

İKİ DEĞİŞKENLİ FİBONACCİ VE LUCAS p -POLİNOMLARI

Coşkun ATAĞ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

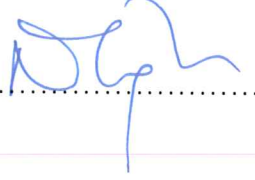
**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ŞUBAT 2011
ANKARA**

COŞKUN ATAĞ tarafından hazırlanan İKİ DEĞİŞKENLİ FİBONACCİ VE LUCAS p -POLİNOMLARI adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Naim TUĞLU

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı



Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

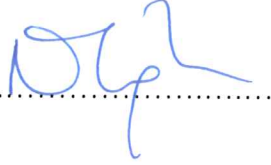
Prof. Dr. Adnan TERCAN

Matematik Anabilim Dalı, Hacettepe Üniversitesi



Doç. Dr. Naim TUĞLU

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi



Prof. Dr. Dursun TAŞCI

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi



Tarih: ..15 / 02 / 2011

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü



TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Coşkun ATAĞ

İKİ DEĞİŞKENLİ FİBONACCİ VE LUCAS p – POLİNOMLARI
(Yüksek Lisans Tezi)

Coşkun ATAĞ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
OCAK 2011

ÖZET

Bu çalışmada iki değişkenli Fibonacci ve Lucas p – polinomları göz önüne alınarak bu polinomlarda çeşitli düzenlemeler yapılarak, Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobstal, Jacobsthal-Lucas p – polinomları, p – sayıları iki değişkenli Fibonacci, Lucas polinomları, Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobstal, Jacobsthal-Lucas polinomlarına ve sayılarının elde edilebileceği gösterilmiştir. İki değişkenli Fibonacci p – polinomları içeren bazı formüller elde edilmiştir. Bu formüllerden yararlanılarak bu polinomlar için birçok temel özdeşlikler elde edilmiştir. İki değişkenli Fibonacci ve Lucas p – polinomları içeren toplam özdeşlikleri elde edilmiştir. Son olarak p – polinomlarının bölünebilme özellikleri incelenmiştir.

Bilim Kodu : 204.1.025

Anahtar Kelimeler : İki değişkenli Fibonacci p – polinomları, İki değişkenli Lucas p – polinomları,

Sayfa Adedi : 43

Tez Yöneticisi : Doç. Dr. Naim TUĞLU

BIVARIATE FIBONACCI AND LUCAS p – POLYNOMIALS**(M.Sc. Thesis)****Coşkun ATAĞ****GAZI UNIVERSITY****INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY****JANUARY 2011****ABSTRACT**

The aim of this paper is to show that Fibonacci, Lucas, Pell, Pell - Lucas, Jacobstal, Jacobsthal - Lucas polynomials and numbers can be obtained through taking into account of bivariate Fibonacci and Lucas p – polynomials and their versions. Moreover, some formulas including bivariate Fibonacci p – polynomials have been obtained and the use of these formulas have provided with many basic identities for these polynomials. Some total identities including Fibonacci and Lucas p – polynomials have been obtained. Finally, the divisibility properties of polynomials are investigated.

Science Code : 204.1.025**Key Words : Fibonacci p – polynomial of two variable, Lucas p – polynomial of two variable****Page Number: 43****Advisor : Assoc. Dr. Naim TUĞLU**

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli katkılarıyla beni yönlendiren ve her safhasında bilgisine başvurduğum Sayın Hocam Doç. Dr. Naim TUĞLU'ya teşekkürü bir borç bilirim. Yine bu çalışmanın hazırlanması aşamasında düşünce ve önerileriyle desteklerini esirgemeyen, Sayın Prof. Dr. Dursun TAŞCI ve Sayın Prof. Dr. Cemil YILDIZ hocalarıma da şükranlarımı sunarım. Ayrıca kıymetli tecrübelerinden faydalandığım Sayın Dr. Mustafa AŞCI'ya ve Doç. Dr. Ercan ALTINIŞIK hocalarıma, manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme, değerli eşim Merve KORKMAZ ATAĞ'a, ve oğlum Eymen ATAĞ'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. BAZI TEMEL KAVRAMLAR VE REKÜRANS BAĞINTILATILARI	2
3. ÜRETEÇ FONKSİYONLARI VE ,TOPLAM FORMÜLLERİ	10
4. TOPLAM ÖZELLİKLERİ	29
5. İKİ DEĞİŞKENLİ FİBONACCİ VE LUCAS P-POLİNOMLARINDA BÖLÜNEBİLME	34
KAYNAKLAR	40
ÖZGEÇMİŞ	43

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 2.1. Özel seçimlerle Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas polinomları, Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas p – polinomları, polinomaları ve sayıları.....	6
Çizelge 2.2. İki değişkenli Fibonacci ve Lucas p – polinomları, Fibonacci, Lucas p – polinomları, Fibonacci, Lucas p – sayıları	7
Çizelge 2.3. İki değişkenli Pell ve Pell-Lucas p – polinomları, Pell, Pell-Lucas p – polinomları, Pell, Pell-Lucas p – sayıları	8
Çizelge 2.4. İki değişkenli Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas p –polinomları, Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas p –polinomları, Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas p – sayıları.....	9

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
F_n	n . Fibonacci sayısı
L_n	n . Lucas sayısı
P_n	n . Pell sayısı
Q_n	n . Pell-Lucas sayısı
J_n	n . Jacobsthal sayısı
j_n	n . Jacobsthal-Lucas sayısı
$F_n(x, y)$	n . iki değişkenli Fibonacci polinomu
$L_n(x, y)$	n . iki değişkenli Lucas polinomu
$F_{p,n}(x, y)$	n . iki değişkenli Fibonacci p – polinomu
$F_{p,n}$	n . Fibonacci p – sayıları
$L_{p,n}$	n . Lucas p – sayıları
$F_{p,n}(x)$	n . Fibonacci p – polinomu
$L_{p,n}(x)$	n . Lucas p – polinomu
$F_{p,n}(x, y)$	n . iki değişkenli Fibonacci p – polinomu
$L_{p,n}(x, y)$	n . iki değişkenli Lucas p – polinomu
$g(z)$	n . iki değişkenli Fibonacci p – polinomlarının üreteç Fonksiyonu
$h(z)$	n . iki değişkenli Lucas p – polinomlarının üreteç fonksiyonu

1.GİRİŞ

Bu çalışmada Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayılarına ait bazı ön bilgiler verilerek Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas Polinomları ve iki değişkenli polinomlarında bilinen indirgeme bağıntılarından bahsedilecektir. Daha sonra Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas p – sayıları, p – polinomları ve iki değişkenli polinomlarının indirgeme bağıntıları göz önünde alınarak, iki değişkenli p – polinomlarında p, x, y değişkenleri yerine çeşitli sayılar seçilerek Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas p – polinomlarını, p – sayılarını, iki değişkenli polinomları, polinomlarını ve sayılarının elde edilebileceğini göstereceğiz.

Literatürde Fibonacci, Lucas sayılarının ve polinomlarının birçok genelleştirmeleri mevcuttur. Bu çalışmaların bir kısmı Catalini [1,2] , Tan [3], Kocer [4], Djordjevic [5-9], Stakhov [10-11], MacHenry [12], Frei [13] olarak gösterilebilir. Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili bir birçok kitap yazılmıştır [17-20].

2.BAZI TEMEL KAVRAMLAR VE REKÜRANS BAĞINTILATILARI

2.1 Tanım

$F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ olmak üzere her $n \geq 2$ için n Fibonacci sayısı F_n

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (2.1)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır.

2.2 Tanım

$L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ olmak üzere her $n \geq 2$ için n Lucas sayısı L_n

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad (2.2)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır.

2.3 Tanım

$P_0 = 0$ ve $P_1 = 1$ olmak üzere her $n \geq 2$ için n Pell sayısı P_n

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2} \quad (2.3)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır.

2.4 Tanım

$Q_0 = 2$ ve $Q_1 = 2$ olmak üzere her $n \geq 2$ için n Pell-Lucas sayısı Q_n

$$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2} \quad (2.4)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır.

2.5 Tanım

$J_0 = 2$ ve $J_1 = 1$ olmak üzere her $n \geq 2$ için n Jacobsthal sayısı J_n

$$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2} \quad (2.5)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır.

2.6 Tanım

$j_0 = 0$ ve $j_1 = 1$ olmak üzere her $n \geq 2$ için n Jacobsthal-Lucas sayısı j_n

$$j_n = j_{n-1} + 2j_{n-2} \quad (2.6)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır.

2.7 Tanım

$f_0(x) = 0$ ve $f_1(x) = 1$ olmak üzere her $n \geq 2$ için n . Fibonacci polinomu $f_n(x)$

$$f_n(x) = x f_{n-1}(x) + f_{n-2}(x) \quad (2.7)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır.

