

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

**SUPRA TOPOLOJİK UZAYLARDA AÇIK
KÜMELER ve SÜREKLİLİKLER ÜZERİNE**

Merve SEÇGİN

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Gülhan ASLIM

Matematik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu: 403.04.01

Sunuş Tarihi:13.06.2012

Bornova-İZMİR

2012

Sayın **Merve Seçgin** tarafından YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak sunulan “**Supra Topolojik Uzaylarda Açık Kümeler ve Süreklilikler Üzerine**” başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi’nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 13.06.2012 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:

İmza

Jüri Başkanı	: Prof. Dr. Gülhan ASLIM	
Raportör Üye	: Doç. Dr. Oya BEDRE ÖZBAKIR	
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Aslı GÜLDÜRDEK	

ÖZET

SUPRA TOPOLOJİK UZAYLARDA AÇIK KÜMELER VE SÜREKLİLİKLER ÜZERİNE

SEÇGİN, Merve

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Yöneticisi: Prof. Dr. Gülhan ASLİM

Temmuz 2012, 44 sayfa

Bu tezde supra topolojik uzaylarda, supra t -küme, supra δ -küme ve supra α^* -küme olarak adlandırılan yeni küme tanımları verilmiştir ve bu kümeler yardımıyla supra t -sürekli, supra δ -sürekli ve supra α^* -sürekli fonksiyonlar tanımlanmıştır. Bu yeni sürekli fonksiyonlar kullanılarak yeni süreklilik ayrışmaları oluşturulmuştur.

Ayrıca supra $g\beta$ -kapalı, supra βg -kapalı, supra gp -kapalı ve supra pg -kapalı kümeler verilmiştir ve bu yeni kümelerin bazı özellikleri incelenmiştir.

Supra tamamen bağlantısız uzay ve supra yerel indiskret uzay tanımlanmıştır ve bu uzaylardaki bazı küme özellikleri elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Supra regüler açık küme, supra açık küme, supra t -küme, supra δ -küme, supra α^* -küme, supra t -sürekli fonksiyon, supra δ -sürekli fonksiyon, supra α^* -sürekli fonksiyon, supra $g\beta$ -kapalı küme, supra βg -kapalı küme, supra gp -kapalı küme, supra pg -kapalı küme, supra tamamen bağlantısız uzay, supra yerel indiskret uzay.

ABSTRACT**ON OPEN SETS AND CONTINUITIES IN SUPRA
TOPOLOGICAL SPACES**

SEÇGİN, Merve

Msc. in Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Gülhan ASLIM

July 2012, 44 pages

In this thesis, new set definitions which are called supra t -set, supra δ -set and supra α^* -set are given and with the help of these sets supra t -continuous, supra δ -continuous and supra α^* -continuous functions are introduced in supra topological spaces. New continuity decompositions are obtained by using these new continuous functions.

Moreover, supra $g\beta$ -closed, supra βg -closed, supra gp -closed and supra pg -closed sets are given and some properties of these new sets are studied.

Supra extremally disconnected space and supra locally indiscrete space are defined and some set properties are obtained in these spaces.

Key Words: supra regular open set, supra open set, supra t -set, supra δ -set and supra α^* -set, supra t -continuous function, supra δ -continuous function, supra α^* -continuous function, supra $g\beta$ -closed set, supra βg -closed set, supra gp -closed set, supra pg -closed set, supra extremally disconnected space, supra locally indiscrete space.

TEŞEKKÜR

Tez aşaması boyunca, hiçbir yardımını esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Gülhan ASLİM'a çalışmalarım için verdiği destek ve teşvikten dolayı, Yrd. Doç. Dr. Ayşegül ÇAKSU GÜLER'e tez çalışmam süresince yapmış olduğu rehberlikten dolayı teşekkürlerimi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	v
ABSTRACT.....	vii
TEŞEKKÜR.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xiii
1.GİRİŞ.....	1
2. ÖNBİLGİLER.....	3
3. SUPRA t -KÜMELER, SUPRA α^* -KÜMELER VE SUPRA δ -KÜMELER....	8
4. SUPRA t -SÜREKLİ, SUPRA α^* -SÜREKLİ VE SUPRA δ -SÜREKLİ FONKSİYONLAR.....	14
5. SUPRA $g\beta$ -KAPALI VE SUPRA βg -KAPALI KÜMELER.....	17
6. SUPRA TAMAMEN BAĞLANTISIZ VE SUPRA YEREL İNDİSKRET UZAYLAR.....	24
SONUÇ.....	28
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	29
ÖZGEÇMİŞ.....	30

SİMGELER VE KISALTMALAR

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$:\Leftrightarrow$	Tanım
$\Rightarrow$	Gerek koşul
$\Leftarrow$	Yeter koşul
(X, τ)	Topolojik uzay
(X, μ)	Supra topolojik uzay
σ, ρ	Açık kümeler ailesi
$\text{cl}(A)$	A kümesinin X uzayına göre kapanışı
$\text{int}(A)$	A kümesinin X uzayına göre içi
$\text{cl}^\mu(A)$	A kümesinin X uzayına göre supra kapanışı
$\text{int}^\mu(A)$	A kümesinin X uzayına göre supra içi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\text{SO}(X)$	Yarı-açık kümeler ailesi
$\text{PO}(X)$	Önaçık kümeler ailesi
$\beta\text{O}(X)$	β -açık kümeler ailesi

SİMGELER VE KISALTMALAR(DEVAM)

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$\alpha(X, \mu)$	Supra α -açık kümeler ailesi
$SO(X, \mu)$	Supra yarı-açık kümeler ailesi
$PO(X, \mu)$	Supra önaçık kümeler ailesi
$bO(X, \mu)$	Supra b-açık kümeler ailesi
$\beta O(X, \mu)$	Supra β -açık kümeler ailesi
$RO(X, \mu)$	Supra regüler açık kümeler ailesi
$t(X, \mu)$	Supra t-kümeler ailesi
$\delta(X, \mu)$	Supra δ -kümeler ailesi
$\alpha^*(X, \mu)$	Supra α^* -kümeler ailesi

1. GİRİŞ

Topolojik uzayların daha zayıf hali olan supra topolojik uzay kavramını ilk olarak 1983 yılında A.S. Mashhour, A.A. Allam, F.S. Mahmoud ve F.H. Khedr ele almıştır. Ayrıca aynı tarihte supra açık kümeleri ve S-sürekli fonksiyonları tanıtmışlar ve S-sürekli fonksiyonların ayrışımını elde etmişlerdir.

Daha sonra supra açık kümelerin daha güçlü ve daha zayıf formları araştırılmaya başlanmıştır ve bu konuda pek çok çalışma yapılmıştır. Bu anlamda supra α -açık, supra yarı-açık, supra önaçık, supra b-açık, supra β -açık ve supra regüler açık küme tanımları verilmiş ve birçok makalede bu kümelerin özellikleri incelenmiştir.

Ayrıca 2011 yılında O. Ravi, G. Ramkumar ve M. Kamaraj supra g-kapalı kümeleri tanıtmışlar ve bu kümelerin birçok özelliğini incelemişlerdir. Bu tanımları takiben supra gb-kapalı, supra gs-kapalı, supra sg-kapalı, supra $g\alpha$ -kapalı ve supra ag -kapalı kümeler tanımlanmış, aralarındaki bazı ilişkiler incelenmiştir.

Bu tezin amacı, supra topolojik uzaylarda yeni kümelerin tanımlanması ve önceden tanımlanmış bazı kümelerle aralarındaki bağlantıların oluşturulmasıdır. Dahası, bu bağlantılar yardımıyla yeni süreklilik ayrışimleri elde edilmesi amaçlanmış, ilgili makaleler taranmıştır.

Bu tezde supra regüler açık kümelerden daha zayıf olan supra t-küme, supra δ -küme ve supra α^* -küme tanımları tarafımızca verilmiş, tanımlanmış bazı kümelerle aralarındaki ilişkiler incelenmiş ve örneklerle desteklenmiştir.

