Taksi Uzayda Bazı Düzgün Çokgenler ve Çokyüzlüler Üzerine

Süleyman Yüksel

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Mayıs 2012

On Some Regular Polygons and Polyhedrons in the Taxicab Space

Süleyman Yüksel

DOCTORAL DISSERTATION

Department of Mathematics

May 2012

Taksi Uzayda Bazı Düzgün Çokgenler ve Çokyüzlüler Üzerine

Süleyman Yüksel

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Prof. Dr. Münevver Özcan

Mayıs 2012

ONAY

Matematik Anabilim Dalı Doktora öğrencisi Süleyman Yüksel'in DOKTORA tezi olarak hazırladığı "Taksi Uzayda Bazı Düzgün Çokgenler ve Çokyüzlüler Üzerine" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Münevver Özcan

İkinci Danışman : ---

Doktora Tez Savunma Jürisi:

Üye: Prof. Dr. Rüstem Kaya

Üye : Prof. Dr. Süleyman Çiftçi

Üye : Prof. Dr. Şükrü Olgun

Üye : Prof. Dr. Münevver Özcan

Üye : Yrd. Doç. Dr. Özcan Gelişgen

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tez çalışmasında, analitik 3-uzayda Öklidyen ve Taksi eşit uzunluklu doğru parçalarının geometrik yerleri belirlenmiştir. Öklidyen ve Taksi düzgün çokgenler ve çokyüzlüler (şekiller) incelenmiştir. Çalışma 6 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, tez çalışmasıyla ilgili olan bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

İkinci bölümde, Öklidyen 3-uzayda eşit uzunluktaki iki doğru parçasının hangi koşullar altında Taksi uzunluklarının da birbirine eşit olduğu belirlenmiştir. Analitik düzlemde ve analitik 3-uzayda, Öklidyen ve Taksi eşit uzunluklu doğru parçalarının geometrik yerleri tespit edilmiştir.

Üçüncü bölümde, analitik 3-uzayda Öklidyen düzgün çokgenlerin hangilerinin aynı zamanda Taksi düzgün çokgen olduğu tespit edilmiştir.

Dördüncü bölümde, analitik 3-uzayda Öklidyen düzgün çokgen olmadığı halde Taksi düzgün çokgenlerin var olup olmadığı araştırılmış ve Öklidyen düzgün olmayan Taksi düzgün çokgenler tespit edilmiştir.

Beşinci bölümde, analitik 3-uzayda yer alan Öklidyen düzgün çokyüzlülerden hangilerinin aynı zamanda Taksi düzgün çokyüzlü olduğu tespit edilmiştir.

Altıncı bölümde, analitik 3-uzayda Öklidyen düzgün çokyüzlü olmadığı halde Taksi düzgün çokyüzlülerin var olup olmadığı araştırılmış ve Öklidyen düzgün olmayan Taksi düzgün çokyüzlünün sadece Taksi küp (Öklidyen dikdörtgenler prizması) olduğu tespit edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Taksi Geometri, Taksi Düzgün Çokgen, Taksi Düzgün Çokyüzlü, Taksi Eşit Uzunluktaki Doğru Parçaları

SUMMARY

In this thesis, the geometric locus of the line segments with same Euclidean and Taxicab lengths in the analytical 3-space were identified. Euclidean and Taxi regular polygons and polyhedrons (figure) in the analytical 3-space were studied. The work consists of six sections.

In the first section, some basic definitions and theorems related to the work were indicated.

In the second section, under which conditions two lines with equal lengths in the Euclidean 3-space are also equal to each other in the Taxi 3-space were studied. The geometric locations of the line segments with same Euclidean distance and same Taxi distance in analytical 3-space were identified.

In the third section, the Euclidean regular polygons which are also Taxi regular polygons in the analytical 3-space were studied.

In the fourth section, the existence of Taxi regular polygons which are not Euclidean regular polygons in the analytical 3-space were researched and identified.

In the fifth section, Euclidean regular polyhedrons which are also Taxi regular polyhedrons in the analytical 3-space were studied.

In the sixth section, the existences of Taxi regular polyhedrons which are not Euclidean regular polyhedrons were researched. It was identified that the Taxi cube (Euclidean rectangular prism) is the only Taxi regular polyhedron which is not Euclidean regular polyhedron.

Keywords: Taxi geometry, Taxi regular polygons, Taxi regular polyhedrons, Line segment with equal Taxi lengths

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans ve Doktora eğitimimin her aşamasında büyük yardım ve desteğini gördüğüm değerli hocam

Prof. Dr. Münevver Özcan'a,

tezimi tamamlamada emeği geçen Tez İzleme Kurulu üyeleri değerli hocalarım Prof. Dr. Rüstem Kaya ve Prof. Dr. Süleyman Çiftçi'ye, çalışmalarım sırasında yardım ve desteğini esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. Özcan Gelişgen'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Tüm çalışmalarımı, eşim

Cavide Yüksel'e

ithaf ediyorum.

ESKİŞEHİR, 2012 Süleyman Yüksel

İÇİNDEKİLER

ÖZET V

SUMMARY VI

TEŞEKKÜR VII

BÖLÜM 1: TEMEL KAVRAMLAR 1

1.1 Platon'un Beş Katı Cismi 1

1.1.1 Konveks Çokyüzlülerde Euler Formülü 2

1.1.2 Düzgün Çokyüzlü Sayısı 4

1.2 Tanım ve Aksiyomlar 6

1.2.1 Öklidyen 3-Uzayda Düzgün Çokyüzlüler 17

BÖLÜM 2: ÖKLİDYEN VE TAKSİ UZUNLUKLARI ARASINDAKİ İLİŞKİ 21

2.1 Öklidyen ve Taksi Uzunluklarının Korunması 21

2.2 Öklidyen ve Taksi Eşit Uzunluklu Doğru Parçalarının Geometrik Yerleri 26

2.2.1 Analitik Düzlemde Öklidyen ve Taksi Eşit Uzunluklu Doğru Parçalarının geometrik Yerleri 26

2.2.2 Analitik 3-Uzayda Öklidyen ve Taksi Eşit Uzunluklu Doğru Parçalarının Geometrik Yerleri 36

BÖLÜM 3: ANALİTİK 3-UZAYDA ÖKLİDYEN VE TAKSİ DÜZGÜN ÇOKGENLER . 56

3.1 Analitik Düzlemde Öklidyen Düzgün Çokgenlerin Taksi Düzgünlüğü 57

3.2 Analitik 3-Uzayda Öklidyen Düzgün Çokgenlerin Taksi Düzgünlüğü 66

3.2.1 Öklidyen Küre, Taksi Küre ve Bir Düzlemin Ortak Noktaları 69

3.3 Düzgün Çokgenlerin Simetri Düzlemi 76

3.4 Düzgün Çokgenler 89

BÖLÜM 4: ÖKLİDYEN DÜZGÜN OLMAYAN TAKSİ DÜZGÜN ÇOKGENLER 125

BÖLÜM 5: DÜZGÜN ÇOKYÜZLÜLER 132

5.1 Düzgün Dörtyüzlü 137

5.2 Düzgün Altıyüzlü (Küp) 140

5.3 Düzgün Sekizyüzlü 143

5.4 Düzgün Onikiyüzlü 146

5.5 Düzgün Yirmiyüzlü 147

BÖLÜM 6: ÖKLİDYEN DÜZGÜN OLMAYAN TAKSİ DÜZGÜN ÇOKYÜZLÜLER .. 149

EK-1 155

EK-2 156

KAYNAKLAR 157

ÖZGEÇMİŞ 158

BÖLÜM 1

TEMEL KAVRAMLAR

Analitik 3-uzayda alışılmış Öklidyen metrik yerine Taksi metriği kullanılarak Taksi 3-uzay elde edilmiştir. Bu tezde Öklidyen düzgün çokyüzlülerden hangilerinin aynı zamanda Taksi düzgün çokyüzlü olduğu ve Öklidyen olmayan Taksi düzgün çokyüzlü var mı sorularına cevap arandı. Ayrıca çokyüzlüler ayrıt (doğru parçaları) ve çokgenlerden oluştuğundan dolayı, çalışmaya bir doğru parçasının Öklidyen ve Taksi uzunlukları arasındaki ilişki incelenerek başlandı. Daha sonra, Öklidyen düzgün çokgenlerden hangilerinin aynı zamanda Taksi düzgün olduğu yada Öklidyen olmayan Taksi düzgün çokgenlerin varlığı araştırıldı. Çalışmanın detaylarına girmeden önce Deniz Gündüz'ün Bilim Teknik Dergisi sayfa 29, Eylül 1998 sayısında yayınlanan "Üçüncü Boyutun Sakinleri Düzgün Çokyüzlüler" adlı yazıdaki çokyüzlülerin tarihi seyrine göz gezdirelim:

Gizem ve güzellik, bu iki özellik insanların ilgisini çokyüzlülerin üzerine çekmiştir. Kimileri yaşamı ve doğayı açıklamaya çalışmış, kimileride sanatlarıyla bütünleştirmiştir.

Çokyüzlüler içinde özellikle düzgün olanları insanların ilgisini çekmiştir. Bazı arkeolojik kazılarda binlerce yıl öncesine ait taştan yapılmış düzgün çokyüzlüler bulunmuştur. Bunca yıl uğraşılmasına rağmen sadece beş tane düzgün çokyüzlü bulunabilmiştir.Yeni çokyüzlüler bulma yönündeki çabalar, Öklid'in "Elemanlar" adlı kitabında bunun başarılamayacağını ispatlaması ile son bulmuştur.

1.1 Platon'un Beş Katı Cismi

Platon belki başka düzgün çokyüzlü elde edilemeyeceğini ispatlayamamıştı ama oluşturulabilen düzgün çokyüzlülerden haberdardı. Ona göre, bu şekiller doğayı

açıklamak için kullanılmalıydı, çünkü herbir düzgün çokyüzlü belli bir doğal öğeyi simgeliyordu. Her yüzü bir eşkenar üçgen olan dörtyüzlü ateşi, sekizyüzlü havayı, yirmiyüzlü suyu, yüzleri kareler olan küp dünyayı, yüzleri düzgün beşgenlerden oluşan onikiyüzlü ise evreni simgeliyordu. Platon "Timaus" adlı eserinde bu düşüncesini açıkladıktan sonra çokyüzlüler için şöyle diyordu:

"Tanrının onların sayıları, hareketleri ve diğer nitelikleri arasında uygun oranlar ayarladığını ve bu oranları tam bir mükemmellik içinde bir araya getirdiğini var saymalıyız."

O günden beri bu şekillere "Platon Katıları" adı verilir.



Şekil 1.1

1.1.1 Konveks Çokyüzlülerde Euler Formülü

Eğer çokyüzlünün herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası yine bu çokyüzlünün içinde kalıyorsa, bu çokyüzlüye konveks (dışbükey) çokyüzlü denir. Konveks çokyüzlülerin yüz, ayrıt ve köşe sayıları arasında Euler teoremi olarak bilinen bir bağıntı vardır.

Köşe sayısı K, ayrıt sayısı A, yüz sayısı Y, her bir köşede birleşen ayrıt sayısı q, her bir yüzü oluşturan ayrıt sayısı da p olmak üzere Platon katıları için bu verilerin bir tablosu aşağıdaki gibidir:

ÇOKYÜZLÜ	Y	K	A	q	p
Dörtyüzlü	4	4	6	3	3
Küp	6	8	12	3	4
Sekizyüzlü	8	6	12	4	3
Onikiyüzlü	12	20	30	3	5
Yirmiyüzlü	20	12	30	5	3

Tablodaki sayılar yardımıyla her bir çokyüzlü için $K+Y-A$ sayısı hesaplanırsa her zaman sonucun 2 olduğunu görülür. Bu sadece Platon katıları için değil tüm konveks çokyüzlüler için geçerli bir özelliktir. $K+Y-A=2$ bağıntısının ispatı tümevarım yöntemi ile yapılabilir.

Tümevarım köşe sayısı üzerine uygulansın. Yani formülün K tane köşeye sahip çokyüzlü için doğru olduğunu kabul edip, $K+1$ köşeli çokyüzlü için de doğru olduğu gösterilirse ispat tamamlanmış olur. Formülün 4 köşeli çokyüzlü için doğru olduğu açıktır:

$$K=4,\quad Y=4,\quad A=6\quad \text{için } 4+4-6=2$$

Eğer yukarıda belirtilen K köşeden $K+1$ köşeye geçişi yapılabilirse 4 köşeden 5 e, 5 den 6 ya derken sonsuza kadar tüm konveks çokyüzlüler için ispat yapılmış olur.

K köşe sayılı konveks çokyüzlünün dışında bir M noktası alınsın. Bu M noktası $(K+1)$ inci köşe olacaktır. M yi çokyüzlünün uygun bir yüzünü oluşturan çokgenin tüm köşelerine birleştirilerek yeni bir çokyüzlü elde edilmiş olur. Kabul edelim ki M yi köşeleri ile birleştirdiğimiz çokgenin kenar sayısı t olsun. Böylece çokyüzlünün ayrıt sayısı t kadar artmış olur. Yeni çokyüzlünün yüzlerinin sayısı ise $Y+t-1$ olur, çünkü köşelerini M ye birleştirdiğimiz çokgen yüz, yeni çokyüzlünün içinde kalmış olur. Yeni çokyüzlü için A_s, K_s, Y_s sayıları şu şekilde bulunur:

$$A_s=A+t\ ,\quad K_s=K+1\ ,\quad Y_s=Y+t-1$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} K_s + Y_s - A_s &= K + 1 + Y + t - 1 - A - t \\ &= K + Y - A \\ &= 2 \end{aligned}$$

Sonuç olarak yeni çokyüzlü için de formülün geçerli olduğunu gösterilmiş oldu.

Bazı bilim adamlarına göre, bu bağıntı Descartes'a aittir. Bunu ileri sürmelerinin sebebi de, Descartes'a ait olan teoremin doğrudan sonuçlarından birinin de yukarıdaki bağıntı olmasıdır. Ancak bu bağıntıyı ilk kez 1750 yılında açıkça ortaya koyan kişinin Euler olduğu bilinmektedir. Euler'in amacı, çokyüzlüleri sınıflandırabilmekti. Ancak bunu yapabilmek için sadece yüzlerin sayısı yeterli değildi; ayrıt ve köşe sayılarıda incelenmeliydi. Euler incelemeleri sırasında bu üç sayı arasındaki bağıntıyı keşfetti. Bağıntının kesin ispatı ise ancak 1847 yılında C. Von Saudt tarafından yapılabildi.

1.1.2 Düzgün Çokyüzlü sayısı

Bir düzgün çokyüzlüde her köşede birleşen ayrıt sayısı q ile köşe sayısı olan K nın çarpımı ya da her yüzün kenar sayısı p ile yüz sayısı Y'nin çarpımı bu çokyüzlünün ayrıt sayısının iki katını yani $2A$ yı verir. Bu eşitlikler yardımıyla Euler formülündeki K yerine $\frac{2A}{q}$ ve Y yerine $\frac{2A}{p}$ yazılırsa;

$$\begin{aligned} K + Y - A = 2 \;&\Rightarrow\; \frac{2A}{q} + \frac{2A}{p} - A = 2 \\ &\Rightarrow\; \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - \frac{1}{2} = \frac{1}{A} \end{aligned}$$

bulunur, $\frac{1}{A} > 0$ olduğundan

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} > \frac{1}{2} \quad \text{olur.}$$

p ve q tanımlarından dolayı 2 den büyük sayılardır. Bulunan eşitsizlikten dolayı her ikisi birden, üçden büyük olamaz. Bu durumda en az biri 3 olmalıdır. Sonuçta olabilecek tüm $\{p, q\}$ ikilileri şunlardır:

$\{3,3\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,3\}, \{5,3\}$

Bu gösterime Schläfli sembolü denir.

Elde edilen beş farklı Schläfli sembolü beş farklı düzgün çokyüzlüye karşılık gelir:

$\{3,3\}$, Düzgün dörtyüzlü

$\{4,3\}$, Küp

$\{3,4\}$, Düzgün sekizyüzlü

$\{5,3\}$, Düzgün onikiyüzlü

$\{3,5\}$, Düzgün yirmiyüzlü

Bu bölümde çalışmamızı anlaşılır kılmak için düzgün çokgen ve düzgün şekil kavramları kısaca tanıtılmıştır. Ayrıca tezi diğer kaynaklara başvurmadan anlaşılır kılmak için kaynakların faydalandığımız tanım ve teoremlerine ayrıntılara girilmeksizin yer verilmiştir. Özellikle B. Çolakoğlu ve R. Kaya'nın On the Regular Polygons in the Taxicab Plane ve Ö.Gelişgen, R. Kaya: The Taxicab Space Group çalışmalarından yararlanılmıştır.

1.2 Tanım ve Aksiyomlar

Aşağıda ifade edilen tanımlar (Tanım1.1, Tanım1.2,...,Tanım 1.17) Barış Çolakoğlu'nun Doktora Tez çalışmasından alınmıştır.

Tanım 1.1: $\mathcal{P}$, elemanları *noktalar* olan bir küme; $\mathcal{L}$ de, $\mathcal{P}$ nin boş olmayan alt kümelerinden oluşan ve elemanları *doğrular* olarak adlandırılan bir küme olmak üzere, aşağıdaki iki aksiyomu sağlayan matematiksel sisteme *soyut geometri* denir ve $[\mathcal{P}, \mathcal{L}]$ ile gösterilir.

(i) $\mathcal{P}$ deki her farklı iki noktadan geçen en az bir doğru vardır.

(ii) Her doğru en az iki noktaya sahiptir.

Tanım 1.2: Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $[\mathcal{P}, \mathcal{L}]$ soyut geometrisine *konum (incidence) geometrisi* denir.

(i) $\mathcal{P}$ deki her farklı iki nokta bir tek doğru üzerindedir.

(ii) Doğrudaş olmayan üç nokta vardır.

Tanım 1.3: X boş olmayan bir küme olmak üzere, $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki (i) ve (ii) koşullarını sağlarsa, d ye X kümesi üzerinde bir uzaklık fonksiyonu denir. Eğer üç koşulu da sağlarsa, d ye X kümesi üzerinde bir *metrik*tir denir.

(i) Her $P, Q \in X$ için $d(P, Q) \geq 0$ ve $d(P, Q) = 0 \iff P = Q$ dir.

(ii) Her $P, Q \in X$ için $d(P, Q) = d(Q, P)$ dir.

(iii) Her $P, Q, R \in X$ için $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$ dir.

Tanım 1.4: $l, [\mathcal{P}, \mathcal{L}]$ konum geometrisinin bir doğrusu, d de $\mathcal{P}$ üzerinde bir uzaklık fonksiyonu olmak üzere, aşağıdaki koşulları sağlayan $f : l \to \mathbb{R}$ fonsiyonuna l için *cetveldir* denir.

(i) f fonksiyonu bire-bir ve örtendir.

(ii) l üzerindeki her P ve Q noktaları için $|f(P) - f(Q)| = d(P, Q)$ dir.

Burada, (ii) şıkkındaki eşitliğe *cetvel eşitliği*, $f(P)$ ye de P nin f ye bağlı *koordinatı* denir.

Tanım 1.5: $[\mathcal{P}, \mathcal{L}]$ bir konum geometri ve d, $\mathcal{P}$ üzerinde bir uzaklık fonksiyonu olmak üzere, her $l \in \mathcal{L}$ doğrusu cetvele sahipse, d ile birlikte $[\mathcal{P}, \mathcal{L}]$ konum geometrisine *metrik geometri* denir ve $[\mathcal{P}, \mathcal{L}, d]$ ile gösterilir.

Tanım 1.6: A, B ve C, $[\mathcal{P}, \mathcal{L}, d]$ metrik geometrisi içinde üç farklı nokta olmak üzere, eğer bu noktalar aynı doğru üzerinde ve

$$d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$$

ise, B noktası A ve C noktaları *arasında*dır denir ve bu durum $A - B - C$ ile gösterilir.

A ve B farklı iki nokta olmak üzere, $\{X \in \mathcal{P} : X = A$ veya $X = B$ veya $A - X - B\}$ kümesine AB *doğru parçası* denir ve $\overline{AB}$ veya $[AB]$ şeklinde gösterilir. $[AB]$ ve $[CD]$ iki doğru parçası olmak üzere, $d(A, B) = d(C, D)$ ise $[AB]$ ve $[CD]$ doğru parçaları *eş*tir denir. Ayrıca $[AB] \cup \{X \in P : A - B - X\}$ kümesine AB *ışını*, A noktasına da $\overrightarrow{AB}$ ışınının *başlangıç noktası* denir. AB ışını, $[AB$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.7: $[\mathcal{P}, \mathcal{L}, d]$ bir metrik geometri ve $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}$ olsun. Eğer $\mathcal{S}$ içindeki her farklı P ve Q noktaları için $\overline{PQ} \subset \mathcal{S}$ ise, $\mathcal{S}$ kümesine *konveks*tir denir.

Tanım 1.8: Bir $[\mathcal{P}, \mathcal{L}, d]$ metrik geometrisinde, verilen her $l \in \mathcal{L}$ doğrusu için $\mathcal{P}$ nin aşağıdaki üç koşulu sağlayan H_1 ve H_2 gibi iki alt kümesi varsa, $[\mathcal{P}, \mathcal{L}, d]$ sistemi *düzlem ayırma aksiyomu*nu sağlar denir. Bu durumda, H_1 ve H_2 kümelerinin her birine bir *yarı düzlem*, l doğrusuna da bu yarı düzlemlerin *kenarı* denir.

(i) H_1 ve H_2 konvekstir.

(ii) $H_1 \cup H_2 = \mathcal{P} - l$ ($\mathcal{P}$ den l nin çıkarılmasıyla elde edilen küme).

(iii) $A \in H_1$ ve $B \in H_2$ ise $AB \cap l \neq \varnothing$ dir.

Tanım 1.9: Düzlem ayırma aksiyomunu sağlayan bir metrik geometriye *Pasch geometri* denir.

Tanım 1.10: Başlangıç noktaları ortak farklı iki ışının birleşim kümesine *açı* denir; AB ve BC ışınlarının oluşturduğu açıya ABC açısı denir ve $\angle ABC$ şeklinde gösterilir. Bir $[\mathcal{P}, \mathcal{L}, d]$ Pasch geometrisinde, $\mathcal{A}$ tüm açıların kümesi olmak üzere, aşağıdaki dört koşulu sağlayan $m : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna *açı ölçme fonksiyonu* denir:

(i) Eğer $\angle ABC \in \mathcal{A}$ ise, $0 < m(\angle ABC) < 180$ dir.

(ii) H yarı düzleminin kenarı üzerinde bir $[AB$ ışını ve 0 ile 180 arasında herhangi r reel sayısı verilsin. Bu durumda $P \in H$ olmak üzere $m(\angle ABC)=r$ olacak şekilde bir tek $[AP$ ışını vardır.

(iii) Eğer D noktası $\angle ABC$ nın *iç bölgesi*nde ise,

$$m\angle ABD + m\angle DBC = m\angle ABC \qquad \text{dir.}$$

(iv) Eğer $A - B - C$ ve $D \notin \overleftrightarrow{AC}$ ise, $m\angle ABD + m\angle DBC = 180$ dir.

Tanım 1.11: $[\mathcal{P}, \mathcal{L}, d]$ Pasch geometrisine, bu geometri üzerinde tanımlı bir m açı ölçme fonksiyonuyla birlikte *açıölçer (protractor)* geometri denir ve $[\mathcal{P}, \mathcal{L}, d, m]$ ile gösterilir.

Tanım 1.12: $[\mathcal{P}, \mathcal{L}, d, m]$ iletki geometrisinde, eğer $m(\angle ABC)=m(\angle DEF)$ ise $\angle ABC$ ve $\angle DEF$ açıları *eş*tir denir. Ayrıca, iki üçgenin köşe noktaları arasında bire-bir bir eşleme verildiğinde, eğer birinci üçgenin kenarları ve bu kenarlar arasındaki açıları, ikinci üçgenin karşılık gelen kenarlarına ve bu kenarlar arasındaki açılarına eş ise bu iki üçgen *eş*tir denir.

Tanım 1.13: $[\mathcal{P}, \mathcal{L}, d, m]$ açıölçer geometrisinde, iki üçgenin köşe noktaları arasında bire-bire bir eşleme verilsin. Eğer birinci üçgenin iki kenarı ve bu kenarlar

arasındaki açı, ikinci üçgenin karşılık gelen kenarlarına ve açısına eş iken bu üçgenler de eş ise, $[\mathcal{P}, \mathcal{L}, d, m]$ sistemi *kenar-açı-kenar (KAK) aksiyomu*nu sağlıyor denir.

Tanım 1.14: KAK aksiyomunu sağlayan açıölçer geometriye *mutlak (absolute, neutral) geometri* denir.

Tanım 1.15: Bir $[\mathcal{P}, \mathcal{L}]$ konum geometrisinde l_1 ve l_2 iki doğru olmak üzere $l_1 \cap l_2 = \varnothing$ ise l_1 ve l_2 doğrularına *paralel*dir denir.

Tanım 1.16: Bir $[\mathcal{P}, \mathcal{L}]$ konum geometrisinde l doğrusu ve bu doğru dışında bir P noktası verildiğinde, P noktasından geçen ve l doğrusuna paralel olan bir tek doğru varsa, $[\mathcal{P}, \mathcal{L}]$ sistemi *paralellik aksiyomu*nu sağlıyor denir.

Tanım 1.17: Paralellik aksiyomunu sağlayan mutlak geometriye *Öklidyen düzlem geometri* denir. Daha açık olarak, $\mathcal{P}$ elemanları noktalar olan bir küme; $\mathcal{L}$, $\mathcal{P}$ nin boş olmayan altkümelerinden oluşan ve elemanları *doğru*lar olan küme; d, $\mathcal{P}$ üzerinde tanımlı uzaklık fonksiyonu ve m de $[\mathcal{P}, \mathcal{L}, d]$ üzerinde tanımlı bir açı ölçme fonksiyonu olmak üzere, aşağıdaki 13 aksiyomu sağlayan $[\mathcal{P}, \mathcal{L}, d, m]$ sistemine *Öklidyen düzlem geometri* denir.

[**E1**] Farklı iki noktayı içeren birtek doğru vardır.

[**E2**] Her doğru en az iki nokta, $\mathcal{P}$ kümesi de doğrusal olmayan üç nokta içerir.

[**E3**] Her sıralı (A, B) nokta çifti için d, negatif olmayan bir $d(A, B)$ sayısını belirtir. Ayrıca $d(A, B) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $A = B$ dir.

[**E4**] Her A ve B noktaları için $d(A, B) = d(B, A)$ dir.

[**E5**] Her A, B ve C noktaları için $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$ dir.

[**E6**] Verilen her l doğrusu için bir $f_l : l \to \mathbb{R}$ 1:1 ve örten fonksiyonu vardır öyleki tüm A, B noktaları için $|f_l(A) - f_l(B)| = d(A, B)$ dir.

[**E7**] Verilen her l doğrusu için $\mathcal{P}$ nin aşağıdaki üç koşulu sağlayan H_1 ve H_2 gibi iki alt kümesi vardır.

(i) H_1 ve H_2 konvekstir.

(ii) $H_1 \cup H_2 = \mathcal{P} - l$ dir.

(iii) $A \in H_1$ ve $B \in H_2$ ise $\overline{AB} \cap l \neq \varnothing$ dir.

[**E8**] m, her bir açı için 0 ile 180 arasında değişen bir reel sayı ile belirtilir.

[**E9**] H yarı düzleminin kenarı üzerinde bir $[AB$ ışını ve 0 ile 180 arasında herhangi bir reel sayı verilsin. Bu durumda $P \in H$ olmak üzere $m(\angle ABC) = r$ olacak şekilde bir tek $[AP$ ışını vardır.

[**E10**] Eğer D noktası $\angle ABC$ nin iç bölgesinde ise,
$m(\angle ABD) + m(\angle DBC) = m(\angle ABC)$ dir.

[**E11**] Eğer B, A ile C arasında ve $D \notin \overleftrightarrow{AC}$ ise,
$m(\angle ABD) + m(\angle DBC) = 180$ dir.

[**E12**] İki üçgenin köşe noktaları arasında bire-bir bir eşleme verilsin. Eğer birinci üçgenin iki kenarı ve aralarındaki açı, ikinci üçgenin karşılık gelen kenarlarına ve açıya eş ise bu üçgenler eştir.

[**E13**] l doğrusu dışında bir P noktası verilsin. Bu durumda P noktasından geçen ve l doğrusuna paralel olan bir tek doğru vardır.

Tanım 1.18: (Vektör)

(i) Uzunluğu, doğrultusu ve yönü olan doğru parçasına *yönlü doğru parçası* denir.

(ii) Uzunluğu, doğrultusu ve yönü aynı olan yönlü doğru parçalarına *eş yönlü doğru parçaları* denir.

(iii) Eş yönlü doğru parçalarından oluşan denklik sınıfına *vektör* denir.



Başlangıç noktası A, bitiş noktası B olan vektör $\overrightarrow{AB}$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 1.19: Çokgensel düzlem parçalarıyla sınırlandırılmış üç boyutlu cisimlere *çokyüzlü* denir.

Bu düzlem parçalarına *yüz*, yüzlerin arakesitlerine *ayrıt*, üç veya daha çok ayrıtın birleştiği noktaya ise *köşe* denir.

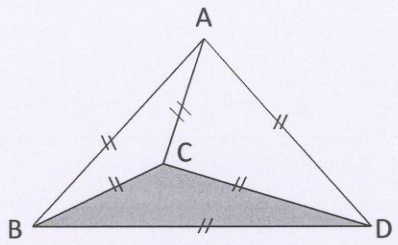
Tanım 1.20: Aşağıdaki özellikleri sağlayan çokyüzlülere *düzgün çokyüzlü* denir.

(i) Tüm yüzler düzgün çokgendir.

(ii) Herbir köşesinde aynı sayıda yüz birleşir.

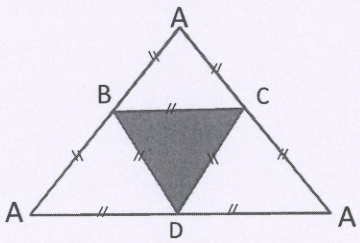
(iii) Tüm yüzler eştir.

Örnek 1.21: $ABCD$ düzgün $4-$yüzlüsü gözönüne alınsın.



Şekil 1.2

Şekil 1.2 deki $ABCD$ düzgün dörtyüzlüsü Şekil 1.3 deki ayrıtları ve alanları birbirine eşit dört ABC, ADB, DCA, DCB eşkenar üçgenden oluşmaktadır.



Şekil 1.3

Bu çalışmada, Öklidyen geometrideki düzgün şekil tanımına sadık kalarak, analitik $3-$uzayda alışılmış Öklidyen metrik yerine Taksi metriği kullanarak elde edilen Taksi 3-uzayda düzgün şekilleri inceleyeceğiz. Öklidyen $3-$uzay ile Taksi $3-$uzayın lineer yapısı hemen hemen aynıdır. Taksi $3-$uzayın noktaları, doğruları ve düzlemleri Öklidyen halle aynıdır. Açı ölçümü Öklidyen halde olduğu gibi yapılır. Ancak iki nokta arasındaki uzaklık fonksiyonu farklıdır.

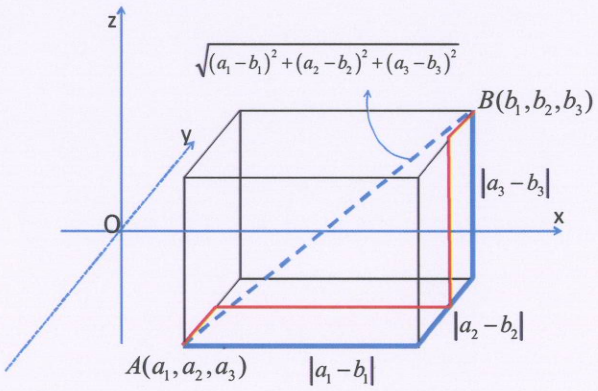
$A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ $3-$boyutlu analitik uzayda herhangi iki nokta olmak üzere

$$d_T : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to [0, \infty), d_T(A, B) = |b_1 - a_1| + |b_2 - a_2| + |b_3 - a_3|$$

şeklinde tanımlı fonksiyona **Taksi uzaklık fonksiyonu** adı verilir.

A noktası ile B noktası arasındaki Öklidyen uzaklık fonksiyonu yerine Taksi uzaklık fonksiyonu kullanılarak Taksi 3-uzay inşa edilir.

A ile B noktaları arasındaki Taksi yolu Şekil 1.4 de görüldüğü üzere herbiri koordinat eksenlerine paralel olan üç doğru parçasının birleşimidir. Taksi uzaklığı ise bu doğru parçalarının Öklidyen uzunluklarının toplamıdır.



Şekil 1.4

Şekil 1.4 de de görüleceği üzere

- - - - yolu için $d_E(A,B)=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2}$

yolu için $d_T(A,B)=|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+|a_3-b_3|$ dir.

Önerme 1.21 ve Sonuç 1.22 Z. Akça ve R.Kaya'nın On the Norm in Higher Dimensional Taxicab Spaces çalışmasından alınmıştır.

Önerme 1.21: (Vektörlerin Taksi normu)

Analitik $n-$uzayda $A = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ için $\|A\|_T = \sum_{i=1}^{n} |a_i|$ dir.

Sonuç 1.22: Analitik $3-$uzayda $A = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ için $d_T(O, A) = \|A\|_T$ dir.

Örnek 1.23: Analitik 3-uzayda $A = (1, 2, 3)$ ve $B = (9, 4, 6)$ noktaları için
$\overrightarrow{W} = \overrightarrow{AB} = (9 - 1, 4 - 2, 6 - 3) = (8, 2, 3)$ dir.
$d_T(A, B) = |9 - 1| + |4 - 2| + |6 - 3| = |8| + |2| + |3| = 13$ olup
$\left\|\overrightarrow{W}\right\|_T = |8| + |2| + |3| = 13$ dür.

Önerme 1.24,...,Yardımcı Teorem 1.30 ve burada adı geçen bazı kavramların tanımları Ö.Gelişgen ve R. Kaya 2009 çalışmasından alınmıştır.

$\mathbb{R}^3_T$ Taksi 3−uzayda, noktalar kümesi üzerinde tanımlanan bire-bir bir eşlemeye *dönüşüm* (*transformation*) denir.

Her X, Y noktası için $d_T(X, Y) = d_T(\alpha(X), \alpha(Y))$ eşitliğini sağlayan α dönüşümü bir *izometri* olarak isimlendirilir. Her X noktası için $i(X) = X$ şeklinde tanımlanan *i birim* (*identity*) dönüşümdür. Bir noktalar kümesini sabit bırakan bir α izometrisi, o noktalar kümesi için bir *simetridir.*

$\triangle$ bir düzlem ve $\sigma_\triangle$ $\mathbb{R}^3_T$ ün noktaları üzerinde bir dönüşüm olsun. X noktası $\triangle$ düzlemi üzerinde iken $\sigma_\triangle(X) = X$, X noktası $\triangle$ düzlemi üzerinde değil iken $\triangle$ XY doğru parçasının orta dikme düzlemi (perpendicular bisector) olmak üzere $\sigma_\triangle(X) = Y$ özellikleri sağlanıyor ise $\sigma_\triangle$ ya *yansıma* (*reflection*) denir. Γ ve $\triangle$ ℓ doğrusu boyunca kesişen iki düzlem iken $\sigma_\triangle\sigma_\Gamma$ dönüşümüne ℓ ekseni etrafında bir *dönme* (*rotation*) denir. Γ ve $\triangle$, Π düzlemine dik ve kesişen iki düzlem ise $\sigma_\Pi\sigma_\triangle\sigma_\Gamma$ dönüşümüne Γ, $\triangle$ ve Π nin ortak noktası etrafındaki *döner yansıma* (*rotary reflection*) denir. M noktası X ve Y nin orta noktası olmak üzere, her X noktası için $\sigma_M(X) = Y$ özelliğinde tanımlanan dönüşüme M etrafındaki *inversiyon* denir ve σ_M ile gösterilir. σ_M *nokta yansıması* (*point reflection*) olarak da isimlendirilir. Γ ve $\triangle$ kesişen iki düzlem ve M bunların bir ortak noktası ise $\sigma_M\sigma_\triangle\sigma_\Gamma$ dönüşümüne *döner inversiyon* (*rotary inversion*) denir. Γ ve $\triangle$ düzlemleri paralel ise $\sigma_\triangle\sigma_\Gamma$, bunların her ikisine de dik olan doğrular boyunca tanımlanan *ötelemedir.*

Önerme 1.24: Öklidyen 3−uzaydaki tüm ötelemeler Taksi izometridir.

Yardımcı Teorem 1.25: 3−boyutlu Taksi uzayda ($\mathbb{R}^3_T$), $\triangle : ax + by + cz = 0$ düzlemine ilişkin yansımanın bir izometri olması için gerek ve yeter koşul düzlemin (a, b, c) normal vektörünün

$D = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (\pm 1,1,0), (1,0,\pm 1), (0,1,\pm 1)\}$
vektör kümesindeki bir elemana paralel olmasıdır.

Sonuç 1.26: 3−boyutlu Taksi uzayda, orjinden geçen düzlemlere ilişkin izometrik yansımaların kümesi S_T olmak üzere bu küme

$$x = 0, y = 0, z = 0, x + y = 0, x + z = 0, y + z = 0, x - y = 0, x - z = 0, y - z = 0$$

denklemlerine sahip düzlemlere ilişkin dokuz Öklidyen yansımadan oluşur.

Yardımcı Teorem 1.27: $O = (0,0,0)$ noktasından geçen bir l doğrusuna ilişkin r_θ dönmesinin bir izometri olması için gerek ve yeter koşul
$D_1 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$,
$D_2 = \{(1,1,1), (-1,1,1), (1,-1,1), (1,1,-1)\}$,
$D_3 = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,-1,0), (1,0,-1), (0,1,-1)\}$
için
$R_1 = \{r_\theta \mid \theta \in \{\pi/2, \pi, 3\pi/2\},$ dönme ekseninin doğrultu vektörü $\in D_1\}$
$R_2 = \{r_\theta \mid \theta \in \{2\pi/3, 4\pi/3\},$ dönme ekseninin doğrultu vektörü $\in D_2\}$
$R_3 = \{r_\theta \mid \theta = \pi,$ dönme ekseninin doğrultu vektörü $\in D_3\}$
olacak şekilde $r_\theta \in R_T = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ olmasıdır.

Sonuç 1.28: Orijinden geçen doğrulara ilişkin izometrik dönmelerin kümesi R_T olmak üzere bu küme tam olarak 23 Öklidyen dönmeden oluşur.

Yardımcı Teorem 1.29: Orijine ilişkin Taksi uzaklığını koruyan sadece 6 tane döner yansıma (rotary reflection) vardır.

Yardımcı Teorem 1.30: Taksi uzaklığı koruyan orijine ilişkin yalnızca 8 döner inversiyon (rotary inversion) vardır.

Kaya, R., 2006 da analitik düzlemde Öklidyen ve Taksi metrikleri arasında geçişi sağlayan bir bağıntıyı vermiştir.

A ve B kartezyen koordinat düzleminde dikey bir doğru üzerinde bulunmayan iki nokta olsun. m de bu iki noktadan geçen doğrunun eğimi ise,

$$\rho(m) = \frac{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+|m|)}$$

olmak üzere

$$d_E(A,B) = \rho(m) \cdot d_T(A,B)$$

dir.

$\mathbb{R}^3$ de Öklid ve Taksi metriğindeki uzunluklar arasındaki ilişkiyi veren bağıntı aşağıda Teorem olarak ifade edilmektedir. Bu bağıntı Ziya Akça ve Rüstem Kaya 2004 çalışmasından alınmıştır.

Teorem 1.31: $\mathbb{R}^3$ de A ve B farklı iki nokta ve $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$, A ve B noktalarından geçen d doğrusunun doğrultu vektörü olmak üzere,

$$d_E(A,B) = \frac{||\overrightarrow{v}||}{|v_1| + |v_2| + |v_3|} \cdot d_T(A,B)$$

dir.

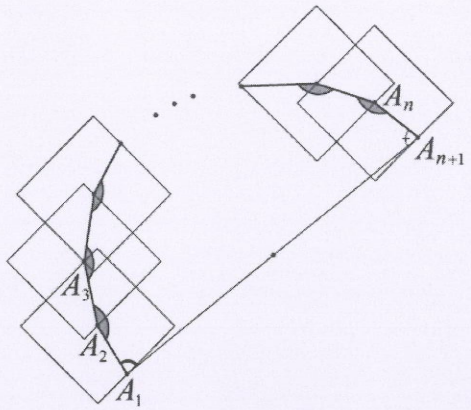
Bundan sonraki işlemlerde kolaylık olması için $g(\overrightarrow{v}) = \frac{||\overrightarrow{v}||}{(|v_1| + |v_2| + |v_3|)}$ şeklinde ifade edelim.

Ayrıca anatilik 3-uzayda verilen bir doğru parçasını kenar kabul eden Taksi $2n-$genlerin varlığının gösterilmesinde (Bkz. Teorem 4.4) Kaya ve Çolakoğlu 2009 çalışmasında yer alan düzlemdeki $2n$ kenarlı çokgenlerin varlığını gösterme yöntemi esas alınmıştır (Teorem1.32). Ayrıca aynı çalışmada yer alan analitik düzlemde Öklidyen düzgün dörtgenlerin Taksi düzgünlüğüne burada kısaca yer verilmiştir (Teorem 1.34).

Teorem 1.32: Verilen herhangi bir doğru parçasını kenar kabul eden birbirine eş iki farklı Taksi düzgün $2n-$gen vardır.

İspat: Bilindiği gibi, bir Öklidyen düzgün $2n-$genin her bir iç açısının ölçüsü $\frac{\pi(n-1)}{n}$ radyandır. Şimdi düzlemde verilen herhangi bir $\overline{A_1A_2}$ doğru parçasını gözönüne alalım. Açıkça her birinin uzunluğu $d_T(A_1, A_2)$ ve ardışık ikisi arasındaki

açının ölçüsü $\dfrac{\pi\,(n-1)}{n}$ olan $A_iA_{i+1}, 2 \leq i \leq n$, doğru parçaları, yarıçapı $d_T\,(A_1, A_2)$ ve merkezi A_i olan Taksi çemberi yardımıyla kolayca çizilebilir (Şekil 1.5).



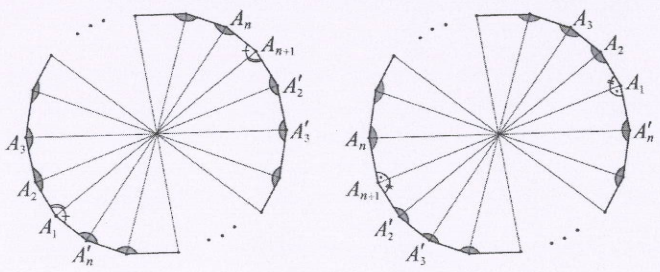
Şekil 1.5

Bu durumda;

$$\measuredangle A_2A_1A_{n+1} + \measuredangle A_nA_{n+1}A_1 = \tfrac{\pi(n-1)}{n}$$

olduğu kolayca görülebilir. Çizilen doğru parçalarına ek olarak, eğer A_iA_{i+1} doğru parçalarının, A_1A_{n+1} doğru parçasının orta noktasına göre simetrikleri olan $A'_iA'_{i+1}$, $1 \leq i \leq n$, doğru parçalarını çizersek, bir $2n-$gen elde edilir (Şekil 1.6). Bir noktaya göre simetri (veya bir nokta etrafında π radyan dönme) Taksi uzaklıkları ve açı ölçülerini değiştirmediğinden

$1 \leq i \leq n$ için $d_T\,(A_i, A_{i+1}) = d_T\left(A'_i, A'_{i+1}\right) = d_T\,(A_1, A_2)$, ve $2 \leq i \leq n$ için $\measuredangle A_i = \measuredangle A'_i = \tfrac{\pi(n-1)}{n}$ dir.

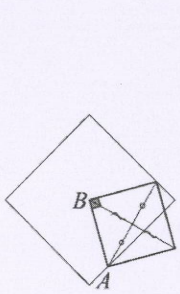


Şekil 1.6

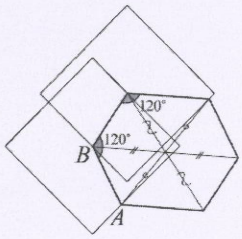
O halde, çizilen $2n-$gen Taksi düzgündür. Benzer yöntem, A_1A_2 doğrusunun diğer tarafında da uygulanabilir ve ilk elde edilen $2n-$genden farklı fakat yine Taksi düzgün olan bir $2n-$gen elde edilir.■

Aşağıdaki örnek, Teorem 1.32 nin ispatında verilen yöntemin bir uygulamasıdır:

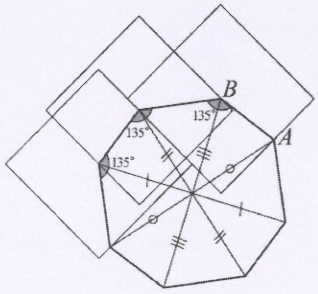
Örnek 1.33: Aşağıdaki Şekil 1.7, Şekil 1.8, Şekil 1.9 da sırasıyla, verilen bir $[AB]$ doğru parçasını kenar kabul eden Taksi düzgün dörtgen (Taksi kare), Taksi düzgün altıgen ve Taksi düzgün sekizgenin çizimleri gösterilmiştir.



Şekil 1.7



Şekil 1.8

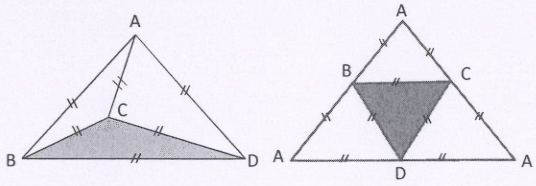


Şekil 1.9

Teorem 1.34: Analitik düzlemde her Öklidyen düzgün dörtgen Taksi düzgündür.

1.2.1 Öklidyen 3-Uzayda Düzgün Çokyüzlüler

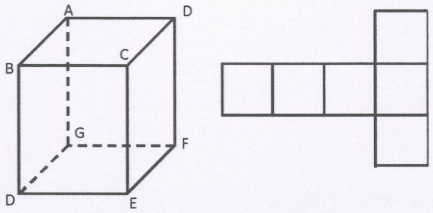
1) Düzgün $4-$yüzlü



Şekil 1.10

Bir düzgün $4-$yüzlü, dört köşe, eşit uzunlukta altı ayrıt ve birbirine eş dört düzgün üçgenden (eşkenar üçgen) meydana gelmektedir.

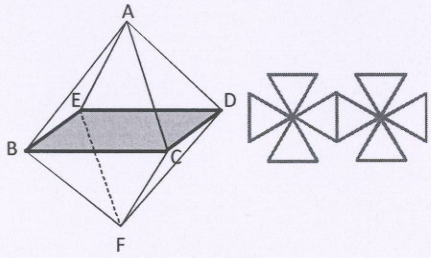
2) Düzgün 6−yüzlü (Küp)



Şekil 1.11

Bir düzgün 6−yüzlü, sekiz köşe, eşit uzunlukta oniki ayrıt ve birbirine eş altı kareden meydana gelmektedir.

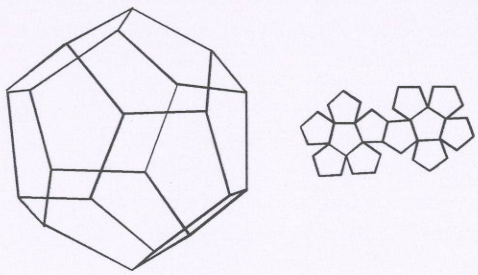
3) Düzgün 8−yüzlü



Şekil 1.12

Bir düzgün 8−yüzlü, altı köşe, uzunlukları eşit oniki ayrıt ve birbirine eş sekiz eşkenar üçgenden meydana gelmektedir.

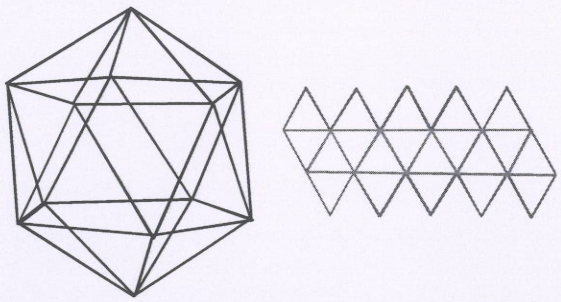
4) Düzgün 12−yüzlü



Şekil 1.13

Bir düzgün 12−yüzlü, yirmi köşe, uzunlukları eşit otuz ayrıt ve birbirine eş oniki düzgün 5−genden meydana gelmektedir.

5) Düzgün 20−yüzlü



Şekil 1.14

Bir düzgün 20−yüzlü, oniki köşe, uzunlukları eşit otuz ayrıt ve birbirine eş yirmi eşkenar üçgenden meydana gelmektedir.

Tezin bundan sonraki kısmında çalışılan konular şöyle özetlenebilir.

Analitik 3-uzayda Öklidyen eşit uzunluktaki iki doğru parçasının hangi koşullar altında Taksi uzunluklarının birbirine eşit olduğu belirlendi.

Analitik 3-uzayda Öklidyen düzgün çokgenlerin hangilerinin aynı zamanda Taksi düzgün çokgen olduğu araştırıldı.

Analitik 3-uzayda Öklidyen düzgün çokgen olmadığı halde Taksi düzgün çokgenlerin var olup olmadığı araştırıldı.

Analitik 3-uzayda yer alan Öklidyen düzgün çokyüzlülerin (şekillerin) hangilerinin aynı zamanda Taksi düzgün çokyüzlü olduğu incelendi.

Analitik 3-uzayda Öklidyen düzgün çokyüzlü olmadığı halde Taksi düzgün çokyüzlülerin var olup olmadığı araştırıldı.

