \left\{ I + \alpha [u^q + v^q - (q+1)u^q v^q - \frac{I}{q+1}] \right\} dudv \end{aligned}$$

olacaktır. $UV = X$ denilerek aşağıdaki iki değişkenli dönüşüm yapılır:

$$\left. \begin{matrix} UV = X \\ V = Y \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} U = X/Y \\ V = Y \end{matrix} \right\} \Rightarrow |\det J| = \begin{vmatrix} 1/y & -x/y^2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{y}.$$

Yeni rasgele değişkenler X ve Y 'nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x, y) &= \frac{I}{B(r, n-r+1)} \left(\frac{x}{y} \right)^{r-1} \left(1 - \frac{x}{y} \right)^{n-r} \left\{ I + \alpha \left(\frac{x}{y} \right)^q + y^q - (q+1)x^q - \frac{I}{q+1} \right\} \frac{1}{y} \\ &= \frac{I}{B(r, n-r+1)} x^{r-1} y^{-r} \left(1 - \frac{x}{y} \right)^{n-r} \left\{ I + \alpha \left(\frac{x}{y} \right)^q + y^q - (q+1)x^q - \frac{I}{q+1} \right\}, \end{aligned}$$

$$0 < x < y < I$$

olacaktır. X 'in marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu ($UV = X$ 'in dağılımı araştırıldığı için)

$$\begin{aligned}
(C_1|C_2)(t) &= P\{X \leq t\} = \int_0^t f_X(x) dx \\
&= \frac{1}{B(r, n-r+1)} \int_0^t \left\{ \frac{(r-2)!}{(n-1)!} (1-x)^{n-r+1} \sum_{j=0}^{r-2} \frac{(n+j-r)!}{j!} x^j + \alpha \frac{(r+q-2)!}{(n+q-1)!} (1-x)^{n-r+1} \right. \\
&\quad \sum_{j=0}^{r+q-2} \frac{(n+j-r)!}{j!} x^j + \alpha \frac{(r+q-2)!}{(n+q-1)!} (1-x)^{n-r+1} \sum_{j=0}^{r+q-2} \frac{(n+j-r)!}{j!} x^{q+j} \\
&\quad - (q+1) \alpha \frac{(r-2)!}{(n-1)!} (1-x)^{n-r+1} \sum_{j=0}^{r-2} \frac{(n+j-r)!}{j!} x^{q+j} \\
&\quad \left. - \frac{\alpha}{q+1} \frac{(r-2)!}{(n-1)!} (1-x)^{n-r+1} \sum_{j=0}^{r-2} \frac{(n+j-r)!}{j!} x^j \right\} dx
\end{aligned}$$

sonuç olarak

$$\begin{aligned}
(C_1|C_2)(t) &= \frac{1}{B(r, n-r+1)} \left\{ \frac{(r-2)!}{(n-1)!} \left[1 - \frac{\alpha}{q+1} \right] (n-r+1)! \sum_{j=0}^{r-2} \frac{1}{(n+j-r+1)(n+j-r+2)} U_j(t) \right. \\
&\quad + \alpha \frac{(r+q-2)!}{(n+q-1)!} (n-r+1)! \sum_{j=0}^{r+q-2} \frac{1}{(n+j-r+1)(n+j-r+2)} U_j(t) \\
&\quad + \alpha \frac{(r-q-2)!}{(n-q-1)!} (n-r+1)! \sum_{j=0}^{r-q-2} \frac{(n+j-r)!(j+q)!}{j!(n+j+q-r+2)!} U_{j+q}(t) \\
&\quad \left. - (q+1) \alpha \frac{(r-2)!}{(n-1)!} (n-r+1)! \sum_{j=0}^{r-2} \frac{(n+j-r)!(j+q)!}{j!(n+j+q-r+2)!} U_{j+q}(t) \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$U_j(t) = \frac{(n+j-r+2)!}{j!(n-r+1)!} \int_0^t u^j (1-u)^{n-r+1} du$$

$$U_{j+q}(t) = \frac{(n+j+q-r+2)!}{(j+q)!(n-r+1)!} \int_0^t u^{j+q} (1-u)^{n-r+1} du$$

dır.

Burada gösterilen örnekler, bir bağımlılık parametresi taşıyan Sarmanov kopulası için minimum-maksimum, maksimum $(+,0)$ ve çarpım durumlarında $(C_1|C_2)(t)$ ile hesaplanan olasılık değerlerini vermektedir. İleriki çalışmalarda geliştirilecek olan programlar yardımıyla çeşitli (n,r,q,α) değerleri için yeni genelleştirilmiş Sarmanov kopulalarının (dağılımlarının) davranışları, bağımlılık yapılarının değerlendirilmesi bakımından özgün ve önemli bir sonuç oluşturacaktır.

6. İKİ DEĞİŞKENLİ OLASILIK İNTEGRAL DÖNÜŞÜMÜ KULLANARAK DAĞILIMDAN BAĞIMSIZ KİTLE KUANTİLLERİ İÇİN GÜVEN ARALIKLARININ İFADE EDİLiŞİ

Bu bölümde Gebizlioğlu ve Yağcı (2008) tarafından ortaya konulan sonuçlardan yararlanılarak ve tıpkı alıntılarda bulunarak tez konuma ilişkin açıklamalar yapılmıştır.

6.1 Tolerans Limitleri ve Aralıkları

Tolerans katsayısı γ ile bir sürekli dağılım için tolerans aralığı rasgele bir aralıktır ve olasılık aralık limitleri arasında bir bölgedir (Gibbons 1971 ve Zacks 1970).