2.8 Tanım

$\ell_0(x) = 2$ ve $\ell_1(x) = x$ olmak üzere her $n \geq 2$ için n . Lucas polinomu $\ell_n(x)$

$$\ell_n(x) = x \ell_{n-1}(x) + \ell_{n-2}(x) \quad (2.8)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır.

2.9 Tanım

$F_{p,0} = 0$, $F_{p,1} = F_{p,2} = \dots = F_{p,p} = 1$ başlangıç koşulları ve $n = 1, 2, 3, \dots, p$ olmak üzere her $p \geq 1$, $n > p$ için n . Fibonacci p – sayısı $F_{p,n}$

$$F_{p,n} = F_{p,n-1} + F_{p,n-p-1} \quad (2.9)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır.

2.10 Tanım

$L_{p,0} = p + 1$, $L_{p,1} = L_{p,2} = \dots = L_{p,p} = 1$ başlangıç koşulları ve $n = 1, 2, 3, \dots, p$ olmak üzere her $p \geq 1$ ve $n > p$ için n . Lucas p – sayısı $L_{p,n}$ ile gösterilir ve

$$L_{p,n} = L_{p,n-1} + L_{p,n-p-1} \quad (2.10)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır.

2.11 Tanım

$F_{p,0}(x, y) = 0$, $F_{p,n}(x, y) = x^{n-1}$ başlangıç koşulları ve $n = 1, 2, 3, \dots, p$ olmak üzere her $p \geq 1$, $n > p$ için iki değişkenli Fibonacci p -polinomu $F_{p,n}(x, y)$

$$F_{p,n}(x, y) = xF_{p,n-1}(x, y) + yF_{p,n-p-1}(x, y) \quad , \quad n > p \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots, p \quad (2.11)$$

şeklinde tanımlanır.

Benzer şekilde $L_{p,0}(x, y) = p + 1$, $L_{p,n}(x, y) = x^n$ başlangıç koşulları ve $n = 1, 2, 3, \dots, p$ olmak üzere her $p \geq 1$, $n > p$ için iki değişkenli Lucas p -polinomu $L_{p,n}(x, y)$

$$L_{p,n}(x, y) = xL_{p,n-1}(x, y) + yL_{p,n-p-1}(x, y) \quad , \quad n > p \quad (2.12)$$

ile tanımlanır.

$n \geq 2$ için x, y, p için özel seçimler yapılarak diğer sayılar ve polinomlar elde edilir.

Çizelge 2.1. Özel seçimlerle Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas polinomları, Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas p – polinomları, polinomları ve sayıları

x	y	p	$F_{p,n}(x, y)$	Gösterim	$L_{p,n}(x, y)$	Gösterim
x	y	1	İki değişkenli Fibonacci polinomları	$F_n(x, y)$	İki değişkenli Lucas polinomları	$L_n(x, y)$
x	1	p	Fibonacci p – polinomları	$F_{p,n}(x)$	Lucas p – polinomları	$L_{p,n}(x)$
x	1	1	Fibonacci polinomları	$f_{p,n}(x)$	Lucas polinomları	$\ell_{p,n}(x)$
1	1	p	Fibonacci p – sayıları	$F_{p,n}$	Lucas p – sayıları	$L_{p,n}$
1	1	1	Fibonacci sayıları	F_n	Lucas sayıları	L_n
$2x$	y	p	İki değişkenli Pell p – polinomları	$P_{p,n}(x, y)$	İki değişkenli Pell-Lucas p – polinomları	$Q_{p,n}(x, y)$
$2x$	y	1	İki değişkenli Pell polinomları	$P_n(x, y)$	İki değişkenli Pell-Lucas polinomları	$Q_n(x, y)$
$2x$	1	p	Pell p – polinomları	$P_{p,n}(x)$	Pell-Lucas p – polinomları	$Q_{p,n}(x)$
$2x$	1	1	Pell polinomları	$P_n(x)$	Pell-Lucas polinomları	$Q_n(x)$
2	1	1	Pell sayıları	P_n	Pell-Lucas sayıları	Q_n
x	$2y$	p	İki değişkenli Jacobsthal p – polinomları	$J_{p,n}(x, y)$	İki değişkenli Jacobsthal-Lucas p – polinomları	$j_{p,n}(x, y)$
x	$2y$	1	İki değişkenli Jacobsthal polinomları	$J_n(x, y)$	İki değişkenli Jacobsthal-Lucas polinomları	$j_n(x, y)$
1	$2y$	1	Jacobsthal polinomları	$J_n(x)$	Jacobsthal-Lucas polinomları	$j_n(x)$
1	2	1	Jacobsthal sayıları	J_n	Jacobsthal polinomları	j_n

Çizelge 2.2. İki değişkenli Fibonacci ve Lucas p – polinomları, Fibonacci, Lucas p – polinomları, Fibonacci, Lucas p – sayıları ($p = 1, 2, 3$
 $n = 0, 1, 2, 3, \dots, 8$)

p	İki değişkenli Fibonacci p – polinomları $F_{p,n}(x, y)$	Fibonacci p – polinomları $F_{p,n}(x)$	Fibonacci p – sayıları $F_{p,n}$
1	$0, 1, x, x^2 + y, x^3 + 2yx, x^4 + 3yx^2 + y^2,$ $x^5 + 4yx^3 + 3y^2x, x^6 + 5yx^4 + 6y^2x^2 + y^3,$ $x^7 + 6yx^5 + 10y^2x^3 + 4y^3x,$ $x^8 + 7yx^6 + 15y^2x^4 + 10y^3x^2 + y^4$	$0, 1, x, x^2 + 1, x^3 + 2x, x^4 + 3x^2 + 1,$ $x^5 + 4x^3 + 3x, x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 1,$ $x^7 + 6x^5 + 10x^3 + 4x,$ $x^8 + 7x^6 + 15x^4 + 10x^2 + 1$	$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,$ $21, 34$
2	$0, 1, x, x^2, x^3 + y, x^4 + 2yx, x^5 + 3yx^2,$ $x^6 + 4yx^3 + y^2, x^7 + 5yx^4 + 3y^2x, x^8 + 6yx^5 + 6y^2x^2$	$0, 1, x, x^2, x^3 + 1, x^4 + 2x, x^5 + 3x^2,$ $x^6 + 4x^3 + 1, x^7 + 5x^4 + 3x, x^8 + 6x^5 + 6x^2$	$0, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6,$ $9, 13$
3	$0, 1, x, x^2, x^3, x^4 + y, x^5 + 2yx,$ $x^6 + 3yx^2, x^7 + 4yx^3, x^8 + 5yx^4 + y^2$	$0, 1, x, x^2, x^3, x^4 + 1, x^5 + 2x,$ $x^6 + 3x^2, x^7 + 4x^3, x^8 + 5x^4 + 1$	$0, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4,$ $5, 7$
p	İki değişkenli Lucas p – polinomları $L_{p,n}(x, y)$	Lucas p – polinomları $L_{p,n}(x)$	Lucas p – sayıları $L_{p,n}$
1	$2, x, x^2 + 2y, x^3 + 3yx, x^4 + 4yx^2 + 2y^2,$ $x^5 + 5yx^3 + 5y^2x, x^6 + 6yx^4 + 9y^2x^2 + 2y^3,$ $x^7 + 7yx^5 + 14y^2x^3 + 7y^3x,$ $x^8 + 8yx^6 + 20y^2x^4 + 16y^3x^2 + 2y^4$	$2, x, x^2 + 2, x^3 + 3x, x^4 + 4x^2 + 2,$ $x^5 + 5x^3 + 5x, x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 2,$ $x^7 + 7x^5 + 14x^3 + 7x,$ $x^8 + 8x^6 + 20x^4 + 16x^2 + 2$	$2, 1, 3, 4, 7, 11,$ $18, 29, 47$
2	$3, x, x^2, x^3 + 3y, x^4 + 4yx, x^5 + 5yx^2,$ $x^6 + 6yx^3 + 3y^2, x^7 + 7yx^4 + 7y^2x,$ $x^8 + 8yx^5 + 12y^2x^2$	$3, x, x^2, x^3 + 3, x^4 + 4x, x^5 + 5x^2,$ $x^6 + 6x^3 + 3, x^7 + 7x^4 + 7x,$ $x^8 + 8x^5 + 12x^2$	$3, 1, 1, 4, 5, 6, 10,$ $15, 21$
3	$4x, x, x^2, x^3, x^4 + 4y, x^5 + 5yx,$ $x^6 + 6yx^2, x^7 + 7yx^3, x^8 + 8yx^4 + 4y^2$	$4, x, x^2, x^3, x^4 + 4, x^5 + 5x,$ $x^6 + 6x^2, x^7 + 7x^3, x^8 + 8x^4 + 4$	$4, 1, 1, 1, 5, 6, 7,$ $8, 13$