BÖLÜM 2

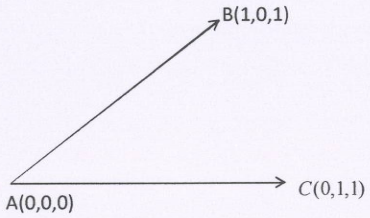
ÖKLİDYEN VE TAKSİ UZUNLUKLARI ARASINDAKİ İLİŞKİ

Bu bölümde "Analitik 3−uzayda eşit uzunlukdaki iki doğru parçasının hangi şartlar altında Taksi uzunluklarının eşit" olduğu incelenecektir.

2.1 Öklidyen ve Taksi Uzunluklarının Korunması

Analitik 3−uzayda aşağıdaki Örnek 2.1 de de görüldüğü üzere hem Öklidyen uzunluğu hem de Taksi uzunluğu eşit doğru parçaları vardır.

Örnek 2.1: Analitik 3−uzayda $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 1)$, $C = (0, 1, 1)$ olmak üzere;



Şekil 2.1

$$d_E(A, B) = \sqrt{(1-0)^2 + (0-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$$
$$d_E(A, C) = \sqrt{(0-0)^2 + (1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$$
$$d_T(A, B) = |1-0| + |0-0| + |1-0| = 2$$

$$d_T(A,C) = |0-0| + |1-0| + |1-0| = 2$$
$$d_E(A,B) = d_E(A,C) = \sqrt{2} \quad \text{ve} \quad d_T(A,B) = d_T(A,C) = 2$$

olduğundan $[AB]$ ve $[AC]$ doğru parçalarının hem Öklidyen uzunlukları eşit hem de Taksi uzunlukları birbirine eşittir.

Ö.Gelişgen ve R. Kaya, 2009 çalışmasında analitik 3−uzayda bütün Taksi izometriler incelenmiştir. Bu çalışmada yer alan konu ve kavramlara Temel Kavramlar bölümünde yer verilmişti. Taksi izometri olan bütün dönüşümler altında herhangi iki doğru parçasının Taksi uzunluğu eşittir. Sonuç 1.26 gereği

$$x = 0, y = 0, z = 0, x + y = 0, x + z = 0, y + z = 0, x - y = 0, x - z = 0, y - z = 0$$

denklemlerine sahip düzlemlere ilişkin dokuz Öklidyen yansıma, hem Öklid hemde Taksi uzunluğunu korur. Dolayısıyla bu düzlemlere göre simetrik doğru parçalarının Öklidyen uzunlukları ve Taksi uzunlukları eşittir.

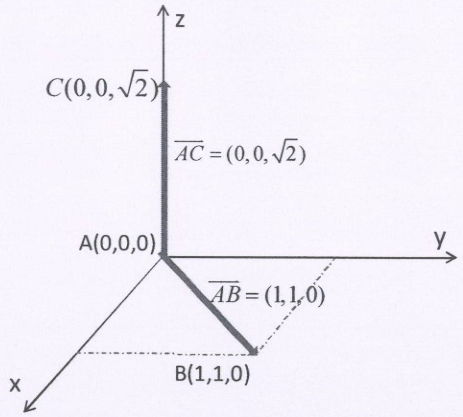
Teorem 2.2: Analitik düzlemde Öklidyen uzunluğu eşit herhangi iki doğru parçasının aralarındaki açı 90^o ise bu doğru parçalarının Taksi uzunlukları da eşittir. Fakat bu durum Analitik 3−uzayda genel olarak geçerli değildir.

Aşağıdaki örnek bu durumu açıklamaktadır.

Örnek 2.3: $A = (0,0,0)$, $B = (1,1,0)$, $C = (0,0,\sqrt{2}) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere $[AB]$ ve $[AC]$ doğru parçaları incelenirse;

$$d_E(A,B) = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{2}$$
$$d_E(A,C) = \sqrt{(0-0)^2 + (0-0)^2 + \left(\sqrt{2}-0\right)^2} = \sqrt{2} \text{ dir.}$$

Yani $d_E(A,B) = d_E(A,C)$ dir. $[AB]$ ve $[AC]$ doğru parçaları arasındaki açı iç çarpım yardımıyla bulunabilir. Buna göre $\overrightarrow{AB} = (1,1,0)$, $\overrightarrow{AC} = (0,0,\sqrt{2})$ olup



Şekil 2.2

$$\left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right| = \sqrt{2},\ \left|\left|\overrightarrow{AC}\right|\right| = \sqrt{2}$$

bulunur. Buradan da

$$\cos\alpha = \frac{\left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right\rangle}{\left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right| \cdot \left|\left|\overrightarrow{AC}\right|\right|} = \frac{1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{0}{2} = 0$$

olup $\alpha = 90^o$ elde edilir. Yani $[AB] \perp [AC]$ dir.

Ancak bu doğru parçalarının Taksi uzunlukları ise

$$d_T(A,B) = |1-0| + |1-0| + |0-0| = 2$$

ve

$$d_T(A,C) = |0-0| + |0-0| + \left|\sqrt{2}-0\right| = \sqrt{2}$$

olup

$$d_T(A,B) \neq d_T(A,C)$$

dir.

Aşağıdaki teorem yukarıda bahsedilen durumun istisnai hallerini açıklamaktadır.

Teorem 2.4: Analitik 3−uzayda Öklidyen uzunlukları eşit ve birbirine dik olan herhangi iki doğru parçası $x = k_1$, $y = k_2$, $z = k_3$ düzlemlerinden birinde ise bu doğru parçalarının Taksi uzunlukları da eşittir.1

İspat: $z = 0$ düzlemi bildiğimiz 2 boyutlu analitik düzlemdir ve bu düzlemde Öklidyen uzunlukları eşit olan doğru parçaları birbirine dik olursa bunların Taksi uzunluklarınında eşit olduğu B. Çolakoğlu, R. Kaya, 2009 çalışmasında gösterilmiştir.

Eğer doğru parçaları $z = k_3$ düzleminde olurlarsa durum yine değişmez. Çünkü burada k_3 birim öteleme olmuştur ve bilindiği üzere öteleme altında Taksi ve Öklid metriğindeki uzunluklar korunur. Dolayısıyla analitik düzlem için geçerli olan bu teorem, doğru parçaları $x = k_1, y = k_2, z = k_3$ düzlemlerinden birinde olduğunda analitik 3−uzay için de geçerlidir.■

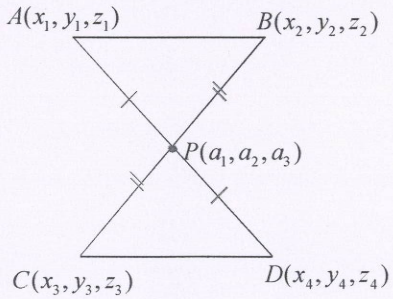
Teorem 2.5: $\mathbb{R}^3$ de bir noktaya göre simetrik doğru parçalarının Taksi uzunlukları da birbirine eşittir.

İspat: Analitik 3-uzayda $P(a_1, a_2, a_3)$ noktasına göre simetri

$$\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$\Psi(x, y, z) = (2a_1 - x, 2a_2 - y, 2a_3 - z)$$

şeklinde tanımlanır.

$[AB]$ doğru parçası ile $[CD]$ doğru parçası P noktasına göre simetrik olsun. O halde;



Şekil 2.3

$d_E(A,P) = d_E(P,D)$, $d_E(B,P) = d_E(P,C)$ olur. Buradan;

$$C(x_3,y_3,z_3) = (2a_1 - x_2, 2a_2 - y_2, 2a_3 - z_2)$$
$$D(x_4,y_4,z_4) = (2a_1 - x_1, 2a_2 - y_1, 2a_3 - z_1)$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned} d_T(C,D) &= |(2a_1 - x_1) - (2a_1 - x_2)| + |(2a_2 - y_1) - (2a_2 - y_2)| \\ &\quad + |(2a_3 - z_1) - (2a_3 - z_2)| \\ &= |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| + |z_2 - z_1| \\ &= d_T(A,B) \end{aligned}$$

bulunur.■

Teorem 2.6: A, B, C ve D 3−boyutlu analitik uzayda dört farklı nokta ve $d_E(A,B) = d_E(C,D)$ olsun. Ayrıca $\overrightarrow{v}$ ve $\overrightarrow{w}$ da sırayla AB ve CD doğrularının doğrultman vektörlerini göstersin. Bu takdirde

$d_T(A,B) = d_T(C,D)$ olması için gerek ve yeter şart $g(\overrightarrow{v}) = g(\overrightarrow{w})$ olmasıdır.

İspat: $\overrightarrow{v}$ ve $\overrightarrow{w}$ sırayla AB ve CD doğrularının doğrultman vektörleri ve $d_E(A,B) = d_E(C,D)$ olsun.

$(\Rightarrow)$: $d_T(A,B) = d_T(C,D)$ olsun. Teorem 1.31 gereği

$$d_E(A,B) = \frac{||\overrightarrow{v}||}{(|v_1| + |v_2| + |v_3|)} \cdot d_T(A,B) \text{ ve}$$
$$d_E(C,D) = \frac{||\overrightarrow{w}||}{(|w_1| + |w_2| + |w_3|)} \cdot d_T(C,D) \text{ dir.}$$

$$d_E(A,B) = d_E(C,D) \text{ ve } d_T(A,B) = d_T(C,D)$$

olduğundan

$$\frac{||\overrightarrow{v}||}{(|v_1| + |v_2| + |v_3|)} = \frac{||\overrightarrow{w}||}{(|w_1| + |w_2| + |w_3|)}$$

dir. Buradan $g(\overrightarrow{v}) = g(\overrightarrow{w})$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$: $g(\overrightarrow{v}) = g(\overrightarrow{w})$ olsun. Teorem 1.31 gereği

$$d_E(A,B) = g(\overrightarrow{v})\, d_T(A,B) \quad \text{ve} \quad d_E(C,D) = g(\overrightarrow{w}) d_T(C,D)$$

dir.

$$d_E(A,B) = d_E(C,D) \quad \text{ve } g(\overrightarrow{v}) = g(\overrightarrow{w})$$

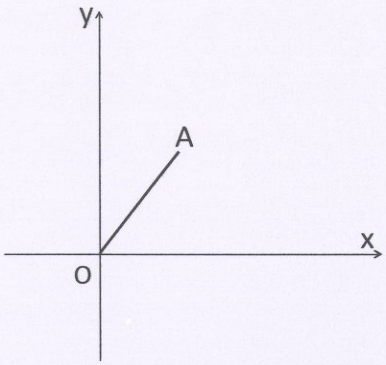
olduğundan $d_T(A,B) = d_T(C,D)$ bulunur.■

2.2 Öklidyen ve Taksi Eşit Uzunluklu Doğru Parçalarının Geometrik Yerleri

Bu kısımda analitik 3−uzayda verilen bir $[AB]$ doğru parçasıyla Öklidyen ve Taksi uzunluğu eşit bütün doğru parçalarının geometrik yerleri tespit edilmeye çalışılmıştır. Böylece analitik 3−uzaydaki düzgün çokgen ve çokyüzlülerin belirlenmesi daha kolay olacaktır. Çalışmayı daha anlaşılabilir kılmak için inceleme önce analitik düzlemde yapılmaktadır.

2.2.1 Analitik Düzlemde Öklidyen ve Taksi Eşit Uzunluklu Doğru Parçalarının Geometrik Yerleri

Bu kısımda düzlemde verilmiş olan $[OA]$ doğru parçası için bu doğru parçasına Öklidyen ve Taksi uzunlukları eşit olacak şekildeki [OB] doğru parçaları tespit edilecektir. Yani $d_E(O,A) = d_E(O,B)$ ve $d_T(O,A) = d_T(O,B)$ koşulunu sağlayan B noktalarının geometrik yerleri bulunacaktır. Bunu gerçekleştirmek için O merkezli $d_E(O,A)$ yarıçaplı Öklidyen ve $d_T(O,A)$ yarıçaplı Taksi çemberlerden yararlanılacaktır. Açıkça $d_E(O,A) \leq d_T(O,A)$ dir.



Şekil 2.4

$d_E(O,A) = t$ ise OA doğrusunun eğimi m olmak üzere $d_T(O,A) = \dfrac{1+|m|}{\sqrt{1+m^2}}t$ olur. Ayrıca O merkezli t yarıçaplı Öklidyen çember $x^2+y^2=t^2$ ve O merkezli $\dfrac{1+|m|}{\sqrt{1+m^2}}t$ yarıçaplı Taksi çember $|x|+|y| = \dfrac{1+|m|}{\sqrt{1+m^2}}t$ dir.

Bu Öklidyen ve Taksi çemberlerin denklemleri ortak çözülürse,

$$(|x|+|y|)^2 = \left(\frac{1+|m|}{\sqrt{1+m^2}}t\right)^2 \implies x^2+y^2+2|xy| = \frac{(1+|m|)^2}{1+m^2}t^2$$
$$\implies |xy| = \frac{|m|}{1+m^2}t^2$$

bulunur. Son eşitlikten $|y| = \dfrac{|m|}{(1+m^2)|x|}t^2$ yazılabilir. Buradan da

$$|x| + \frac{|m|}{(1+m^2)|x|}t^2 = \frac{1+|m|}{\sqrt{1+m^2}}t \implies |x|^2 - \frac{1+|m|}{\sqrt{1+m^2}}t|x| + \frac{|m|}{1+m^2}t^2 = 0$$
$$\implies \left(|x| - \frac{|m|}{1+m^2}t\right)\left(|x| - \frac{t}{1+m^2}\right) = 0$$

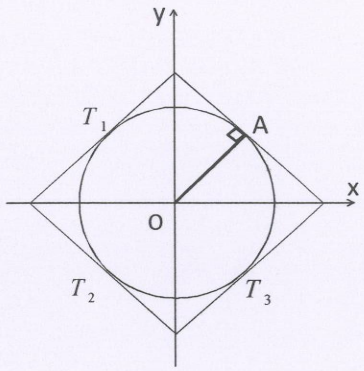
olup $|x| = \dfrac{|m|}{1+m^2}t$ veya $|x| = \dfrac{t}{1+m^2}$ dir. Ayrıca $|y| = \dfrac{t}{1+m^2}$ veya $|y| = \dfrac{t\cdot|m|}{1+m^2}$ dir.

Buna göre $m \in \{-1,0,1\}$ veya $m \to \infty$ iken iki çemberin 4 ortak noktası vardır ve çemberler birbirlerine içten ve dıştan teğettir. m nin diğer değerleri için 8 ortak noktası bulunur. Bu haller iki temel durum olarak incelenebilir.

I. Durum: $[OA]$ doğru parçasının eğimi m olmak üzere $m \in \{-1,0,1\}$ veya $m \to \infty$ olsun. Bu halde $m=-1$ veya $m=1$ iken Öklidyen çember Taksi çembere

içten teğettir. $m = 0$ veya $m \to \infty$ ikende Öklidyen çember, Taksi çembere dıştan teğet olur. Bu haller iki alt durumda incelenmektedir.

Alt Durum 1: Öklidyen çember Taksi çemberine içten teğet olsun. Yani $|m| = 1$ olsun.



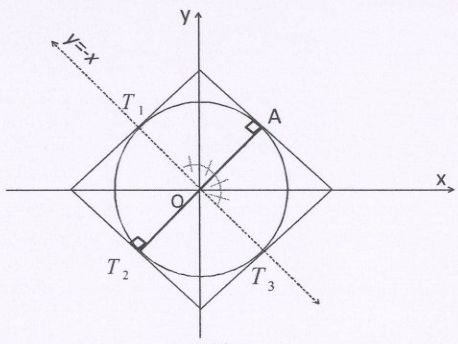
Şekil 2.5

Şekil 2.5 de görüldüğü üzere $i = 1, 2, 3$ için

$$d_E(O, A) = d_E(O, T_i) \text{ ve } d_T(O, A) = d_T(O, T_i)$$

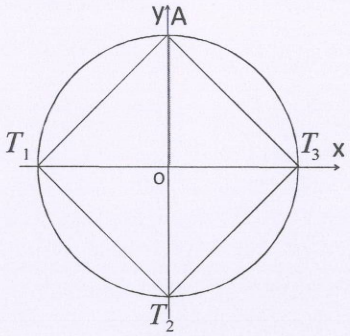
dir ve bu şartı sağlayan başka bir nokta yoktur. Dolayısıyla aranan B noktalarının geometrik yerleri T_i noktalarıdır. Şekil 2.6 da görüldüğü üzere;

A noktasının $x = 0$ doğrusuna göre simetriği T_1 noktasıdır,
A noktasının $y = -x$ doğrusuna göre simetriği T_2 noktasıdır,
A noktasının $y = 0$ doğrusuna göre simetriği T_3 noktasıdır.



Şekil 2.6

Alt Durum 2: Öklidyen çember Taksi çemberine dıştan teğet olsun. Yani $m = 0$ veya $m \to \infty$ olsun.



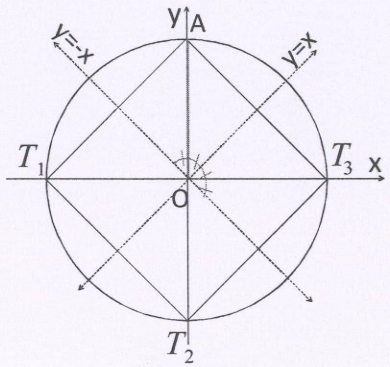
Şekil 2.7

Şekil 2.7 de görüldüğü üzere $i = 1, 2, 3$ için

$$d_E(O, A) = d_E(O, T_i) \text{ ve } d_T(O, A) = d_T(O, T_i)$$

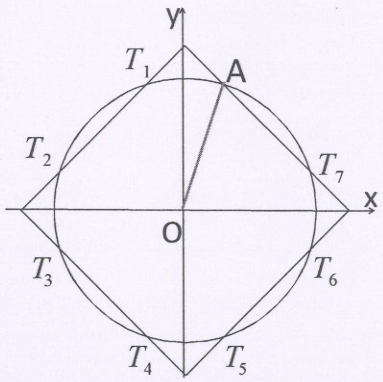
ve bu şartı sağlayan başka bir nokta yoktur. Dolayısıyla aradığımız B noktalarının geometrik yerleri T_i noktalarıdır. Şekil 2.8 de görüldüğü üzere;

A noktasının $y = -x$ doğrusuna göre simetriği T_1 noktasıdır,
A noktasının $y = 0$ doğrusuna göre simetriği T_2 noktasıdır,
A noktasının $y = x$ doğrusuna göre simetriği T_3 noktasıdır.



Şekil 2.8

II. Durum: $m \notin \{-1, 0, 1, \infty\}$ olsun.



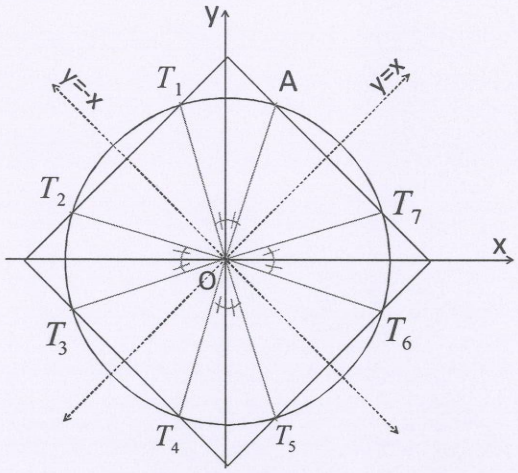
Şekil 2.9

Şekil 2.9 da görüldüğü üzere $1 \leq i \leq 7$ için

$$d_E(O, A) = d_E(O, T_i) \text{ ve } d_T(O, A) = d_T(O, T_i)$$

dir ve bu şartı sağlayan başka bir nokta yoktur. Dolayısıyla aradığımız B noktalarının geometrik yerleri T_i noktalarıdır. Şekil 2.10 da görüldüğü üzere;

A noktasının $x = 0$ doğrusuna göre simetriği T_1 noktasıdır,
A noktasının önce $x = 0$ sonra $y = -x$ doğrusuna göre simetriği T_2 noktasıdır,
A noktasının $y = -x$ doğrusuna göre simetriği T_3 noktasıdır,
A noktasının önce $y = -x$ sonra $y = x$ doğrusuna göre simetriği T_4 noktasıdır,
A noktasının $y = 0$ doğrusuna göre simetriği T_5 noktasıdır,
A noktasının önce $y = x$ sonra $y = 0$ doğrusuna göre simetriği T_6 noktasıdır,
A noktasının $y = x$ doğrusuna göre simetriği T_7 noktasıdır.



Şekil 2.10

Sonuç 2.7: Analitik düzlemde verilen $[OA]$ doğru parçası için

$$d_E(O,A) = d_E(O,B) \text{ ve } d_T(O,A) = d_T(O,B)$$

olacak şekilde B noktalarının geometrik yeri A noktasının $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından biriyle ya da birkaçıyla art arda simetriğinin alınmasıyla elde edilen bütün noktalardan oluşur.

Daha kapsamlı olarak aşağıdaki teoremin ifadesi ve ispatı verilmektedir.

Teorem 2.8: Analitik düzlemde $A = (0,0)$, $B = (b_1, b_2)$ noktaları için $d_E(A,B) = d_E(A,C)$ ve $d_T(A,B) = d_T(A,C)$ olacak şekilde $C(x,y)$ noktalarının kümesi

$\{(x,y) \mid x,y \in \{\pm b_1, \pm b_2\}$ *ve* $|b_1| \neq |b_2|$ *iken* $x \neq y\}$ dir.

İspat: Sonuç 2.7 den faydalanarak B noktasının $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından biri ya da birkaçına göre tüm simetriklerini bulalım.

$B = (b_1, b_2)$ noktasının $x = 0$ doğrusuna göre simetriği $T_1 = (b_1, -b_2)$ dir.

$B = (b_1, b_2)$ noktasının $x = 0$ doğrusuna göre simetriği $T_1 = (b_1, -b_2)$ iken, $T_1 = (b_1, -b_2)$ noktasının $y = -x$ doğrusuna göre simetriği $T_2 = (b_2, -b_1)$ dir. (Burada B noktasının $x = 0$ ve $y = -x$ doğrularına göre simetriği alınmıştır.)

$B = (b_1, b_2)$ noktasının $y = -x$ doğrusuna göre simetriği $T_3 = (-b_2, -b_1)$ dir.

$B = (b_1, b_2)$ noktasının $y = -x$ doğrusuna göre simetriği $T_3 = (-b_2, -b_1)$ iken, $T_3 = (-b_2, -b_1)$ noktasının $y = x$ doğrusuna göre simetriği $T_4 = (-b_1, -b_2)$ dir. (Burada B noktasının $y = -x$ sonra $y = x$ doğrularına göre simetriği alınmıştır.)

$B = (b_1, b_2)$ noktasının $y = 0$ doğrusuna göre simetriği $T_5 = (-b_1, b_2)$ dir.

$B = (b_1, b_2)$ noktasının $y = x$ doğrusuna göre simetriği $T_6 = (b_2, b_1)$ dir.

$B = (b_1, b_2)$ noktasının $y = x$ doğrusuna göre simetriği $T_6 = (b_2, b_1)$ iken, $T_6 = (b_2, b_1)$ noktasının $y = 0$ doğrusuna göre simetriği $T_7 = (-b_2, b_1)$ dir. (Burada B noktasının $y = x$ sonra $y = 0$ doğrularına göre simetriği alınmıştır.)

$B = (b_1, b_2)$ noktasının $y = x$ doğrusuna göre simetriği $T_6 = (b_2, b_1)$, $T_6 = (b_2, b_1)$ noktasının $y = -x$ doğrusuna göre simetriği $T_4 = (-b_1, -b_2)$, $T_4 = (-b_1, -b_2)$ noktasının $x = 0$ doğrusuna göre simetriği $T_5 = (-b_1, b_2)$, $T_5 = (-b_1, b_2)$ noktasının $y = 0$ doğrusuna göre simetriği $T_8 = (b_1, b_2)$ dir ve T_8, B noktasının kendisidir. (Burada B noktasının $y = x$ sonra $y = -x$ sonra $x = 0$ sonra $y = 0$ doğrularına göre simetriği alınmıştır.)

Açıkça görülmektedirki $1 \leq i \leq 8$ için $T_i \in \{(x, y) \mid x, y \in \{\pm b_1, \pm b_2\}, |b_1| \neq |b_2|$ iken $x \neq y\}$ dir. B noktasının $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ doğrularından biriyle yada bir kaçıyla art arda simetriğinin alınmasıyla elde edilen bütün noktalar $1 \leq i \leq 8$ için T_i lerden ibaret olduğundan ispat tamamlanmıştır.■

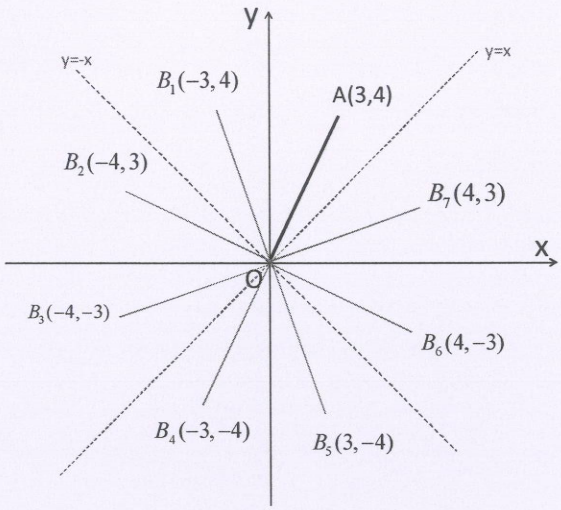
Örnek 2.9: Analitik düzlemde $A = (3, 4)$ noktası için

$$d_E(O, A) = d_E(O, B) \text{ ve } d_T(O, A) = d_T(O, B)$$

olacak şekildeki B noktalarını bulalım.

Teorem 2.8 gereği B noktaları $\{(x, y) \mid x, y \in \{\pm 3, \pm 4\}, x \neq y\}$ kümesinin elemanlarından oluştuğundan B noktaları Şekil 2.11 de görüldüğü gibi $B_1 = (-3, 4)$, $B_2 = (-4, 3)$, $B_3 = (-4, -3)$, $B_4 = (-3, -4)$, $B_5 = (3, -4)$,

$B_6 = (4,-3)$, $B_7 = (4,3)$, $B_8 = (3,4) = A$ dır.



Şekil 2.11

Böylece; $1 \leq i \leq 7$ için $d_E(O,A) = d_E(O,B_i)$ ve $d_T(O,A) = d_T(O,B_i)$ elde edilir.

Teorem 2.10: Analitik düzlemde $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ noktaları için $d_E(A,B) = d_E(K,L)$ ve $d_T(A,B) = d_T(K,L)$ olacak şekilde K ve L noktalarının koordinatları $m, n \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$K = (m,n)$

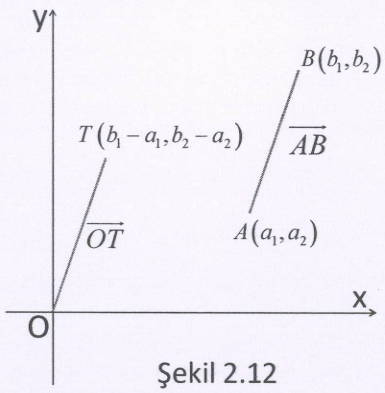
$L \in \{(x+m, y+n) \mid x, y \in \{\pm(b_1 - a_1), \pm(b_2 - a_2)\}$ ve $m, n \in \mathbb{R}$ ve

$|b_1 - a_1| \neq |b_2 - a_2|$ *için* $x \neq y\}$

dir.

İspat:

$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ dir ve $T = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ için $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OT}$ ve $d_E(A,B) = d_E(O,T)$ ve $d_T(A,B) = d_T(O,T)$ dir (Şekil 2.12).



Şekil 2.12

Teorem 2.8 gereği analitik düzlemde $O=(0,0)$, $T=(b_1-a_1,b_2-a_2)$ noktaları için $d_E(O,T)=d_E(O,S)$ ve $d_T(O,T)=d_T(O,S)$ olacak şekilde

$S\in\{(x,y)\mid x,y\in\{\pm(b_1-a_1),\pm(b_2-a_2)\},|b_1-a_1|\neq|b_2-a_2|$ iken $x\neq y\}$ noktaları mevcuttur.

$d_E(A,B)=d_E(K,L)$ ve $d_T(A,B)=d_T(K,L)$ olacak şekilde $[KL]$ doğru parçası $[OS]$ doğru parçalarının bütün ötelemeleridir. Bilindiği gibi ötelemeler Öklidyen ve taksi uzunlukları korur. Buradan;

$O=(0,0)$ ve

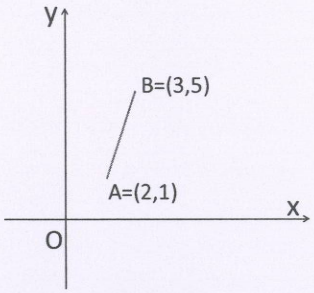
$S\in\{(x,y)\mid x,y\in\{\pm(b_1-a_1),\pm(b_2-a_2)\},|b_1-a_1|\neq|b_2-a_2|$ iken $x\neq y\}$ noktaları $m,n\in\mathbb{R}$ olmak üzere apsisi m, ordinatı n *birim*, ötelenirse sırayla

$K=(m,n)$ ve

$L\in\{(x+m,y+n)\mid x,y\in\{\pm(b_1-a_1),\pm(b_2-a_2)\},|b_1-a_1|\neq|b_2-a_2|$ iken $x\neq y\}$ olacak şekilde $[KL]$ doğru parçaları elde edilir.■

Örnek 2.11: Analitik düzlemde Şekil 2.13 de görülen $A=(2,1),B=(3,5)$ için $d_E(A,B)=d_E(K,L)$ ve $d_T(A,B)=d_T(K,L)$ olacak şekilde $[KL]$ doğru

parçalarının geometrik yerlerini tespit edelim.



Şekil 2.13

Teorem 2.10 gereği K ve L noktalarının koordinatları $m, n \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$K = (m, n)$,

$L \in \{(x+m, y+n) \mid x, y \in \{\pm(b_1 - a_1), \pm(b_2 - a_2)\}, |b_1 - a_1| \neq |b_2 - a_2| \text{ iken } x \neq y\}$

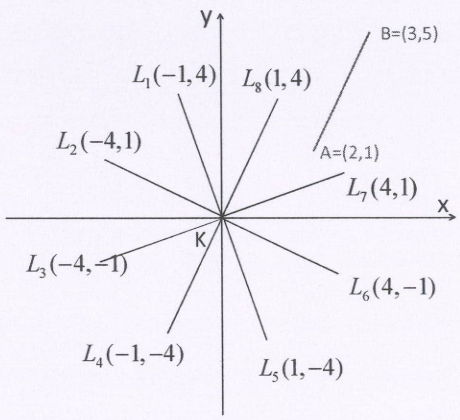
dir. Burada L noktasının koordinatlarını daha açıkça yazılırsa;

$$L \in \{(m-1, n+4), (m-4, n+1), (m-4, n-1), (m-1, n-4), (m+1, n-4), (m+4, n-1), (m+4, n+1), (m+1, n+4)\}$$

Görüldüğü üzere analitik düzlemde $d_E(A,B) = d_E(K,L)$ ve $d_T(A,B) = d_T(K,L)$ şartını sağlayan sonsuz sayıda $[KL]$ doğru parçası vardır. Bunlardan birkaçı;

$K = (0,0)$ için

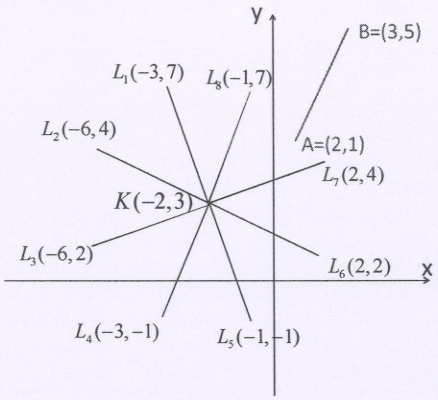
$L \in \{(-1,4), (-4,1), (-4,-1), (-1,-4), (1,-4), (4,-1), (4,1), (1,4)\}$ dir.



Şekil 2.14

$K = (-2, 3)$ için

$L \in \{(-3, 7), (-6, 4), (-6, 2), (-3, -1), (-1, -1), (2, 2), (2, 4), (-1, 7)\}$ dir.



Şekil 2.15

$d_E(A, B) = d_E(K, L_i)$ ve $d_T(A, B) = d_T(K, L_i)$ elde edilir.

2.2.2 Analitik 3-uzayda Öklidyen ve Taksi Eşit Uzunluklu Doğru Parçalarının Geometrik Yerleri

Analitik 3-uzayda sabit bir noktaya (merkez) eşit Taksi uzaklıktaki (yarıçap) noktaların geometrik yerine *Taksi küre* denir. $M = (m_1, m_2, m_3)$ merkezli r birim yarıçaplı Taksi küre

$$K_T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x - m_1| + |y - m_2| + |z - m_3| = r\}$$

dir.

Şekil 2.16 da görüldüğü gibi $[OK]$ doğru parçası için

$d_E(O, K) = d_E(O, L)$ ve $d_T(O, K) = d_T(O, L)$ koşulunu sağlayan L noktalarının geometrik yerlerini tespit etmek için $d_E(O, K)$ yarıçaplı O merkezli Öklidyen küre (Şekil 2.17) ile $d_T(O, K)$ yarıçaplı O merkezli Taksi küreden (Şekil 2.18) yararlanılacaktır. Bilindiği üzere $d_E(O, K) \leq d_T(O, K)$ dir. Çünkü $\overrightarrow{AB}$ nin doğrultu vektörü $\overrightarrow{V} = (v_1, v_2, v_3)$ olmak üzere

$d_E(A, B) = \frac{||\vec{v}||}{|v_1|+|v_2|+|v_3|} \cdot d_T(A, B)$ olduğu belirtilmişti.

$$(|v_1| + |v_2| + |v_3|)^2 = |v_1|^2 + |v_2|^2 + |v_3|^2 + 2(|v_1|\,|v_2| + |v_1|\,|v_3| + |v_2|\,|v_3|),$$

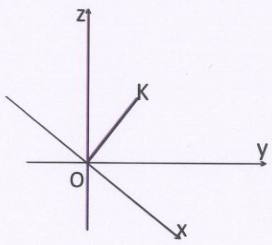
$|v_1|\,|v_2| + |v_1|\,|v_3| + |v_2|\,|v_3| \geq 0$ olduğundan dolayı

$$(|v_1| + |v_2| + |v_3|)^2 \geq |v_1|^2 + |v_2|^2 + |v_3|^2$$
$$(|v_1| + |v_2| + |v_3|)^2 \geq ||\overrightarrow{v}||^2$$
$$|v_1| + |v_2| + |v_3| \geq ||\overrightarrow{v}||$$

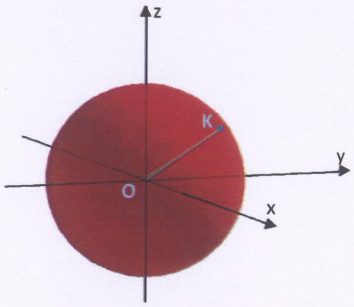
dir. Buradan

$$\frac{||\overrightarrow{v}||}{|v_1|+|v_2|+|v_3|} \leq 1$$
$$\frac{||\overrightarrow{v}||}{|v_1|+|v_2|+|v_3|} \cdot d_T(A,B) \leq 1 \cdot d_T(A,B)$$
$$d_E(A,B) \leq d_T(A,B)$$

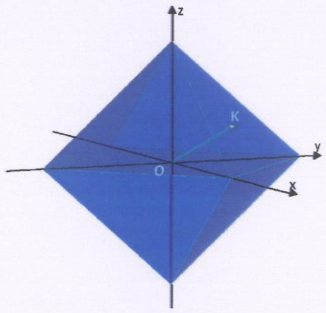
olur.



Şekil 2.16



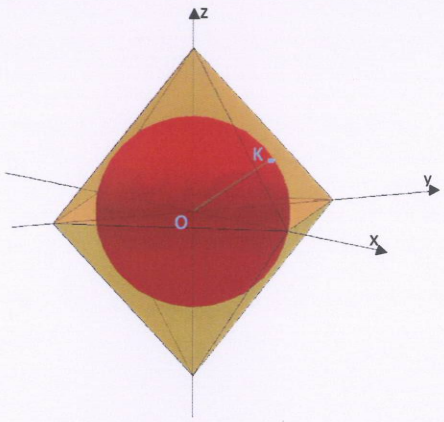
Şekil 2.17



Şekil 2.18

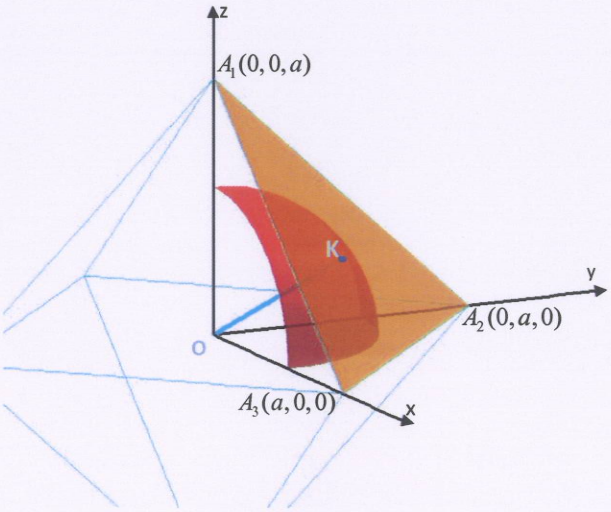
Bu iki kürenin bütün durumları incelenecektir.

I. Durum: O merkezli Öklid küresinin Taksi küresine içten teğet olması.



Şekil 2.19

K noktası iki kürenin birbirine teğet olduğu bir nokta olsun. $d_T(O,K)$ *birim* yarıçaplı Taksi küresi aynı zamanda ayrıt uzunluğu $\sqrt{2}d_T(O,K)$ *birim* olan Öklidyen düzgün 8−yüzlüdür ve K noktası düzgün 8−yüzlünün $A_1A_2A_3$ yüzünün ağırlık merkezidir. Çünkü, Öklidiyen küre Taksi küreye içten teğet olacak ise I. bölgede Taksi kürenin yüzeyi, $x+y+z=a$ düzleminin bu bölgede kalan kısmıdır. Bu düz- lemin orijine en yakın noktası hesaplanırsa $K=(\frac{a}{3},\frac{a}{3},\frac{a}{3})$ noktası bulunur (Bkz: Şekil 2.20).



Şekil 2.20

Benzer şekilde, iki kürenin teğet olduğu diğer K_i noktalarıda;

$K_2=(\frac{a}{3},-\frac{a}{3},\frac{a}{3})$, $K_3=(-\frac{a}{3},-\frac{a}{3},\frac{a}{3})$, $K_4=(-\frac{a}{3},\frac{a}{3},\frac{a}{3})$, $K_5=(\frac{a}{3},\frac{a}{3},-\frac{a}{3})$,
$K_6=(\frac{a}{3},-\frac{a}{3},-\frac{a}{3})$, $K_7=(-\frac{a}{3},-\frac{a}{3},-\frac{a}{3})$, $K_8=(-\frac{a}{3},\frac{a}{3},-\frac{a}{3})$, K=K_1=$(\frac{a}{3},\frac{a}{3},\frac{a}{3})$
dir.

$d_E(O,K)=d_E(O,K_i)$ ve $d_T(O,K)=d_T(O,K_i)$, $1\leq i\leq 8$ dir ve bu şartı sağlayan başka bir nokta daha yoktur. Dolayısıyla aranan L noktalarının geometrik yerleri K_i noktalarıdır. Burada dikkat edilirse,

K noktasının $y=0$ düzlemine göre simetriği K_2 noktasıdır,
K noktasının $y+x=0$ düzlemine göre simetriği K_3 noktasıdır,

K noktasının $x = 0$ düzlemine göre simetriği K_4 noktasıdır,

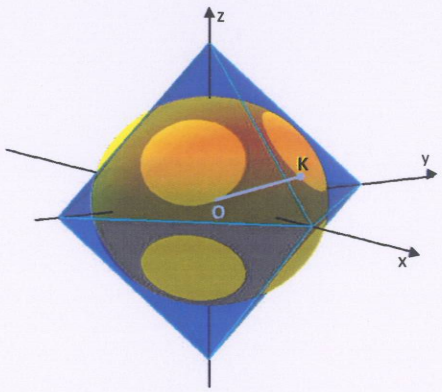
K noktasının $z = 0$ düzlemine göre simetriği K_5 noktasıdır,

K noktasının önce $z = 0$ düzlemine sonra $y = 0$ düzlemine göre simetriği K_6 noktasıdır,

K noktasının önce $z = 0$ düzlemine sonra $y + x = 0$ düzlemine göre simetriği K_7 noktasıdır,

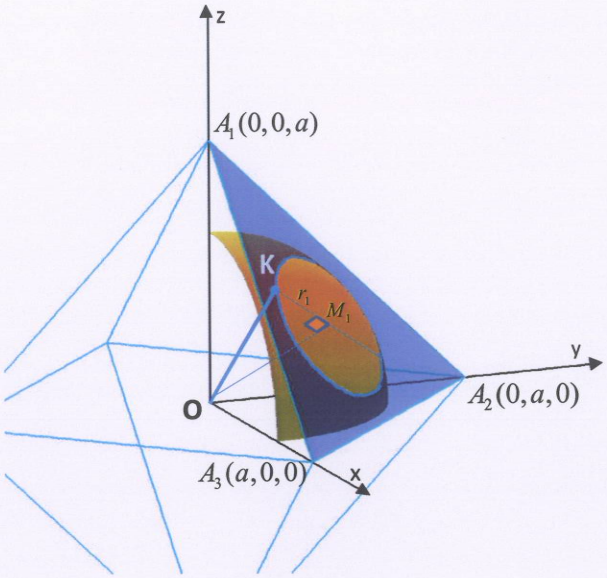
K noktasının önce $z = 0$ düzlemine sonra $x = 0$ düzlemine göre simetriği K_8 noktasıdır.

II. Durum: İki kürenin birbirini kesmesi.



Şekil 2.21

Şekil 2.21 - 2.22 de görüldüğü üzere iki kürenin ortak noktaları Taksi küresi üzerinde sekiz Öklid çemberinden oluşmaktadır. Bu çemberler üzerindeki bütün L noktaları için $d_E(O,K) = d_E(O,L)$ ve $d_T(O,K) = d_T(O,L)$ dir.



Şekil 2.22

$A_1A_2A_3$ düzlemi $(x+y+z=a)$ üzerindeki r_1 yarıçaplı M_1 merkezli çember üzerindeki K_i noktaları için $d_E(O,K)=d_E(O,K_i)$ ve $d_T(O,K)=d_T(O,K_i)$ dir ve M_1 noktası $A_1A_2A_3$ üçgeninin ağırlık merkezidir.

$OM_1 \perp KM_1$ dir. Buradan

$d_E(O,M_1)=\dfrac{\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}d_T(O,M_1)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}d_T(O,M_1)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}d_T(O,K)$ olup

$r=\sqrt{d_E(O,K)^2-d_E(O,M_1)^2}=\sqrt{d_E(O,K)^2-\dfrac{d_T(O,K)^2}{3}}$

$r=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3d_E(O,K)^2-d_T(O,K)^2}$ ve

$M_1=(\dfrac{a}{3},\dfrac{a}{3},\dfrac{a}{3})=\left(\dfrac{d_T(O,K)}{3},\dfrac{d_T(O,K)}{3},\dfrac{d_T(O,K)}{3}\right)$ dir.

$(d_T(O,K)=d_T(O,A_1)=a)$

Diğer çemberlerin merkezleri; $M_2=\left(\frac{d_T(O,K)}{3},-\frac{d_T(O,K)}{3},\frac{d_T(O,K)}{3}\right)$,
$M_3=\left(-\frac{d_T(O,K)}{3},-\frac{d_T(O,K)}{3},\frac{d_T(O,K)}{3}\right)$, $M_4=\left(-\frac{d_T(O,K)}{3},\frac{d_T(O,K)}{3},\frac{d_T(O,K)}{3}\right)$,
$M_5=\left(\frac{d_T(O,K)}{3},\frac{d_T(O,K)}{3},-\frac{d_T(O,K)}{3}\right)$, $M_6=\left(\frac{d_T(O,K)}{3},-\frac{d_T(O,K)}{3},-\frac{d_T(O,K)}{3}\right)$,
$M_7=\left(-\frac{d_T(O,K)}{3},-\frac{d_T(O,K)}{3},-\frac{d_T(O,K)}{3}\right)$, $M_8=\left(-\frac{d_T(O,K)}{3},\frac{d_T(O,K)}{3},-\frac{d_T(O,K)}{3}\right)$ ve

hepsinin yarıçapı $r=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3d_E(O,K)^2-d_T(O,K)^2}$ dir.

Ayrıca ;

M_1 noktasının $y = 0$ düzlemine göre simetriği M_2 noktasıdır,

M_1 noktasının $y + x = 0$ düzlemine göre simetriği M_3 noktasıdır,

M_1 noktasının $x = 0$ düzlemine göre simetriği M_4 noktasıdır,

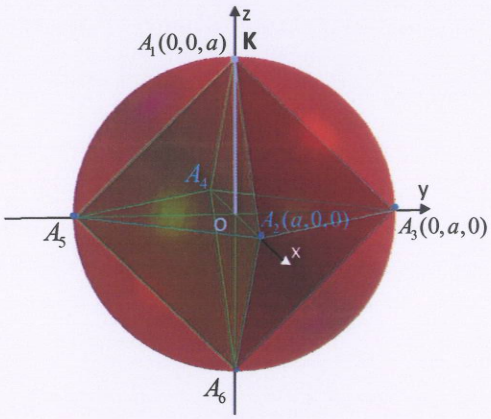
M_1 noktasının $z = 0$ düzlemine göre simetriği M_5 noktasıdır,

M_1 noktasının önce $z = 0$ düzlemine sonra $y = 0$ düzlemine göre simetriği M_6 noktasıdır,

M_1 noktasının önce $z = 0$ düzlemine sonra $y + x = 0$ düzlemine göre simetriği M_7 noktasıdır,

M_1 noktasının önce $z = 0$ düzlemine sonra $x = 0$ düzlemine göre simetriği M_8 noktasıdır.

III. Durum: Öklidyen kürenin Taksi küresine dıştan teğet olması;



Şekil 2.23

Şekil 2.23 de görüldüğü üzere iki kürenin ortak noktaları Taksi küresinin köşe koordinatları olan $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ noktalarından oluşmaktadır. Bütün bu A_i noktaları için $d_E(O, K) = d_E(O, A_i)$ ve $d_T(O, K) = d_T(O, A_i)$ dir.

$K = A_1 = (0, 0, a)$ olmak üzere;

A_1 noktasının $y - z = 0$ düzlemine göre simetriği A_2 noktasıdır,

A_1 noktasının $x - z = 0$ düzlemine göre simetriği A_3 noktasıdır,

A_1 noktasının $z + y = 0$ düzlemine göre simetriği A_4 noktasıdır,

A_1 noktasının $z+x=0$ düzlemine göre simetriği A_5 noktasıdır,

A_1 noktasının önce $z=0$ düzlemine göre simetriği A_6 noktasıdır.

Sonuç 2.12: Analitik 3-uzayda,

1) $K=(\pm k,\pm k,\pm k)$ olacak şekilde verilen $[OK]$ doğru parçası için $d_E(O,K)=d_E(O,L)$ ve $d_T(O,K)=d_T(O,L)$ olacak şekilde L noktalarının geometrik yeri K noktasının $x=0$, $y=0$, $z=0$, $y=\pm x$, $y=\pm z$, $x=\pm z$ düzlemlerinden biriyle ya da bir kaçıyla art arda simetriğinin alınmasıyla elde edilen bütün noktaların oluşturduğu kümedir.

2) $K=(k_1,k_2,k_3)$ olacak şekilde verilen $[OK]$ doğru parçası için $d_E(O,K)=d_E(O,L)$ ve $d_T(O,K)=d_T(O,L)$ olacak şekilde L noktalarının geometrik yeri O merkezli $d_T(O,K)$ yarıçaplı Taksi küresi üzerindeki $M_i=\left(\pm\frac{d_T(O,K)}{3},\pm\frac{d_T(O,K)}{3},\pm\frac{d_T(O,K)}{3}\right)$ merkezli $r=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3d_E(O,K)^2\text{-}d_T(O,K)^2}$ yarıçaplı Öklidyen çemberin noktalarının oluşturduğu kümedir.

3) Eksenler üzerinde verilen $[OA]$ doğru parçası için $d_E(O,A)=d_E(O,B)$ ve $d_T(O,A)=d_T(O,B)$ olacak şekilde B noktalarının geometrik yeri A noktasının $y-z=0$, $x-z=0$, $z+y=0$, $z+x=0$, $z=0$, düzlemlerinden biriyle ya da bir kaçıyla art arda simetriğinin alınmasıyla elde edilen bütün noktalardır.