Bir tolerans aralığı; X , $F_X(x)$ dağılım fonksiyonlu sürekli bir rasgele değişken ise olasılık integral dönüşümü ile, $U_{s:n} = F_X(X_{s:n})$ ve $U_{r:n} = F_X(X_{r:n})$ olmak üzere $P[(U_{s:n} - U_{r:n}) \geq \tilde{p}] = \gamma$ şeklinde ifade edilebilir. Bir başka deyişle; γ olasılık düzeyinde ve tolerans sınırları L_1 ve L_2 için $\tilde{p}$ atanmış değer bağlamında tolerans aralıkları

$$P\left[\int_{L_1}^{L_2} f(x)dx \geq \tilde{p}\right] = \gamma \quad (6.1)$$

biçiminde ifade edilir. Bu aralık dağılımdan bağımsızdır. Burada $L_1 = l_1(X_1, X_2, \dots, X_n) < L_2 = l_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ $F(\cdot)$ dağılımına sahip $X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele örneklemeden elde edilen iki istatistik olup, $F(L_2) - F(L_1)$ 'in dağılımı $F(\cdot)$ ' dan bağımsızdır. $F(L_2) - F(L_1)$ rasgele değeri, L_1 ve L_2 arasında $f(\cdot)$ 'nin altında halen alanı temsil etmektedir.

Öncelikle tek değişkenli bir durum ele alınsın: $X_1, X_2, \dots, X_n$ $F(x)$ dağılımından alınmış rasgele bir örneklem ve $U_1, U_2, \dots, U_n$ ise (0,1) aralığındaki Düzgün dağılımdan alınmış rasgele bir örneklem olsun. $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ ve $U_{1:n} \leq U_{2:n} \leq \dots \leq U_{n:n}$ sırasıyla $X_1, X_2, \dots, X_n$ ile $U_1, U_2, \dots, U_n$ rasgele değişkenlerinin sıra istatistiklerini gösterebilir.

$F(X) = U$ ($F(x)$ sürekli bir rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu) olasılık-integral dönüşümü biçiminde

$$F(X_{i:n}) \stackrel{D}{=} U_{i:n}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

olacaktır.

Yukarıdaki bilgiler ışığında L_1 ve L_2 'nin sıra istatistikleri seçilmesiyle, genel anlamda tolerans aralığı aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$P(F(L_2) - F(L_1) \geq \tilde{p}) = \gamma.$$

6.2 Kuantiller ve Güven Aralıkları

F sürekli bir rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu ve $F(x_p) = p$, $x_p = F^{-1}(p)$, $F(F^{-1}(p)) = p$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} P(X_{i:n} \leq x_p) &= P(X_{i:n} \leq F^{-1}(p)) \\ &= P(F(X_{i:n}) \leq p) \\ &= P(U_{i:n} \leq p) \end{aligned}$$

dır.

Bu durumda kitle kuantilleri için güven aralığı aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{aligned} P(X_{r:n} \leq x_p \leq X_{s:n}) &= P(X_{r:n} \leq F^{-1}(p) \leq X_{s:n}) \\ &= P(X_{r:n} \leq F^{-1}(p)) - P(X_{s:n} \leq F^{-1}(p)) \\ &= P(U_{r:n} \leq p) - P(U_{s:n} \leq p) \end{aligned}$$

İki değişkenli olasılık integral dönüşümünü kullanarak kitle kuantilleri için güven aralığı ifade etmek mümkündür:

$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ $H_2(x, y) = C_2(F(x), G(y))$ ortak dağılım fonksiyonundan alınmış iki değişkenli risk rasgele değişkenlerinin rasgele bir örnekleme olsun. $H_1(x, y)$, sırasıyla X ve Y için $F(x)$ ve $G(y)$ aynı marjinal dağılımlı başka bir

dağılım fonksiyonu olsun. $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$, X için sıra istatistikleri ve $Y_{[r:n]} = Y_j \ni X_j = X_{r:n}$, $j = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere, $Y_{[r:n]} \leq X_{r:n}$, $1 \leq r \leq n$ sıra istatistiğinin eşleniği olsun. Ayrıca; $F(x_p) = p$ ve $G(y_p) = p$ olmak üzere, x_p ve y_p ile sırasıyla $F(x)$ ve $G(y)$ 'nin p -inci sıra kuantillerini gösterebiliriz. $H_1(X_{r:n}, Y_{[r:n]})$ ve $H_1(X_{s:n}, Y_{[s:n]})$ niceliklerinin $H_1(X_{r:n}, Y_{[r:n]}) < H_1(X_{s:n}, Y_{[s:n]})$ olduğu durumlar göz önüne alınsın.

Bu durumda, iki değişkenli integral dönüşümü yardımıyla,

$$\begin{aligned}
& P_{H_2} \left\{ H_1(X_{r:n}, Y_{[r:n]}) < H_1(x_p, y_p) < H_1(X_{s:n}, Y_{[s:n]}) \right\} \\
&= \frac{1}{B(r, n-r+1)} \iint_{\{(u,v) \in I^2 \mid C_1(u,v) \leq \delta_1(p)\}} u^{r-1} (1-u)^{n-r} dC_2(u, v) \\
&\quad - \frac{1}{B(s, n-s+1)} \iint_{\{(u,v) \in I^2 \mid C_1(u,v) \leq \delta_1(p)\}} u^{s-1} (1-u)^{n-s} dC_2(u, v) \\
&= \Lambda_p(r, n-r) - \Lambda_p(s, n-s) \\
&= \pi(r, s, n, p)
\end{aligned} \tag{6.2}$$

ifadesi elde edilebilir. Burada $\delta_1(p)$, C_1 'in köşegenidir; yani $\delta_1(p) = C_1(p, p)$ 'dir. (6.2) eşitliği ile verilen $\pi(r, s, n, p)$ kitle kuantili için güven aralığı olarak ifade edilebilir.