Bu yeni kümeler yardımı ile supra t-sürekli, supra δ -sürekli ve supra α^* -sürekli fonksiyon tanımları tarafımızca verilmiş ve yeni süreklilik ayrışimleri elde edilmiştir.

Ayrıca supra gb-kapalı kümelerden daha zayıf olan supra $g\beta$ -kapalı küme, supra βg -kapalı kümelerden daha güçlü olan supra βg -kapalı küme, supra $g\alpha$ -kapalı kümelerden daha zayıf olan supra gp-kapalı küme ve supra gp-kapalı kümelerden daha güçlü olan supra pg-kapalı küme tanımları tarafımızca verilmiş ve önceden tanımlanmış bazı kümelerle aralarındaki ilişkiler incelenmiştir.

Son olarak supra tamamen bağlantısız uzay ve supra yerel indiscret uzay tanımları tarafımızca verilmiş ve bu uzayların arasındaki ilişki incelenmiştir. Ayrıca tanımladığımız bu uzaylarda supra t-küme, supra δ -küme ve supra α^* -kümelerin bazı kümelerle aralarındaki ilişkileri ele alınmıştır.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, tezin diğer bölümlerine yardımcı olacak bazı temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.1. (Mashhour et al., 1983)

Bir $\mu \subset P(X)$ sınıfı aşağıdaki özellikleri sağlarsa bu sınıfa X üzerinde bir supra topoloji, (X, μ) uzayına da supra topolojik uzay denir:

(a) $X \in \mu$,

(b) Her $i \in I$, $A_i \in \mu$ için $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mu$.

Bir μ supra topolojisinin elemanlarına supra açık kümeler, supra açık kümelerin tümleyenlerine de supra kapalı kümeler denir.

Tanım 2.2. (Mashhour et al., 1983)

(X, τ) bir topolojik uzay, μ ; X üzerinde bir supra topoloji olsun. $\tau \subset \mu$ ise τ topolojisi μ supra topolojisine bağlıdır denir.

Tanım 2.3. (Mashhour et al., 1983) (X, μ) bir supra topolojik uzay, $A \subset X$ olsun. A nın tüm supra açık alt kümelerinin birleşimine A nın supra içi, A yı kapsayan tüm supra kapalı kümelerin kesişimine A nın supra kapanışı denir. A nın supra içi $\text{int}^\mu(A)$, A nın supra kapanışı $\text{cl}^\mu(A)$ olarak gösterilir. Biçimsel olarak;

$$\text{int}^\mu(A) = \bigcup \{ G : G \subset A, G \in \mu \}$$

$$\text{cl}^\mu(A) = \bigcap \{ F : A \subset F, F^c \in \mu \}.$$

Özellik 2.4. (Mashhour et al., 1983) (X, μ) supra topolojik uzay, $A, B \subset X$ olsun. Aşağıdakiler vardır:

- (a) $\text{int}^\mu(A)$ supra açık, $\text{cl}^\mu(A)$ supra kapalı kümedir.
- (b) A supra açık $\Leftrightarrow A = \text{int}^\mu(A)$.
- (c) A supra kapalı $\Leftrightarrow A = \text{cl}^\mu(A)$.
- (d) $A \subset B$ ise $\text{int}^\mu(A) \subset \text{int}^\mu(B)$ ve $\text{cl}^\mu(A) \subset \text{cl}^\mu(B)$.
- (e) $\text{int}^\mu(\text{int}^\mu(A)) = \text{int}^\mu(A)$ ve $\text{cl}^\mu(\text{cl}^\mu(A)) = \text{cl}^\mu(A)$.
- (f) $\text{int}^\mu(A) \cup \text{int}^\mu(B) \subset \text{int}^\mu(A \cup B)$.
- (g) $\text{cl}^\mu(A) \cup \text{cl}^\mu(B) \subset \text{cl}^\mu(A \cup B)$.
- (h) $\text{int}^\mu(A \cap B) \subset \text{int}^\mu(A) \cap \text{int}^\mu(B)$.
- (i) $\text{cl}^\mu(A \cap B) \subset \text{cl}^\mu(A) \cap \text{cl}^\mu(B)$.
- (j) $\text{int}^\mu(X \setminus A) = X \setminus \text{cl}^\mu(A)$ ve $\text{cl}^\mu(X \setminus A) = X \setminus \text{int}^\mu(A)$.
- (k) $\text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(\text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(A)))) = \text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(A))$.
- (l) $\text{cl}^\mu(\text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(\text{int}^\mu(A)))) = \text{cl}^\mu(\text{int}^\mu(A))$.

Tanım 2.5. (X, μ) supra topolojik uzay olsun. $A \subset X$ kümesine;

- (a) $A \subset \text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(\text{int}^\mu(A)))$ ise supra α -açık küme, (Devi et al., 2008)
 - (b) $A \subset \text{cl}^\mu(\text{int}^\mu(A))$ ise supra yarı-açık küme, (Sayed and Noiri, 2010)
 - (c) $A \subset \text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(A))$ ise supra önaçık küme, (Sayed, 2010)
 - (d) $A \subset \text{cl}^\mu(\text{int}^\mu(A)) \cup \text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(A))$ ise supra b-açık küme, (Sayed and Noiri, 2010)
 - (e) $A \subset \text{cl}^\mu(\text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(A)))$ ise supra β -açık küme, (Ravi et al., 2012)
 - (f) $A = \text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(A))$ ise supra regüler açık küme (Trinita Pricilla and Arockiarani, 2011)
- denir.

Tanım 2.6. Bir supra α -açık (sırasıyla supra yarı-açık, supra önaçık, supra b-açık, supra β -açık, supra regüler açık) kümenin tümleyenine supra α -kapalı (Devi et al., 2008) (sırasıyla supra yarı-kapalı (Sayed and Noiri, 2010), supra önkapalı (Sayed, 2010), supra b-kapalı (Sayed and Noiri, 2010), supra β -kapalı (Ravi et al., 2012), supra regüler kapalı (Trinita Pricilla and Arockiarani, 2011)) küme denir. Denk olarak;

- (a) A supra α -kapalı $:\Leftrightarrow \text{cl}^\mu(\text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(A))) \subset A$.
- (b) A supra yarı-kapalı $:\Leftrightarrow \text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(A)) \subset A$.
- (c) A supra önkapalı $:\Leftrightarrow \text{cl}^\mu(\text{int}^\mu(A)) \subset A$.
- (d) A supra b-kapalı $:\Leftrightarrow \text{cl}^\mu(\text{int}^\mu(A)) \cap \text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(A)) \subset A$.
- (e) A supra β -kapalı $:\Leftrightarrow \text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(\text{int}^\mu(A))) \subset A$.
- (f) A supra regüler kapalı $:\Leftrightarrow \text{cl}^\mu(\text{int}^\mu(A)) = A$.

Teorem 2.7. (Kamaraj et al., 2012) (X, μ) supra topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

A supra yarı-açık küme $\Leftrightarrow \text{cl}^\mu(\text{int}^\mu(A)) = \text{cl}^\mu(A)$.

Teorem 2.8. (Kamaraj et al., 2012) (X, μ) supra topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

A supra α -açık küme $\Leftrightarrow A$ supra önaçık ve supra yarı-açık kümedir.

Tanım 2.9. (X, μ) supra topolojik uzay, $A \subset X$ olsun. A nın tüm supra α -açık (sırasıyla supra yarı-açık, supra önaçık, supra b-açık, supra β -açık) altkümelerinin birleşimine A nın supra α -içi (Devi et al., 2008) (sırasıyla supra yarı-içi (Sayed and Noiri, 2010), supra öniçi (Sayed, 2010), supra b-içi (Sayed and Noiri, 2010), supra β -içi (Ravi et al., 2012)) denir ve $\alpha \text{int}^\mu(A)$ (sırasıyla $\text{sint}^\mu(A)$, $\text{pint}^\mu(A)$, $\text{bint}^\mu(A)$, $\beta \text{int}^\mu(A)$) şeklinde gösterilir.