Teorem 2.13: Analitik 3-uzayda $[OA]$ doğru parçası için $d_E(O,A)=d_E(O,B)$ ve $d_T(O,A)=d_T(O,B)$ olacak şekilde $[OB]$ doğru parçalarının geometrik yerleri;

$d_E(O,A)\neq d_T(O,A)$ iken;

$B\in\{(x,y,z)\mid(0\leq x,y,z\leq d_T(O,A))$ için $\left(x-\frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2+\left(y-\frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2+\left(z-\frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2=\frac{3d_E(O,A)^2-d_T(O,A)^2}{3}$ ve $x+y+z=d_T(O,A)$;

$(0\leq x,z\leq d_T(O,A)$ ve $-d_T(O,A)\leq y\leq 0)$ için $\left(x-\frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2+\left(y+\frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2+\left(z-\frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2=\frac{3d_E(O,A)^2-d_T(O,A)^2}{3}$ ve $x-y+z=d_T(O,A)$;

$(0\leq z\leq d_T(O,A)$ ve $-d_T(O,A)\leq x,y\leq 0)$ için $\left(x+\frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2+\left(y+\frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2+\left(z-\frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2=\frac{3d_E(O,A)^2-d_T(O,A)^2}{3}$ ve $-x-y+z=d_T(O,A)$;

$(0 \leq y, z \leq d_T(O,A)$ ve $-d_T(O,A) \leq x \leq 0)$ için $\left(x + \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2 = \frac{3d_E(O,A)^2 - d_T(O,A)^2}{3}$ ve $-x + y + z = d_T(O,A)$;

$(0 \leq x, y \leq d_T(O,A)$ ve $-d_T(O,A) \leq z \leq 0)$ için $\left(x - \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2 = \frac{3d_E(O,A)^2 - d_T(O,A)^2}{3}$ ve $x + y - z = d_T(O,A)$;

$(0 \leq x \leq d_T(O,A)$ ve $-d_T(O,A) \leq y, z \leq 0)$ için $\left(x - \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2 = \frac{3d_E(O,A)^2 - d_T(O,A)^2}{3}$ ve $x - y - z = d_T(O,A)$;

$(-d_T(O,A) \leq x, y, z \leq 0)$ için $\left(x + \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2 = \frac{3d_E(O,A)^2 - d_T(O,A)^2}{3}$ ve $-x - y - z = d_T(O,A)$;

$(0 \leq y \leq d_T(O,A)$ ve $-d_T(O,A) \leq x, z \leq 0)$ için $\left(x + \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2 = \frac{3d_E(O,A)^2 - d_T(O,A)^2}{3}$ ve $-x + y - z = d_T(O,A)\}$ olmak üzere tüm $[OB]$ lerin kümesi

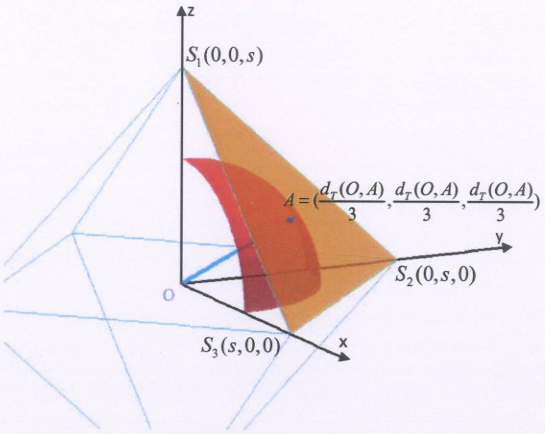
$d_E(O,A) = d_T(O,A)$ iken;

$B \in \{(\pm d_T(O,A), 0, 0), (0, \pm d_T(O,A), 0), (0, 0, \pm d_T(O,A))\}$ tüm $[OB]$ ler kümesidir.

İspat: O merkezli $d_E(O,A)$ yarıçaplı Öklid küresi ile O merkezli $d_T(O,A)$ yarıçaplı Taksi küresinin ortak noktaları B_i ler için $d_E(O,A) = d_E(O,B_i)$ ve $d_T(O,A) = d_T(O,B_i)$ dir.

$d_E(O,A) = \frac{d_T(O,A)}{\sqrt{3}}$ iken;

Taksi ve Öklid küreleri teğet olur ve ortak noktalar Taksi küresinin yüzeyini oluşturan eşkenar üçgenlerin ağırlık merkezleridir (Şekil 2.24).



Şekil 2.24

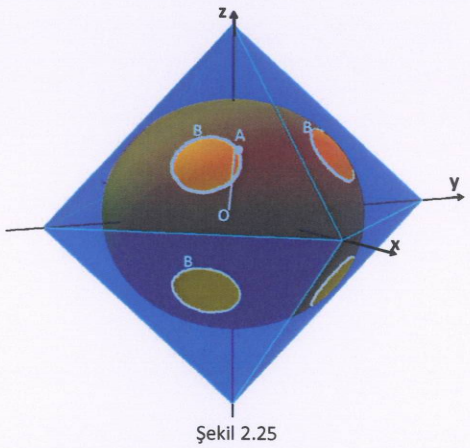
Dolayısıyla $B_i = (\pm\frac{d_T(O,A)}{3}, \pm\frac{d_T(O,A)}{3}, \pm\frac{d_T(O,A)}{3})$ dir. Buradan B_i noktalarının

$$\left(x \pm \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2 + \left(y \pm \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2 + \left(z \pm \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2 = \frac{3d_E(O,A)^2 - d_T(O,A)^2}{3} = 0$$

çemberleri üzerinde olduğu görülmektedir. Bunlar ise sadece birer noktadan ibarettir. Ayrıca Taksi küresinin yüzeyleri $\pm x \pm y \pm z = d_T(O,A)$ düzlemleri üzerinde olduğundan B_i noktaları aynı zamanda bu denklemleri sağlamalıdır.

$d_T(O,A) > d_E(O,A) > \frac{d_T(O,A)}{\sqrt{3}}$ iken;

Taksi ve Öklid küreleri birbirini keser ve kesişim noktaları Taksi küresinin yüzleri üzerindeki 8 tane Öklid çemberinden oluşmaktadır (Şekil 2.25).



Şekil 2.25

Çemberlerden birini ayrıntılı olarak incelersek (Şekil 2.26) $OM \perp MA$ dır. Buradan

$r = \sqrt{d_E(O,A)^2 - d_E(O,M)^2} = \sqrt{d_E(O,A)^2 - \frac{d_T(O,A)^2}{3}}$

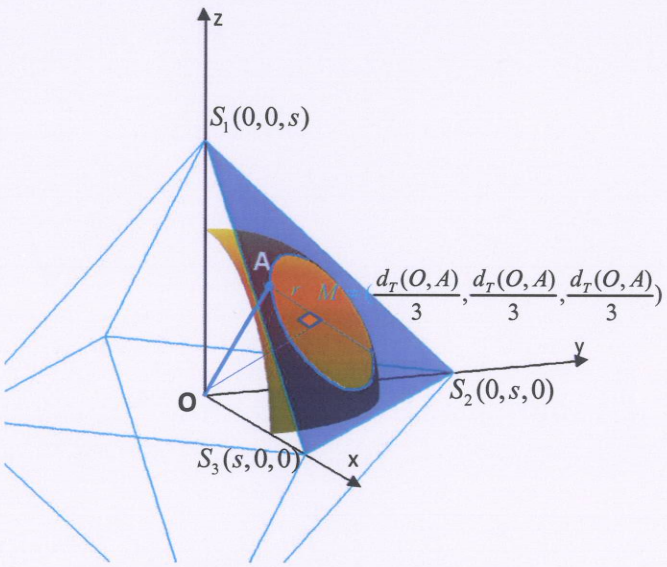
$r = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3d_E(O,A)^2 - d_T(O,A)^2}$ ve

$M = (\frac{s}{3}, \frac{s}{3}, \frac{s}{3}) = \left(\frac{d_T(O,A)}{3}, \frac{d_T(O,A)}{3}, \frac{d_T(O,A)}{3}\right)$, $(d_T(O,A) = d_T(O,S_1) = s)$ dir.

Dolayısıyla çemberin denklemi;

$\left(x - \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2 = \frac{3d_E(O,A)^2 - d_T(O,A)^2}{3}$

küresi ile $x + y + z = s$ düzleminin arakesitidir.



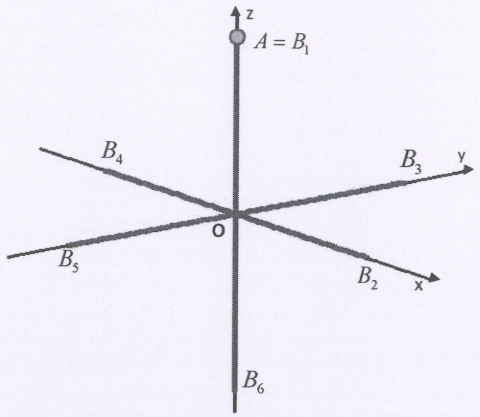
Şekil 2.26

$d_E(O,A) = d_T(O,A)$ iken;

Taksi ve Öklid kürelerinin ortak noktaları $(\pm s, 0, 0), (0, \pm s, 0), (0, 0, \pm s)$ dir. $s = d_E(O,A) = d_T(O,A)$ olduğundan B_i noktaları

$\{(\pm s, 0, 0), (0, \pm s, 0), (0, 0, \pm s)\} = \{(\pm d_T(O,A), 0, 0), (0, \pm d_T(O,A), 0),$

$(0, 0, \pm d_T(O, A))\}$ kümesinin elemanıdır.



Şekil 2.27

■

Örnek 2.14: Analitik 3−uzayda verilen $A = (1, 1, 1)$ noktası için

$$d_E(O, A) = d_E(O, B) \text{ ve } d_T(O, A) = d_T(O, B)$$

olacak şekildeki B noktalarının geometrik yeri;

$d_E(O, A) = \sqrt{3}$, $d_T(O, A) = 3$ dir. Buradan Taksi ve Öklidyen kürelerin ortak noktaları

$M_i = \left(\pm\frac{d_T(O,K)}{3}, \pm\frac{d_T(O,K)}{3}, \pm\frac{d_T(O,K)}{3}\right) = (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ merkezli ve

$r = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3d_E(O, K)^2 - d_T(O, K)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3\left(\sqrt{3}\right)^2 - 3^2} = 0$ yarıçaplı çemberlerdir.

Teorem 2.13 gereği B noktaları

$\{(x, y, z) \mid (0 \leq x, y, z \leq 3)$ için $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = 0$ ve $x+y+z = 3$;

$(0 \leq x, z \leq 3$ ve $-3 \leq y \leq 0)$ için $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 0$ ve $x - y + z = 3$;

$(0 \leq z \leq 3$ ve $-3 \leq x, y \leq 0)$ için $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 0$ ve $-x - y + z = 3$;

$(0 \leq y, z \leq 3 \quad \text{ve} \quad -3 \leq x \leq 0)$ için $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 0$ ve $-x+y+z=3$;

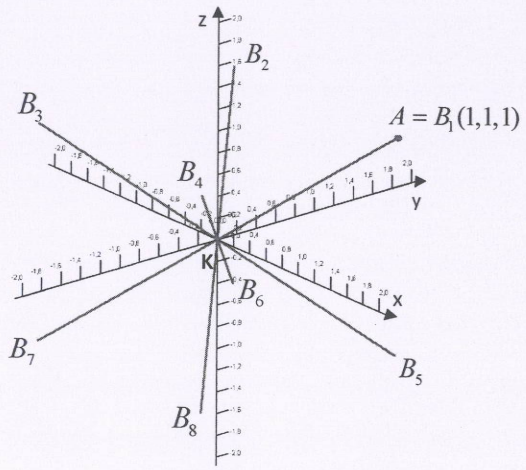
$(0 \leq x, y \leq 3 \quad \text{ve} \quad -3 \leq z \leq 0)$ için $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 0$ ve $x+y-z=3$;

$(0 \leq x \leq 3 \quad \text{ve} \quad -3 \leq y, z \leq 0)$ için $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 0$ ve $x-y-z=3$;

$(-3 \leq x, y, z \leq 0)$ için $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 0$ ve $-x-y-z=3$;

$(0 \leq y \leq 3 \quad \text{ve} \quad -3 \leq x, z \leq 0)$ için $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 0$ ve $-x+y-z=3\}$

kümesinin elemanlarından oluştuğundan B noktaları Şekil 2.28 de görüldüğü gibi $B_1 = (1,1,1)$, $B_2 = (1,-1,1)$, $B_3 = (-1,-1,1)$, $B_4 = (-1,1,1)$, $B_5 = (1,1,-1)$, $B_6 = (1,-1,-1)$, $B_7 = (-1,-1,-1)$, $B_8 = (-1,1,-1)$ dir.



Şekil 2.28

Dolayısıyla $d_E(O,A) = d_E(O,B_i)$ ve $d_T(O,A) = d_T(O,B_i)$ elde edilir.

Teorem 2.15: Analitik 3−uzayda $[AB]$ doğru parçası için

$$d_E(A,B) = d_E(K,L) \text{ ve } d_T(A,B) = d_T(K,L)$$

olacak şekilde $[KL]$ doğru parçalarının geometrik yeri,

$K = (k_1, k_2, k_3)$, $\quad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ ve $d_E(A,B) \neq d_T(A,B)$ iken;
$L \in \{(x+k_1, y+k_2, z+k_3) \mid (0 \leq x, y, z \leq d_T(A,B))$ için $\left(x - \frac{d_T(A,B)}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{d_T(A,B)}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{d_T(A,B)}{3}\right)^2 = \frac{3d_E(A,B)^2 - d_T(A,B)^2}{3}$ ve $x + y + z = d_T(A,B)$;

$(0 \leq x, z \leq d_T(A,B)$ ve $-d_T(A,B) \leq y \leq 0)$ için $\left(x - \frac{d_T(A,B)}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{d_T(A,B)}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{d_T(A,B)}{3}\right)^2 = \frac{3d_E(A,B)^2 - d_T(A,B)^2}{3}$ ve $x - y + z = d_T(A,B)$;

$(0 \leq z \leq d_T(A,B)$ ve $-d_T(A,B) \leq x, y \leq 0)$ için $\left(x + \frac{d_T(A,B)}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{d_T(A,B)}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{d_T(A,B)}{3}\right)^2 = \frac{3d_E(A,B)^2 - d_T(A,B)^2}{3}$ ve $-x - y + z = d_T(A,B)$;

$(0 \leq y, z \leq d_T(A,B)$ ve $-d_T(A,B) \leq x \leq 0)$ için $\left(x + \frac{d_T(A,B)}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{d_T(A,B)}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{d_T(A,B)}{3}\right)^2 = \frac{3d_E(A,B)^2 - d_T(A,B)^2}{3}$ ve $-x + y + z = d_T(A,B)$;

$(0 \leq x, y \leq d_T(A,B)$ ve $-d_T(A,B) \leq z \leq 0)$ için $\left(x - \frac{d_T(A,B)}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{d_T(A,B)}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{d_T(A,B)}{3}\right)^2 = \frac{3d_E(A,B)^2 - d_T(A,B)^2}{3}$ ve $x + y - z = d_T(A,B)$;

$(0 \leq x \leq d_T(A,B)$ ve $-d_T(A,B) \leq y, z \leq 0)$ için $\left(x - \frac{d_T(A,B)}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{d_T(A,B)}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{d_T(A,B)}{3}\right)^2 = \frac{3d_E(A,B)^2 - d_T(A,B)^2}{3}$ ve $x - y - z = d_T(A,B)$;

$(-d_T(A,B) \leq x, y, z \leq 0)$ için $\left(x + \frac{d_T(A,B)}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{d_T(A,B)}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{d_T(A,B)}{3}\right)^2 = \frac{3d_E(A,B)^2 - d_T(A,B)^2}{3}$ ve $-x - y - z = d_T(A,B)$;

$(0 \leq y \leq d_T(A,B)$ ve $-d_T(A,B) \leq x,z \leq 0)$ için $\left(x+\frac{d_T(A,B)}{3}\right)^2+\left(y-\frac{d_T(A,B)}{3}\right)^2$ $+\left(z+\frac{d_T(A,B)}{3}\right)^2=\frac{3d_E(A,B)^2-d_T(A,B)^2}{3}$ ve $-x+y-z=d_T(A,B)\}$

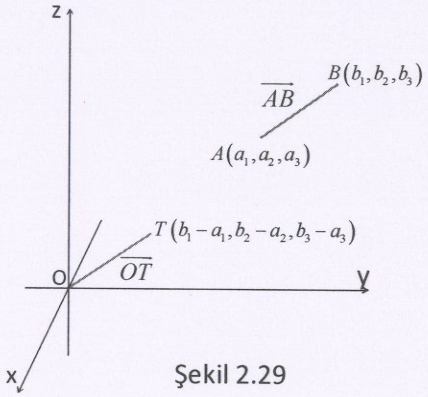
ve

$d_E(A,B)=d_T(A,B)$ iken;

$L \in \{(\pm d_T(A,B)+k_1,k_2,k_3),(k_1,\pm d_T(A,B)+k_2,k_3),(k_1,k_2,\pm d_T(A,B)+k_3)\}$ olmak üzere tüm $[KL]$ doğru parçalarından oluşur.

İspat:

$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$ dir ve $T=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$ için $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OT}$ ve $d_E(A,B)=d_E(O,T)$ ve $d_T(A,B)=d_T(O,T)$ dir (Şekil 2.29).



Şekil 2.29

Teorem 2.13 gereği analitik 3-uzayda $T=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$, $O=(0,0,0)$ noktaları için $d_E(O,T)=d_E(O,S)$ ve $d_T(O,T)=d_T(O,S)$ olacak şekilde S noktaları

$d_E(O,T) \neq d_T(O,T)$ iken;

$\{(x,y,z) \mid (0 \leq x,y,z \leq d_T(O,T))$ için $\left(x-\frac{d_T(O,T)}{3}\right)^2+\left(y-\frac{d_T(O,T)}{3}\right)^2+$ $\left(z-\frac{d_T(O,T)}{3}\right)^2=\frac{3d_E(O,T)^2-d_T(O,T)^2}{3}$ ve $x+y+z=d_T(O,T)$;

$(0 \leq x,z \leq d_T(O,T)$ ve $-d_T(O,T) \leq y \leq 0)$ için $\left(x-\frac{d_T(O,T)}{3}\right)^2+\left(y+\frac{d_T(O,T)}{3}\right)^2$ $+\left(z-\frac{d_T(O,T)}{3}\right)^2=\frac{3d_E(O,T)^2-d_T(O,T)^2}{3}$ ve $x-y+z=d_T(O,T)$;

$(0 \leq z \leq d_T(O,T)$ ve $-d_T(O,T) \leq x, y \leq 0)$ için $\left(x + \frac{d_T(O,T)}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{d_T(O,T)}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{d_T(O,T)}{3}\right)^2 = \frac{3d_E(O,T)^2 - d_T(O,T)^2}{3}$ ve $-x - y + z = d_T(O,T)$;

$(0 \leq y, z \leq d_T(O,T)$ ve $-d_T(O,T) \leq x \leq 0)$ için $\left(x + \frac{d_T(O,T)}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{d_T(O,T)}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{d_T(O,T)}{3}\right)^2 = \frac{3d_E(O,T)^2 - d_T(O,T)^2}{3}$ ve $-x + y + z = d_T(O,T)$;

$(0 \leq x, y \leq d_T(O,T)$ ve $-d_T(O,T) \leq z \leq 0)$ için $\left(x - \frac{d_T(O,T)}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{d_T(O,T)}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{d_T(O,T)}{3}\right)^2 = \frac{3d_E(O,T)^2 - d_T(O,T)^2}{3}$ ve $x + y - z = d_T(O,T)$;

$(0 \leq x \leq d_T(O,T)$ ve $-d_T(O,T) \leq y, z \leq 0)$ için $\left(x - \frac{d_T(O,T)}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{d_T(O,T)}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{d_T(O,T)}{3}\right)^2 = \frac{3d_E(O,T)^2 - d_T(O,T)^2}{3}$ ve $x - y - z = d_T(O,T)$;

$(-d_T(O,T) \leq x, y, z \leq 0)$ için $\left(x + \frac{d_T(O,T)}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{d_T(O,T)}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{d_T(O,T)}{3}\right)^2 = \frac{3d_E(O,T)^2 - d_T(O,T)^2}{3}$ ve $-x - y - z = d_T(O,T)$;

$(0 \leq y \leq d_T(O,T)$ ve $-d_T(O,T) \leq x, z \leq 0)$ için $\left(x + \frac{d_T(O,T)}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{d_T(O,T)}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{d_T(O,T)}{3}\right)^2 = \frac{3d_E(O,T)^2 - d_T(O,T)^2}{3}$ ve $-x + y - z = d_T(O,T)\}$

kümesinin elemanlarından ibarettir.

$d_E(O,T) = d_T(O,T)$ iken;

$\{(\pm d_T(O,T), 0, 0), (0, \pm d_T(O,T), 0), (0, 0, \pm d_T(O,T))\}$ kümesinin elemanlarından ibarettir.

$d_E(A,B) = d_E(K,L)$ ve $d_T(A,B) = d_T(K,L)$ olacak şekilde $[KL]$ doğru parçası $[OS]$ doğru parçalarının bütün ötelemeleridir. Bilindiği gibi ötelemeler Öklidyen ve Taksi uzunlukları korur. Buradan;

$k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ olmak üzere O ve S noktalarının koordinatları sırayla k_1, k_2, k_3 *birim* ötelenirse $K = (k_1, k_2, k_3)$, $L = (x + k_1, y + k_2, z + k_3)$ olacak şekilde $[KL]$ doğru parçaları elde edilir.■

Örnek 2.16: Analitik 3−uzayda $A = (1, 3, 7), B = (3, 5, 9)$ noktalarının oluşturduğu $[AB]$ doğru parçası için $d_E(A, B) = d_E(K, L)$ ve $d_T(A, B) = d_T(K, L)$ olacak şekildeki $[KL]$ doğru parçalarının geometrik yerlerini bulalım.

$d_E(A, B) = 2\sqrt{3}$, $d_T(A, B) = 6$ dir. Buradan Taksi ve Öklidyen kürelerin ortak noktaları

$M_i = \left(\pm\frac{d_T(A,B)}{3}, \pm\frac{d_T(A,B)}{3}, \pm\frac{d_T(A,B)}{3}\right) = (\pm 2, \pm 2, \pm 2)$ merkezli ve
$r = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3d_E(O, K)^2 - d_T(O, K)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3\left(2\sqrt{3}\right)^2 - 6^2} = 0$ yarıçaplı çemberlerdir. Teorem 2.8 gereği K ve L noktalarının koordinatları;

$K = (k_1, k_2, k_3)$, $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ iken
$L \in \{(x + k_1, y + k_2, z + k_3) \mid (0 \leq x, y, z \leq 6)$ için $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 0$ ve $x + y + z = 6$;

$(0 \leq x, z \leq 6$ ve $-6 \leq y \leq 0)$ için $(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 0$ ve $x - y + z = 6$;

$(0 \leq z \leq 6$ ve $-6 \leq x, y \leq 0)$ için $(x+2)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 0$ ve $-x - y + z = 6$;

$(0 \leq y, z \leq 6$ ve $-6 \leq x \leq 0)$ için $(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 0$ ve $-x + y + z = 6$;

$(0 \leq x, y \leq 6$ ve $-6 \leq z \leq 0)$ için $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 0$ ve $x + y - z = 6$;

$(0 \leq x \leq 6$ ve $-6 \leq y, z \leq 0)$ için $(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = 0$ ve $x - y - z = 6$;

$(-6 \leq x, y, z \leq 0)$ için $(x+2)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = 0$ ve $-x - y - z = 6$;

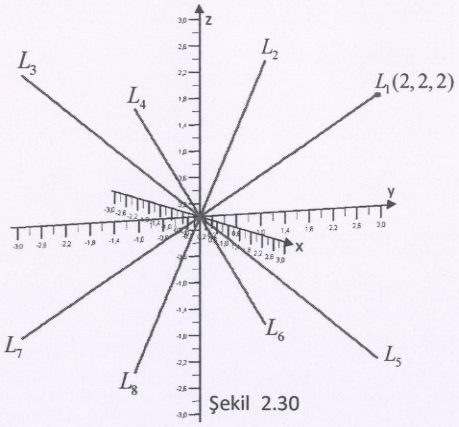
$(0 \leq y \leq 6$ ve $-6 \leq x, z \leq 0)$ için $(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 0$ ve $-x + y - z = 6\}$ dir.

Burada L noktasının koordinatları;

$L \in \{L_1 = (k_1+2, k_2+2, k_3+2)$, $L_2 = (k_1+2, k_2-2, k_1+2)$,
$L_3 = (k_1-2, k_2-2, k_3+2)$, $L_4 = (k_1-2, k_2+2, k_3+2)$, $L_5 = (k_1+2, k_2+2, k_3-2)$,
$L_6 = (k_1+2, k_2-2, k_3-2)$, $L_7 = (k_1-2, k_2-2, k_3-2)$, $L_8 = (k_1-2, k_2+2, k_2-2)\}$
dir.

Görüldüğü üzere analitik 3-uzayda $d_E(A,B)=d_E(K,L)$ ve $d_T(A,B)=d_T(K,L)$ şartını sağlayan sonsuz sayıda $[KL]$ doğru parçası vardır. Bunlardan birkaçı;

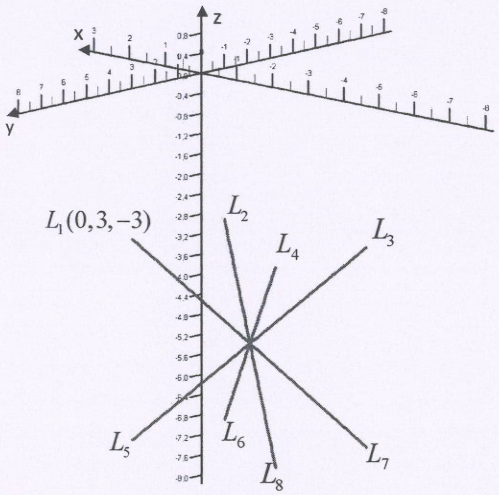
$K = (0,0,0)$ için
$L \in \{L_1 = (2,2,2)$, $L_2 = (2,-2,2)$, $L_3 = (-2,-2,2)$, $L_4 = (-2,2,2)$,
$L_5 = (2,2,-2)$, $L_6 = (2,-2,-2)$, $L_7 = (-2,-2,-2)$, $L_8 = (-2,2,-2)\}$ dir (Bkz Şekil 2.30).



Şekil 2.30

$K = (-2, 1, -5)$ için

$L \in \{L_1 = (0, 3, -3), L_2 = (0, -1, -3),\ L_3 = (-4, -1, -3),\ L_4 = (-4, 3, -3),$ $L_5 = (0, 3, -7),\ L_6 = (0, -1, -7),\ L_7 = (-4, -1, -7),\ L_8 = (-4, 3, -7)\}$ dir (Bkz. Şekil 2.31).



Şekil 2.31

Örnek 2.17: Analitik 3−uzayda $A = (1, 2, 2)$ noktası için

$$d_E(O, A) = d_E(O, B) \text{ ve } d_T(O, A) = d_T(O, B)$$

olacak şekildeki B noktalarının geometrik yerleri, $d_E(O, A) = 3$, $d_T(O, A) = 5$ dir. Buradan Taksi ve Öklidyen kürelerin ortak noktaları

$M_i = \left(\pm\frac{d_T(O,K)}{3}, \pm\frac{d_T(O,K)}{3}, \pm\frac{d_T(O,K)}{3}\right) = \left(\pm\frac{5}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{5}{3}\right)$ merkezli ve

$r = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3d_E(O,K)^2 - d_T(O,K)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3(3)^2 - 5^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ yarıçaplı çemberlerdir. Teorem 2.13 gereği

$B \in \{(x,y,z) \mid (0 \leq x,y,z \leq 5)$ için $\left(x-\frac{5}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{5}{3}\right)^2 + \left(z-\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ve $x+y+z=5$;

$(0 \leq x,z \leq 5$ ve $-5 \leq y \leq 0)$ için $\left(x-\frac{5}{3}\right)^2 + \left(y+\frac{5}{3}\right)^2 + \left(z-\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ve $x-y+z=5$;

$(0 \leq z \leq 5$ ve $-5 \leq x,y \leq 0)$ için $\left(x+\frac{5}{3}\right)^2 + \left(y+\frac{5}{3}\right)^2 + \left(z-\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ve $-x-y+z=5$;

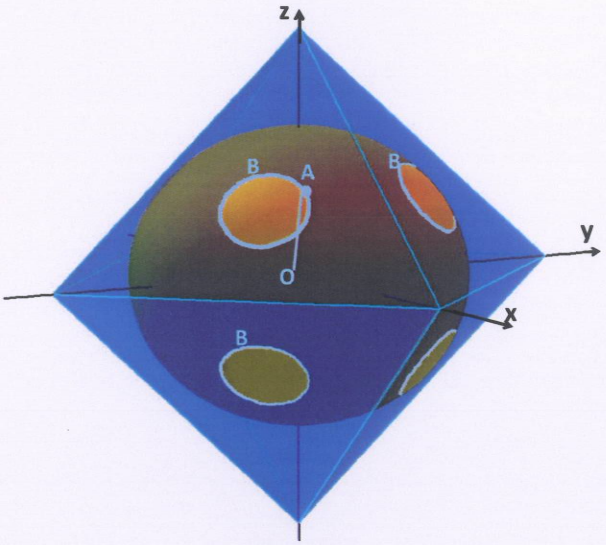
$(0 \leq y,z \leq 5$ ve $-5 \leq x \leq 0)$ için $\left(x+\frac{5}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{5}{3}\right)^2 + \left(z-\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ve $-x+y+z=5$;

$(0 \leq x,y \leq 5$ ve $-5 \leq z \leq 0)$ için $\left(x-\frac{5}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{5}{3}\right)^2 + \left(z+\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ve $x+y-z=5$;

$(0 \leq x \leq 5$ ve $-5 \leq y,z \leq 0)$ için $\left(x-\frac{5}{3}\right)^2 + \left(y+\frac{5}{3}\right)^2 + \left(z+\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ve $x-y-z=5$;

$(-5 \leq x,y,z \leq 0)$ için $\left(x+\frac{5}{3}\right)^2 + \left(y+\frac{5}{3}\right)^2 + \left(z+\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{6}}{3}^2 = 0$ ve $-x-y-z=5$;

$(0 \leq y \leq 5$ ve $-5 \leq x,z \leq 0)$ için $\left(x+\frac{5}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{5}{3}\right)^2 + \left(z+\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ve $-x+y-z=5\}$ dir (Şekil 2.32).



Şekil 2.32

Dolayısıyla $\pm x \pm y \pm z = 5$ düzlemleri üzerinde

$$M = (\pm\frac{5}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{5}{3}) \text{ merkezli } r = \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ yarıçaplı}$$

Öklid çemberleri üzerindeki bütün B noktaları için

$$d_E(O, A) = d_E(O, B) \text{ ve } d_T(O, A) = d_T(O, B)$$

dir.

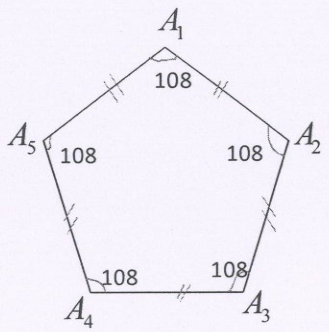
BÖLÜM 3

ANALİTİK 3-UZAYDA ÖKLİDYEN VE TAKSİ DÜZGÜN ÇOKGENLER

Bu bölümde analitik 3−uzaydaki Öklidyen düzgün çokgenlerin hangi şartlar altında Taksi düzgün çokgen olduğu araştırıldı. Bilindiği gibi kenar uzunlukları eşit olan çokgenlere *eşkenarlı çokgen*, iç açılarının ölçüleri eşit olan çokgenlere *eşaçılı çokgen*, hem eşkenarlı hem de eşaçılı olan çokgenlere *düzgün çokgen* denir.

Tanım 3.1: Bütün kenar uzunlukları ve iç açıları birbirine eşit olan düzlemsel konveks çokgenlere *düzgün çokgen* denir.

Örnek 3.2: Öklidyen düzgün beşgen.



Şekil 3.1

Şekil 3.1 de görüldüğü gibi düzlemsel A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 noktaları için

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{A}_3 = \hat{A}_4 = \hat{A}_5 = 108^\circ$$

ve

$$d_E(A_1, A_2) = d_E(A_2, A_3) = d_E(A_3, A_4) = d_E(A_4, A_5) = d_E(A_5, A_1)$$

olduğundan $A_1A_2A_3A_4A_5$ Öklidyen düzgün beşgendir.

Barış Çolakoğlu doktora tez çalışmasında analitik düzlemde Öklidyen düzgün çokgenlerin Taksi düzgünlüğünü çalışmıştı. Analitik 3−uzayda Öklidyen düzgün çokgenlerin hangilerinin aynı zamanda Taksi düzgün olduğunu ifade eden teoremleri daha anlaşılır kılmak için önce aynı teoremlerin analitik düzlemde uygulamaları yapıldı. Bu uygulamayla aynı zamanda analitik düzlemdeki Öklidyen ve Taksi düzgün çokgenlere farklı bir bakış açısı kazandırılmış olur.

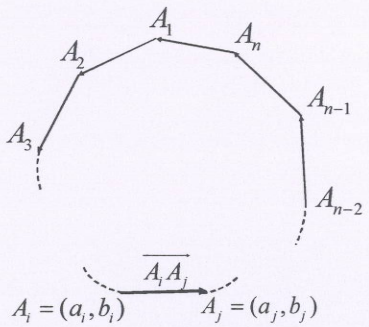
3.1 Analitik Düzlemde Öklidyen Düzgün Çokgenlerin Taksi Düzgünlüğü

Teorem 3.3: $n \in \mathbb{Z}^+$, $3 \leq n$ ve $A_i = (a_i, b_i)$ için analitik düzlemde $A_1A_2...A_n$, $n-$kenarlı Öklidyen düzgün çokgenin kenarlarının oluşturduğu vektörler

$$\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}, ...\overrightarrow{A_nA_1}$$

olsun. $A_1A_2...A_n$ nin aynı zamanda Taksi düzgün çokgen olması için gerek ve yeter şart $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}, ...\overrightarrow{A_nA_1} \in \{(x, y) \mid x, y \in \{\pm(a_j - a_i), \pm(b_j - b_i)\}, |i - j| = 1 \ veya \ |i - j| = n - 1 \quad ve \quad (a_j - a_i) \neq (b_j - b_i)\} \quad için \ x \neq y\}$
olmasıdır.

İspat: Analitik düzlemde $A_1A_2...A_n$, $n-$kenarlı Öklidyen düzgün çokgenin aynı zamanda Taksi düzgün çokgen olması için Taksi eşkenarlı olması gerekir. Şekil 3.2 de görüldüğü gibi $A_1A_2...A_n$ Öklidyen düzgün çokgenin kenarlarını oluşturan vektörler $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}, ..., \overrightarrow{A_nA_1}$ olsun.



Şekil 3.2

($\Rightarrow$) Analitik düzlemde $A_1A_2...A_n$, $n-$kenarlı Öklidyen ve Taksi düzgün çokgen olsun. O halde $A_1A_2...A_n$ Öklidyen ve Taksi eşkenarlıdır.

$A_i = (a_i, b_i)$, $A_j = (a_j, b_j)$, $|i-j| = 1$ *veya* $|i-j| = n-1$ olmak üzere $\overrightarrow{A_iA_j} = (a_j - a_i, b_j - b_i)$ dir.

Teorem 2.8 gereği analitik düzlemde $M = (0,0)$, $N = (n_1, n_2)$ noktaları için $d_E(M,N) = d_E(M,C)$ ve $d_T(M,N) = d_T(M,C)$ olacak şekilde C noktaları $\{(x,y) \mid x,y \in \{\pm n_1, \pm n_2\}$ *ve* $n_1 \neq n_2$ *için* $x \neq y\}$ kümesinin elemanlarından ibarettir.

$n_1 = a_j - a_i, n_2 = b_j - b_i$ için $\overrightarrow{A_iA_j}$ vektörüne Taksi uzunluğu eşit vektörlerin kümesi

$\{(x,y) \mid x,y \in \{\pm(a_j - a_i),\ \pm(b_j - b_i)\}, |i-j| = 1$ *veya* $|i-j| = n-1$ *ve* $(a_j - a_i) \neq (b_j - b_i)$ *için* $x \neq y\}$

dir. $A_1A_2...A_n$ Öklidyen ve Taksi eşkenarlı olduğundan çokgenin kenarlarını oluşturan bütün vektörler $\{(x,y) \mid x,y \in \{\pm(a_j - a_i),\ \pm(b_j - b_i)\}, |i-j| = 1$ *veya* $|i-j| = n-1$ *ve* $(a_j - a_i) \neq (b_j - b_i)$ *için* $x \neq y\}$ kümesinin elemanıdır.

($\Leftarrow$) $A_1A_2...A_n$ Öklidyen düzgün çokgenin kenarlarını oluşturan vektörler $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}, ..., \overrightarrow{A_nA_1}$ olmak üzere

$\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}, ..., \overrightarrow{A_nA_1} \in \{(x,y) \mid x,y \in \{\pm(a_j - a_i),\ \pm(b_j - b_i)\}, |i-j| = 1$ *veya* $|i-j| = n-1$ *ve* $(a_j - a_i) \neq (b_j - b_i)$ *için* $x \neq y\}$

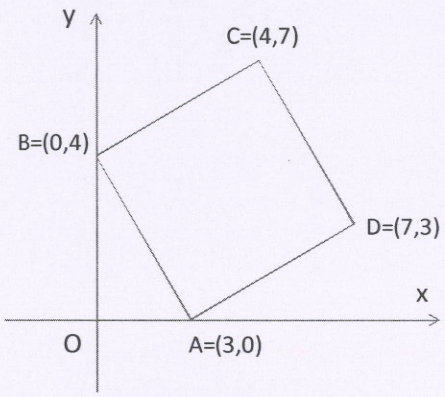
olsun.

$M = (0,0)$,

$N = (n_1, n_2) \in \{(x,y) \mid x,y \in \{\pm(a_j - a_i), \pm(b_j - b_i)\}, |i-j| = 1 \text{ veya } |i-j| = n-1$
$\text{ve } (a_j - a_i) \neq (b_j - b_i) \text{ için } x \neq y\}$

noktaları için $d_T(M,N) = |a_j - a_i| + |b_j - b_i| = d_T(A_i, A_j)$ dir. Dolayısıyla $A_1A_2...A_n$ Taksi eşkenarlıdır. Dolayısıyla $A_1A_2...A_n$ Öklidyen düzgün çokgen aynı zamanda Taksi düzgün çokgendir.■

Örnek 3.4: Şekil 3.3 de görülen $ABCD$ karesi hem Öklidyen hem de Taksi karedir.



Şekil 3.3

$ABCD$ karesinin ayrıtlarını oluşturan vektörler;

$$\overrightarrow{AB} = (-3,4),\ \overrightarrow{BC} = (4,3), \overrightarrow{CD} = (3,-4), \overrightarrow{DA} = (-4,-3)$$

dir. Bu vektörlerden $\overrightarrow{AB}$ vektörüyle Taksi ve Öklidyen uzunluğu eşit olan bütün vektörler Teorem 3.1. gereği

$\{(x,y) \mid x,y \in \{\pm 4, \pm 3\},\ x \neq y\}$ olduğundan

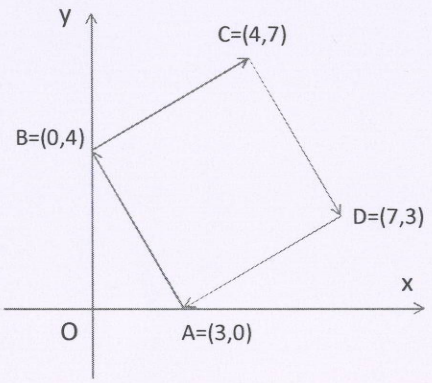
$\{(4,3),(4,-3),(-4,3),(-4,-3),(3,4),(3,-4),(-3,4),(-3,-4)\}$

dir. Buradan $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA} \in \{(x,y) \mid x,y \in \{\pm 4, \pm 3\},\ x \neq y\}$ dir.

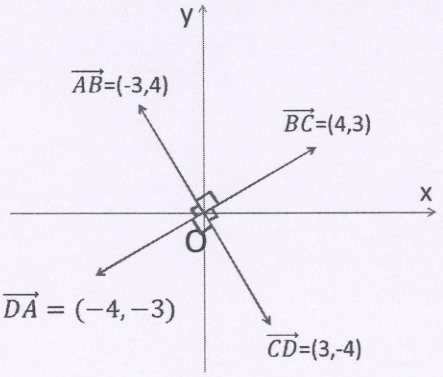
Teorem 3.5: $n \in \mathbb{Z}^+$, $n > 8$ için analitik düzlemde n kenarlı Öklidyen düzgün çokgenlerden aynı zamanda Taksi düzgün çokgen olan yoktur.

İspat: Teorem 2.8 gereği analitik düzlemde $A = (0,0)$, $B = (b_1, b_2)$ noktaları için $d_E(A,B) = d_E(A,C)$ ve $d_T(A,B) = d_T(A,C)$ olacak şekilde C noktaları $\{(x,y) \mid x,y \in \{\pm b_1, \pm b_2\}$ *ve* $b_1 \neq b_2$ *için* $x \neq y\}$ kümesinin elemanlarından ibarettir. Bu kümenin eleman sayısı 8 dir. Dolayısıyla Öklidyen düzgün çokgenlerden kenar sayısı 8 den fazla olanlar Taksi eşkenarlı değildirler.■

Teorem 3.5 den dolayı analitik düzlemde $n = 3,4,5,6,7,8$ için $n-$kenarlı Öklidyen düzgün çokgenlerden hangilerinin Taksi düzgün çokgen olduğuna bakılmalıdır. Bunun için çokgenlerin kenarlarını oluşturan vektörlerin konum vektörlerinden yararlanılacaktır. Örnek 3.4 deki $ABCD$ karesinin kenarlarını oluşturan vektörler;

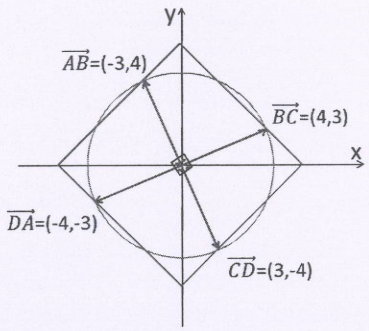


Şekil 3.4



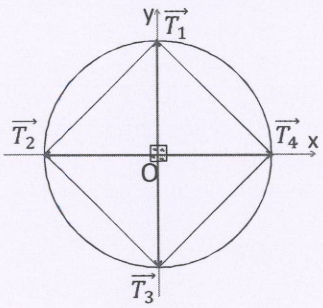
Şekil 3.5

$\overrightarrow{AB} = (0-3, 4-0) = (-3,4)$, $\overrightarrow{BC} = (4,3)$, $\overrightarrow{CD} = (3,-4)$, $\overrightarrow{DA} = (-4,-3)$ şeklindedir. İlgili konum vektörlerinin ardışık olarak aralarındaki açı 90^o olup $ABCD$ karesinin iç açıları da 90^o dir. Yani konum vektörleri arasındaki açı ile çokgenin dış açısı eşittir. Ayrıca Şekil 3.6 da da görüldüğü üzere bu konum vektörleri $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ yarıçaplı orijin merkezli Öklidyen çember ile $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|_T$ yarıçaplı orijin merkezli Taksi çember üzerindedir.

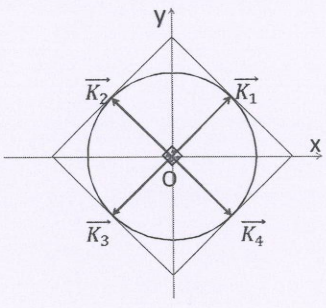


Şekil 3.6

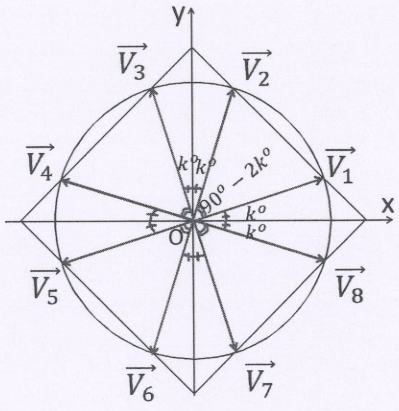
Dolayısıyla herhangi bir Öklidyen n-kenarlı düzgün çokgenin aynı zamanda Taksi düzgün olması için; çokgenin kenarlarını oluşturan vektörlerin aralarındaki açı çokgenin dış açısına eşit ve uç noktaları Öklidyen çember ve Taksi çember üzerinde olmalıdır. Hem Öklidyen hem de Taksi çokgenin kenarlarını oluşturan vektörlerin konumları; kenarların eğimleri m olmak üzere $m = 0$ ve $m \to \infty$ olduğunda Şekil 3.7 deki gibi, $m = \pm 1$ olduğunda Şekil 3.8 deki gibi, $m = \pm 1, m = 0$ ve $m \to \infty$ olmasının dışındaki tüm durumlarda da Şekil 3.9 daki gibi olur.



Şekil 3.7



Şekil 3.8

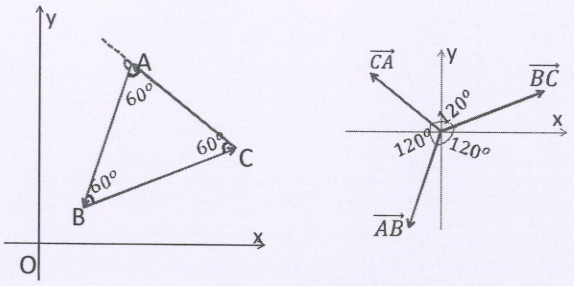


Şekil 3.9

$n > 8$ için n kenarlı hem Öklidyen hem de Taksi düzgün çokgenin olmadığı Teorem 3.5 de ifade edilmişti. O halde burada $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ için Öklidyen düzgün $n-$genlerin Taksi düzgünlüğü incelenmelidir. Bu inceleme, Çolakoğlu ve Kaya, 2009 çalışmasında yapılmıştır. Burada analitik 3−uzayda yapılan işlemlerin daha kolay alaşılması için bu düzgün $n-$genlerden bazılarına kısaca yer verilmiştir.

Düzgün Üçgen (Eşkenar üçgen)

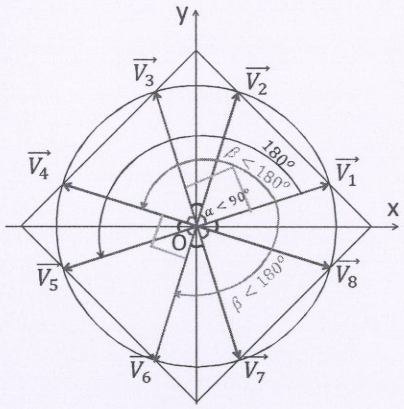
Analitik düzlemdeki herhangi bir ABC eşkenar üçgeninin (Şekil 3.10) kenarlarını oluşturan $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ vektörlerinin aralarındaki açı 120^o dir.



Şekil 3.10

Dolayısıyla Öklidyen bir ABC düzgün üçgeninin aynı zamanda Taksi düzgün üçgen olması için kenarlarını oluşturan $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ vektörleri Şekil 3.7, Şekil 3.8 veya Şekil 3.9 daki gibi orjin merkezli hem $d_E(A,B)$ yarıçaplı Öklidyen hem de $d_T(A,B)$ yarıçaplı Taksi çemberleri üzerinde olmalıdır. Öklidyen ve Taksi çemberinin Şekil 3.7, Şekil 3.8 ve Şekil 3.9 daki gibi üç farklı durumu vardır. Şekil 3.7 ve Şekil 3.8 deki vektörlerin arasındaki açılar 90^o olduğundan dolayı ABC üçgeninin kenarlarını oluşturamazlar. Şekil 3.9 daki vektörler incelenirse;

$\overrightarrow{V}_1$ vektörü ile $\overrightarrow{V}_2$ arasındaki açı $\alpha < 90^o$,
$\overrightarrow{V}_1$ vektörü ile $\overrightarrow{V}_3$ arasındaki açı 90^o,
$\overrightarrow{V}_1$ vektörü ile $\overrightarrow{V}_4$ arasındaki açı $\beta > 90^o$,
$\overrightarrow{V}_1$ vektörü ile $\overrightarrow{V}_5$ arasındaki açı 180^o,
$\overrightarrow{V}_1$ vektörü ile $\overrightarrow{V}_6$ arasındaki açı $\beta > 90^o$
$\overrightarrow{V}_1$ vektörü ile $\overrightarrow{V}_7$ arasındaki açı 90^o,
$\overrightarrow{V}_1$ vektörü ile $\overrightarrow{V}_8$ arasındaki açı 90^o den küçüktür.

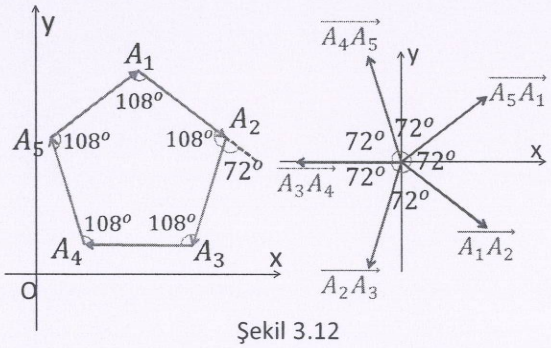


Şekil 3.11

ABC üçgeninin kenarlarını oluşturan vektörlerden biri $\overrightarrow{V}_1$ olsun. $\overrightarrow{V}_1$ vektörünü birinci vektör kabul edersek, iki vektör arasındaki açı 120^o olduğundan diğer vektörlerden biri $\overrightarrow{V}_4$ diğeride $\overrightarrow{V}_6$ olmak zorundadır. Çünkü 120^o geniş açıdır ve $\overrightarrow{V}_1$ vektörüyle arasında geniş açı olan vektörler sadece $\overrightarrow{V}_4$ ve $\overrightarrow{V}_6$ dır. Fakat $\overrightarrow{V}_4$ vektörü ile $\overrightarrow{V}_6$ vektörü arasındaki açı 90^o dir. Bu durumda $\overrightarrow{V}_1, \overrightarrow{V}_4$ ve $\overrightarrow{V}_6$ vektörleri hem Öklidyen hemde Taksi düzgün üçgenin kenarlarını oluşturamazlar. Benzer işlemlerle $2 \leq i \leq 8$ için $\overrightarrow{V}_i$ vektörleri sırayla başlangıç vektörü olarak alındığında da aralarındaki açı 120^o olan 3 vektörün olmadığı kolayca görülebilir. Dolayısıyla hem Öklidyen hemde Taksi düzgün üçgen yoktur.

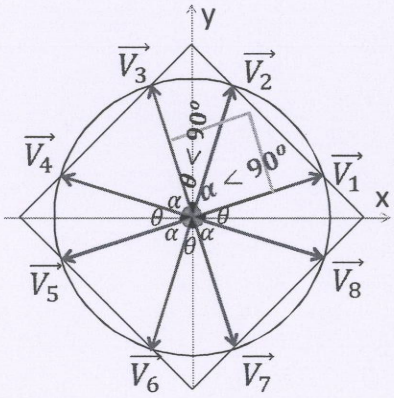
Düzgün Beşgen

Analitik düzlemdeki herhangi bir $A_1A_2A_3A_4A_5$ düzgün beşgenin (Şekil 3.12) kenarlarını oluşturan $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_3A_4}, \overrightarrow{A_4A_5}, \overrightarrow{A_5A_1}$ vektörlerinin aralarındaki açı 72^o dir.