Çizelge 2.3. İki değişkenli Pell ve Pell-Lucas p – polinomları, Pell, Pell-Lucas p – polinomları, Pell, Pell-Lucas p – sayıları ($p = 1, 2, 3$
 $n = 0, 1, 2, 3, \dots, 8$)

p	İki değişkenli Pell p – polinomları $P_{p,n}(x, y)$	Pell p – polinomları $P_{p,n}(x)$	Pell p – sayıları $P_{p,n}$
1	$0, 1, 2x, 4x^2 + y, 8x^3 + 4yx, 16x^4 + 12yx^2 + y^2,$ $32x^5 + 32yx^3 + 6y^2x, 64x^6 + 80yx^4 + 24y^2x^2 + y^3,$ $128x^7 + 192yx^5 + 80y^2x^3 + 8y^3x,$ $256x^8 + 448yx^6 + 240y^2x^4 + 40y^3x^2 + y^4$	$0, 1, 2x, 4x^2 + 1, 8x^3 + 4x, 16x^4 + 12x^2 + 1,$ $32x^5 + 32x^3 + 6x, 64x^6 + 80x^4 + 24x^2 + 1,$ $128x^7 + 192x^5 + 80x^3 + 8x,$ $256x^8 + 448x^6 + 240x^4 + 40x^2 + 1$	$0, 1, 2, 5, 12, 29, 70,$ $169, 408, 985$
2	$0, 1, 2x, 4x^2, 8x^3 + y, 16x^4 + 4yx, 32x^5 + 12yx^2,$ $64x^6 + 32yx^3 + y^2, 128x^7 + 80yx^4 + 6y^2x,$ $256x^8 + 192yx^5 + 24y^2x^2$	$0, 1, 2x, 4x^2, 8x^3 + 1, 16x^4 + 4x, 32x^5 + 12x^2,$ $64x^6 + 32x^3 + 1, 128x^7 + 80x^4 + 6x,$ $256x^8 + 192x^5 + 24x^2$	$0, 1, 2, 4, 9, 20, 44,$ $97, 214, 472$
3	$0, 1, 2x, 4x^2, 8x^3, 16x^4 + y, 32x^5 + 4yx,$ $64x^6 + 12yx^2, 128x^7 + 32yx^3, 256x^8 + 80yx^4 + y^2$	$0, 1, 2x, 4x^2, 8x^3, 16x^4 + 1, 32x^5 + 4x,$ $64x^6 + 12x^2, 128x^7 + 32x^3, 256x^8 + 80x^4 + 1$	$0, 1, 2, 4, 8, 17, 36,$ $76, 160, 337$
p	İki değişkenli Pell-Lucas p – polinomları $Q_{p,n}(x, y)$	Pell-Lucas p – polinomları $Q_{p,n}(x)$	Pell-Lucas p – sayıları Q_p
1	$2, 2x, 4x^2 + 2y, 8x^3 + 6yx, 16x^4 + 16yx^2 + 2y^2,$ $32x^5 + 40yx^3 + 10y^2x, 64x^6 + 96yx^4 + 36y^2x^2 + 2y^3,$ $128x^7 + 224yx^5 + 112y^2x^3 + 14y^3x,$ $256x^8 + 512yx^6 + 320y^2x^4 + 64y^3x^2 + 2y^4$	$2, 2x, 4x^2 + 2, 8x^3 + 6x, 16x^4 + 16x^2 + 2,$ $32x^5 + 40x^3 + 10x, 64x^6 + 96x^4 + 36x^2 + 2,$ $128x^7 + 224x^5 + 112x^3 + 14x,$ $256x^8 + 512x^6 + 320x^4 + 64x^2 + 2$	$2, 2, 6, 14, 34, 82,$ $198, 478, 1154$
2	$3, 2x, 4x^2, 8x^3 + 3y, 16x^4 + 8yx, 32x^5 + 20yx^2,$ $64x^6 + 48yx^3 + 3y^2, 128x^7 + 112yx^4 + 14y^2x,$ $256x^8 + 256yx^5 + 48y^2x^2$	$3, 2x, 4x^2, 8x^3 + 3, 16x^4 + 8x, 32x^5 + 20x^2,$ $64x^6 + 48x^3 + 3, 128x^7 + 112x^4 + 14x,$ $256x^8 + 256x^5 + 48x^2$	$3, 2, 4, 11, 24, 52,$ $115, 254, 560$
3	$4, 2x, 4x^2, 8x^3, 16x^4 + 4y, 32x^5 + 10yx, 64x^6 + 24yx^2,$ $128x^7 + 56yx^3, 256x^8 + 128yx^4 + 4y^2$	$4, 2x, 4x^2, 8x^3, 16x^4 + 4, 32x^5 + 10x, 64x^6 + 24x^2,$ $128x^7 + 56x^3, 256x^8 + 128x^4 + 4$	$4, 2, 4, 8, 20, 42$ $88, 184, 388$

Çizelge 2.4. İki değişkenli Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas p -polinomları, Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas p -polinomları, Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas p -sayıları ($p = 1, 2, 3$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots, 8$

p	İki değişkenli Jacobsthal p -polinomları $J_{p,n}(x, y)$	Jacobsthal p -polinomları $J_{p,n}(x)$	Jacobsthal p -sayıları $J_{p,n}$
1	$2, x, x^2 + 4y, x^3 + 6yx, x^4 + 8yx^2 + 8y^2,$ $x^5 + 10yx^3 + 20y^2x, x^6 + 12yx^4 + 36y^2x^2 + 16y^3,$ $x^7 + 14yx^5 + 56y^2x^3 + 56y^3x,$ $x^8 + 16yx^6 + 80y^2x^4 + 128y^3x^2 + 32y^4$	$2, 1, 1 + 4y, 1 + 6y, 1 + 8y + 8y^2,$ $1 + 10y + 20y^2, 1 + 12y + 36y^2 + 16y^3,$ $1 + 14y + 56y^2 + 56y^3,$ $1 + 16y + 80y^2 + 128y^3 + 32y^4$	$2, 1, 5, 7, 17, 31,$ $65, 127, 257$
2	$3, x, x^2, x^3 + 6y, x^4 + 8yx, x^5 + 10yx^2,$ $x^6 + 12yx^3 + 12y^2, x^7 + 14yx^4 + 28y^2x,$ $x^8 + 16yx^5 + 48y^2x^2$	$3, 1, 1, 1 + 6y, 1 + 8y, 1 + 10y,$ $1 + 12y + 12y^2, 1 + 14y + 28y^2,$ $1 + 16y + 48y^2$	$3, 1, 1, 7, 9, 11,$ $25, 43, 65$
3	$4, x, x^2, x^3, x^4 + 8y, x^5 + 10yx,$ $x^6 + 12yx^2, x^7 + 14yx^3, x^8 + 16yx^4 + 16y^2$	$4, 1, 1, 1, 1 + 8y, 1 + 10y, 1 + 12y,$ $1 + 14y, 1 + 16y + 16y^2$	$4, 1, 1, 1, 9, 11,$ $13, 15, 33$
p	İki değişkenli Jacobsthal-Lucas p -polinomları $j_{p,n}(x, y)$	Jacobsthal-Lucas p -polinomları $j_{p,n}(x)$	Jacobsthal-Lucas p -sayıları $j_{p,n}$
1	$0, 1, x, x^2 + 2y, x^3 + 4yx, x^4 + 6yx^2 + 4y^2,$ $x^5 + 8yx^3 + 12y^2x, x^6 + 10yx^4 + 24y^2x^2 + 8y^3,$ $x^7 + 12yx^5 + 40y^2x^3 + 32y^3x,$ $x^8 + 14yx^6 + 60y^2x^4 + 80y^3x^2 + 16y^4$	$0, 1, 1, 1 + 2y, 1 + 4y, 1 + 6y + 4y^2, 1 + 8y + 12y^2,$ $1 + 10y + 24y^2 + 8y^3, 1 + 12y + 40y^2 + 32y^3,$ $1 + 14y + 60y^2 + 80y^3 + 16y^4$	$0, 1, 1, 3, 5, 11, 21,$ $43, 85, 171$
2	$0, 1, x, x^2, x^3 + 2y, x^4 + 4yx, x^5 + 6yx^2, x^6 + 8yx^3 + 4y^2,$ $x^7 + 10yx^4 + 12y^2x, x^8 + 12yx^5 + 24y^2x^2$	$0, 1, 1, 1, 1 + 2y, 1 + 4y, 1 + 6y, 1 + 8y + 4y^2,$ $1 + 10y + 12y^2, 1 + 12y + 24y^2$	$0, 1, 1, 1, 3, 5, 7,$ $13, 23, 37$
3	$0, 1, x, x^2, x^3, x^4 + 2y, x^5 + 4yx, x^6 + 6yx^2,$ $x^7 + 8yx^3, x^8 + 10yx^4 + 4y^2$	$0, 1, 1, 1, 1 + 2y, 1 + 4y, 1 + 6y,$ $1 + 8y, 1 + 10y + 4y^2$	$0, 1, 1, 1, 1, 3, 5,$ $7, 9, 15$

3. ÜRETEÇ FONKSİYONLARI VE TOPLAM FORMÜLLERİ

Üreteç fonksiyonları sabit katsayılı homogen lineer rekürans bağıntıların çözümünde önemli rol oynar. 1718 yılında Fransız matematikçi Abraham De Moivre (1667-1754) Fibonacci rekürans bağıntısını çözmek için üreteç fonksiyonunu bulmuştur.