Tanım 2.10. (X, μ) supra topolojik uzay, $A \subset X$ olsun. A yı kapsayan tüm supra α -kapalı (sırasıyla supra yarı-kapalı, supra önkapalı, supra b-kapalı, supra β -kapalı) kümelerin kesişimine A nın supra α -kapanışı (Devi et al., 2008) (sırasıyla supra yarı-kapanışı (Sayed and Noiri, 2010), supra önkapanışı (Sayed, 2010), supra b-kapanışı (Sayed and Noiri, 2010), supra β -kapanışı (Ravi et al.,

2012)) denir ve $\alpha\text{cl}^\mu(A)$ (sırasıyla $\text{scl}^\mu(A)$, $\text{pcl}^\mu(A)$, $\text{bcl}^\mu(A)$, $\beta\text{cl}^\mu(A)$) şeklinde gösterilir.

Tanım 2.11. (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar, μ ve ν sırasıyla τ ve σ topolojilerine bağlı olsunlar. Bir $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonuna;

- (a) Her $V \in \sigma$ için $f^{-1}(V) \in \mu$ ise S-sürekli fonksiyon, (Mashhour et al., 1983)
- (b) Her $V \in \sigma$ için $f^{-1}(V) \in \alpha(X, \mu)$ ise supra α -sürekli fonksiyon, (Devi et al., 2008)
- (c) Her $V \in \sigma$ için $f^{-1}(V) \in \text{SO}(X, \mu)$ ise supra yarı-sürekli fonksiyon, (Sayed and Noiri, 2010)
- (d) Her $V \in \sigma$ için $f^{-1}(V) \in \text{PO}(X, \mu)$ ise supra önsürekli fonksiyon, (Sayed, 2010)
- (e) Her $V \in \sigma$ için $f^{-1}(V) \in \text{bO}(X, \mu)$ ise supra b-sürekli fonksiyon, (Sayed and Noiri, 2010)
- (f) Her $V \in \sigma$ için $f^{-1}(V) \in \beta\text{O}(X, \mu)$ ise supra β -sürekli fonksiyon, (Ravi et al., 2012)
- (g) Her $V \in \sigma$ için $f^{-1}(V) \in \text{RO}(X, \mu)$ ise supra regüler-sürekli fonksiyon (Trinita Pricilla and Arockiarani, 2011) denir.

Tanım 2.12. (X, μ) supra topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

- (a) $A \subset U$ ve U supra açık olduğunda $\text{cl}^\mu(A) \subset U$ ise A kümesine supra g-kapalı küme, (Ravi et al., 2011)
- (b) $A \subset U$ ve U supra açık olduğunda $\alpha\text{cl}^\mu(A) \subset U$ ise A kümesine supra $g\alpha$ -kapalı küme, (Arockiarani and Trinita Pricilla, 2011)
- (c) $A \subset U$ ve U supra α -açık olduğunda $\alpha\text{cl}^\mu(A) \subset U$ ise A kümesine supra αg -kapalı küme, (Arockiarani and Trinita Pricilla, 2011)
- (d) $A \subset U$ ve U supra açık olduğunda $\text{scl}^\mu(A) \subset U$ ise A kümesine supra gs-kapalı küme, (Kamaraj, 2011)
- (e) $A \subset U$ ve U supra yarı-açık olduğunda $\text{scl}^\mu(A) \subset U$ ise A kümesine supra sg-kapalı küme, (Kamaraj, 2011)

(f) $A \subset U$ ve U supra açık olduğunda $bcl^H(A) \subset U$ ise A kümesine supra gb-kapalı küme (Arockiarani and Trinita Pricilla, 2011) denir.

Tanım 2.13. Bir supra g-kapalı (sırasıyla supra $g\alpha$ -kapalı, supra αg -kapalı, supra gs-kapalı, supra sg-kapalı, supra gb-kapalı) kümenin tümleyenine supra g-açık (Ravi et al., 2011) (sırasıyla supra $g\alpha$ -açık (Arockiarani and Trinita Pricilla, 2011), supra αg -açık (Arockiarani and Trinita Pricilla, 2011), supra gs-açık (Kamaraj, 2011), supra sg-açık (Kamaraj, 2011), supra gb-açık (Arockiarani and Trinita Pricilla, 2011)) küme denir.

Özellik 2.14. (Yalvaç, 1994) (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $SO(X)$, $PO(X)$ ve $\beta O(X)$ birer supra topolojik uzaydır.

3. SUPRA t-KÜMELER, SUPRA α^* -KÜMELER VE SUPRA δ -KÜMELER

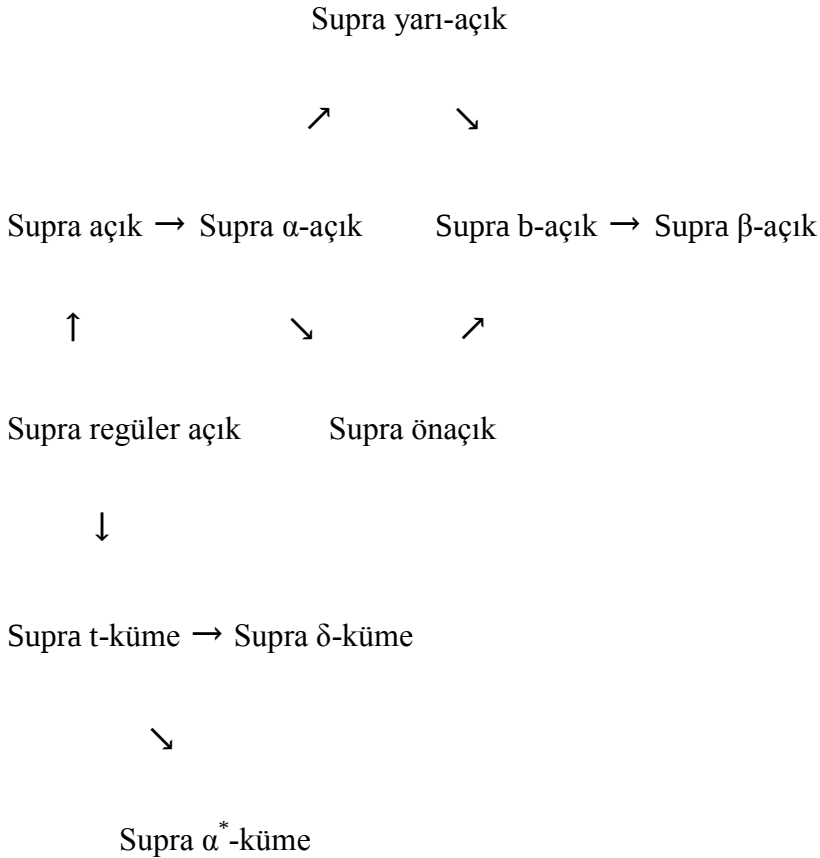
Bu bölümde supra t-küme, supra α^* -küme ve supra δ -küme tanımları tarafımızca verilmiş ve bu kümelerin önceden tanımlanmış bazı kümeler ile aralarındaki bağlantılar incelenmiştir.

Tanım 3.1. (X, μ) bir supra topolojik uzay, $A \subset X$ olsun.

- (a) A supra t-küme : $\Leftrightarrow \text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(A)) = \text{int}^\mu(A)$.
- (b) A supra α^* -küme : $\Leftrightarrow \text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(\text{int}^\mu(A))) = \text{int}^\mu(A)$.
- (c) A supra δ -küme : $\Leftrightarrow \text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(A)) \subset \text{cl}^\mu(\text{int}^\mu(A))$.

Supra t-kümeler ailesi $t(X, \mu)$, supra α^* -kümeler ailesi $\alpha^*(X, \mu)$ ve supra δ -kümeler ailesi $\delta(X, \mu)$ şeklinde gösterilir

Uyarı 3.2. Supra topolojik uzaylarda tanımladığımız bu yeni kümelerin daha önce tanımlanmış bazı kümelerle arasındaki ilişki aşağıdaki diyagramda verilmiştir.