Gerçekten de, (6.2) eşitliği ayrıntılı olarak incelenirse,

$$\begin{aligned}
& P_{H_2} \left\{ H_1(X_{r:n}, Y_{[r:n]}) < H_1(x_p, y_p) < H_1(X_{s:n}, Y_{[s:n]}) \right\} \\
&= P_{H_2} \left\{ H_1(x_p, y_p) < H_1(X_{(s)}, Y_{[s]}) \right\} - P_{H_2} \left\{ H_1(x_p, y_p) < H_1(X_{(r)}, Y_{[r]}) \right\} \\
&= \left[1 - P_{H_2} \left\{ H_1(X_{(s)}, Y_{[s]}) \leq H_1(x_p, y_p) \right\} \right] - \left[1 - P_{H_2} \left\{ H_1(X_{(r)}, Y_{[r]}) \leq H_1(x_p, y_p) \right\} \right] \\
&= P_{H_2} \left\{ H_1(X_{(r)}, Y_{[r]}) \leq H_1(x_p, y_p) \right\} - P_{H_2} \left\{ H_1(X_{(s)}, Y_{[s]}) \leq H_1(x_p, y_p) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{B(r, n-r+1)} \iint_{\{(x,y): H_1(x,y) \leq H_1(x_p, y_p)\}} (F(x))^{r-1} (1-F(x))^{n-r} dH_2(x, y) \\
&- \frac{1}{B(s, n-s+1)} \iint_{\{(x,y): H_1(x,y) \leq H_1(x_p, y_p)\}} (F(x))^{s-1} (1-F(x))^{n-s} dH_2(x, y)
\end{aligned} \tag{6.3}$$

$$H_1(x, y) = C_1(F(x), G(y))$$

$$H_2(x, y) = C_2(F(x), G(y))$$

$$H_1(x_p, y_p) = C_1(F(x_p), G(y_p)) = C_1(p, p) = \delta_1(p)$$

$$F(X) = U \text{ ve } G(Y) = V$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
&P_{H_2} \left\{ H_1(X_{r:n}, Y_{[r:n]}) < H_1(x_p, y_p) < H_1(X_{s:n}, Y_{[s:n]}) \right\} \\
&= \frac{1}{B(r, n-r+1)} \iint_{\{(u,v) \in I^2 \mid C_1(u,v) \leq \delta_1(p)\}} u^{r-1} (1-u)^{n-r} dC_2(u, v) \\
&- \frac{1}{B(s, n-s+1)} \iint_{\{(u,v) \in I^2 \mid C_1(u,v) \leq \delta_1(p)\}} u^{s-1} (1-u)^{n-s} dC_2(u, v) \\
&= \Lambda_p(r, n-r) - \Lambda_p(s, n-s) \\
&= \pi(r, s, n, p).
\end{aligned} \tag{6.4}$$

eşitliğine ulaşılır ki, burada $\pi(r, s, n, p)$ niceliğinin H_1 , H_2 , F ve G 'den bağımsız olduğu görülmektedir. Burada bulunan $\pi(r, s, n, p)$ nicelik ifadesi, γ olasılık düzeyinde tolerans aralığı için esas olan ifadedir ve çeşitli $\tilde{p}$ değerleri için ilgili dağılımlardan bağımsız olarak elde edilebilir (Gebizlioglu ve Yagci 2008) .

6.3 Yeni Genelleştirilmiş Sarmanov Dağılımlar Ailesi İçin Örnekler

Bağımlı risklerin dağılımları, α bağımlılık parametreleri içerdiğinden dolayı bağımlılığın değerlendirilmesi için hem teorik hem de uygulama kolaylığı önemine sahiptir. FGM dağılımları için bağımlılık özellikleri, değişkenler arası ilişkinin bir ölçüsü olarak korelasyon katsayısı ile yakından ilgilidir (Denuit *et. al.* 1999, Bairamov ve Kotz 2002, Bairamov, Kotz ve Bekci 2001, Bairamov, Kotz ve Gebizlioglu 2001, Tank ve Gebizlioglu 2004 ve Tank *et. al.* 2006). Yeni genelleştirilmiş bazı sarmanov dağılımlar aileleri de aynı klasik FGM dağılımlarında olduğu gibi basit bir analitik yapıya sahiptir. Bağımlılık yapıları kolayca incelenebilmekte ve FGM dağılımlar ailesinde olduğu gibi değişkenler arası ölçüsü korelasyon katsayısı ile yakından ilgilidir (Yağcı 2002). Bundan dolayı, örnekler yeni genelleştirilmiş sarmanov dağılımlar ailesi durumu için gösterilecektir.

C_2 kopulası Sarmanov kopulası olarak aşağıdaki gibi alınacaktır:

$$C_2(u, v) = u^q + v^q - (q+1)u^q v^q - \frac{I}{q+1} \quad (6.5)$$

ve $dC_2(u, v)$ ifadesi de şudur:

$$dC_2(u, v) = 1 + \alpha \left\{ u^q + v^q - (q+1)u^q v^q - \frac{1}{q+1} \right\} du dv. \quad (6.6)$$

Örnek 6.1 $C_1(u, v) = M(u, v) = \min(u, v)$ olsun. C_1 için (6.5)' te ifade edilen olasılık aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \pi^{\min}(r, s, n, q, p) = & \alpha \left[p(p^q - 1) \right] \frac{n!}{(n+q)!} \left[\frac{(s+q-1)!}{(s-1)!} - \frac{(r+q-1)!}{(r-1)!} \right] \\ & + \left[(1-p) \left(\frac{1}{q+1} - 1 \right) - \alpha \frac{(1-p^{q+1})}{q+1} \right] [U_s(p) - U_r(p)] \\ & + \alpha p \frac{n!}{(n+q)!} \left[\frac{(s+q-1)!}{(s-1)!} U_{s+q}(p) - \frac{(r+q-1)!}{(r-1)!} U_{r+q}(p) \right] \end{aligned}$$

Burada, $j = r, s$ için

$$U_j(p) = \frac{I}{B(j, n-j+I)} \int_0^p u^{j-I} (1-u)^{n-j} du$$

ve

$$U_{j+q}(p) = \frac{I}{B(j+q, n-j+I)} \int_0^p u^{j+q-I} (1-u)^{n-j} du$$

dır.

