

T.C.
MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

REGÜLER DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN
ÖZDEĞERLERİ İÇİN ASİMPOTİK FORMÜLLER ve
NÜMERİK YAKLAŞIMLAR

Güldem Yıldız

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
Yard. Doç. Dr. Bülent Yılmaz
EŞ DANIŞMAN
Prof. Dr. Oktay Veliev

İSTANBUL 2012

T.C.
MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

REGÜLER DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN
ÖZDEĞERLERİ İÇİN ASİMPOTİK FORMÜLLER ve
NÜMERİK YAKLAŞIMLAR

Güldem Yıldız
(141203120030160)

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
Yard. Doç. Dr. Bülent Yılmaz
EŞ DANIŞMAN
Prof. Dr. Oktay Veliev

İSTANBUL 2012

TEŞEKKÜR

Bu çalıőmayı bana veren, deneyimini ve emeğini esirgemeyen, zamanını, fikirlerini ve bilgilerini benimle paylaőan, çalışmanın bilimsel ilerlemede yardımcı olan sayın Prof. Dr. Oktay Veliev hocama minnettarım. Çalıőmalarım boyunca yardım ve desteğini eksik etmeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Bülent Yılmaz'a teşekkür ederim. Ayrıca alıőma zamanlarımda bana anlayıő gösteren aileme ve biricik kızıma teşekkür ederim.

Mayıs, 2012

Güldem Yıldız

İÇİNDEKİLER

	SAYFA NUMARASI
TEŞEKKÜR.....	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
YENİLİK BEYANI	vi
SEMBOLLER	vii
ŞEKİLLER	viii
TABLolar	ix
I GİRİŞ VE AMAÇ.....	1
II GENEL BİLGİLER	5
II.1 TEMEL KAVRAMLAR	5
II.2 ÖZDEĞERLERE ASİMPOTİK YAKLAŞIM.....	9
II.3 SONLU FARKLAR METODU	15
II.3.1 Türevlere Sonlu Fark Yaklaşımı.....	15
III ÇALIŞMALAR.....	19
III.1 DIRICHLET SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN ASİMPOTİK FORMÜLLER.....	19
III.2 NÜMERİK YAKLAŞIM.....	30
III.2.1 Sturm Liouville Operatörünün Özdeğerlerine Potansiyel Fonksiyonun Etkisi	32
III.2.2 Tekil Noktalarda Özvektör Grafiği	40
III.2.3 Tekil Noktalara Bağlı Sınır Şartları.....	41
III.3 PERTÜRBASYON PARAMETRESİYLE DIRICHLET SINIR	
ŞARTLI STURM LIOUVILLE PROBLEMİ.....	46
III.3.1 Pertürbasyon Parametresiyle Asimptotik Özdeğerler.....	47
III.3.2 Pertürbasyon Parametresiyle Nümerik Özdeğerler	56
IV SONUÇLAR ve TARTIŞMA	66
V SON DEĞERLENDİRMELER ve ÖNERİLER.....	67

KAYNAKLAR.....	68
ÖZGEÇMİŞ	72

ÖZET

REGÜLER DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN ÖZDEĞERLERİ İÇİN ASİMPOTİK FORMÜLLER ve NÜMERİK YAKLAŞIMLAR

Bu tezde $L_2[0,1]$ uzayında sonlu sayıda tekil noktaları olan $q(x) \in L_1[0,1]$ potansiyeline sahip

$$-y''(x) + q(x)y(x)$$

ifadesi ve

$$y(0) = y(1) = 0$$

Dirichlet sınır koşulları ile üretilen $L(q)$ operatörü incelenmiştir. Tezin çalışmalar bölümünün ilk kısmında büyük özdeğerler için asimptotik formüller elde edilerek, ikinci kısmında nümerik yöntemle küçük özdeğerler bulunmuştur. Son bölümde ise pertürbasyon tekniğiyle, asimptotik metot ve nümerik yöntemle elde edilen özdeğerler incelenmiştir.

Mayıs, 2012

Güldem Yıldız

ABSTRACT

ASYMPTOTIC FORMULAS and NUMERICAL APPROACHES FOR EIGENVALUES OF REGULAR DIFFERENTIAL OPERATORS

In this thesis we investigate the operator generated in $L_2[0,1]$ by differential expression

$$-y''(x) + q(x)y(x)$$

and Dirichlet boundary conditions

$$y(0) = y(1) = 0,$$

where $q \in L_1[0,1]$ and has a finite number of singularities. First we obtain asymptotic formulas the large eigenvalues. Then we find approximate values of the small eigenvalues by numerical method. Finally we compare the results obtained via the asymptotic method and numerical technique by using the perturbation methods.

May, 2012

Güldem Yıldız

YENİLİK BEYANI

REGÜLER DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN ÖZDEĞERLERİ İÇİN ASİMPOTİK FORMÜLLER ve NÜMERİK YAKLAŞIMLAR

Kuantum mekanikte araştırılan birçok konuda, self-adjoint diferansiyel operatörler kullanılmaktadır. Bu diferansiyel operatörlerin esas konularından biri, operatörlerin enerji seviyelerini belirleyen özdeğerlerini bulmayı gerektirir. Potansiyel enerjiyi belirleyen potansiyel fonksiyon; tekil noktalı potansiyel fonksiyon olduğunda, diferansiyel operatörün özdeğerlerinin kesin değerlerini bulmak mümkün değildir. Bu tezde $L_2[0,1]$ uzayında sonlu sayıda tekil noktaları olan Lebesgue integrallenebilir potansiyel fonksiyonlu Sturm Liouville diferansiyel operatörün asimptotik ve nümerik yöntemlerle özdeğerleri bulunmuştur. Çıkan sonuçlar pertürbasyon tekniğiyle karşılaştırılmıştır.

Mayıs, 2012

Yrd. Doç. Dr. Bülent Yılmaz

Güldem Yıldız

Prof. Dr. Oktay Veliev

SEMBOLLER

- $I(y)$: Diferansiyel İfade
- H : Hilbert Uzayı
- L : Lineer Diferansiyel Operatör
- λ : Özdeğer
- λ_n : n . özdeğer
- λ_n^k : $L(q_k)$ operatörünün n . özdeğeri
- A_n^v : $L(Q_v)$ operatörünün n . özdeğeri
- A_n^v : $L(Q_v)$ operatörünün asimptotik metotla elde edilen n . özdeğeri
- S_n^v : $L(Q_v)$ operatörünün nümerik metotla elde edilen n . özdeğeri
- a_n^k : $L(q_k)$ operatörünün asimptotik metotla elde edilen n . özdeğeri
- s_n^k : $L(q_k)$ operatörünün nümerik metotla elde edilen n . özdeğeri
- ε : Pertürbasyon Parametresi
- $A_n^v(\varepsilon)$: $L(Q_v)$ operatörünün asimptotik metotla elde edilen n . özdeğeri
- $K_n^v(\varepsilon)$: $L(Q_v)$ operatörünün asimptotik metotla elde edilen yaklaşık n . özdeğeri
- $S_n^v(\varepsilon)$: $L(Q_v)$ operatörünün nümerik metotla elde edilen n . özdeğeri

ŞEKİLLER

SAYFA NO

Şekil III.1 $L(Q_4)$ Operatörünün Özvektörü	40
---	----

TABLolar

SAYFA NO

Tablo III.1 P_n^2 ve $p_n^0, p_n^1, p_n^2, \sum_{k=0}^2 p_n^k$ değerleri	34
Tablo III.2 P_n^3 ve $\sum_{k=0}^3 p_n^k$ değerleri.....	35
Tablo III.3 P_n^4 ve $\sum_{k=0}^4 p_n^k$ değerleri.....	36
Tablo III.4 $L(q_k)$ ve $L(Q_4)$ operatörlerinin nümerik özdeğerleri	38
Tablo III.5 $i=2$ için S_n^3 ve $S_n^3 \mathfrak{C}_0$, $S_n^3 \mathfrak{C}_1$ nümerik özdeğerler	41
Tablo III.6 $i=3$ için S_n^3 ve $S_n^3 \mathfrak{C}_0$, $S_n^3 \mathfrak{C}_1$ nümerik özdeğerler.....	42
Tablo III.7 $i=3$ için S_n^6 ve $S_n^6 \mathfrak{C}_1$, $S_n^6 \mathfrak{C}_2$ nümerik özdeğerler.....	43
Tablo III.8 $\varepsilon^2 U_n^{r_1}$ ve $\varepsilon^2 I_n^{r_1}$ değerleri ve aralarındaki fark.....	48
Tablo III.9 $\varepsilon^3 U_n^{r_2}$ ve $\varepsilon^3 I_n^{r_2}$ değerleri ve aralarındaki fark	50
Tablo III.10 Asimptotik metotla bulunan $L(\varepsilon Q_2)$ operatörünün özdeğerleri ve $L(0)$ operatörünün özdeğerleri.....	52
Tablo III.11 Asimptotik metotla bulunan $L(\varepsilon Q_3)$ operatörünün özdeğerleri ve $L(0)$ operatörünün özdeğerleri.....	53
Tablo III.12 Asimptotik metotla bulunan $L(\varepsilon Q_4)$ operatörünün özdeğerleri ve $L(0)$ operatörünün özdeğerleri.....	54
Tablo III.13 Nümerik metotla bulunan $L(\varepsilon Q_2)$ operatörünün özdeğerleri ve $L(0)$ operatörünün özdeğerleri.....	57
Tablo III.14 Nümerik metotla bulunan $L(\varepsilon Q_3)$ operatörünün özdeğerleri ve $L(0)$ operatörünün özdeğerleri.....	57
Tablo III.15 Nümerik metotla bulunan $L(\varepsilon Q_4)$ operatörünün özdeğerleri ve $L(0)$ operatörünün özdeğerleri.....	61

Tablo III.16	Asimptotik ve nümerik metotla bulunan $L(\varepsilon Q_2)$ operatörünün özdeğerlerinin karşılaştırılması.....	62
Tablo III.17	Asimptotik ve nümerik metotla bulunan $L(\varepsilon Q_3)$ operatörünün özdeğerlerinin karşılaştırılması	63
Tablo III.18	Asimptotik ve nümerik metotla bulunan $L(\varepsilon Q_4)$ operatörünün özdeğerlerinin karşılaştırılması	64

I GİRİŞ VE AMAÇ

I.1 GİRİŞ

Matematik, fizik ve mühendislik alanlarında Sturm-Liouville operatörü kullanılarak önemli gelişmeler elde edilmiştir. Bu operatör için yapılan ilk çalışma 1836 yılında Charles Sturm ve Joseph Liouville tarafından ortaya konulmuştur. C. F. Sturm (1803-1855) İsveç kökenli Fransız Matematikçi olup, sesin hızının en doğru tanımını veren ilk kişidir. Ayrıca diferansiyel denklemlerle ilgili çok önemli çalışmalar yapmıştır. Joseph Liouville (1809-1882) ise cebirsel olmayan sayıların varlığının ilk ispatını veren bilim adamıdır. Sınır değer problemleri, sayılar teorisi, diferansiyel geometriyle ilgili çok önemli çalışmalar yapmıştır.

Diferansiyel operatörler teorisi; Kuantum mekanikte araştırılan birçok konuda ortaya çıkmaktadır. Bu konularda güncel problemlerden başlangıç ve sınır değer problemleri için asimptotik formüller elde edilir. Asimptotik formüllerin elde edilmesi, incelenen operatörün özelliğine bağlıdır [1]. Diferansiyel operatörler; sürtünmeli problemlerde, açık rezonatör teorisinde, esnek olmayan saçılma problemlerinde, vb. durumlarda ortaya çıkarlar. Matematik ve fizikteki birçok başlangıç ve sınır değer probleminin Fourier metodu ile çözülmesi, diferansiyel operatörlerin özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının öğrenilmesini gerektirir.

Sonlu aralıkta, adi diferansiyel denklem tarafından üretilen diferansiyel operatörler teorisinin esas konuları, operatörün spektrumunun öğrenilmesini ve spektral ayrılışını bulmayı gerektirir. Sonlu aralıkta adi diferansiyel denklem tarafından üretilen diferansiyel operatörün spektrumu özdeğerlerden oluşmaktadır. Bu operatörler, enerjinin korunumu olmadan devam eden durumlarda ortaya çıkmaktadırlar. Konuyla ilgili ilk olarak 20. yüzyılın başında regüler sınır şartı kavramı, G. Birkhoff [2] ve Y. D. Tamarkin [3] tarafından incelenmeye başlandı. Tamarkin 1927 yılında düzenli

sınır değer problemlerinde özdeğerlerin asimptotik formüllerini buldu. Bu konudaki gelişmeleri Naimark [1], Marchenko [4], Dunford [5] göstermiştir.

Literatürde özdeğerlere asimptotik yaklaşım ile ilgili birçok çalışma vardır. Bunlardan bazıları, [1], [7], [6], [8], [9], [10]'dur.

Ayrıca, $L_2(0, 1)$ uzayında, potansiyeli $L_1[0, 1]$ de olan nonself-adjoint Sturm Liouville operatörünün özdeğerleri ve özfonksiyonları için O. Veliev'in metodu kullanılarak [11, 12, 13] makalelerinde asimptotik formüller elde edilmiştir.

Fiziksel olayların matematiksel ifade şekli olan diferansiyel denklemlerin çözümünde bazen birçok zorlukla karşılaşılabilir. Bu zorluklardan biri de katsayıları tekil fonksiyonlar olan diferansiyel denklemlerdir. Tekil diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözüm yöntemleri ise tekil noktaların ve incelenen operatörün özelliklerine bağlıdır. Bu çözüm yöntemleri, ya seriler kullanılarak ya da sayısal yöntemlerle yapılmaktadır. Serilerin kullanımı, tekil integralleri meydana getirmektedir. Böylece problemlerin asimptotik metotla yaklaşık çözümleri bulunabilmektedir.

Bilgisayar teknolojisindeki ilerlemelere bağlı olarak diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri, 20. yüzyılın ilk çeyreğinden başlayarak günümüze kadar hızla gelişmiştir. Bu hızlı gelişim farklı tipteki diferansiyel denklemlerin birçok sayısal yöntemle çözülebilmelerini sağlamıştır. Varolan sayısal yöntemler, diferansiyel denklemlerin lineer veya lineer olmayan özelliklerinden ya da başlangıç ve sınır koşullarından fazlaca etkilenmeden küçük değişikliklerle farklı tipte diferansiyel denklemlere uygulanabilirler. Bir diferansiyel denkleme analitik çözüm ararken, söz konusu diferansiyel denklemin tipine uygun bir yöntem arama zorunluluğu karşısında, nümerik yöntemler genel olarak diferansiyel denklemin biçiminden bağımsızdır. Lineer diferansiyel denklemlerin tam analitik çözümlerinin bulunması kimi zaman olanaksızdır. Bundan dolayı, diferansiyel denklemlerin çözümü için nümerik yöntemler geliştirilmiştir [14]. Bilgisayar ortamındaki gelişmelere paralel olarak diferansiyel denklemlerin matris formunda ifade edilebilmesi

sayısal analiz metotlarında büyük gelişmelere sebep olmuştur. Bu gelişmeler içinde sonlu farklar ve sonlu elemanlar gibi metotlar günümüze kadar etkin olarak kullanılmıştır. Sayısal hesaplamalar ise Mathematica, Matlab gibi bilgisayar programlama dilleri kullanılarak yapılabilmektedir.

Birçok kuantum mekanik ve mühendislik problemi çözümünde Sturm Liouville sınır değer problemi kullanılmaktadır. Bu problemlerde özdeğer ve özfonksiyonların bulunması kuantum mekanik, mühendislik ve matematik gibi bilim dallarında çok önemlidir. Bu konuda pek çok çalışma yapılmıştır. Paine, Hoog ve Anderssen [15] asimptotik doğruluk teknikleriyle sonlu fark metodunu birlikte kullanarak özdeğerler için etkili sonuçlar elde etmişlerdir. Andrew ve Paine [16], sonlu elemanlar yöntemini kullanarak regüler Sturm Liouville probleminin yaklaşık özdeğerlerini bulmuşlardır. Chen ve Shing-Huei [17] çalışmasında özdeğer problemlerin çözülebilmesi için diferansiyel dönüşüm yöntemini kullanmışlardır. Attili [18], Sturm-Liouville sınır değer probleminin çözümünü için Adomian Decomposition metodunu kullanmış ve nümerik örnekler vermiştir. Bu alanın araştırmacılarından biri olan Baily [19] SLEIGN programını kullanmıştır. Yine Baily ve diğerleri tarafından [20], SLEIGN2 adlı program kullanılmıştır. Tekil Sturm Liouville problemlerini de [21]'de görmek mümkündür. Ghelardoni ve Gheri [22] Sturm-Liouville problemlerinin yaklaşık özdeğerlerini Prüfer yöntemini ve shooting yöntemini kullanarak elde etmişlerdir. Son dönemde Ledoux ve diğerleri [23] fizik alanında karşılaşılan problemler için shooting metodunu, varyas-yonel yöntemleri Sturm-Liouville problemlerinin kullanımında karşılaştırmışlardır. [24], [25] makalelerinde tekil sınır değer problemleri için sonlu farklar metodunu kullanarak, lineer ve lineer olmayan sınır değer problemlerine nümerik örnekler verilmiştir. Kumar ve Singh [26] tekil sınır değer problemlerinin çözümünde, farklı hesaplama tekniklerini bir araya getiren ve sınıflandıran bir çalışma yapmışlardır.

Bu araştırmalar yapılarak, tezin çalışmalar bölümünün ilk kısmında Sturm Liou-

ville problemlerinin özdeğerleri için asimptotik yaklaşımlar, ikinci kısımda nümerik yöntemlerden çok yaygın olarak kullanılan sonlu farklar metodu üzerinde durularak, üçüncü bölümdeyse küçük pertürbasyon parametresiyle bu yöntemlerin uygunluğuna bakılmıştır. Sturm Liouville sınır değer probleminin yaklaşık özdeğerleri için sonlu farklar yöntemi kullanılarak ilgili örnekler verilmiştir. Tezin bundan sonraki bölümlerinde özdeğerlerin asimptotik metotla bulunan özdeğerlerine kısaca asimptotik özdeğer, nümerik yöntemle bulunan özdeğerlerine ise nümerik özdeğer diyeceğiz.