Şekil 3.12

Dolayısıyla Öklidyen bir $A_1A_2A_3A_4A_5$ düzgün 5−genin aynı zamanda Taksi düzgün 5−gen olması için kenarlarını oluşturan $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_3A_4}, \overrightarrow{A_4A_5}, \overrightarrow{A_5A_1}$ vektörler Şekil 3.7, Şekil 3.8 veya Şekil 3.9 daki gibi orijin merkezli hem $d_E(A_1, A_2)$ yarıçaplı Öklidyen hem de $d_T(A_1, A_2)$ yarıçaplı Taksi çemberleri üzerinde olmalıdır. Öklidyen ve Taksi çemberinin Şekil 3.7, Şekil 3.8 ve Şekil 3.9 daki gibi üç farklı durumu vardır. Şekil 3.7 ve Şekil 3.8 deki vektörlerin arasındaki açılar 90^o olduğundan dolayı $A_1A_2A_3A_4A_5$ düzgün beşgenin kenarlarını oluşturamazlar. Şekil 3.9 daki vektörler incelenirse;



Şekil 3.13

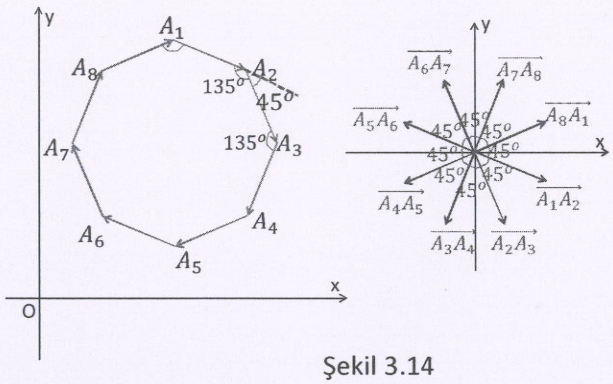
Şekil 3.13 de de görüldüğü üzere;

$\overrightarrow{V}_1$ vektörü ile $\overrightarrow{V}_2$ arasındaki açı $\alpha < 90^o$,

$\overrightarrow{V}_1$ vektörü ile $\overrightarrow{V}_3$ arasındaki açı $\theta < 90^o$ olmak üzere $\alpha + \theta = 90^o$ dir. Dolayısıyla $\alpha = 72^o$ olduğunda $\theta = 18^o$ olur. Bu durumda aralarındaki açı 72^o olan beş vektör elde edilemez. Dolayısıyla hem Öklidyen hemde Taksi düzgün beşgen yoktur.

Düzgün Sekizgen

Analitik düzlemdeki herhangi bir $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ düzgün sekizgenin (Şekil 3.14) kenarlarını oluşturan $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_3A_4}, \overrightarrow{A_4A_5}, \overrightarrow{A_5A_6}, \overrightarrow{A_6A_7}, \overrightarrow{A_7A_8}, \overrightarrow{A_8A_1}$ vektörlerinin ardışık olarak aralarındaki açı 45^o dir.

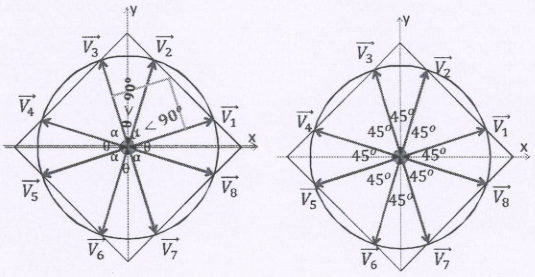


Şekil 3.14

Dolayısıyla Öklidyen bir $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ düzgün sekizgenin aynı zamanda Taksi düzgün sekizgen olması için kenarlarını oluşturan

$$\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_3A_4}, \overrightarrow{A_4A_5}, \overrightarrow{A_5A_6}, \overrightarrow{A_6A_7}, \overrightarrow{A_7A_8}, \overrightarrow{A_8A_1}$$

vektörler Şekil 3.7, Şekil 3.8 veya Şekil 3.9 daki gibi orijin merkezli hem $d_E(A_1, A_2)$ yarıçaplı Öklidyen hem de $d_T(A_1, A_2)$ yarıçaplı Taksi çemberleri üze- rinde olmalıdır. Öklidyen ve Taksi çemberinin Şekil 3.7, Şekil 3.8 ve Şekil 3.9 daki gibi üç farklı durumu vardır. Şekil 3.7 ve Şekil 3.8 deki vektörlerin arasındaki açılar 90^o olduğundan dolayı $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ düzgün sekizgenin kenarlarını oluşturamazlar. Şekil 3.9 daki vektörler incelenirse;



Şekil 3.15

Şekil 3.15 de de görüldüğü üzere;

$\overrightarrow{V}_1$ vektörü ile $\overrightarrow{V}_2$ arasındaki açı $\alpha < 90^o$,

$\overrightarrow{V}_1$ vektörü ile $\overrightarrow{V}_3$ arasındaki açı $\theta < 90^o$ olmak üzere $\alpha + \theta = 90^o$ dir. Dolayısıyla $\alpha = 45^o$ olduğunda $\theta = 45^o$ olur. Bu durumda aralarındaki açı 45^o olan sekiz vektör elde edilir. $1 \leq i \leq 8$ için $\overrightarrow{V_i}$ vektörlerinin Öklidyen uzunlukları

eşit, Taksi uzunlukları eşit ve aralarındaki açı 45^o dir. Dolayısıyla bu vektörlerin uç uca birleştirilmeleriyle elde edilen sekizgen hem Öklidyen hem de Taksi düzgün sekizgendir.

3.2 Analitik 3-Uzayda Öklidyen Düzgün Çokgenlerin Taksi Düzgünlüğü

Öklidyen ve Taksi geometride açı ölçümü aynı yolla yapıldığından bir Öklidyen düzgün çokgenin aynı zamanda Taksi düzgün çokgen olması için gerek ve yeter koşul çokgenin Taksi eşkenarlı olmasıdır.

Teorem 3.6: Analitik 3−uzayda $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 3$ için n kenarlı $A_1A_2...A_n$ Öklidyen düzgün çokgenin kenarlarının oluşturduğu vektörler kümesi
$W = \{\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}, ..., \overrightarrow{A_nA_1}\}$ olmak üzere;

$A_1A_2...A_n$ nin aynı zamanda Taksi düzgün çokgen olması için gerek ve yeter şart
$d_E(A_i, A_j) \neq d_T(A_i, A_j)$ iken $|i-j| = 1$ veya $|i-j| = n-1$, $1 \leq i, j \leq n$ olmak üzere;

$S_1 = \{(x,y,z) \mid (0 \leq x,y,z \leq d_T(A_i,A_j))$ için $\left(x - \frac{d_T(A_i,A_j)}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{d_T(A_i,A_j)}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{d_T(A_i,A_j)}{3}\right)^2 = \frac{3d_E(A_i,A_j)^2 - d_T(A_i,A_j)^2}{3}$ ve $x+y+z = d_T(A_i,A_j)$;

$(0 \leq x,z \leq d_T(A_i,A_j)$ ve $-d_T(A_i,A_j) \leq y \leq 0)$ için $\left(x - \frac{d_T(A_i,A_j)}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{d_T(A_i,A_j)}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{d_T(A_i,A_j)}{3}\right)^2 = \frac{3d_E(A_i,A_j)^2 - d_T(A_i,A_j)^2}{3}$ ve $x-y+z = d_T(A_i,A_j)$;

$(0 \leq z \leq d_T(A_i,A_j)$ ve $-d_T(A_i,A_j) \leq x,y \leq 0)$ için $\left(x + \frac{d_T(A_i,A_j)}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{d_T(A_i,A_j)}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{d_T(A_i,A_j)}{3}\right)^2 = \frac{3d_E(A_i,A_j)^2 - d_T(A_i,A_j)^2}{3}$ ve $-x-y+z = d_T(A_i,A_j)$;

$(0 \leq y,z \leq d_T(A_i,A_j)$ ve $-d_T(A_i,A_j) \leq x \leq 0)$ için $\left(x + \frac{d_T(A_i,A_j)}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{d_T(A_i,A_j)}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{d_T(A_i,A_j)}{3}\right)^2 = \frac{3d_E(A_i,A_j)^2 - d_T(A_i,A_j)^2}{3}$ ve $-x+y+z = d_T(A_i,A_j)$;

$(0 \leq x, y \leq d_T(A_i, A_j)$ ve $-d_T(A_i, A_j) \leq z \leq 0)$ için $\left(x - \frac{d_T(A_i,A_j)}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{d_T(A_i,A_j)}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{d_T(A_i,A_j)}{3}\right)^2 = \frac{3d_E(A_i,A_j)^2 - d_T(A_i,A_j)^2}{3}$ ve $x + y - z = d_T(A_i, A_j)$;

$(0 \leq x \leq d_T(A_i, A_j)$ ve $-d_T(A_i, A_j) \leq y, z \leq 0)$ için $\left(x - \frac{d_T(A_i,A_j)}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{d_T(A_i,A_j)}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{d_T(A_i,A_j)}{3}\right)^2 = \frac{3d_E(A_i,A_j)^2 - d_T(A_i,A_j)^2}{3}$ ve $x - y - z = d_T(A_i, A_j)$;

$(-d_T(A_i, A_j) \leq x, y, z \leq 0)$ için $\left(x + \frac{d_T(A_i,A_j)}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{d_T(A_i,A_j)}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{d_T(A_i,A_j)}{3}\right)^2 = \frac{3d_E(A_i,A_j)^2 - d_T(A_i,A_j)^2}{3}$ ve $-x - y - z = d_T(A_i, A_j)$;

$(0 \leq y \leq d_T(A_i, A_j)$ ve $-d_T(A_i, A_j) \leq x, z \leq 0)$ için $\left(x + \frac{d_T(A_i,A_j)}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{d_T(A_i,A_j)}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{d_T(A_i,A_j)}{3}\right)^2 = \frac{3d_E(A_i,A_j)^2 - d_T(A_i,A_j)^2}{3}$ ve $-x + y - z = d_T(A_i, A_j)\}$

$d_E(A_i, A_j) = d_T(A_i, A_j)$ iken;

$S_2 = \{(\pm d_T(A_i, A_j), 0, 0), (0, \pm d_T(A_i, A_j), 0), (0, 0, \pm d_T(A_i, A_j)),\ |i - j| = 1$ veya $|i - j| = n - 1,\ 1 \leq i, j \leq n\}$ olmak üzere

$W \subset S_1 \cup S_2$ olmasıdır.

İspat: $(\Longrightarrow)$ $A_1A_2...A_n$ analitik 3−uzayda n−kenarlı Öklidyen ve Taksi düzgün çokgen olsun.

$A_i = (a_i, b_i, c_i)$, $A_j = (a_j, b_j, c_j)$, $|i - j| = 1$ veya $|i - j| = n - 1, 1 \leq i, j \leq n$ için $\overrightarrow{A_iA_j} = (a_j - a_i, b_j - b_i, c_j - c_i)$ olmak üzere

$d_E(A_1, A_2) = d_E(A_2, A_3) = ... = d_E(A_n, A_1)$ ve

$d_T(A_1, A_2) = d_T(A_2, A_3) = ... = d_T(A_n, A_1)$ dir.

Teorem 2.13 gereği analitik 3−uzayda $[OA]$ doğru parçası için

$$d_E(O, A) = d_E(O, B) \text{ ve } d_T(O, A) = d_T(O, B)$$

olacak şekilde $[OB]$ doğru parçalarının geometrik yerleri;

$d_E(O,A) \neq d_T(O,A)$ iken;
$B \in S_1 = \{(x,y,z) \mid (0 \leq x,y,z \leq d_T(O,A))$ için $\left(x - \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2$
$+ \left(z - \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2 = \frac{3d_E(O,A)^2 - d_T(O,A)^2}{3}$ ve $x+y+z = d_T(O,A)$;

$(0 \leq x,z \leq d_T(O,A)$ ve $-d_T(O,A) \leq y \leq 0)$ için $\left(x - \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2$
$+ \left(z - \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2 = \frac{3d_E(O,A)^2 - d_T(O,A)^2}{3}$ ve $x-y+z = d_T(O,A)$;

$(0 \leq z \leq d_T(O,A)$ ve $-d_T(O,A) \leq x,y \leq 0)$ için $\left(x + \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2$
$+ \left(z - \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2 = \frac{3d_E(O,A)^2 - d_T(O,A)^2}{3}$ ve $-x-y+z = d_T(O,A)$;

$(0 \leq y,z \leq d_T(O,A)$ ve $-d_T(O,A) \leq x \leq 0)$ için $\left(x + \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2$
$+ \left(z - \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2 = \frac{3d_E(O,A)^2 - d_T(O,A)^2}{3}$ ve $-x+y+z = d_T(O,A)$;

$(0 \leq x,y \leq d_T(O,A)$ ve $-d_T(O,A) \leq z \leq 0)$ için $\left(x - \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2$
$+ \left(z + \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2 = \frac{3d_E(O,A)^2 - d_T(O,A)^2}{3}$ ve $x+y-z = d_T(O,A)$;

$(0 \leq x \leq d_T(O,A)$ ve $-d_T(O,A) \leq y,z \leq 0)$ için $\left(x - \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2$
$+ \left(z + \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2 = \frac{3d_E(O,A)^2 - d_T(O,A)^2}{3}$ ve $x-y-z = d_T(O,A)$;

$(-d_T(O,A) \leq x,y,z \leq 0)$ için $\left(x + \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2 =$
$\frac{3d_E(O,A)^2 - d_T(O,A)^2}{3}$ ve $-x-y-z = d_T(O,A)$;

$(0 \leq y \leq d_T(O,A)$ ve $-d_T(O,A) \leq x,z \leq 0)$ için $\left(x + \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2$

$$+\left(z+\frac{d_T(O,A)}{3}\right)^2=\frac{3d_E(O,A)^2-d_T(O,A)^2}{3} \text{ ve } -x+y-z=d_T(O,A)\}$$

$d_E(O,A)=d_T(O,A)$ iken;
$B\in S_2=\{(\pm d_T(O,A),0,0)\ ,(0,\pm d_T(O,A),0),(0,0,\pm d_T(O,A))\}$ dir.

Buradan, Teorem 2.13 deki A noktası için $A=(a_j-a_i,b_j-b_i,c_j-c_i)$ alınırsa $d_T(O,A)=d_T(A_i,A_j)$ olur ve $|i-j|=1$ *veya* $|i-j|=n-1$,
$1\leq i,j\leq n$ için $\overrightarrow{A_iA_j}\in S_1\cup S_2$ olur. Dolayısıyla $W\subset S_1\cup S_2$ dir.

$(\Longleftarrow)$ $n\in\mathbb{Z}^+$, $n\geq 3$ ve $1\leq i,j\leq n$, $A_i=(a_i,b_i,c_i)$ için $A_1A_2...A_n$ analitik 3−uzayda n kenarlı Öklidyen düzgün çokgenin kenarlarının oluşturduğu vektörler $W=\{\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_2A_3},...\overrightarrow{A_nA_1}\}$ olmak üzere $W\subset S_1\cup S_2$ olsun. Teorem 2.13 gereği $d_T(A_1,A_2)=d_T(A_2,A_3)=...=d_T(A_n,A_1)$ dir. Dolayısıyla $A_1A_2...A_n$ aynı zamanda Taksi düzgün çokgendir.■

3.2.1 Öklidyen Küre, Taksi Küre ve Bir Düzlemin Ortak Noktaları

Bilindiği üzere çokgenler düzlemseldir. Dolayısıyla herhangi bir Öklidyen ve Taksi düzgün çokgenin kenarlarını oluşturan vektörlerin uç noktaları Öklidyen küre ve Taksi küre üzerinde olmalı ve ayrıca bu vektörler orijinden geçen bir düzlemin içinde olmalıdır. Orijinden geçen düzlem ile çokgenin içinde bulunduğu düzlem paralel düzlemlerdir. Orijinden geçen düzlemlerin genel denklemi $a,b,c\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$ax+by+cz=0$$

şeklindedir.

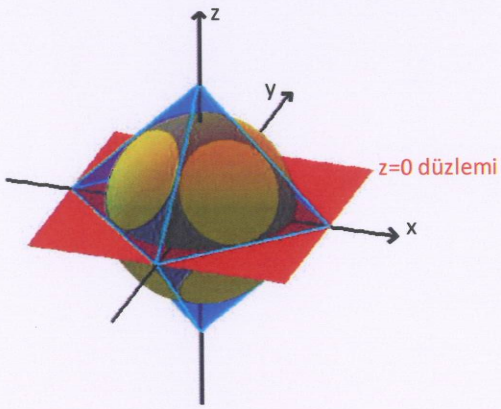
Bu denklem a,b ve c nin alabileceği değerlere göre üç durumda incelenebilir.

I. Durum:

$$a \neq 0, b = 0, c = 0 \quad \text{için} \quad x = 0$$
$$a = 0, b \neq 0, c = 0 \quad \text{için} \quad y = 0$$
$$a = 0, b = 0, c \neq 0 \quad \text{için} \quad z = 0$$

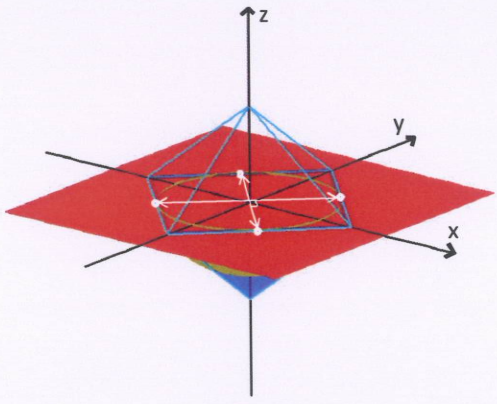
düzlemleri elde edilir.

Genel olarak $ABC...$ ile ifade edilen bir Öklidyen düzgün $n-$gen için orjin merkezli $d_E(A,B)$ yarıçaplı Öklidyen küre, orjin merkezli $d_T(A,B)$ yarıçaplı Taksi küre ve $x = 0, y = 0, z = 0$ düzlemlerinden birinin ortak grafiği Şekil 3.16 gibidir.



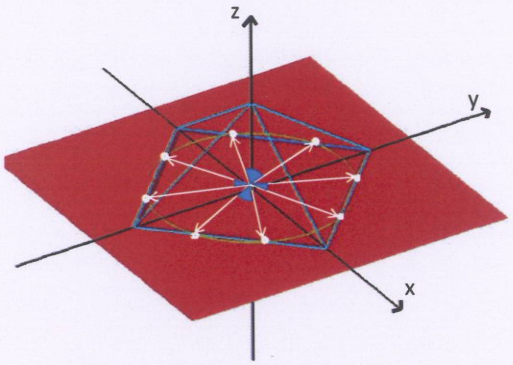
Şekil 3.16

Alt durum 1: $d_E(A,B) = \frac{1}{\sqrt{2}} d_T(A,B)$ olduğunda Öklidyen küre, Taksi küre ve $z = 0$ düzleminin Şekil 3.17 de görüldüğü gibi dört ortak noktası vardır.



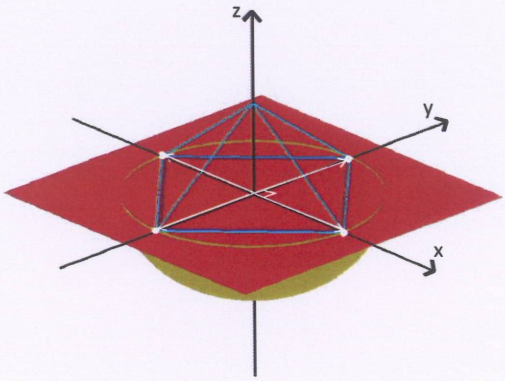
Şekil 3.17

Alt durum 2: $\frac{1}{\sqrt{2}}d_T(A,B) < d_E(A,B) < d_T(A,B)$ olduğunda Öklidyen küre, Taksi küre ve $z = 0$ düzleminin Şekil 3.18 de görüldüğü gibi sekiz ortak noktası vardır.



Şekil 3.18

Alt durum 3: $d_E(A,B) = d_T(A,B)$ olduğunda Öklidyen küre, Taksi küre ve $z = 0$ düzleminin Şekil 3.19 da görüldüğü gibi dört ortak noktası vardır.



Şekil 3.19

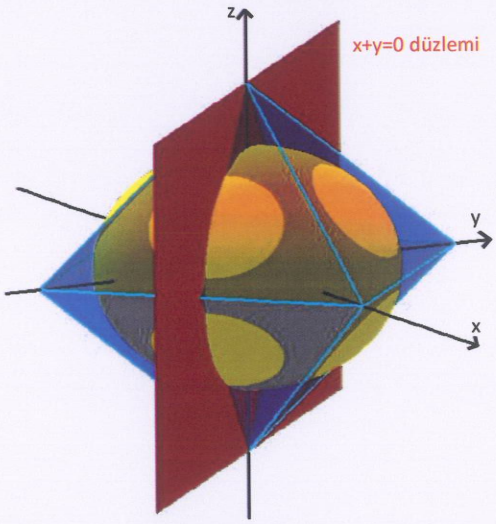
Kısaca $x = 0, y = 0, z = 0$ düzlemleri ile en fazla sekiz ortak nokta elde edilebilir.

II. Durum:

$$a \neq 0, b \neq 0, c = 0 \quad \text{için} \quad ax + by = 0$$
$$a \neq 0, b = 0, c \neq 0 \quad \text{için} \quad ax + cz = 0$$
$$a = 0, b \neq 0, c \neq 0 \quad \text{için} \quad by + cz = 0$$

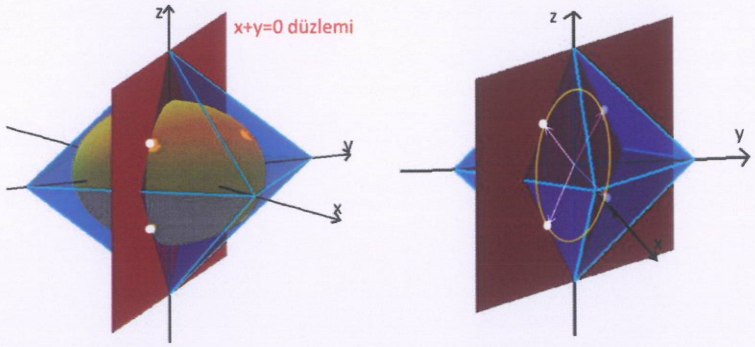
düzlemleri elde edilir.

Genel olarak $ABC...$ ile ifade edilen bir Öklidyen düzgün $n-$gen için orjin merkezli $d_E(A,B)$ yarıçaplı Öklidyen küre, orjin merkezli $d_T(A,B)$ yarıçaplı Taksi küre ve $ax + by = 0, ax + cz = 0, by + cz = 0$ düzlemlerinden birinin ortak grafiği Şekil 3.20 gibidir.



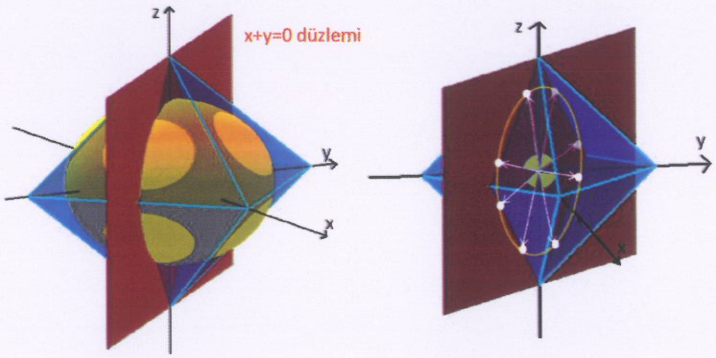
Şekil 3. 20

Alt durum 1: $d_E(A,B) = \frac{1}{\sqrt{3}} d_T(A,B)$ olduğunda Öklidyen küre, Taksi küre ve $x + y = 0$ düzleminin Şekil 3.21 de görüldüğü gibi dört ortak noktası vardır.



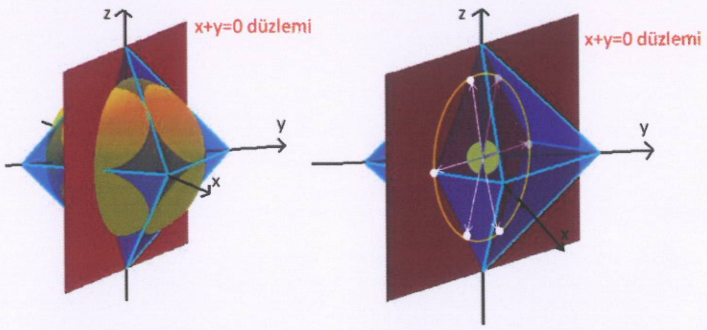
Şekil 3.21

Alt durum 2: $\frac{1}{\sqrt{3}}d_T(A,B) < d_E(A,B) < \frac{1}{\sqrt{2}}d_T(A,B)$ olduğunda Öklidyen küre, Taksi küre ve $x+y=0$ düzleminin Şekil 3.22 de görüldüğü gibi sekiz ortak noktası vardır.



Şekil 3. 22

Alt durum 3: $d_E(A,B) = \frac{1}{\sqrt{2}}d_T(A,B)$ olduğunda Öklidyen küre, Taksi küre ve $x+y=0$ düzleminin Şekil 3.23 da görüldüğü gibi altı ortak noktası vardır.



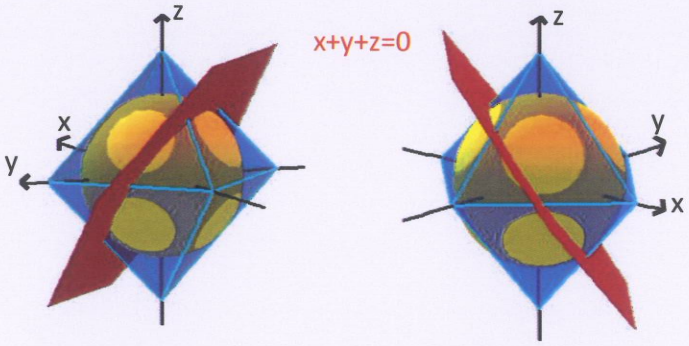
Şekil 3. 23

Kısaca $ax+by=0, ax+cz=0, by+cz=0$ düzlemleri ile en fazla 8 ortak nokta elde edilebilir.

III. Durum:

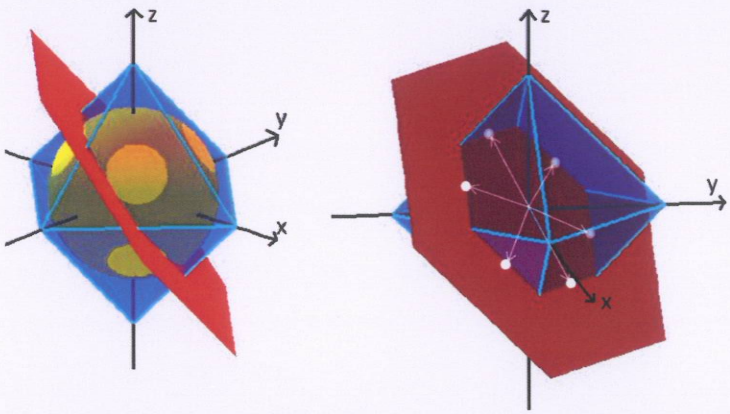
$a \cdot b \cdot c \neq 0$ için $ax+by+cz=0$ düzlemleri bulunur.

Genel olarak $ABC...$ ile ifade edilen bir Öklidyen düzgün $n-$gen için orijin merkezli $d_E(A,B)$ yarıçaplı Öklidyen küre, orijin merkezli $d_T(A,B)$ yarıçaplı Taksi küre ve $ax+by+cz=0$ düzlemlerinden birinin ortak grafiği Şekil 3.24 gibidir.

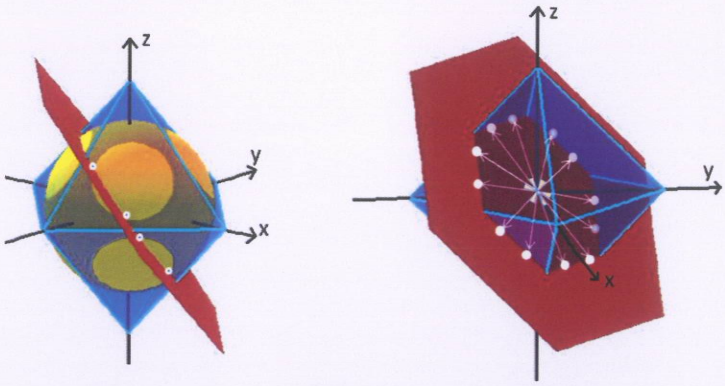


Şekil 3. 24

Alt durum 1: $\frac{1}{\sqrt{3}}d_T(A,B) < d_E(A,B) < \frac{1}{\sqrt{2}}d_T(A,B)$ olduğunda Öklidyen küre, Taksi küre ve $x+y+z=0$ düzleminin Şekil 3.25 ve Şekil 3.26 da görüldüğü gibi altı yada oniki ortak noktası vardır.

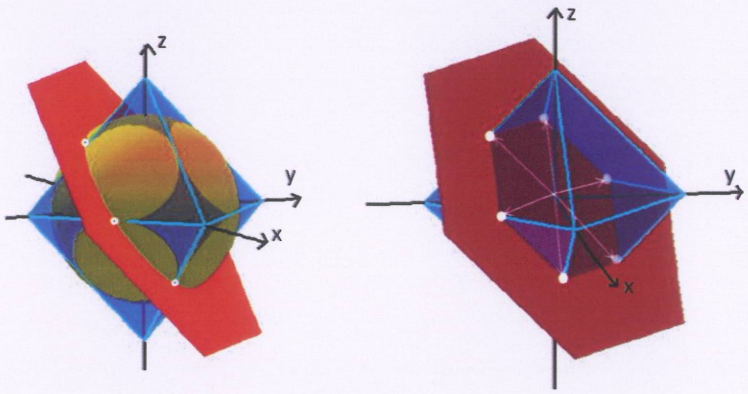


Şekil 3. 25



Şekil 3. 26

Alt durum 2: $d_E(A,B) = \frac{1}{\sqrt{2}} d_T(A,B)$ olduğunda Öklidyen küre, Taksi küre ve $x+y+z=0$ düzleminin Şekil 3.27 de görüldüğü gibi altı ortak noktası vardır.



Şekil 3. 27

Yukarıda $ax+by+cz=0$ düzlemlerinden $a=b=c=1$ için özel bir durumu çalışıldı. $a,b,c \in R$ olduğundan a,b,c nin diğer değerlerinde düzlem ile Taksi ve Öklid küresinin ortak noktalarının sayısı ve yerleri değişecektir. Kısaca $a.b.c \neq 0$ olmak üzere $ax+by+cz=0$ düzlemleri ile en fazla 12 ortak nokta elde edilebilir.

Ayrıca Öklidyen düzgün çokgenlerin hangilerinin aynı zamanda Taksi düzgün çokgen olduğunu tespit etmemizde düzgün çokgenlerin simetri düzlemlerinden de faydalanabiliriz.

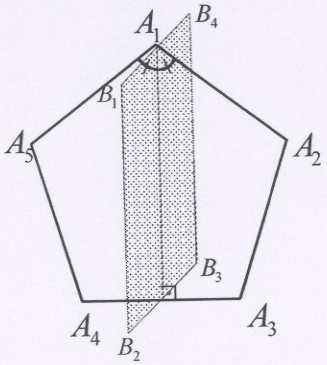
3.3 Düzgün Çokgenlerin Simetri Düzlemleri

Tanım 3.7: $\mathbb{R}^3$ de herhangi bir düzgün çokgen için;

(i) Bir düzgün $(2n-1)-$genin üzerinde bulunduğu düzleme dik, düzgün $(2n-1)-$genin bir köşesi ve bu köşenin karşısındaki kenarın orta noktasından geçen düzleme $(2n-1)-$genin bir *simetri düzlemi* denir.

(ii) Bir düzgün $2n-$genin üzerinde bulunduğu düzleme dik ve $2n-$genin karşılıklı iki köşesinden geçen veya karşılıklı kenarların orta noktalarından geçen düzleme düzgün $2n-$genin bir *simetri düzlemi* denir.

Kenar sayısı tek olan düzgün çokgenler için simetri düzlemi;

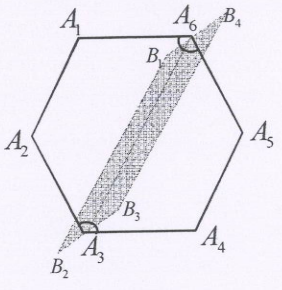


Şekil 3.28

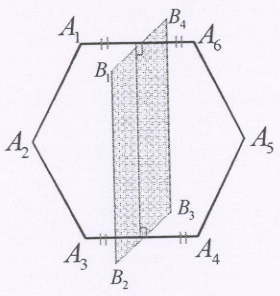
$A_1A_2A_3A_4A_5$ düzgün beşgenin üzerinde bulunduğu düzleme dik, düzgün beşgenin bir köşesi ve bu köşenin karşısındaki kenarın orta noktasından geçen $B_1B_2B_3B_4$ düzlemine düzgün beşgenin *simetri düzlemi* denir.

Bu simetri düzlemi "**TSD**" yani kenar sayısı **T**ek olan olan düzgün çokgenlerin **S**imetri **D**üzlemi şeklinde adlandırılsın.

Kenar sayısı çift olan düzgün çokgenler için simetri düzlemi;



Şekil 3.29



Şekil 3.30

$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ düzgün altıgenin üzerinde bulunduğu düzleme dik, altıgenin karşılıklı iki köşesinden veya karşılıklı kenarların orta noktalarından geçen $B_1B_2B_3B_4$ düzlemine düzgün altıgenin simetri düzlemi denir.

Bu simetri düzlemi;

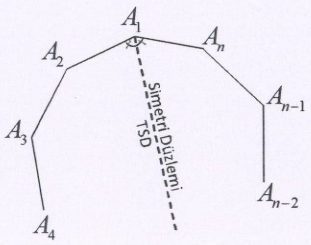
"ÇKSD" yani kenar sayısı **Ç**ift olan olan düzgün çokgenlerin karşılıklı **K**öşelerinden geçen **S**imetri **D**üzlemi şeklinde,

"ÇOSD" yani kenar sayısı **Ç**ift olan olan düzgün çokgenlerin karşılıklı kenarların **O**rta noktalarından geçen **S**imetri **D**üzlemi şeklinde adlandırılsın.

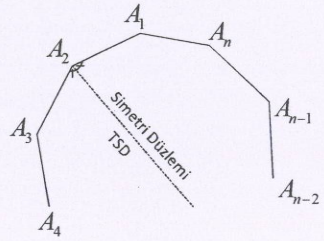
Teorem 3.8: $\mathbb{R}^3$ de Öklidyen herhangi bir düzgün çokgenin, en az bir tanesi çokgenin köşesinden geçmek üzere, ardışık iki simetri düzlemi $1 \leq i \leq 6$ ve $i \in \mathbb{R}$ için $x \mp y = k_1$, $x \mp z = k_2$, $y \mp z = k_3$, $x = k_4$, $y = k_5$, $z = k_6$ düzlemlerinden oluşuyorsa bu Öklidyen düzgün çokgen aynı zamanda Taksi düzgün çokgendir.

İspat: $\mathbb{R}^3$ de herhangi bir Öklidyen düzgün çokgen n kenarlı olsun. Bu durumda n kenar sayısının tek veya çift olmasına göre iki durumda inceleme yapılacaktır.

I. Durum: n tek sayı olsun.



Şekil 3.31



Şekil 3.32

Düzgün çokgenin ardışık A_1 ve A_2 köşelerinden geçen simetri düzlemleri $x \mp y = k_1$, $x \mp z = k_2$, $y \mp z = k_3$, $x = k_4$, $y = k_5$, $z = k_6$ düzlemlerinden herhangi ikisi Şekil 3.31 ve Şekil 3.32 deki gibi olsun.

A_1 köşesinden geçen TSD n-kenarlı Öklidyen düzgün çokgeni simetrik iki parçaya ayırır. Sonuç 1.2 gereğince $x \mp y = k_1$, $x \mp z = k_2$, $y \mp z = k_3$, $x = k_4$, $y = k_5$,

$z = k_6$ düzlemlerine göre simetrik doğru parçalarının Taksi uzunlukları da eşittir. Buradan,

$$d_T(A_1, A_2) = d_T(A_1, A_n)$$
$$d_T(A_2, A_3) = d_T(A_n, A_{n-1})$$
$$d_T(A_3, A_4) = d_T(A_{n-1}, A_{n-2})$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$d_T(A_{\frac{n-1}{2}}, A_{\frac{n+1}{2}}) = d_T(A_{\frac{n+5}{2}}, A_{\frac{n+3}{2}})$$

eşitlikleri elde edilir.

Benzer şekilde A_2 köşelerinden geçen TSD içinde Sonuç 1.2 gereğince $x \mp y = k_1$, $x \mp z = k_2$, $y \mp z = k_3$, $x = k_4$, $y = k_5$, $z = k_6$ düzlemlerine göre simetrik doğru parçalarının Taksi uzunlukları eşittir. Böylece,

$$d_T(A_2, A_3) = d_T(A_2, A_1)$$
$$d_T(A_3, A_4) = d_T(A_1, A_n)$$
$$d_T(A_4, A_5) = d_T(A_n, A_{n-1})$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$d_T(A_{\frac{n+1}{2}}, A_{\frac{n+3}{2}}) = d_T(A_{\frac{n+7}{2}}, A_{\frac{n+5}{2}})$$

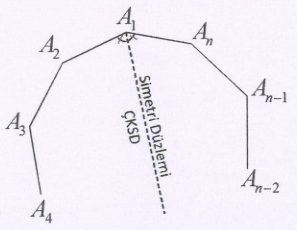
eşitlikleri elde edilir. Eşitlikler birlikte değerlendirildiğinde

$$d_T(A_1, A_2) = d_T(A_2, A_3) = d_T(A_3, A_4) = \cdots = d_T(A_{n-1}, A_n) = d_T(A_n, A_1)$$

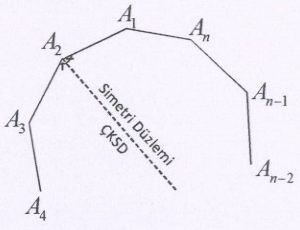
olduğu görülür. Ayrıca açı ölçümü Öklidyen halle aynı yapıldığından çokgenin tüm iç açıları eşittir. Yani Öklidyen $n-$kenarlı düzgün çokgen aynı zamanda Taksi düzgün çokgendir.

II. Durum: n kenar sayısı çift olsun. Bu durum çokgenin ardışık iki simetri düzleminin ÇKSD veya ÇOSD olmasına göre üç alt durumda incelenecektir.

Alt Durum 1: Ardışık iki simetri düzlemi de ÇKSD olsun.



Şekil 3.33



Şekil 3.34

Düzgün çokgenin Şekil 3.33 ve Şekil 3.34 deki gibi ardışık A_1 ve A_2 köşelerinden geçen simetri düzlemleri $x \mp y = k_1$, $x \mp z = k_2$, $y \mp z = k_3$, $x = k_4$, $y = k_5$, $z = k_6$ düzlemlerinden herhangi ikisi olsun.

A_1 köşesinden geçen ÇKSD $n-$kenarlı Öklidyen düzgün çokgeni simetrik iki parçaya ayırır. Sonuç 1.26 gereğince $x \mp y = k_1$, $x \mp z = k_2$, $y \mp z = k_3$, $x = k_4$, $y = k_5$, $z = k_6$ düzlemlerine göre simetrik doğru parçalarının Taksi uzunlukları eşittir. Dolayısıyla,

$$d_T(A_1, A_2) = d_T(A_1, A_n)$$
$$d_T(A_2, A_3) = d_T(A_n, A_{n-1})$$
$$d_T(A_3, A_4) = d_T(A_{n-1}, A_{n-2})$$
$$\vdots$$
$$d_T(A_{\frac{n}{2}}, A_{\frac{n+2}{2}}) = d_T(A_{\frac{n+4}{2}}, A_{\frac{n+2}{2}})$$

olur.

Benzer şekilde A_2 köşesinden geçen ÇKSD içinde Sonuç 1.26 gereğince $x \mp y = k_1$, $x \mp z = k_2$, $y \mp z = k_3$, $x = k_4$, $y = k_5$, $z = k_6$ düzlemlerine göre simetrik doğru parçalarının Taksi uzunlukları eşittir. Buradan,

$$d_T(A_2, A_3) = d_T(A_2, A_1)$$
$$d_T(A_3, A_4) = d_T(A_1, A_n)$$
$$d_T(A_4, A_5) = d_T(A_n, A_{n-1})$$
$$\vdots$$

.

.

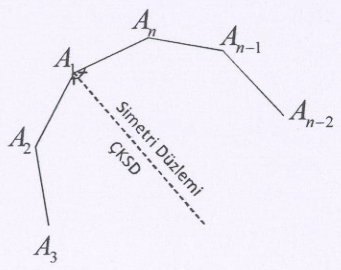
$d_T(A_{\frac{n+2}{2}}, A_{\frac{n+4}{2}}) = d_T(A_{\frac{n+6}{2}}, A_{\frac{n+4}{2}})$

olur. Eşitlikler birlikte değerlendirildiğinde

$$d_T(A_1, A_2) = d_T(A_2, A_3) = d_T(A_3, A_4) = \cdots = d_T(A_{n-1}, A_n) = d_T(A_n, A_1)$$

olduğu görülür. Ayrıca açı ölçümü Öklidyen halle aynı yapıldığından çokgenin tüm iç açıları eşittir. Yani Öklidyen n-kenarlı düzgün çokgen aynı zamanda Taksi düzgün çokgendir.

Alt Durum 2: Ardışık iki simetri düzleminin birisi ÇKSD, diğeri ÇOSD olsun.



Şekil 3.35

Düzgün çokgenin A_1 köşesinden geçen simetri düzlemi $x \mp y = k_1$, $x \mp z = k_2$, $y \mp z = k_3$, $x = k_4$, $y = k_5$, $z = k_6$ düzlemlerinden herhangi birisi Şekil 3.35 deki gibi olsun.

A_1 köşesinden geçen ÇKSD $n-$kenarlı Öklidyen düzgün çokgeni simetrik iki parçaya ayırır. Sonuç 1.26 gereğince $x \mp y = k_1$, $x \mp z = k_2$, $y \mp z = k_3$, $x = k_4$, $y = k_5$, $z = k_6$ düzlemlerine göre simetrik doğru parçalarının Taksi uzunlukları eşittir. Bu durumda,

$d_T(A_1, A_2) = d_T(A_1, A_n)$

$d_T(A_2, A_3) = d_T(A_n, A_{n-1})$

$d_T(A_3, A_4) = d_T(A_{n-1}, A_{n-2})$

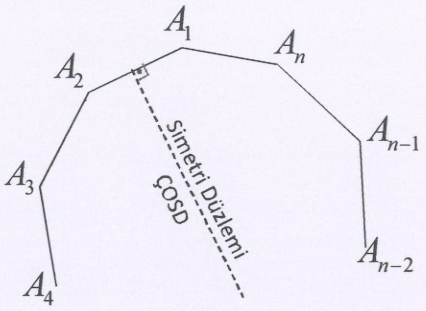
.

.

.

$d_T(A_{\frac{n}{2}}, A_{\frac{n+1}{2}}) = d_T(A_{\frac{n+4}{2}}, A_{\frac{n+2}{2}})$

eşitlikleri elde edilir.



Şekil 3.36

$[A_1A_2]$ kenarının orta noktasından geçen ÇOSD $n-$kenarlı Öklidyen düzgün çokgeni simetrik iki parçaya ayırır. Sonuç 1.26 gereğince $x \mp y = k_1$, $x \mp z = k_2$, $y \mp z = k_3$, $x = k_4$, $y = k_5$, $z = k_6$ düzlemlerine göre simetrik doğru parçalarının Taksi uzunlukları eşittir. Dolayısıyla,

$d_T(A_2, A_3) = d_T(A_1, A_n)$

$d_T(A_3, A_4) = d_T(A_n, A_{n-1})$

$d_T(A_4, A_5) = d_T(A_{n-1}, A_n)$

.

.

.

$d_T(A_{\frac{n}{2}}, A_{\frac{n+2}{2}}) = d_T(A_{\frac{n+6}{2}}, A_{\frac{n+4}{2}})$

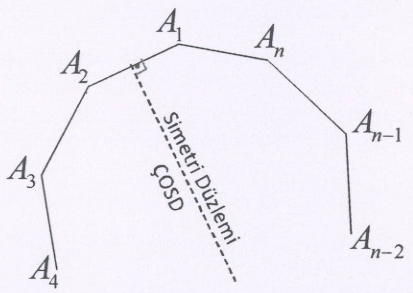
bulunur. Bu ifadelerden de

$$d_T(A_1, A_2) = d_T(A_2, A_3) = d_T(A_3, A_4) = \cdots = d_T(A_{n-1}, A_n) = d_T(A_n, A_1)$$

olduğu görülür.

Önceden de belirtildiği gibi, açı ölçümü Öklidyen halle aynı yapıldığından çokgenin tüm iç açıları eşittir. Dolayısıyla Öklidyen n-kenarlı düzgün çokgen aynı zamanda Taksi düzgün çokgendir.

Alt Durum 3: Ardışık iki simetri düzleminin ikiside ÇOSD olsun.



Şekil 3.37

$[A_1A_2]$ kenarının orta noktasından geçen ÇOSD $n-$kenarlı Öklidyen düzgün çokgeni simetrik iki parçaya ayırır. Sonuç 1.26 gereğince $x \mp y = k_1$, $x \mp z = k_2$, $y \mp z = k_3$, $x = k_4$, $y = k_5$, $z = k_6$ düzlemlerine göre simetrik doğru parçalarının Taksi uzunlukları eşittir. Böylece,

$d_T(A_2, A_3) = d_T(A_1, A_n)$

$d_T(A_3, A_4) = d_T(A_n, A_{n-1})$

$d_T(A_4, A_5) = d_T(A_{n-1}, A_{n-2})$

$d_T(A_5, A_6) = d_T(A_{n-2}, A_{n-3})$

$d_T(A_6, A_7) = d_T(A_{n-3}, A_{n-4})$

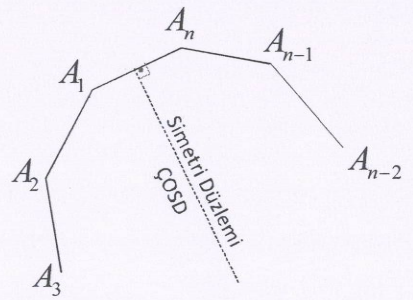
.

.

.

$d_T(A_{\frac{n}{2}}, A_{\frac{n+2}{2}}) = d_T(A_{\frac{n+6}{2}}, A_{\frac{n+4}{2}})$

olur.



Şekil 3.38

$[A_1A_n]$ kenarının orta noktasından geçen ÇOSD $n-$kenarlı Öklidyen düzgün çokgeni simetrik iki parçaya ayırır (Şekil 3.38). Sonuç 1.26 gereğince $x \mp y = k_1$, $x \mp z = k_2$, $y \mp z = k_3$, $x = k_4$, $y = k_5$, $z = k_6$ düzlemlerine göre simetrik doğru parçalarının Taksi uzunlukları eşittir. Dolayısıyla,

$d_T(A_1, A_2) = d_T(A_n, A_{n-1})$
$d_T(A_2, A_3) = d_T(A_{n-1}, A_{n-2})$
$d_T(A_3, A_4) = d_T(A_{n-2}, A_{n-3})$
$d_T(A_4, A_5) = d_T(A_{n-3}, A_{n-4})$
$d_T(A_5, A_6) = d_T(A_{n-4}, A_{n-5})$
$d_T(A_6, A_7) = d_T(A_{n-5}, A_{n-6})$
.
.
.
$d_T(A_{\frac{n-2}{2}}, A_{\frac{n}{2}}) = d_T(A_{\frac{n+4}{2}}, A_{\frac{n+2}{2}})$

elde edilir. Bu eşitliklerden bütün kenarların Taksi eşit uzunlukda olduğu elde edilemez. Yukarıdaki eşitlikleri $n = 8$ için tekrar yazacak olursak;

$[A_1A_2]$ nin orta noktasından geçen simetri düzlemi için
$d_T(A_2, A_3) = d_T(A_1, A_8)$
$d_T(A_3, A_4) = d_T(A_8, A_7)$
$d_T(A_4, A_5) = d_T(A_7, A_6)$

ve

$[A_1A_n]$ nin orta noktasından geçen simetri düzlemi için
$d_T(A_1, A_2) = d_T(A_8, A_7)$
$d_T(A_2, A_3) = d_T(A_7, A_6)$
$d_T(A_3, A_4) = d_T(A_6, A_5)$

olur. Bu eşitliklerden,

$$d_T(A_2, A_3) = d_T(A_1, A_8) = d_T(A_7, A_6) = d_T(A_4, A_5)$$

ve

$$d_T(A_1, A_2) = d_T(A_8, A_7) = d_T(A_3, A_4) = d_T(A_6, A_5)$$

eşitlikleri elde edilir. Fakat

$d_T(A_1, A_2) = d_T(A_2, A_3) = d_T(A_3, A_4) = d_T(A_4, A_5) = d_T(A_6, A_5) = d_T(A_7, A_6) = d_T(A_8, A_7) = d_T(A_1, A_8)$ elde edilemediğinden 8−genin bütün kenarlarının Taksi eşit uzunluklu olduğu ispatlanamamış oldu.

Dolayısıyla kenar sayısı çift olan çokgenlerde simetri eksenlerinin en az bir tanesi ÇKSD olmalıdır.■

Önerme 3.9: Analitik 3−uzayda $1 \leq i \leq 6$ ve $i \in \mathbb{R}$ için $x \mp y = k_1$, $x \mp z = k_2$, $y \mp z = k_3$, $x = k_4$, $y = k_5$, $z = k_6$ düzlemlerinin arasındaki açılar $45^o, 60^o$ ve 90^o dir.