Örnek 6.2 Eğer $C_l(u, v) = W(u, v) = \max(u + v - l, 0)$ alınırsa, $p < 1/2$ için:

$$\pi^{\max}(r, s, n, q, p) =$$

$$\begin{aligned} & \alpha \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} (-1)^{q-k} \frac{n!}{(k+I)(n+q-k)!} \left(\frac{(s+q-k-I)!}{(s-I)!} - \frac{(r+q-k-I)!}{(r-I)!} \right) \\ & - \alpha(q+I) \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} (-1)^{q-k} \frac{n!}{(k+I)(n+2q-k)!} \left(\frac{(s+2q-k-I)!}{(s-I)!} - \frac{(r+2q-k-I)!}{(r-I)!} \right) \end{aligned}$$

ve $p \geq 1/2$ için:

$$\begin{aligned}
& \pi^{\max}(r, s, n, q, p) = \\
& \alpha \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} (-1)^{q-k} \frac{n!}{(k+1)(n+q-k)!} \left[\frac{(s+q-k-l)!}{(s-l)!} - \frac{(r+q-k-l)!}{(r-l)!} \right] \\
& - \alpha (q+1) \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} (-1)^{q-k} \frac{n!}{(k+1)(n+2q-k)!} \left[\frac{(s+2q-k-l)!}{(s-l)!} - \frac{(r+2q-k-l)!}{(r-l)!} \right] \\
& - \alpha \frac{n!}{(n+q)!} [2p-l] \left[\frac{(s+q-l)!}{(s-l)!} - \frac{(r+q-l)!}{(r-l)!} \right] \\
& + \alpha \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} (-1)^{q-k} \frac{n!}{(n+q-k)!} \left[\frac{(s+q-k-l)!}{(s-l)!} - \frac{(r+q-k-l)!}{(r-l)!} \right] \frac{(2p)^{k+l}}{k+l} \\
& + \alpha (q+1) \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} (-1)^{q-k} \frac{n!}{(n+2q-k)!} \left[\frac{(s+2q-k-l)!}{(s-l)!} - \frac{(r+2q-k-l)!}{(r-l)!} \right] \frac{(2p)^{k+l}}{k+l} \\
& + \left[l + \frac{\alpha}{q+l} \right] [2p-l] [U_s(2p-l) - U_r(2p-l)] \\
& - \left[l + \frac{\alpha}{q+l} \right] \left[\frac{sU_s(2p-l) - rU_r(2p-l)}{n+l} \right] \\
& + \alpha \frac{n!}{(n+q)!} [2p-l] \left[\frac{(s+q-l)!}{(s-l)!} U_{s+q}(2p-l) - \frac{(r+q-l)!}{(r-l)!} U_{r+q}(2p-l) \right] \\
& + \alpha \frac{n!}{(n+q)!} \left[\frac{(s+q-l)!}{(s-l)!} U_{s+q+l}(2p-l) - \frac{(r+q-l)!}{(r-l)!} U_{r+q+l}(2p-l) \right] \\
& + \alpha \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} (-1)^{q-k} \frac{n!}{(n+q-k)!} \frac{(2p)^{k+l}}{k+l} \left[\frac{(s+q-k-l)!}{(s-l)!} U_{s+q-k}(2p-l) - \frac{(r+q-k-l)!}{(r-l)!} U_{r+q-k}(2p-l) \right] \\
& - \alpha \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} (-1)^{q-k} \sum_{z=0}^{k+l} \binom{k+l}{z} \frac{n!}{(k+1)(n+q+z-k)!} \left[\frac{(s+q+z-k-l)!}{(s-l)!} U_{s+q+z-k}(2p-l) - \frac{(r+q+z-k-l)!}{(r-l)!} U_{r+q+z-k}(2p-l) \right] \\
& - \alpha (q+1) \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} (-1)^{q-k} \frac{n!}{(n+2q-k)!} \frac{(2p)^{k+l}}{k+l} \left[\frac{(s+2q-k-l)!}{(s-l)!} U_{s+2q-k}(2p-l) - \frac{(r+2q-k-l)!}{(r-l)!} U_{r+2q-k}(2p-l) \right] \\
& - \alpha (q+1) \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} (-1)^{q-k} \sum_{z=0}^{k+l} \binom{k+l}{z} \frac{n!}{(k+1)(n+2q+z-k)!} \left[\frac{(s+2q+z-k-l)!}{(s-l)!} U_{s+2q+z-k}(2p-l) - \frac{(r+2q+z-k-l)!}{(r-l)!} U_{r+2q+z-k}(2p-l) \right]
\end{aligned}$$

dır.