Uyarı 3.3. Aşağıdaki örneklerde de görüleceği gibi diyagramdaki gerektirmeler her zaman ters yönlü değildir.

Örnek 3.4. $E_a = (-\infty, a)$, $E_{-a} = (-a, \infty)$ olmak üzere $\mathbb{R}$ üzerindeki supra topolojiyi tanımlayalım:

$$\mu = \{ \emptyset, \mathbb{R}, E_a, E_{-a} : a \in \mathbb{N} - \{0\} \}.$$

$A = (-\infty, 2) \cup \{3\}$ bir supra α -açık ve supra δ -kümedir fakat supra açık ve supra t-küme değildir. $B = (-1, \infty) \setminus \mathbb{Q}$ bir supra önaçık ve supra b- açık kümedir fakat supra yarı açık ve supra α -açık küme değildir.

Örnek 3.5. $X = \mathbb{R}$ üzerinde $\tau = \{ \emptyset, A \subset \mathbb{R} : A^c \text{ sonlu} \}$ sonlu tümleyenler topolojisini alalım. Bir $A \neq \emptyset$ için,

A sonlu ise $A \not\subset \text{int}(\text{cl}(A)) = \text{int}(A) = \emptyset$ olduğundan $A \notin \text{PO}(X)$.

A sonsuz ise $A \subset \text{int}(\text{cl}(A)) = \text{int}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ olduğundan $A \in \text{PO}(X)$.

O halde $\text{PO}(X) = \{ \emptyset, A \subset \mathbb{R} : A \text{ sonsuz} \}$ dır. $\text{PO}(X) = \mu$ bir supra topolojidir. $A = \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$ supra açık kümedir fakat supra regüler açık küme değildir. $B = \{0\}$ supra t-kümedir fakat supra regüler açık küme değildir.

Örnek 3.6. $X = \{a, b, c, d\}$ ve $\mu = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$ olsun. $A = \{a, b, d\}$ bir supra yarı-açık ve supra b-açık kümedir fakat supra önaçık ve supra α -açık küme değildir. $B = \{a, d\}$ supra β -açık ve supra α^* -kümedir fakat supra b-açık ve supra t-küme değildir.

Teorem 3.7. (X, μ) supra topolojik uzay olsun. Bir $A \subset X$ için aşağıdakiler vardır:

(a) A supra α^* -kümedir $\Leftrightarrow A$ supra β -kapalı kümedir.

(b) A supra t -kümedir $\Leftrightarrow A$ supra yarı-kapalı kümedir.

İspat:

(a) ($\Rightarrow$): A supra α^* -küme ise $\text{int}^\mu(A) = \text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(\text{int}^\mu(A)))$ dır. $\text{int}^\mu(A) \subset A$ olduğundan A supra β -kapalı kümedir.

($\Leftarrow$): A supra β -kapalı küme ise $\text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(\text{int}^\mu(A))) \subset A$ dır. Böylece $\text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(\text{int}^\mu(A))) \subset \text{int}^\mu(A)$ kapsamasını elde ederiz. Ayrıca $\text{int}^\mu(A) \subset \text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(\text{int}^\mu(A)))$ kapsaması her zaman sağlandığından A supra α^* -kümedir.

(b) Teorem 2.7 den açıkça görülür.

Teorem 3.8. (X, μ) supra topolojik uzay olsun. Bir $A \subset X$ için aşağıdakiler denktir:

(a) A supra regüler açık kümedir.

(b) A supra açık ve supra t -kümedir.

(c) A supra önaçık ve supra t -kümedir.

(d) A supra açık ve supra α^* -kümedir.

İspat:

(a) $\Rightarrow$ (b): Her supra regüler açık küme bir supra açık ve supra t -küme olduğundan açıktır. (Bak. Uyarı 3.2)

(b) $\Rightarrow$ (c): Her supra açık küme bir supra önaçık küme olduğundan açıktır. (Bak. Uyarı 3.2)

(c) $\Rightarrow$ (d): A supra önaçık ve supra t -küme olsun. Her supra t -küme bir supra α^* -küme olduğundan (Bak. Uyarı 3.2) A supra α^* -kümedir. Ayrıca $A \subset \text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(A)) = \text{int}^\mu(A)$ olduğundan A supra açık kümedir.

(d) $\Rightarrow$ (a): A supra açık ve supra α^* -küme olsun. O zaman,

$$A = \text{int}^\mu(A) = \text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(\text{int}^\mu(A))) = \text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(A))$$

eşitliği sağlanır. Böylece A supra regüler açık kümedir.

Teorem 3.9. (X, μ) supra topolojik uzay olsun. Bir $A \subset X$ için aşağıdakiler denktir:

- (a) A supra α -açık kümedir.
- (b) A supra önaçık ve supra δ -kümedir.
- (c) A supra önaçık ve supra yarı-açık kümedir.

İspat:

(a) $\Rightarrow$ (b): A supra α -açık küme olsun. Her supra α -açık küme bir supra önaçık küme olduğundan (Bak. Uyarı 3.2) A supra önaçık kümedir. Ayrıca $A \subset \text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(\text{int}^\mu(A)))$ kapsaması,

$$\text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(A)) \subset \text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(\text{int}^\mu(A))) \subset \text{cl}^\mu(\text{int}^\mu(A))$$

kapsamasını gerektirir. Buradan A supra δ -kümedir.

(b) $\Rightarrow$ (c): A supra önaçık ve supra δ -küme olsun. O zaman,

$$A \subset \text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(A)) \subset \text{cl}^\mu(\text{int}^\mu(A))$$

kapsaması sağlanır. A supra yarı-açık kümedir.

(c) $\Rightarrow$ (a): Teorem 2.8 den açıktır.

Teorem 3.10. (X, μ) supra topolojik uzay olsun. Bir $A \subset X$ için aşağıdakiler denktir:

- (a) A supra t -kümedir.
- (b) A supra α^* -küme ve supra δ -kümedir.

İspat:

(a) $\Rightarrow$ (b): Her supra t-küme bir supra α^* -küme ve supra δ -küme olduğundan açıktır. (Bak. Uyarı 3.2)

(b) $\Rightarrow$ (a): A supra α^* -küme ve supra δ -küme olsun. Bu durumda,

$\text{int}^\mu(A) = \text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(\text{int}^\mu(A))) \supset \text{int}^\mu(\text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(A))) = \text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(A))$ kapsaması sağlanır.
 $\text{int}^\mu(A) \subset \text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(A))$ her zaman doğru olduğundan A supra t-kümedir.

Teorem 3.11. (X, μ) supra topolojik uzayında bir $A \subset X$ için aşağıdakiler vardır:

(a) A supra β -açık ve supra δ -küme ise supra yarı-açık kümedir.

(b) A supra α -açık ve supra α^* -küme ise supra açık kümedir.

İspat:

(a) A supra β -açık ve supra δ -küme olsun. O halde,

$A \subset \text{cl}^\mu(\text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(A))) \subset \text{cl}^\mu(\text{cl}^\mu(\text{int}^\mu(A))) = \text{cl}^\mu(\text{int}^\mu(A))$ dır. Buradan A supra yarı-açık kümedir.

(b) A supra α -açık ve supra α^* -küme olsun. Böylece,

$A \subset \text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(\text{int}^\mu(A))) = \text{int}^\mu(A)$ dır. A supra açık kümedir.

Uyarı 3.12. Supra topolojik uzaylarda;

(a) Supra α -açık kümeler ile supra α^* -kümeler,

(b) Supra önaçık kümeler ile supra yarı-açık kümeler,

(c) Supra önaçık kümeler ile supra δ -kümeler,

(d) Supra açık kümeler ile supra t-kümeler,

(e) Supra δ -kümeler ile supra α^* -kümeler

birbirlerinden bağımsız kümelerdir.

Uyarı 3.12. ye ilişkin örnekler aşağıda verilmiştir.