İspat: $x \mp y = k_1$, $x \mp z = k_2$, $y \mp z = k_3$, $x = k_4$, $y = k_5$, $z = k_6$ düzlemlerinin normal vektörleri;

Düzlem	Normal vektörü
$x + y = k_1$	$\overrightarrow{V_1} = (1, 1, 0)$
$x + z = k_2$	$\overrightarrow{V_2} = (1, 0, 1)$
$y + z = k_3$	$\overrightarrow{V_3} = (0, 1, 1)$
$x - y = k_1$	$\overrightarrow{V_4} = (1, -1, 0)$
$x - z = k_2$	$\overrightarrow{V_5} = (1, 0, -1)$
$y - z = k_3$	$\overrightarrow{V_6} = (0, 1, -1)$
$x = k_4$	$\overrightarrow{V_7} = (1, 0, 0)$
$y = k_5$	$\overrightarrow{V_8} = (0, 1, 0)$
$z = k_6$	$\overrightarrow{V_9} = (0, 0, 1)$

dir.

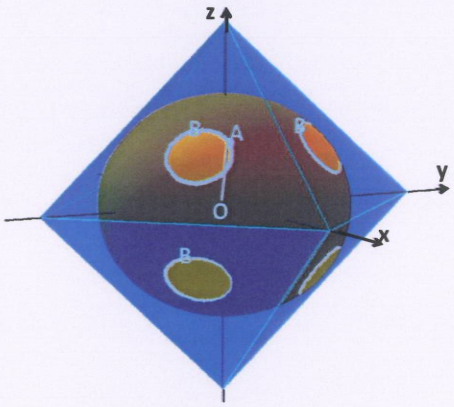
Bu durumda $\overrightarrow{V_1}$ vektörü ile $\overrightarrow{V_2}$ vektörü arasındaki açı α olsun.

$$cos\alpha = \frac{< \overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2} >}{\left\| \overrightarrow{V_1} \right\| \cdot \left\| \overrightarrow{V_2} \right\|} = \frac{1.1 + 1.0 + 0.1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}, \quad \alpha = 60^o \text{ dir.}$$

Benzer işlemlerle $1 \leq i, j \leq 9$ için $i, j \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\overrightarrow{V_i}$ ile $\overrightarrow{V_j}$ vektörlerinin aralarındaki açılar $45^o, 60^o$ ve 90^o dir.

Teorem 3.10: $n \in \mathbb{Z}^+$, $n > 12$ için analitik 3−uzayda n-kenarlı Öklidyen düzgün çokgenlerden aynı zamanda Taksi düzgün çokgen olan yoktur.

İspat: Analitik 3−uzayda düzgün çokgenlerin kenarları aynı düzlem üzerindedir. Ayrıca verilen bir $[OA]$ doğru parçasına Öklid ve Taksi uzunluğu eşit $[OB]$ doğru parçalarını oluşturan B noktalarının geometrik yerleri Taksi küresi (Öklidyen düzgün 8−yüzlü Şekil 3.39) üzerindeki 8 Öklidyen çemberin üzerindeki noktalardır.



Şekil 3.39

Bir düzlem, Taksi küre üzerindeki 8 çemberden en fazla 6 tanesini kesebilir. Çünkü, analitik 3−uzay x, y, z nin işaretlerine göre 8 bölgeden oluşur. Bunlar;

$(+,+,+), (+,+,-), (+,-,+), (-,+,+), (+,-,-), (-,+,-), (-,-,+), (-,-,-)$ dir.

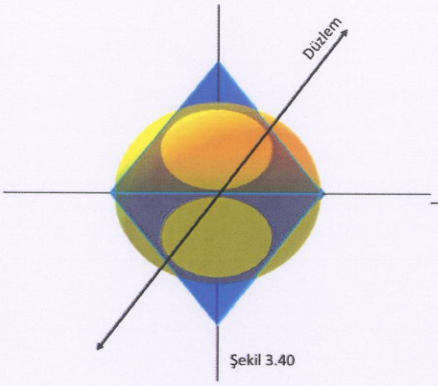
$\mathbb{R}^3$ de $a, b, c \in \mathbb{R}$ için orijinden geçen düzlemin genel denklemi

$$ax + by + cz = 0$$

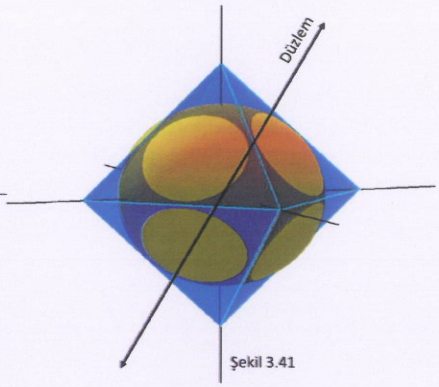
dır. Kabul edelimki $a, b, c > 0$ olsun. Bu durumda $x, y, z > 0$ için $ax+by+cz > 0$ ve $x, y, z < 0$ için $ax + by + cz < 0$ olur ve düzlem denklemini bu bölgelerde sağlayan nokta bulunamaz. a, b, c nin farklı işaretleri içinde benzer durumların olduğu kolayca görülebilir.

Dolayısıyla bir düzlem en fazla 6 bölgeden geçebilir ve çemberlerle bu düzlemin en fazla 12 ortak noktası vardır. (Şekil 3.40, Şekil 3.41) Böylece analitik 3−uzayda bir

düzlem üzerinde Öklid ve Taksi uzunlukları birbirine eşit en fazla 12 doğru parçası vardır. Bundan dolayı analitik 3−uzayda kenar sayısı 12 den fazla olan Öklidyen ve Taksi düzgün çokgeni yoktur.■



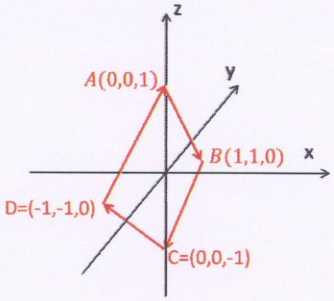
Şekil 3.40



Şekil 3.41

Teorem 3.10 dan dolayı analitik düzlemde $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ için n kenarlı Öklidyen düzgün çokgenlerden hangilerinin Taksi düzgün çokgen olduğuna bakılmalıdır. Bunun için çokgenlerin kenarlarını oluşturan vektörlerin konum vektörlerinden yararlanılacaktır.

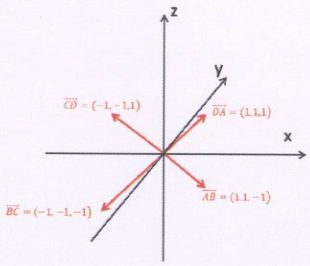
Şekil 3.42 deki $ABCD$ karesinin kenarlarını oluşturan vektörlerin konum vektörleri;



Şekil 3.42

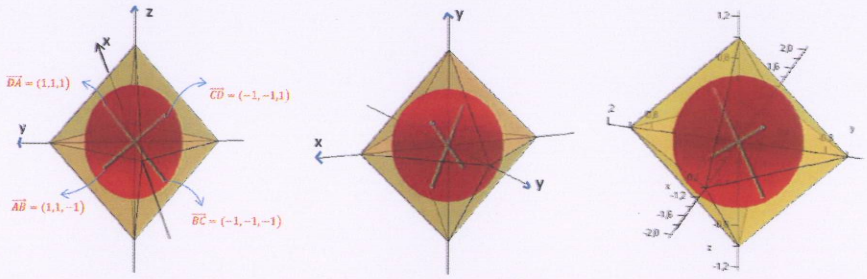
$$\overrightarrow{AB} = (1-0, 1-0, 0-1) = (1, 1, -1)$$
$$\overrightarrow{BC} = (-1, -1, -1)$$
$$\overrightarrow{CD} = (-1, -1, 1)$$
$$\overrightarrow{DA} = (1, 1, 1)$$

Konum vektörleri Şekil 3.43 de görüldüğü gibidir.



Şekil 3.43

Bu vektörlerin ardışık olarak aralarındaki açı 90^o, $ABCD$ karesinin iç açıları da 90^o dir. Yani konum vektörleri arasındaki açı ile çokgenin dış açısı eşittir. Ayrıca Şekil 3.44 da da görüldüğü üzere bu konum vektörleri $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ yarıçaplı orjin merkezli Öklidyen küre ile $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|_T$ yarıçaplı orjin merkezli Taksi küre üzerindedir.

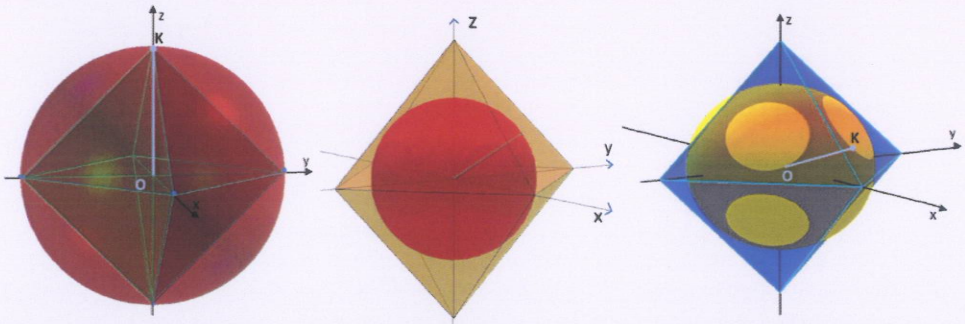


Şekil 3.44

Dolayısıyla herhangi bir Öklidyen n-kenarlı düzgün çokgenin aynı zamanda Taksi düzgün olması için; çokgenin kenarlarını oluşturan vektörlerin aralarındaki açı çokgenin dış açısına eşit ve uç noktaları Ökidyen çember ve Taksi çember üzerinde olmalıdır. Hem Öklidyen hem de Taksi düzgün çokgenin kenarlarını oluşturan vektörlerin doğrultuları

$(0,0,\pm 1)$, $(0,\pm 1,0)$, $(\pm 1,0,0)$ iken Şekil 3.45 deki gibi,

$(\pm 1,\pm 1,\pm 1)$ iken Şekil 3.46 daki gibi, diğer durumlarda ise Şekil 3.47 deki gibidir.



Şekil 3.45 Şekil 3.46 Şekil 3.47

Sonuç 3.11: $\mathbb{R}^3$ de Öklidyen herhangi bir düzgün çokgenin kenar sayısı tek ise herhangi iki simetri düzlemi, kenar sayısı çift ise birbirine dik olmayan ve en az bir tanesi ÇKSD den oluşan herhangi iki simetri düzlemi

$$\{x \mp y = k_1, x \mp z = k_2, y \mp z = k_3, x = k_4, y = k_5, z = k_6\}$$

kümesinin elemanı ise Öklidyen düzgün çokgen aynı zamanda Taksi düzgün çokgendir.

Önerme 3.12: $A_1A_2A_3A_4 \cdots A_n$, $n-$kenarlı Öklidyen düzgün çokgen olsun. $\overrightarrow{V}_i$, $1 \leq i \leq n$ vektörleri çokgenin kenarlarının üzerinde bulunduğu doğruların doğrultman vektörleri olsun. Öklidyen $A_1A_2A_3A_4 \cdots A_n$ düzgün çokgeninin aynı zamanda Taksi düzgün çokgen olması için gerek ve yeter koşul $1 \leq i, j \leq n$ için

$$g\left(\overrightarrow{V}_i\right) = g\left(\overrightarrow{V}_j\right)$$

olmasıdır.

İspat:

$(\Rightarrow)$ $A_1A_2A_3A_4 \cdots A_n$, n-kenarlı Öklidyen ve Taksi düzgün çokgen olsun. O halde

$d_E(A_1, A_2) = d_E(A_2, A_3) = d_E(A_3, A_4) = ... = d_E(A_{n-1}, A_n) = d_E(A_n, A_1)$ ve $d_T(A_1, A_2) = d_T(A_2, A_3) = d_T(A_3, A_4) = ... = d_T(A_{n-1}, A_n) = d_T(A_n, A_1)$ dir.

Öklid ve Taksi uzunluğu arasındaki bağıntıdan,

$d_E(A_1, A_2) = g(\overrightarrow{V_1}) \cdot d_T(A_1, A_2)$, $d_E(A_2, A_3) = g(\overrightarrow{V_2}) \cdot d_T(A_2, A_3)$, ...

.., $d_E(A_{n-1}, A_n) = g(\overrightarrow{V_n}) \cdot d_T(A_{n-1}, A_n)$ olduğundan

$$g(\overrightarrow{V_1}) = g(\overrightarrow{V_2}) = g(\overrightarrow{V_3}) = ... = g(\overrightarrow{V_n})$$

dir.

($\Leftarrow$) $A_1A_2A_3A_4 \cdots A_n$, n-kenarlı Öklidyen düzgün çokgen $1 \leq i, j \leq n$ için $g\left(\overrightarrow{V}_i\right) = g\left(\overrightarrow{V}_j\right)$ olsun.

$d_E(A_1, A_2) = d_E(A_2, A_3) = d_E(A_3, A_4) = ... = d_E(A_{n-1}, A_n) = d_E(A_n, A_1)$ ve Öklid ve Taksi uzunluğu arasındaki bağıntıdan,

$d_E(A_1, A_2) = g(\overrightarrow{V_1}) \cdot d_T(A_1, A_2)$, $d_E(A_2, A_3) = g(\overrightarrow{V_2}) \cdot d_T(A_2, A_3)$, ...

.., $d_E(A_{n-1}, A_n) = g(\overrightarrow{V_n}) \cdot d_T(A_{n-1}, A_n)$ dir.

Buradan

$d_T(A_1, A_2) = d_T(A_2, A_3) = d_T(A_3, A_4) = ... = d_T(A_{n-1}, A_n) = d_T(A_n, A_1)$ dir.

Dolayısıyla $A_1A_2A_3A_4 \cdots A_n$ aynı zamanda $n-$kenarlı Taksi düzgün çokgendir.■

$n > 12$ için n-kenarlı hem Öklidyen hem de Taksi düzgün çokgenin olmadığı Teorem 3.10 da ifade edilmişti. Dolayısıyla burada sadece $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ için Öklidyen düzgün $n-$genlerin Taksi düzgünlüğü incelenmiştir. Bu tezde düzlem, Öklidyen küre ve Taksi kürenin ortak noktalarından, Taksi izometrilerinden ve Teorem 1.31. de ifade edilen analitik $3-$uzayda Öklidyen uzunluk ile Taksi uzunluk arasındaki bağıntıdan faydalanılmıştır.

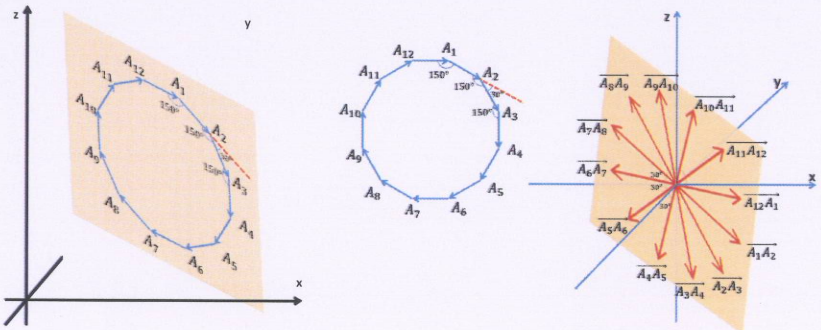
3.4 Düzgün Çokgenler

Analitik $3-$uzayda Öklidyen düzgün $12-$genin aynı zamanda Taksi düzgün $12-$gen olması için; $12-$genin içinde bulunduğu düzlem, Öklidyen küre ve Taksi kürenin ortak nokta sayısının 12 olması gerekir. Dolayısıyla $12-$genin içinde bulunduğu düzlem $a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a.b.c \neq 0$ için $ax + by + cz = 0$ şeklindedir. Çünkü "3.2.1 *Öklidyen Küre, Taksi Küre ve Bir Düzlemin Ortak Noktaları" başlıklı konu*

içindeki III. Durum da da görüldüğü üzere sadece bu düzlemlerle 12 ortak nokta elde edilebilir.

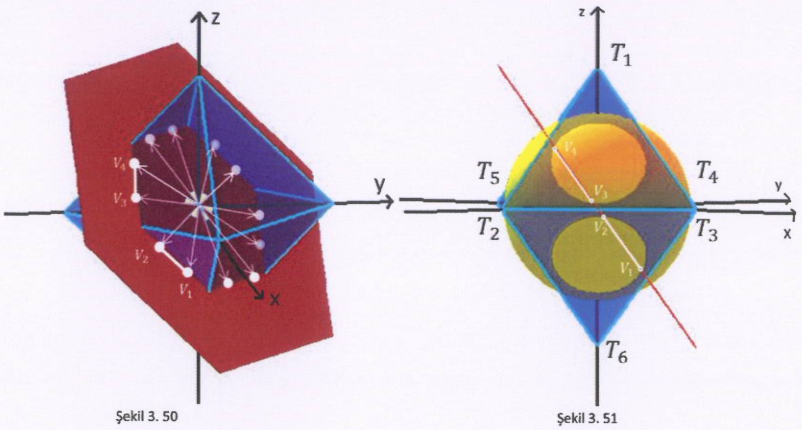
Teorem 3.13: $\mathbb{R}^3$ de hem Öklidyen hem de Taksi düzgün 12−gen vardır ve bu çokgenlerin bulundukları düzlemler $\pm x \pm y \pm z = 0$ düzlemlerinden birine paraleldir.

İspat: Analitik 3−uzayda herhangi bir $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}A_{11}A_{12}$ Öklidyen düzgün 12−genin (Şekil 3.48) kenarlarını oluşturan $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, $\overrightarrow{A_3A_4}$, $\overrightarrow{A_4A_5}$, $\overrightarrow{A_5A_6}$, $\overrightarrow{A_6A_7}$, $\overrightarrow{A_7A_8}$, $\overrightarrow{A_8A_9}$, $\overrightarrow{A_9A_{10}}$, $\overrightarrow{A_{10}A_{11}}$, $\overrightarrow{A_{11}A_{12}}$, $\overrightarrow{A_{12}A_1}$ vektörlerinin aralarındaki açı 30^o dir (Şekil 3.49).



Şekil 3.48 Şekil 3.49

Hem Öklidyen hem de Taksi düzgün 12−gen elde edilebilmesi için $a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \cdot b \cdot c \neq 0$ için $ax + by + cz = 0$ düzlemi ile orijin merkezli $d_E(A_1, A_2)$ yarıçaplı Öklid küresi ile orijin merkezli $d_T(A_1, A_2)$ yarıçaplı Taksi küresinin ortak noktaları Şekil 3.50 deki gibi 12 tane olmalı ve bu noktalarla ifade edilen ardışık iki konum vektörünün arasındaki açı 30^o olmalıdır.



Şekil 3. 50 Şekil 3. 51

$1 \leq i \leq 12$ için $\overrightarrow{V_i}$ vektörleri Öklidyen eşit uzunlukludur. Dolayısıyla

$$\measuredangle V_1OV_2 = \measuredangle V_3OV_4 \text{ olması için } d_E(V_1, V_2) = d_E(V_3, V_4)$$

olması gerekir. Bilindiği üzere orijin merkezli Taksi küre aynı zamanda Öklidyen düzgün sekizyüzlüdür. Teorem 3.10 nun ispatında da gösterildiği üzere

$$ax + by + cz = 0$$

düzlemi düzgün sekizyüzlünün en fazla 6 yüzünden geçebilir.

$a, b, c > 0$ için $ax + by + cz = 0$ düzlemi çokyüzlünün $T_1T_2T_3$, $T_6T_2T_3$, $T_6T_3T_4$, $T_6T_4T_5$, $T_1T_5T_4$, $T_1T_2T_5$, yüzlerinden geçer. Sonuç 2.12 (2) gereği, Öklidyen küre ile Taksi küreye ait $T_2T_3T_6$ yüzünün ortak noktalarından olan V_1, V_2 noktaları, $M_1=\left(\frac{d_T(A_1,A_2)}{3}, -\frac{d_T(A_1,A_2)}{3}, -\frac{d_T(A_1,A_2)}{3}\right)$ merkezli $r=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3d_E\left(A_1,A_2\right)^2 - d_T\left(A_1,A_2\right)^2}$ yarıçaplı çember üzerindedir. Benzer şekide;

V_3 ve V_4 $T_1T_2T_3$ yüzeyinde $M_2 = \left(\frac{d_T(A_1,A_2)}{3}, -\frac{d_T(A_1,A_2)}{3}, \frac{d_T(A_1,A_2)}{3}\right)$ merkezli çember üzerinde,

V_5 ve V_6 $T_1T_2T_5$ yüzeyinde $M_3 = \left(-\frac{d_T(A_1,A_2)}{3}, -\frac{d_T(A_1,A_2)}{3}, \frac{d_T(A_1,A_2)}{3}\right)$ merkezli çember üzerinde,

V_7 ve V_8 $T_1T_5T_4$ yüzeyinde $M_4 = \left(-\frac{d_T(A_1,A_2)}{3}, \frac{d_T(A_1,A_2)}{3}, \frac{d_T(A_1,A_2)}{3}\right)$ merkezli çember üzerinde,

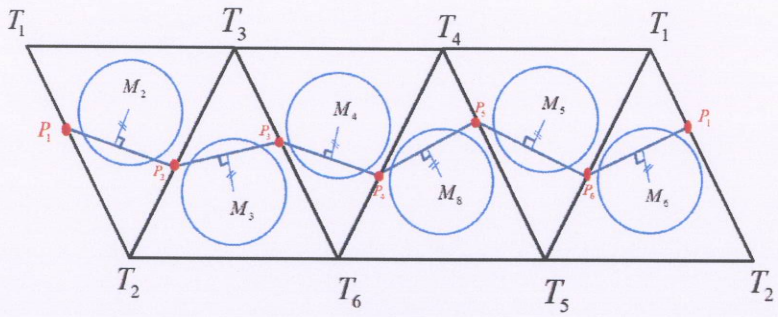
V_9 ve V_{10} $T_6T_4T_5$ yüzeyinde $M_5 = \left(-\frac{d_T(A_1,A_2)}{3}, \frac{d_T(A_1,A_2)}{3}, -\frac{d_T(A_1,A_2)}{3}\right)$ merkezli çember üzerinde,

V_{11} ve V_{12} $T_6T_3T_4$ yüzeyinde $M_6 = \left(\frac{d_T(A_1,A_2)}{3}, \frac{d_T(A_1,A_2)}{3}, -\frac{d_T(A_1,A_2)}{3}\right)$ merkezli çember üzerinde,

dir.

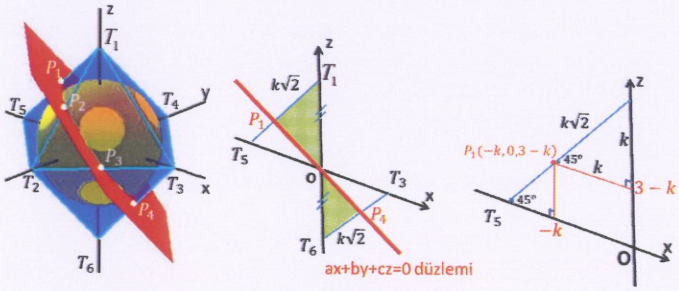
Yarıçapları eşit çemberlerin kirişlerin uzunluklarının eşit olması için, kirişlerin

çemberlerin merkezlerine uzaklığı aynı olmalıdır.



Şekil 3. 52

$ax+by+cz=0$ düzlemi ile Taksi kürenin ayrıtlarının kesişme noktaları $1 \leq i \leq 6$ için P_i olmak üzere, $P_1 \in [T_1T_5]$, $P_2 \in [T_1T_2]$, $P_3 \in [T_2T_3]$, $P_4 \in [T_3T_6]$, $P_5 \in [T_4T_6]$, $P_6 \in [T_4T_5]$ olsun.



Şekil 3.53

Orijin merkezli bütün Taksi kürelerin karşılıklı ayrıtları paraleldir. Bir düzlem karşılıklı ayrıtları aynı oranda keseceğinden, genelliği bozmaksızın Taksi kürenin yarıçapı 3 birim alınmıştır. Bu durumda Taksi kürenin köşe noktalarının koordinatları $T_1 = (0,0,3)$, $T_2 = (-3,0,0)$, $T_3 = (3,0,0)$, $T_4 = (0,3,0)$, $T_5(-3,0,0)$, $T_6 = (0,0,-3)$ dür. $k \in \mathbb{R}^+$ için P_1 noktasının T_1 noktasına uzaklığı $k\sqrt{2}$ olsun bu durumda Şekil 3.53 de görüleceği üzere $P_1 = (-k, 0, 3-k)$ dır. Ayrıca

$$d_E(T_1, O) = d_E(T_6, O) \text{ ve } T_1T_5 \| T_3T_6$$

olduğundan dolayı T_1OP_1 üçgeni ile T_6OP_4 üçgeni eş üçgendir. Dolayısıyla

$d_E(T_1, P_1) = d_E(T_6, P_4) = k\sqrt{2}$ olur. Bu durumda $P_4 = (k, 0, k-3)$ dür.

Benzer şekilde $m, n \in \mathbb{R}^+$ için $P_2 = (0, -m, 3-m)$, $P_3 = (n, n-3, 0)$,

$P_5 = (0, m, m-3)$, $P_6 = (-n, -n+3, 0)$ elde edilir.

P_1, P_2, P_3 noktaları $ax + by + cz = 0$ düzlemi üzerinde olduğundan dolayı;

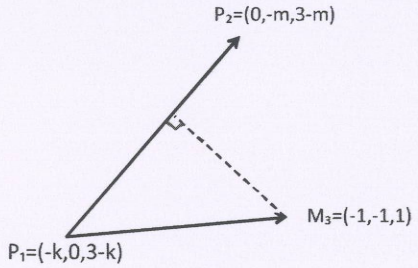
$$\begin{aligned} &a.(-k) + b.0 + c.(3-k) = 0 \\ &a.0 + b.(-m) + c.(3-m) = 0 \qquad (3.4.1) \\ &a.n + b.(n-3) + c.0 = 0 \end{aligned}$$

olmalıdır.

$ax + by + cz = 0$ düzlemi ile Taksi kürenin ortak noktaları ile ilgili yüzdeki çemberlerin merkezleri aşağıda verilmiştir.

Küre yüzü	**Ortak noktalar**	**Yüzdeki çemberin merkezi**
$T_1T_2T_5$	$[P_1P_2]$ doğru parçası	$M_3 = (-1, -1, 1)$
$T_1T_2T_3$	$[P_2P_3]$ doğru parçası	$M_2 = (1, -1, 1)$
$T_2T_3T_6$	$[P_3P_4]$ doğru parçası	$M_1 = (1, -1, -1)$

M_3 noktasının $[P_1P_2]$ doğru parçasına Öklidyen uzaklığı;



Şekil 3.54

$$d_E(M_3, [P_1P_2]) = \sqrt{1 - \left(\frac{<\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1M_3}>}{\left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\| \left\|\overrightarrow{P_1M_3}\right\|} \right)^2} \cdot \left\|\overrightarrow{P_1M_3}\right\|$$

M_2 noktasının $[P_2P_3]$ doğru parçasına uzaklığı;

$$d_E(M_2, [P_2P_3]) = \sqrt{1 - \left(\frac{<\overrightarrow{P_2P_3}, \overrightarrow{P_2M_3}>}{\left\|\overrightarrow{P_2P_3}\right\| \left\|\overrightarrow{P_2M_3}\right\|} \right)^2} \cdot \left\|\overrightarrow{P_2M_2}\right\|$$

M_1 noktasının $[P_3P_4]$ doğru parçasına uzaklığı;

$$d_E(M_1, [P_3P_4]) = \sqrt{1 - \left(\frac{<\overrightarrow{P_3P_4}, \overrightarrow{P_3M_3}>}{\left\|\overrightarrow{P_3P_4}\right\| \left\|\overrightarrow{P_3M_3}\right\|} \right)^2} \cdot \left\|\overrightarrow{P_3M_1}\right\|$$

dir ve

$$d_E(M_3,[P_1P_2]) = d_E(M_2,[P_2P_3]) = d_E(M_1,[P_3P_4]) \qquad (3.4.2)$$

olmalıdır.

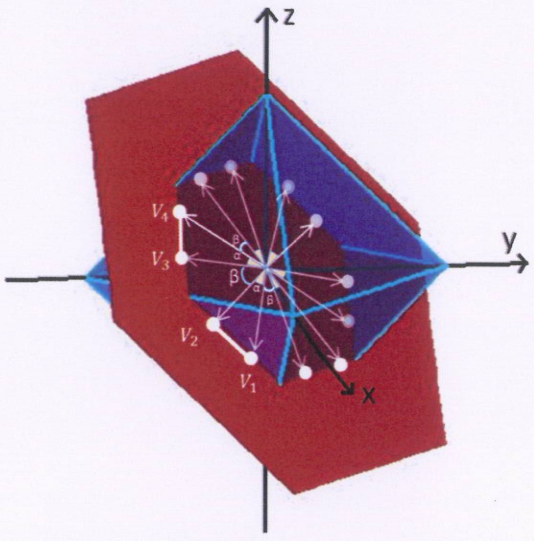
(3.4.1) ve (3.4.2) eşitliklerinden (Bilgisayar programı yardımıyla);

$a = b = c$ ve $m = k = n = \frac{3}{2}$ elde edilir (Bkz. Ek-1).

Aynı işlem Taksi kürenin farklı yüzeylerinden geçen düzlemler için yapıldığında; $|a| = |b| = |c|$ olduğu kolayca görülebilir. Dolayısıyla Öklidyen düzgün $12-$genin Taksi düzgün olması için $12-$genin içinde bulunduğu düzlem $\pm x \pm y \pm z = 0$ düzlemlerinden birine paralel olmalıdır.

Ayrıca $\pm x \pm y \pm z = 0$ düzlemleri ile Öklidyen ve Taksi kürenin ortak noktaları V_i için Şekil 3.55 da görüldüğü üzere

$\measuredangle V_1OV_2 = \measuredangle V_3OV_4 = \measuredangle V_5OV_6 = \measuredangle V_7OV_8 = \measuredangle V_9OV_{10} = \measuredangle V_{11}OV_{12} = \alpha$ ve $\measuredangle V_{12}OV_1 = \measuredangle V_2OV_3 = \measuredangle V_4OV_5 = \measuredangle V_6OV_7 = \measuredangle V_8OV_9 = \measuredangle V_{10}OV_{11} = \beta$ dir. Ayrıca $6\alpha + 6\beta = 360^o$ olduğundan $\alpha + \beta = 60^o$ dir.



Şekil 3. 55

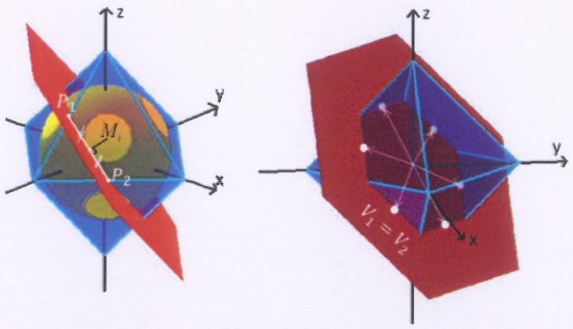
Eğer Taksi kürenin yüzeyinde merkezi M_i olan çemberler, düzlem ile Taksi kürenin ortak noktaları olan ilgili doğru parçalarına teğet ise

$V_1 = V_2$, $V_3 = V_4$, $V_5 = V_6$, $V_7 = V_8$, $V_9 = V_{10}$, $V_{11} = V_{12}$

olduğundan

$$\measuredangle V_1OV_2=\measuredangle V_3OV_4=\measuredangle V_5OV_6=\measuredangle V_7OV_8=\measuredangle V_9OV_{10}=\measuredangle V_{11}OV_{12}=\alpha=0$$

olur.



Şekil 3. 56

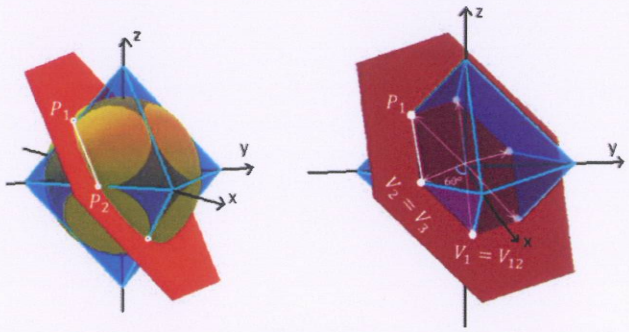
Eğer Taksi kürenin yüzeyinde merkezi M_i olan çemberler, düzlem ile Taksi kürenin ortak noktaları olan ilgili doğru parçalarının uç noktalarından geçiyorsa yani doğru parçaları ilgili çemberlerin kirişi ise

$$V_{12} = V_1,\ V_2 = V_3, V_4 = V_5, V_6 = V_7, V_8 = V_9, V_{10} = V_{11}$$

olduğundan

$$\measuredangle V_1OV_2=\measuredangle V_3OV_4=\measuredangle V_5OV_6=\measuredangle V_7OV_8=\measuredangle V_9OV_{10}=\measuredangle V_{11}OV_{12}=\alpha=60^o$$

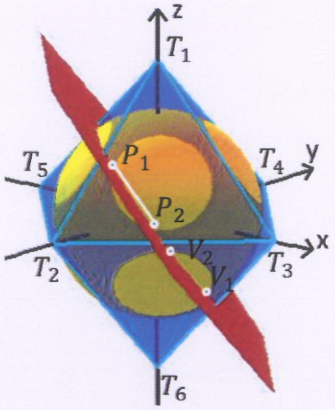
olur.



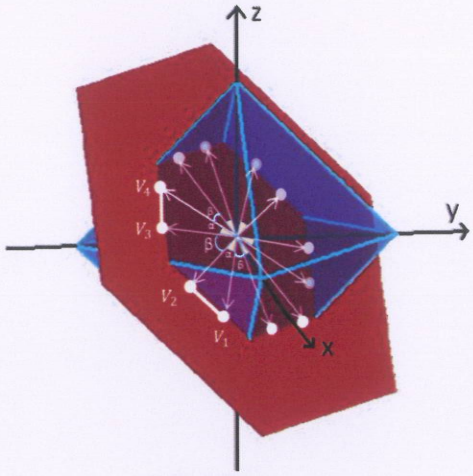
Şekil 3. 57

Eğer Taksi kürenin yüzeyinde merkezi M_i olan çemberler, düzlem ile Taksi kürenin ortak noktaları olan ilgili doğru parçalarını uç noktaları dışında iki noktada kesiyor ise yani çember ile ilgili doğru parçasının oluşturduğu kiriş doğru parçasının uç noktalarını kapsamıyor ise

$\measuredangle V_1OV_2 = \measuredangle V_3OV_4 = \measuredangle V_5OV_6 = \measuredangle V_7OV_8 = \measuredangle V_9OV_{10} = \measuredangle V_{11}OV_{12} = \alpha$
için $0 < \alpha < 60^o$ dir.



Şekil 3. 58



Şekil 3. 59

$\alpha + \beta + \alpha + \beta + \alpha + \beta + \alpha + \beta + \alpha + \beta + \alpha + \beta = 360^o$ dir.

$0 \leq \alpha \leq 60^o$ olduğundan $\alpha = 30^o$ için;

$30^o + \beta + 30^o + \beta + 30^o + \beta + 30^o + \beta + 30^o + \beta + 30^o + \beta = 360^o$

$6\beta = 180^o$

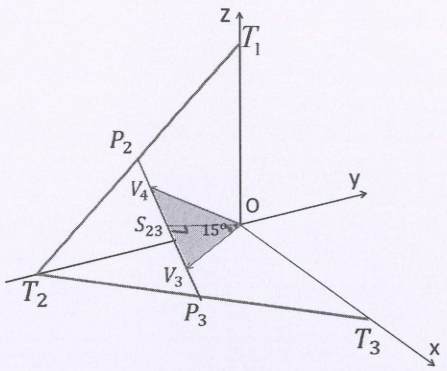
$\beta = 30^o$ dir.

Dolayısıyla $\alpha = 30^o$ için $1 \leq i \leq 12$ olmak üzere V_i vektörleriyle elde edilen çokgen hem Öklidyen hem de Taksi düzgün $12-$gendir.■

Ayrıca düzgün $12-$genin kenarlarının Taksi uzunluğu ile Öklidyen uzunluğu arasındaki bağıntı incelenirse;

$P_2 = (0, -\frac{d_T(A_1,A_2)}{2}, \frac{d_T(A_1,A_2)}{2})$ ve $P_3 = (\frac{d_T(A_1,A_2)}{2}, -\frac{d_T(A_1,A_2)}{2}, 0)$ olduğundan dolayı P_2 ve P_3 noktaları orijine eşit uzaklıktadır. Dolayısıyla $[P_2P_3]$ doğru parçasının orta noktası S_{23} olmak üzere,

$S_{23} = (\frac{d_T(A_1,A_2)}{4}, -\frac{d_T(A_1,A_2)}{2}, \frac{d_T(A_1,A_2)}{4})$ dir ve bu nokta Taksi küre üzerindedir.



Şekil 3. 60

$S_{23}V_4O$ dik üçgeninin açıları $15^o, 75^o, 90^o$ dir. Dolayısıyla;

$$d_E(S_{23}, O) = cos15^o.d_E(V_4, O)$$

dir.

$d_E(S_{23}, O) = \sqrt{\left(\frac{d_T(A_1,A_2)}{4}\right)^2 + \left(-\frac{d_T(A_1,A_2)}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_T(A_1,A_2)}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{4} d_T(A_1, A_2)$

$d_E(V_4, O) = d_E(A_1, A_2)$

$cos15^o = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

İfadeler yerlerine yazılırsa;

$$\frac{\sqrt{6}}{4} d_T(A_1, A_2) = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}.d_E(A_1, A_2)$$
$$d_T(A_1, A_2) = \frac{3+\sqrt{3}}{3}.d_E(A_1, A_2)$$

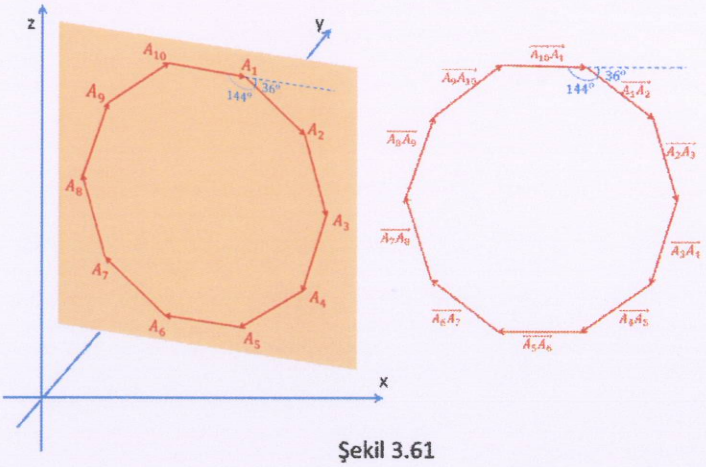
elde edilir. Böylece aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.14: $A_1A_2...A_{12}$ analitik 3−uzayda $\pm x \pm y \pm z = 0$ düzlemlerinden biri üzerinde Öklidyen düzgün 12−gen olsun. Düzgün 12−genin herhangi bir kenarının Taksi uzunluğu Öklid uzunluğunun $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$ katı ise $A_1A_2...A_{12}$ aynı zamanda Taksi düzgündür.

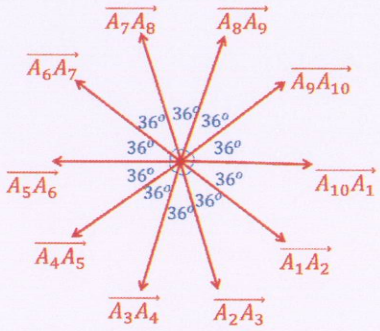
Teorem 3.15: $\mathbb{R}^3$ deki Öklidyen düzgün 10−genler Taksi düzgün değildir.

İspat: $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}$ analitik 3−uzayda Öklidyen düzgün 10−gen olsun. Bu durumda düzgün 10−genin (Şekil 3.61) kenarlarını oluşturan $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, $\overrightarrow{A_3A_4}$, $\overrightarrow{A_4A_5}$, $\overrightarrow{A_5A_6}$, $\overrightarrow{A_6A_7}$, $\overrightarrow{A_7A_8}$, $\overrightarrow{A_8A_9}$, $\overrightarrow{A_9A_{10}}$, $\overrightarrow{A_{10}A_1}$ vektörlerinin

aralarındaki açı 36^o dir (Şekil 3.62).



Şekil 3.61

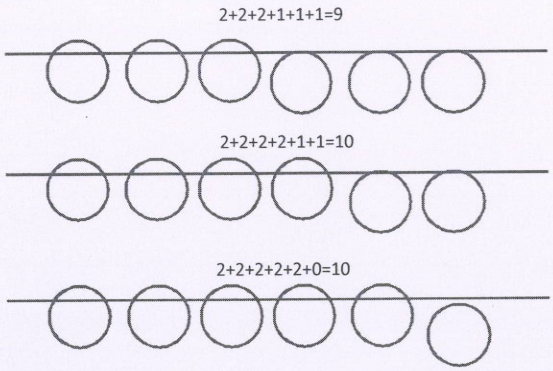


Şekil 3.62

Kabul edelim ki $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}$ aynı zamanda Taksi düzgün olsun. Böylece düzgün 10−genin kenarlarını oluşturan $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, $\overrightarrow{A_3A_4}$, $\overrightarrow{A_4A_5}$, $\overrightarrow{A_5A_6}$, $\overrightarrow{A_6A_7}$, $\overrightarrow{A_7A_8}$, $\overrightarrow{A_8A_9}$, $\overrightarrow{A_9A_{10}}$, $\overrightarrow{A_{10}A_1}$ vektörlerin Taksi uzunluğu eşittir. Dolayısıyla bu vektörlerin uç noktaları orijin merkezli $d_E(A_1, A_2)$ yarıçaplı Öklid küresi ile orijin merkezli $d_T(A_1, A_2)$ yarıçaplı Taksi küresi üzerindedir. Düzgün çokgenler düzlemsel olduklarından dolayı bu vektörler aynı zamanda çokgenin içinde bulunduğu düzleme paralel olan ve orijinden geçen bir düzlem üzerindedir.

Ayrıca bu vektörlerin aralarındaki açılar 36^o dir. Bilindiği üzere orijinden geçen $a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \cdot b \cdot c \neq 0$ için $ax + by + cz = 0$ düzlemi Taksi ve Öklid küresinin ortak noktaları olan 8 çemberden en fazla 6 tanesini kesebilir. Yani düzlem ile 6 çemberin ortak noktalarının 10 nokta olması için düzlemin en az 4 çemberi 2 noktada kesmesi

gerekir.

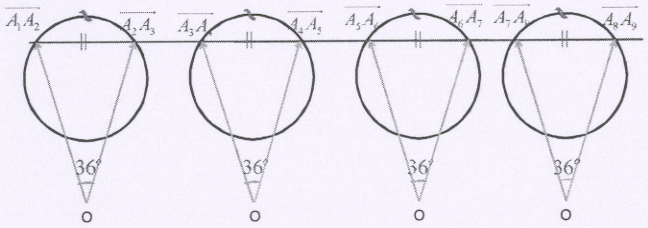


Şekil 3.63

Ayrıca

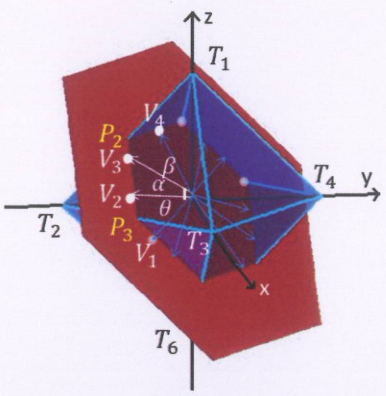
$$\left\|\overrightarrow{A_1A_2}\right\| = \left\|\overrightarrow{A_2A_3}\right\| = \left\|\overrightarrow{A_3A_4}\right\| = \left\|\overrightarrow{A_4A_5}\right\| = \left\|\overrightarrow{A_5A_6}\right\| = \left\|\overrightarrow{A_6A_7}\right\| = \left\|\overrightarrow{A_7A_8}\right\| = \left\|\overrightarrow{A_8A_9}\right\| = \left\|\overrightarrow{A_9A_{10}}\right\| = \left\|\overrightarrow{A_{10}A_1}\right\|$$

ve bu vektörlerin aralarındaki açı 36^o dir. Öklidyen eşit uzunluklu ve aralarındaki açılar eşit olan vektörlerin eş çemberlerden ayırdığı yayların açı ölçüleri eşittir.

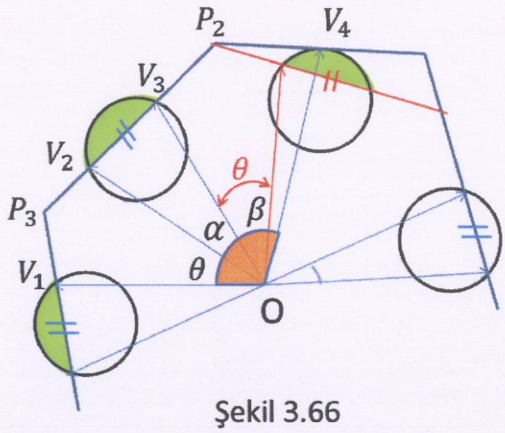


Şekil 3.64

Ayrıca bütün çemberler eş ve Taksi çemberin farklı yüzleri üzerindedir. İlgili düzlemin, $T_1T_2T_5$ ve $T_3T_6T_4$ düzlemlerindeki çemberleri birer noktada diğer yüzdeki çemberleri de 2 şer noktada kesdiğini kabul edelim.



Şekil 3. 65



Şekil 3.66

Bu durumda $\measuredangle V_1OV_2 = \theta, \measuredangle V_2OV_3 = \alpha$ ve $\measuredangle V_3OV_4 = \beta$ iken $\beta > \theta$ olduğundan dolayı θ yada β açılarının ikiside aynı anda 36^o olamaz. Böylece Öklidyen düzgün $10-$genlerden Taksi düzgün olan yoktur.■

Teorem 3.16: Analitik 3-uzayda Öklidyen düzgün $5, 7, 9, 11$-genlerlerden Taksi düzgün olanı yoktur.

İspat: Kabul edelim ki $A_1A_2A_3A_4A_5$ Öklidyen düzgün $5-$gen aynı zamanda Taksi düzgün olsun. Bu durumda düzgün $5-$genin kenarlarını oluşturan vektörler $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_3A_4}, \overrightarrow{A_4A_5}, \overrightarrow{A_5A_1}$ olmak üzere;

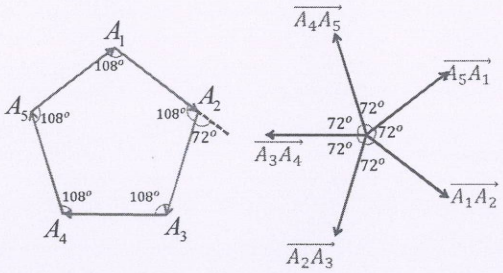
$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_4A_5} + \overrightarrow{A_5A_1} = 0,$$

$$\left\|\overrightarrow{A_1A_2}\right\| = \left\|\overrightarrow{A_2A_3}\right\| = \left\|\overrightarrow{A_3A_4}\right\| = \left\|\overrightarrow{A_4A_5}\right\| = \left\|\overrightarrow{A_5A_1}\right\|,$$

$$\left\|\overrightarrow{A_1A_2}\right\|_T = \left\|\overrightarrow{A_2A_3}\right\|_T = \left\|\overrightarrow{A_3A_4}\right\|_T = \left\|\overrightarrow{A_4A_5}\right\|_T = \left\|\overrightarrow{A_5A_1}\right\|_T$$

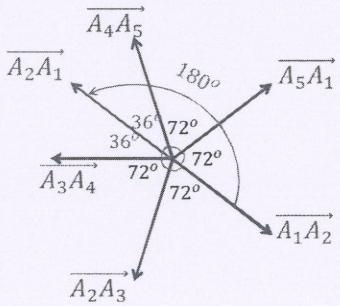
ve

$\measuredangle A_5A_1A_2 = \measuredangle A_1A_2A_3 = \measuredangle A_2A_3A_4 = \measuredangle A_3A_4A_5 = \measuredangle A_4A_5A_1 = 108^o$ dir.