3.1. Tanım

$a_0, a_1, a_2, \dots$ bir reel sayı dizisi olmak üzere

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (3.1)$$

ifadesine $\{a_n\}$ dizisinin üreteç fonksiyonu denir. Üreteç fonksiyonu sonlu diziler içinde tanımlanabilir.

Şimdi iki değişkenli Fibonacci p -polinomlarının üreteç fonksiyonunu aşağıdaki teoremle verelim.

3.1. Teorem

$F_{p,n}(x, y)$ iki değişkenli Fibonacci p -polinomu olmak üzere $F_{p,n}(x, y)$ 'nin üreteç fonksiyonu

$$g(z) = \frac{z}{1 - xz - yz^{p+1}} \quad (3.2)$$

dir.

İspat

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{p,n}(x, y) z^n$$

olsun.

$$g(z) = F_{p,1}(x, y)z + F_{p,2}(x, y)z^2 + \dots + F_{p,p}(x, y)z^p + F_{p,p+1}(x, y)z^{p+1} + \dots + F_{p,n}(x, y)z^n + \dots$$

$$= z + xz^2 + \dots + x^{p-1}z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} F_{p,n}(x, y)z^n$$

$$= z + xz^2 + \dots + x^{p-1}z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} (x F_{p,n-1}(x, y) + y F_{p,n-p-1}(x, y)) z^n$$

$$= z + xz^2 + \dots + x^{p-1}z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} x F_{p,n-1}(x, y) z^n + \sum_{n=p+1}^{\infty} y F_{p,n-p-1}(x, y) z^n$$

$$= z + xz^2 + \dots + x^{p-1}z^p + xz \sum_{n=p+1}^{\infty} F_{p,n-1}(x, y) z^{n-1} + yz^{p+1} \sum_{n=p+1}^{\infty} F_{p,n-p-1}(x, y) z^{n-p-1}$$

$$= z + xz^2 + \dots + x^{p-1}z^p + xz \sum_{n=p}^{\infty} F_{p,n}(x, y) z^n + yz^{p+1} \sum_{n=p+1}^{\infty} F_{p,n-p-1}(x, y) z^{n-p-1}$$

$$= z + xz^2 + \dots + x^{p-1}z^p + xz \left(g(z) - z - xz^2 - x^2z^3 - \dots - x^{p-2}z^{p-1} \right) + yz^{p+1} g(z)$$

$$= z + xz^2 + \dots + x^{p-1}z^p + xzg(z) - xz^2 - x^2z^3 - \dots - x^{p-1}z^p + yz^{p+1} g(z)$$

düzenlenirse

$$g(z) = z + xz g(z) + yz^{p+1} g(z)$$

olup, buradan

$$g(z) = \frac{z}{1 - xz - yz^{p+1}}$$

elde edilir.

Şimdi iki değişkenli Lucas p – polinomlarının üreteç fonksiyonunu verelim.

3.2. Teorem

$L_{p,n}(x, y)$ iki değişkenli Lucas p – polinomu olmak üzere $L_{p,n}(x, y)$ ’ nin üreteç fonksiyonu

$$h(z) = \frac{p+1 - pxz}{1 - xz - yz^{p+1}} \quad (3.3)$$

dır.

İspat

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} L_{p,n}(x, y) z^n =$$

olsun.

$$h(z) = L_{p,0}(x, y) + L_{p,1}(x, y)z + \dots + L_{p,p}(x, y)z^p + \dots + L_{p,n}(x, y)z^n + \dots$$

$$= (p+1) + xz + \dots + x^p z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} L_{p,n}(x, y) z^n$$

olur.

$$\begin{aligned}
h(z) &= (p+1) + xz + x^2z^2 + \dots + x^p z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} (xL_{p,n-1}(x,y), yL_{p,n-p-1}(x,y)) z^n \\
&= (p+1) + xz + x^2z^2 + \dots + x^p z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} xL_{p,n-1}(x,y) z^n + \sum_{n=p+1}^{\infty} yL_{p,n-p-1}(x,y) z^n \\
&= (p+1) + xz + x^2z^2 + \dots + x^p z^p \\
&\quad + xz \sum_{n=p+1}^{\infty} L_{p,n-1}(x,y) z^{n-1} + yz^{p+1} \sum_{n=p+1}^{\infty} L_{p,n-p-1}(x,y) z^{n-p-1} \\
&= (p+1) + xz + x^2z^2 + \dots + x^p z^p + xz \sum_{n=p}^{\infty} L_{p,n}(x,y) z^n + yz^{p+1} \sum_{n=p+1}^{\infty} L_{p,n-p-1}(x,y) z^{n-p-1} \\
&= (p+1) + xz + x^2z^2 + \dots + x^p z^p \\
&\quad + xz(h(x) - (p+1) - xz - x^2z^2 - \dots - x^{p-1}z^{p-1}) yz^{p+1} h(z) \\
&= (p+1) + xz + x^2z^2 + \dots + x^p z^p + xzh(x) - xz(p+1) \\
&\quad - x^2z^2 - x^3z^3 - \dots - x^p z^p + yz^{p+1} h(z)
\end{aligned}$$

denklemleri düzenlenirse

$$h(z) = (p+1) + xz + xzh(z) - xz(p+1) + yz^{p+1}h(z)$$

ve

$$h(z) = \frac{p+1 - pxz}{1 - xz - yz^{p+1}}$$

elde edilir.

Bu iki teoremdeki özel seçimleri aşağıdaki sonuçla verebiliriz.

3.1.Sonuç

İki değişkenli Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas polinomlarının üreteç fonksiyonları

Teorem.3.1 ve Teorem.3.2' de sırasıyla

$p = 1$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x, y) z^n = \frac{z}{1 - xz - yz^2} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x, y) z^n = \frac{2 - xz}{1 - xz - yz^2}$$

$p = 1$ ve x yerine $2x$ alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x, y) z^n = \frac{z}{1 - 2xz - yz^2} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x, y) z^n = \frac{2 - 2xz}{1 - 2xz - yz^2}$$

$p = 1$ ve y yerine $2y$ alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_n(x, y) z^n = \frac{z}{1 - xz - 2yz^2} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} j_n(x, y) z^n = \frac{2 - xz}{1 - xz - 2yz^2}$$

Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas p - polinomlarının üreteç fonksiyonları

$y = 1$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{p,n}(x) z^n = \frac{z}{1 - xz - z^{p+1}} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} L_{p,n}(x) z^n = \frac{p+1 - pxz}{1 - xz - z^{p+1}}$$

$y = 1$ ve x yerine $2x$ alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{p,n}(x)z^n = \frac{z}{1-2xz-z^{p+1}} \quad \sum_{n=0}^{\infty} Q_{p,n}(x)z^n = \frac{p+1-2pxz}{1-2xz-z^{p+1}}$$

$x=1$ ve y yerine $2y$ alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_{p,n}(y)z^n = \frac{z}{1-z-2yz^{p+1}} \quad \sum_{n=0}^{\infty} j_{p,n}(y)z^n = \frac{p+1-pz}{1-z-2yz^{p+1}}$$

Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayılarının üreteç fonksiyonları

$p = x = y = 1$ durumunda

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n = \frac{z}{1-z-z^2} \quad \sum_{n=0}^{\infty} L_n z^n = \frac{2-z}{1-z-z^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n = \frac{z}{1-2z-z^2} \quad \sum_{n=0}^{\infty} Q_n z^n = \frac{2-2z}{1-2z-z^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_n z^n = \frac{z}{1-z-2z^2} \quad \sum_{n=0}^{\infty} j_n z^n = \frac{2-z}{1-z-2z^2}$$

İki değişkenli Fibonacci p -polinomlarının aşağıda vereceğimiz kombinatoryal özdeşlikleri içeren toplam formülleri incelenecektir.

3.3. Teorem

$F_{p,n}(x,y)$ iki değişkenli Fibonacci p -polinomu ve $L_{p,n}(x,y)$ iki değişkenli Lucas p -polinomu olmak üzere her $n \in \mathbb{Z}$ ve $p \geq 1$ için

$$L_{p,n}(x,y) = F_{p,n+1}(x,y) + p y F_{p,n-p}(x,y) \quad (3.4)$$

dır.