Örnek 3.13. Örnek 3.4. deki supra topolojiyi alalım. $A=(-\infty, 2) \cup \{3\}$ supra α -açık ve supra δ -kümedir fakat supra α^* -küme değildir. $B=(-1, \infty) \setminus \mathbb{Q}$ supra önaçık kümedir fakat supra δ -küme ve supra yarı-açık küme değildir.

Örnek 3.14. Örnek 3.5. deki supra topolojiyi alalım. $A=\mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$ supra açık kümedir fakat supra t -küme değildir. $B=\{0\}$ supra t -küme ve supra δ -kümedir fakat supra önaçık ve supra açık küme değildir.

Örnek 3.15. Örnek 3.6. daki supra topolojiyi alalım. $B=\{a, d\}$ supra α^* -kümedir fakat supra α -açık ve supra δ -küme değildir. $C=\{c, d\}$ alındığında bir supra yarı-açık kümedir fakat supra önaçık küme değildir.

4. SUPRA t -SÜREKLİ, SUPRA α^* -SÜREKLİ VE SUPRA δ -SÜREKLİ FONKSİYONLAR

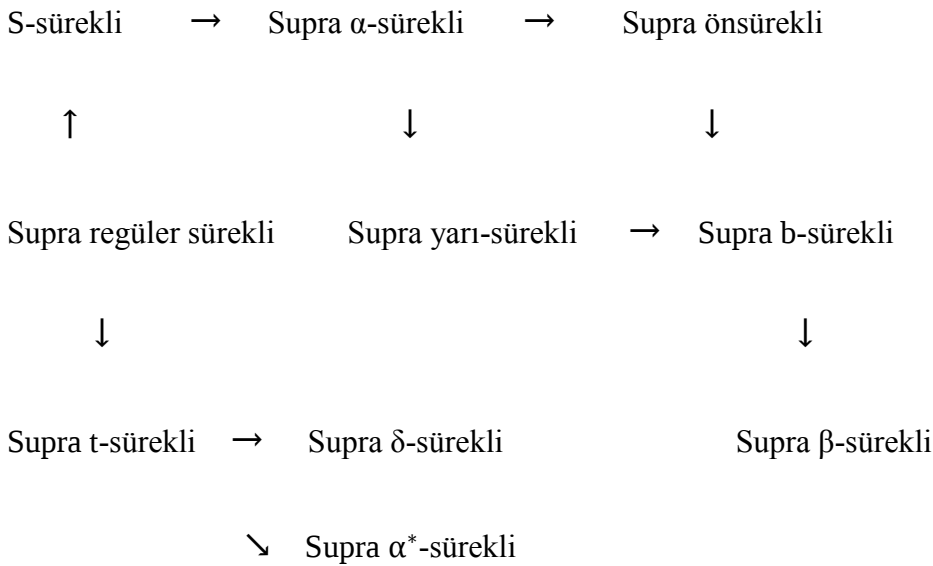
Bu bölümde supra t -süreklî, supra α^* -süreklî ve supra δ -süreklî fonksiyon tanımları tarafımızca verilmiş ve daha önce tanımlanmış bazı süreklî fonksiyonlarla aralarındaki ilişkiler incelenmiştir. Bu ilişkiler yardımıyla supra regüler süreklî, supra α -süreklî ve supra t -süreklî fonksiyonların ayrışimleri elde edilmiştir.

(X, τ) , (Y, σ) topolojik uzaylar ve μ, ν ise sırasıyla τ ve σ topolojilerine bağlı supra topolojiler olsun.

Tanım 4.1. $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonuna;

- (a) Her $V \in \sigma$ için $f^{-1}(V) \in t(X, \mu)$ ise supra t -süreklî,
- (b) Her $V \in \sigma$ için $f^{-1}(V) \in \alpha^*(X, \mu)$ ise supra α^* -süreklî,
- (c) Her $V \in \sigma$ için $f^{-1}(V) \in \delta(X, \mu)$ ise supra δ -süreklî fonksiyon denir.

Uyarı 4.2. Daha önce tanımlanmış bazı süreklilik tanımlarıyla Tanım 4.1. deki tanımlar arasındaki ilişkiler aşağıdaki diyagramda verilmiştir.



Yukarıdaki geçişlerin her zaman ters yönlü olamayacağı aşağıdaki örneklerde gösterilmiştir.

Örnek 4.3. $X=\{a, b, c\}$, $\tau=\{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$, $\mu=\{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$, $Y=\{1, 2\}$ ve $\sigma=\{Y, \emptyset, \{1\}\}$ olsun. $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$, $f(a)=1$, $f(b)=f(c)=2$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonu S -sürekli ve supra δ -sürekli fakat supra regüler sürekli ve supra t -sürekli değildir. Ayrıca $g: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$, $g(a)=2$, $g(b)=g(c)=1$ şeklinde tanımlı g fonksiyonu supra t -sürekli fakat supra regüler sürekli değildir.

Örnek 4.4. (X, μ) supra topolojik uzayı Örnek 3.6 daki uzay, $\tau=\{X, \emptyset, \{a, b\}, \{c\}, \{a, b, c\}\}$, $Y=\{1, 2\}$ ve $\sigma=\{Y, \emptyset, \{1\}\}$ olsun. $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$, $f(a)=f(b)=f(d)=1$, $f(c)=2$ olarak tanımlı f fonksiyonu supra yarı-sürekli ve supra b -sürekli fakat supra α -sürekli ve supra α^* -sürekli değildir. $g(a)=g(d)=1$, $g(b)=g(c)=2$ olarak tanımlı $g: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu supra β -sürekli ve supra α^* -sürekli fakat supra b -sürekli ve supra t -sürekli değildir. Ayrıca $h(a)=h(c)=h(d)=1$, $h(b)=2$ olarak tanımlı $h: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu supra α -sürekli fakat S -sürekli değildir.

Örnek 4.5. $X=\{x, y, z\}$, $\tau=\{X, \emptyset, \{x\}, \{x, y\}\}$, $\mu=\{X, \emptyset, \{x\}, \{x, y\}, \{y, z\}\}$, $Y=\{a, b\}$ ve $\sigma=\{Y, \emptyset, \{a\}\}$ olsun. $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$, $f(x)=f(z)=a$, $f(y)=b$ olarak tanımlı f fonksiyonu supra α -sürekli ve supra b -sürekli fakat supra yarı-sürekli ve supra α -sürekli değildir.

Teorem 4.6. Bir $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu için aşağıdakiler denktir:

- (a) f supra regüler sürekli fonksiyondur.
- (b) f S -sürekli ve supra t -sürekli fonksiyondur.
- (c) f supra α -sürekli ve supra t -sürekli fonksiyondur.
- (d) f S -sürekli ve supra α^* -sürekli fonksiyondur.

İspat: Teorem 3.8 den yararlanılarak yapılır.

Teorem 4.7. Bir $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ fonksiyonu için aşağıdakiler denktir:

- (a) f supra α -sürekli fonksiyondur.
- (b) f supra önsürekli ve supra δ -sürekli fonksiyondur.
- (c) f supra önsürekli ve supra yarı-sürekli fonksiyondur.

İspat: Teorem 3.9 dan yararlanılarak yapılır.

Teorem 4.8. Bir $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ fonksiyonu için aşağıdakiler denktir:

- (a) f supra t -sürekli fonksiyondur.
- (b) f supra α^* -sürekli ve supra δ -sürekli fonksiyondur.

İspat: Teorem 3.10 dan yararlanılarak yapılır.

Teorem 4.9. Bir $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ fonksiyonu için aşağıdakiler vardır:

- (a) f supra β -sürekli ve supra δ -sürekli ise supra yarı-sürekli.
- (b) f supra α -sürekli ve supra α^* -sürekli ise S -sürekli.

İspat: Teorem 3.11 den yararlanılarak yapılır.