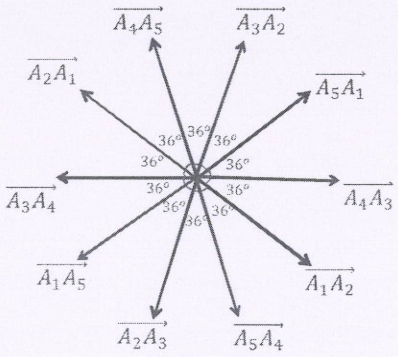
Şekil 3.67

Şekil 3.68 deki gibi $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_3A_4}, \overrightarrow{A_4A_5}, \overrightarrow{A_5A_1}$ vektörlerinin yanı sıra $\overrightarrow{A_2A_1}$ vektörü de gözönüne alınırsa;



Şekil 3.68

$\overrightarrow{A_1A_2}$ vektörü ile $\overrightarrow{A_2A_1}$ vektörü arasındaki açı 180^o olur. Dolayısıyla Şekil 3.68 de görüldüğü gibi $\overrightarrow{A_2A_1}$ vektörü ile $\overrightarrow{A_3A_4}$ ve $\overrightarrow{A_4A_5}$ vektörleri arasındaki açı 36^o dir. Ayrıca $\left\|\overrightarrow{A_1A_2}\right\| = \left\|\overrightarrow{A_2A_1}\right\|$ ve $\left\|\overrightarrow{A_1A_2}\right\|_T = \left\|\overrightarrow{A_2A_1}\right\|_T$ olduğu açıktır. Benzer şekilde $\overrightarrow{A_3A_2}, \overrightarrow{A_4A_3}, \overrightarrow{A_5A_4}, \overrightarrow{A_1A_5}$ vektörleri gözönüne alındığında;



Şekil 3.69

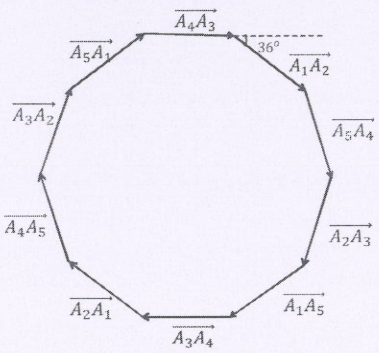
$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_1} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_2} + \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_4A_3} + \overrightarrow{A_4A_5} + \overrightarrow{A_5A_4} + \overrightarrow{A_5A_1} + \overrightarrow{A_1A_5} = 0$

$$\left\|\overrightarrow{A_1A_2}\right\| = \left\|\overrightarrow{A_2A_1}\right\| = \left\|\overrightarrow{A_2A_3}\right\| = \left\|\overrightarrow{A_3A_2}\right\| = \left\|\overrightarrow{A_3A_4}\right\| = \left\|\overrightarrow{A_4A_3}\right\| = \left\|\overrightarrow{A_4A_5}\right\| = \left\|\overrightarrow{A_5A_4}\right\| = \left\|\overrightarrow{A_5A_1}\right\| = \left\|\overrightarrow{A_1A_5}\right\|,$$

$$\left\|\overrightarrow{A_1A_2}\right\|_T = \left\|\overrightarrow{A_2A_1}\right\|_T = \left\|\overrightarrow{A_2A_3}\right\|_T = \left\|\overrightarrow{A_3A_2}\right\|_T = \left\|\overrightarrow{A_3A_4}\right\|_T = \left\|\overrightarrow{A_4A_3}\right\|_T = \left\|\overrightarrow{A_4A_5}\right\|_T = \left\|\overrightarrow{A_5A_4}\right\|_T = \left\|\overrightarrow{A_5A_1}\right\|_T = \left\|\overrightarrow{A_1A_5}\right\|_T$$

ve $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_1}, \overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_3A_2}, \overrightarrow{A_3A_4}, \overrightarrow{A_4A_3}, \overrightarrow{A_4A_5}, \overrightarrow{A_5A_4}, \overrightarrow{A_5A_1}, \overrightarrow{A_1A_5}$ vektörleri düzlemseldir.

Ötelemeler Taksi izometri olduğundan bu vektörlerin öteleme yöntemi ile uç uca eklenmesiyle Şekil 3.70 de görülen Öklidyen ve Taksi düzgün 10−gen elde edilir.



Şekil 3.70

Oysa Teorem 3.15. gereği Öklidyen düzgün olup aynı zamanda Taksi düzgün olan 10−gen bulunmadığından dolayı çelişki oluşur. Varsayım hatalıdır, bundan dolayı hem Öklidyen hem de Taksi düzgün 5−gen yoktur.

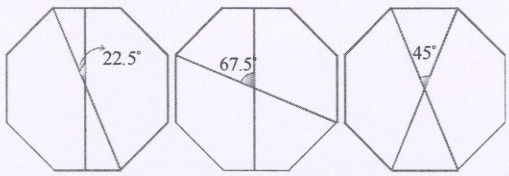
Ayrıca Teorem 3.10 dan dolayı $n > 12$ için hem Öklidyen hem de Taksi düzgün n−gen yoktur. Dolayısıyla $14, 18, 22$−gen olmadığından dolayı hem Öklidyen hem de taksi düzgün $7, 9, 11$−gen yoktur.■

Teorem 3.17: $\mathbb{R}^3$ de bir Öklidyen düzgün 8−genin en az biri ÇKSD olmak üzere birbirine dik olmayan herhangi iki simetri düzlemi

$$\{x \mp y = k_1,\ \ x \mp z = k_2,\ y \mp z = k_3, x = k_4,\ y = k_5,\ z = k_6\}$$

kümesinin elemanı olan Öklidyen düzgün 8−gen vardır ve bu 8−genler aynı zamanda Taksi düzgündür.

İspat: $\mathbb{R}^3$ de bir düzgün 8−genin en az biri köşelerinden geçmek şartıyla herhangi iki simetri düzlemi arasındaki açı 22.5, 45 ya da 67.5 derecedir.



Şekil 3.71

Dolayısıyla, $x \mp y = k_1$, $x \mp z = k_2$, $y \mp z = k_3, x = k_4$, $y = k_5$, $z = k_6$ düzlemlerinden aralarındaki açı 45 derece olan ikilileri ele alınmalıdır.

$x + z = k_2, x = k_4$ düzlemleri bir doğru boyunca kesişir ve aralarındaki açı 45 derecedir. Çünkü,

$x+z = k_2$ düzleminin normal vektörü $\overrightarrow{V_1} = (1, 0, 1)$ ve $x = k_4$ düzleminin normal vektörü $\overrightarrow{V_2} = (1, 0, 0)$ dir. $\overrightarrow{V_1}$ ile $\overrightarrow{V_2}$ vektörünün arasındaki açı α olmak üzere;

$$\cos\alpha = \frac{< \overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2} >}{\left\|\overrightarrow{V_1}\right\| \left\|\overrightarrow{V_2}\right\|} = \frac{1.1 + 0.0 + 1.0}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

dir. Dolayısıyla $\alpha = 45^o$ dir.

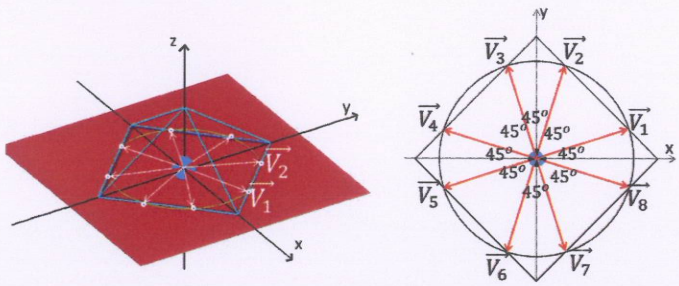
Teorem 3.8 den dolayı herhangi bir Öklidyen düzgün çokgenin iki simetri düzlemi $x + z = k_2, x = k_4$ ise bu çokgen aynı zamanda Taksi düzgündür.

O halde $\mathbb{R}^3$ de ardışık köşe noktalarından biri $x + z = k_2$ düzlemi diğeri $x = k_4$ düzlemi üzerinde, ağırlık merkezi bu düzlemlerin arakesit doğrusu üzerinde ve bu düzlemlere dik olan bütün Öklidyen düzgün 8-genler aynı zamanda Taksi düzgün 8−gendir. Benzer şekilde bu şartları sağlayan başka düzlem ikilileri de elde edilebilir.■

Ayrıca düzgün 8−gen, $x = k_4, y = k_5, z = k_6$ düzlemlerinden biri üzerinde iken kenarlarının Taksi uzunluğu ile Öklidyen uzunluğu arasındaki bağıntı incelenirse ($x = k_4$ için);

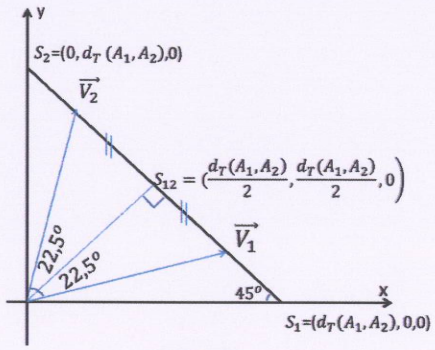
$A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ analitik 3−uzayda Öklidyen düzgün 8−gen olmak üzere bunun (Şekil 3.72) kenarlarını oluşturan $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, $\overrightarrow{A_3A_4}$, $\overrightarrow{A_4A_5}$, $\overrightarrow{A_5A_6}$, $\overrightarrow{A_6A_7}$,

$\overrightarrow{A_7A_8}$, $\overrightarrow{A_8A_1}$ vektörlerinin aralarındaki açı 45^o dir



Şekil 3.72

$S_1 = (d_T(A_1, A_2), 0, 0)$ ve $S_2 = (0, d_T(A_1, A_2), 0)$ olsun. S_1 ve S_2 noktalarının orta noktası $S_{12} = (\frac{d_T(A_1,A_2)}{2}, \frac{d_T(A_1,A_2)}{2}, 0)$ dir ve Taksi küre üzerindedir.



Şekil 3.73

$S_{12}V_1O$ dik üçgeninin açıları $22,5^o; 67,5^o; 90^o$ dir. Dolayısıyla;

$$d_E(S_{12}, O) = cos15^o.d_E(V_1, O)$$

dir.

$d_E(S_{12}, O) = \sqrt{\left(\frac{d_T(A_1,A_2)}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_T(A_1,A_2)}{2}\right)^2 + 0^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} d_T(A_1, A_2)$

$d_E(V_1, O) = d_E(A_1, A_2)$

$\cos 22,5^o = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$

İfadeler yerlerine yazılırsa;

$$\frac{\sqrt{2}}{2} d_T(A_1, A_2) = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \cdot d_E(A_1, A_2)$$

$$d_T(A_1, A_2) = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{2} \cdot d_E(A_1, A_2)$$

elde edilir. $x = k_4$ düzlemi $x = 0$ düzleminin k *birim* ötelenmesiyle elde edilir ve bilindiği üzere ötelemeler Taksi izometridir. Böylece aşağıdaki sonucu verebiliriz.

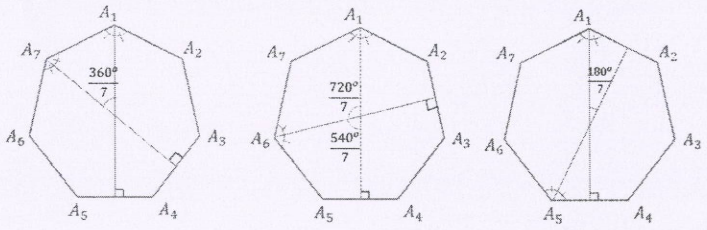
Sonuç 3.18: $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ analitik 3−uzayda $x = k_1, y = k_2, z = k_3$ düzlemlerinden biri üzerinde bir Öklidyen düzgün 8−gen olsun. Düzgün sekizgenin herhangi bir kenarının Taksi uzunluğu Öklid uzunluğunun $\frac{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{2}$ katı ise $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ aynı zamanda Taksi düzgündür.

Teorem 3.19: Analitik 3−uzayda Öklidyen düzgün 7−genlerin herhangi iki simetri düzlemi aynı anda

$$\{x \mp y = k_1,\ x \mp z = k_2,\ y \mp z = k_3,\ x = k_4,\ y = k_5,\ z = k_6\}$$

kümesinin elemanı değildir.

İspat: $\mathbb{R}^3$ de Öklidyen bir düzgün 7−genin herhangi iki TSD arasındaki açılar $\frac{540^o}{7}, \frac{360^o}{7}$ ya da $\frac{180^o}{7}$ dir (Şekil 3.74).



Şekil 3.74

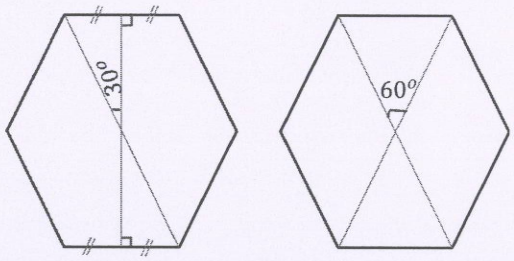
Ancak Önerme 3.9 dan dolayı $x \mp y = k_1$, $x \mp z = k_2$, $y \mp z = k_3$, $x = k_4$, $y = k_5$, $z = k_6$ düzlemlerinin herhangi ikisi arasındaki açıların hiçbiri $\frac{540^o}{7}, \frac{360^o}{7}$ ya da $\frac{180^o}{7}$ olmadığından düzgün 7−genin herhangi iki TSD si bu düzlemlerden oluşamaz.■

Teorem 3.20: $\mathbb{R}^3$ de Öklidyen düzgün bir 6−genin en az biri ÇKSD olmak üzere birbirine dik olmayan herhangi iki simetri düzlemi

$$\{x \mp y = k_1, x \mp z = k_2, y \mp z = k_3, x = k_4, y = k_5, z = k_6\}$$

kümesinin elemanı olan Öklidyen düzgün 6−gen vardır ve bu 6−genler aynı zamanda Taksi düzgündür.

İspat: $\mathbb{R}^3$ de bir düzgün 6−genin en az biri köşelerinden geçmek şartıyla herhangi iki simetri düzlemi arasındaki açı 30 ya da 60 derecedir.



Şekil 3.75

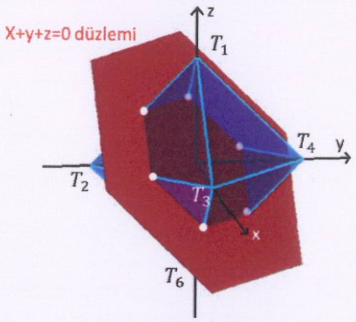
Önerme 3.9 dan dolayı, $x \mp y = k_1$, $x \mp z = k_2$, $y \mp z = k_3$, $x = k_4$, $y = k_5$, $z = k_6$ düzlemlerinden aralarındaki açı 60 derece olan ikilileri ele alınmalıdır.

$x + y = k_1, y + z = k_2$ düzlemleri bir doğru boyunca kesişir ve aralarındaki ölçek açı 60 derecedir. Teorem 3.8 den dolayı herhagi bir Öklidyen düzgün çokgenin iki simetri düzlemi $x+y = k_1, y+z = k_2$ olan çokgenler aynı zamanda Taksi düzgündür.

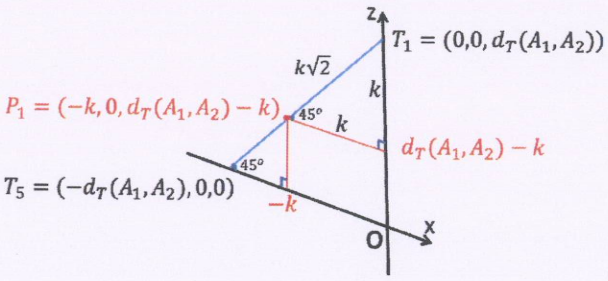
O halde $\mathbb{R}^3$ de ardışık köşe noktalarından biri $x+y=k$ düzlemi diğeri $y+z=k_2$ düzlemi üzerinde, ağırlık merkezi bu düzlemlerin arakesit doğrusu üzerinde ve bu düzlemlere dik olan bütün Öklidyen düzgün 6-genler aynı zamanda Taksi düzgün 6−gendir. Benzer şekilde bu şartları sağlayan başka düzlem ikilileri de elde edilebilir.■

Teorem 3.21: Analitik 3−uzayda $\pm x \pm y \pm z = k$ düzlemlerinden biri üzerinde bulunan $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ Öklidyen düzgün 6−geninin herhangi bir kenarının Taksi uzunluğu Öklid uzunluğunun $\sqrt{2}$ katı ise $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ aynı zamanda Taksi düzgündür.

İspat : Analitik 3−uzayda $x + y + z = k$ düzlemi üzerinde $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ Öklidyen düzgün 6−genin A_1A_2 kenarının Taksi uzunluğu Öklid uzunluğunun $\sqrt{2}$ katı olsun. O halde $d_T(A_1, A_2) = \sqrt{2}d_E(A_1, A_2)$ dir. $x + y + z = 0$ düzlemi orijin merkezli $d_T(A_1, A_2)$ yarıçaplı Taksi küresinin ayrıtlarının orta noktalarından geçer.



Şekil 3. 76



Şekil 3.77

Çünkü Taksi kürenin ayrıtlarından biri olan $[T_1T_5]$ in üzerindeki herhangi bir P_1 noktasının koordinatları $P_1 = (-k, 0, d_T(A_1, A_2) - k)$ dır. Bu nokta düzlemde yerine yazılırsa,

$$-k + 0 + d_T(A_1, A_2) - k = 0$$
$$k = \frac{d_T(A_1,A_2)}{2}$$

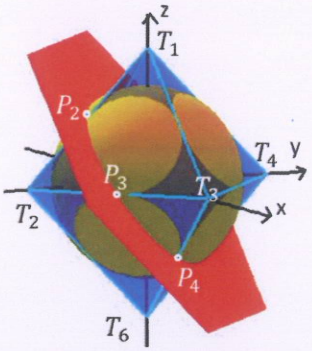
dir ve $P_1 = (-\frac{d_T(A_1,A_2)}{2}, 0, \frac{d_T(A_1,A_2)}{2})$ dir. Benzer şekilde diğer orta noktalar,

$[T_1T_2]$ ayrıtının orta noktası $P_2 = (0, -\frac{d_T(A_1,A_2)}{2}, \frac{d_T(A_1,A_2)}{2})$
$[T_2T_3]$ ayrıtının orta noktası $P_3 = (\frac{d_T(A_1,A_2)}{2}, -\frac{d_T(A_1,A_2)}{2}, 0)$
$[T_6T_3]$ ayrıtının orta noktası $P_4 = (\frac{d_T(A_1,A_2)}{2}, 0, -\frac{d_T(A_1,A_2)}{2})$
$[T_6T_4]$ ayrıtının orta noktası $P_5 = (0, \frac{d_T(A_1,A_2)}{2}, \frac{d_T(A_1,A_2)}{2})$
$[T_5T_4]$ ayrıtının orta noktası $P_6 = (-\frac{d_T(A_1,A_2)}{2}, \frac{d_T(A_1,A_2)}{2}, 0)$

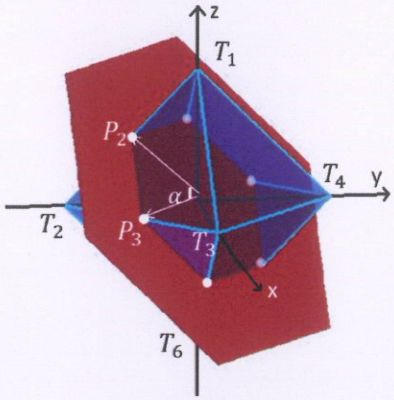
olarak bulunur. Ayrıca Taksi kürenin ayrıtlarının orta noktalarının orijine Öklid uzaklığı

$$d_E(P_1, O) = \sqrt{(-\tfrac{d_T(A_1,A_2)}{2})^2 + 0^2 + \left(\tfrac{d_T(A_1,A_2)}{2}\right)^2} = \tfrac{\sqrt{2}}{2} d_T(A_1, A_2)$$

dir. Ayrıca $d_T(A_1, A_2) = \sqrt{2} d_E(A_1, A_2)$ olduğundan $d_E(P_1, O) = d_E(A_1, A_2)$ dir. O halde orijin merkezli $d_E(A_1, A_2)$ yarıçaplı Öklidyen küre ile $x + y + z = 0$ düzlemi ve Taksi kürenin ortak noktaları Taksi kürenin ayrıtlarının orta noktalarıdır.



Şekil 3.78



Şekil 3. 79

$\overrightarrow{OP_3}$ ile $\overrightarrow{OP_2}$ vektörleri arasındaki açı α olsun.

$$cos\alpha = \frac{<\overrightarrow{OP_3}, \overrightarrow{OP_2}>}{\|\overrightarrow{OP_3}\|\|\overrightarrow{OP_2}\|} = \frac{0+\frac{d_T(A_1,A_2)^2}{4}+0}{\frac{1}{2}d_T(A_1,A_2)^2} = \frac{1}{2}$$

olur ve buradan $\alpha = 60^o$ dir. Benzer şekilde $\overrightarrow{OP_1}$ ile $\overrightarrow{OP_2}$, $\overrightarrow{OP_2}$ ile $\overrightarrow{OP_3}$, $\overrightarrow{OP_3}$ ile $\overrightarrow{OP_4}$, $\overrightarrow{OP_4}$ ile $\overrightarrow{OP_5}$, $\overrightarrow{OP_5}$ ile $\overrightarrow{OP_6}$, $\overrightarrow{OP_6}$ ile $\overrightarrow{OP_1}$ vektörlerinin aralarındaki açılar da 60^o dir ve $1 \leq i, j \leq 6$ için $\left\|\overrightarrow{OP_i}\right\| = \left\|\overrightarrow{OP_j}\right\| = d_E(A_1, A_2)$ ve $\left\|\overrightarrow{OP_i}\right\|_T = \left\|\overrightarrow{OP_j}\right\|_T = d_T(A_1, A_2)$ olduğundan dolayı $1 \leq i \leq 6$ için $\overrightarrow{OP_i}$ vektörleri $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 6−genin kenarlarını oluşturan vektörlere eş vektörlerdir ve $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ aynı zamanda Taksi düzgündür.■

Örnek 3.22: Analitik 3−uzayda köşe noktaları $A_1 = (0,0,0), A_2 = (0,-1,1), A_3 = (1,-2,1), A_4 = (2,-2,0), A_5 = (2,-1,-1), A_6 = (1,0,-1)$ olan $A_1A_2...A_6$ hem Öklidyen hem de Taksi düzgün 6−gendir.

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ noktaları $x + y + z = 0$ düzlemi üzerindedir.

$d_E(A_1, A_2)$=$d_E(A_2, A_3)$=$d_E(A_3, A_4)$=$d_E(A_4, A_5)$=$d_E(A_5, A_6)$=$d_E(A_6, A_1)$=$\sqrt{2}$

$d_T(A_1, A_2)$=$d_T(A_2, A_3)$=$d_T(A_3, A_4)$=$d_T(A_4, A_5)$=$d_T(A_5, A_6)$=$d_T(A_6, A_1)$=2

$\overrightarrow{A_1A_2} = (0,-1,1)$, $\overrightarrow{A_1A_6} = (1,0,-1)$ vektörleri arasındaki açı α olmak üzere $\measuredangle A_6A_1A_2 = \alpha$ dır. Buradan;

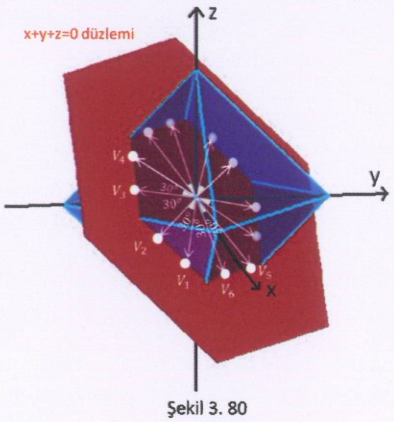
$$cos\alpha = \frac{<\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_6A_1}>}{\|A_1A_2\| \cdot \|A_6A_1\|} = \frac{0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{-1}{2}$$

olur, dolayısıyla $\alpha = 120^o$ dir. Benzer işlemlerle,
$\measuredangle A_6A_1A_2 = \measuredangle A_1A_2A_3 = \measuredangle A_2A_3A_4 = \measuredangle A_3A_4A_5 = \measuredangle A_4A_5A_6 = \measuredangle A_5A_6A_1 = 120^o$ elde edilir. Dolayısıyla $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ hem Öklidyen hem de Taksi düzgün 6−gendir.

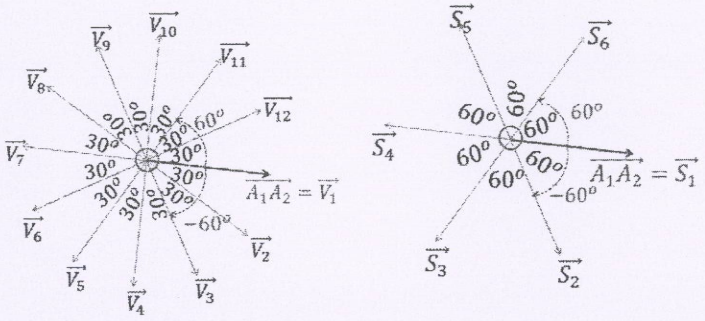
Ayrıca $d_T(A_1, A_2) = \sqrt{2}d_E(A_1, A_2)$ olduğu açıktır.

Teorem 3.23: Analitik 3−uzayda $\pm x \pm y \pm z = k$ düzlemlerinden biri üzerinde bulunan $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ Öklidyen düzgün 6−geninin herhangi bir kenarının Taksi uzunluğu Öklid uzunluğunun $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$ katı ise $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ aynı zamanda Taksi düzgündür.

İspat: Analitik 3−uzayda $x + y + z = k$ düzlemi üzerinde $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ Öklidyen düzgün 6−genin A_1A_2 kenarının Taksi uzunluğu Öklid uzunluğunun $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$ katı olsun. O halde $d_T(A_1, A_2) = \frac{3+\sqrt{3}}{3}d_E(A_1, A_2)$ dir. Orijin merkezli $d_T(A_1, A_2)$ yarıçaplı Taksi küre ile orijin merkezli $d_E(A_1, A_2)$ yarıçaplı Öklidyen kürenin ortak noktalarıyla Sonuç 3.14 den dolayı aralarındaki açı 30^o olan Taksi eşit uzunlukta ve Öklidyen eşit uzunlukta 12 vektör elde edilir. Bu vektörler $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}, \overrightarrow{V_4}, \overrightarrow{V_5}, \overrightarrow{V_6}, \overrightarrow{V_7}, \overrightarrow{V_8}, \overrightarrow{V_9}, \overrightarrow{V_{10}}, \overrightarrow{V_{11}}, \overrightarrow{V_{12}}$ olsun. $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ Öklidyen düzgün 6−genin kenarlarını oluşturan vektörler $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{S_1}, \overrightarrow{S_2}, \overrightarrow{S_3}, \overrightarrow{S_4}, \overrightarrow{S_5}, \overrightarrow{S_6}$ olsun.



Şekil 3. 80



Şekil 3. 81

$1 \leq i \leq 12$ için $\overrightarrow{V_i}$ ve $1 \leq i \leq 6$ için $\overrightarrow{S_i}$ vektörleri aynı $x + y + z = 0$ düzlemi üzerinde. $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{V_1}$ ve $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{S_1}$ olduğundan dolayı $\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{S_1}$ dir.

$\overrightarrow{V_{11}}$ ve $\overrightarrow{S_6}$ vektörleri, $\overrightarrow{V_1}$ vektörünün $x + y + z = 0$ düzleminin normal vektörü $\overrightarrow{N} = (1, 1, 1)$ ekseni etrafında $+60^o$ dönmesiyle elde edilen vektörlerdir. Dolayısıyla $\overrightarrow{V_{11}} = \overrightarrow{S_6}$ dir. Benzer şekilde $\overrightarrow{V_9} = \overrightarrow{S_5}, \overrightarrow{V_7} = \overrightarrow{S_4}, \overrightarrow{V_5} = \overrightarrow{S_3}, \overrightarrow{V_3} = \overrightarrow{S_2}$ olur. $1 \leq i \leq 12$ için $\overrightarrow{V_i}$ vektörlerinin Taksi uzunluğu eşit olduğundan dolayı $1 \leq i \leq 6$ için $\overrightarrow{S_i}$ vektörlerinin de Taksi uzunluğu eşittir.. Dolayısıyla $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ aynı zamanda Taksi düzgündür.■

Teorem 3.24: Analitik $3-$uzayda $\pm x \pm y \pm z = 0$ düzlemlerinden biri üzerinde bulunan $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ Öklidyen düzgün $6-$geninin herhangi bir kenarının Taksi uzunluğu Öklid uzunluğunun $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ katı ise $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ aynı zamanda Taksi düzgündür.

İspat: Analitik $3-$uzayda $x + y + z = k$ düzlemi üzerinde $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ Öklidyen düzgün $6-$genin kenarlarını oluşturan vektörlerden $\overrightarrow{A_1A_2}$ nin Taksi uzunluğu Öklid uzunluğunun $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ katı olsun. O halde $d_T(A_1, A_2) = \frac{2\sqrt{6}}{3} d_E(A_1, A_2)$ dir. Orijin merkezli $d_T(A_1, A_2)$ yarıçaplıTaksi küre, orijin merkezli $d_E(A_1, A_2)$ yarıçaplı Öklidyen küre ve $x + y + z = 0$ düzleminin ortak noktarı $i \in \mathbb{N}$ için $V_i = (x, y, z)$ olsun.

$$\left\|\overrightarrow{V_i}\right\|_T = \frac{2\sqrt{6}}{3} \left\|\overrightarrow{V_i}\right\|$$
$$|x| + |y| + |z| = \frac{2\sqrt{6}}{3} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

ile

$$x+y+z=0 \text{ ve } \left\|\overrightarrow{V_i}\right\|_T = |x|+|y|+|z| = d_T(A_1,A_2)$$

eşitliklerinden (Bilgisayar programı yardımıyla)

$$V_1=(-\tfrac{d_T(A_1,A_2)}{2},\tfrac{d_T(A_1,A_2)}{4},\tfrac{d_T(A_1,A_2)}{4}),\ V_2=(-\tfrac{d_T(A_1,A_2)}{4},-\tfrac{d_T(A_1,A_2)}{4},\tfrac{d_T(A_1,A_2)}{2}),$$
$$V_3=(\tfrac{d_T(A_1,A_2)}{4},-\tfrac{d_T(A_1,A_2)}{2},\tfrac{d_T(A_1,A_2)}{4}),\ V_4=(\tfrac{d_T(A_1,A_2)}{2},-\tfrac{d_T(A_1,A_2)}{4},-\tfrac{d_T(A_1,A_2)}{4}),$$
$$V_5=(\tfrac{d_T(A_1,A_2)}{4},\tfrac{d_T(A_1,A_2)}{4},-\tfrac{d_T(A_1,A_2)}{2})\ V_6=(-\tfrac{d_T(A_1,A_2)}{4},\tfrac{d_T(A_1,A_2)}{2},-\tfrac{d_T(A_1,A_2)}{4}),$$

elde edilir (Bkz. Ek-2). Açıkça görülmektedir ki $1\le i,j\le 6$ için $\left\|\overrightarrow{V_i}\right\| = \left\|\overrightarrow{V_j}\right\|$ ve $\left\|\overrightarrow{V_i}\right\|_T = \left\|\overrightarrow{V_i}\right\|_T$ dir. $\overrightarrow{V_1}$ ve $\overrightarrow{V_2}$ vektörlerinin arasındaki açı α olmak üzere

$$\cos\alpha = \frac{<\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2}>}{\left\|\overrightarrow{V_1}\right\|\left\|\overrightarrow{V_2}\right\|} = \frac{\frac{(d_T(A_1,A_2))^2}{8}-\frac{(d_T(A_1,A_2))^2}{16}+\frac{(d_T(A_1,A_2))^2}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}d_T(A_1,A_2)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}d_T(A_1,A_2)} = \frac{1}{2}$$

dir. Dolayısıyla $\alpha = 60^o$ dir. Benzer şekilde $1\le i,j\le 6$ için ardışık $\overrightarrow{V_i}$ ile $\overrightarrow{V_j}$ vektörlerinin arasındaki açı da 60^o elde edilir. Buradan Öklidyen düzgün çokgen aynı zamanda Taksi düzgündür.■

Örnek 3.25: Analitik 3−uzayda köşe noktaları $A_1=(0,0,0)$, $A_2=(3,-6,3)$, $A_3=(9,-9,0)$, $A_4=(12,-6,-6)$, $A_5=(9,0,-9)$, $A_6=(3,3,-6)$ olan $A_1A_2...A_6$ hem Öklidyen hem de Taksi düzgün 6−gendir.

A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6 noktaları $x+y+z=0$ düzlemi üzerindedir.

$d_E(A_1,A_2)$=$d_E(A_2,A_3)$=$d_E(A_3,A_4)$=$d_E(A_4,A_5)$=$d_E(A_5,A_6)$=$d_E(A_6,A_1)$=$3\sqrt{6}$

$d_T(A_1,A_2)$=$d_T(A_2,A_3)$=$d_T(A_3,A_4)$=$d_T(A_4,A_5)$=$d_T(A_5,A_6)$=$d_T(A_6,A_1)$=12

$\overrightarrow{A_1A_2}=(3,-6,3)$, $\overrightarrow{A_1A_6}=(3,3,-6)$ vektörleri arasındaki açı α olsun. Böylece, $\measuredangle A_6A_1A_2=\alpha$ dır. Buradan;

$$cos\alpha = \frac{<\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_6A_1}>}{\|A_1A_2\|\cdot\|A_6A_1\|} = \frac{3\cdot 3+(-6)\cdot 3+3\cdot(-6)}{\sqrt{3^2+(-6)^2+3^2}\cdot\sqrt{3^2+3^2+(-6)^2}} = \frac{-27}{54} = -\frac{1}{2}$$

elde edilir, dolayısıyla $\alpha=120^o$ dir. Benzer işlemlerle,

$\measuredangle A_6A_1A_2$=$\measuredangle A_1A_2A_3$=$\measuredangle A_2A_3A_4$=$\measuredangle A_3A_4A_5$=$\measuredangle A_4A_5A_6$=$\measuredangle A_5A_6A_1$=120^o elde edilir.

Dolayısıyla $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ hem Öklidyen hem de Taksi düzgün 6−gendir.

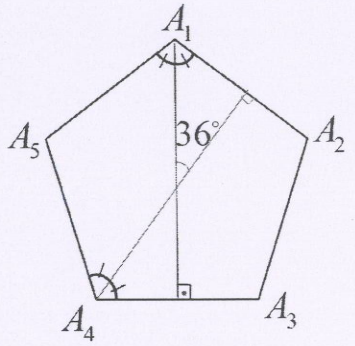
Ayrıca $d_T(A_1,A_2)=\frac{2\sqrt{6}}{3}d_E(A_1,A_2)$ olduğu açıktır.

Teorem 3.26: Analitik 3−uzayda Öklidyen düzgün 5−genlerin herhangi iki simetri düzlemi aynı anda

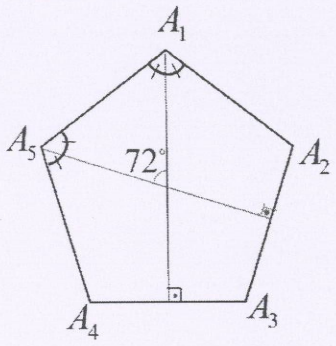
$$\{x \mp y = k_1, x \mp z = k_2, y \mp z = k_3, x = k_4, y = k_5, z = k_6\}$$

kümesinin elemanı değildir.

İspat: $\mathbb{R}^3$ de Öklidyen bir düzgün beşgenin herhangi iki TSD arasındaki açılar ya 36^o ya da 72^o derecedir (Şekil 3.82 ve Şekil 3.83).



Şekil 3.82



Şekil 3.83

Ancak Önerme 3.9 dan dolayı $x \mp y = k_1$, $x \mp z = k_2$, $y \mp z = k_3$, $x = k_4$, $y = k_5$, $z = k_6$ düzlemlerinin herhangi ikisi arasındaki açıların hiçbiri 36 ya da 72 derece olmadığından düzgün 5−genin herhangi iki TSD si bu düzlemlerden oluşamaz.■

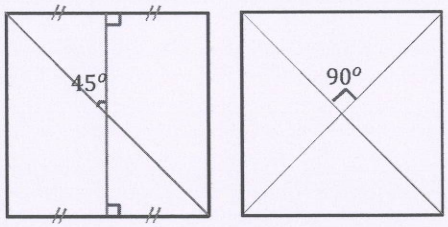
Teorem 3.27: $\mathbb{R}^3$ de biri ÇKSD olmak üzere herhangi iki simetri düzlemi

$$\{x \mp y = k_1, x \mp z = k_2, y \mp z = k_3, x = k_4, y = k_5, z = k_6\}$$

kümesinin elemanı olan Öklidyen düzgün 4−gen vardır ve bu 4−genler aynı zamanda Taksi düzgündür.

İspat: $\mathbb{R}^3$ de bir düzgün 4−genin biri köşegen diğeri karşılıklı kenarların orta noktalarından geçen iki simetri düzlemi arasındaki açı 45 derece, 4−genin köşe nok-

talarından geçen iki simetri düzleminin aralarındaki açı 90 derecedir.



Şekil 3.84

Dolayısıyla, $x \mp y = k_1$, $x \mp z = k_2$, $y \mp z = k_3$, $x = k_4$, $y = k_5$, $z = k_6$ düzlemleri içinden aralarındaki açı 45 veya 90 derece olan düzlem ikilileri ele alınsın.

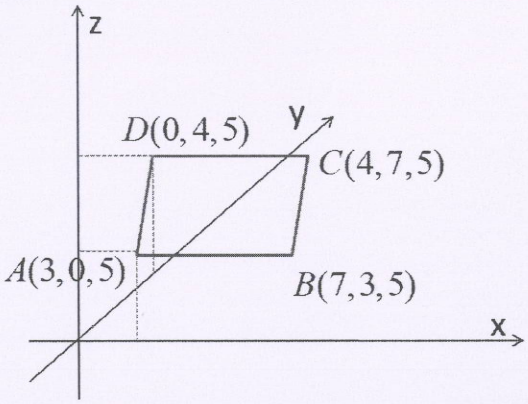
$x + y = k_1$, $x = k_4$ düzlemleri bir doğru boyunca kesişir ve aralarındaki açı 45 derecedir, $x = k_4$, $y = k_5$ düzlemleri bir doğru boyunca kesişir ve aralarındaki açı 90 derecedir. Teorem 3.8 den dolayı çokgenler aynı zamanda Taksi düzgündür.

Dolayısıyla $\mathbb{R}^3$ de, iki ÇKSD si $x = k_4$, $y = k_5$ düzlemleri üzerinde yada bir ÇKSD ve bir ÇOSD $x + y = k_1$, $x = k_4$ düzlemleri üzerinde olan, ağırlık merkezi bu düzlemlerin arakesit doğrusu üzerinde ve bu düzlemlere dik olan bütün Öklidyen düzgün 4−genler aynı zamanda Taksi düzgün 4−gendir. Benzer şekilde bu şartları sağlayan başka düzlem ikilileri de elde edilebilir.■

Teorem 3.28: $\mathbb{R}^3$ de Öklidyen bir düzgün dörtgen (kare) $x = k_1$, $y = k_2$, $z = k_3$ düzlemlerinden herhangi birinin içinde ise bu düzgün dörtgen aynı zamanda Taksi düzgün dörtgendir.

İspat: Teorem 1.34 den dolayı analitik düzlemdeki bütün Öklidyen dörtgenler (kareler) aynı zamanda Taksi düzgün dörtgenlerdir. $\mathbb{R}^3$ de $z = 0$ düzlemi aynı zamanda analitik düzlemdir. Dolayısıyla $z = 0$ düzlemindeki bütün Öklidyen düzgün dörtgenler aynı zamanda Taksi düzgündür. Ayrıca Önerme 1.21 den dolayı ötelemeler Taksi izometridir. $z = k_3$ düzlemi ise $z = 0$ düzleminin ötelenmiş halidir. Dolayısıyla $z = k_3$ düzlemi içindeki herhangi bir Öklidyen düzgün dörtgen aynı zamanda Taksi düzgündür. $x = k_1$ ve $y = k_2$ düzlemleri için de yukarıdaki ifadeler geçerlidir.■

Örnek 3.29: $\mathbb{R}^3$ de $z = 5$ düzlemi içinde $A = (3,0,5)$, $B = (7,3,5)$, $C = (4,7,5)$, $D = (0,4,5)$ noktaları için $ABCD$ karesi gözönüne alınsın.



Şekil 3.85

$d_E(A,B) = d_E(B,C) = d_E(C,D) = d_E(A,D) = 5$ ve $[AB] \perp [BC]$, $[BC] \perp [CD]$, $[CD] \perp [AD]$, $[AD] \perp [AB]$ dir. Dolayısıyla $ABCD$ Öklidyen düzgün dörtgendir.

Şimdi de $ABCD$ dörtgeninin Taksi düzgünlüğü incelenirse;

$$d_T(A,B) = |7-3| + |3-0| + |5-5| = 4+3+0 = 7$$

benzer şekilde

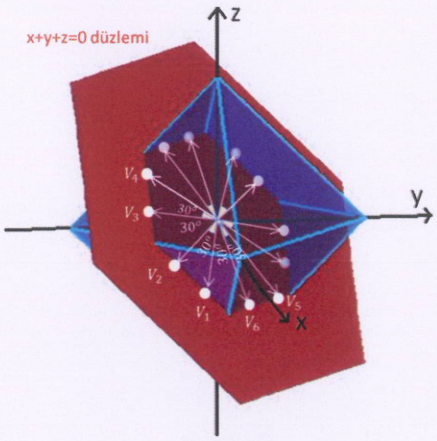
$$d_T(B,C) = d_T(C,D) = d_T(A,D) = 7$$

olup, $ABCD$ dörtgeni aynı zamanda Taksi düzgün dörtgendir.

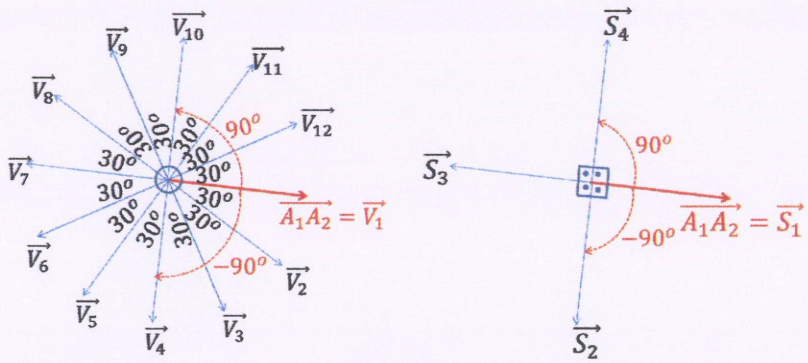
Teorem 3.30: Analitik $3-$uzayda $\pm x \pm y \pm z = 0$ düzlemlerinden biri üzerinde bulunan $A_1A_2A_3A_4$ Öklidyen düzgün $4-$geninin herhangi bir kenarının Taksi uzunluğu Öklid uzunluğunun $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$ katı ise $A_1A_2A_3A_4$ aynı zamanda Taksi düzgündür.

İspat: Analitik $3-$uzayda $x+y+z=0$ düzlemi üzerinde $A_1A_2A_3A_4$ Öklidyen düzgün $4-$genin A_1A_2 kenarının Taksi uzunluğu Öklid uzunluğunun $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$ katı olsun. Bu durumda $d_T(A_1,A_2) = \frac{3+\sqrt{3}}{3} d_E(A_1,A_2)$ dir. Orijin merkezli $d_T(A_1,A_2)$ yarıçaplı Taksi küre ile orijin merkezli $d_E(A_1,A_2)$ yarıçaplı Öklidyen kürenin ortak

noktalarıyla Sonuç 3.14 den dolayı aralarındaki açı 30^o olan Taksi eşit uzunlukta ve Öklidyen eşit uzunlukta 12 vektör elde edilir. Bu vektörler $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{V_1}$, $2 \leq i \leq 12$ için $\overrightarrow{V_i}$ olsun. $A_1A_2A_3A_4$ Öklidyen düzgün $4-$genin kenarlarını oluşturan vektörler $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{S_1}, \overrightarrow{S_2}, \overrightarrow{S_3}, \overrightarrow{S_4}$ olsun.



Şekil 3. 87



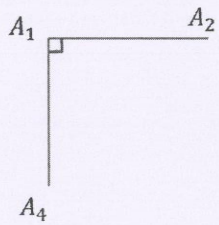
Şekil 3. 88

$1 \leq i \leq 12$ için $\overrightarrow{V_i}$ ve $1 \leq i \leq 4$ için $\overrightarrow{S_i}$ vektörleri aynı $x + y + z = 0$ düzlemi üzerindedir. $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{V_1}$ ve $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{S_1}$ olduğundan dolayı $\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{S_1}$ dir.

$\overrightarrow{V_{10}}$ ve $\overrightarrow{S_4}$ vektörleri, $\overrightarrow{V_1}$ vektörünün $x+y+z = 0$ düzleminin normal vektörü olan $\overrightarrow{N} = (1, 1, 1)$ ekseni etrafında $+90^o$ dönmesiyle elde edilen vektörlerdir. Dolayısıyla $\overrightarrow{V_{10}} = \overrightarrow{S_4}$ dir. Benzer şekilde $\overrightarrow{V_7} = \overrightarrow{S_3}$ ve $\overrightarrow{V_4} = \overrightarrow{S_2}$ olur. $1 \leq i \leq 12$ için $\overrightarrow{V_i}$ vektörlerinin Taksi uzunluğu eşit olduğundan dolayı $1 \leq i \leq 4$ için $\overrightarrow{S_i}$ vektörlerinin de Taksi uzunluğu eşittir. Dolayısıyla $A_1A_2A_3A_4$ aynı zamanda Taksi düzgündür.■

Teorem 3.31: Analitik 3−uzayda $\overrightarrow{V} \in \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ olmak üzere Öklidyen düzgün 4−genin bir köşesinde birleşen 2 ayrıt arasında, $\overrightarrow{V}$ dönme ekseni etrafında $\frac{\pi}{2}$ radyanlık bir dönme var ise Öklidyen düzgün 4−gen aynı zamanda Taksi düzgün dörtgendir.

İspat: Analitik 3-uzayda $A_1A_2A_3A_4$ Öklidyen düzgün 4−gen olsun. Bilindiği üzere herhangi bir düzgün 4−gen bir köşede birleşen 2 doğru parçası ile belirlenebilir. Çünkü diğer ayrıtlar bu doğru parçalarına eştir.



Şekil 3.89

Analitik 3−uzayda herhangi bir Ökliyen düzgün 4−genin bir köşesindeki ayrıtları $[A_1A_2]$ ve $[A_1A_4]$ doğru parçalarının dönme eksenlerinin doğrultu vektörü $\overrightarrow{V} \in \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ olsun. $A_1A_2A_3A_4$ Öklidyen düzgün 4−gen olduğundan dolayı $[A_1A_2] \perp [A_1A_4]$ dir. Dolayısıyla dönme açısı $\frac{\pi}{2}$ derecedir. Yardımcı Teorem 1.27 den dolayı bu dönme Taksi izometridir. Böylece $d_T(A_1,A_2) = d_T(A_1,A_4)$ dir ve $A_1A_2A_3A_4$ aynı zamanda Taksi 4−gendir.■

Teorem 3 32: $\mathbb{R}^3$ de herhangi iki TSD si

$$\{x \mp y = k_1, x \mp z = k_2, y \mp z = k_3, x = k_4, y = k_5, z = k_6\}$$

kümesinin elemanı olan Öklidyen düzgün üçgen vardır ve bu üçgen aynı zamanda Taksi düzgündür.

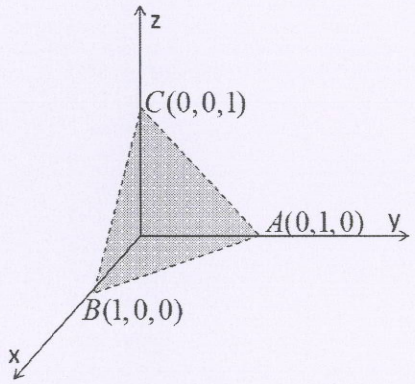
İspat: Analitik 3−uzayda herhangi bir Ökliyen düzgün üçgen $A_1A_2A_3$ olsun. Üçgenin herhangi iki TSD si arasındaki açı 60 derecedir. Dolayısıyla $x \mp y = k_1$, $x \mp z = k_2$, $y \mp z = k_3$, $x = k_4$, $y = k_5$, $z = k_6$ düzlemlerinden aralarındaki açı 60 derece olan düzlem ikilileri gözönüne alınsın. $x + y = k_1$, $x + z = k_2$ düzlemleri bir

doğru boyunca kesişir ve aralarındaki açı 60 derecedir. Teorem 3.8 dan dolayı üçgen aynı zamanda Taksi düzgündür. Bu şekilde başka düzlem ikilileri de elde edilebilir.■

Örnek 3.33: $A(0,1,0)$, $B(1,0,0)$, $C(0,0,1)$ noktaları ele alındığında,

$$d_E(A,B) = d_E(A,B) = d_E(A,B) = \sqrt{2}$$

olduğundan ABC üçgeni Öklidyen eşkenar üçgendir.



Şekil 3.90

$$d_T(A,B) = d_T(A,C) = d_T(B,C) = 2$$

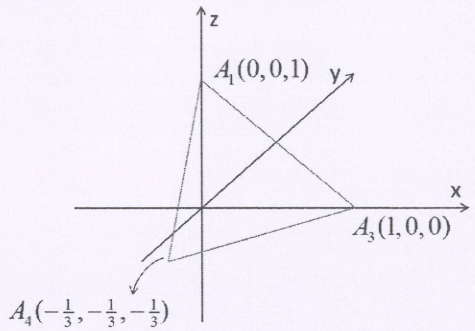
olduğundan ABC üçgeni aynı zamanda Taksi eşkenar üçgenidir. Ayrıca ABC üçgeninin TSD leri $x-y=0, y-z=0, x-z=0$ dır.

Simetri düzlemleri, Taksi düzgün çokgenleri tespit etmekte etkili fakat yetersiz bir yöntemdir. Çünkü simetri düzlemleri $x \mp y = k_1$, $x \mp z = k_2$, $y \mp z = k_3$, $x = k_4$, $y = k_5$, $z = k_6$ şeklinde olmadığı halde Taksi düzgün üçgenler vardır. Bunu bir örnekle ifade edecek olursak;

Örnek 3.34: $A(0,0,1), B(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}), C(1,0,0)$ noktaları için

$$d_E(A,B) = d_E(A,C) = d_E(B,C) = \sqrt{2}$$

olduğundan ABC bir Öklidyen eşkenar üçgendir.



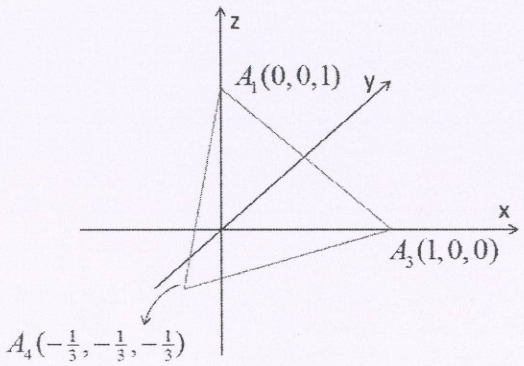
Şekil 3.91

$$d_T(A,B) = d_T(A,C) = d_T(B,C) = 2$$

olduğundan ABC aynı zamanda Taksi eşkenar üçgendir. Fakat bu üçgenin TSD lerinden yalnız bir tanesi $x \mp y = k_1$, $x \mp z = k_2$, $y \mp z = k_3$, $x = k_4$, $y = k_5$, $z = k_6$ düzlemlerinden oluşmakta, diğer iki simetri düzlemi ise tamamen farklı düzlemlerden oluşmaktadır.