İspat

Eş.3.4' ü tümevarım metoduyla ispatlayalım.

$n = 0$ için

$$\begin{aligned} L_{p,0}(x, y) &= F_{p,1}(x, y) + py F_{p,-p}(x, y) \\ &= 1 + py \frac{1}{y} \\ &= 1 + p \\ &= L_{p,0}(x, y) \end{aligned}$$

dır.

$n = k$ için doğru olsun yani

$$L_{p,k}(x, y) = F_{p,k+1}(x, y) + py F_{p,k-p}(x, y)$$

olsun.

$n = k + 1$ için

$$\begin{aligned} F_{p,k+2}(x, y) + py F_{p,k-p+1}(x, y) &= x F_{p,k+1}(x, y) + F_{p,kp+1}(x, y) \\ &\quad + (x F_{p,k-p}(x, y) + py F_{p,k-p-1}(x, y)) \\ &= x (F_{p,k+1}(x, y) + F_{p,k-p}(x, y)) \\ &\quad + (F_{p,k-p+1}(x, y) + py F_{p,k-p-1}(x, y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{p,k+2}(x, y) + py F_{p,k-p+1}(x, y) &= x L_{p,k}(x, y) + y L_{p,k-p}(x, y) \\
 &= L_{p,k+1}(x, y)
 \end{aligned}$$

olur.

O halde $n = k + 1$ için doğru olur.

Eş.3.4 için özel durumlar aşağıdaki gibidir.

$x = y = 1$ için Fibonacci ve Lucas p – sayıları

$$L_{p,n} = F_{p,n+1} + p F_{p,n-p}$$

$p = x = y = 1$ için Fibonacci ve Lucas sayıları

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$$

$p = y = 1$ ve x yerine $2x$ seçilirse Pell ve Pell-Lucas sayıları

$$Q_n = 2P_{n+1} + P_{n-1}$$

$p = x = 1$ ve y yerine $2y$ seçilirse Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayıları

$$j_n = J_{n+1} + 2J_{n-1}$$

dir.

3.4. Teorem

$F_{p,n}(x, y)$ iki değişkenli Fibonacci p – polinomları olmak üzere $n \geq 0$ ve $p \geq 1$ için

$$F_{p,n}(x, y) = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{p+1} \right\rfloor} \binom{n-jp-1}{j} x^{n-j(p+1)-1} y^j \quad (3.5)$$

dır.

İspat

$$F_{p,n}(x, y) = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{p+1} \right\rfloor} \binom{n-jp-1}{j} x^{n-j(p+1)-1} y^j, n \geq 0, p \geq 1$$

Eş.3.5' i tümevarım metoduyla ispatlayalım.

$n = p, n = p + 1$ ve olması durumunda açık olarak

$$F_{p,1}(x, y) = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{p-1}{p+1} \right\rfloor} \binom{p-jp-1}{j} x^{p-j(p+1)-1} y^j = \sum_{j=0}^{\left\lfloor 0 \right\rfloor} \binom{-jp}{j} x^{-2j} y^j = \binom{0}{0} x^0 y^0 = 1$$

ve

$$F_{p,2}(x, y) = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{p}{p+1} \right\rfloor} \binom{p-jp}{j} x^{p-j(p+1)} y^j = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor} \binom{1-j}{j} x^{1-2j} y^0 = \binom{p}{0} x^1 y^0 = x$$

$F_{p,1} = 1$ olmak üzere $F_{p,2} = x$ olduğundan Eş.3.5 doğrudur.

Kabul edelim ki.

$k \geq p+2$ olmak üzere $n = k-1$ ve $n = k$ için eşitlik doğru olsun.

$$F_{p,k}(x, y) = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{k-1}{p+1} \right\rfloor} \binom{k-jp-1}{j} x^{k-j(p+1)-1} y^j$$

dir. Şimdi $n = k+1$ doğru olduğunu gösterelim

$$F_{p,k+1}(x, y) = x F_{p,k}(x, y) + y F_{p,k-p}(x, y)$$

$$= \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{k-1}{p+1} \right\rfloor} \binom{k-jp-1}{j} x^{k-j(p+1)} y^j + \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{k}{p+1} \right\rfloor} \binom{k-jp-p-1}{j} x^{k-(p+1)(1-j)} y^{j+1}$$

dir. İkinci ifadede $j+1=t$ seçilirse $j=0$ için $t=1$ olur. Ayrıca $j = \left\lfloor \frac{k-p-1}{p+1} \right\rfloor$ için

$$t = \left\lfloor \frac{k-p-1}{p+1} \right\rfloor + 1$$

$$= \left\lfloor \frac{k-p-1}{p+1} + 1 \right\rfloor$$

$$= \left\lfloor \frac{k-p-1+p+1}{p+1} \right\rfloor$$

$$= \left\lfloor \frac{k}{p+1} \right\rfloor$$

olur. Böylece

$$F_{p,k+1}(x, y) = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{k-1}{p+1} \right\rfloor} \binom{k-jp-1}{j} x^{k-j(p+1)} y^j + \sum_{t=1}^{\left\lfloor \frac{k}{p+1} \right\rfloor} \binom{k-tp-1}{t-1} x^{k-t(p+1)} y^t$$

İfadesindeki ikinci toplamda t yerine j yazılırsa

$$F_{p,k+1}(x, y) = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{k-1}{p+1} \right\rfloor} \binom{k-jp-1}{j} x^{k-j(p+1)} y^j + \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{k}{p+1} \right\rfloor} \binom{k-jp-1}{j-1} x^{k-j(p+1)} y^j$$

elde edilir.

I. Durum $p+1 \mid k$ olsun.

$p+1 \mid k$ ise $k = (p+1)t$ olacak şekilde $t \in \mathbb{Z}$ vardır.

$$\begin{aligned} F_{p,k+1}(x, y) &= \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{(p+1)t-1}{p+1} \right\rfloor} \binom{(p+1)t-jp-1}{j} x^{(p+1)t-j(p+1)} y^j + \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{(p+1)t}{p+1} \right\rfloor} \binom{(p+1)t-jp-1}{j-1} x^{(p+1)t-j(p+1)} y^j \\ &= \sum_{j=0}^{t-1} \binom{(t-j)p+t-1}{j} x^{(p+1)(t-j)} y^j + \sum_{j=1}^t \binom{(t-j)p+t-1}{j-1} x^{(p+1)(t-j)} y^j \\ &= \sum_{j=0}^{t-1} \binom{(t-j)p+t-1}{j} x^{(p+1)(t-j)} y^j + \sum_{j=1}^t \binom{(t-j)p+t-1}{j-1} x^{(p+1)(t-j)} y^j \mp \binom{(p+1)t-1}{0} x^{(p+1)t-1} \\ &\quad \pm \binom{(p+1)t-tp-1}{t} x^{(p+1)t-(p+1)t} y^t \\ &= \sum_{j=0}^t \binom{(t-j)p+t-1}{j} x^{(p+1)(t-j)} y^j + \sum_{j=0}^t \binom{(t-j)p+t-1}{j-1} x^{(p+1)(t-j)} y^j \mp \binom{(p+1)t-1}{0} x^{(p+1)t-1} \\ &\quad \pm \binom{t-1}{t} y^t \end{aligned}$$

$$F_{p,k+1}(x, y) = \sum_{j=0}^t \binom{(t-j)p+t-1}{j} x^{(p+1)(t-j)} y^j + \sum_{j=0}^t \binom{(t-j)p+t-1}{j-1} x^{(p+1)(t-j)} y^j$$

elde edilir. Bu ifadede

$$\binom{k-jp}{j} = \binom{k-jp-1}{j} + \binom{k-jp-1}{j-1}$$

Pascal formülü kullanılırsa

$$F_{p,k+1}(x, y) = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{k}{p+1} \right\rfloor} \binom{k-jp}{j} x^{k-j(p+1)} y^j$$

sonucuna varılır.

II. Durum $p+1 \nmid k$ ise bu durumda

$$pt \leq k < (p+1)t \Rightarrow \frac{pt}{p+1} \leq \frac{k}{p+1} < \frac{(p+1)t}{p+1}$$

$$\Rightarrow t-1 \leq \left\lfloor \frac{k}{p+1} \right\rfloor < t$$

$$\Rightarrow t = \left\lfloor \frac{k}{p+1} \right\rfloor$$

olur. Benzer şekilde ispat yapılabilir.

Özel seçimlerle iki değişkenli Fibonacci polinomları, Fibonacci p -polinomları, Fibonacci polinomları, Fibonacci p -sayıları ve Fibonacci sayıları için toplam formülleri aşağıdaki gibidir.

$$F_n(x, y) = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-j-1}{j} x^{n-2j-1} y^j, \quad F_{p,n}(x) = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{p+1} \right\rfloor} \binom{n-jp-1}{j} x^{n-j(p+1)-1}$$

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-j-1}{j} x^{n-2j-1} \quad F_{p,n} = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{p+1} \right\rfloor} \binom{n-jp-1}{j}$$

$$F_n = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-j-1}{j}$$

Teorem.3.3' de kullanarak, iki değişkenli Lucas p -polinomları için ispat aşağıdaki gibidir.