5. SUPRA $g\beta$ -KAPALI VE βg -KAPALI KÜMELER

Bu bölümde supra $g\beta$ -kapalı, supra βg -kapalı, supra gp -kapalı ve supra pg -kapalı küme kavramları tarafımızca verilmiş ve bilinen bazı kümelerle ilişkileri incelenmiştir. Ayrıca bu yeni kümelerle ilgili birtakım teoremler ve özellikler elde edilmiştir.

Tanım 5.1. (X, μ) supra topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

- (a) $A \subset U$ ve U supra açık olduğunda $\beta cl^\mu(A) \subset U$ ise A kümesine supra $g\beta$ -kapalı küme,
- (b) $A \subset U$ ve U supra β -açık olduğunda $\beta cl^\mu(A) \subset U$ ise A kümesine supra βg -kapalı küme denir.

Bir supra $g\beta$ -kapalı (sırasıyla, supra βg -kapalı) kümenin tümleyenine supra $g\beta$ -açık (sırasıyla, supra βg -açık) küme denir.

Teorem 5.2. Bir (X, μ) supra topolojik uzayında her supra βg -kapalı küme bir supra $g\beta$ -kapalı kümedir.

İspat: A supra βg -kapalı küme, $A \subset U$ ve U supra açık küme olsun. O zaman U aynı zamanda supra β -açık kümedir. Hipotezden $\beta cl^\mu(A) \subset U$ olduğu görülür. Buradan A supra $g\beta$ -kapalı kümedir.

Teoremin tersinin her zaman doğru olmadığına ilişkin aşağıdaki örnek verilmiştir.

Örnek 5.3. $X = \{a, b, c, d\}$ ve $\mu = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{a, b, d\}\}$ olsun. $A = \{a, b, c\}$ kümesi supra $g\beta$ -kapalı kümedir fakat supra βg -kapalı küme değildir.

Tanım 5.4. (X, μ) supra topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

- (a) $A \subset U$ ve U supra açık olduğunda $\text{pcl}^\mu(A) \subset U$ ise A kümesine supra gp-kapalı küme,
 (b) $A \subset U$ ve U supra önaçık olduğunda $\text{pcl}^\mu(A) \subset U$ ise A kümesine supra pg-kapalı küme
 denir.

Bir supra gp-kapalı (sırasıyla, supra pg-kapalı) kümenin tümleyenine supra gp-açık (sırasıyla, supra pg-açık) küme denir.

Teorem 5.5. Bir (X, μ) supra topolojik uzayında her supra pg-kapalı küme bir supra gp-kapalı kümedir.

İspat: Teorem 5.2 ye benzer şekilde yapılır.

Teorem 5.5 nın tersinin her zaman doğru olmadığı aşağıdaki örnekle desteklenmiştir.

Örnek 5.6. Örnek 5.3 deki supra topolojik uzayı alalım. $A = \{a, b, c\}$ kümesi bir supra gp-kapalı kümedir fakat supra pg-kapalı küme değildir.

Uyarı 5.7. Bu bölümde tanımladığımız kümelerle önceden tanımlanmış bazı kümeler arasındaki ilişki aşağıdaki diyagramda verilmiştir.

Supra kapalı

↓

Supra g-kapalı Supra gs-kapalı

↓

↗

↘

Supra gα-kapalı

Supra gb-kapalı → Supra gβ-kapalı

↘

↗

Supra gp-kapalı

Teorem 5.8. Bir (X, μ) supra topolojik uzayında $A \subset X$ için aşağıdakiler vardır:

(a) A supra gβ-açık $\Leftrightarrow F \subset A$ ve F supra kapalı olduğunda $F \subset \beta \text{int}^\mu(A)$ dir.

(b) A supra βg-açık $\Leftrightarrow F \subset A$ ve F supra β-kapalı olduğunda $F \subset \beta \text{int}^\mu(A)$ dir.

İspat:

(a) $(\Rightarrow)$: A supra gβ-açık, $F \subset A$ ve F supra kapalı küme olsun. O zaman A supra gβ-kapalı, $A^c \subset F^c$ ve F^c supra açık kümedir. Böylece $\beta \text{cl}^\mu(A^c) \subset F^c$ dir, yani $F \subset \beta \text{int}^\mu(A)$ dir.

$(\Leftarrow)$: $A^c \subset U$ ve U supra açık küme olsun. Buradan $U^c \subset A$ olur. Hipotezden $U^c \subset \beta \text{int}^\mu(A)$ dir, yani $\beta \text{cl}^\mu(A^c) \subset U$ elde edilir. O halde A^c supra gβ-kapalı kümedir yani A supra gβ-açık kümedir.

(b) (a) ya benzer şekilde yapılır.

Teorem 5.9. Bir (X, μ) supra topolojik uzayında $A \subset X$ için aşağıdakiler vardır:

(a) A supra gp-açık $\Leftrightarrow F \subset A$ ve F supra kapalı olduğunda $F \subset \text{pint}^\mu(A)$ dir.

(b) A supra pg -açık $\Leftrightarrow F \subset A$ ve F supra önkapalı olduğunda $F \subset \text{pint}^\mu(A)$ dir.

İspat: İspatı Teorem 5.8 a benzer şekilde yapılır.

Teorem 5.10. Bir (X, μ) supra topolojik uzayında $A \subset X$ için aşağıdakiler vardır:

(a) A supra $g\beta$ -kapalı ve $A \subset B \subset \beta \text{cl}^\mu(A)$ ise B supra $g\beta$ -kapalı kümedir.

(b) A supra βg -kapalı ve $A \subset B \subset \beta \text{cl}^\mu(A)$ ise B supra βg -kapalı kümedir.

İspat:

(a) $B \subset U$ ve U supra açık olsun. $A \subset B \subset U$ olduğundan hipotezden, $\beta \text{cl}^\mu(A) \subset U$ olur. $B \subset \beta \text{cl}^\mu(A)$ kapsaması $\beta \text{cl}^\mu(B) \subset \beta \text{cl}^\mu(A)$ yı gerektirdiğinden $\beta \text{cl}^\mu(B) \subset U$ dir. Bu yüzden B supra $g\beta$ -kapalı kümedir.

(b) (a) nın ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 5.11. Bir (X, μ) supra topolojik uzayında $A \subset X$ için aşağıdakiler vardır:

(a) A supra gp -kapalı ve $A \subset B \subset \text{pcl}^\mu(A)$ ise B supra gp -kapalı kümedir.

(b) A supra pg -kapalı ve $A \subset B \subset \text{pcl}^\mu(A)$ ise B supra pg -kapalı kümedir.

İspat: Teorem 5.10 nin ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 5.12. Bir (X, μ) supra topolojik uzayında $A \subset X$ için aşağıdakiler vardır:

(a) A supra $g\beta$ -açık ve $\beta \text{int}^\mu(A) \subset B \subset A$ ise B supra $g\beta$ -açıktır.

(b) A supra βg -açık ve $\beta \text{int}^\mu(A) \subset B \subset A$ ise B supra βg -açıktır.

İspat: Teorem 5.10 nin ispatından yararlanılarak yapılır.

Teorem 5.13. Bir (X, μ) supra topolojik uzayında $A \subset X$ için aşağıdakiler vardır:

- (a) A supra gp-açık ve $\text{pint}^\mu(A) \subset B \subset A$ ise B supra gp-açıktır.
- (b) A supra pg-açık ve $\text{pint}^\mu(A) \subset B \subset A$ ise B supra pg-açıktır.

İspat: Teorem 5.12 ün ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 5.14. Bir (X, μ) supra topolojik uzayında $A \subset X$ için aşağıdakiler vardır:

- (a) A bir supra $g\beta$ -kapalı küme ise $\beta\text{cl}^\mu(A) \setminus A$ boştan farklı bir supra kapalı küme içermez.
- (b) A bir supra βg -kapalı küme ise $\beta\text{cl}^\mu(A) \setminus A$ boştan farklı bir supra β -kapalı küme içermez.
- (c) A bir supra $g\beta$ -açık küme ise $\beta\text{int}^\mu(A) \cup A^c \subset U$, U supra açık olduğunda $U = X$ dir.
- (d) A bir supra βg -açık küme ise $\beta\text{int}^\mu(A) \cup A^c \subset U$, U supra β -açık olduğunda $U = X$ dir.