Burada, $j = r, s$ için

$$U_j(2p-l) = \frac{l}{B(j, n-j+1)} \int_0^{2p-l} u^{j-1} (l-u)^{n-j} du,$$

$$U_{j+q}(2p-l) = \frac{l}{B(j+q, n-j+1)} \int_0^{2p-l} u^{j+q-1} (l-u)^{n-j} du,$$

$$U_{j+q+l}(2p-l) = \frac{l}{B(j+q+l, n-j+l)} \int_0^{2p-l} u^{j+q} (1-u)^{n-j} du,$$

$$U_{j+q-k}(2p-l) = \frac{l}{B(j+q-k, n-j+l)} \int_0^{2p-l} u^{j+q-k-l} (1-u)^{n-j} du$$

$$U_{j+2q-k}(2p-l) = \frac{l}{B(j+2q-k, n-j+l)} \int_0^{2p-l} u^{j+2q-k-l} (1-u)^{n-j} du$$

$$U_{j+q+z-k}(2p-l) = \frac{l}{B(j+q+z-k, n-j+l)} \int_0^{2p-l} u^{j+q+z-k-l} (1-u)^{n-j} du$$

$$U_{j+2q+z-k}(2p-l) = \frac{l}{B(j+2q+z-k, n-j+l)} \int_0^{2p-l} u^{j+2q+z-k-l} (1-u)^{n-j} du$$

dır.

Örnek 6.3 $C_l(u, v) = \Pi(u, v) = uv$ olduğunda, aranan olasılık aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\pi^\Pi(r, s, n, q, p) =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{I}{B(r, n-r+I)} \left\{ \frac{(r-2)!}{(n-1)!} \left[I - \frac{\alpha}{q+I} \right] (n-r+I)! \sum_{j=0}^{r-2} \frac{I}{(n+j-r+I)(n+j-r+2)} U_j(p^2) \right. \\
& + \alpha \frac{(r+q-2)!}{(n+q-1)!} (n-r+I)! \sum_{j=0}^{r+q-2} \frac{I}{(n+j-r+I)(n+j-r+2)} U_j(p^2) \\
& + \alpha \frac{(r+q-2)!}{(n+q-1)!} (n-r+I)! \sum_{j=0}^{r+q-2} \frac{(n+j-r)!(q+j)!}{j!(n+q+j-r+2)!} U_{j+q}(p^2) \\
& - (q+I)\alpha \frac{(r-2)!}{(n-1)!} (n-r+I)! \sum_{j=0}^{r-2} \frac{(n+j-r)!(q+j)!}{(n+q+j-r+2)!} U_{j+q}(p^2) \\
& - \frac{I}{B(s, n-s+I)} \left\{ \frac{(s-2)!}{(n-1)!} \left[I - \frac{\alpha}{q+I} \right] (n-s+I)! \sum_{j=0}^{s-2} \frac{I}{(n+j-s+I)(n+j-s+2)} U_j(p^2) \right. \\
& + \alpha \frac{(s+q-2)!}{(n+q-1)!} (n-s+I)! \sum_{j=0}^{s+q-2} \frac{I}{(n+j-s+I)(n+j-s+2)} U_j(p^2) \\
& + \alpha \frac{(s+q-2)!}{(n+q-1)!} (n-s+I)! \sum_{j=0}^{s+q-2} \frac{(n+j-s)!(q+j)!}{j!(n+q+j-s+2)!} U_{j+q}(p^2) \\
& - (q+I)\alpha \frac{(s-2)!}{(n-1)!} (n-s+I)! \sum_{j=0}^{s-2} \frac{(n+j-s)!(q+j)!}{j!(n+q+j-s+2)!} U_{j+q}(p^2) \}
\end{aligned}$$

Burada $k=r, s$ için

$$U_{j,k}(p^2) = \frac{(n+j-k+2)!}{j!(n-k+1)!} \int_0^{p^2} u^j (1-u)^{n-k+1} du$$

ve

$$U_{j+q,k}(p^2) = \frac{(n+q+j-k+2)!}{(j+q)!(n-k+1)!} \int_0^{p^2} u^{j+q-1} (1-u)^{n-k+1} du$$

dır.

7. BAĞIMLI RİSKLER İÇİN RİSKE MARUZ DEĞER (VaR)

Risk, aktif veya pasif nitelikteki varlıkların değerlerinde meydana gelebilecek olumsuz değişimlerin ortaya çıkma olasılığıdır.

Aktueryal risk yönetimi; sigortacılık uygulamalarında olası hasar/zarar durumunun değerlendirilmesi ve ilgili optimal aktueryal kararların alınmasıyla alakalı konularla ilgilenir, ayrıca sigortalanan ve sigortalayan arasında ortak bir konu olan hasar miktarlarına karşı optimal prim ve rezerv hesaplarının yapılmasına ilişkin kuram ve yöntemleri sunmaktır.

Güçlü risk yönetimi olan kuruluşlar (bankalar, sigorta şirketleri, vb.); aldıkları *piyasa*, *kredi* ve *operasyonel* riskleri ayrıntıları ile inceler, olası krizlere ilişkin kayıplarını daha önceden belirler, bu kayıpları minimize etmek için önceden önlemler alır, aldıkları risk ile kazançlarını karşılaştırır ve riski almaya değip değmeyeceğini önceden değerlendirirler.

Aktueryal riski ölçmek için Aktueryal risk yönetiminde, hasar veya zarar nicelikleri rasgele değerler olup sigortacılık gerçekliğine uygun olasılık dağılım modelleri ile ifade edilir (Kaas vd.. 2008, Denuit vd. 2005). Riskin ifade edilmesi için

- Riske Maruz Değer (VaR, Value-at-Risk)
- Beklenen/Beklenmeyen Kayıp
- Yeterli Ekonomik Sermaye
- Yükümlülük Karşılama Yeteneği (Solvency)

gibi çeşitli ölçütler kullanılmaktadır. Bunlardan VaR, dağılımların kuantilleri ile yakından ilintili bir ölçüttür. X risk rasgele değişkeni, F , X ' in dağılım fonksiyonu, $p \in (0,1)$ bir olasılık düzeyi olmak üzere; p düzeyinde VaR şu şekilde tanımlanır:

$$VaR_p[X] = F_X^{-1}(p)$$

Embrechts *et. al.* (2003)' in yapmış olduğu çalışmada, global pozisyon olarak adlandırılan fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\Psi : R^n \rightarrow R$$