2.5. Teorem

$L_{p,n}(x, y)$ iki değişkenli Fibonacci p -polinomları olmak üzere $n \geq 0$ ve $p \geq 1$ için

$$L_{p,n}(x, y) = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{p+1} \right\rfloor} \frac{n}{n-jp} \binom{n-jp}{j} x^{n-j(p+1)} y^j \quad (2.6)$$

dır.

İspat

Eş.3.6' dan

$$L_{p,n}(x, y) = F_{p,n+1}(x, y) + py F_{p,n-p}(x, y)$$

olduğunu göstereceğiz. Burada

$$F_{p,n}(x, y) = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{p+1} \right\rfloor} \binom{n-jp-1}{j} x^{n-j(p+1)-1} y^j,$$

$$n \geq 0, p \geq 1$$

$$L_{p,n}(x, y) = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{p+1} \right\rfloor} \frac{n}{n-jp} \binom{n-jp}{j} x^{n-j(p+1)} y^j,$$

$$n \geq 0, p \geq 1$$

dir.

Sağ tarafından dolayı

$$F_{p,n+1}(x, y) + py F_{p,n-p}(x, y) = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{p+1} \right\rfloor} \binom{n-jp}{j} x^{n-j(p+1)} y^j + py \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n-p-1}{p+1} \right\rfloor} \binom{n-jp-p-1}{j} x^{n-j(p+1)-p-1} y^j$$

dir. Eş.3.6' dan

$$\begin{aligned}
L_{p,n}(x, y) &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor} \binom{n-jp}{j} x^{n-j(p+1)} y^j + py \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor - 1} \binom{n-jp-p-1}{j} x^{n-j(p+1)-p-1} y^j \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor} \binom{n-jp}{j} x^{n-j(p+1)} y^j + py \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor} \binom{n-(j-1)p-p-1}{j-1} x^{n-(j-1)(p+1)-p-1} y^{j-1} \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor} \binom{n-jp}{j} x^{n-j(p+1)} y^j + p \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor} \binom{n-jp-1}{j-1} x^{n-j(p+1)} y^j
\end{aligned}$$

ve

$$\binom{n-jp-1}{j-1} = \frac{j}{n-jp} \binom{n-jp}{j}$$

Olduğundan

$$\begin{aligned}
L_{p,n}(x, y) &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor} \binom{n-jp}{j} x^{n-j(p+1)} y^j + p \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor} \binom{n-jp-1}{j-1} x^{n-j(p+1)} y^j \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor} \binom{n-jp}{j} \binom{n-jp}{j} x^{n-j(p+1)} y^j + p \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor} \frac{j}{n-jp} \binom{n-jp}{j} x^{n-j(p+1)} y^j \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor} \binom{n-jp}{j} x^{n-j(p+1)} y^j + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor} \frac{jp}{n-jp} \binom{n-jp}{j} x^{n-j(p+1)} y^j \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor} \binom{n-jp}{j} \left(1 + \frac{jp}{n-jp} \right) x^{n-j(p+1)} y^j \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor} \left(\frac{n}{n-jp} \right) \binom{n-jp}{j} x^{n-j(p+1)} y^j
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

Özel seçimlerle iki değişkenli Lucas polinomları, Lucas p -polinomları, Lucas polinomları, Lucas p -sayıları ve Lucas sayıları için toplam formülleri aşağıdaki gibidir.

$$L_n(x, y) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n}{n-j} \binom{n-j}{j} x^{n-2j} y^j, L_{p,n}(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor} \frac{n}{n-jp} \binom{n-jp}{j} x^{n-j(p+1)}$$

$$\ell_n(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n}{n-j} \binom{n-j}{j} x^{n-2j}, L_{p,n} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor} \frac{n}{n-jp} \binom{n-jp}{j}$$

$$L_n = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n}{n-j} \binom{n-j}{j}$$

3.2.Özellik

Her $n \geq 1$ ve $p \geq 1$ için

$$\begin{aligned} x^2 F_{p,n}(x, y) + (py + y)(F_{p,n}(x, y) + F_{p,n-p+1}(x, y)) + y(F_{p,n-p}(x, y) - pF_{p,n-p+1}(x, y)) \\ = L_{p,n+1}(x, y) + yL_{p,n-1}(x, y) \end{aligned} \quad (3.7)$$

İspat

$$\begin{aligned} L_{p,n+1}(x, y) + yL_{p,n-p}(x, y) &= F_{p,n+2}(x, y) + pyF_{p,n-p+1}(x, y) \\ &+ y(F_{p,n}(x, y) + yF_{p,n-p-1}(x, y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{p,n+1}(x,y) + yL_{p,n-p}(x,y) &= F_{p,n+2}(x,y) + pyF_{p,n-p+1}(x,y) \\
&+ yF_{p,n}(x,y) + py^2F_{p,n-p-1}(x,y) \\
&= xF_{p,n+1}(x,y) + yF_{p,n-p+1}(x,y) + pyF_{p,n-p+1}(x,y) \\
&+ yF_{p,n}(x,y) + py(yF_{p,n-p-1}(x,y)) \\
&= xF_{p,n+1}(x,y) + yF_{p,n-p+1} + pyF_{p,n-p+1}(x,y) \\
&+ yF_{p,n}(x,y) + py(F_{p,n} - xF_{p,n-1}(x,y)) \\
&= xF_{p,n+1}(x,y) + yF_{p,n-p+1} + pyF_{p,n-p+1}(x,y) \\
&+ yF_{p,n}(x,y) + pyF_{p,n}(x,y) - pxyF_{p,n-1}(x,y) \\
&= x(xF_{p,n}(x,y) + yF_{p,n-p}(x,y) - pyF_{p,n-1}(x,y)) \\
&+ (py + y)F_{p,n-p+1}(x,y) + (py + y)F_{p,n}(x,y) \\
&= x^2F_{p,n}(x,y) + (py + y)(F_{p,n}(x,y) + F_{p,n-p+1}(x,y)) \\
&+ y(F_{p,n-p}(x,y) - pF_{p,n-1}(x,y))
\end{aligned}$$

elde edilir.

3.6. Teorem

$L_{p,n}(x,y)$ iki değişkenli Lucas p -polinomunun x ve y değişkenine göre kısmi türevleri $n \geq 0$ ve $p \geq 1$ için

$$\frac{\partial L_{p,n}(x,y)}{\partial x} = n F_{p,n}(x,y) \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial L_{p,n}(x,y)}{\partial y} = n F_{p,n-p}(x,y) \quad (3.9)$$

dir.

İspat

i) Eş.3.8' de x 'e göre kısmı türev alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{p,n}(x,y)}{\partial x} &= \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{p+1} \right]} \frac{n}{n-jp} \frac{(n-jp)!(n-(p+1)j)}{(n-jp-j)!j!} x^{n-(p+1)j-1} y^j \\ &= n \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{p+1} \right]} \frac{(n-jp-1)!}{(n-jp-1-j)!j!} x^{n-(p+1)j-1} y^j \\ &= n \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{p+1} \right]} \binom{n-jp-1}{j} x^{n-(p+1)j-1} y^j \\ &= n F_{p,n}(x,y) \end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde

ii) Eş.3.8' de y 'ye göre kısmı türev alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_{p,n}(x,y)}{\partial x} &= \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{p+1} \right\rfloor} \frac{n}{n-jp} \frac{(n-jp)! j!}{(n-jp-j)! j!} x^{n-(p+1)j} y^{j-1} \\
&= n \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{p+1} \right\rfloor} \frac{(n-jp-1)!}{(n-jp-1-j)! (j-1)!} x^{n-(p+1)j} y^{j-1} \\
&= n \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{p+1} \right\rfloor} \binom{n-jp-1}{j-1} x^{n-(p+1)j} y^{j-1} \\
&= n F_{p,n-p}(x,y)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Özel seçimlerle aşağıdaki denklemler elde edilir.

Eş.3.8 ve Eş.3.9' da sırasıyla x yerine $2x$ alınırsa iki değişkenli pell-Lucas p – polinomları için

$$\frac{\partial Q_{p,n}(x,y)}{\partial x} = n P_{p,n}(x,y)$$

$$\frac{\partial Q_{p,n}(x,y)}{\partial y} = n P_{p,n-p}(x,y)$$

Eş.3.8 ve Eş.3.9' da sırasıyla y yerine $2y$ alınırsa iki değişkenli Jacobsthal-Lucas p – polinomları için

$$\frac{\partial j_{p,n}(x,y)}{\partial x} = n J_{p,n}(x,y)$$

$$\frac{\partial j_{p,n}(x,y)}{\partial y} = n J_{p,n-p}(x,y)$$

dir.