İspat:

(a) Bir F supra kapalı kümesi için $F \subset \beta\text{cl}^\mu(A) \setminus A$ olsun. O halde $F \subset \beta\text{cl}^\mu(A)$ ve $F \subset A^c$ dir. $A \subset F^c$ kapsaması hipotez gereği $\beta\text{cl}^\mu(A) \subset F^c$ kapsamasını gerektirir. Böylece $F \subset \beta\text{cl}^\mu(A)^c$ dir. Buradan $F = \emptyset$ dir.

(b) İspatı (a) ya benzer şekilde yapılır.

(c) İspatı (a) dan yararlanılarak yapılır.

(d) İspatı (b) den yararlanılarak yapılır.

Teorem 5.15. Bir (X, μ) supra topolojik uzayında $A \subset X$ bir supra $g\beta$ -kapalı küme olsun. O zaman A nın bir supra β -kapalı küme olması için gerek ve yeter koşul $\beta cl^\mu(A)/A$ kümesinin bir supra kapalı küme olmasıdır.

İspat:

$(\Rightarrow)$: A supra β -kapalı küme ise $\beta cl^\mu(A) = A$ dır. O halde $\beta cl^\mu(A)/A = \emptyset$ supra kapalı kümedir.

$(\Leftarrow)$: $\beta cl^\mu(A)/A$ supra kapalı küme olsun. $A \subset [\beta cl^\mu(A)/A]^c$ olduğundan hipotezden $\beta cl^\mu(A) \subset [\beta cl^\mu(A)/A]^c$ dir. Böylece $\beta cl^\mu(A) \subset A$ elde edilir. A supra β -kapalı kümedir.

Teorem 5.16. Bir (X, μ) supra topolojik uzayında $A \subset X$ için aşağıdakiler vardır:

- (a) A supra β -kapalı küme ise supra $g\beta$ -kapalı küme ve supra βg -kapalı kümedir.
- (b) A supra açık ve supra $g\beta$ -kapalı küme ise supra β -kapalı kümedir.

İspat:

(a) A supra β -kapalı küme olsun. O halde $A \subset U$ ve U supra β -açık küme olduğunda $\beta cl^\mu(A) = A \subset U$ dir. Buradan A supra βg -kapalı küme dolayısıyla Teorem 5.2 den supra $g\beta$ -kapalı kümedir.

(b) A supra açık ve supra $g\beta$ -kapalı küme olsun. O halde $A \subset A$ kapsaması $\beta cl^\mu(A) \subset A$ yı gerektirir. Böylece A supra β -kapalı kümedir.

Uyarı 5.17. Supra topolojik uzaylarda;

- (a) İki supra $g\beta$ -kapalı (sırasıyla, βg -kapalı) kümenin kesişimi veya birleşimi supra $g\beta$ -kapalı (sırasıyla, βg -kapalı) küme olmak zorunda değildir.
- (b) İki supra $g\beta$ -açık (sırasıyla, βg -açık) kümenin kesişimi veya birleşimi supra $g\beta$ -açık (sırasıyla, βg -açık) küme olmak zorunda değildir.

Uyarıya ilişkin örnekler aşağıda verilmiştir.

Örnek 5.18. $X=\{1, 2, 3\}$ ve $\mu=\{X, \emptyset, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ olsun. $A=\{1\}$ ve $B=\{3\}$ supra $g\beta$ -kapalı ve supra βg -kapalı kümelerdir. Fakat $A \cup B$ supra $g\beta$ -kapalı ve supra βg -kapalı küme değildir.

Örnek 5.19. $X=\{a, b, c, d\}$ ve $\mu=\{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ olsun. $A=\{a, b, c\}$ ve $B=\{a, b, d\}$ supra $g\beta$ -kapalı kümelerdir fakat $A \cap B$ supra $g\beta$ -kapalı küme değildir.

Tanım 5.20. Bir (X, μ) supra topolojik uzayında A ve B altkümeleri için $\beta cl^\mu(A) \cap B = A \cap \beta cl^\mu(B) = \emptyset$ ise A ve B kümelerine supra β -ayrılmış kümeler denir.

Teorem 5.21. Bir (X, μ) supra topolojik uzayında A ve B supra βg -açık altkümeleri için A ve B supra β -ayrılmış kümeler ise $A \cup B$ supra βg -açık kümedir.

İspat: A ve B supra βg -açık kümeleri supra β -ayrılmış kümeler olsun. $F \subset A \cup B$ olacak şekilde bir F supra β -açık küme alalım. Buradan, A ve B supra β -ayrılmış kümeler olduğundan $F \cap \beta cl^\mu(A) \subset A$ ve $F \cap \beta cl^\mu(B) \subset B$ dir. Teorem 5.8 den $F \cap \beta cl^\mu(A) \subset \beta int^\mu(A)$ ve $F \cap \beta cl^\mu(B) \subset \beta int^\mu(B)$ dir. Böylece,

$F = F \cap (A \cup B) = (F \cap A) \cup (F \cap B) \subset [F \cap \beta cl^\mu(A)] \cup [F \cap \beta cl^\mu(B)] \subset \beta int^\mu(A) \cup \beta int^\mu(B) \subset \beta int^\mu(A \cup B)$ dir ve Teorem 5.8 den $A \cup B$ supra βg -açık kümedir.

6. SUPRA TAMAMEN BAĞLANTISIZ VE SUPRA YEREL İNDİSKRET UZAYLAR

Bu kısımda tarafımızca supra tamamen bağlantısız uzay ve supra yerel indiskret uzay tanımları verilip aralarındaki bağlantı incelenmiştir. Ayrıca tanımladığımız kümelerin ve daha önce tanımlanmış kümelerin bu uzaylardaki ilişkileri araştırılmıştır.

Tanım 6.1. (X, μ) supra topolojik uzayında her supra açık kümenin supra kapanışı supra açık (denk olarak her supra kapalı kümenin supra içi supra kapalı) ise bu uzaya supra tamamen bağlantısız uzay denir.

Tanım 6.2. (X, μ) supra topolojik uzayında her supra açık küme aynı zamanda supra kapalıysa (denk olarak her supra kapalı küme supra açıksa) bu uzaya supra yerel indiskret uzay denir.

Sonuç 6.3. Supra topolojik uzaylarda her supra yerel indiskret uzay supra tamamen bağlantısız uzaydır.

İspat: A supra açık küme olsun. Hipotezden A supra kapalı kümedir. O halde $cl^\mu(A)=A$ supra açık kümedir. Böylece (X, μ) supra tamamen bağlantısız uzaydır.

Yardımcı Teorem 6.4. (X, μ) supra topolojik uzayının tamamen bağlantısız olması için gerek ve yeter koşul her supra regüler açık kümenin kapalı olmasıdır.

İspat:

($\Rightarrow$): A supra regüler açık küme olsun. Her supra regüler açık küme bir supra açık küme olduğundan (bak. Uyarı 3.2) A supra açık kümedir. O halde hipotez gereği A'nın supra kapanışı açıktır, yani $\text{cl}^\mu(A) = \text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(A)) = A$ dır. A supra kapalı kümedir.

($\Leftarrow$): A supra açık küme olsun. O zaman $\text{int}^\mu(A) = A$ dır. $\text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(A))$ supra regüler açık küme olduğundan hipotezden,

$\text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(A)) = \text{cl}^\mu(\text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(A))) = \text{cl}^\mu(\text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(\text{int}^\mu(A)))) = \text{cl}^\mu(\text{int}^\mu(A)) = \text{cl}^\mu(A)$ dır yani $\text{cl}^\mu(A)$ supra açık kümedir.

Teorem 6.5. (X, μ) supra tamamen bağlantısız uzay olsun. Bir $A \subset X$ için aşağıdakiler denktir:

- (a) A supra b-açık kümedir.
- (b) A supra β -açık kümedir.
- (c) A supra önaçık kümedir.