I.2 AMAÇ

Sonlu aralıkta adi diferansiyel denklem tarafından üretilen regüler diferansiyel operatörler teorisinin esas konuları, operatörün spektrumunun öğrenilmesini gerektirir. Sonlu aralıkta adi diferansiyel denklem tarafından üretilen diferansiyel operatörün spektrumu özdeğerlerden oluşur. Klasik çalışmalarda, adi diferansiyel denklem tarafından üretilen diferansiyel operatörün özdeğerleri ve özfonksiyonlarının bulunabilmesi için bu diferansiyel denklemin katsayılarının belirli bir mertebeden türevlere sahip olması gerekmektedir.

Yılmaz ve Veliev'in [12] makalesinde $L_2(0, 1)$ uzayında

$$-y'' + q(x)y = \lambda y,$$

$$y(0) = y(1) = 0$$

Dirichlet sınır değer probleminin $q(x)$ potansiyel fonksiyonuna hiçbir türev şartı koymaksızın, λ 'nın büyük değerlerine uygun gelen özdeğer ve özfonksiyonları için asimptotik formüller bulunmuştur.

Tezin amacı, bu sınır değer probleminde potansiyel fonksiyon sonlu sayıda tekil noktası olduğunda, asimptotik metot, sayısal yöntem ve pertürbasyon tekniğinin kullanılabilmesiyle bütün özdeğerlerini incelemektir.

II GENEL BİLGİLER

II.1 TEMEL KAVRAMLAR

Tanım II.1 H kompleks uzayı verilsin. $\forall x, y \in H$ ikili elemanına karşılık gelen

(x, y) kompleks sayısı için ve $H \times H \rightarrow H$ olmak üzere:

a) $(x, y) = \overline{(y, x)}$

b) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ $(x_1, x_2 \in H)$

c) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ $(\forall \lambda \in \mathbb{C})$

d) $(x, x) \geq 0$; $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

özellikleriyle (x, y) kompleks sayısına x ve y elemanlarının iç çarpımı, H lineer uzayına ise iç çarpım uzayı denir [1].

Tanım II.2 Sayılabilir sayıda, ortonormal sisteminin var olduğu tam iç çarpım uzayına Hilbert Uzayı denir ve H ile gösterilir. H iç çarpım uzayında;

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

formülü bir norm tanımladığından, iç çarpım uzayı bu norma göre lineer normlu uzay olacaktır [1].

Tanım II.3 *Lineer Diferansiyel İfade:* $[a, b]$ aralığında

$$l(y) = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y$$

biçiminde verilen ifadeye lineer diferansiyel ifade denir. Burada $p_1(x), \dots, p_{n-1}(x), p_n(x)$; diferansiyel ifadenin katsayıları ve $[a, b]$ aralığında Lebesgue integrallenebilir, kompleks değerli fonksiyonlardır.

Tanım II.4 *Lineer Diferansiyel İfadenin Sınır Şartları:* $[a, b]$ aralığının a ve b sınır noktalarında $y_a, y'_a, y''_a, \dots, y_a^{(n-1)}$; $y_b, y'_b, \dots, y_b^{(n-1)}$ değerleri için $U(y)$ lineer

formu

$$U(y) = \alpha_0 y_a + \alpha_1 y'_a + \dots + \alpha_{n-1} y_a^{(n-1)} + \beta_0 y_b + \beta_1 y'_b + \dots + \beta_{n-1} y_b^{(n-1)}$$

biçiminde verilir ve $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ keyfi sabitlerdir. Bu sabitler değişikçe lineer formda değişir. n tane lineer denklem

$$U_\nu(y) = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, n \quad (\text{II.1})$$

koşullarıyla gerçekleşirse lineer bağımsız homojen sınır şartları olarak adlandırılır. (II.1) sınır koşullarına sağlayan fonksiyonlardan oluşan alt uzay B ile gösterilsin.

Tanım II.5 $\forall y \in B$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned} l(y) &= 0, \\ U_\nu(y) &= 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

(II.2) problemine homojen sınır değer problemi denir.

Tanım II.6 Lineer Operatör: H Hilbert uzayının herhangi bir $D \subseteq H$ lineer alt uzayı ve bir L operatörü için,

$$L : D \subseteq H \rightarrow H$$

dönüşümü verilsin. Eğer $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ ve $x_1, x_2 \in D$ için

$$L(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 Lx_1 + \alpha_2 Lx_2$$

eşitliği gerçekleşiyorsa L dönüşümüne lineer operatör, D ye ise L operatörünün tanım bölgesi denir ve bu küme $D(L)$ ile gösterilir [1].

Tanım II.7 X ve Y birer normlu uzay ve $D(L) \subset X$ bir L operatörünün tanım kümesi olmak üzere

$$\|Lx\| \leq M \|x\|$$

eşitsizliğini sağlayan bir M sayısı varsa L operatörüne sınırlıdır denir. Bu M sayılarının en küçüğüne L sınırlı operatörünün normu denir ve $\|L\|$ ile gösterilir. L operatörünün normunu

$$\|L\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Lx\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Lx\|}{\|x\|}$$

eşitliğiyle hesaplamak mümkündür [1, 27].

Teorem II.1 Her lineer L operatörünün sürekli olması için gerek ve yeter koşul sınırlı olmasıdır [1].

Tanım II.8 Adjoint Operatör: H_1 ve H_2 iki Hilbert uzay ve $L : H_1 \rightarrow H_2$ sınırlı lineer operatör olsun. Eğer $L^* : H_2 \rightarrow H_1$ operatörü $\langle Lx, y \rangle = \langle x, L^*y \rangle$ şartına sağlıyorsa L^* operatörüne L nin adjointi denir. Eğer $L = L^*$ ise L operatörüne self adjoint operatör denir [1, 27].

Tanım II.9 Özdeğer, Özfonksiyon: L sınırlı lineer bir operatör olsun. Bu takdirde L operatörünün tanım kümesinde

$$Ly = \lambda y \tag{II.3}$$

olacak biçimde bir $y \neq 0$ fonksiyonu varsa, λ sayısına L operatörünün özdeğeri ve y fonksiyonunada λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon denir [1].

y özfonksiyonu, L operatörünün tanım bölgesinde olmalı ve (II.1) sınır şartlarını sağlamalıdır. Bununla birlikte $l(y)$ diferansiyel ifadeden üretilen L operatörü $Ly = l(y)$ eşitliğiyle (II.3) den

$$l(y) = \lambda y$$

gerçeklenir.

$(l - \lambda)y = 0$ diferansiyel denklemi gözönüne alındığında λ parametresiyle birlikte $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ lineer bağımsız çözümler kümesi vardır. c_1, c_2, \dots, c_n belirli sabitler olmak

üzere genel çözüm

$$y = \sum_{i=1}^n c_i y_i(x, \lambda) \quad (\text{II.4})$$

biçiminde ifade edilir.

$y_1(x, \lambda), y_2(x, \lambda), \dots, y_n(x, \lambda)$ fonksiyonları λ ya bağlı tam fonksiyonlardır ve lineer bağımsızdırlar.

Tanım II.10

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \dots & U_2(y_n) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix} \quad (\text{II.5})$$

determinantına, L diferansiyel operatörün karakteristik determinanı denir.

$\Delta(\lambda)$, λ 'nın analitik fonksiyonuysa aşağıdaki teoremler geçerlidir [1, 4].

- L operatörünün özdeğerleri, $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunu sıfır yapan değerlerdir. Eğer $\Delta(\lambda)$ sıfırsa, o zaman her λ sayısı L operatörünün özdeğeridir.
- $\Delta(\lambda)$ sıfır değilse L operatörünün sayılabilir birçok özdeğeri vardır.
- $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun hiç sıfırı yoksa, L operatörünün hiçbir özdeğeri de yoktur.

Tanım II.11 $L_2[a, b]$ *uzayı:* Verilen $[a, b]$ aralığında tanımlı, kompleks değerli ve Lebesgue anlamında ölçülebilir olan $x(t)$ fonksiyonu için $|x(t)|^2$ fonksiyonu bu aralıkta Lebesgue anlamında integrallenebiliyorsa, $x(t)$ fonksiyonuna $[a, b]$ aralığında karesi integrallenebilen fonksiyon denir. (a, b) aralığının üzerinde Lebesgue anlamında ölçülebilir ve karesi integrallenebilir tüm kompleks değerli $x(t)$ fonksiyonların kümesindeki norm;

$$\|x\| = \left(\int_a^b [x(t)]^2 dt \right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlanır. Hemen hemen aynı olan fonksiyonların normları eşittir. Elemanları, bu kümede hemen hemen aynı olan fonksiyonlar sınıfının oluşturduğu uzaya

$L_2[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ uzayı denir. İç çarpım;

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt$$

biçiminde tanımlanarak reel durumda $\overline{\overline{y(t)}} = y(t)$ eşitliği geçerlidir.

Teorem II.2 $L_2[a, b]$ uzayın bir Hilbert uzayıdır [1].

II.2 Özdeğerlere Asimptotik Yaklaşım

$l(y) = \lambda y$ denkleminde, $\lambda = -\rho^n$ eşitliğiyle

$$l(y) + \rho^n y = 0 \quad (\text{II.6})$$

denklemini elde edilir. Genellikle $l(y)$ lineer diferansiyel ifadede $p_1(x) \equiv 0$ olarak alınır.

Eğer $p_1(x) \not\equiv 0$ ise

$$y = \tilde{y} \exp\left(-\frac{1}{n} \int p_1(x) dx\right),$$

(II.6)'dan

$$\tilde{y}^{(n)} + \tilde{p}_2(x)\tilde{y}^{(n-2)} + \dots + \tilde{p}_n(x)\tilde{y} + \rho^n \tilde{y} = 0 \quad (\text{II.7})$$

şeklinde yazılır.

[2], [3], [1]'de; $k = 0, 1, \dots, (2n - 1)$ olmak üzere $2n$ daire dilimli S_k ile bölünen kompleks ρ düzlemi

$$\frac{k\pi}{n} \leq \arg \rho \leq \frac{(k+1)\pi}{n}$$

biçiminde alınmaktadır.

$\text{Re}(z)$, z 'nin reel kısmı, w_1, w_2, \dots, w_n sayıları -1 'in farklı n . kökleri olmak üzere S_k daire dilimlerinin herbiri ve her $\rho \in S_k$ için

$$\text{Re}(\rho w_1) \leq \text{Re}(\rho w_2) \leq \dots \leq \text{Re}(\rho w_n)$$

eşitsizlikleri geçerlidir [2], [1].

Bununla birlikte $\rho \neq 0$ olmak üzere

$$y^{(n)} + \rho^n y = 0$$

homojen diferansiyel denklemin temel çözümleri

$$e^{\rho w_1 x}, e^{\rho w_2 x}, \dots, e^{\rho w_n x}$$

fonksiyonlarıdır.

Tanım II.12 *O* **sembolü:** Bazı f fonksiyonları için $O(h^r)$ nin anlamı; yeterince küçük olan h 'dan bağımsız sıfır olmayan bir C sayısı, $h \rightarrow 0$, $|f| \leq C|h|^r$ olacak şekilde vardır [14].

Tanım II.13 Bir $f(h)$ fonksiyonuna $p(h)$ fonksiyonuyla yaklaşılarak, n pozitif tam sayı olmak üzere yeterince küçük h için

$$\frac{|f(h) - p(h)|}{|h^n|} \leq M$$

eşitsizliğini gerçekleyen bir $M > 0$ reel sabit vardır. $O(h^n)$ yaklaşım mertebesiyle $f(h)$,

$$f(h) = p(h) + O(h^n)$$

biçiminde yazılır. $|f(h) - p(h)| \leq M|h^n|$ eşitsizliğinde, $M|h^n|$ hata sınırının yerini $O(h^n)$ notasyonu alır [29].

Aşağıda verilen Teorem II.3'de $|\rho|$, yeterince büyük olmak üzere

$$y^{(n)} + \rho^n y = -p_2(x)y^{(n-2)} - \dots - p_n(x)y$$

homojen olmayan denklemin $y_1(x, \rho)$, $y_2(x, \rho)$, ..., $y_n(x, \rho)$ çözümlerinin temel kümesi ve onların $(n - 1)$ mertebeden türevleri için asimptotik tahminlerini verir.

Teorem II.3

$$y^{(n)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y + \rho^n y = 0$$

denkleminde, $p_2(x), \dots, p_n(x)$ fonksiyonları $[0, 1]$ aralığında keyfi olarak integrallenebiliyorsa, ρ kompleks düzleminin her T bölgesi için, y_1, \dots, y_n n lineer bağımsız çözümleri, yeterince büyük $|\rho|$ ve $\rho \in T$ için regülerdir. Bu çözümler ve türevleri

$$\begin{aligned} y_k &= e^{\rho w_k x} & [1 + O(\frac{1}{\rho})] \\ \frac{dy_k}{dx} &= \rho e^{\rho w_k x} & [w_k + O(\frac{1}{\rho})] \\ &\cdot & \cdot \\ \frac{d^{n-1}y_k}{dx^{n-1}} &= \rho^{n-1} e^{\rho w_k x} & [w_k^{n-1} + O(\frac{1}{\rho})] \end{aligned}$$

biçiminde ifade edilir [1].

Diferansiyel operatörü tanımlayan, $U_\nu(y)$ $\nu = 1, 2, \dots, n$ lineer formlarıyla farklı sistemler gözönüne alındığında

$$|\alpha_\nu| + |\beta_\nu| \neq 0; \quad n-1 \geq k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n \geq 0, \quad k_{\nu+2} < k_\nu;$$

$$\begin{aligned} U_{\nu 0}(y) &= \alpha_\nu y_0^{(k_\nu)} + \sum_{j=0}^{k_\nu-1} \alpha_{\nu j} y_0^{(j)}, \\ U_{\nu 1}(y) &= \beta_\nu y_1^{(k_\nu)} + \sum_{j=0}^{k_\nu-1} \beta_{\nu j} y_1^{(j)} \end{aligned}$$

olmak üzere normalize sınır şartları

$$U_\nu(y) \equiv U_{\nu 0}(y) + U_{\nu 1}(y) = 0 \quad (\text{II.8})$$

biçimindedir [2], [1].

Bu (II.8) normalize sınır şartları, n 'nin tek ve çift olmasına göre sınıflandırılmaktadır [1].

Tanım II.14 n tek ($n = 2\mu - 1$) ve

$$\theta_0 + \theta_1 s = \begin{vmatrix} \alpha_1 w_1^{k_1} & \dots & \alpha_1 w_{\mu-1}^{k_1} & (\alpha_1 + s\beta_1)w_\mu^{k_1} & \beta_1 w_{\mu+1}^{k_1} & \dots & \beta_1 w_n^{k_1} \\ \alpha_2 w_1^{k_2} & \dots & \alpha_2 w_{\mu-1}^{k_2} & (\alpha_2 + s\beta_2)w_\mu^{k_2} & \beta_2 w_{\mu+1}^{k_2} & \dots & \beta_2 w_n^{k_2} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \alpha_n w_1^{k_n} & \dots & \alpha_n w_{\mu-1}^{k_n} & (\alpha_n + s\beta_n)w_\mu^{k_n} & \beta_n w_{\mu+1}^{k_n} & \dots & \beta_n w_n^{k_n} \end{vmatrix}$$

özdeşliğiyle tanımlanan θ_0, θ_1 sayılar çifti sıfırdan farklıysa, (II.8) normalize sınır şartlarına regülerdir denir.

n çift ($n = 2\mu$) ve

$$\frac{\theta_{-1}}{s} + \theta_0 + \theta_1 s \quad (\text{II.9})$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 w_1^{k_1} & \dots & \alpha_1 w_{\mu-1}^{k_1} & (\alpha_1 + s\beta_1)w_\mu^{k_1} & (\alpha_1 + \frac{\beta_1}{s})w_{\mu+1}^{k_1} & \beta_1 w_{\mu+2}^{k_1} & \dots & \beta_1 w_n^{k_1} \\ \alpha_2 w_1^{k_2} & \dots & \alpha_2 w_{\mu-1}^{k_2} & (\alpha_2 + s\beta_2)w_\mu^{k_2} & (\alpha_2 + \frac{\beta_2}{s})w_{\mu+1}^{k_2} & \beta_2 w_{\mu+2}^{k_2} & \dots & \beta_2 w_n^{k_2} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \alpha_n w_1^{k_n} & \dots & \alpha_n w_{\mu-1}^{k_n} & (\alpha_n + s\beta_n)w_\mu^{k_n} & (\alpha_n + \frac{\beta_n}{s})w_{\mu+1}^{k_n} & \beta_n w_{\mu+2}^{k_n} & \dots & \beta_n w_n^{k_n} \end{vmatrix}$$

özdeşliğiyle tanımlanan θ_1, θ_{-1} sayılar çifti sıfırdan farklıysa (II.8) normalize sınır şartlarına regülerdir denir.

Tanım II.14'de normalize sınır şartlarının regüler olması, w_k sayılarıyla S bölgesinin seçiminden bağımsızdır ve sadece $\theta_0, \theta_1, \theta_{-1}$ 'e bağlı olmayıp, aynı zamanda (II.8)'in en yüksek mertebeden türevlerinin α_ν ve β_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$) kompleks katsayılarına da bağlıdır.

Tanım II.15 $\theta_0^2 \neq 4\theta_1\theta_{-1}$ olmak üzere n çift ve (II.8) normalize sınır şartları regülerse, (II.8) sınır şartlarına güçlü regüler denir.

Tanım II.16

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x) = \lambda r(x)y \quad (\text{II.10})$$

$$a_{11}y(a) + a_{12}y'(a) + b_{11}y(b) + b_{12}y'(b) = 0 \quad (\text{II.11})$$

$$a_{21}y(a) + a_{22}y'(a) + b_{21}y(b) + b_{22}y'(b) = 0$$

son iki denklemde a_{ij} ve b_{ij} sabit katsayılar olmak üzere (II.11) sınır koşuluna ayrılmamış sınır koşulu denir ve (II.11) deki iki denklem lineer bağımsız olmalıdır. $y(x) = 0$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında (II.10) ve (II.11) sınır değer probleminin çözümüdür. Bu çözüme sınır değer probleminin aşikar çözümü denir. Sınır değer problemlerinde önemli olan, aşikar çözümden farklı $y(x)$ çözümünün var olmasıdır.

Tanım II.17 (II.10) diferansiyel denklemde;

1) $x \in (a, b)$ olmak üzere $p, q, r, \frac{1}{p}$ fonksiyonları Lebesgue integrallenebilirse

2) Hemen hemen her $x \in (a, b)$ için $p(x) \neq 0, r(x) > 0$ olmak üzere

3) $\frac{1}{p}, q, r$ (a, b) aralığında lokal olarak integrallenebilir; yani $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ olmak üzere $\frac{1}{p}, q$ ve r (α, β) sonlu aralığı üzerinde integrallenebiliyorsa

bu üç şartı sağlayan diferansiyel denkleme regüler ve diğer tüm durumlarda denklem tekildir denir [30].