Dolayısıyla simetri düzlemleri Taksi eşkenar üçgenleri tespit etmede yeterli bir yöntem olmamaktadır. Aynı örnek Önerme 3.12 kullanılarak tekrar incelenirse;

Örnek 3.35: $A(0,0,1), B(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}), C(1,0,0)$ noktaları için;



Şekil 3.92

AB doğrusunun doğrultman vektörü, $\overrightarrow{V}_1 = (-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{4}{3})$

AC doğrusunun doğrultman vektörü, $\overrightarrow{V}_2 = (1,0,-1)$

BC doğrusunun doğrultman vektörü, $\overrightarrow{V}_3 = (\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ olup

$$g\left(\overrightarrow{V}_1\right) = \frac{||\overrightarrow{v}||}{|v_1| + |v_2| + |v_3|} = \frac{\sqrt{(-\frac{1}{3})^2 + (-\frac{1}{3})^2 + (-\frac{4}{3})^2}}{|-\frac{1}{3}| + |-\frac{1}{3}| + |-\frac{4}{3}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$g\left(\overrightarrow{V}_2\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ve } g\left(\overrightarrow{V}_3\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

bulunur. Buna göre

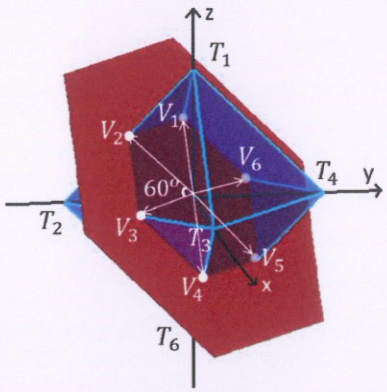
$$\begin{aligned} d_E(A,B) &= g\left(\overrightarrow{V}_1\right) \cdot d_T(A,B) \\ d_E(A,C) &= g\left(\overrightarrow{V}_2\right) \cdot d_T(A,C) \\ d_E(B,C) &= g\left(\overrightarrow{V}_3\right) \cdot d_T(B,C) \end{aligned}$$

olduğundan dolayı

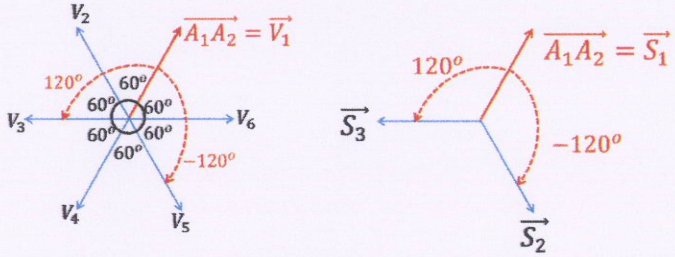
$d_T(A,B) = d_T(A,C) = d_T(B,C)$ olur. Dolayısıyla ABC üçgeni Taksi eşkenar üçgendir.

Teorem 3.36: Analitik 3−uzayda $\pm x \pm y \pm z = 0$ düzlemlerinden biri üzerinde bulunan $A_1A_2A_3$ Öklidyen düzgün 3−geninin herhangi bir kenarının Taksi uzunluğu Öklid uzunluğunun $\sqrt{2}$ katı ise $A_1A_2A_3$ aynı zamanda Taksi düzgündür.

İspat: Analitik 3−uzayda $x + y + z = 0$ düzlemi üzerinde $A_1A_2A_3$ Öklidyen düzgün 3−genin A_1A_2 kenarının Taksi uzunluğu Öklid uzunluğunun $\sqrt{2}$ katı olsun. O halde $d_T(A_1, A_2) = \sqrt{2}d_E(A_1, A_2)$ dir. Orijin merkezli $d_T(A_1, A_2)$ yarıçaplı Taksi küre ile orijin merkezli $d_E(A_1, A_2)$ yarıçaplı Öklidyen kürenin ortak noktalarıyla Teorem 3.21 den dolayı aralarındaki açı 60^o olan Taksi eşit uzunlukta ve Öklidyen eşit uzunlukta 6 vektör elde edilir. Bu vektörler $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}, \overrightarrow{V_4}, \overrightarrow{V_5}, \overrightarrow{V_6}$ olsun. $A_1A_2A_3$ Öklidyen düzgün 3−genin kenarlarını oluşturan vektörler $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{S_1}, \overrightarrow{S_2}, \overrightarrow{S_3}$ olsun.



Şekil 3. 93



Şekil 3. 94

$1 \leq i \leq 6$ için $\overrightarrow{V_i}$ ve $\overrightarrow{S_1}, \overrightarrow{S_2}, \overrightarrow{S_3}$ vektörleri aynı $x + y + z = 0$ düzlemi üzerindedir. $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{V_1}$ ve $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{S_1}$ olduğundan dolayı $\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{S_1}$ dir.

$\overrightarrow{V_5}$ ve $\overrightarrow{S_3}$ vektörleri, $\overrightarrow{V_1}$ vektörünün $x+y+z = 0$ düzleminin normal vektörü olan $\overrightarrow{N} = (1, 1, 1)$ ekseni etrafında $+120^o$ dönmesiyle elde edilen vektörlerdir. Dolayısıyla $\overrightarrow{V_5} = \overrightarrow{S_3}$ dir. Benzer şekilde $\overrightarrow{V_3} = \overrightarrow{S_2}$ olur. $1 \leq i \leq 6$ için $\overrightarrow{V_i}$ vektörlerinin Taksi uzunluğu eşit olduğundan dolayı $1 \leq i \leq 3$ için $\overrightarrow{S_i}$ vektörlerinin de Taksi uzunluğu eşittir. Dolayısıyla $A_1A_2A_3$ aynı zamanda Taksi düzgündür.■

Örnek 3.37: Analitik 3−uzayda köşe noktaları $A_1 = (0, 0, 0)$, $A_2 = (0, -1, 1)$, $A_3 = (1, -1, 0)$ olan $A_1A_2A_3$ hem Öklidyen hem de Taksi düzgün 3−gendir.

A_1, A_2, A_3 noktaları $x + y + z = 0$ düzlemi üzerindedir.

$$d_E(A_1, A_2) = d_E(A_2, A_3) = d_E(A_3, A_1) = \sqrt{2}$$
$$d_T(A_1, A_2) = d_T(A_2, A_3) = d_T(A_3, A_1) = 2$$

$\overrightarrow{A_1A_2} = (0,-1,1)$, $\overrightarrow{A_1A_3} = (1,-1,0)$ vektörleri arasındaki açı α olmak üzere $\measuredangle A_3A_1A_2 = \alpha$ dır. Buradan;

$$cos\alpha = \frac{< \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3} >}{\|A_1A_2\| \cdot \|A_1A_3\|} = \frac{0\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) + 1\cdot 0}{\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}} = \frac{1}{2}$$

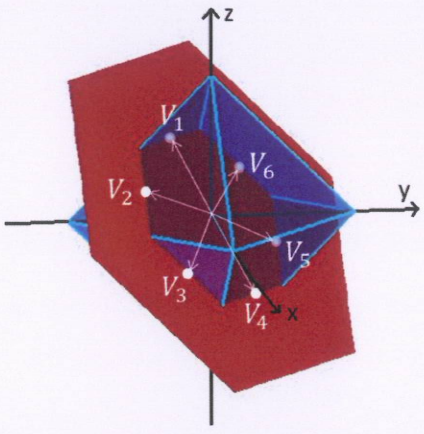
dolayısıyla $\alpha = 60^o$ dir. Benzer işlemlerle,

$\measuredangle A_3A_1A_2 = \measuredangle A_1A_2A_3 = \measuredangle A_2A_3A_1 = 60^o$ elde edilir. Dolayısıyla $A_1A_2A_3$ hem Öklidyen hem de Taksi düzgün 3−gendir.

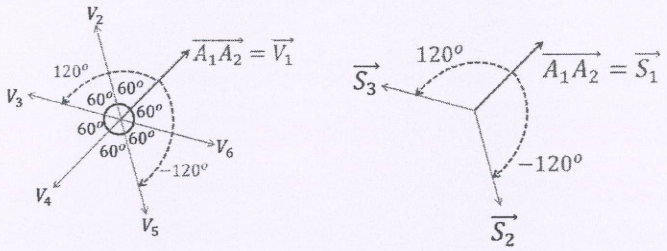
Ayrıca $d_T(A_1,A_2) = \sqrt{2}d_E(A_1,A_2)$ olduğu açıktır.

Teorem 3.38: Analitik 3−uzayda $\pm x \pm y \pm z = 0$ düzlemlerinden biri üzerinde bulunan $A_1A_2A_3$ Öklidyen düzgün 3−geninin herhangi bir kenarının Taksi uzunluğu Öklid uzunluğunun $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ katı ise $A_1A_2A_3$ aynı zamanda Taksi düzgündür.

İspat: Analitik 3−uzayda $x+y+z=0$ düzlemi üzerinde $A_1A_2A_3$ Öklidyen düzgün 3−genin A_1A_2 kenarının Taksi uzunluğu Öklid uzunluğunun $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ katı olsun. O halde $d_T(A_1,A_2) = \frac{2\sqrt{6}}{3}d_E(A_1,A_2)$ dir. Orijin merkezli $d_T(A_1,A_2)$ yarıçaplı Taksi küre ile orijin merkezli $d_E(A_1,A_2)$ yarıçaplı Öklidyen kürenin ortak noktalarıyla Teorem 3.24 den dolayı aralarındaki açı 60^o olan Taksi eşit uzunlukta ve Öklidyen eşit uzunlukta 6 vektör elde edilir. Bu vektörler $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}, \overrightarrow{V_4}, \overrightarrow{V_5}, \overrightarrow{V_6}$ olsun. $A_1A_2A_3$ Öklidyen düzgün 3−genin kenarlarını oluşturan vektörler $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{S_1}, \overrightarrow{S_2}, \overrightarrow{S_3}$ olsun.



Şekil 3.95



Şekil 3.96

$1 \leq i \leq 6$ için $\overrightarrow{V_i}$ ve $\overrightarrow{S_1}, \overrightarrow{S_2}, \overrightarrow{S_3}$ vektörleri aynı $x + y + z = 0$ düzlemi üzerindedir. $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{V_1}$ ve $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{S_1}$ olduğundan dolayı $\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{S_1}$ dir.

$\overrightarrow{V_5}$ ve $\overrightarrow{S_3}$ vektörleri, $\overrightarrow{V_1}$ vektörünün $x+y+z = 0$ düzleminin normal vektörü olan $\overrightarrow{N} = (1, 1, 1)$ ekseni etrafında $+120^o$ dönmesiyle elde edilen vektörlerdir. Dolayısıyla $\overrightarrow{V_5} = \overrightarrow{S_3}$ dir. Benzer şekilde $\overrightarrow{V_3} = \overrightarrow{S_2}$ olur. $1 \leq i \leq 6$ için $\overrightarrow{V_i}$ vektörlerinin Taksi uzunluğu eşit olduğundan dolayı $1 \leq i \leq 3$ için $\overrightarrow{S_i}$ vektörlerinin de Taksi uzunluğu eşittir. Dolayısıyla $A_1A_2A_3$ aynı zamanda Taksi düzgündür.■

Örnek 3.40: Analitik 3−uzayda köşe noktaları

$$A_1 = (0, 0, 0), A_2 = (3, -6, 3), A_3 = (6, -3, -3)$$

olan $A_1A_2A_3$ hem Öklidyen hem de Taksi düzgün 3−gendir.

A_1, A_2, A_3 noktaları $x + y + z = 0$ düzlemi üzerindedir.

$$d_E(A_1, A_2) = d_E(A_2, A_3) = d_E(A_3, A_1) = 3\sqrt{6}$$
$$d_T(A_1, A_2) = d_T(A_2, A_3) = d_T(A_3, A_1) = 12$$

$\overrightarrow{A_1A_2} = (3, -6, 3)$, $\overrightarrow{A_1A_3} = (6, -3, -3)$ vektörleri arasındaki açı α denilirse, $\measuredangle A_3A_1A_2 = \alpha$ dır. Buradan;

$$cos\alpha = \frac{< \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_6} >}{\|A_1A_2\| \cdot \|A_1A_3\|} = \frac{3 \cdot 6 + (-6) \cdot (-3) + 3 \cdot (-3)}{\sqrt{3^2 + (-6)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{6^2 + (-3)^2 + (-3)^2}} = \frac{27}{54} = \frac{1}{2}$$

dolayısıyla $\alpha = 60^o$ dir. Benzer işlemlerle, $\measuredangle A_3A_1A_2 = \measuredangle A_1A_2A_3 = \measuredangle A_2A_3A_1 = 60^o$ elde edilir. Dolayısıyla $A_1A_2A_3$ hem Öklidyen hem de Taksi düzgün 3−gendir.

Ayrıca $d_T(A_1, A_2) = \frac{2\sqrt{6}}{3} d_E(A_1, A_2)$ olduğu açıktır.

Teorem 3.41: Analitik 3−uzayda $\pm x \pm y \pm z = 0$ düzlemlerinden biri üzerinde bulunan $A_1A_2A_3$ Öklidyen düzgün 3−geninin herhangi bir kenarının Taksi uzunluğu Öklid uzunluğunun $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$ katı ise $A_1A_2A_3$ aynı zamanda Taksi düzgündür.

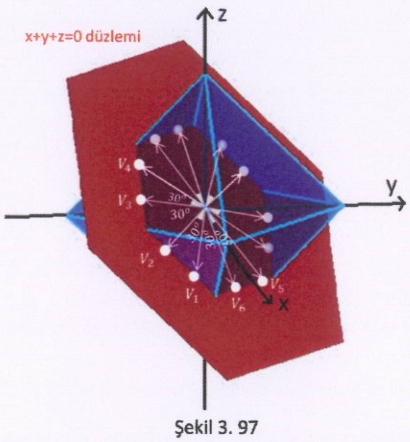
İspat: Analitik 3−uzayda $x + y + z = 0$ düzlemi üzerinde $A_1A_2A_3$ Öklidyen düzgün 3−genin A_1A_2 kenarının Taksi uzunluğu Öklid uzunluğunun $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$ katı olsun. O halde $d_T(A_1, A_2) = \frac{3+\sqrt{3}}{3} d_E(A_1, A_2)$ dir. Orijin merkezli $d_T(A_1, A_2)$ yarıçaplı Taksi küre ile orijin merkezli $d_E(A_1, A_2)$ yarıçaplı Öklidyen kürenin ortak noktalarıyla Sonuç 3.14 den dolayı aralarındaki açı 30^o olan Taksi eşit uzunlukta ve Öklidyen eşit uzunlukta 12 vektör elde edilir. Bu vektörler

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}, \overrightarrow{V_4}, \overrightarrow{V_5}, \overrightarrow{V_6}, \overrightarrow{V_7}, \overrightarrow{V_8}, \overrightarrow{V_9}, \overrightarrow{V_{10}}, \overrightarrow{V_{11}}, \overrightarrow{V_{12}}$$

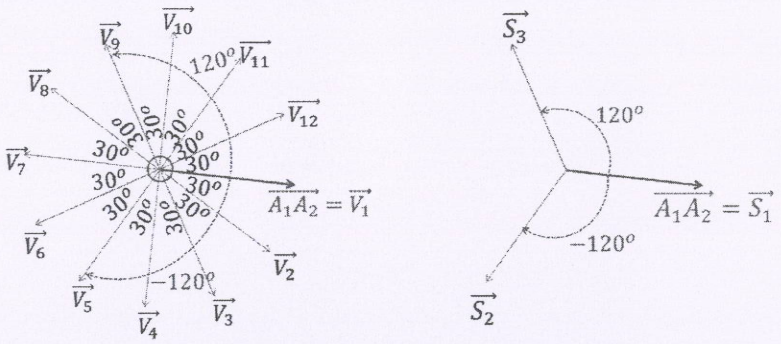
olsun. $A_1A_2A_3$ Öklidyen düzgün 3−genin kenarlarını oluşturan vektörler

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{S_1}, \overrightarrow{S_2}, \overrightarrow{S_3}$$

olsun.



Şekil 3. 97



Şekil 3. 98

$1 \leq i \leq 12$ için $\overrightarrow{V_i}$ ve $\overrightarrow{S_1}, \overrightarrow{S_2}, \overrightarrow{S_3}$ vektörleri aynı $x+y+z=0$ düzlemi üzerindedir. $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{V_1}$ ve $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{S_1}$ olduğundan dolayı $\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{S_1}$ dir.

$\overrightarrow{V_9}$ ve $\overrightarrow{S_3}$ vektörleri, $\overrightarrow{V_1}$ vektörünün $x + y + z = 0$ düzleminin normal vektörü $\overrightarrow{N} = (1, 1, 1)$ ekseni etrafında $+120^o$ dönmesiyle elde edilen vektörlerdir. Dolayısıyla $\overrightarrow{V_9} = \overrightarrow{S_3}$ dir. Benzer şekilde $\overrightarrow{V_5} = \overrightarrow{S_2}$ olur. $1 \leq i \leq 12$ için $\overrightarrow{V_i}$ vektörlerinin Taksi uzunluğu eşit olduğundan dolayı $1 \leq i \leq 3$ için $\overrightarrow{S_i}$ vektörlerinin de Taksi uzunluğu eşittir. Dolayısıyla $A_1A_2A_3$ aynı zamanda Taksi düzgündür.■

BÖLÜM 4

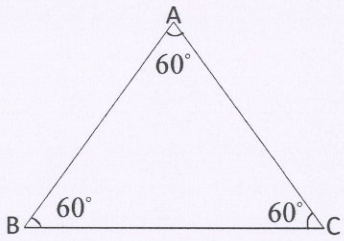
ÖKLİDYEN DÜZGÜN OLMAYAN TAKSİ DÜZGÜN ÇOKGENLER

Bu bölümde $\mathbb{R}^3$ de Öklidyen düzgün olmadığı halde Taksi düzgün olan çokgenlerin var olup olmadığı incelenmektedir.

Teorem 4.1: $\mathbb{R}^3$ de Öklidyen düzgün üçgen olmayan Taksi düzgün üçgen yoktur.

İspat: Düzgün çokgenin tanımından dolayı bütün iç açılarının eşit olması gerekir. Bir üçgenin iç açıları toplamı 180 derecedir. Dolayısıyla bir düzgün üçgenin iç açıları 60 derecedir.

Kabul edelim ki ABC üçgeni Taksi düzgün üçgen olsun. Bu durumda,



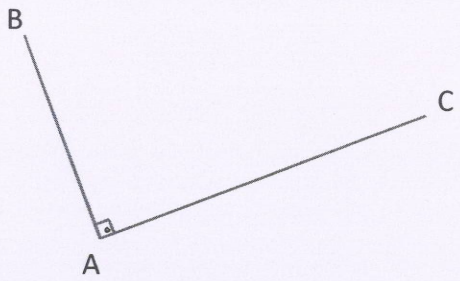
Şekil 4.1

$s(\hat{A}) = s(\hat{B}) = s(\hat{C}) = 60$ derecedir. Dolayısıyla ABC üçgeninin kenarlarının Öklidyen uzaklıkları da eşittir.

O halde her Taksi düzgün üçgen aynı zamanda Öklidyen düzgün üçgendir.

Teorem 4.2: $\mathbb{R}^3$ de Öklidyen düzgün $4-$gen (kare) olmadığı halde Taksi düzgün $4-$gen (kare) vardır.

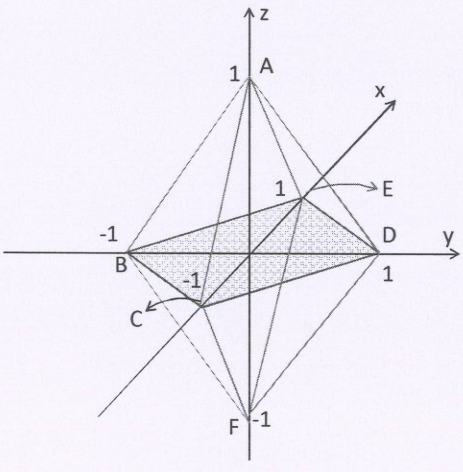
İspat: Öklidyen kare olmadığı halde Taksi kare olan düzgün dörtgenin varlığını göstermeden önce;



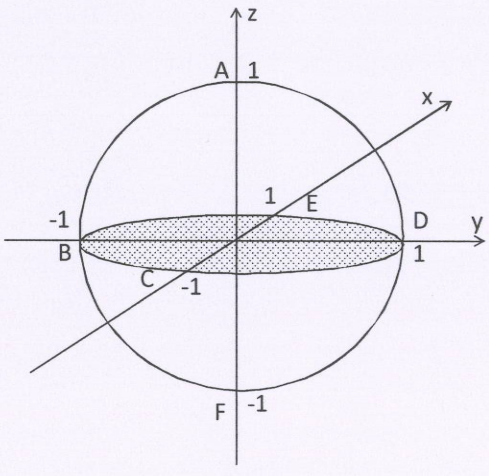
Şekil 4.2

$[AB] \perp [AC]$, $d_E(A,B) \neq d_E(A,C)$ ve $d_T(A,B) = d_T(A,C)$ olacak şekilde A, B, C noktalarının varlığı gösterilirse kareyi tamamlamak daha kolay olacaktır.

A, B, C noktalarının tespitinde yarıçapı 1 *birim*, merkezi orijin olan Taksi ve Öklid kürelerinden faydalanılacaktır.

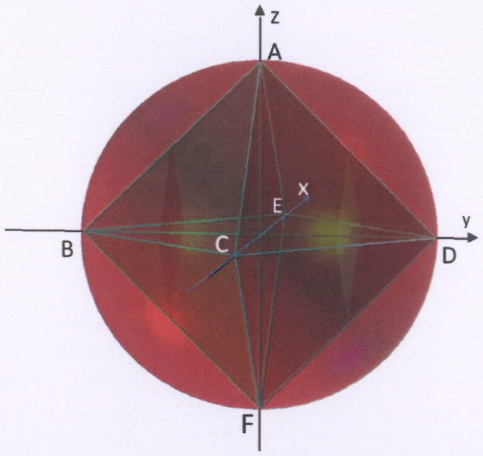


Şekil 4.3



Şekil 4.4

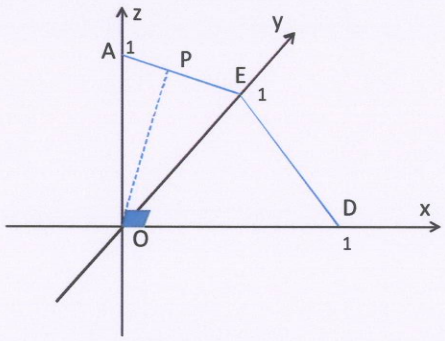
Şekil 4.3 deki Taksi birim küre ve Şekil 4.4 deki Öklidyen birim küre Şekil 4.5 de görüldüğü gibi beraber çizilir



Şekil 4.5

ve her iki birim küre gözönüne alınırsa, Taksi ve Öklid birim kürelerinin ortak noktalarının A, B, C, D, E, F köşe noktaları olduğu açıkça görülmektedir. Ayrıca Taksi küresinin Öklid küresinin içinde kaldığıda açıktır.

O halde;



Şekil 4.6

$[OD]$ doğru parçasının $x = 0$ düzlemine dik olduğu aşikardır. Çünkü AEO üçgeni $x = 0$ düzlemi üzerindedir.

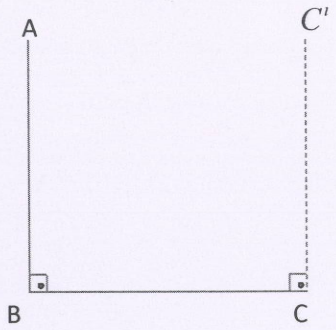
($[AE]$ *doğru parçasının uç noktalarının dahil olmadığı durumlar* (AE) *şeklide ifade edilmektedir.*)

Dolayısıyla; $P \in (AE)$ noktaları için $[OP] \perp [OD]$ dir. Şekil 4.6 da görüldüğü gibi $d_E(O, D) = 1$, $d_T(O, D) = 1$ fakat

$$P \in (AE) \text{ için } d_E(O, P) < 1, \; d_T(O, D) = 1$$

dir. Çünkü P noktası Taksi birim küresi üzerinde ve Taksi küresi Öklid küresinin içinde olduğundan A, B, C, D, E, F noktaları dışında Taksi küresi üzerindeki bütün noktaların orjin noktasına Öklidyen uzaklığı 1 *birim* den küçüktür.

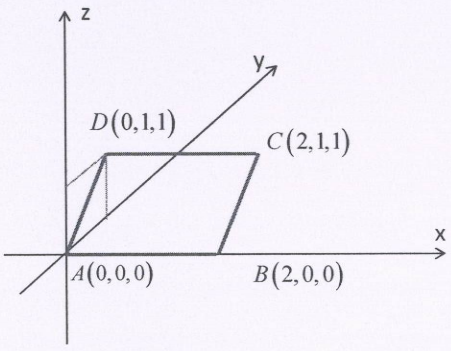
Burada $P \in (AE)$ olduğundan sonsuz tane P noktası elde edilebilir.



Şekil 4.7

$[AB] \perp [AC]$, $d_E(A,B) \neq d_E(A,C)$ ve $d_T(A,B) = d_T(A,C)$ olacak şekilde A, B, C noktaları bulunmuş olur. C noktası $[AB]$ doğru parçasına paralel $d_T(A,B)$ *birim* ötelenirse elde edilen C' noktası için $ABCC'$ karesi Öklidyen düzgün olmadığı halde Taksi düzgündür.■

Örnek 4.3: $A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$, $C(2,1,1), D(0,1,1)$ noktaları için $ABCD$ dörtgeni gözönüne alınırsa;



Şekil 4.8

$$d_E(A,D) = d_E(B,C) = \sqrt{2},\ \ d_E(A,B) = d_E(\,C,D) = 2$$

ve

$$[AB] \perp [BC],\ [BC] \perp [CD],\ [CD] \perp [AD],\ [AD] \perp [AB]$$

olduğundan $ABCD$ Öklidyen 3−uzayda bir dikdörtgendir. Fakat;

$$d_T(A,D) = d_T(B,C) = d_T(A,B) = d_T(\,C,D) = 2$$

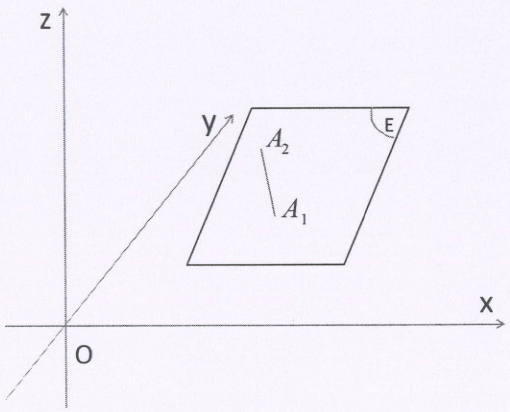
ve

$$[AB] \perp [BC],\ [BC] \perp [CD],\ [CD] \perp [AD],\ [AD] \perp [AB]$$

olduğundan $ABCD$ Taksi düzgün 4−gen (kare) dir.

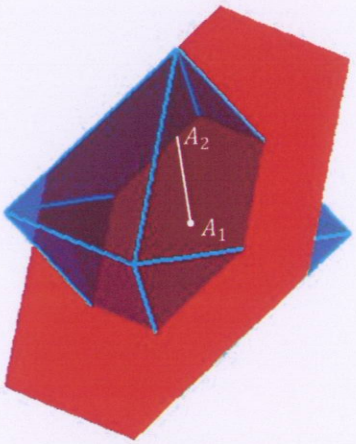
Teorem 4.4: $\mathbb{R}^3$ de verilen herhangi bir doğru parçasını kenar kabul eden sonsuz sayıda Taksi düzgün $2n$−gen vardır.

İspat: $\mathbb{R}^3$ deki bütün çokgenlerin köşe noktaları düzlemseldir. Dolayısıyla verilen bir doğru parçasını kenar kabul eden $2n$ kenarlı çokgen çizebilmek için öncelikle bu doğru parçasını içinde bulunduran bir E düzlemi seçilmelidir (Şekil 4.9).



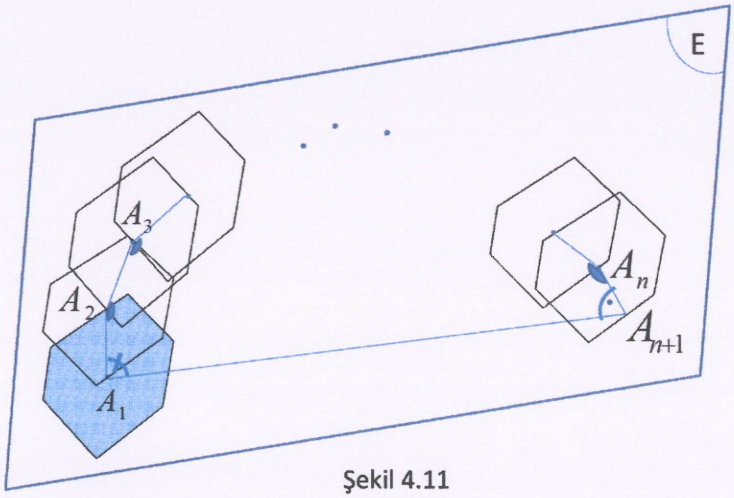
Şekil 4.9

Düzlem seçiminden sonra, A_1 merkezli ve $d_T(A_1, A_2)$ yarıçaplı Taksi küresi Şekil 4.10 da görüldüğü gibi çizilirse düzlem ile Taksi küre kesişir. Analitik 3−uzayda Öklidyen küre ile bir düzlemin kesişimi Öklidyen çember olduğu gibi Taksi küresi ile Taksi küresinin merkezinden geçen bir düzlemin kesişimi de analitik 3−uzayda E düzlemi üzerinde Taksi çemberidir (Burada Taksi çemberlerin alışılagelmiş Taksi çemberlerden farklı olabildiklerine dikkat edilmelidir).



Şekil 4.10

Her birinin uzunluğu $d_T(A_1, A_2)$ ve ardışık iki kenar arası açının ölçüsü $\frac{\pi(n-1)}{n}$ olan A_iA_{i+1}, $2 < i \leq n$ doğru parçaları, yarıçapı $d_T(A_1, A_2)$ *birim* olan ve merkezi A_i olan Taksi çemberleri yardımıyla Şekil 4.11 de görüldüğü gibi kolayca çizilebilir.



Şekil 4.11

Bu durumda $\measuredangle A_2A_1A_{n+1} + \measuredangle A_nA_{n+1}A_1 = \frac{\pi(n-1)}{n}$ olduğu kolayca görülebilir. Çizilen doğru parçalarına ek olarak, eğer A_iA_{i+1} doğru parçalarının, A_1A_{n+1} doğru parçasının orta noktasına göre simetrikleri olan $A'_iA'_{i+1}$, $1 \leq i \leq n$, doğru parçalarını çizersek, bir $2n-$gen elde edilir. Bir noktaya göre simetri veya bir nokta etrafında π radyan dönme Taksi uzaklıkları ve açı ölçülerini değiştirmediğinden

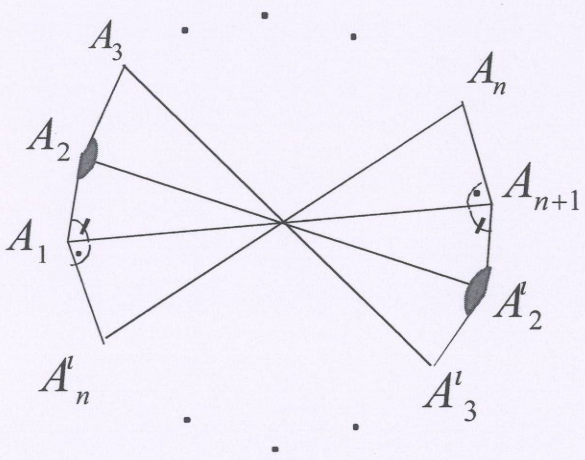
$1 \leq i \leq n$ için

$$d_T(A_i, A_{i+1}) = d_T(A'_i, A'_{i+1}) = d_T(A_1, A_2)$$

ve

$$\measuredangle A_1A_2A_3 = \measuredangle A_{n+1}A'_2A_1 = ... = \measuredangle A_{n-1}A_nA_{n+1} + \measuredangle A'_{n-1}A'_nA_1 = \frac{\pi(n-1)}{n}$$

dir.



Şekil 4.12

Böylece Taksi düzgün $2n-$gen elde edilir. Analitik $3-$uzayda bir doğru parçasından sonsuz sayıda düzlem geçtiğinden dolayı herbir düzlem için benzer yollarla sonsuz sayıda $2n$ kenarlı Taksi düzgün çokgen elde edilir.■

Öklidyen düzgün olmayan Taksi düzgün $5, 7, 9.., (2n-1)-$genlerin var olup olmadığı açık bir problemdir.

BÖLÜM 5

DÜZGÜN ÇOKYÜZLÜLER

Bu kısımda analitik 3−uzayda, hangi Öklidyen düzgün çokyüzlülerin Taksi düzgün çokyüzlü olduğu ve Taksi düzgün çokyüzlü olması için gerekli koşullar belirlenecektir. Bilindiği üzere bir çokyüzlünün Öklidyen düzgün çokyüzlü olması için;

I. Tüm yüzler Öklidyen düzgün çokgen,

II. Herbir köşesinde aynı sayıda yüz birleşir

III. Tüm yüzler eştir

koşulları sağlanmalıdır.

Dolayısıyla herhangi bir Öklidyen düzgün çokyüzlünün aynı zamanda Taksi düzgün çokyüzlü olması için yüzlerini oluşturan Öklidyen düzgün çokgenlerin Taksi düzgün çokgen olması gerekir. Öklidyen düzgün çokgenin Taksi düzgün çokgen olması için çokgenin kenarlarının Taksi uzunluğunun eşit olması gerekir. Bir çokyüzlünün ayrıtları, yüzleri oluşturan çokgenlerin kenarlarından oluştuğundan dolayı Öklidyen düzgün çokyüzlülerden ayrıtlarının Taksi uzunluğu eşit olanlar aynı zamanda Taksi düzgün çokyüzlüdürler. Bu bağlamda aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

Teorem 5.1: Analitik 3−uzayda köşe noktaları $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ olan Öklidyen düzgün çokyüzlünün ayrıt sayısı k, $k \in \{6, 12, 30\}$ ve $1 \leq i \leq k$ için $\overrightarrow{V_i} = (v_1, v_2, v_3)$ vektörleri Öklidyen düzgün çokyüzlünün ayrıtlarını üzerinde bulunduran doğruların doğrultman vektörleri olsun.

$A_1A_2A_3...A_n$ Öklidyen düzgün çokyüzlünün Taksi düzgün çokyüzlü olması için gerek ve yeter şart $1 \leq i, j \leq k$ için

$$g(\overrightarrow{V_i}) = g(\overrightarrow{V_j})$$

olmasıdır.

İspat: Öklidyen uzaklıkla Taksi uzaklık arasındaki bağıntı;

$\overrightarrow{V} = (v_1, v_2, v_3)$, AB doğrusunun doğrultman vektörü olmak üzere

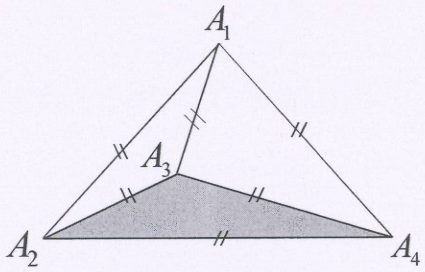
$d_E(A,B) = g(\overrightarrow{V}) \cdot d_T(A,B)$, $g(\overrightarrow{V}) = \frac{||\overrightarrow{V}||}{(|v_1|+|v_2|+|v_3|)}$

dir. Ayrıca analitik 3-uzayda Öklidyen düzgün çokyüzlülerin köşe, yüz ve ayrıt sayıları arasındaki ilişki;

Düzgün çokyüzlü	**Köşe sayısı**	**Yüz sayısı**	**Ayrıt sayısı**
Düzgün 4 – yüzlü	4	4	6
Düzgün 6 – yüzlü	8	6	12
Düzgün 8 – yüzlü	6	8	12
Düzgün 12 – yüzlü	20	12	30
Düzgün 20 – yüzlü	12	20	30

dir.

($\Rightarrow$) $n = 4$ için $A_1A_2A_3A_4$ Öklidyen düzgün 4−yüzlü aynı zamanda Taksi düzgün 4−yüzlü olsun;



Şekil 5.1

Öklidyen ve Taksi düzgün 4-yüzlünün ayrıtlarının Öklidyen ve Taksi uzunlukları birbirine eşittir.

$d_E(A_1,A_2)=d_E(A_1,A_3)=d_E(A_1,A_4)=d_E(A_2,A_3)=d_E(A_2,A_4)=d_E(A_3,A_4)$

ve

$d_T(A_1,A_2)=d_T(A_1,A_3)=d_T(A_1,A_4)=d_T(A_2,A_3)=d_T(A_2,A_4)=d_T(A_3,A_4)$

dir. Ayrıca;

$$
\begin{aligned}
d_E(A_1, A_2) &= g(\overrightarrow{V_1}) \cdot d_T(A_1, A_2) \\
d_E(A_1, A_3) &= g(\overrightarrow{V_2}) \cdot d_T(A_1, A_3) \\
d_E(A_1, A_4) &= g(\overrightarrow{V_3}) \cdot d_T(A_1, A_4) \\
d_E(A_2, A_3) &= g(\overrightarrow{V_4}) \cdot d_T(A_2, A_3) \\
d_E(A_2, A_4) &= g(\overrightarrow{V_5}) \cdot d_T(A_2, A_4) \\
d_E(A_3, A_4) &= g(\overrightarrow{V_6}) \cdot d_T(A_3, A_4)
\end{aligned}
$$

bağıntılarından $1 \leq i, j \leq 6$ için $g(\overrightarrow{V_i}) = g(\overrightarrow{V_j})$ olur.

Benzer yolla $n = 6, 8, 12, 20$ için de ispat yapılabilir.

($\Leftarrow$) $n = 4$ için $A_1A_2A_3A_4$ Öklidyen düzgün 4-yüzlü ve $1 \leq i, j \leq 6$ için $g(\overrightarrow{V_i}) = g(\overrightarrow{V_j})$ olsun. $A_1A_2A_3A_4$ Öklidyen düzgün 4-yüzlü olduğundan dolayı $d_E(A_1, A_2) = d_E(A_1, A_3) = d_E(A_1, A_4) = d_E(A_2, A_3) = d_E(A_2, A_4) = d_E(A_3, A_4)$ dir. Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
d_E(A_1, A_2) &= g(\overrightarrow{V_1}) \cdot d_T(A_1, A_2) \\
d_E(A_1, A_3) &= g(\overrightarrow{V_2}) \cdot d_T(A_1, A_3) \\
d_E(A_1, A_4) &= g(\overrightarrow{V_3}) \cdot d_T(A_1, A_4) \\
d_E(A_2, A_3) &= g(\overrightarrow{V_4}) \cdot d_T(A_2, A_3) \\
d_E(A_2, A_4) &= g(\overrightarrow{V_5}) \cdot d_T(A_2, A_4) \\
d_E(A_3, A_4) &= g(\overrightarrow{V_6}) \cdot d_T(A_3, A_4)
\end{aligned}
$$

dir. Buradan,

$d_T(A_1, A_2) = d_T(A_1, A_3) = d_T(A_1, A_4) = d_T(A_2, A_3) = d_T(A_2, A_4) = d_T(A_3, A_4)$

elde edilir.

Böylece $A_1A_2A_3A_4$ bir Taksi düzgün $4-$yüzlüdür.

$n = 6, 8, 12, 20$ için benzer şekilde çokyüzlülerin ayrıtlarının Taksi uzunluklarının eşit olduğu görülür.■

Teorem 5.2: Analitik 3−uzayda $k \in \mathbb{Z}^+$ için ayrıt sayısı k olan Öklidyen düzgün çokyüzlünün aynı zamanda Taksi düzgün çokyüzlü olması için gerek ve yeter şart çokyüzlünün ayrıtlarını oluşturan $1 \leq i \leq k$ için $(\overrightarrow{w}_i)$ vektörlerin kümesi W olmak üzere,

$\|\overrightarrow{w}_i\| \neq \|\overrightarrow{w}_i\|_T$ iken;

$S_1 = \{(x,y,z) \mid (0 \leq x,y,z \leq \|\overrightarrow{w}_i\|_T)$ için $\left(x - \frac{\|\overrightarrow{w}_i\|_T}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{\|\overrightarrow{w}_i\|_T}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{\|\overrightarrow{w}_i\|_T}{3}\right)^2 = \frac{3\|\overrightarrow{w}_i\|^2 - \|\overrightarrow{w}_i\|_T^2}{3}$ ve $x+y+z = \|\overrightarrow{w}_i\|_T$;

$(0 \leq x,z \leq \|\overrightarrow{w}_i\|_T$ ve $-\|\overrightarrow{w}_i\|_T \leq y \leq 0)$ için $\left(x - \frac{\|\overrightarrow{w}_i\|_T}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{\|\overrightarrow{w}_i\|_T}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{\|\overrightarrow{w}_i\|_T}{3}\right)^2 = \frac{3\|\overrightarrow{w}_i\|^2 - \|\overrightarrow{w}_i\|_T^2}{3}$ ve $x-y+z = \|\overrightarrow{w}_i\|_T$;

$(0 \leq z \leq \|\overrightarrow{w}_i\|_T$ ve $-\|\overrightarrow{w}_i\|_T \leq x,y \leq 0)$ için $\left(x + \frac{\|\overrightarrow{w}_i\|_T}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{\|\overrightarrow{w}_i\|_T}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{\|\overrightarrow{w}_i\|_T}{3}\right)^2 = \frac{3\|\overrightarrow{w}_i\|^2 - \|\overrightarrow{w}_i\|_T^2}{3}$ ve $-x-y+z = \|\overrightarrow{w}_i\|_T$;

$(0 \leq y,z \leq \|\overrightarrow{w}_i\|_T$ ve $-\|\overrightarrow{w}_i\|_T \leq x \leq 0)$ için $\left(x + \frac{\|\overrightarrow{w}_i\|_T}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{\|\overrightarrow{w}_i\|_T}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{\|\overrightarrow{w}_i\|_T}{3}\right)^2 = \frac{3\|\overrightarrow{w}_i\|^2 - \|\overrightarrow{w}_i\|_T^2}{3}$ ve $-x+y+z = \|\overrightarrow{w}_i\|_T$;

$(0 \leq x,y \leq \|\overrightarrow{w}_i\|_T$ ve $-\|\overrightarrow{w}_i\|_T \leq z \leq 0)$ için $\left(x - \frac{\|\overrightarrow{w}_i\|_T}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{\|\overrightarrow{w}_i\|_T}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{\|\overrightarrow{w}_i\|_T}{3}\right)^2 = \frac{3\|\overrightarrow{w}_i\|^2 - \|\overrightarrow{w}_i\|_T^2}{3}$ ve $x+y-z = \|\overrightarrow{w}_i\|_T$;

$(0 \leq x \leq \|\overrightarrow{w}_i\|_T$ ve $-\|\overrightarrow{w}_i\|_T \leq y,z \leq 0)$ için $\left(x - \frac{\|\overrightarrow{w}_i\|_T}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{\|\overrightarrow{w}_i\|_T}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{\|\overrightarrow{w}_i\|_T}{3}\right)^2 = \frac{3\|\overrightarrow{w}_i\|^2 - \|\overrightarrow{w}_i\|_T^2}{3}$ ve $x-y-z = \|\overrightarrow{w}_i\|_T$;

$(-\|\overrightarrow{w}_i\|_T \leq x,y,z \leq 0)$ için $\left(x + \frac{\|\overrightarrow{w}_i\|_T}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{\|\overrightarrow{w}_i\|_T}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{\|\overrightarrow{w}_i\|_T}{3}\right)^2 = \frac{3\|\overrightarrow{w}_i\|^2 - \|\overrightarrow{w}_i\|_T^2}{3}$ ve $-x-y-z = \|\overrightarrow{w}_i\|_T$;

$(0 \leq y \leq \|\overrightarrow{w}_i\|_T$ ve $-\|\overrightarrow{w}_i\|_T \leq x, z \leq 0)$ için $\left(x + \frac{\|\overrightarrow{w}_i\|_T}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{\|\overrightarrow{w}_i\|_T}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{\|\overrightarrow{w}_i\|_T}{3}\right)^2 = \frac{3\|\overrightarrow{w}_i\|^2 - \|\overrightarrow{w}_i\|_T^2}{3}$ ve $-x + y - z = \|\overrightarrow{w}_i\|_T\}$

ve

$\|\overrightarrow{w}_i\| = \|\overrightarrow{w}_i\|_T$ iken;

$S_2 = \{(\pm\|\overrightarrow{w}_i\|_T, 0, 0), (0, \pm\|\overrightarrow{w}_i\|_T, 0), (0, 0, \pm\|\overrightarrow{w}_i\|_T)\}$

olmak üzere $W \subset S_1 \cup S_2$ olmasıdır.

İspat:($\Rightarrow$) Analitik 3−uzayda ayrıt sayısı $k \in \mathbb{Z}^+$, $k \geq 4$ olan $A_1A_2...A_n$ Öklidyen ve Taksi düzgün çokyüzlü olsun. O halde çokyüzlünün bütün ayrıtlarının Taksi uzunluğu eşittir. Dolayısıyla çokyüzlünün ayrıtlarını oluşturan vektörlerin $(\overrightarrow{w}_i)$ de Taksi uzunluğu eşittir. Yani;

$1 \leq i, j \leq k$ için $\|\overrightarrow{w}_i\|_T = \|\overrightarrow{w}_j\|_T$ dir. Teorem 2.15 gereği $\overrightarrow{w}_i \in S_1 \cup S_2$ dir.

($\Leftarrow$) Analitik 3−uzayda ayrıt sayısı $k \in \mathbb{Z}^+$, $k \geq 4$ olan $A_1A_2...A_n$ Öklidyen düzgün çokyüzlünün ayrıtlarını oluşturan vektörlerin $(\overrightarrow{w}_i)$ kümesi W olmak üzere $W \subset S_1 \cup S_2$ olsun.

O halde Teorem 2.15 gereği $1 \leq i, j \leq k$ için $\|\overrightarrow{w}_i\|_T = \|\overrightarrow{w}_j\|_T$ dir. Dolayısıyla Öklidyen düzgün çokyüzlü aynı zamanda Taksi düzgün çokyüzlüdür.■

Teorem 5.1 ve Teorem 5.2 bütün düzgün şekiller için geçerlidir.

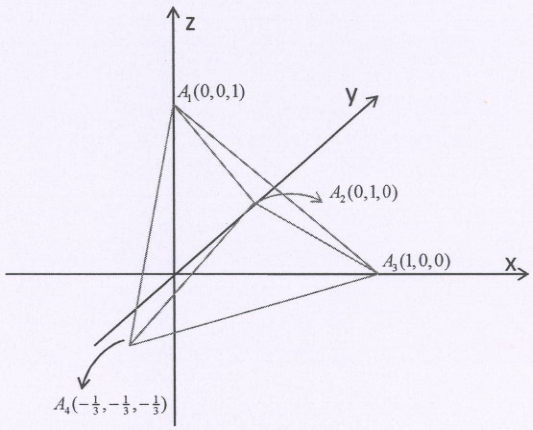
Öklidyen 3-uzaydaki tüm düzgün şekiller (Plato şekilleri) aşağıdaki tabloda özetlendiği şekildedir.

	Köşe sayısı	Yüzey sayısı	Kenar sayısı (Ayrıt)	Bir köşede kesişen yüzey sayısı	Bir yüzeyin kenar sayısı
Dört yüzlü	4	4	6	3	3
Altı yüzlü	8	6	12	3	4
Sekiz yüzlü	6	8	12	4	3
Oniki yüzlü	20	12	30	3	5
Yirmi yüzlü	12	20	30	5	3

5.1 Düzgün Dörtyüzlü

Analitik 3-uzayda Öklidyen düzgün olup aynı zamanda Taksi düzgün olan dörtyüzlü vardır.

Örnek 5.3: $A_1\,(0,0,1)$, $A_2\,(0,1,0)$, $A_3(1,0,0)$, $A_4(\frac{-1}{3},\frac{-1}{3},\frac{-1}{3})$ noktalarını köşe kabul eden Öklidyen $A_1A_2A_3A_4$ düzgün 4−yüzlü gözönüne alınsın.



Şekil 5.2

$1 \leq i,j \leq 4$ ve $i \neq j$ olmak üzere $d_E\,(A_i,A_j) = \sqrt{2}$ ve $d_T\,(A_i,A_j) = 2$ dir. O halde $A_1A_2A_3A_4$ hem Öklidyen hem de Taksi düzgün 4-yüzlüdür.

Ayrıca,

A_1, A_2 noktalarından geçen doğrunun doğrultman vektörü $\overrightarrow{V_1}$

A_1, A_3 noktalarından geçen doğrunun doğrultman vektörü $\overrightarrow{V_2}$

A_1, A_4 noktalarından geçen doğrunun doğrultman vektörü $\overrightarrow{V_3}$

A_2, A_3 noktalarından geçen doğrunun doğrultman vektörü $\overrightarrow{V_4}$

A_2, A_4 noktalarından geçen doğrunun doğrultman vektörü $\overrightarrow{V_5}$

A_3, A_4 noktalarından geçen doğrunun doğrultman vektörü $\overrightarrow{V_6}$

olsun.