İspat:

(a) $\Rightarrow$ (b): Her supra b-açık küme bir supra β -açık küme olduğundan açıktır. (Bak. Uyarı 3.2)

(b) $\Rightarrow$ (c): A supra β -açık küme olsun. $\text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(A))$ supra regüler açık küme olduğundan Yardımcı Teorem 6.4 den aynı zamanda supra kapalı kümedir. O halde,

$A \subset \text{cl}^\mu(\text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(A))) = \text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(A))$ dır. Böylece A supra önaçık kümedir.

(c) $\Rightarrow$ (a): Her supra önaçık küme bir supra b-açık küme olduğundan açıktır. (Bak. Uyarı 3.2)

Teorem 6.6. (X, μ) supra tamamen bağlantısız uzay olsun. Bir $A \subset X$ kümesinin supra yarı-açık küme olması için gerek ve yeter koşul A nın supra α -açık küme olmasıdır.

İspat: $\text{int}^\mu(A)$ supra açık küme olduğundan $\text{cl}^\mu(\text{int}^\mu(A))$ supra açıktır. Böylece $\text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(\text{int}^\mu(A))) = \text{cl}^\mu(\text{int}^\mu(A))$ dır. O halde supra yarı-açık kümelerle supra α -açık kümeler birbirlerine denktir.

Teorem 6.7. (X, μ) supra yerel indiskret uzay olsun. O zaman her $A \subset X$ için A supra önaçık, supra b-açık, supra β -açık ve supra α^* -kümedir.

İspat: $\text{cl}^\mu(A)$ supra kapalı küme olduğundan aynı zamanda supra açık kümedir. O zaman $A \subset \text{cl}^\mu(A) = \text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(A))$ dır ve A supra önaçık kümedir. Her supra önaçık küme supra b-açık ve supra β -açık kümedir (bak. Uyarı 3.2). Ayrıca $\text{int}^\mu(A)$ supra açık küme olduğundan aynı zamanda supra kapalı kümedir. O zaman $\text{cl}^\mu(\text{int}^\mu(A)) = \text{int}^\mu(A)$ dır ve buradan $\text{int}^\mu(A) = \text{int}^\mu(\text{cl}^\mu(\text{int}^\mu(A)))$ eşitliğini elde ederiz. A supra α^* -kümedir.

Teorem 6.8. (X, μ) supra yerel indiskret uzay ve $A \subset X$ için aşağıdakiler denktir:

- (a) A supra açık kümedir.
- (b) A supra yarı-açık kümedir.
- (c) A supra α -açık kümedir.
- (d) A supra regüler açık kümedir.
- (e) A supra t-kümedir.
- (f) A supra δ -kümedir.

İspat:

(a) $\Rightarrow$ (b): Her supra açık küme bir supra yarı-açık küme olduğundan açıktır. (Bak. Uyarı 3.2)

(b) $\Rightarrow$ (c): A supra yarı-açık küme olsun. $cl^u(int^u(A))$ supra kapalı küme olduğundan aynı zamanda supra açık kümedir. Böylece

$$A \subset cl^u(int^u(A)) = int^u(cl^u(int^u(A)))$$

dır yani A supra α -açık kümedir.

(c) $\Rightarrow$ (a): A supra α -açık küme olsun. Teorem 6.7 den A supra α^* -kümedir. Teorem 3.11(b) den A supra açık kümedir.

(a) $\Rightarrow$ (d): A supra açık küme olsun. O zaman A supra kapalı kümedir. Böylece, $int^u(cl^u(A)) = cl^u(A) = A$ eşitliği elde edilir. A supra regüler açık kümedir.

(d) $\Rightarrow$ (e): Her supra regüler açık küme bir supra t-küme olduğundan açıktır. (Bak. Uyarı 3.2)

(e) $\Rightarrow$ (f): Her supra t-küme bir supra δ -küme olduğundan açıktır. (Bak. Uyarı 3.2)

(f) $\Rightarrow$ (a): A supra δ -küme olsun. Hipotezden $cl^u(A)$ supra açık, $int^u(A)$ supra kapalı kümedir. Buradan $A \subset cl^u(A) = int^u(cl^u(A)) \subset cl^u(int^u(A)) = int^u(A)$ dır. A supra açık kümedir.

SONUÇ

Bu çalışmanın üçüncü bölümünde Arockiarani ve Trinita Pricilla (2011) tarafından verilen supra regüler açık küme kavramından daha zayıf olan supra t-küme, supra α^* -küme ve supra δ -küme kavramları tanıtılarak, her supra regüler açık kümenin supra t-küme, her supra t-kümenin de supra α^* -küme ve supra δ -küme olduğu elde edilen sonuçlardan birkaç tanesidir.

Dördüncü bölümde, üçüncü bölümde tanıtılan yeni kümeler ve teoremler yardımıyla supra t-sürekli, supra α^* -sürekli ve supra δ -sürekli fonksiyonlar tanımlanmış, supra regüler sürekli, supra α -sürekli ve supra t-sürekli fonksiyonların ayrışimleri elde edilmiştir.

Beşinci bölümde, Ravi et al. (2011) tarafından tanımlanan supra g-kapalı küme kavramından daha zayıf olan supra $g\beta$ -kapalı ve supra gp-kapalı kümeler, supra $g\beta$ -kapalı kümelerden daha güçlü olan supra βg -kapalı kümeler ve supra gp-kapalı kümelerden daha güçlü olan supra pg-kapalı kümeler tanıtılmış, tanıtılan bu kümelerin bazı özellikleri araştırılmıştır.

Son olarak altıncı bölümde supra tamamen bağlantısız uzay ve supra yerel indiskret uzay tanıtılmış ve bu uzaylarda üçüncü bölümde tanıtılan yeni kümeler ile bilinen bazı kümeler arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Arockiarani, I. and Trinita Pricilla, M.**, 2011, On supra generalized b-closed sets, Antarctica Journal of Mathematics, 8.
- Devi, R., Sampathkumar, S. and Caldas, M.**, 2008, On supra α -open sets and $s\alpha$ -continuous functions, General Mathematics, 16(2):77-84p.
- Kamaraj, M., Ramkumar, G. and Ravi, O.**, 2011, Supra sg-closed sets and supra gs-closed sets, International Journal of Mathematical Archive, 2(11):2413-2419p.
- Kamaraj, M., Ramkumar, G. and Ravi, O.**, 2012, On supra quotient mappings, International Journal of Mathematical Archive, 3(1):245-252p.
- Mashhour, A. S., Allam, A. A., Mahmoud, F. S. and Khedr, F. H.**, 1983, On supra topological spaces, Indian J. Pure and Appl. Math., 14(4):502-510p.
- Ravi, O., Ramkumar, G. and Kamaraj, M.**, 2011, On supra g-closed sets, International Journal of Advances in Pure and Applied Mathematics, 1(2):52-66p.
- Ravi, O., Ramkumar, G. and Kamaraj, M.**, On supra β -open sets and supra β -continuity on topological spaces, International Mathematical Forum(in press).
- Sayed, O. R.**, 2010, Supra preopen sets and supra pre-continuity on topological spaces, Scientific Studies and Research Series Mathematics and Informatics, 20(2):79-88p.
- Sayed, O. R. And Noiri, T.**, 2010, On supra b-open sets and supra b-continuity on topological spaces, European J. Pure and Applied Math., 3(2):295-302p.
- Yalvaç, T. H.**, 1994, Relations between new topologies obtained from old ones, Acta Math. Hungar., 64(3):231-235p.

ÖZGEÇMİŞ

18 Mart 1988 tarihinde Yalova'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Yalova'da, lise öğrenimini ise Bursa Ali Osman Sönmez Fen Lisesinde tamamladı. 2010 yılında Ege Üniversitesi Matematik Bölümü Teorik Matematik Ağırlıklı Lisans öğretim programından mezun oldu. Halen Ege Üniversitesi Matematik Bölümü Topoloji Anabilim Dalı'nda yüksek lisansını sürdürmektedir.