Sturm-Liouville diferansiyel operatörün spektral özellikleri araştırılırken genellikle aşağıdaki sınır şartları incelenir.

a)

$$a_{11}y(a) + a_{12}y'(a) = 0,$$

$$b_{11}y(b) + b_{12}y'(b) = 0$$

b) Periyodik Sınır Şartı

$$y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b)$$

$$y(a) = -y(b), \quad y'(a) = -y'(b)$$

c) Dirichlet Sınır Şartı

$$y(a) = y(b) = 0$$

d) Neumann Sınır Şartı

$$y'(a) = y'(b) = 0.$$

Teorem II.4 *Regüler self-adjoint Sturm Liouville sınır değer probleminde*

1. *Bütün özdeğerler reeldir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ olmak üzere özdeğerler*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$$

sıralanır.

2. *$m \neq n$ olmak üzere λ_m ve λ_n özdeğerlerine karşılık gelen $y_m(x)$ ve $y_n(x)$ özfonksiyonları*

$$\langle y_m, y_n \rangle = \int_a^b r(x) y_m(x) y_n(x) dx = 0 \quad m \neq n$$

olacak biçimde $r(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre birbirine diktir.

3. *Her bir $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ikinci mertebeden türevlenebilir ve ayrık sınır koşullarını gerçekleştiriyorsa bu aralıkta düzgün ve mutlak yakınsak*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n y_n(x)$$

Fourier serisiyle ifade edilebilir [1], [14], [34].

(II.10) diferansiyel denklemde $p(x) = 1$, $r(x) = 1$ ve $q(x)$ kompleks değerli Lebesgue integrallenebilir fonksiyon olmak üzere

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} + q(x)y = \lambda y, \quad a < x < b \quad (\text{II.12})$$

$$y(a) = y(b) = 0, \quad (\text{II.13})$$

sınır değer problemine Dirichlet sınır şartlı Sturm Liouville sınır değer problemi denir. [31] 'in ilk bölümünde (II.12), (II.13) sınır değer problemi analitik metotlarla incelenip, yine aynı sınır değer problemi [1]'de teorik metotlarla incelenmiştir. Bu çalışmalar üzerine [32]'de, aynı problem $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \dots$ özdeğerlerinin discrete spektrumu için çalışma yapılmıştır. [33]'de discrete özdeğer problemlerinin çözümü için doğru metotlar inşa edilmiştir.

II.3 Sonlu Farklar Metodu

Sonlu farklar yöntemi, sürekli bir sistem olarak tanımlanan sınır değer problemini, düğüm noktası olarak adlandırılan m tane noktaya bölerek kesikli bir sistem haline dönüştürür. Böylece sınır değer problemi çözülmesi gereken cebirsel eşitlik haline gelir [35]. Sonlu farklar metodu basit bir algoritmayla şöyle özetlenebilir:

1. Bağımsız değişken için incelenen kesikli sistem eşit aralıklara bölünür.
2. Diferansiyel denklemde bulunan türev ifadeleri yerine Taylor serilerinin açılımından gelen formül kullanılarak, her bir noktadaki türevlerin karşılığı hesaplanır.
3. Sınır noktaları ayrı ayrı düşünülür. İstenen sınır şartlarına mümkün olan en iyi yaklaşım sağlanır.
4. Sonuçta ortaya çıkan sonlu sayıda bilinmeyenden oluşan denklem sistemi ya doğrudan ya da iteratif yöntemler kullanılarak çözülür ve yaklaşık sonuçlar bulunmuş olur.

II.3.1 Türevlere Sonlu Fark Yaklaşımı

Bu verilenleri uygulayabileceğimiz Sturm Liouville sınır değer problemini ele alarak, y fonksiyonu x bağımsız değişkeninin sürekli bir fonksiyonu olsun.

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \quad (\text{II.14})$$

$[a, b]$ aralığı, $m > 0$ tamsayısı için, $h = \frac{b-a}{m+1}$ olmak üzere $m + 1$ alt aralığa bölünür. Alt aralıkların uç noktaları; $j = 0, 1, 2, \dots, m + 1$ olmak üzere $x_j = a + jh$ düğüm noktalarıdır [35]. Bu düğüm noktaları (II.14) denkleminde yerine yazılırsa

$$y''(x_j) = p(x_j)y'(x_j) + q(x_j)y(x_j) + r(x_j) \quad (\text{II.15})$$

eşitliği elde edilir.

$y \in C^4[x_{j+1}, x_{j-1}]$ olmak üzere, y fonksiyonunu x_j civarında üçüncü dereceden Taylor polinomuna açarak, x_{j+1} ve x_{j-1} noktaları için Taylor polinomları Taylor teoremine göre yazalım

$$y(x_{j+1}) = y(x_j + h) = y(x_j) + hy'(x_j) + \frac{h^2}{2!}y''(x_j) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_j) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(\xi_j^+), \quad x_j < \xi_j^+ < x_{j+1}$$

$$y(x_{j-1}) = y(x_j - h) = y(x_j) - hy'(x_j) + \frac{h^2}{2!}y''(x_j) - \frac{h^3}{3!}y'''(x_j) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(\xi_j^-), \quad x_{j-1} < \xi_j^- < x_j$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanarak $y''(x_j)$ fonksiyonu çekilirse

$$y(x_{j+1}) + y(x_{j-1}) = 2y(x_j) + h^2y''(x_j) + \frac{h^4}{4!}[y^{(4)}(\xi_j^+) + y^{(4)}(\xi_j^-)]$$

$$y''(x_j) = \frac{y(x_{j+1}) - 2y(x_j) + y(x_{j-1}))}{h^2} - \frac{h^2}{4!}[y^{(4)}(\xi_j^+) + y^{(4)}(\xi_j^-)]$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte ortalama değer teoremi kullanılırsa;

$$y''(x_j) = \frac{y(x_{j+1}) - 2y(x_j) + y(x_{j-1}))}{h^2} - \frac{h^2}{12}[y^{(4)}(\xi_j)], \quad x_{j-1} < \xi_j < x_{j+1}$$

formülü elde edilir ve bu formüle $y''(x_j)$ için Merkezi Fark Formülü denir [35].

Benzer biçimde $y'(x_j)$ içinde merkezi fark formülü elde edilir. y fonksiyonunu, x_j civarında ikinci dereceden Taylor polinomuna açarak, x_{j+1} ve x_{j-1} noktaları için Taylor polinomları Taylor teoremine göre

$$y(x_{j+1}) = y(x_j + h) = y(x_j) + hy'(x_j) + \frac{h^2}{2!}y''(x_j) + \frac{h^3}{3!}y'''(\eta_j^+), \quad x_j < \eta_j^+ < x_{j+1}$$

$$y(x_{j-1}) = y(x_j - h) = y(x_j) - hy'(x_j) + \frac{h^2}{2!}y''(x_j) - \frac{h^3}{3!}y'''(\eta_j^-), \quad x_{j-1} < \eta_j^- < x_j$$

yazılır. Taraf tarafa çıkarma işlemi yapılırsa,

$$\begin{aligned} y(x_{j+1}) - y(x_{j-1}) &= 2hy'(x_j) + \frac{h^3}{6}[y'''(\eta_j^+) + y'''(\eta_j^-)] \\ y(x_{j+1}) - y(x_{j-1}) &= 2hy'(x_j) + \frac{h^3}{6}[y'''(\eta_j^+) + y'''(\eta_j^-)] \\ y'(x_j) &= \frac{y(x_{j+1}) + y(x_{j-1})}{2h} - \frac{h^2}{6}[y'''(\eta_j)], \quad x_{j-1} < \eta_j < x_{j+1} \end{aligned}$$

elde edilir. $y'(x_j)$ için bu son eşitliğe Merkezi Fark Formülü denir [35].

Bulunan bu merkezi fark formülleri (II.15) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{y(x_{j+1}) - 2y(x_j) + y(x_{j-1}))}{h^2} &= p(x_j)\frac{y(x_{j+1}) - y(x_{j-1}))}{2h} + q(x_j)y(x_j) + r(x_j) \\ &\quad - \frac{h^2}{12}[2p(x_j)y'''(\eta_j) - y^{(4)}(\xi_j)] \end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Bu denklem $y(a) = \alpha$, ve $y(b) = \beta$ sınır koşulları ile birlikte kullanılırsa, $O(h^2)$ mertebesinde kesme hatalı sonlu farklar yöntemi elde edilmiş olur.

w_j değerleri, x_j noktalarına karşılık gelen yaklaşık çözümler olmak üzere

$$w_0 = \alpha, \quad w_{m+1} = \beta$$

ve her $j = 1, 2, \dots, m$ için

$$\frac{2w_j - w_{j+1} - w_{j-1}}{h^2} + p(x_j)\frac{w_{j+1} - w_{j-1}}{2h} + q(x_j)w_j = -r(x_j)$$

denklemini gerçekleşir. Bu denklem düzenlenirse

$$-(1 - \frac{h}{2}p(x_j))w_{j+1} + (2 + h^2q(x_j))w_j - (1 + \frac{h}{2}p(x_j))w_{j-1} = -h^2r(x_j)$$

elde edilir. Bu bağıntıda her $j = 1, 2, \dots, m$ için m tane

$$\begin{aligned} -(1 - \frac{h}{2}p(x_1))w_2 + (2 + h^2q(x_1))w_1 - (1 + \frac{h}{2}p(x_1))w_0 &= -h^2r(x_1) \\ -(1 - \frac{h}{2}p(x_2))w_3 + (2 + h^2q(x_2))w_2 - (1 + \frac{h}{2}p(x_2))w_1 &= -h^2r(x_2) \\ -(1 - \frac{h}{2}p(x_3))w_4 + (2 + h^2q(x_3))w_3 - (1 + \frac{h}{2}p(x_3))w_2 &= -h^2r(x_3) \end{aligned}$$

$$-(1 - \frac{h}{2}p(x_m))w_{m+1} + (2 + h^2q(x_m))w_m - (1 + \frac{h}{2}p(x_m))w_{m-1} = -h^2r(x_m)$$

denklem elde edilir. Bu denklemler $m \times m$ 'lik bir tridiagonal matris içeren $Aw = b$ sistemini oluşturur [35].

$$A = \begin{bmatrix} (2 + h^2q(x_1)) & -(1 - \frac{h}{2}p(x_1)) & 0 & 0 & \dots \\ -(1 + \frac{h}{2}p(x_2)) & (2 + h^2q(x_2)) & -(1 - \frac{h}{2}p(x_2)) & 0 & \dots \\ 0 & -(1 + \frac{h}{2}p(x_3)) & (2 + h^2q(x_3)) & -(1 - \frac{h}{2}p(x_3)) & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & -(1 + \frac{h}{2}p(x_m)) & (2 + h^2q(x_m)) \end{bmatrix}$$

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_{m-1} \\ w_m \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -h^2r(x_1) + (1 + \frac{h}{2}p(x_1))w_0 \\ -h^2r(x_2) \\ -h^2r(x_3) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -h^2r(x_{m-1}) \\ -h^2r(x_m) + (1 - \frac{h}{2}p(x_m))w_{m+1} \end{bmatrix}$$

III ÇALIŞMALAR

III.1 DIRICHLET SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN ASİMPTOTİK FORMÜLLER

Bu tezde $q(x)$ kompleks değerli integrallenebilir fonksiyon olmak üzere

$$-y'' + q(x)y \quad (\text{III.1})$$

ifadesi ve

$$y(0) = y(1) = 0 \quad (\text{III.2})$$

sınır şartıyla birlikte $L_2[0, 1]$ uzayında üretilen $L(q)$ operatörü incelenmiştir.

Bu bölümde c, a_0, a_1, b_0, b_1 kompleks sayılar olmak üzere [12]'deki $q(x) = p(x) + \frac{c}{x^\alpha}$ ve $q(x) = \frac{a_0}{\sqrt{x}} + \frac{a_1}{\sqrt{1-x}} + b_0\sqrt{x} + b_1\sqrt{1-x}$ potansiyelleri için, $L(q)$ operatörünün özdeğerlerinin asimptotik formüllerinin nasıl bulunduğunu inceledik. Bunun üzerine ν pozitif tam sayı, t_k ve c_k kompleks sayı olmak üzere

$$q(x) = \sum_{k=0}^{\nu} \frac{c_k}{|x - t_k|^{\alpha_k}}, \quad 0 < \alpha_k < 1 \quad (\text{III.3})$$

sonlu sayıda tekil noktası olan potansiyel için $L(q)$ operatörünün özdeğerlerinin asimptotik formüllerini bulduk.

Klasik çalışmalarda $O(n^{-r})$ mertebeden asimptotik formülleri elde etmek için $q(x)$ potansiyelinin $(r-1)$ kere diferansiyellenebilmesi gerekmektedir [2, 3]. Halbuki, [12]'deki makalede $q(x)$ keyfi integrallenebilir kompleks değerli fonksiyon olarak incelendiğinde, $L(q)$ operatörünün özdeğerleri ve özfonksiyonlarının $O(n^{-r})$ mertebeden asimptotik formüllerinin elde edilebileceği gösterilmiştir. Bu bölümde, öncelikle [12] makalesinde alınmış sonuçları inceleyelim:

$N \gg 1$ pozitif tam sayı olmak üzere $L(q)$ operatörünün özdeğerleri $n \geq N$ için

$$\lambda_n = (n\pi)^2 + O(1) \quad (\text{III.4})$$

olacak biçimde $\{\lambda_n\}$ dizisi gerçekleşir [1]. N büyük pozitif tam sayı ($N \gg 1$) ve c_1, c_2, \dots pozitif sabitler olsun. (III.4) formülünden $n > N$ için

$$|\lambda_n - (\pi k)^2| > |(n - k)\pi| |(n + k)\pi| - c_1 n^{\frac{1}{2}} > c_2 n, \quad (\text{III.5})$$

$$\forall k \neq n, k = 0, 1, \dots,$$

eşitsizliklerin sağlandığı görülmektedir. $L(q)$ operatörünün λ_n özdeğerleri ve bu özdeğerlere karşı gelen normalize $\Psi_n(x)$ özfonksiyonları için asimptotik formüllerin elde edilmesinde (III.5) eşitsizliği ve

$$(\lambda_N - (\pi n)^2)(\Psi_N(x), \sin n\pi x) = (q(x)\Psi_N(x), \sin n\pi x) \quad (\text{III.6})$$

bağıntısı kullanılmıştır.

$n \rightarrow \infty$ olduğunda, $(q(x)\Psi_N(x), \sin n\pi x)$ iç çarpımı sifıra yaklaştığından

$$\max_n |(q(x)\Psi_N(x), \sin n\pi x)| = |(q(x)\Psi_N(x), \sin n_0\pi x)| = A_N \quad (\text{III.7})$$

eşitliğini sağlayan bir n_0 tamsayısı ve A_N sabiti vardır. (III.5) deki eşitsizlik dikkate alınır, $|n_1| > 2(|N| + |n|) = m$ için

$$|\lambda_N - (\pi(n + n_1))^2| > \frac{1}{2} |(N - n - n_1)\pi| |(N + n + n_1)\pi| > c_3 |n_1|^2$$

eşitsizliği gerçekleşir. Bu eşitsizlikle (III.6), (III.7) ve $|n_1| > m$ için

$$|(\Psi_N(x), \sin(n + n_1)\pi x)| \leq \frac{A_N}{|\lambda_N - (\pi(n + n_1))^2|} < \frac{A_N}{c_3 |n_1|^2}$$

elde edilir. Böylece $\{\sqrt{2}\sin(n + n_1)\pi x : n_1 > -n\}$ ortonormal bazıyla $\Psi_N(x)$ 'in

$$\Psi_N(x) = \sum_{n_1 > -n}^m 2(\Psi_N(x), \sin(n + n_1)\pi x) \sin(n + n_1)\pi x$$

ayrışımı ve $\sup_{x \in [0,1]} |g(x)| < \frac{c_4}{m}$ olmak üzere

$$\Psi_N(x) = \sum_{n_1 > -n}^m 2(\Psi_N(x), \sin(n + n_1)\pi x) \sin(n + n_1)\pi x + g(x)$$

özfonksiyonu elde edilir. $\Psi_N(x)$ özfonksiyonu $(q(x)\Psi_N(x), \sin n\pi x)$ iç çarpımında yerine yazılırsa ve $m \rightarrow \infty$ olmak üzere

$$(q(x)\Psi_N(x), \sin n\pi x) = \sum_{n_1 > -n}^{\infty} 2(q(x), (\sin(n+n_1)\pi x)(\sin n\pi x))(\Psi_N(x), \sin(n+n_1)\pi x) \quad (\text{III.8})$$

elde edilir.