Bu durumda;

$$\overrightarrow{V_1} = (0,1,-1), \overrightarrow{V_2} = (1,0,-1), \overrightarrow{V_3} = (\tfrac{-1}{3}, \tfrac{-1}{3}, \tfrac{-4}{3}),$$
$$\overrightarrow{V_4} = (1,-1,0), \overrightarrow{V_5} = (\tfrac{-1}{3}, \tfrac{-4}{3}, \tfrac{-1}{3}), \overrightarrow{V_6} = (\tfrac{-4}{3}, \tfrac{-1}{3}, \tfrac{-1}{3})$$

olur. Buna göre

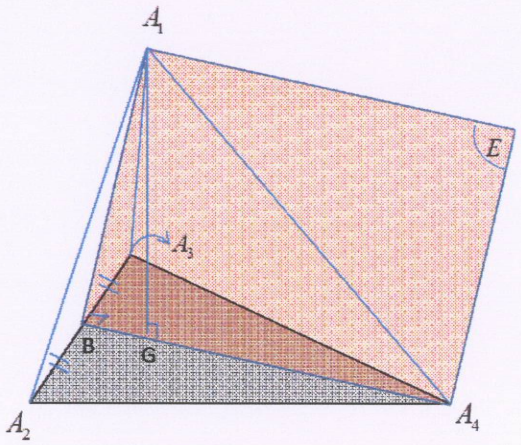
$$g\left(\overrightarrow{V}_1\right) = \frac{\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}}{|0|+|1|+|-1|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

dir. Benzer şekilde $g\left(\overrightarrow{V}_2\right) = g\left(\overrightarrow{V}_3\right) = g\left(\overrightarrow{V}_4\right) = g\left(\overrightarrow{V}_5\right) = g\left(\overrightarrow{V}_6\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dir.

Böylece Teorem 5.1 gereği $A_1A_2A_3A_4$ Öklidyen düzgün dörtyüzlü aynı zamanda Taksi düzgün dörtyüzlüdür.

Düzgün çokgenlerde olduğu gibi düzgün çokyüzlülerin de simetri düzlemleri vardır. Düzgün çokyüzlülerin yüzleri düzgün çokgenlerden oluşmaktadır. Bu düzgün çokgenlerin simetri düzlemleri aynı zamanda düzgün çokyüzlülerin de simetri düzlemidir. Bu durum bir örnek üzerinde incelenmektedir.

Örnek 5.4: $A_1A_2A_3A_4$ Öklidyen düzgün $4-$yüzlü olsun. E düzlemi, $A_2A_3A_4$ eşkenar üçgeninin simetri düzlemi olsun.



Şekil 5.3

E, $A_2A_3A_4$ eşkenar üçgeninin simetri düzlemi olduğundan $[A_2A_3] \perp E$ ve $[A_2A_3] \cap E = B$ olmak üzere $|A_2B| = |BA_3|$ olduğundan E düzlemi aynı zamanda

$A_1A_2A_3$ eşkenar üçgeninin de simetri düzlemidir. Dolayısıyla $A_1 \in E$ ve G de $A_2A_3A_4$ eşkenar üçgeninin ağırlık merkezi olmak üzere $[A_4G] \in E$ dir. Dolayısıyla E, $A_1A_2A_3A_4$ düzgün 4−yüzlüsünün de simetri düzlemidir.

Teorem 5.5: $\mathbb{R}^3$ de Öklidyen düzgün 4−yüzlünün en az biri farklı yüze ait birbirinden farklı 3 simetri düzlemi

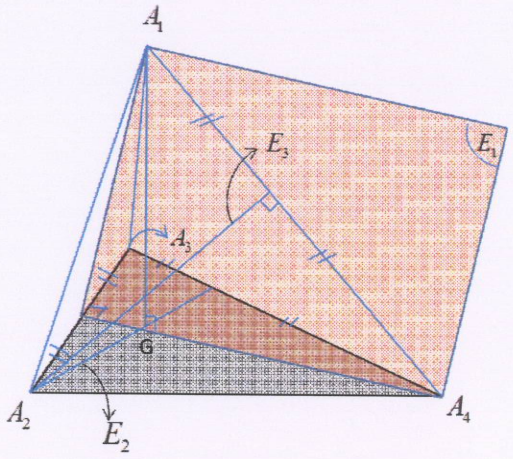
$$\{x \mp y = k_1,\ x \mp z = k_2,\ y \mp z = k_3,\ x = k_4,\ y = k_5,\ z = k_6\}$$

kümesinin elemanı ise bu düzgün 4−yüzlü aynı zamanda Taksi düzgün 4−yüzlüdür.

İspat: Sonuç 1.26 da $x \mp y = 0$, $x \mp z = 0$, $y \mp z = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ düzlemlerine göre yansımaların Taksi izometri olduğu belirtilmişti.

$$x \mp y = k_1,\ x \mp z = k_2,\ y \mp z = k_3,\ x = k_4,\ y = k_5,\ z = k_6$$

düzlemleri Sonuç 1.26 da belirtilen düzlemlere paralel düzlemlerdir. $A_1A_2A_3A_4$ Öklidyen düzgün dörtyüzlü olsun. Üç simetri düzleminden ikisi $A_2A_3A_4$ üçgeninin, biri de $A_1A_2A_4$ üçgeninin simetri düzlemi olsun (Şekil 5.4).



Şekil 5.4

Eğer E_1, E_2 simetri düzlemleri $A_2A_3A_4$ üçgeninin, E_3 simetri düzlemi de $A_1A_2A_4$ üçgeninin simetri düzlemi ise bu durumda

E_1 simetri düzlemi olduğundan;

$d_T(A_2, A_4) = d_T(A_3, A_4)$

$d_T(A_1, A_2) = d_T(A_1, A_3)$ eşitlikleri sağlanır.

E_2 simetri düzlemi olduğundan;

$d_T(A_2, A_4) = d_T(A_2, A_3)$

$d_T(A_1, A_4) = d_T(A_1, A_3)$ eşitlikleri sağlanır.

E_3 simetri düzlemi olduğundan;

$d_T(A_1, A_2) = d_T(A_2, A_3)$

$d_T(A_1, A_4) = d_T(A_3, A_4)$ eşitlikleri sağlanır.

Buradan;

$d_T(A_1, A_2) = d_T(A_2, A_3) = d_T(A_3, A_4) = d_T(A_1, A_4) = d_T(A_1, A_3) = d_T(A_2, A_4)$

elde edilir.

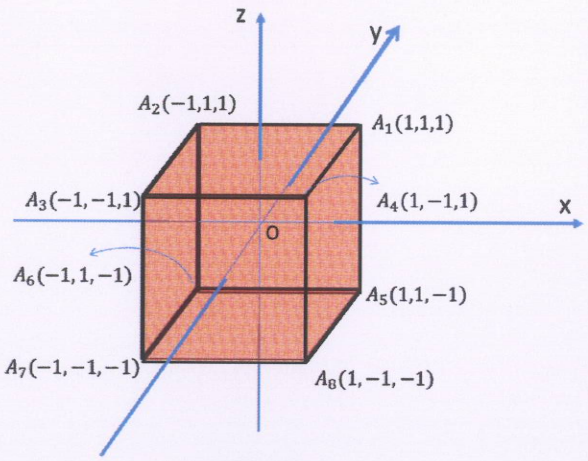
Böylece $A_1A_2A_3A_4$ düzgün 4−yüzlü Taksi düzgün 4−yüzlü olur.

Diğer simetri düzlemleri de benzer şekilde incelendiğinde aynı eşitliğin elde edildiği görülecektir.■

5.2 Düzgün Altıyüzlü (Küp)

Analitik 3−uzayda Öklidyen düzgün olup aynı zamanda Taksi düzgün olan altıyüzlü vardır.

Örnek 5.6: $A_1(1,1,1)$, $A_2(-1,1,1)$, $A_3(-1,-1,1)$, $A_4(1,-1,1)$, $A_5(1,1,-1)$, $A_6(-1,1,-1)$, $A_7(-1,-1,-1)$, $A_8(1,-1,-1)$ noktalarını köşe kabul eden Öklidyen $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ küpü ele alınsın.



Şekil 5.5

($A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ in Öklidyen küp olduğu açıktır.) Ayrıca, küpün ayrıtlarının Taksi uzunluğu 2 *birim* olduğundan aynı zamanda Taksi küptür.

A_1A_2 noktalarından geçen doğrunun doğrultman vektörü $\overrightarrow{V_1}$,
A_2A_3 noktalarından geçen doğrunun doğrultman vektörü $\overrightarrow{V_2}$,
A_3A_4 noktalarından geçen doğrunun doğrultman vektörü $\overrightarrow{V_3}$,
A_4A_1 noktalarından geçen doğrunun doğrultman vektörü $\overrightarrow{V_4}$,
A_1A_5 noktalarından geçen doğrunun doğrultman vektörü $\overrightarrow{V_5}$,
A_2A_6 noktalarından geçen doğrunun doğrultman vektörü $\overrightarrow{V_6}$,
A_3A_7 noktalarından geçen doğrunun doğrultman vektörü $\overrightarrow{V_7}$,
A_4A_8 noktalarından geçen doğrunun doğrultman vektörü $\overrightarrow{V_8}$,
A_5A_6 noktalarından geçen doğrunun doğrultman vektörü $\overrightarrow{V_9}$,
A_6A_7 noktalarından geçen doğrunun doğrultman vektörü $\overrightarrow{V_{10}}$,
A_7A_8 noktalarından geçen doğrunun doğrultman vektörü $\overrightarrow{V_{11}}$,
A_8A_5 noktalarından geçen doğrunun doğrultman vektörü $\overrightarrow{V_{12}}$,

olmak üzere,

$\overrightarrow{V_1}=(-2,0,0)$, $\overrightarrow{V_2}=(0,2,0)$, $\overrightarrow{V_3}=(2,0,0)$, $\overrightarrow{V_4}=(0,-2,0)$, $\overrightarrow{V_5}=(0,0,-2)$, $\overrightarrow{V_6}=(0,0,-2)$,
$\overrightarrow{V_7}=(0,0,-2)$, $\overrightarrow{V_8}=(0,0,-2)$, $\overrightarrow{V_9}=(-2,0,0)$, $\overrightarrow{V_{10}}=(0,-2,0)$, $\overrightarrow{V_{11}}=(2,0,0)$, $\overrightarrow{V_{12}}=(0,-2,0)$

elde edilir. Buna göre

$$g\left(\overrightarrow{V_1}\right) = \frac{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 0^2}}{|-2| + |0| + |0|} = 1$$

dir. Benzer şekilde; $1 \leq i \leq 12$ için $g\left(\overrightarrow{V}_i\right) = 1$ olur.

Buradan $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ Öklidyen küpün ayrıtlarının Taksi uzunluklarının eşit olduğu görülür. Dolayısıyla $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ aynı zamanda Taksi küptür.

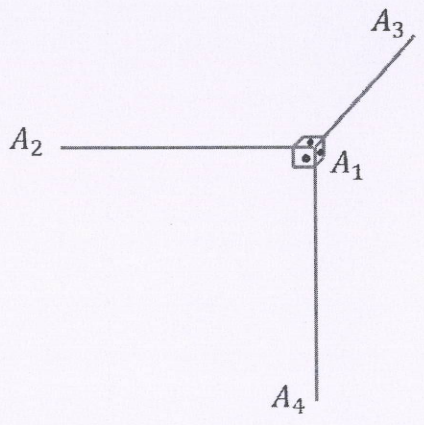
Teorem 5.7: $\mathbb{R}^3$ de Öklidyen bir küpün bütün yüzeyleri $x = k_1$, $y = k_2$, $z = k_3$ düzlemleri içinde olursa bu küpler aynı zamanda Taksi küptür.

İspat: Öklidyen küpün bütün yüzeyleri karedir ve $x = k_1$, $y = k_2$, $z = k_3$ düzlemi içinde Öklidyen her kare aynı zamanda Taksi karedir.

Dolayısıyla küpün bütün ayrıtlarının Taksi uzunlukları eşittir. Buradan küpün aynı zamanda Taksi küp olduğu elde edilmiş olur.■

Teorem 5.8: Analitik 3-uzayda $\overrightarrow{V} \in \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ olmak üzere Öklidyen düzgün altıyüzlünün bir köşesinde birleşen 3 ayrıt arasında, $\overrightarrow{V}$ dönme ekseni etrafında $\frac{\pi}{2}$ radyanlık bir dönme var ise Öklidyen düzgün altıyüzlü aynı zamanda Taksi düzgün altıyüzlüdür.

İspat: Analitik 3-uzayda $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ Öklidyen düzgün altıyüzlü olsun. Bilindiği üzere herhangi bir küp bir köşede birleşen 3 doğru parçası ile belirlenebilir. Çünkü diğer ayrıtlar bu doğru parçalarına eştir.



Şekil 5.6

Analitik 3-uzayda herhangi bir Ökliyen düzgün altıyüzlünün bir köşesindeki ayrıtları $[A_1A_2]$, $[A_1A_3]$ ve $[A_1A_4]$ doğru parçalarının dönme eksenlerinin doğrultu vektörü $\overrightarrow{V} \in \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ olsun.

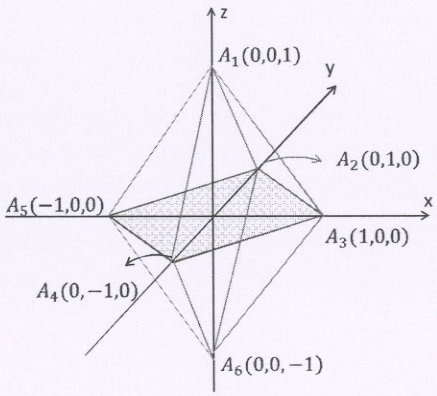
$A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ Öklidyen küp olduğundan dolayı

$[A_1A_2] \perp [A_1A_3]$, $[A_1A_2] \perp [A_1A_4]$, $[A_1A_3] \perp [A_1A_4]$ dir. Dolayısıyla dönme açısı $\frac{\pi}{2}$ derecedir. Yardımcı Teorem 1.27 den dolayı bu dönme Taksi izometridir. Böylece $d_T(A_1,A_2) = d_T(A_1,A_3) = d_T(A_1,A_4)$ dir ve $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ aynı zamanda Taksi küptür.■

5.3 Düzgün Sekizyüzlü

Analitik 3-uzayda Öklidyen düzgün olup aynı zamanda Taksi düzgün olan sekizyüzlü vardır.

Örnek 5.9: $A_1(0,0,1)$, $A_2(0,1,0)$, $A_3(1,0,0)$,$A_4(0,1,0)$,$A_5(-1,0,0)$,$A_6(0,0,-1)$ noktalarını köşe kabul eden Öklidyen $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ düzgün 8−yüzlüyü ele alalım.



Şekil 5.7

$1 \leq i,j \leq 6$ için A_i ve A_j komşu köşeler olmak üzere $d_E(A_i,A_j) = \sqrt{2}$ ve $d_T(A_i,A_j) = 2$ dir. Dolayısıyla $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ düzgün 8−yüzlü aynı zamanda taksi düzgün 8−yüzlüdür.

Herhangi bir $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ düzgün 8−yüzlü, Şekil 5.7 de görüldüğü üzere $A_2A_3A_4A_5$ düzgün 4−geni taban kabul eden, sırasıyla A_1 ve A_6 tepe noktalarına sahip $A_1A_2A_3A_4A_5$ ve $A_6A_2A_3A_4A_5$ piramitlerinden oluşmaktadır. Benzer şekilde sırasıyla A_2 ve A_4 tepe noktalarına sahip, ortak $A_1A_5A_6A_3$ düzgün 4−gen tabanlı $A_2A_1A_5A_6A_3$ ve $A_4A_1A_5A_6A_3$ piramitleri mevcuttur. Bu piramitlerin tabanları Öklidyen olarak ve benzer şekilde Taksi anlamında eştir. Burada piramitlerin tabanını düzgün 8−yüzlünün de tabanı olarak adlandırarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 5.10: Analitik 3−uzayda bir Öklidyen düzgün sekizyüzlünün tabanını üzerinde bulunduran düzlem ile birlikte, tabanın ÇKSD ve ÇOSD si

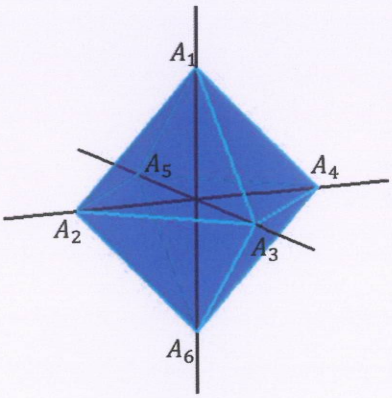
$$\{x \mp y = k_1, x \mp z = k_2, y \mp z = k_3, x = k_4, y = k_5, z = k_6\}$$

kümesinin elemanları ise bu takdirde bu düzgün şekil aynı zamanda Taksi düzgün sekizyüzlüdür.

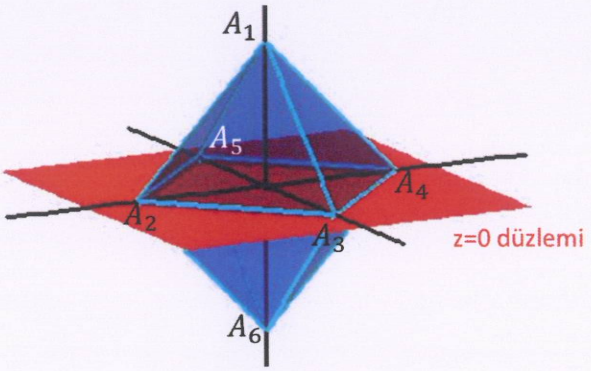
İspat: Herhangi bir $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ Öklidyen düzgün 8−yüzlünün, Şekil 5.8 de görüleceği üzere A_1 ve A_6 noktaları tepe noktaları kabul edilirse $A_2A_3A_4A_5$ düzgün 4−genini taban olarak alabiliriz. Kabul edelimki $A_2A_3A_4A_5$ düzgün 4−geni

$$x \mp y = k_1, x \mp z = k_2, y \mp z = k_3, x = k_4, y = k_5, z = k_6$$

düzlemlerinden $z = 0$ düzlemi içinde olsun.



Şekil 5.8



Şekil 5.9

Bu durumda,

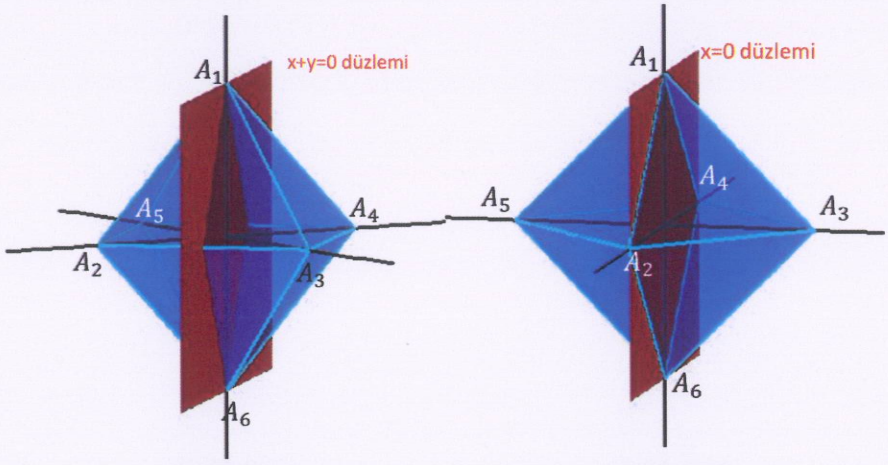
$$[A_1A_2] \quad z=0 \text{ düzlemine göre yansıması } [A_2A_6]$$
$$[A_1A_3] \quad z=0 \text{ düzlemine göre yansıması } [A_3A_6]$$
$$[A_1A_4] \quad z=0 \text{ düzlemine göre yansıması } [A_4A_6]$$
$$[A_1A_5] \quad z=0 \text{ düzlemine göre yansıması } [A_5A_6]$$

dir. Bilindiği üzere $z=0$ düzlemine göre yansımalar Taksi izometri olduğundan dolayı,

$$\begin{aligned} &d_T(A_1,A_2)=d_T(A_2,A_6), d_T(A_1,A_3)=d_T(A_3,A_6) \\ &d_T(A_1,A_4)=d_T(A_4,A_6), d_T(A_1,A_5)=d_T(A_5,A_6) \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

dir.

Ayrıca $A_2A_3A_4A_5$ düzgün $4-$geninin karşılıklı köşelerinden ve kenarların orta noktalarından geçen iki düzlem arasındaki açı 45^o dir. Bu iki düzlem $x+y=0$ ve $x=0$ olsun.



Şekil 5.10

Şekil 5.11

Bu durumda,

$$[A_1A_2] \quad x+y=0 \text{ düzlemine göre yansıması } [A_1A_3]$$
$$[A_1A_4] \quad x+y=0 \text{ düzlemine göre yansıması } [A_1A_5]$$
$$[A_2A_6] \quad x+y=0 \text{ düzlemine göre yansıması } [A_3A_6]$$
$$[A_4A_6] \quad x+y=0 \text{ düzlemine göre yansıması } [A_5A_6]$$
$$[A_2A_5] \quad x+y=0 \text{ düzlemine göre yansıması } [A_3A_4]$$

dir. Bilindiği üzere $x+y=0$ düzlemine göre yansımalar Taksi izometri olduğundan dolayı,

$$d_T(A_1, A_3) = d_T(A_1, A_2), d_T(A_1, A_4) = d_T(A_1, A_5)$$
$$d_T(A_2, A_6) = d_T(A_3, A_6), d_T(A_4, A_6) = d_T(A_5, A_6) \quad (5.3.2)$$
$$d_T(A_2, A_5) = d_T(A_3, A_4)$$

dir.

$[A_1A_3]$ $x + y = 0$ düzlemine göre yansıması $[A_1A_5]$

$[A_5A_6]$ $x + y = 0$ düzlemine göre yansıması $[A_3A_6]$

$[A_2A_5]$ $x + y = 0$ düzlemine göre yansıması $[A_2A_3]$

$[A_4A_5]$ $x + y = 0$ düzlemine göre yansıması $[A_4A_3]$

dir. Bilindiği üzere $x + y = 0$ düzlemine göre yansımalar Taksi izometri olduğundan dolayı,

$$d_T(A_1, A_3) = d_T(A_1, A_5), d_T(A_5, A_6) = d_T(A_3, A_6)$$
$$d_T(A_2, A_5) = d_T(A_2, A_3), d_T(A_4, A_5) = d_T(A_4, A_3) \quad (5.3.3)$$

dir.

(5.3.1), (5.3.2) ve (5.3.3) eşitliklerinden

$d_T(A_1, A_2) = d_T(A_1, A_3) = d_T(A_1, A_4) = d_T(A_1, A_5) = d_T(A_2, A_6) =$

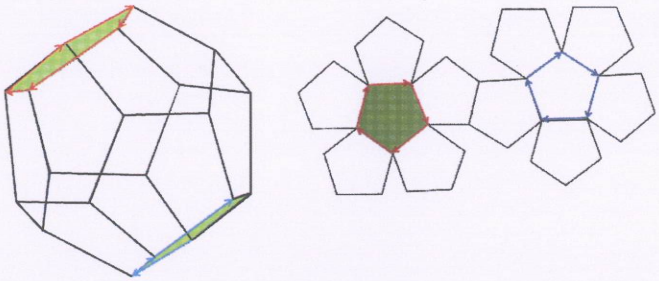
$d_T(A_3, A_6) = d_T(A_4, A_6) = d_T(A_5, A_6)$ dir.

Dolayısıla $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ Öklidyen düzgün 8−yüzlü aynı zamanda Taksi düzgündür.■

5.4 Düzgün Onikiyüzlü

Teorem 5.11: Analitik 3-uzayda Öklidyen düzgün olup aynı zamanda Taksi düzgün olan onikiyüzlü yoktur.

İspat: Herhangi bir Öklidyen düzgün onikiyüzlünün yüzeyi (Şekil 5.12 de görüldüğü üzere) oniki düzgün beşgenden oluşmaktadır.



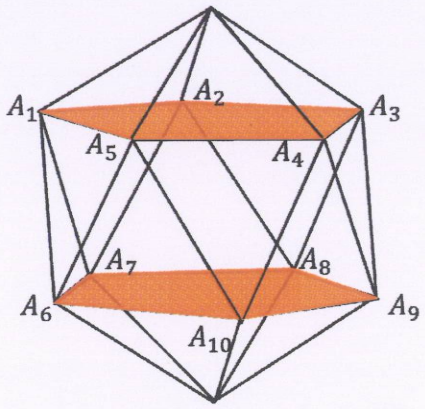
Şekil 5.12

Teorem 3.16 dan dolayı Öklidyen düzgün 5-genlerden aynı zamanda Taksi düzgün olan yoktur. Böylece Öklidyen düzgün onikiyüzlünün ayrıtları Taksi eş uzunlukta değildir. Dolayısıyla hem Öklidyen düzgün hem de Taksi düzgün olan onikiyüzlü yoktur.■

5.5 Düzgün Yirmiyüzlü

Teorem 5.12: Analitik 3−uzayda Öklidyen düzgün olup aynı zamanda Taksi düzgün olan yirmiyüzlü yoktur.

İspat: Herhangi bir düzgün yirmiyüzlüde Şekil 5.13 de görüldüğü gibi bir köşede birleşen 5 tane eşkenar üçgenin kenarları düzgün 5-gen oluşturur (Toplam 12 köşe ve 12 düzgün eş 5-gen vardır).



Şekil 5.13

Teorem 3.16 dan dolayı Öklidyen düzgün 5-genlerden aynı zamanda Taksi düzgün olan yoktur. Böylece düzgün yirmiyüzlünün bütün ayrıtları Taksi eş uzunlukta değildir. Dolayısıyla hem Öklidyen düzgün hem de Taksi düzgün olan yirmiyüzlü yoktur.■

BÖLÜM 6

ÖKLİDYEN DÜZGÜN OLMAYAN TAKSİ DÜZGÜN ÇOKYÜZLÜLER

Bu bölümde Öklidyen düzgün çokyüzlü olmadığı halde Taksi düzgün çokyüzlülerin var olup olmadığı incelenmektedir.

Analitik $3-$uzaydaki düzgün çokyüzlüler (Plato şekilleri);

1-) Düzgün dörtyüzlü

2-) Düzgün altıyüzlü

3-) Düzgün sekizyüzlü

4-) Düzgün onikiyüzlü

5-) Düzgün yirmiyüzlü

dür.

Teorem 6.1: $\mathbb{R}^3$ de Öklidyen düzgün olmayan $4-$yüzlü, $8-$yüzlü ve $20-$yüzlüler Taksi düzgün değildirler.

İspat: Teorem 4.1 de $\mathbb{R}^3$ de Öklidyen düzgün üçgen olmadığı halde Taksi düzgün olan üçgenin var olmadığı gösterilmişti.

Düzgün $4-$yüzlü, düzgün $8-$yüzlü, düzgün $20-$yüzlülerin hepsinin de yüzleri eşkenar üçgenden oluşmaktadır.

Dolayısıyla bunların hiçbiri Öklid düzgün çokyüzlü olmadığı halde Taksi düzgün çokyüzlü olamazlar.■

Teorem 6.2: $\mathbb{R}^3$ de Öklidyen düzgün altıyüzlü (küp) olmadığı halde Taksi düzgün altıyüzlü (küp) olan düzgün şekil vardır.

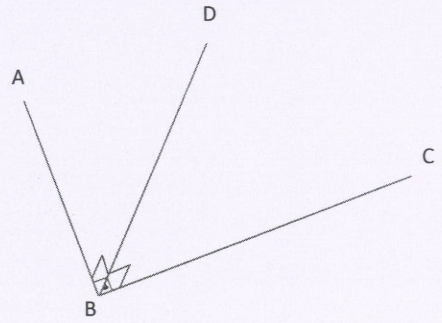
İspat: Teorem 4.2 de Öklidyen olmadığı halde Taksi karesinin var olduğu gösterilmişti.

$$[AB] \perp [BC], [AB] \perp [BD], [BD] \perp [BC]$$

ve

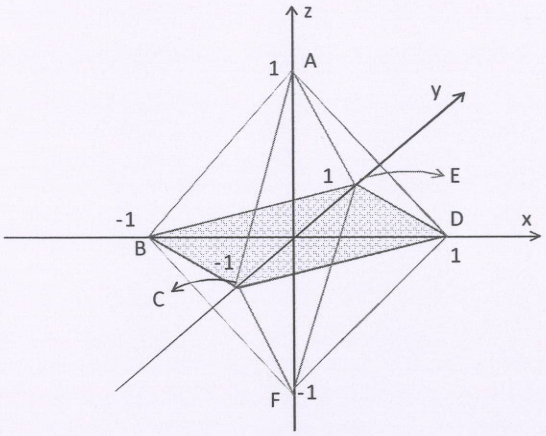
$$d_T(A,B) = d_T(B,C) = d_T(B,D)$$

iken $d_E(A,B) \neq d_E(B,C)$ yada $d_E(A,B) \neq d_E(B,D)$ yada $d_E(B,D) \neq d_E(B,C)$ şartını sağlayan A, B, C, D noktalarının varlığını incelensin.



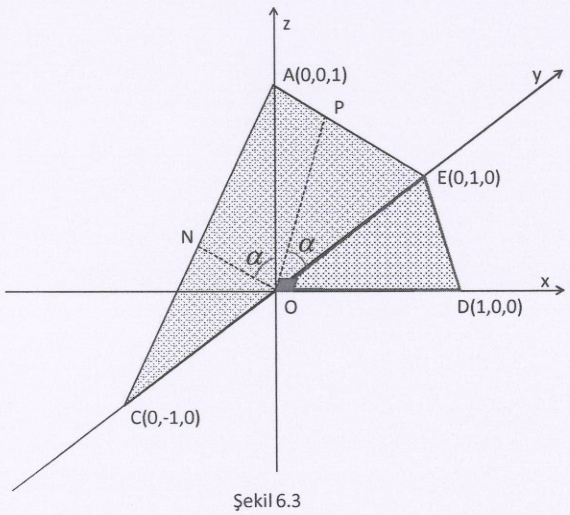
Şekil 6.1

Bu noktaları tespit etmek için merkezi orijin ve yarıçapı 1 *birim* olan $ABCDEF$ Taksi küre çizilsin.



Şekil 6.2

Taksi kürenin A, C, E, D noktalarının bulunduğu yüzeylerinin şekli ayrıca çizilirse, Şekil 6.3 deki gibi olur.



Şekil 6.3

$P \in (AE)$ için $d_T(O,P) = d_T(O,D) = 1\ birim$ ve $[OP] \perp [OD]$ olduğu Teorem 4.2 'nin ispatında gösterilmişti.

$m(POE) = \alpha$ osun. $m(AON) = \alpha$ olacak şekilde $N \in (AC)$ alınırsa;

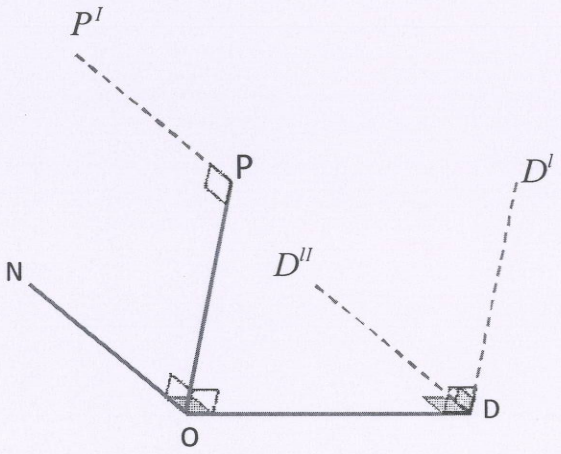
$m(PON) = 90^o$ ve $d_T(O,P) = d_T(O,N)$ elde edilir.

$[OD]$doğru parçası CAE düzlemine dik olduğundan $[ON] \perp [OD]$ elde edilir.

Yine Teorem 4.2 nin ispatında;

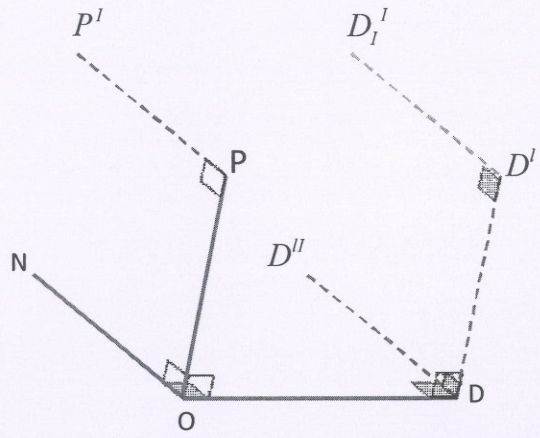
$d_T(O,P), d_T(O,N) < d_T(O,D) = 1\ birim$ olduğu gösterilmişti.

Böylece Öklid uzunluğu eşit olmayan Taksi uzunluğu eşit ve birbirine dik üç doğru parçası bulunmuş olur.



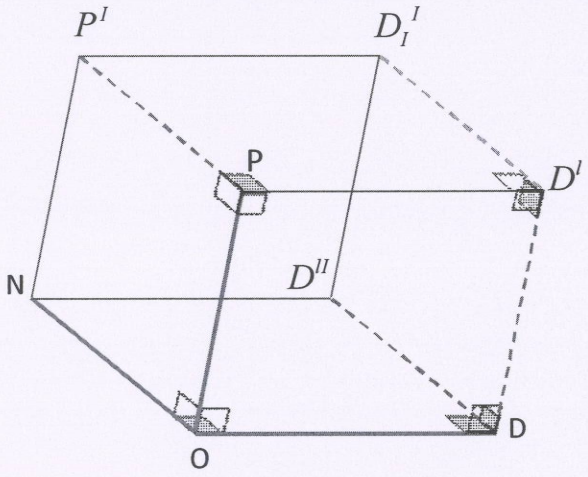
Şekil 6.4

Şekil 6.4 de görüldüğü gibi D noktası, P, O ve D noktalarından geçen düzlem üzerinde $[OP]$ doğru parçasına paralel $d_T(O,P)\ birim$ ötelenirse elde edilen D' noktası için $PODD'$ Öklidyen olmayan Taksi karedir, D noktası, N, O ve D noktalarından geçen düzlem üzerinde $[ON]$ doğru parçasına paralel $d_T(O,N)\ birim$ ötelenirse elde edilen D'' noktası için $NODD''$ Öklidyen olmayan Taksi karedir, P noktası, N, O ve P noktalarından geçen düzlem üzerinde $[ON]$ doğru parçasına paralel $d_T(O,N)\ birim$ ötelenirse elde edilen P' noktası için $NOPP'$ Öklidyen ve Taksi karedir.



Şekil 6.5

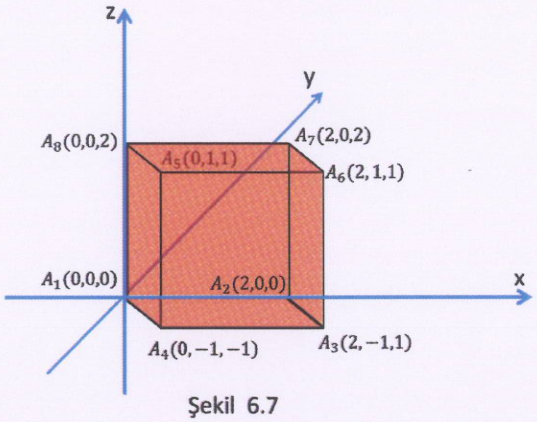
Şekil 6.5 de görüldüğü gibi D' noktası, D'', D ve D' noktalarından geçen düzlem üzerinde $[D'D]$ doğru parçasına paralel $d_T(D'', D)$ *birim* ötelenirse elde edilen D'_i noktası için $D''DD'D'_i$ Öklidyen ve Taksi karedir.



Şekil 6.6

Şekil 6.6 da görüldüğü gibi $[NP']$, $[ND'']$, $[D''D'_i]$, $[P'D'']$, $[PD']$ doğru parçalarının çizilmesiyle tamamlanan $ODD'PP'ND''D'_i$ şekili Öklidyen olmayan Taksi küptür.■

Örnek 6.3: $A_1(0,0,0)$, $A_2(2,0,0)$, $A_3(2,-1,1)$, $A_4(0,-1,1)$, $A_5(0,1,1)$, $A_6(2,1,1)$, $A_7(2,0,2)$, $A_8(0,0,2)$ noktaları için $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ küpü incelenirse;



Şekil 6.7

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8$ noktaları için küpün bütün ayrıtlarının Taksi uzunluğu eşit ve 2 *birim* dir. Yani bir Taksi küptür. Fakat küpün bütün ayrıtlarının Öklidyen uzunluğu eşit değildir.

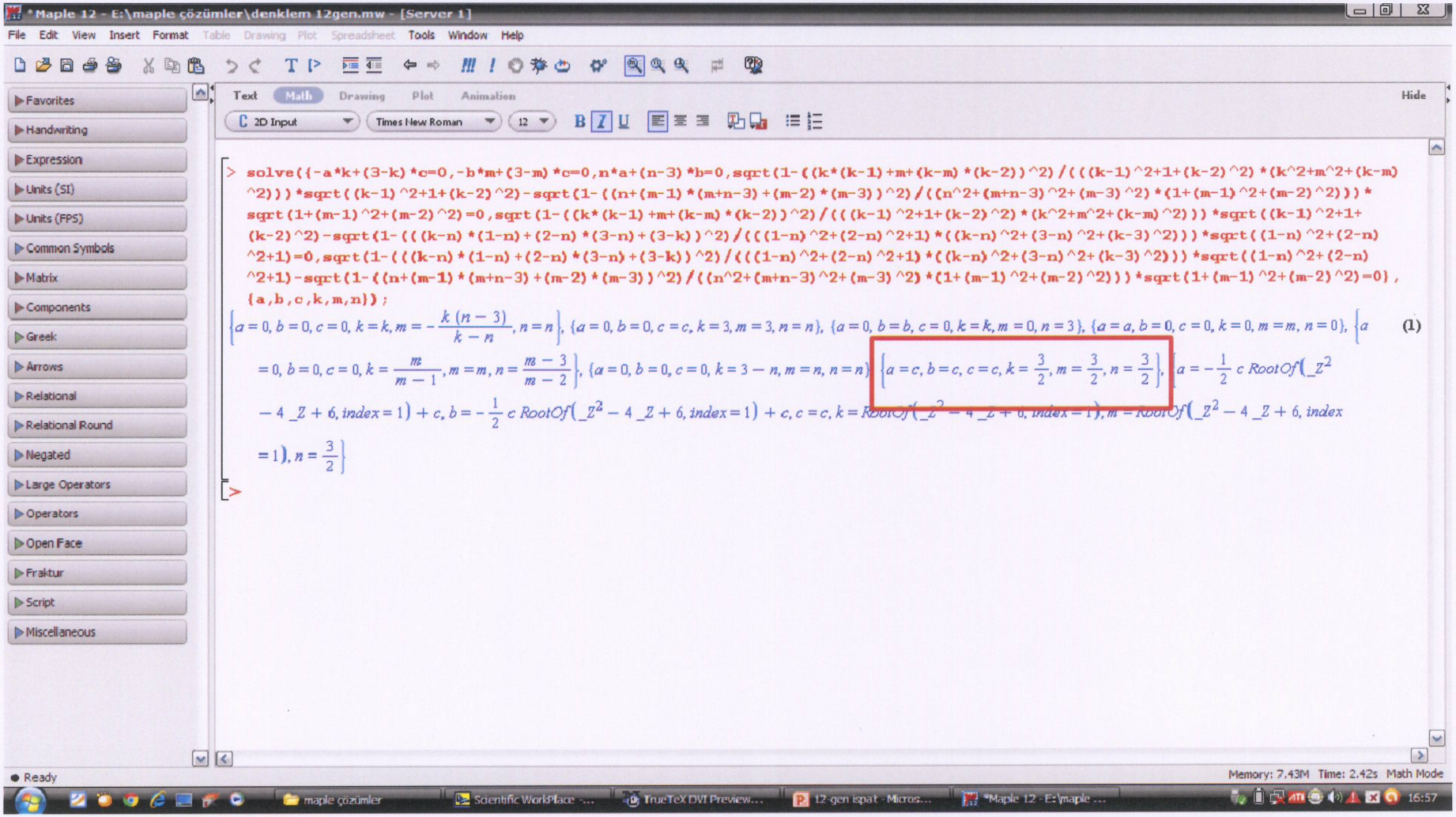
$$d_E(A_1, A_2) = 2, \quad d_E(A_1, A_5) = \sqrt{2}$$

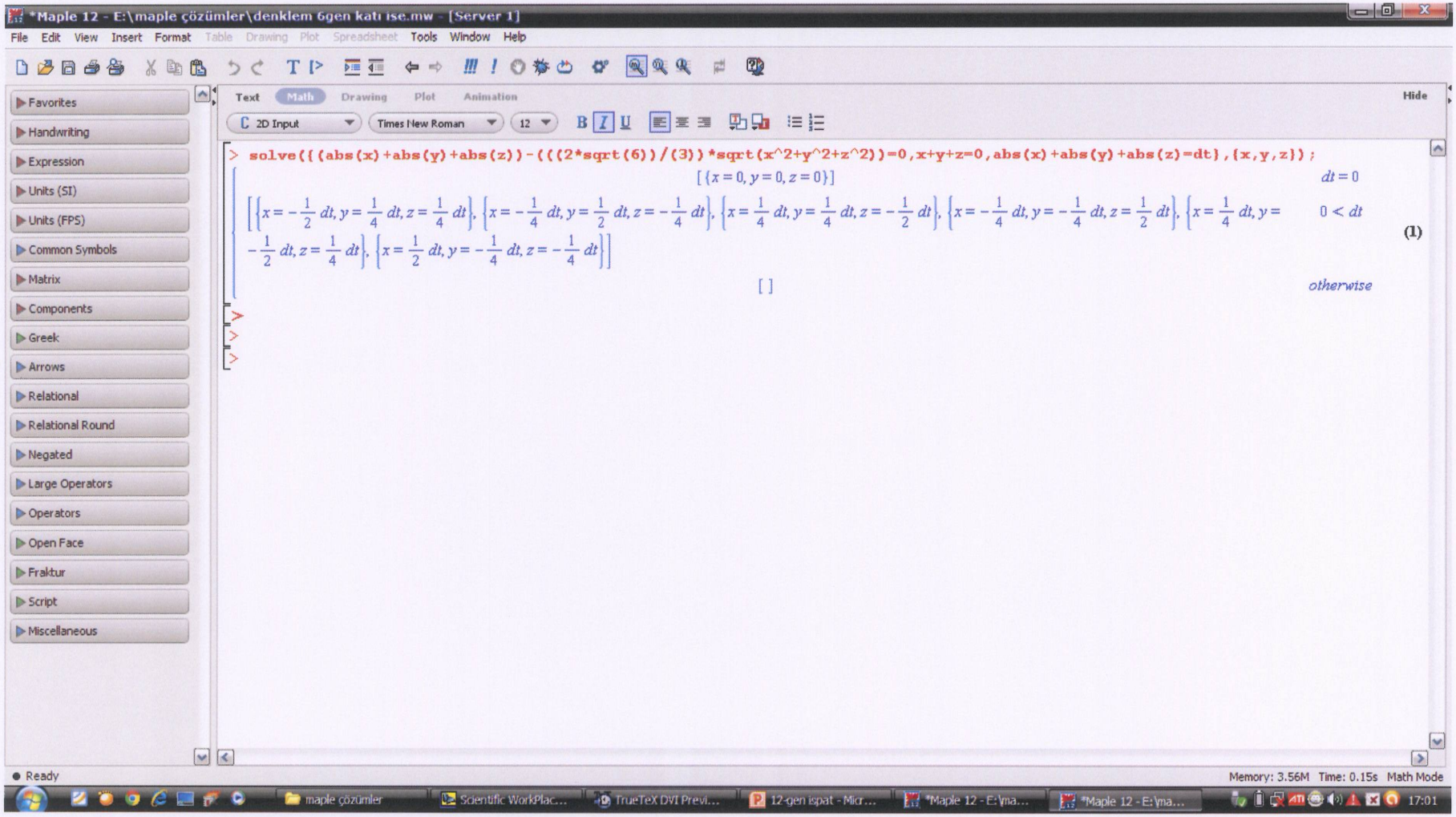
dolayısıyla;

$$d_E(A_1, A_2) \neq d_E(A_1, A_5)$$

dir. Böylece $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ Öklidyen küp değildir.

Öklidyen olmayan Taksi düzgün oniki yüzlünün var olup olmadığı açık bir problemdir.


*Maple 12 - E:\maple çözümler\denklem 12gen.mw - [Server 1]
File Edit View Insert Format Table Drawing Plot Spreadsheet Tools Window Help
Favorites
Handwriting
Expression
Units (SI)
Units (FPS)
Common Symbols
Matrix
Components
Greek
Arrows
Relational
Relational Round
Negated
Large Operators
Operators
Open Face
Fraktur
Script
Miscellaneous
Text Math Drawing Plot Animation Hide
2D Input Times New Roman 12
> solve({-a*k+(3-k)*c=0,-b*m+(3-m)*c=0,n*a+(n-3)*b=0,sqrt(1-((k*(k-1)+m+(k-m)*(k-2))^2)/(((k-1)^2+1+(k-2)^2)*(k^2+m^2+(k-m)^2)))*sqrt((k-1)^2+1+(k-2)^2)-sqrt(1-((n+(m-1)*(m+n-3)+(m-2)*(m-3))^2)/((n^2+(m+n-3)^2+(m-3)^2)*(1+(m-1)^2+(m-2)^2)))*sqrt(1+(m-1)^2+(m-2)^2)=0,sqrt(1-((k*(k-1)+m+(k-m)*(k-2))^2)/(((k-1)^2+1+(k-2)^2)*(k^2+m^2+(k-m)^2)))*sqrt((k-1)^2+1+(k-2)^2)-sqrt(1-(((k-n)*(1-n)+(2-n)*(3-n)+(3-k))^2)/(((1-n)^2+(2-n)^2+1)*((k-n)^2+(3-n)^2+(k-3)^2)))*sqrt((1-n)^2+(2-n)^2+1)=0,sqrt(1-(((k-n)*(1-n)+(2-n)*(3-n)+(3-k))^2)/(((1-n)^2+(2-n)^2+1)*((k-n)^2+(3-n)^2+(k-3)^2)))*sqrt((1-n)^2+(2-n)^2+1)-sqrt(1-((n+(m-1)*(m+n-3)+(m-2)*(m-3))^2)/((n^2+(m+n-3)^2+(m-3)^2)*(1+(m-1)^2+(m-2)^2)))*sqrt(1+(m-1)^2+(m-2)^2)=0},{a,b,c,k,m,n});
(1)
Ready
Memory: 7.43M Time: 2.42s Math Mode
maple çözümler
Scientific WorkPlace -...
TrueTeX DVI Preview...
12-gen ispat - Micros...
*Maple 12 - E:\maple ...
16:57


*Maple 12 - E:\maple çözümler\denklem 6gen katı ise.mw - [Server 1]
File Edit View Insert Format Table Drawing Plot Spreadsheet Tools Window Help
Favorites
Handwriting
Expression
Units (SI)
Units (FPS)
Common Symbols
Matrix
Components
Greek
Arrows
Relational
Relational Round
Negated
Large Operators
Operators
Open Face
Fraktur
Script
Miscellaneous
Text Math Drawing Plot Animation
Hide
2D Input
Times New Roman
12
> solve({(abs(x)+abs(y)+abs(z))-(((2*sqrt(6))/(3))*sqrt(x^2+y^2+z^2))=0,x+y+z=0,abs(x)+abs(y)+abs(z)=dt},{x,y,z});
[{x = 0, y = 0, z = 0}] dt = 0
0 < dt
otherwise
(1)
Ready
Memory: 3.56M Time: 0.15s Math Mode
maple çözümler
Scientific WorkPlac...
TrueTeX DVI Previ...
12-gen ispat - Micr...
*Maple 12 - E:\ma...
*Maple 12 - E:\ma...
17:01

KAYNAKLAR

Akça, Z., Kaya, R., 2004, On the Norm in Higher Dimensional Taxicab Spaces, Hadronic Journal Supplement, Vol. 19, pp. 491-502.

Akça, Z., Kaya, R., 2004, On the Distance Formulae in Three Dimensional Taxicab Space, Hadronic Journal, Vol. 27, No. 5, pp. 521-532.

Çolakoğlu, B.,Kaya, R.,2008, On the regular Polygons in Chinese Checkers Plane, APPS (Applied Sciences), Vol. 10, No:1, 29-37.

Çolakoğlu, B.,Kaya, R.,2009, On the Regular Polygons in the Taxicab Plane, Scientific and Professional Journal of the Croatian Society for Geometry and Graphics (KoG), Vol.12, No.9, 535-539.

Çolakoğlu, B., 2009, Taksi Maksimum, Çin Dama ve Alfa Düzlemlerinin bazı özellikleri ve genelleştirilmesi Doktora Tezi.

Gelişgen, Ö.,Özcan, M.,Kaya, R.,2006, On the Distance Formulae in Chinese Checker Space IJPAM (International Journal of Pure and Applied Mathematics, 26(1), 35-44.

Gelişgen, Ö.,Kaya, R.,2009,The Taxicab Space Group, Acta Math. Hungar, 122 (1-2), 187-200.

Gündüz, D., 1998, Üçüncü Boyutun Sakinleri Düzgün Çokyüzlüler, Bilim Teknik dergisi sayfa 29, Eylül 1998.

Kaya, R., Akça, Z., Günaltılı, İ., Özcan, M., 2000, General Equations For Taxicab Conics and Their Classification, Mitt.Math.Ges.Hamburg,19, 135-148.

Kaya, R., 2006, Area Formula For Takxicab Triangels, IIME Journal, Vol. 12 (4), 19-220.

ÖZGEÇMİŞ

Süleyman Yüksel, 14 Şubat 1974'de Niğde'nin Hacıabdullah Kasabasında dünyaya gelmiştir. İlköğretimi doğduğu kasabada tamamlamıştır. Lise eğitimini Niğde Anadolu Öğretmen Lisesinde 1995 yılında tamamlamış, aynı yıl Gazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Eğitimi Bölümünü kazanmış ve 1999 yılında mezun olmuştur. 2001 yılında Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı Geometri Bilim Dalında Prof. Dr. Münevver Özcan danışmanlığında yüksek lisans eğitimine başlamış ve 2005 yılında mezun olmuştur. 2006 yılında yine aynı bölümde Prof. Dr. Münevver Özcan danışmanlığında Doktora eğitimine başlamış ve eğitimi devam etmektedir.

Ankara, 2012 Süleyman YÜKSEL