4. TOPLAM ÖZELLİKLERİ

4.1.Özellik

Her $n \geq 1$ ve $p \geq 1$ için aşağıdakiler doğrudur.

$$i) \sum_{i=1}^n x^{n-i} L_{p,i}(x, y) = \frac{1}{y} (L_{p,n+2}(x, y) - x^n L_{p,2}(x, y)) \quad (4.1)$$

$$ii) \sum_{i=1}^n x^{n-i} F_{p,i}(x, y) = \frac{1}{y} (F_{p,n+2}(x, y) - x^n F_{p,2}(x, y)) \quad (4.2)$$

dir.

İspat

i) Eş 2.12 de her $n = 1, 2, 3, \dots, p, \dots, k, k + p$ ve $p \geq 1$ tamsayısı için

$$L_{p,n-p}(x, y) = \frac{1}{y} L_{p,n+1}(x, y) - \frac{x}{y} L_{p,n}(x, y)$$

olup, buradan

$$x^{n-1} L_{p,2-p}(x, y) = \frac{x^{n-1}}{y} L_{p,3}(x, y) - \frac{x^n}{y} L_{p,2}(x, y)$$

$$x^{n-2} L_{p,3-p}(x, y) = \frac{x^{n-2}}{y} L_{p,4}(x, y) - \frac{x^{n-1}}{y} L_{p,3}(x, y)$$

$\vdots$

$$x L_{p,n-p}(x, y) = \frac{x}{y} L_{p,n+1}(x, y) - \frac{x^2}{y} L_{p,n}(x, y)$$

$$L_{p,n-p+1}(x, y) = \frac{1}{y} L_{p,n+2}(x, y) - \frac{x}{y} L_{p,n+1}(x, y)$$

olup, taraf tarafa toplanırsa

$$\sum_{i=1}^n x^{n-i} L_{p,n}(x, y) = \frac{1}{y} (L_{p,n+1}(x, y) - x^n L_{p,2}(x, y))$$

elde edilir.

ii) Benzer şekilde Eş.2.11 den her $n = 1, 2, 3, \dots, k + p$ ve $p \geq 1$ tamsayısı için

$$F_{p,n-p}(x, y) = \frac{1}{y} F_{p,n+1}(x, y) - \frac{x}{y} F_{p,n}(x, y)$$

olup, buradan

$$\begin{aligned} x^{n-1} F_{p,2-p}(x, y) &= \frac{x^{n-1}}{y} F_{p,3}(x, y) - \frac{x^n}{y} F_{p,2}(x, y) \\ x^{n-2} F_{p,3-p}(x, y) &= \frac{x^{n-2}}{y} F_{p,4}(x, y) - \frac{x^{n-1}}{y} F_{p,3}(x, y) \\ &\vdots \\ x F_{p,n-p}(x, y) &= \frac{x}{y} F_{p,n+1}(x, y) - \frac{x^2}{y} F_{p,n}(x, y) \\ F_{p,n-p+1}(x, y) &= \frac{1}{y} F_{p,n+2}(x, y) - \frac{x}{y} F_{p,n+1}(x, y) \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\sum_{i=1}^n x^{n-i} F_{p,n}(x, y) = \frac{1}{y} (F_{p,n+1}(x, y) - x^n F_{p,2}(x, y))$$

elde edilir.

4.2.Özellik

Her $n \in \mathbb{Z}$ ve $p \geq 1$ için

$$i) \ x L_{p,n}^2(x, y) = L_{p,n}(x, y) L_{p,n+1}(x, y) - y L_{p,n}(x, y) L_{p,n-1}(x, y) \quad (4.3)$$

$$ii) \ x F_{p,n}^2(x, y) = F_{p,n}(x, y) F_{p,n+1}(x, y) - y F_{p,n}(x, y) F_{p,n-1}(x, y) \quad (4.4)$$

dir.

İspat

i) Eş.2.12 kullanılırsa

$$\begin{aligned} x L_{p,n}^2(x, y) &= x L_{p,n}(x, y) L_{p,n}(x, y) \\ &= L_{p,n}(x, y) (L_{p,n+1}(x, y) - y L_{p,n-p}(x, y)) \\ &= L_{p,n}(x, y) L_{p,n+1}(x, y) - y L_{p,n}(x, y) L_{p,n-p}(x, y) \end{aligned}$$

elde edilir.

ii) Eş.2.11 kullanılırsa

$$\begin{aligned} x F_{p,n}^2(x, y) &= x F_{p,n}(x, y) F_{p,n}(x, y) \\ &= F_{p,n}(x, y) (F_{p,n+1}(x, y) - y F_{p,n-p}(x, y)) \\ &= F_{p,n}(x, y) F_{p,n+1}(x, y) - y F_{p,n}(x, y) F_{p,n-p}(x, y) \end{aligned}$$

elde edilir.

4.3.Özellik

Her $n \geq 1$, $s \in \mathbb{Z}$ ve $p \geq 1$ için aşağıdakiler doğrudur.

$$\text{i) } \sum_{i=1}^n y^{n-i} L_{p,i}^2(x, y) = \frac{1}{x} \left(L_{p,n}(x, y) L_{p,n+1}(x, y) - (1+p)xy^n \right) \quad (4.5)$$

$$\text{ii) } \sum_{i=1}^n y^{n-i} F_{p,i}^2(x, y) = \frac{1}{x} F_{p,n}(x, y) F_{p,n+1}(x, y) \quad (4.3)$$

dir.

İspat

Eş.4.3'den

$p \geq 1$ için

$$y^{n-1} L_{p,1}^2(x, y) = \frac{1}{x} \left(y^{n-1} L_{p,1}(x, y) L_{p,2}(x, y) - y^n L_{p,1}(x, y) L_{p,1-p}(x, y) \right)$$

$$y^{n-2} L_{p,2}^2(x, y) = \frac{1}{x} \left(y^{n-1} L_{p,2}(x, y) L_{p,3}(x, y) - y^{n-1} L_{p,2}(x, y) L_{p,2-p}(x, y) \right)$$

$$\vdots$$

$$y L_{p,n-1}^2(x, y) = \frac{1}{x} \left(y L_{p,n-1}(x, y) L_{p,n}(x, y) - y^2 L_{p,n-1}(x, y) L_{p,n-p-1}(x, y) \right)$$

$$L_{p,n}^2(x, y) = \frac{1}{x} \left(L_{p,n}(x, y) L_{p,n+1}(x, y) - y L_{p,n}(x, y) L_{p,n-p}(x, y) \right)$$

olup, taraf tarafa toplanırsa

$$\sum_{i=1}^n y^{n-i} L_{p,n}^2(x, y) = \frac{1}{x} (L_{p,n}(x, y) L_{p,n+1}(x, y) - y^n L_{p,1}(x, y) L_{p,1-p}(x, y))$$

elde edilir. $p = 1$ için

$$L_{p,1-p}(x, y) = L_{p,0}(x, y) = (1 + p), \quad L_{p,1}(x, y) = x$$

olduğundan

$$\sum_{i=1}^n y^{n-i} L_{p,i}^2(x, y) = \frac{1}{x} (L_{p,n}(x, y) L_{p,n+1}(x, y) - (1 + p) x y^n)$$

bulunur.

ii) İspatı (i) benzer şekilde yapılabilir.

5. İKİ DEĞİŞKENLİ FİBONACCİ VE LUCAS P_POLİNOMLARINDA BÖLÜNEBİLME

Fibonacci, Lucas sayıları ve polinomlarının bölünebilme özellikleri ile ilgili Frei [13], Bergum [14], Hoggatt, [15], Webb [16] çeşitli çalışmalar yapmıştır.

Bu bölümde $y \neq 0, x \neq 0$ ve $y, x \in \mathbb{Z}$ olarak alınacaktır.

5.1 Teorem

Eğer $(y, x) = 1$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için

$$i) (F_{p,n}(x, y), y) = 1 \quad (5.1)$$

$$ii) (L_{p,n}(x, y), y) = 1 \quad (5.2)$$

dir.

İspat

i) Kabul edelim ki $(F_{p,n}(x, y), y) = t \neq 1$ olsun. O zaman $q|t$ olacak şekilde bir q asal sayısı vardır. $q|t$ ise $q|y$ ve $q|F_{p,n}(x, y)$ dir. Bu durum $n=1, 2$ için mümkün değildir.