$M = \int_0^1 |q(x)| dx$ olmak üzere (III.7), (III.8), (III.6) formülleri ve (III.5) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} |(q(x)\Psi_N(x), \sin n\pi x)| &\leq 2M \sum_{n_1 > -n_0}^{\infty} (\Psi_N(x), \sin(n_0+n_1)\pi x) \\ &= 2M(\Psi_N(x), \sin N\pi x) + 2M \sum_{n_1 > -n_0}^{\infty} (\Psi_N(x), \sin(n_0+n_1)\pi x) \\ &< 2M \|\Psi_N(x)\| \|\sin N\pi x\| \\ &\quad + 2M \sum_{n_1 > -n_0, n_0+n_1 \neq N}^{\infty} \frac{|(q(x)\Psi_N(x), \sin(n_0+n_1)\pi x)|}{|\lambda_N - (\pi(n_0+n_1))^2|} \\ &\leq 2M + 2M \sum_{n_1 > -n_0, n_0+n_1 \neq N}^{\infty} \frac{A_N}{|\lambda_N - (\pi(n_0+n_1))^2|} \leq 2M + \frac{A_N}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. $A_N \leq 4M$ olmak üzere

$$|(q(x)\Psi_N(x), \sin n\pi x)| < 4M, \quad \forall n, \forall N \gg 1 \quad (\text{III.9})$$

eşitsizliği gerçekleşir. (III.8)'deki çarpım formülünü kullanılırsa,

$$\begin{aligned} (q(x)\Psi_N(x), \sin n\pi x) &= \sum_{n_1 > -n}^{\infty} 2(q(x), \frac{1}{2}(\cos n_1\pi x - \cos(2n+n_1)\pi x))(\Psi_N(x), \sin(n+n_1)\pi x) \end{aligned}$$

elde edilir. $C_0 = 0$ ve $C_n = \int_0^1 q(x) \cos n\pi x dx$ olmak üzere son eşitlikte $2n+n_1$ yerine k ve tekrar k yerine n_1 alınırsa

$$\begin{aligned} (q(x)\Psi_N(x), \sin n\pi x) &= \sum_{n_1=1}^{\infty} C_{n_1}(\Psi_N(x), \sin(n+n_1)\pi x) \\ &\quad + \sum_{n_1=1}^{\infty} C_{n_1}(\Psi_N(x), \sin(n-n_1)\pi x) \end{aligned}$$

sonucu bulunur. Bu sonuç (III.6) eşitliğinde uygulandığında ve $n \gg 1$ için $C_n \rightarrow 0$ olduğu gözönüne alınırsa

$$(\lambda_N - (\pi n)^2)(\Psi_N(x), \sin n\pi x) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} C_{n_1}(\Psi_N(x), \sin(n+n_1)\pi x) \quad (\text{III.10})$$

elde edilir. (III.10) eşitliğinde, N 'nin yerine n , n 'nin yerine $n+n_1$, n_1 yerinede n_2 alınırsa,

$$(\Psi_n(x), \sin(n+n_1)\pi x) = \sum_{\substack{n_2=-\infty \\ n_1 \neq -2n}}^{\infty} \frac{C_{n_2}(\Psi_n(x), \sin(n+n_1+n_2)\pi x)}{\lambda_n - (\pi(n+n_1))^2}$$

eşitliği gerçekleşir. Bu eşitlik ve (III.10)'un sağındaki serinin bir terimi için n_1 yerine $-2n$, $(\Psi_n(x), \sin(n+n_1)\pi x)$ iç çarpımı yerinede elde edilen son eşitlik uygulanırsa

$$\begin{aligned} (\lambda_n - (\pi n)^2)(\Psi_n(x), \sin n\pi x) &= -C_{2n}(\Psi_n(x), \sin n\pi x) \quad (\text{III.11}) \\ &+ \sum_{\substack{n_1, n_2=-\infty \\ n_1 \neq -2n}}^{\infty} \frac{C_{n_1} C_{n_2}(\Psi_n(x), \sin(n+n_1+n_2)\pi x)}{\lambda_n - (\pi(n+n_1))^2} \end{aligned}$$

ifadesine varılır. Aynı yöntem tekrarlanıp, $n_1+n_2 \neq 0, -2n$ ve $C_{n_1} = C_{-n_1}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &(\lambda_n - (\pi n)^2)(\Psi_n(x), \sin n\pi x) \quad (\text{III.12}) \\ &= (\Psi_n(x), \sin n\pi x) \left\{ -C_{2n} + \sum_{\substack{n_1=-\infty \\ n_1 \neq 0, -2n}}^{\infty} \frac{C_{n_1}(C_{n_1} - C_{n_1+2n})}{\lambda_n - (\pi(n+n_1))^2} \right\} \\ &+ \sum_{\substack{n_1, n_2=-\infty \\ n_1, n_1+n_2 \neq 0, -2n}}^{\infty} \frac{C_{n_1} C_{n_2}(\Psi_n(x), \sin(n+n_1+n_2)\pi x)}{\lambda_n - (\pi(n+n_1))^2} \end{aligned}$$

ikinci iterasyon tamamlanır. (III.12)'nin son toplamında iterasyon tekrarlanarak ve $n_1+n_2+n_3 \neq 0, -2n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &(\lambda_n - (\pi n)^2)(\Psi_n(x), \sin n\pi x) \quad (\text{III.13}) \\ &= (\Psi_n(x), \sin n\pi x) \left\{ -C_{2n} + \sum_{\substack{n_1=-\infty \\ n_1 \neq 0, -2n}}^{\infty} \frac{C_{n_1}(C_{n_1} - C_{n_1+2n})}{\lambda_n - (\pi(n+n_1))^2} \right. \\ &+ \left. \sum_{\substack{n_1, n_2=-\infty \\ n_1, n_1+n_2 \neq 0, -2n}}^{\infty} \frac{C_{n_1} C_{n_2}(C_{n_1+n_2} - C_{n_1+n_2+2n})}{[\lambda_n - (\pi(n+n_1))^2][\lambda_n - (\pi(n+n_1+n_2))^2]} \right\} \end{aligned}$$

$$+ \sum_{\substack{n_1, n_2, n_3 = -\infty \\ n_1, n_1+n_2, n_1+n_2+n_3 \neq 0, -2n}}^{\infty} \frac{C_{n_1} C_{n_2} C_{n_3} (\Psi_n(x), \sin(n + n_1 + n_2 + n_3) \pi x)}{[\lambda_n - (\pi(n + n_1))^2] [\lambda_n - (\pi(n + n_1 + n_2))^2]}$$

elde edilir. Bu yöntemi genelleştirmek amacıyla (III.13)'ün sağındaki ifade

$$a_0(\lambda_n) = -C_{2n},$$

$$a_1(\lambda_n) = \sum_{\substack{n_1 = -\infty \\ n_1 \neq 0, -2n}}^{\infty} \frac{C_{n_1} (C_{n_1} - C_{n_1+2n})}{\lambda_n - (\pi(n + n_1))^2},$$

$$a_2(\lambda_n) = \sum_{\substack{n_1, n_2 = -\infty \\ n_1, n_1+n_2 \neq 0, -2n}}^{\infty} \frac{C_{n_1} C_{n_2} (C_{n_1+n_2} - C_{n_1+n_2+2n})}{[\lambda_n - (\pi(n + n_1))^2] [\lambda_n - (\pi(n + n_1 + n_2))^2]}$$

olmak üzere, her k tamsayısı için;

$$a_k(\lambda_n) = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k = -\infty}^{\infty} \frac{C_{n_1} C_{n_2} \dots C_{n_k} (C_{n_1+n_2+\dots+n_k} - C_{n_1+n_2+\dots+n_k+2n})}{\prod_{j=1}^k [\lambda_n - (\pi(n + \sum_{s=1}^j n_s))^2]}$$

gerçeklenir. m kere (III.11)'de yapılan iterasyon tekrar edilerek;

$$A_m(\lambda_n) = \sum_{k=0}^m a_k(\lambda_n),$$

$$R_{m+1} = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_{m+1} = -\infty}^{\infty} \frac{C_{n_1} C_{n_2} \dots C_{n_{m+1}} (q(x) \Psi_n(x), \sin(n + \sum_{k=1}^{m+1} n_k))}{\prod_{j=1}^{m+1} [\lambda_n - (\pi(n + \sum_{k=1}^j n_k))^2]} \quad (\text{III.14})$$

olmak üzere

$$(\lambda_n - (\pi n)^2 - A_m(\lambda_n)) (\Psi_n(x), \sin n \pi x) = R_{m+1} \quad (\text{III.15})$$

elde edilir. Burada $s = 1, 2, \dots, k$ için $a_k(\lambda_n)$ ve $s = 1, 2, \dots, m+1$ için R_{m+1} toplamları;

$$\sum_{j=1}^s n_j \neq 0, -2n$$

şartıyla geçerlidir. (III.5) ve (III.9) kullanılarak aşağıdaki ilişkiler

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq -n, n}}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n - (\pi k)^2|} = O\left(\frac{\ln |n|}{n}\right), \quad (\text{III.16})$$

$$a_k = O\left(\left(\frac{\ln |n|}{n}\right)^k\right), \quad R_{m+1} = O\left(\left(\frac{\ln |n|}{n}\right)^{m+1}\right) \quad (\text{III.17})$$

elde edilir [11].

Bu ilişki ve gösterilen formüller üzerine $L(q)$ operatörünün özdeğerlerinin genel formülü [12]'de aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem III.1 $F_0 = -C_{2n}$,

$$F_1 = A_1((n\pi)^2) = -C_{2n} + \sum_{\substack{n_1=-\infty \\ n_1 \neq -2n}}^{\infty} \frac{C_{n_1}(C_{n_1} - C_{n_1+2n})}{[(n\pi)^2 - (\pi(n+n_1))^2]},$$

ve

$$F_k = A_k((n\pi)^2 + F_{k-1}), \forall k = 2, 3, \dots$$

olmak üzere $L(q)$ operatörünün n . özdeğeri $m = 0, 1, 2, \dots$, için

$$\lambda_n = (\pi n)^2 + F_m + O\left(\left(\frac{\ln |n|}{n}\right)^{m+1}\right) \quad (\text{III.18})$$

asimptotik formülünü gerçekler.

İspat. Bu teoremin ispatında tümevarım yöntemi kullanılmıştır.

İlk olarak (III.18)'de $m = 0$ için

$$\lambda_n = (\pi n)^2 - C_{2n} + O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \quad (\text{III.19})$$

özdeğerin asimptotik formülü bulunur. Gerçekten, [1]'in sayfa 77'deki

$$\Psi_n(x) = \sqrt{2} \sin n\pi x + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

formülünden

$$(\Psi_n(x), \sin n\pi x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (\text{III.20})$$

elde edilir. Böylece $m = 0$ için, (III.17), (III.20) gözönüne alınırsa ve (III.15)'deki eşitliğin her iki tarafı $(\Psi_n(x), \sin n\pi x)$ iç çarpımıyla bölünürse (III.19) elde edilir.

$m = 1$ için (III.15)'den

$$\lambda_n = (n\pi)^2 + A_1(\lambda_n) + O\left(\left(\frac{\ln |n|}{n}\right)^2\right) \quad (\text{III.21})$$

elde edilir. $\lambda_n - (n\pi)^2 = O(1)$ ve

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k_2 \neq n, -n}}^{\infty} \left| \frac{1}{\lambda_n - (\pi k)^2} - \frac{1}{(\pi n)^2 - (\pi k)^2} \right| = O\left(\left(\frac{\ln |n|}{n}\right)^2\right) \quad (\text{III.22})$$

formülü kullanılırsa

$$A_1(\lambda_n) = A_1((\pi n)^2) + O\left(\left(\frac{\ln|n|}{n}\right)^2\right) \quad (\text{III.23})$$

eşitliği gerçekleşir.

(III.18)'in ispatlanması için tümevarım yöntemiyle, $m = j - 1$ için doğru olduğu kabul edilerek

$$\lambda_n = (n\pi)^2 + F_{j-1} + O\left(\left(\frac{\ln|n|}{n}\right)^j\right) \quad (\text{III.24})$$

formülü yazılır. (III.15)'de m yerine j alınır; (III.15) deki eşitliğin her iki tarafı $(\Psi_n(x), \sin n\pi x)$ iç çarpımıyla bölünerek, (III.17) ve (III.20)'den

$$\lambda_n = (n\pi)^2 + A_j(\lambda_n) + O\left(\left(\frac{\ln|n|}{n}\right)^{j+1}\right) \quad (\text{III.25})$$

gerçeklenir. (III.24) ve (III.25)'den λ_n değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} A_j(\lambda_n) &= A_j((n\pi)^2 + F_{j-1} + O\left(\left(\frac{\ln|n|}{n}\right)^j\right)) \\ &= A_j((n\pi)^2 + F_{j-1}) + O\left(\left(\frac{\ln|n|}{n}\right)^{j+1}\right) \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

elde edilir. Böylece $A_j((n\pi)^2 + F_{j-1}) = F_j$ gözönüne alınarak $m = j$ için (III.25) ve (III.26)'dan, (III.18) ispat edilmiş olur. ■

Teorem III.1 den ve [12]'deki Teorem 3'den faydalanarak; (III.3)'de verilen sonlu sayıda tekil noktası olan $q(x) = \sum_{k=0}^{\nu} \frac{c_k}{|x-t_k|^{\alpha_k}}$ potansiyeli için $L(q)$ operatörünün özdeğerlerinin asimptotik formüllerinin bulunmasını gösterelim:

Teorem III.2 (III.3)'de verilen sonlu sayıda tekil noktası olan potansiyel fonksiyon için $L(q)$ operatörünün n . özdeğeri

$$\lambda_n = (n\pi)^2 - \sum_{k=0}^{\nu} \frac{c_k}{(2n)^{1-\alpha_k}} K_k(d_{4k} + d_{4k+2}) - N_k(d_{4k+1} + d_{4k+3}) + O\left(\frac{\ln|n|}{n}\right), \quad (\text{III.27})$$

$$\begin{aligned}
\lambda_n &= (n\pi)^2 - \sum_{k=0}^{\nu} \frac{c_k}{(2n)^{1-\alpha_k}} (K_k(d_{4k} + d_{4k+2}) - N_k(d_{4k+1} + d_{4k+3})) \quad (\text{III.28}) \\
&- \frac{1}{\pi^2} \sum_{\substack{n_1=-\infty \\ n_1 \neq 0, -2n}}^{\infty} \sum_{k=0}^{\nu} \frac{c_k}{n_1^{(2-\alpha_k)}(2n+n_1)} (K_k(d_{4k} + d_{4k+2}) - N_k(d_{4k+1} + d_{4k+3})) \\
&\sum_{k=0}^{\nu} c_k (n_1^{\alpha_k-1} - (2n+n_1)^{\alpha_k-1}) (K_k(d_{4k} + d_{4k+2}) - N_k(d_{4k+1} + d_{4k+3})) \\
&+ O\left(\left(\frac{\ln|n|}{n}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

asimptotik formülleri gerçekler. Burada $K_k = \cos n\pi t_k$, $N_k = \sin n\pi t_k$, $d_{4k} = \int_0^{\infty} \frac{\cos \pi s}{s^{\alpha_k}} ds$, $d_{4k+2} = \int_{-\infty}^0 \frac{\cos \pi s}{s^{\alpha_k}} ds$, $d_{4k+1} = \int_{-\infty}^0 \frac{\sin \pi s}{s^{\alpha_k}} ds$, $d_{4k+3} = \int_0^{\infty} \frac{\sin \pi s}{s^{\alpha_k}} ds$ olarak alınmaktadır.

İspat. (III.18)'de $m = 0$ için

$$\lambda_n = (\pi n)^2 - C_{2n} + O\left(\frac{\ln|n|}{n}\right)$$

formülünü kullanalım. Burada $C_n = \int_0^1 q(x) \cos n\pi x dx$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
C_n &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{\nu} \frac{c_k \cos n\pi x}{(x-t_k)^{\alpha_k}} dx \\
&= \sum_{k=0}^{\nu} \int_0^1 \frac{c_k \cos n\pi x}{(x-t_k)^{\alpha_k}} dx
\end{aligned}$$

biçiminde yazılır. Son eşitlikte $t = x - t_k$ dönüşümü uygulandığında,

$$\begin{aligned}
C_n &= \sum_{k=0}^{\nu} \int_{-t_k}^{1-t_k} \frac{c_k \cos n\pi(t+t_k)}{t_k^{\alpha_k}} dt \\
&= \sum_{k=0}^{\nu} \int_{-t_k}^{1-t_k} \frac{c_k \cos n\pi t \cos n\pi t_k}{t_k^{\alpha_k}} dt - \sum_{k=0}^{\nu} \int_{-t_k}^{1-t_k} \frac{c_k \sin n\pi t \sin n\pi t_k}{t_k^{\alpha_k}} dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\cos n\pi t_k = K_k$ ve $\sin n\pi t_k = N_k$ ile gösterilerek

$$C_n = \sum_{k=0}^{\nu} c_k K_k \int_{-t_k}^{1-t_k} \frac{\cos n\pi t}{t_k^{\alpha_k}} dt - \sum_{k=0}^{\nu} c_k N_k \int_{-t_k}^{1-t_k} \frac{\sin n\pi t}{t_k^{\alpha_k}} dt$$

eşitliğinde $nt = s$ dönüşümüyle

$$C_n = \sum_{k=0}^{\nu} \frac{c_k}{n^{1-\alpha_k}} (K_k \int_{-nt_k}^{n(1-t_k)} \frac{\cos \pi s}{s^{\alpha_k}} ds - N_k \int_{-nt_k}^{n(1-t_k)} \frac{\sin \pi s}{s^{\alpha_k}} ds)$$

gerçeklenir. $n(1 - t_k) = n_k$ olmak üzere ve $d_{4k} = \int_0^\infty \frac{\cos \pi s}{s^{\alpha_k}} ds$, $d_{4k+2} = \int_{-\infty}^0 \frac{\cos \pi s}{s^{\alpha_k}} ds$,
 $d_{4k+1} = \int_{-\infty}^0 \frac{\sin \pi s}{s^{\alpha_k}} ds$, $d_{4k+3} = \int_0^\infty \frac{\sin \pi s}{s^{\alpha_k}} ds$ gözönüne alındığında

$$C_n = \sum_{k=0}^{\nu} \frac{c_k}{n^{1-\alpha_k}} (K_k(d_{4k} - \int_{n_k}^\infty \frac{\cos \pi s}{s^{\alpha_k}} ds + d_{4k+2} - \int_{-\infty}^{-nt_k} \frac{\cos \pi s}{s^{\alpha_k}} ds) \quad (\text{III.29})$$

$$- N_k(d_{4k+1} - \int_{-\infty}^{-nt_k} \frac{\sin \pi s}{s^{\alpha_k}} ds + d_{4k+3} - \int_{n_k}^\infty \frac{\sin \pi s}{s^{\alpha_k}} ds))$$

biçiminde yazılır. $[n_k, \infty)$ 'da $2j_0 - 1$ 'in en küçük tek tamsayı olduğunu kabul edelim.