Bu fonksiyon $X_1, X_2, \dots, X_n$ risklerinin marjinal kar-zarar dağılımları bilindiğinde, $\Psi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ global pozisyonunun VaR' ı alınarak, bir (üst) sınır yazmakta kullanılmaktadır. Özel halde, Embrechts *et. al.* (2003)' in çalışmasında $n=2$ için $\Psi(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ alınarak $VaR_p[\Psi(X_1, X_2)]$ için bir üst sınır yazılmıştır. Üst sınır yazma amaçları ise, bu bağımlı risklerin ortak dağılımlarının bilinmemesi durumundan kaynaklanmaktadır. Ortak dağılımlarının bilindiğinden hareketle yola çıkılarak Ψ ' nin bir dağılım fonksiyonu olduğu düşünülecek olursa, $VaR_p(.)$ ifadesine kopulalar cinsinden ulaşılabilir:

$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ $H_2(x, y) = C_2(F(x), G(y))$ ortak dağılım fonksiyonundan alınmış iki değişkenli risk rasgele değişkenlerinin rasgele bir örnekleme olsun. $\Psi(X, Y)$, sırasıyla X ve Y için $F(x)$ ve $G(y)$ aynı marjinal dağılımlı başka bir dağılım fonksiyonu olsun ve $\Psi(x, y) = C_1(F(x), G(y))$ olsun. $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$, X için sıra istatistikleri ve $Y_{[r:n]} = Y_j \ni X_j = X_{r:n}$, $j = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere, $Y_{[r:n]} \leq X_{r:n}$, $1 \leq r \leq n$ sıra istatistiğinin eşleniği olsun. Ayrıca; $F(x_p) = p$ ve $G(y_p) = p$ olmak üzere, x_p ve y_p ile sırasıyla $F(x)$ ve $G(y)$ ' nin p -inci sıra kuantillerini gösterilsin. Marjinal VaR' ları sırasıyla $VaR_p[X] = F^{-1}(p)$ ve $VaR_p[Y] = G^{-1}(p)$ ile gösterilsin. Bu durumda $VaR_p[\Psi(X, Y)]$ aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$VaR_p[\Psi(X, Y)] = \kappa \iint_{\{(u,v) \in I^2 \mid C_1(u,v) \leq p\}} (u)^{r-1} (1-u)^{n-r} dC_2(u, v),$$

gerçekten de görülebileceği gibi

$$\begin{aligned}
VaR_p[\Psi(X, Y)] &= \mu_{H_2} \left(\left\{ (x, y) \in R^2 \mid \Psi(X, Y) \leq p \right\} \right) \\
&= \iint_{\{(x, y) \in R^2 \mid \Psi(x, y) \leq p\}} dH_2(x, y) \\
&= \iint_{\{(x, y) \in R^2 \mid \Psi(x, y) \leq p\}} h_2(y|x) f_{r:n}(x) dx dy \\
&= \iint_{\{(x, y) \in R^2 \mid \Psi(x, y) \leq p\}} \frac{h_2(x, y)}{f(x)} \kappa (F(x))^{r-1} (1-F(x))^{n-r} f(x) dx dy \\
&= \kappa \iint_{\{(x, y) \in R^2 \mid \Psi(x, y) \leq p\}} (F(x))^{r-1} (1-F(x))^{n-r} h_2(x, y) dx dy \\
&= \kappa \iint_{\{(x, y) \in R^2 \mid \Psi(x, y) \leq p\}} (F(x))^{r-1} (1-F(x))^{n-r} dH_2(x, y) \\
&= \kappa \iint_{\{(x, y) \in R^2 \mid \Psi(x, y) \leq p\}} (F(x))^{r-1} (1-F(x))^{n-r} dC_2(F(x), G(y)) \\
&= \{F(x) = u, G(y) = v, X = F^{-1}(U), Y = G^{-1}(V)\} \\
&= \kappa \iint_{\{(u, v) \in I^2 \mid C_1(u, v) \leq p\}} (u)^{r-1} (1-u)^{n-r} dC_2(u, v).
\end{aligned}$$

olup; burada $\kappa = \frac{1}{B(r, n-r+1)}$ ve $B(.,.)$ beta fonksiyonunu, u ve v sırasıyla $U_{r:n}$ ve $V_{[r:n]}$ 'nin gözlenen değerlerini göstermektedir (Gebizlioglu ve Yagci 2008).

7.1 İki Değişkenli Kuantiller, Kopulalar ve İki Bağımlı Risk için VaR Değerlendirmesi

Gösterilen analitik sonuçlar ve verilen örneklerden anlaşılığın üzere; (6.2) eşitliğine göre yazılabilen iki değişkenli kuantiller için γ katsayılı tolerans aralıkları; örneklem genişliği n , sıra istatistikleri ve eşleniklerinin sıraları, kuantillerin sırası ve $\pi(r, s, n, p)$ olasılığı üzerindeki $\tilde{p}$ eşliğinin fonksiyonlarıdır.

Ayrıca Sarmanov kopulaları durumunda görülmektedir ki; tolerans aralıkları, iki değişkenli kuantiller belirlenmiş tolerans aralıklarında oldukları için direkt olarak olasılığın büyüklüğünü etkileyen α bağımlılık parametresinin fonksiyonlarıdır.