$n \geq 3$ için kabul edelim ki; $q|x^{n-1}$ olsun. (3.5) den

$$F_{p,n+1}(x, y) = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{p+1} \right\rfloor} \binom{n-jp}{j} x^{n-j(p+1)} y^j$$

olup,

$$x^{n-1} = F_{p,n}(x, y) - \left[\sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{p+1} \right\rfloor} \binom{n-jp-1}{j} x^{n-j(p+1)-1} y^j \right] y$$

dir. Buradan $q \mid x$ olmalıdır. Bu ise hipotez ile çelişir. Böylece

$$(F_{p,n}(x, y), y) = 1$$

elde edilir.

Örnek olarak; $n = 3$ ve $p = 1$ için $F_{p,3}(x, y) = x^3 + y$ ve $x = 1, y = 2$ sıfırdan farklı tamsayılar olmak üzere,

$$F_{p,3}(1, 2) = 1^3 + 2 = 3$$

olur.

Buradan

$$(F_{p,3}(1, 2), 2) = (3, 2) = 1$$

dir.

ii) Kabul edelim ki $(L_{p,n}(x, y), y) = t \neq 1$ olsun. O zaman $q \mid t$ olacak şekilde bir q asal sayısı vardır.

$$q \mid t \Rightarrow q \mid y \text{ ve } q \mid L_{p,n}(x, y)$$

dir.

Bu durum $n = 1$ için mümkün değildir.

$n \geq 2$ için kabul edelim ki; $q \mid x^n$ olsun. (3.6) den

$$L_{p,n}(x, y) = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{p+1} \right\rfloor} \frac{n}{n-jp} \binom{n-jp}{j} x^{n-j(p+1)} y^j$$

olup,

$$x^n = L_{p,n}(x, y) - \left[\sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{p+1} \right\rfloor} \frac{n}{n-jp} \binom{n-jp}{j} x^{n-j(p+1)} y^j \right] y$$

dir. Buradan $q \mid x$ olmalıdır. Bu ise hipotez ile çelişir. Böylece

$$(L_{p,n}(x, y), y) = 1$$

elde edilir.

Örnek olarak;

$n = 2$ ve $p = 1$ için $L_{p,2}(x, y) = x^2 + 2y$ ve $x = 1, y = 2$ sıfırdan farklı tamsayılar olmak üzere,

$$L_{p,2}(1, 2) = 1^2 + 4 = 5$$

olur.

Buradan $(L_{p,2}(1,2), 2) = (5, 2) = 1$

olur.

5.2. Teorem

Eğer $(y, x) = 1$, her $n \in \mathbb{N}$ ve $p \geq 1$ için

$$i) (F_{p,n}(x, y), F_{p,n+1}(x, y)) = 1 \quad (5.3)$$

dir.

İspat

i) $(y, x) = 1$, $n \in \mathbb{N}$ olsun.

$n = 1$ için

$$F_{p,1}(x, y) = 1 \text{ ve } F_{p,2}(x, y) = x$$

olup iddiamız doğrudur. Kabul edelim ki $n = k \geq 2$ doğru olsun yani

$$(F_{p,k}(x, y), F_{p,k+1}(x, y)) = 1$$

olsun. $n = k + 1$ için doğru mudur?

$$(F_{p,k+1}(x, y), F_{p,k+2}(x, y)) = t$$

olsun.

Buradan

$$t \mid F_{p,k+1}(x, y) \text{ ve } t \mid F_{p,k+2}(x, y)$$

Eş.2.12'den

$$F_{p,k+2}(x, y) = x F_{p,k+1}(x, y) + y F_{p,k-p+1}(x, y)$$

olup,

$$t \mid F_{p,k+1}(x, y) \Rightarrow t \mid x F_{p,k+1}(x, y)$$

Ayrıca $t \mid F_{p,k+2}(x, y)$ olduğundan $t \mid y F_{p,k+2}(x, y)$ olur.

Buradan

$$t \mid y \text{ ise } t \mid F_{p,k+1}(x, y) \text{ olduğundan}$$

$$t \mid (F_{p,k+1}(x, y), y)$$

dir.

Oysa Teorem 5.1'den $(F_{p,k+1}(x, y), y) = 1$ olup, $t = 1$ olmak zorundadır.

Böylece

$$(F_{p,k+1}(x, y), F_{p,k+2}(x, y)) = 1$$

elde edilir. $n = k + 1$ için doğru olur.

O halde $(y, x) = 1$, ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$(F_{p,n}(x, y), F_{p,n+1}(x, y)) = 1$$

dir.

Örnek olarak

$n = 2$ ve $x = 1, y = 2$ aralarında asal olmak üzere en büyük ortak bölenleri 1 eşittir.

$p = 1$ için

$$F_{p,2}(x, y) = x$$

ve

$$F_{p,3}(x, y) = x^2 + y$$

dir.

x ve y değerleri yerlerine konursa

$$F_{p,2}(1, 2) = 1 \text{ ve } F_{p,3}(1, 2) = 1^2 + 2 = 3$$

olur. Buradan

$$(F_{p,2}(1, 2), F_{p,3}(1, 2)) = (1, 3) = 1$$

olur.

KAYNAKLAR

1. İnternet : Catalini M. Generalized Bivariate Fibonacci Polynomials.
<http://lanl.arxiv.org/abs/math/0211366> (2010).
2. İnternet : Catalini M. Some Formulae for Bivariate Fibonacci and Lucas Polynomials.
<http://lanl.arxiv.org/abs/math/0406323> (2010).
3. Tan, M, Zhang, Y.A., “Note on Bivariate and Trivariate Fibonacci Polynomials.” **Southeast Asian Bulletin of Mathematics**, 29:975-990 (2005).
4. Kocer, E.G, Tuglu N, Stakhov, A., “On the m – Extension of the Fibonacci and Lucas p – Numbers.” **Chaos, Solitons & Fractals**, 40(4):1890-1906 (2009).
5. Djordjevic, G.B., “Some Properties of Partial Derivatives of Generalized Fibonacci and Lucas Polynomials”. **The Fibonacci Quarterly**, 39(2):138-141 (2001).
6. Djordjevic, G.B., “Generating Functions of the Incomplete Generalized Fibonacci and Generalized Lucas Numbers.” **The Fibonacci Quarterly**, 42(2):106-113 (2004).
7. Djordjevic, G.B., “Some Properties of Partial derivatives of Generalized Fibonacci and Lucas Polynomials” **The Fibonacci Quarterly**, 39 (2): 138-141 (2001).
8. Djordjevic, G.B., “Some Properties of Partial derivatives of Generalized Fibonacci and Lucas Polynomials” **The Fibonacci Quarterly**, 39 (2): 138-141 (2001).

9. Djordjevic, G.B., “Some Properties of Class of Polynomials” **Matematički Vesnik**, 49:265-271 (1997).
10. Stakhov, A, Rozin, B., “ Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas p – numbers.” **Chaos, Solitons & Fractals**, 27(5):1162-1177 (2006).
11. Stakhov, A, Rozin, B., “ The continuous functions for the Fibonacci and Lucas p – numbers.” **Chaos, Solitons & Fractals**, 28(4): 1014-1025 (2006).
12. MacHenry, T., “Generalized Fibonacci and Lucas polynomials and Multiplicative Arithmetic Functions” **The Fibonacci Quarterly**, 38: 167-173 (2000).
13. Frei, G., “Binary Lucas and Fibonacci Polynomials I.” **Mathematische Nachrichten**, 96:83-112 (1980).
14. Bergum, G.E., Hoggat, V.E.Jr. “Irreducibility of Lucas and generalized Lucas polynomials”, **The Fibonacci Quarterly**,. 12:95-100 (1974).
15. Hoggat, Jr., Long, C.T., “Divisibility properties of generalized Fibonacci polynomials” **Fibonacci Quarterly**, 12:113-120 (1974).
16. Webb, W.A.; Parberry, E.A., “Divisibility properties of Fibonacci polynomials”, **The Fibonacci Quarterly**, 7: 457-463 (1969).
17. Vorobyov, N.N., Fibonacci Numbers. Moscow: **Publishing House** “Nauka”, (1961) (in Russian).
18. Hoggat, Jr., Fibonacci and Lucas Numbers, Boston, **MA: Houghton Mifflin**, (1969).

19. Koshy, T., "Fibonacci and Lucas Numbers with Applications," **A Wiley-Interscience Publication**, 51-179, 424-475, (2001).
20. Vajda, S., "Fibonacci and Lucas Numbers, and the Golden Section Theory and Applications", **Ellis Harwood Limited**, 24-87, (1989).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı : ATAĞ, Coşkun
 Uyuğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 06.09.1978 IĞDIR
 Medeni hali : Evli
 Telefon : 0 (532) 664 79 59
 e-mail : coskun_atag@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Ankara Üniversitesi Astronomi ve uzay Bilimleri Bölümü	2004
Lise	Endüstri meslek lisesi Iğdır	1996

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2003-2009	Özel Sektör	Matematik Öğretmeni-Yönetici
2009-	TBMM	Milletvekili Danışmanlığı

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Spor yapmak,Kitap okumak ,Siyaset