Bu durumda

$$D_{j,1} = \int_{2j-\frac{1}{2}}^{2j+\frac{1}{2}} \frac{\cos \pi s}{s^{\alpha_k}} ds, \quad D_{j,2} = \int_{2j+\frac{1}{2}}^{2j+\frac{3}{2}} \frac{\cos \pi s}{s^{\alpha_k}} ds,$$

olmak üzere $\cos \pi s \geq 0$, $s \in [2j - \frac{1}{2}, 2j + \frac{1}{2}]$ için

$$\frac{\cos \pi s}{(2j + \frac{1}{2})^{\alpha_k}} < \frac{\cos \pi s}{s^{\alpha_k}} < \frac{\cos \pi s}{(2j - \frac{1}{2})^{\alpha_k}},$$

$$\frac{2}{\pi} \frac{1}{(2j + \frac{1}{2})^{\alpha_k}} < D_{j,1} < \frac{2}{\pi} \frac{1}{(2j - \frac{1}{2})^{\alpha_k}} \quad (\text{III.30})$$

eşitsizlikleri vardır. Benzer olarak,

$$-\frac{2}{\pi} \frac{1}{(2j + \frac{1}{2})^{\alpha_k}} < D_{j,2} < -\frac{2}{\pi} \frac{1}{(2j + \frac{3}{2})^{\alpha_k}} \quad (\text{III.31})$$

eşitsizliğide gerçekleşir. (III.30), (III.31) eşitsizliklerinden

$$\int_{n_k}^\infty \frac{\cos \pi s}{s^{\alpha_k}} ds = O\left(\frac{1}{n_k^{\alpha_k}}\right) + \sum_{j=j_0}^\infty (D_{j,1} + D_{j,2}) \quad (\text{III.32})$$

elde edilir. Böylece (III.32) ve $|D_{j,1} + D_{j,2}| < \frac{c_5}{j^{1+\alpha_k}}$ eşitsizliğinden

$$\int_{n_k}^\infty \frac{\cos \pi s}{s^{\alpha_k}} ds = O\left(\frac{1}{n_k^{\alpha_k}}\right)$$

gerçeklenir. (III.29)'un dördüncü integrali için

$$D_{j,3} = \int_j^{j+1} \frac{\sin \pi s}{s^{\alpha_k}} ds, \quad D_{j,4} = \int_{j+1}^{j+2} \frac{\sin \pi s}{s^{\alpha_k}} ds$$

olmak üzere $\sin \pi s \geq 0$, $s \in [j + 1, j + 2]$ için

$$\frac{\sin \pi s}{(j + 2)^{\alpha_k}} < \frac{\sin \pi s}{s^{\alpha_k}} < \frac{\sin \pi s}{(j + 1)^{\alpha_k}},$$

$$-\frac{2}{\pi} \frac{1}{(j+1)^{\alpha_k}} < D_{j,4} < -\frac{2}{\pi} \frac{1}{(j+2)^{\alpha_k}}$$

eşitsizlikleri gerçekleşir. Benzer olarak,

$$\frac{2}{\pi} \frac{1}{(j+1)^{\alpha_k}} < D_{j,3} < \frac{2}{\pi} \frac{1}{j^{\alpha_k}}$$

eşitsizliğide elde edilir. Son iki eşitsizlikten

$$\int_{n_k}^{\infty} \frac{\sin \pi s}{s^{\alpha_k}} ds = O\left(\frac{1}{n_k^{\alpha_k}}\right) + \sum_{j=j_0}^{\infty} (D_{j,3} + D_{j,4}) \quad (\text{III.33})$$

integrali gerçekleşir. (III.33) ile $|D_{j,3} + D_{j,4}| < \frac{c_6}{j^{1+\alpha_k}}$ eşitsizliğinden

$$\int_{n_k}^{\infty} \frac{\sin \pi s}{s^{\alpha_k}} ds = O\left(\frac{1}{n_k^{\alpha_k}}\right)$$

integralinin asimptotik ifadesi yazılır. (III.29)'un üçüncü ve beşinci integralleri için bu yöntem tekrarlanarak ve n_k yerine n alındığında

$$C_n = \sum_{k=0}^{\nu} \frac{c_k}{n^{1-\alpha_k}} (K_k(d_{4k} + d_{4k+2}) - N_k(d_{4k+1} + d_{4k+3})) + O\left(\frac{1}{n^{\alpha_k}}\right) \quad (\text{III.34})$$

elde edilir. (III.34) ve teorem III.1'de $F_0 = -C_{2n}$ eşitliği gözönüne alınırsa

$$\lambda_n = (n\pi)^2 - \sum_{k=0}^{\nu} \frac{c_k}{(2n)^{1-\alpha_k}} K_k(d_{4k} + d_{4k+2}) - N_k(d_{4k+1} + d_{4k+3}) + O\left(\frac{\ln |n|}{n}\right)$$

n . özdeğerin asimptotik formülü elde edilir.

(III.28)'deki asimptotik formülü elde etmek için (III.34)'de n yerine sırasıyla $2n$,

n_1, n_{1+2n} alındığında

$$C_{2n} = \sum_{k=0}^{\nu} \frac{c_k}{(2n)^{1-\alpha_k}} (K_k(d_{4k} + d_{4k+2}) - N_k(d_{4k+1} + d_{4k+3})) + O\left(\frac{1}{(2n)^{\alpha_k}}\right)$$

$$C_{n_1} = \sum_{k=0}^{\nu} \frac{c_k}{n_1^{1-\alpha_k}} (K_k(d_{4k} + d_{4k+2}) - N_k(d_{4k+1} + d_{4k+3})) + O\left(\frac{1}{n_1^{\alpha_k}}\right) \quad (\text{III.35})$$

$$C_{n_{1+2n}} = \sum_{k=0}^{\nu} \frac{c_k}{n_{1+2n}^{1-\alpha_k}} (K_k(d_{4k} + d_{4k+2}) - N_k(d_{4k+1} + d_{4k+3})) + O\left(\frac{1}{n_{1+2n}^{\alpha_k}}\right) \quad (\text{III.36})$$

formülleri yazılır. (III.34) gözönüne alınırsa (III.18)'de $m = 1$ için

$$\lambda_n = (n\pi)^2 - \sum_{k=0}^{\nu} \frac{c_k}{(2n)^{1-\alpha_k}} K_k(d_{4k} + d_{4k+2}) - N_k(d_{4k+1} + d_{4k+3}) \quad (\text{III.37})$$

$$+ \sum_{\substack{n_1=-\infty \\ n_1 \neq -2n}}^{\infty} \frac{C_{n_1}(C_{n_1} - C_{n_1+2n})}{[(n\pi)^2 - (\pi(n+n_1))^2]} + O\left(\left(\frac{\ln|n|}{n}\right)^2\right)$$

elde edilir. (III.37)'de C_{n_1} yerine (III.35) formülü ve C_{n_1+2n} yerinede (III.36) formülü yazıldığında

$$\lambda_n = (n\pi)^2 - \sum_{k=0}^{\nu} \frac{c_k}{(2n)^{1-\alpha_k}} (K_k(d_{4k} + d_{4k+2}) - N_k(d_{4k+1} + d_{4k+3})) \quad (\text{III.38})$$

$$- \frac{1}{\pi^2} \sum_{\substack{n_1=-\infty \\ n_1 \neq 0, -2n}}^{\infty} \sum_{k=0}^{\nu} \frac{c_k}{n_1^{(2-\alpha_k)}(2n+n_1)} (K_k(d_{4k} + d_{4k+2}) - N_k(d_{4k+1} + d_{4k+3}))$$

$$\sum_{k=0}^{\nu} c_k (n_1^{\alpha_k-1} - (2n+n_1)^{\alpha_k-1}) (K_k(d_{4k} + d_{4k+2}) - N_k(d_{4k+1} + d_{4k+3}))$$

$$+ O\left(\left(\frac{\ln|n|}{n}\right)^2\right)$$

n .asimptotik özdeğer elde edilir. ■

III.2 NÜMERİK YAKLAŞIM

Bu bölümde $L_2[a, b]$ uzayında,

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \quad (\text{III.39})$$

$$y(a) = y(b) = 0 \quad (\text{III.40})$$

Dirichlet sınır şartlı Sturm Liouville sınır değer probleminde $q(x)$ Lebesgue integralenebilir potansiyeli; $0 < \alpha_k < 1$, ν pozitif tam sayı ve c_k reel sabit olmak üzere, sonlu sayıda tekil noktası olan $q(x) = \sum_{k=0}^{\nu} \frac{c_k}{|x-t_k|^{\alpha_k}}$ fonksiyon için incelendi. Bu Sturm Liouville sınır değer problemlerinin kesin çözümlerine ulaşmak genellikle olanaksızdır. Böyle problemler çeşitli yaklaşım yöntemleriyle çözülebilmektedir ve genel olarak nümerik yöntemler kullanılmaktadır. Bu nümerik yöntemlerden, sınır değer problemleri için genellikle sonlu farklar yöntemi tercih edilmektedir. Sonlu farklar yöntemi, sistem içerisindeki her bir sonlu aralık için adi diferensiyel denklemi cebirsel denklem sistemine dönüştürür. [35] ve [14]'de alınan merkezi fark formüllerini (III.39), (III.40) sınır değer problemine uygulayalım; $m > 2$ pozitif tamsayı ve

$$h = \frac{b-a}{m+1}, \quad x_j = a + jh, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (\text{III.41})$$

olmak üzere, $[x_j, x_{j+1}]$ eşit aralıklı

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m+1} = b,$$

$m+1$ sayıdaki adım üzerinde inceleme yapılır. Merkezi fark formülünde $y(x_j)$ yerine y_j , $q(x_j)$ yerine q_j ve $y''(x_j)$ yerinede y_j'' alındığında $O(h^2)$ hatayla ikinci mertebeden fark formülü

$$-y_j'' \approx \frac{-y_{j-1} + 2y_j - y_{j+1}}{h^2}$$

biçimindedir.

(III.39)'a merkezi fark formülü uygulanırsa

$$\frac{-Y_{j-1} + 2Y_j - Y_{j+1}}{h^2} + q_j Y_j = \Lambda Y_j \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (\text{III.42})$$

III.2.1 Sturm Liouville Operatörünün Özdeğerlerine Potansiyel Fonksiyonun Etkisi

Çalışmalar bölümü III.1 de (III.1), (III.2) sınır değer probleminin büyük özdeğerleri için asimptotik formüller incelendi. Bu bölümde aynı (III.1), (III.2) sınır değer probleminin özdeğerlerini sonlu farklar yöntemini kullanarak bulacağız. Bölüm III.1 de incelediğimiz (III.3) potansiyel fonksiyonda sabit değer $c_k = 1$, ν pozitif tamsayı için $k = 0, 1, \dots, \nu$ ve $t_k = \frac{k}{\nu}$ alındığında potansiyel fonksiyon

$$q_k(x) = \frac{1}{|x - t_k|^{\alpha_k}}, \quad 0 < \alpha_k < 1, \quad (III.45)$$

olmak üzere

$$L(q_k) = -\frac{d^2}{dx^2} + q_k(x) \quad (III.46)$$

$L(q_k)$ operatörünün n .özdeğerini λ_n^k sembolüyle gösterelim. Diğer taraftan $Q_\nu(x)$ potansiyel fonksiyonu

$$Q_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\nu} q_k(x) \quad (III.47)$$

olmak üzere

$$L(Q_\nu) = -\frac{d^2}{dx^2} + Q_\nu(x) \quad (III.48)$$

$L(Q_\nu)$ operatörünün n .özdeğerini Λ_n^ν sembolüyle gösterelim.

(III.1), (III.2) probleminde, sonlu farklar metodunu uygulayabilmek için düğüm noktalarıyla tekil noktaların çakışmaması gerekmektedir. $m_\nu > 2$ tamsayısı için

$m_\nu = \nu(m + 1)$ ve x_j düğüm noktaları

$$x_j = \frac{j}{m_\nu}, \quad j \neq k \frac{m_\nu}{\nu}, \quad j = 1, 2, \dots, m_\nu - 1 \quad (III.49)$$

olmak üzere $x_j \neq t_k$ elde edilir.

Bu bölümde Q_ν ve q_k potansiyelleri sıfırken $L(0)$ operatörünün n . özdeğeri $(n\pi)^2$ olduğu gözönüne alınırsa, (III.45) fonksiyonunun $L(q_k)$ operatörünün özdeğerlerdeki etkisi;

$$p_n^k = \lambda_n^k - (n\pi)^2$$

farkıyla bulunabilir. Aynı biçimde (III.47) fonksiyonunun $L(Q_\nu)$ operatörünün özdeğerlerindeki etkisi de,

$$P_n^\nu = \Lambda_n^\nu - (n\pi)^2$$

farkıyla elde edilir. $n \gg 1$ büyük pozitif tamsayısı için

$$\left| P_n^\nu - \sum_{k=0}^{\nu} p_n^k \right| \rightarrow 0 \quad (\text{III.50})$$

sağlanmaktadır.

Gerçekten, $n \gg 1$ için $L(q_k)$ ve $L(Q_\nu)$ operatörlerinin Teorem III.2 de gösterilen asimptotik metotla bulduğumuz (III.27), (III.28) özdeğerleri için, (III.50) deki farkın sifıra yakınsadığı görülür. Bu yakınsamayı, üzerinde çalıştığımız sonlu farklar metodunu kullanarak $L(Q_\nu)$ ve $L(q_k)$ operatörlerinin ilk on özdeğerinde görebilmek için

$$Q_2(x) = \sum_{k=0}^2 \frac{1}{\sqrt{|x - \frac{k}{2}|}}$$

üç tekil noktalı potansiyel fonksiyonuyla

$$-y'' + Q_\nu(x)y = \lambda y$$

$$y(0) = y(1) = 0$$

sınır değer problemi ve

$$q_k(x) = \frac{1}{\sqrt{|x - \frac{k}{2}|}}, \quad (k = 0, 1, 2)$$

potansiyel fonksiyonlarla

$$-y'' + q_k(x)y = \lambda y$$

$$y(0) = y(1) = 0$$

sınır değer problemi gözönüne alınarak, Mathematica7 programlama dilinde yazılan programla

$$P_n^2 = \Lambda_n^2 - (n\pi)^2$$

$$\sum_{k=0}^2 p_n^k = \sum_{k=0}^2 (\lambda_n^k - (n\pi)^2)$$

pertürbasyonları 10^{-4} duyarlılıkla hesaplanıp aşağıdaki tablolar düzenlenmiştir. Tekil noktaların çok yakın komşuluğunda inceleme yapabilmek için adım aralıkları sayısını yeterince büyük alarak, nümerik çözümün doğru sonuçlar verdiği öngörülmüştür. Bu sebepten alt aralıklar $m_\nu = 9000$ olmak üzere aşağıdaki değerler elde edilmiştir.

Tablo III.1 P_n^2 ve $p_n^0, p_n^1, p_n^2, \sum_{k=0}^2 p_n^k$ değerleri

n	P_n^2	p_n^0	p_n^1	p_n^2	$\sum_{k=0}^2 p_n^k$	$P_n^2 - \sum_{k=0}^2 p_n^k$
1	6,8453	1,5077	3,8119	1,5077	6,8272	0,0181
2	5,4364	1,6490	2,1359	1,6490	5,4339	0,0025
3	6,8249	1,7128	3,4041	1,7128	6,8296	0,0047
4	5,8336	1,7510	2,3325	1,7510	5,8345	0,0009
5	6,8131	1,7771	3,2614	1,7771	6,8155	0,0024
6	6,0141	1,7963	2,4221	1,7963	6,0147	0,0006
7	6,8087	1,8112	3,1872	1,8112	6,8097	0,001
8	6,1223	1,8232	2,4757	1,8232	6,1221	0,0002
9	6,8063	1,8330	3,1399	1,8330	6,8059	0,0004
10	6,1959	1,8412	2,5121	1,8412	6,1944	0,0015

Tablo III.1'in son sütununda bu problem için hesaplanan pertürbasyon farkları $2.10^{-4} \leq \left| P_n^2 - \sum_{k=0}^2 p_n^k \right| < 2.10^{-2}$ aralığında değişmektedir.

Tekillik sayısını arttırarak

$$Q_3(x) = \sum_{k=0}^3 \frac{1}{\sqrt{|x - \frac{k}{3}|}}$$

dört tekil noktalı potansiyel fonksiyonuyla

$$-y'' + Q_\nu(x)y = \lambda y$$

$$y(0) = y(1) = 0$$

sınır değer problemi ve

$$q_k(x) = \frac{1}{\sqrt{|x - \frac{k}{3}|}}, \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

potansiyel fonksiyonlarla

$$-y'' + q_k(x)y = \lambda y$$

$$y(0) = y(1) = 0$$

sınır değer problemi gözönüne alındığında

$$P_n^3 = \Lambda_n^3 - (n\pi)^2$$

$$\sum_{k=0}^3 p_n^k = \sum_{k=0}^3 (\lambda_n^k - (n\pi)^2)$$

pertürbasyon farkları için aşağıdaki tablo düzenlenmiştir.

Tablo III.2 P_n^3 ve $\sum_{k=0}^3 p_n^k$ değerleri

n	P_n^3	$\sum_{k=0}^3 p_n^k$	$P_n^3 - \sum_{k=0}^3 p_n^k$
1	9,6757	9,5152	0,1605
2	9,5513	9,6828	0,1315
3	7,8644	7,8638	0,0006
4	9,5736	9,5547	0,0189
5	9,5496	9,5759	0,0263
6	8,3556	8,3563	0,0007
7	9,554	9,5458	0,0082
8	9,5455	9,556	0,0105
9	8,577	8,5759	0,0011
10	9,5476	9,5404	0,0072

Tablo III.2'nin son sütunundaki pertürbasyon farkları

$6.10^{-4} \leq \left| P_n^3 - \sum_{k=0}^3 p_n^k \right| < 2.10^{-1}$ aralığında değişmektedir. Yine tekillik sayısını artırarak

$$Q_4(x) = \sum_{k=0}^4 \frac{1}{\sqrt{\left| x - \frac{k}{4} \right|}}$$

beş tekil noktalı potansiyel fonksiyonuyla

$$-y'' + Q_\nu(x)y = \lambda y$$

$$y(0) = y(1) = 0$$

sınır değer problemi ve

$$q_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\left| x - \frac{k}{4} \right|}}, \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4)$$

potansiyel fonksiyonlarla

$$-y'' + q_k(x)y = \lambda y$$

$$y(0) = y(1) = 0$$

sınır değer problemi gözönüne alındığında

$$P_n^4 = \Lambda_n^4 - (n\pi)^2$$

$$\sum_{k=0}^4 p_n^k = \sum_{k=0}^4 (\lambda_n^k - (n\pi)^2)$$

pertürbasyon farkları için aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Tablo III.3 P_n^4 ve $\sum_{k=0}^4 p_n^k$ değerleri

n	P_n^4	$\sum_{k=0}^4 p_n^k$	$\left P_n^4 - \sum_{k=0}^4 p_n^k \right $
1	12,473	12,2664	0,2066
2	12,3101	12,3676	0,0575
3	12,2484	12,3607	0,1123
4	10,3124	10,3127	0,0003
5	12,2858	12,2626	0,0232
6	12,2714	12,2787	0,0073
7	12,2523	12,2766	0,0243
8	10,8828	10,8823	0,0005
9	12,2619	12,2503	0,0116
10	12,2622	12,2613	0,0009

$$3 \cdot 10^{-4} \leq \left| P_n^4 - \sum_{k=0}^4 p_n^k \right| < 2 \cdot 10^{-1}$$

Son üç tablodan, sonlu farklar metodunu uygulayarak bulduğumuz $L(q_k)$ ile $L(0)$ operatörlerinin n . özdeğerlerinin farkının toplamı ve $L(Q_\nu)$ ile $L(0)$ operatörlerinin n . özdeğerlerinin farkı karşılaştırılmıştır. $\nu = 2, 3, 4$ için (III.50)'nin ilk on değeri $2 \cdot 10^{-4}$ ile $2 \cdot 10^{-1}$ arasında değişmektedir.