Dikkat edilmelidir ki; $H_1(X_{s:n}, Y_{[s:n]}) - H_1(X_{r:n}, Y_{[r:n]})$, $1 \leq r < s \leq n$ mümkün olduğu kadar küçük olduğu zaman, iki değişkenli kuantillerin $H_1(x_p, y_p)$ fonksiyonu ve γ toleransına bağlı risk değerlendirmeleri için verilen $\tilde{p}$ en iyi mümkün durum için meydana gelir. Açıktır ki; bu iki değişkenli bağımlı riskler $C_2(u, v)$ kopula fonksiyonuna bağlıdır (Gebizlioglu ve Yagci 2008)

Tolerans aralıkları; ön-atanmış olasılık düzeyli risk niceliklerinin, karar yönlü sıra istatistikleri arasındaki olası bir genişliğe atanan tolerans yoluyla, riskler hakkında kararlar ortaya konulmasını sağlar. Bu çalışma; iki değişkenli kuantiller bağlamında tolerans aralıklarını ve risk ölçüleri olarak kuantillerle eşdeğer olan $VaR_p(X)$ ve $VaR_p(Y)$ için, bağımlı kayıp şiddetleri olan bağımlı risklere dair risk değerlendirme aralıkları önermesinde bulunmaktadır. Söz konusu değerlendirmeler bağımlı risklerin birleşik veya marjinal dağılımlarından bağımsız olarak, sadece sıra istatistikleri ve eşlenikleri ele alınarak yapılabilir ve bu bakımdan pratik değere de sahiptir.

Benzer yapılar; Tail Value-at-Risk (TVaR), Conditional Value-at-Risk (CVaR), Conditional Tail Expectation (CTE) ve VaR' ın fonksiyonları olan diğer risk ölçüleri için de kolayca elde edilebilir.

8. TARTIŞMA VE SONUÇ

Sıra istatistikleri ve eşlenikleri, kopulalar, iki değişkenli integral dönüşümleri, kuantiller ve tolerans aralıkları istatistiğin önemli ve uygulamaya doğrudan yöntem sunan konularıdır. Bu yüzden tezde sunulan sonuçlar hem istatistik kuramı hemde aktüeryal risk gibi uygulama alanları bakımından özgün ve yararlı sonuçlardır.

Bağımlı değişkenlerin bağımlılık yapılarının ifadesi bakımından kopulalar son derece yararlı analitik araçlardır. Buradan yola çıkarak çalışma, kopulalar ile iki değişkenli integral dönüşümlerini ilişkilendirerek bunun dağılımlar bazında istatistik sonuç çıkarımına yararlı yöntemlerden bahsetmekedir. Bu yöntemlerle bağımlı iki değişkenli durumlar için sıra istatistikleri ve onların eşleniklerinin kullanımını içermektedir. Bu yönüyle çalışma, bağımlı rasgele değişkenlerin ortak ve marjinal dağılımlarının kullanımını gerektirmeyecek yaklaşımlarla güven ve tolerans aralıklarına istatistik sonuç çıkarımı yapılmasına olanak sağlayan kuram ve yöntem yaklaşımları sunmaktadır.

Tezde iki değişkenli dağılımlar ve bağımlı iki değişkenli modellemeler ile ilgili çıkarımlarda bulunulmuştur ancak sunulan sonuçlar istatistik kuramı bakımından çok değişkenli her durum için geçerlidir. Üç veya daha fazla her durum için genelleştirme yapılabilir. Bu yapılan genelleştirme istatistik bilimi ve uygulamaları bakımından son derece önemli ve yararlı bilgiler sağlayacaktır.

Risk ölçütlerinden Riske Maruz Değer (VaR) aktüeryal risk yönetiminin önemli konularından biridir. Tezde Riske Maruz değer (VaR) dikkate alınarak tolerans aralıkları oluşturulmuştur. Bu anlamda sunulan sonuçlar aktüerya risk yönetimi ve finansal risk yönetimi alanında teorik anlamda önemli sonuçlar sunmaktadır. Gelecekte yazılacak programlar yardımıyla da uygulama açısından önemli gelişmeler olacaktır.

Ayrıca Riske Maruz Değer (VaR) için elde edilen yapılar Tail Value-at-Risk (TVaR), Conditional Value-at-Risk (CVaR), Conditional Tail Expectation (CTE) ve VaR' ın fonksiyonları olan diğer risk ölçütleri için de kolayca elde edilebilir.

KAYNAKLAR

- Altınsoy, B. 2009. İki Değişkenli Olasılık İntegral Dönüşümlerinin Bir Sınıfı ve Dağılım Fonskiyonlarının Kopulaları, Doktora Tezi. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Bairamov, I. G., Bekçi, M. 1999. Concomitant of order statistics in FGM type bivariate uniform distributions. İstatistik, Journal of the Turkish Statistical Association, Vol. 2, N. 2, pp. 135-144.
- Bairamov. I., Kotz, S. and Bekci, M. 2001. New generalized Farlie-Gumbel-Morgenstern distributins and concomitants of order statistics. Journal of Applied Statistics, 28; 521-536.
- Bairamov I.G. , Kotz S. and Gebizlioglu O.L. 2001. On a generalization of FGM and Sarmanov class of distributions. South African Statistical Journal, 35; 205-224.
- Bairamov I.G. and Kotz S. 2002. Dependence structure and symmetry of Huang -Kotz FGM distributions and their extensions. Metrika, 56 /1; 55-72 Springer.
- Bairamov, I. G., Eryılmaz, S. 2006. Spacings, exceedances and concomitants in progressive Type II censoring scheme. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 136, 527-536.
- Balasubramanian, K. and Beg, M. I. 1997. Concomitant of order statistics in Morgenstern type bivariate exponential distributions. Journal of Applied Statistics 5; 233-245.
- Balasubramanian, K. and Beg, M. I. 1998. Concomitant of order statistics in Gumbel' s bivariate exponential distributions. Sankhya 60; Series B, Pt. 3, 399-406.
- Beg, M.I., Ahsanullah, M. 2008. Concomitants of generalized order statistics from Farlie-Gumbel-Morgenstern distributions. Statistical Methodology 5 (2008) 1-20.