$L(q_k)$ ve $L(Q_\nu)$ Operatörlerinin Özdeğerleri Arasındaki Bağntı

$L(q_k)$ operatörünün $\nu + 1$ tane q_k potansiyellerinin toplamı, $L(Q_\nu)$ operatörünün (III.47) Q_ν potansiyelini vermektedir. Tezin bu bölümünde ve daha sonraki bölümlerde $L(q_k)$ operatörünün asimptotik metotla elde edilen özdeğerlerini a_n^k sembolüyle, nümerik yöntemle bulunan özdeğerleriyle s_n^k sembolüyle göstereceğiz. $L(Q_\nu)$ operatörünün asimptotik metotla elde edilen özdeğerlerini A_n^ν sembolüyle, nümerik yöntemle bulunan özdeğerleriyle S_n^ν sembolüyle göstereceğiz.

$n \gg 1$ büyük pozitif tamsayısı için $L(q_k)$ operatörünün n . asimptotik özdeğerlerinin aritmetik ortalaması

$$A_n^\nu = \frac{1}{\nu + 1} \sum_{k=0}^{\nu} a_n^k \quad (\text{III.51})$$

bağıntısıyla $L(Q_\nu)$ operatörünün n . asimptotik özdeğerini verir. Bu bağıntı için

$P_n^\nu(A) = A_n^\nu - (n\pi)^2$ ve $p_n^k(a) = a_n^k - (n\pi)^2$ olmak üzere asimptotik özdeğerler

$$A_n^\nu = (n\pi)^2 + P_n^\nu(A)$$

$$a_n^k = (n\pi)^2 + p_n^k(a)$$

biçimindedir. $n \gg 1$ için (III.27) formülünden

$$A_n^\nu = (n\pi)^2 - \sum_{k=0}^{\nu} \frac{K_k(d_{4k} + d_{4k+2}) - N_k(d_{4k+1} + d_{4k+3})}{(2n)^{1-\alpha_k}} + O\left(\frac{\ln |n|}{n}\right) \quad (\text{III.52})$$

ve

$$a_n^k = (n\pi)^2 - \frac{K_k(d_{4k} + d_{4k+2}) - N_k(d_{4k+1} + d_{4k+3})}{(2n)^{1-\alpha_k}} + O\left(\frac{\ln |n|}{n}\right)$$

olmak üzere son eşitliğin her iki tarafı ν pozitif tamsayıya kadar toplanırsa

$$\sum_{k=0}^{\nu} a_n^k = \sum_{k=0}^{\nu} \left((n\pi)^2 - \frac{K_k(d_{4k} + d_{4k+2}) - N_k(d_{4k+1} + d_{4k+3})}{(2n)^{1-\alpha_k}} \right) + O\left(\frac{\ln |n|}{n}\right) \quad (\text{III.53})$$

elde edilir. $n \gg 1$ için (III.52) ve (III.53)'den $P_n^\nu(A) \rightarrow 0$ ve $\sum_{k=0}^{\nu} p_n^k(a) \rightarrow 0$ olduğundan (III.51) bağıntısı gerçekleşir.

Örnek III.1 Bu bölümde açıklanan sonlu farklar metodu ve (III.49) geçerli olmak üzere

$$-y'' + \sum_{k=0}^4 \frac{1}{|(x - t_k)|^{\alpha_k}} y = \lambda y, \quad 0 < \alpha_k < 1$$

$$y(0) = y(1) = 0,$$

Sturm-Liouville sınır değer probleminde $\alpha_k = \frac{1}{2}$, $m_\nu = 52$, $t_k = \frac{k}{\nu}$, $\nu = 4$ değerleri için Mathematica7 programlama dilinde yazılan programdan elde edilen sonuçlar aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo III.4 $L(q_k)$ ve $L(Q_4)$ operatörlerinin nümerik özdeğerleri

n	s_n^0	s_n^1	s_n^2	s_n^3	s_n^4	S_n^4	$\sum_{k=0}^4 s_n^k / S_n^4$
1	11.3318	12.362	13.7938	12.362	11.3318	21.8354	2.799628
2	40.964	42.6802	41.8164	42.6802	40.964	51.3977	4.068369
3	90.1306	91.8388	92.027	91.8388	90.1306	101.59	4.488294
4	158.682	159.939	159.725	159.939	158.682	168.471	4.730589
5	246.367	247.313	248.089	247.313	246.367	256.253	4.821208
6	352.853	353.893	353.989	353.893	352.853	362.369	4.877572
7	477.739	479.058	479.373	479.058	477.739	488.318	4.900428
8	620.551	621.985	621.745	621.985	620.551	630.915	4.924304
9	780.748	782.038	782.327	782.038	780.748	791.208	4.939155
10	957.722	958.824	958.957	958.824	957.722	967.47	4.953176
20	3474.67	3475.87	3476.02	3475.87	3474.67	3484.74	4.986627
30	6627.18	6628.35	6628.6	6628.35	6627.18	6637.27	4.992965
40	9256.36	9257.45	9257.89	9257.45	9256.36	9266.38	4.994994
50	10395.6	10396.7	10398.1	10396.7	10395.6	10406.1	4.995407

Tablo III.4 de $L(q_k)$ ve $L(Q_4)$ operatörlerinin özdeğerleri verilmiştir. $L(q_k)$ operatörünün n . özdeğerlerinin toplamı, $L(Q_\nu)$ operatörünün n . özdeğerine oranı; $n \geq 30$

için Tablo III.4'ün son sütununda $\nu+1 \approx 5$ olduğu saptanarak, (III.51) bağıntısı gerçekleştirilmiştir. Ayrıca, Tablo III.4'de birinci sütunla beşinci sütunun n . özdeğeri, ikinci sütunla dördüncü sütunun n . özdeğeri aynı olmaktadır. Gerçekten, (III.45)'de verilen $q_k(x)$ potansiyel fonksiyonda $x = 1 - z$ dönüşümü yapılırsa, $q_{\nu-k}(x) = \frac{1}{|x - \frac{\nu-k}{\nu}|^{\alpha_k}}$ potansiyeli elde edilir. Bu potansiyel fonksiyonlar gözönüne alındığında $L(q_{\nu-k})$ operatörüyle $L(q_k)$ operatörünün n . özdeğerleri aynıdır.

III.2.2 Tekil Noktalarda Özvektör Grafiği

Bu bölümde

$$-y'' + \sum_{k=0}^{\nu} \frac{1}{|(x - t_k)|^{\alpha_k}} y = \lambda y, \quad 0 < \alpha_k < 1 \quad (\text{III.54})$$

$$y(0) = y(1) = 0 \quad (\text{III.55})$$

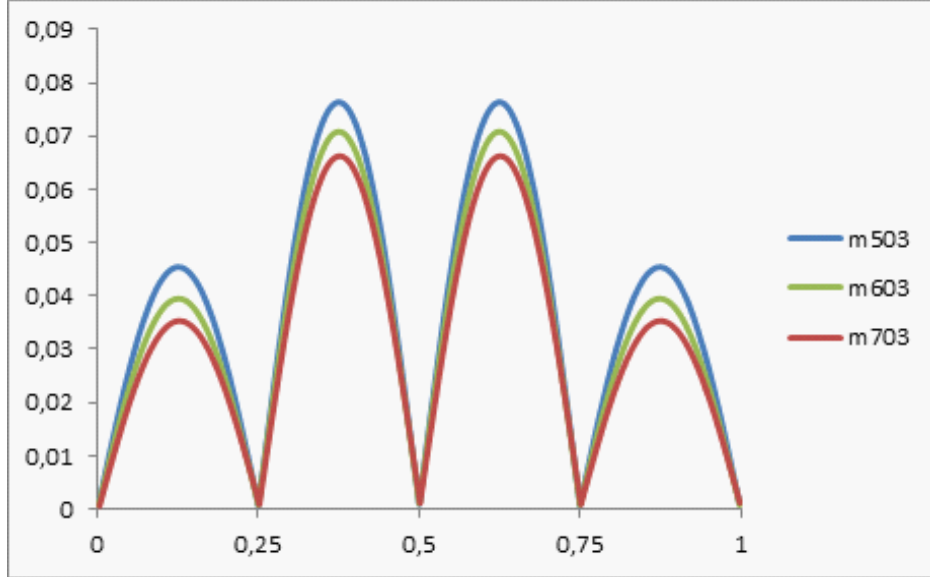
sınır değer probleminde, bölüm III.2'de verilen sonlu farklar yöntemi uygulanırsa (III.41)'deki adım aralıkları

$$m = (\nu - 1) + \nu l, \quad l \in \mathbb{Z}^+ \quad (\text{III.56})$$

olmak üzere x_j düğüm noktaları

$$x_j = t_k$$

eşitliğini gerçekler. Bu durumda (III.54)-(III.55) sınır değer probleminin çözümünün bulunması nümerik yöntemlerle imkansız olduğundan, düğüm noktalarının ϵ komşuluğunda çözüm elde edilmektedir. Nümerik yöntemlerle (III.54)-(III.55) sınır değer probleminde $\nu = 4$ ve tekil noktaların $\epsilon = 10^{-12}$ komşuluğunda (III.44)'deki T matrisinin ilk özvektörü Mathematica 7 bilgisayar programlama dilinde grafiği çizdirilmiştir. (III.56) adım aralıklarında l pozitif tamsayı sırasıyla $l = 125, 150, 175$ olmak üzere özvektörün grafiği Şekil III.1'de gösterilmiştir.



Şekil III.1 $L(Q_4)$ Operatörünün Özvektörü

Şekil III.1’de, farklı alt aralıklarda (III.54)-(III.55) sınır değer probleminde $x \rightarrow t_k$ olmak üzere $y \rightarrow 0$ olduğu görülmektedir. Ayrıca bu sınır değer probleminde potansiyel fonksiyon simetrik olduğundan, Şekil III.1’de verilen özvektör grafiğide simetrik olmaktadır.

III.2.3 Tekil Noktalara Bağlı Sınır Şartları

Sınır koşulları, $t_k = \frac{k}{\nu}$ tekil noktalara bağlı olan

$$-y'' + \sum_{k=0}^{\nu} \frac{1}{|x - t_k|^{\alpha_k}} y = \lambda y, \quad 0 < \alpha_k < 1 \quad (\text{III.57})$$

$$y(t_k) = y(t_{k+1}) = 0 \quad (\text{III.58})$$

sınır değer probleminin sonlu farklar yöntemiyle elde edilen n . özdeğerini $S_n^\nu(b_k)$ sembolüyle gösterelim. ν ye bağlı m adım aralıkları $m_i = 10^i \nu$ ($i = 2, 3, \dots, l$ ve l pozitif tamsayı) olmak üzere

$$\frac{S_n^\nu(b_k)}{S_n^\nu} \leq \nu^2 \quad (\text{III.59})$$

eşitsizliği gerçekleşir.

Örnek III.2 (III.57)-(III.58) sınır değer probleminde $\nu = 3, 6$ ve t_k tekil noktalarla belirlenen $b_k = [t_k, t_{k+1}]$ aralıkları gözönüne alınarak Mathematica7 programlama dilinde program yazılmıştır.

Aşağıdaki Tablo III.5 ve Tablo III.6'da $S_n^3(b_0)$;

$$-y'' + \sum_{k=0}^3 \frac{1}{|(x - \frac{k}{3})|^{1/2}} y = \lambda y,$$

$$y(0) = y(\frac{1}{3}) = 0$$

sınır değer probleminin n . özdeğeri, $S_n^3(b_1)$ ise

$$-y'' + \sum_{k=0}^3 \frac{1}{|(x - \frac{k}{3})|^{1/2}} y = \lambda y,$$

$$y(\frac{1}{3}) = y(\frac{2}{3}) = 0$$

sınır değer probleminin n . özdeğeri.

Tablo III.5 $i = 2$ için S_n^3 ve $S_n^3(b_0)$, $S_n^3(b_1)$ nümerik özdeğerler

n	S_n^3	$S_n^3(b_0)$	$S_n^3(b_1)$	$S_n^3(b_0)/S_n^3$	$S_n^3(b_1)/S_n^3$
1	12.8913	96.5818	96.9063	7.4920	7.5172
2	42.7632	363.5381	363.8694	8.5012	8.5089
3	92.1866	807.8394	808.1721	8.7631	8.7667
4	161.2112	1429.6162	1429.9494	8.8679	8.8700
5	249.7966	2228.8475	2229.1810	8.9227	8.9239
6	357.8677	3205.4646	3205.7982	8.9571	8.9581
7	485.3251	4359.3698	4359.7034	8.9824	8.9831
8	632.0483	5690.4421	5690.7758	9.0032	9.0037
9	797.8969	7198.5397	7198.8734	9.0219	9.0223
10	982.7117	8883.4999	8883.8336	9.0398	9.0401

Tablo III.5'in son iki sütununda (III.59) eşitsizliği gerçekleşmektedir.

Tablo III.6 $i = 3$ için S_n^3 ve $S_n^3(b_0)$, $S_n^3(b_1)$ nümerik özdeğerler

n	S_n^3	$S_n^3(b_0)$	$S_n^3(b_1)$	$S_n^3(b_0)/S_n^3$	$S_n^3(b_1)/S_n^3$
1	12.8920	96.5826	96.9071	7.4916	7.5168
2	42.7758	363.5509	363.8822	8.4990	8.5067
3	92.2505	807.9041	808.2367	8.7577	8.7613
4	161.4128	1429.8206	1430.1538	8.8582	8.8602
5	250.2887	2229.3464	2229.6799	8.9071	8.9084
6	358.8877	3206.499	3206.8326	8.9345	8.9355
7	487.2137	4361.2861	4361.6197	8.9515	8.9522
8	635.2684	5693.7111	5694.0448	8.9627	8.9632
9	803.0518	7203.7755	7204.1092	8.9705	8.9709
10	990.5635	8891.4795	8891.8133	8.9762	8.9765

Tablo III.6'nın son iki sütununda (III.59) eşitsizliği sağlanmaktadır.

Tablo III.5 ve Tablo III.6'da incelenen potansiyelin tekillik sayısını arttırarak

$$-y'' + \sum_{k=0}^6 \frac{1}{|(x - \frac{k}{6})|^{1/2}} y = \lambda y,$$
$$y(\frac{1}{6}) = y(\frac{1}{3}) = 0$$

sınır değer probleminin n . özdeğeri $S_n^6(b_1)$ ve benzer biçimde

$$-y'' + \sum_{k=0}^6 \frac{1}{|(x - \frac{k}{6})|^{1/2}} y = \lambda y,$$
$$y(\frac{1}{3}) = y(\frac{1}{2}) = 0$$

sınır değer probleminin n . özdeğeri $S_n^6(b_2)$ sembolüyle gösterilir. Aşağıdaki tabloda bu özdeğerler ve bu özdeğerlerin S_n^6 özdeğerine oranı verilmiştir.

Tablo III.7 $i = 3$ için S_n^6 ve $S_n^6(b_1)$, $S_n^6(b_2)$ nümerik özdeğerler

n	S_n^6	$S_n^6(b_1)$	$S_n^6(b_2)$	$S_n^6(b_1)/S_n^6$	$S_n^6(b_2)/S_n^6$
1	12.8921	370.7522	371.1491	28, 7582	28, 7889
2	42.7760	1437.3767	1437.7763	33, 6024	33, 6118
3	92.2511	3214.221	3214.6212	34, 8421	34, 8464
4	161.4149	5701.5488	5701.9491	35, 3223	35, 3248
5	250.2936	8899.4266	8899.8271	35, 5559	35, 5575
6	358.8979	12807.8798	12808.2803	35, 6867	35, 6878
7	487.2326	17426.9198	17427.32031	35, 7671	35, 7679
8	635.3006	22756.5522	22756.9527	35, 8201	35, 8208
9	803.1035	28796.7795	28797.1801	35, 8569	35, 8574
10	990.6423	35547.6029	35548.0035	35, 8834	35, 8838

Bu tablodada son iki sütunda (III.59) eşitsizliği görülmektedir. Yani, $L(Q_\nu)$ operatörünün n . özdeğeri, t_k tekil noktalarla belirlenen $b_k = [t_k, t_{k+1}]$ aralıklarında aldığı değerle, $L(Q_\nu)$ operatörünün n . özdeğerinin $[0, 1]$ aralığında aldığı değere oranı ν^2 'den küçüktür.

Sonlu farklar yöntemiyle gösterilen (III.59) eşitsizliği, bilinen teorik bilgilerle şu şekilde açıklanabilir; Q_ν potansiyel fonksiyon sıfır olduğunda

$$-y'' = \lambda y,$$

$$y(0) = y(1) = 0$$

sınır değer probleminin özdeğerleri $(n\pi)^2$ dir. Sınır şartları değiştirilirse ve (III.58) sınır şartları gözönüne alındığında

$$-y'' = \lambda y,$$

$$y\left(\frac{k}{\nu}\right) = y\left(\frac{k+1}{\nu}\right) = 0$$

sınır değer probleminin özdeğerleri $\nu^2(n\pi)^2$ dir. Çözümü bilinen son iki sınır değer problemlerin özdeğerleri arasındaki ilişki (III.59)'u gerçeklemektedir.

III.3 PERTÜRBASYON PARAMETRESİYLE DIRICHLET SINIR ŞARTLI STURM LIOUVILLE PROBLEMİ

Pertürbasyon teorisi küçük değişimler teorisidir. Tam olarak çözümlenemeyen bir problemin, bu probleme bağlı bir problemden yola çıkılarak yaklaşık bir çözüm elde etmek için matematiksel metodlar içeren teyidir. Problemin matematiksel tanımına "küçük" bir parametreyle, eldeki problem formüle edilebiliyorsa, pertürbasyon teorisi uygulanabilir.

Bu teyinin uygulama alanı atom fiziğinde vardır. Fizik alanında atomların enerji seviyeleri; kuantumlu bölge, sürekli bölge olmak üzere iki durumda ele alınır. Bu nedenle pertürbasyon; bağımlı durumların pertürbasyonu, sürekli bölge pertürbasyonu (saçılma teyisi) olarak incelenir. Bağımlı durumların pertürbasyonu, zamana bağımlı ve zamandan bağımsız olmak üzere iki durumda irdelenir [37]. Ayrıca, bu teyide uygulanan metotlar çok kullanışlı ve etkili metotlardır. Bu metotlar temelde küçük parametre üzerinedir.

Tezin bu bölümünde $0 < \epsilon \ll 1$ oldukça küçük nümerik parametre ve $\epsilon q(x)$ pertürbe edilen Lebesgue integrallenebilir potansiyel [38] olmak üzere $L_2[0, 1]$ uzayında

$$L(\epsilon q) = -\frac{d}{dx^2} + \epsilon q(x) \quad (\text{III.60})$$

$$y(0) = y(1) = 0 \quad (\text{III.61})$$

dirichlet sınır şartlı $L(\epsilon q)$ operatörün asimptotik ve nümerik özdeğerlerini bularak, pertürbasyon tekniğiyle bölüm III.1'de gösterilen asimptotik metotla, bölüm III.2'de uygulanan nümerik metot karşılaştırılacaktır.

(III.60)-(III.61)'e pertürbasyon tekniği uygulanmadığında, özdeğerler

$$\lambda_n(0) = (n\pi)^2$$

olmaktadır.

$L(\epsilon q)$ operatörünün q potansiyeli yerine (III.47)'de verilen Q_ν potansiyeli alınır, pertürbe edilen Sturm Liouville probleminin özdeğerleri ϵ 'a bağlı olacağından asimptotik özdeğerleri $A_n^\nu(\epsilon)$ sembolüyle ve nümerik özdeğerleride $S_n^\nu(\epsilon)$ sembolüyle belirleyelim.

III.3.1 Pertürbasyon Parametresiyle Asimptotik Özdeğerler

Teorem III.2 den yararlanarak (III.37)'deki asimptotik formülde $c_k = 1$ için

$$C_n = \sum_{k=0}^{\nu} \frac{1}{n^{1-\alpha_k}} (\cos n\pi x_k (\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \pi s}{s^{\alpha_k}} ds) + \sin n\pi x_k (\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi s}{s^{\alpha_k}} ds)) + O(\frac{1}{n^{\alpha_k}})$$

ve

$$U_n = \sum_{\substack{n_1=-\infty \\ n_1 \neq 0, -2n}}^{\infty} \frac{C_{n_1}(C_{n_1} - C_{n_1+2n})}{(n\pi)^2 - ((n+k)\pi)^2},$$

$$K_n^\nu(\epsilon) = (n\pi)^2 - \epsilon C_{2n} + \epsilon^2 U_n \quad (\text{III.62})$$

olmak üzere (III.60)-(III.61)'in n . asimptotik özdeğerini

$$A_n^\nu(\epsilon) = K_n^\nu(\epsilon) + O(\frac{\epsilon^3 \ln |n|}{n})$$

elde ettik. (III.62)'deki U_n serisini; $|n_1| > 50$ olduğunda U_n^r sembolüyle gösterilirse

$$\epsilon^2 U_n^r \leq M \sum_{\substack{|n_1| > 50 \\ n_1 \neq 0, -2n}} \frac{\epsilon^2}{(n\pi)^2 - ((n+n_1)\pi)^2}$$

eşitsizliğini gerçekleyen bir $M \in R^+$ sayısı vardır. Bu eşitsizliğin sağındaki toplam,

$$U_n^{r_1} = -\frac{1}{\pi^2} \sum_{\substack{\{n_1: |2n+n_1| > 50, |n_1| > 50\} \\ n_1 \neq 0, -2n}} \frac{1}{n_1(2n+n_1)}$$

olmak üzere

$$\sum_{\substack{|n_1| > 50 \\ n_1 \neq 0, -2n}} \frac{\epsilon^2}{(n\pi)^2 - ((n+n_1)\pi)^2} = \epsilon^2 U_n^{r_1} + O(\frac{\epsilon^3 \ln |n|}{n}) \quad (\text{III.63})$$

asimptotik formülüyle gösteririz. Bu formül $n_1 \neq 0, -2n$ olduğundan

$$\sum_{\substack{\{n_1: |2n+n_1| > 50, |n_1| > 50\} \\ n_1 \neq 0, -2n}} \frac{\epsilon^2}{n_1(2n+n_1)} < \epsilon^2 \left(\int_{-\infty}^{2n-50} \frac{dx}{x(2n+x)} + \int_{2n+50}^{\infty} \frac{dx}{x(2n+x)} \right)$$

yakınsak integrallerle ifade edilebilir. Son integral hesaplanarak

$$\begin{aligned} \int_{2n+50}^{\infty} \frac{\epsilon^2}{x(2n+x)} dx &= \epsilon^2 \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2n} (\ln |x| - \ln |2n+x|) \right]_{2n+50}^t \\ &= \epsilon^2 \frac{1}{2n} \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\ln \frac{|t|}{|2n+t|} - \ln \frac{|2n+50|}{|4n+50|} \right] \\ &= \epsilon^2 \frac{1}{2n} \ln \frac{|4n+50|}{|2n+50|} \\ &< O\left(\frac{\epsilon^2 \ln |n|}{n}\right) \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\int_{-\infty}^{2n-50} \frac{\epsilon^2}{x(2n+x)} dx < O\left(\frac{\epsilon^2 \ln |n|}{n}\right)$$

elde edilir. Bu asimptotik yaklaşımlar üzerine $|n_1| > 50, |2n+n_1| > 50$ için

$$\epsilon^2 I_n^{r_1} = \epsilon^2 \left(\int_{-\infty}^{-2n-50} \frac{dx}{x(2n+x)} + \int_{2n+50}^{\infty} \frac{dx}{x(2n+x)} \right)$$

olacak şekilde n 'nin ilk 20 değeri için $\epsilon^2 U_n^{r_1}$ ve $\epsilon^2 I_n^{r_1}$ 'in aldığı değerler ve aralarındaki fark aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo III.8 ($\epsilon = 10^{-3}$) $\epsilon^2 U_n^{r_1}$ ve $\epsilon^2 I_n^{r_1}$ değerleri ve aralarındaki fark

n	$\epsilon^2 U_n^{r_1}$	$\epsilon^2 I_n^{r_1}$	$ \epsilon^2 U_n^{r_1} - \epsilon^2 I_n^{r_1} $
1	$-4.09588E - 09$	$3,85051E - 08$	$4.26009E - 08$
2	$-4.10259E - 09$	$3,71286E - 08$	$4.12312E - 08$
3	$-4.11387E - 09$	$3,5874E - 08$	$3.99878E - 08$
4	$-4.12985E - 09$	$3,4724E - 08$	$3.88538E - 08$
5	$-4.15073E - 09$	$3,36646E - 08$	$3.78153E - 08$
6	$-4.17678E - 09$	$3,26844E - 08$	$3.68612E - 08$
7	$-4.20834E - 09$	$3,17738E - 08$	$3.59822E - 08$
8	$-4.24585E - 09$	$3,09249E - 08$	$3.51708E - 08$
9	$-4.28987E - 09$	$3,01309E - 08$	$3.44208E - 08$
10	$-4.34109E - 09$	$2,9386E - 08$	$3.37271E - 08$
11	$-4.4004E - 09$	$2,86854E - 08$	$3.30858E - 08$
12	$-4.54801E - 09$	$2,80247E - 08$	$3.24936E - 08$
13	$-4.63958E - 09$	$2,74003E - 08$	$3.19483E - 08$
14	$-4.74602E - 09$	$2,68089E - 08$	$3.14485E - 08$
15	$-4.87061E - 09$	$2,62477E - 08$	$3.09937E - 08$
16	$-5.01789E - 09$	$2,57141E - 08$	$3.05847E - 08$
17	$-5.19419E - 09$	$2,5206E - 08$	$3.02239E - 08$
18	$-5.42293E - 09$	$2,47214E - 08$	$2.99156E - 08$
19	$-4.32861E - 09$	$2,42585E - 08$	$2.96814E - 08$
20	$-4.10259E - 09$	$2,38157E - 08$	$2.81443E - 08$

Aynı uygulama, (III.13)'ün sağındaki ikinci seri için yapıldığında

$$\epsilon^3 U_n^{r_2} = \epsilon^3 \sum_{\substack{\{n_1: |2n+n_1| > 50, |n_1| > 50\} \\ n_1 \neq 0, -2n}} \frac{1}{[(n\pi)^2 - (\pi(n+n_1))^2] [(n\pi)^2 - (\pi(n+n_1+n_2))^2]}$$

ve $|n_1| > 50$, $|2n+n_1| > 50$, $|2n+n_1+n_2| > 50$, $|n_1+n_2| > 50$

$$\begin{aligned} \epsilon^3 I_n^{r_2} &= \epsilon^3 \left(\int_{-\infty}^{-2n-50} \int_{-\infty}^{-2n-50} \frac{1}{x(2n+x)(x+t)(2n+x+t)} dx dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{2n+50}^{\infty} \int_{2n+50}^{\infty} \frac{1}{x(2n+x)(x+t)(2n+x+t)} dx dt \right) \end{aligned}$$

olmak üzere n 'nin ilk 20 değeri için $\epsilon^3 U_n^{r_2}$, $\epsilon^3 I_n^{r_2}$ 'nin aldığı değerler ve aralarındaki fark aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo III.9 ($\epsilon = 10^{-3}$) $\epsilon^3 U_n^{r_2}$ ve $\epsilon^3 I_n^{r_2}$ değerleri ve aralarındaki fark

n	$\epsilon^3 U_n^{r_2}$	$\epsilon^3 I_n^{r_2}$	$ \epsilon^3 U_n^{r_2} - \epsilon^3 I_n^{r_2} $
1	$2.33218E - 15$	$3.21948E - 12$	$3.21714E - 12$
2	$2.16816E - 15$	$1.49649E - 12$	$1.49432E - 12$
3	$2.0238E - 15$	$8.89802E - 13$	$8.87778E - 13$
4	$1.8958E - 15$	$5.97493E - 13$	$5.95597E - 13$
5	$1.78157E - 15$	$4.31718E - 13$	$4.29937E - 13$
6	$1.67902E - 15$	$3.2769E - 13$	$3.2601E - 13$
7	$1.58649E - 15$	$2.5772E - 13$	$2.56134E - 13$
8	$1.50259E - 15$	$2.08214E - 13$	$2.06711E - 13$
9	$1.42618E - 15$	$1.71804E - 13$	$1.70378E - 13$
10	$1.35634E - 15$	$1.44196E - 13$	$1.4284E - 13$
11	$1.29226E - 15$	$1.22736E - 13$	$1.21444E - 13$
12	$1.23327E - 15$	$1.05711E - 13$	$1.04477E - 13$
13	$1.12838E - 15$	$9.19682E - 14$	$9.07894E - 14$
14	$1.12838E - 15$	$8.07116E - 14$	$7.95832E - 14$
15	$1.08157E - 15$	$7.13736E - 14$	$7.02921E - 14$
16	$1.03801E - 15$	$6.35416E - 14$	$6.25036E - 14$
17	$9.97375E - 16$	$5.69089E - 14$	$5.59116E - 14$
18	$9.59396E - 16$	$5.12443E - 14$	$5.02849E - 14$
19	$9.23827E - 16$	$4.63702E - 14$	$4.54464E - 14$
20	$8.90453E - 16$	$4.21492E - 14$	$4.12587E - 14$

Bu veriler üzerine (III.63) gözönüne alınırsa Tablo III.8 ve TabloIII.9'dan pertürbe edilen Sturm Liouville probleminin asimptotik özdeğerleri $-50 \leq n_1 \leq 50$ için (III.62) formülüyle bulunur. Bu asimptotik özdeğerlerin doğruluğunu irdelemek için, pertürbe edilmediğinde operatörün $\lambda_n(0) = (n\pi)^2$ özdeğerleriyle, (III.62) yaklaşık asimptotik özdeğerler arasında karşılaştırma yaparak asimptotik özdeğerlerin doğruluğu saptanmıştır. Bu sebepten aşağıdaki birkaç örnek bize bu konu hakkında açıklık getirecektir.

Örnek III.3

$$-y'' + \epsilon Q_\nu(x)y = \lambda y \quad (\text{III.64})$$

$$y(0) = y(1) = 0 \quad (\text{III.65})$$

pertürbe edilen sınır değer probleminde

$$Q_\nu(x) = \epsilon \sum_{k=0}^{\nu} \frac{1}{\sqrt{|x - \frac{k}{\nu}|}} \quad (\text{III.66})$$

pertürbe edilen ve ν nün değişimine göre (III.66) potansiyeli gözönüne alınarak,

$\epsilon = 10^{-3}$ pertürbe parametresi için asimptotik metotla elde edilen özdeğerlerle, pertürbe edilmeyen sınır değer probleminin $\lambda_n(0) = (n\pi)^2$ özdeğerleri arasındaki farklar aşağıdaki tablolarda verilmiştir.

Tablo III.10 Asimptotik metotla bulunan $L(\epsilon Q_2)$ operatörünün özdeğerleri ve $L(0)$ operatörünün özdeğerleri

n	$K_n^2(\epsilon)$	$\lambda_n(0)$	$ K_n^2(\epsilon) - \lambda_n(0) $
1	9, 8696	9, 8696	0
2	39, 4777	39, 4784	0, 0007
3	88, 8264	88, 8264	0
4	157, 9122	157, 9137	0, 0015
5	246, 7401	246, 7401	0
6	355, 3054	355, 3058	0, 0004
7	483, 6106	483, 6106	0
8	631, 6536	631, 6547	0, 0011
9	799, 4379	799, 4379	0
10	986, 9601	986, 9604	0, 0003
11	1194, 2221	1194, 2221	0
12	1421, 2222	1421, 2231	0, 0009
13	1667, 9631	1667, 9631	0
14	1934, 4422	1934, 4425	0, 0003
15	2220, 6609	2220, 6609	0
16	2526, 6179	2526, 6187	0, 0008
17	2852, 3157	2852, 3157	0
18	3197, 7516	3197, 7518	0, 0002
19	3562, 9272	3562, 9272	0
20	3947, 8411	3947, 8418	0, 0007

Tablo III.10'da 10^{-4} duyarlılıkla (III.64), (III.65) üç tekil noktalı sınır değer probleminde tek indisli asimptotik özdeğerlerle, pertürbe edilmeyen sınır değer probleminin tek indisli özdeğerleri aynıdır. Çift indisli özdeğerlerin farkıysa,

$2.10^{-4} \leq |K_{2n}^2(\epsilon) - \lambda_{2n}(0)| < 2.10^{-3}$ aralığında değişmektedir.

Tablo III.11 Asimptotik metotla bulunan $L(\epsilon Q_3)$ operatörünün özdeğerleri ve $L(0)$ operatörünün özdeğerleri

n	$K_n^3(\epsilon)$	$\lambda_n(0)$	$ K_n^3(\epsilon) - \lambda_n(0) $
1	9, 8696	9, 8696	0
2	39, 4777	39, 4784	0, 0007
3	88, 8264	88, 8264	0
4	157, 9132	157, 9137	0, 0005
5	246, 7401	246, 7401	0
6	355, 3041	355, 3058	0, 0017
7	483, 6106	483, 6106	0
8	631, 6543	631, 6547	0, 0004
9	799, 4379	799, 4379	0
10	986, 9601	986, 9604	0, 0003
11	1194, 2221	1194, 2221	0
12	1421, 2219	1421, 2231	0, 0012
13	1667, 9631	1667, 9631	0
14	1934, 4422	1934, 4425	0, 0003
15	2220, 6609	2220, 6609	0
16	2526, 6185	2526, 6187	0, 0002
17	2852, 3157	2852, 3157	0
18	3197, 7509	3197, 7518	0, 0009
19	3562, 9272	3562, 9272	0
20	3947, 8415	3947, 8418	0, 0003

Tablo III.11’de 10^{-4} duyarlılıkla, (III.64), (III.65) dört tekil noktalı sınır değer probleminde tek indisli asimptotik özdeğerlerle, pertürbe edilmeyen sınır değer probleminin tek

indisli özdeğerleri Tablo III.10'da olduğu gibi aynıdır. Çift indisli özdeğerlerin farkıysa, $2.10^{-4} \leq |K_{2n}^2(\epsilon) - \lambda_{2n}(0)| < 2.10^{-3}$ aralığında değişmektedir.

Tablo III.12 Asimptotik metotla bulunan $L(\epsilon Q_4)$ operatörünün özdeğerleri ve $L(0)$ operatörünün özdeğerleri

n	$K_n^4(\epsilon)$	$\lambda_n(0)$	$ K_n^4(\epsilon) - \lambda_n(0) $
1	9,8696	9,8696	0
2	39,4777	39,4784	0,0007
3	88,8264	88,8264	0
4	157,9132	157,9137	0,0005
5	246,7401	246,7401	0
6	355,3054	355,3058	0,0004
7	483,6106	483,6106	0
8	631,6529	631,6547	0,0018
9	799,4379	799,4379	0
10	986,9601	986,9604	0,0003
11	1194,2221	1194,2221	0
12	1421,2227	1421,2231	0,0004
13	1667,9631	1667,9631	0
14	1934,4422	1934,4425	0,0003
15	2220,6609	2220,6609	0
16	2526,6175	2526,6187	0,0012
17	2852,3157	2852,3157	0
18	3197,7516	3197,7518	0,0002
19	3562,9272	3562,9272	0
20	3947,8415	3947,8418	0,0003

yöntemi uygulanırsa $\epsilon = 10^{-3}$ pertürbe parametresi için $S_n^\nu(\epsilon)$ sembolüyle nümerik özdeğerler, pertürbe edilmeyen sınırdeğer probleminin $\lambda_n(0) = (n\pi)^2$ özdeğerleriyle aralarındaki farklar 10^{-4} duyarlılıkla aşağıdaki örnekte verilmiştir.