- Bhattacharya, P. K. 1984. Induced Order Statistics: Theory and Applications. Handbook of Statistics (P. R. Krishnaiah and P. K. Sen eds.) 4; 383-403, Elsevier BV.
- Bedford, T. 2006. Copulas, degenerate distributions and quantile tests in competing risk problems. Journal of Statistical Planning and Inference 136; 1572-1587.
- Bekçi, M. 2003. Farlie-Gumbel-Morgenstern Dağılımları ve Sıra İstatistiklerinin Eşlenikleri, Doktora Tezi. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Caperaa, P., Fougues, A.-L., Genest, C., 1997. A stochastic ordering based on a decomposition of Kendall's tau. In: Benes, V., Stepan, J. (Eds.), Distributions with Given Marginals and Moment Problems. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 81-86.
- Chen, L. A. and Welsh, A. H. 2002. Distribution function based bivariate quantiles. Journal of Multivariate Analysis 83; 208-231.
- David, H. A. and Nagaraja, H. N. 1998. Concomitants of order statistics. Handbook of Statistics Vol. 16; Elsevier BV.
- David, H.A., Nagaraja, H.N., 2003. Order Statistics (third edition), John Wiley, New York.
- Denneberg, D. and Leufer, N. 2008. Dual volatility and dependence parameters and the copula. International Journal of Approximate Reasoning 48; 697-708.
- Denuit, M., Genest, C. and Marceau, E. 1999. Stochastic bounds on sums of dependent risks. Insurance: Mathematics and Economics 25; 11-21.
- Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M. and Kaas, R. 2005. Actuarial Theory for Dependent Risks; Measures, Orders and Models. Wiley, New York.
- Embrechts, P., Höing, A. and Juri, A. 2003. Using Copulae to bound the Value-at-Risk for functions of dependent risks. Finance and Stochastic 7; 145-167.
- Embrechts, P., Höing, A. and Puccetti, G. 2005. Worst VaR scenarios. Insurance: Mathematics and Economics 37; 115-134.

- Eryilmaz, S., Bairamov, I., 2003. On a new sample rank of an order statistics and its concomitant. *Statist. Probab. Lett.* 63, 123-131.
- Eryilmaz, S. 2005. Concomitants in a sequence of independent nonidentically distributed random vectors. *Communication in Statistics* 34; 1925-1933.
- Fernandez, V. 2008. Copula-based measures of dependence structure in assets returns. *Physica A* 387; 3615-3628.
- Garolda Guillem, A. I., 1997. Dependencia y Tests de Rangos para Leyes Bidimensionales. Ph. D. Thesis, University of Granada, Spain.
- Gebizlioğlu, Ö. L. and Kızılok, E. 2007. Risk measurement and optimization for two dependent portfolios. *Risk Measurement and Solvency (RMS) Meeting*, 20-24 May 2007, Belek-Antalya.
- Gebizlioglu, Ö. L., Yagci, B., 2008. Tolerance intervals for quantiles of bivariate risks and risk measurement. *Insurance: Mathematics and Economics* 42, 1022-1027.
- Genest, C., Rivest, L.-P., 1993. Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas. *J. Amer. Statist. Assoc.* 88, 1034-1043.
- Gibbons, J. D. 1971. *Nonparametric Statistical Inference*. McGraw-Hill.
- Joe, H. 1997. *Multivariate Models and Dependence Concepts*. Chapman and Hall.
- Kaas, R., Goovaerts, M. and Dhaene, J. 2008. *Modern Actuarial Risk Theory*. Springer Verlag.
- Mari, D. D. and Kotz, S. 2001. *Correlation and Dependence*. Imperial College Press.
- Nagaraja, H. N. and David, H. A. 1994. Distribution of the maximum of concomitants of selected order statistics. *The Annals of Statistics*, 22 (1); 478-494.
- Nelsen, R. B. 1999. *An Introduction to Copulas*. Lecture Notes in Statistics, Vol. 139, Springer-Verlag, New York.

- Nelsen, R. B., Quesada-Molina, J. J., Rodriguez-Lallena, J. A. and Ubeda-Flores, M. 2001. Distribution functions of copulas: a class of bivariate probability integral transforms. *Statistics & Probability Letters*, 54; 277-282.
- Rodriguez-Lallena, J. A. and Ubeda-Flores, M. 2003. Distribution functions of multivariate copulas. *Statistics & Probability Letters*, 64; 41-50.
- Rüschendorf, L. 2005. Stochastic ordering of risks, influence of dependence and A.S. constructions. In; *Advances on Models, Characterizations and Applications* (Eds. Balakrishnan, N., Bairamov, I.G., Gebizlioglu, O.L.), Chapman and Hall/CRC, 19-55p.
- Sklar, A. 1959. Functions de repartition an dimensions at leurs marges. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* 8, 229-231.
- Tank, F. and Gebizlioglu, O. L. 2004. Sarmanov distribution class for dependent risks and its applications. *Belgian Actuarial Bulletin*, 4, 50-52.
- Tank, F., Gebizlioglu, O. L. and Apaydin, A. 2006. Determination of dependency parameter in joint distribution of dependent risks by fuzzy approach. *Insurance: Mathematics and Economics*, 38; 189-194.
- Yagcı, B. 2002. Archimedian Kopulaların Genelleştirilmesi ve Archimax Kopulalar Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Zacks, S. 1970. *The Theory of Statistical Inference*. Wiley.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Esra AYDIN

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Tarihi : 08.03.1987

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : İncirli Lisesi (2001-2005)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü (2005-2009)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı (2009-2012)