Örnek III.4 $\nu = 2$ ve potansiyel fonksiyon

$$Q_2(x) = \epsilon \sum_{k=0}^2 \frac{1}{\sqrt{|x - \frac{k}{2}|}}$$

olmak üzere

$$-y'' + \epsilon Q_2(x)y = \lambda y$$

$$y(0) = y(1) = 0$$

pertürbe edilen sınır değer probleminin özdeğerleriyle, pertürbe edilmeyen

$$-y'' = \lambda y$$

$$y(0) = y(1) = 0$$

sınır değer probleminin özdeğerleri aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Tablo III.13 Nümerik metotla bulunan $L(\epsilon Q_2)$ operatörünün özdeğerleri ve $L(0)$ operatörünün özdeğerleri

n	$\lambda_n(0)$	$S_n^2(\epsilon)$	$ \lambda_n(0) - S_n^2(\epsilon) $
1	9,8696	9,8765	0,0069
2	39,4784	39,4839	0,0055
3	88,8264	88,8332	0,0068
4	157,9137	157,9195	0,0058
5	246,7401	246,7469	0,0068
6	355,3058	355,3116	0,0058
7	483,6106	483,6172	0,0066
8	631,6547	631,6604	0,0057
9	799,4379	799,4441	0,0062
10	986,9604	986,9657	0,0053
11	1194,2221	1194,2275	0,0054
12	1421,2231	1421,2273	0,0042
13	1667,9631	1667,9672	0,0041
14	1934,4425	1934,4450	0,0025
15	2220,6609	2220,6629	0,0020
16	2526,6187	2526,6177	0.0010
17	2852,3157	2852,3144	0,0013
18	3197,7518	3197,7480	0,0038
19	3562,9272	3562,9214	0,0058
20	3947,8418	3947,8326	0,0092

$$1.10^{-3} \leq |\lambda_n(0) - S_n^2(\epsilon)| \leq 9.10^{-3}$$

Bu tabloda pertürbe edilen sınır değer probleminin özdeğerleriyle, pertürbe edilmeyen sınır değer probleminin özdeğerleri karşılaştırılarak, bu özdeğerler arasında 10^{-3} mertebeden yaklaşım elde edilmiştir. Potansiyel fonksiyonun tekil nokta sayısı bir artırılırsa;

Dört tekil noktası olan potansiyel fonksiyon

$$Q_3(x) = \epsilon \sum_{k=0}^3 \frac{1}{\sqrt{|x - \frac{k}{3}|}}$$

olmak üzere

$$-y'' + \epsilon Q_3(x)y = \lambda y$$

$$y(0) = y(1) = 0$$

pertürbe edilen sınır değer probleminin özdeğerleri ve pertürbe edilmeyen

$$-y'' = \lambda y$$

$$y(0) = y(1) = 0$$

sınır değer probleminin özdeğerleri aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Tablo III.14 Nümerik metotla bulunan $L(\epsilon Q_3)$ operatörünün özdeğerleri ve $L(0)$ operatörünün özdeğerleri

n	$\lambda_n(0)$	$S_n^3(\epsilon)$	$ \lambda_n(0) - S_n^3(\epsilon) $
1	9,8696	9,8793	0,0097
2	39,4784	39,4880	0,0096
3	88,8264	88,8343	0,0079
4	157,9137	157,9232	0,0095
5	246,7401	246,7496	0,0095
6	355,3058	355,3140	0,0082
7	483,6106	483,6199	0,0093
8	631,6547	631,6638	0,0091
9	799,4379	799,4458	0,0079
10	986,9604	986,9690	0,0086
11	1194,2221	1194,2303	0,0082
12	1421,2231	1421,2297	0,0066
13	1667,9631	1667,9699	0,0068
14	1934,4425	1934,4483	0,0058
15	2220,6609	2220,6649	0,0040
16	2526,6187	2526,6219	0,0032
17	2852,3157	2852,3171	0,0014
18	3197,7518	3197,7505	0,0013
19	3562,9272	3562,9241	0,0031
20	3947,8418	3947,8358	0,0060

$$1 \cdot 10^{-3} \leq |\lambda_n(0) - \Lambda_n^3(\epsilon)| \leq 9 \cdot 10^{-3}$$

Tablo III.14'de 10^{-4} duyarlılıkla pertürbe edilen sınır değer probleminin n . özdeğeriyle, pertürbe edilmeyen sınır değer probleminin n . özdeğerleri birbiriyle karşılaştırılarak $1.10^{-3} \leq |\lambda_n(0) - \Lambda_n^3(\epsilon)| \leq 9.10^{-3}$ eşitsizliği elde edilmiştir. Potansiyel fonksiyonun tekil nokta sayısı bir arttırılırsa;

Beş tekil noktası olan potansiyel fonksiyon

$$Q_3(x) = \epsilon \sum_{k=0}^4 \frac{1}{\sqrt{|x - \frac{k}{3}|}}$$

olmak üzere

$$-y'' + \epsilon Q_4(x)y = \lambda y$$

$$y(0) = y(1) = 0$$

pertürbe edilen sınır değer probleminin özdeğerleri, pertürbe edilmeyen

$$-y'' = \lambda y$$

$$y(0) = y(1) = 0$$

sınır değer probleminin özdeğerleri aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Tablo III.15 Nümerik metotla bulunan $L(\epsilon Q_4)$ operatörünün özdeğerleri ve $L(0)$ operatörünün özdeğerleri

n	$\lambda_n(0)$	$S_n^4(\epsilon)$	$ \lambda_n(0) - S_n^4(\epsilon) $
1	9,8696	9,8821	0,0125
2	39,4784	39,4907	0,0123
3	88,8264	88,8387	0,0123
4	157,9137	157,9240	0,0103
5	246,7401	246,7523	0,0122
6	355,3058	355,3179	0,0121
7	483,6106	483,6226	0,0120
8	631,6547	631,6652	0,0105
9	799,4379	799,4496	0,0117
10	986,9604	986,9717	0,0113
11	1194,2221	1194,2330	0,0109
12	1421,2231	1421,2322	0,0091
13	1667,9631	1667,9726	0,0095
14	1934,4425	1934,4509	0,0084
15	2220,6609	2220,6683	0,0074
16	2526,6187	2526,6237	0,0050
17	2852,3157	2852,3198	0,0041
18	3197,7518	3197,7539	0,0021
19	3562,9272	3562,9268	0,0004
20	3947,8418	3947,8376	0,0042

$$4 \cdot 10^{-4} \leq |\lambda_n(0) - S_n^4(\epsilon)| \leq 1 \cdot 10^{-2}$$

Tablo III.15'de 10^{-4} duyarlılıkla pertürbe edilen sınır değer probleminin özdeğerleriyle, pertürbe edilmeyen sınır değer probleminin özdeğerleri bulunmuş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır.

$L(Q_\nu)$ operatörünün özdeğerlerini bulmak amaçlı uygulanan iki metot için asimptotik özdeğerlerin, nümerik özdeğerlere göre daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir.

Verilen son iki örneğe daha da açıklık getirmek için, asimptotik özdeğerler ile nümerik özdeğerler arasında karşılaştırma yapılarak, elde edilen sonuçlar aşağıdaki tablolarda verilmiştir.

Tablo III.16 Asimptotik ve nümerik metotla bulunan $L(\epsilon Q_2)$ operatörünün özdeğerlerinin karşılaştırılması $\epsilon = 10^{-3}$

n	$K_n^2(\epsilon)$	$S_n^2(\epsilon)$	$ K_n^2(\epsilon) - S_n^2(\epsilon) $
1	9,8696	9,8765	0,0069
2	39,4777	39,4839	0,0062
3	88,8264	88,8332	0,0068
4	157,9122	157,9195	0,0073
5	246,7401	246,7469	0,0068
6	355,3054	355,3116	0,0062
7	483,6106	483,6172	0,0066
8	631,6536	631,6604	0,0068
9	799,4379	799,4441	0,0062
10	986,9601	986,9657	0,0056

$$5.10^{-3} \leq |K_n^2(\epsilon) - S_n^2(\epsilon)| < 8.10^{-3}$$

Tablo III.16'da

$$Q_2(x) = \epsilon \sum_{k=0}^2 \frac{1}{\sqrt{|x - \frac{k}{2}|}}$$

üç tekil noktalı potansiyel fonksiyon olmak üzere

$$-y'' + \epsilon Q_2(x)y = \lambda y \quad (\text{III.68})$$

$$y(0) = y(1) = 0 \quad (\text{III.69})$$

sınır değer probleminin $K_n^2(\epsilon)$ sembolüyle gösterilen yaklaşık asimptotik özdeğerlerle, $S_n^2(\epsilon)$ sembolüyle gösterilen nümerik özdeğerler karşılaştırılarak $5.10^{-3} \leq |K_n^2(\epsilon) - S_n^2(\epsilon)| < 8.10^{-3}$ eşitsizliğinde değişen sonuçlar elde edilmiştir.

(III.68)-(III.69) sınır değer probleminde potansiyel fonksiyonun tekil nokta sayısı bir arttırılırsa, dört tekil noktası olan potansiyel fonksiyon

$$Q_3(x) = \epsilon \sum_{k=0}^3 \frac{1}{\sqrt{|x - \frac{k}{3}|}}$$

olmak üzere

$$-y'' + \epsilon Q_3(x)y = \lambda y$$

$$y(0) = y(1) = 0$$

sınır değer probleminin $K_n^3(\epsilon)$ sembolüyle gösterilen yaklaşık asimptotik özdeğerlerle, $S_n^3(\epsilon)$ sembolüyle gösterilen nümerik özdeğerler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo III.17 Asimptotik ve nümerik metotla bulunan $L(\epsilon Q_3)$ operatörünün özdeğerlerinin karşılaştırılması $\epsilon = 10^{-3}$

n	$K_n^3(\epsilon)$	$S_n^3(\epsilon)$	$ K_n^3(\epsilon) - S_n^3(\epsilon) $
1	9, 8696	9, 8793	0, 0097
2	39, 4777	39, 4880	0, 0103
3	88, 8264	88, 8343	0, 0079
4	157, 9132	157, 9232	0, 0100
5	246, 7401	246, 7496	0, 0095
6	355, 3041	355, 3140	0, 0099
7	483, 6106	483, 6199	0, 0093
8	631, 6543	631, 6638	0, 0095
9	799, 4379	799, 4458	0, 0079
10	986, 9601	986, 9690	0, 0089

$$7.10^{-3} \leq |K_n^3(\epsilon) - S_n^3(\epsilon)| \leq 1.10^{-2}$$

Bu tabloda asimptotik özdeğerlerle, nümerik özdeğerler karşılaştırılmış ve $7.10^{-3} < |K_n^3(\epsilon) - S_n^3(\epsilon)| \leq 1.10^{-2}$ eşitsizliğinde değişen sonuçlar elde edilmiştir.

Tablo III.18 Asimptotik ve nümerik metotla bulunan $L(\epsilon Q_4)$ operatörünün özdeğerlerinin karşılaştırılması $\epsilon = 10^{-3}$

n	$K_n^4(\epsilon)$	$S_n^4(\epsilon)$	$ K_n^4(\epsilon) - S_n^4(\epsilon) $
1	9, 8696	9, 8821	0, 0125
2	39, 4777	39, 4907	0, 0130
3	88, 8264	88, 8387	0, 0123
4	157, 9132	157, 9240	0, 0108
5	246, 7401	246, 7523	0, 0122
6	355, 3054	355, 3179	0, 0125
7	483, 6106	483, 6226	0, 0120
8	631, 6529	631, 6652	0, 0123
9	799, 4379	799, 4496	0, 0117
10	986, 9601	986, 9717	0, 0116

$$|K_n^4(\epsilon) - S_n^4(\epsilon)| \approx 1.10^{-2}$$

Tablo III.18'de beş tekil noktası olan potansiyel fonksiyon

$$Q_4(x) = \epsilon \sum_{k=0}^4 \frac{1}{\sqrt{|x - \frac{k}{4}|}}$$

olmak üzere

$$-y'' + \epsilon Q_4(x)y = \lambda y$$

$$y(0) = y(1) = 0$$

sınır değer probleminin $K_n^4(\epsilon)$ yaklaşık asimptotik özdeğerleriyle, $S_n^4(\epsilon)$ nümerik özdeğerleri karşılaştırılarak yaklaşık 10^{-2} mertebeden sonuçlar elde edilmiştir.

Son üç tabloda, sınır değer problemlerinde potansiyel fonksiyonun tekil nokta sayısı arttıkça hata değerinde arttığı görülmektedir.

IV SONUÇLAR ve TARTIŞMA

Asimptotik ve nümerik metotlar, analitik çözümün mümkün olmadığı durumlarda kullanılan yöntemlerdir. Literatürde bu yöntemlerin, diferansiyel operatörlerin özdeğerleri ve özfonksiyonlarının bulunmasında başarıyla uygulandığı görülmektedir. Bu tez çalışmasında, sonlu sayıda tekil noktası olan potansiyel fonksiyonlu Sturm Liouville sınır değer probleminin özdeğerlerinin bulunmasında bu iki metot kullanılmıştır.

Çalışmada, Sturm Liouville diferansiyel operatörün büyük özdeğerleri için incelenen asimptotik metot geliştirilerek yeni formüller elde edilmiştir. Bu operatörün küçük özdeğerleri, sonlu farklar metodunun uygulanmasıyla, Mathematica programlama dilinde yazılan program aracılığı ile elde edilmiştir. Bu operatörün özdeğerlerinde tekil noktaların etkisini belirleyen sonuçlar elde edilerek, bu etki özvektörde de gösterilmiştir. Ayrıca, bağlantılı farklı operatörlerin özdeğerleri arasında bir bağıntı bulunmuştur. Sınır şartları tekil noktalara bağlı Sturm Liouville sınır değer problemlerin özdeğerleri arasında bağıntı elde edilmiştir.

Çalışmanın son bölümünde pertürbasyon tekniği kullanılarak asimptotik ve nümerik metotla elde edilen özdeğerler karşılaştırılmıştır. Asimptotik metotla elde edilen özdeğerlerin, nümerik yöntemle bulunan özdeğerlere göre daha iyi sonuçlar verdiği görülmüştür.

V SON DEĞERLENDİRMELER ve ÖNERİLER

Bu tezde kuantum fizikte ve mühendislikte sıkça karşılaşılan $L_2[0, 1]$ uzayında Dirichlet sınır şartlı, Lebesgue integrallenebilir tekil potansiyel fonksiyonlu Sturm Liouville sınır değer problemi incelenmiştir. İfade edilen bu problemin kesin çözümlerini bulmak olanaksızdır. Bu sebepten tezde, sonlu sayıda tekil noktası olan potansiyel fonksiyonlu Sturm Liouville sınır değer probleminin asimptotik ve nümerik özdeğerlerini elde ettik. Bu özdeğerler için küçük pertürbasyon parametresi kullanımıyla bulunan özdeğerler karşılaştırılarak, öngörülen sonuçlar elde edilmiştir.

Konuyla ilgili yapılan çalışmalarda, sadece uç noktalarda tekilliği olan Sturm Liouville sınır değer probleminin nümerik özdeğerleri bulunmuştur. Bu tezde $L_2[0, 1]$ uzayında sonlu sayıda tekilliği olan Sturm Liouville sınır değer problemi incelenmiştir. Bu çalışmanın üzerine farklı sınır şartlarında yeni operatörler tanımlanabilir ve bu operatörlerin özdeğerleri, özfonksiyonları incelenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Naimark, M. A.: "Linear Differential Operators", 4th Edition, George G. Harrap and Company, (1967).
- [2] Birkhoff, G.D.: "Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations", Trans. Amer. Math. Soc., (1908), **9**, 373-395.
- [3] Tamarkin, J. D.: "Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions", Math. Zeit., (1927), **27**, 1-54.
- [4] Marchenko, V. A.: "Sturm-Liouville Operators and Applications", Basel, Birkhauser Verlag, (1986).
- [5] Dunford, N.; Schwartz, J. T.: "Linear Operators", Part 3, Spectral Operators, Wiley-Interscience, MR 90g:47001c, New York, (1988).
- [6] Fix, G.: "Asymptotic Eigenvalues of Sturm-Liouville Systems", Journal of Mathematical Analysis and Applications, (1967), **19**, 519-525.
- [7] Hobson, E. W.: "On a General Convergence Theorem and the Theory of the Representation of Function by Series of Normal Functions", Proceedings London Mathematical Society, (1908), **6**, 349-395.
- [8] Fulton, C. T.; Pruess, S. A.: "Eigenvalue and Eigenfunction Asymptotics for Regular Sturm Liouville Problems", Journal of Mathematical Analysis and Applications, (1994), **188**, 297-340.
- [9] Harris, B.J.: "Asymptotics of eigenvalues for regular Sturm Liouville Problems", Journal of Mathematical Analysis and Applications, (1994), **183**, 25-36.

- [10] Mcnabb, A.; Anderson, R. S.; Lapwood, E. R.: "Asymptotic Behaviour of the Eigenvalues of a Sturm Liouville Systems with Discontinuous Coefficients", Journal of Mathematical Analysis and Applications, **(1976) 54**, 741-751
- [11] Veliev, O. A.; Toppamuk Duman, M.: "The Spectral Expansion for a Nonselfadjoint Hill Operator with a Locally Integrable Potential", Journal of Math. Analysis and Appl., **(2002), 265**, 76-90.
- [12] Yilmaz, B.; Veliev, O. A.: "Asymptotic Formulas For Dirichlet Boundary Value Problems", Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, **(2005), 42**, 153-171.
- [13] Veliev, O. A.: "Spectral Expansion for a Nonselfadjoint Periodic Differential Operator", Russian Journal of Mathematical Physics, **(2006), 13**, 101-110.
- [14] Pryce, J.D.: "Numerical Solution of Sturm-Liouville Problems", Clarendon, Oxford, **(1993)**.
- [15] Paine, J. W.; Hoog, F. R.; Anderssen R.S.: "On the Correction of Finite Difference Eigenvalue Approximations for Sturm-Liouville Problems", Computing, **(1981), 26**, 123-139.
- [16] Andrew, A.; Paine J.: "Correction of Finite Element Estimates for Sturm-Liouville Eigenvalues", Numer. Math., **(1986), 50**, 205-215.
- [17] Chen, C. K.; Ho, S. H.: "Application of Differential Transformation to Eigenvalue Problems", Appl. Math. Comput., **(1996), 79**, 173-188.
- [18] Attili, B.S.: "The Adomian decomposition method for computing eigenlements of Sturm-Liouville two point boundary value problems", Appl. Math. Comput., **(2005), 168**, 1306-1316.

- [19] Baily, P.B.: "Modified Prufer transformation", *J. Comput. Phys.*, **(1978)**, **29**, 306-310.
- [20] Baily, P.B.; Everitt, W.N.; Zettl, A.: "Computing eigenvalue of singular Sturm-Liouville problems", *Results Math*, **(1991)**, **20**, 391-423.
- [21] Baily, P.B.; Everitt, W.N.; Weidmann, J.; Zettl, A.: "Regular approximations of singular Sturm Liouville problems" *Results in Mathematics*, **(1993)**, **22**, 3-22.
- [22] Ghelardoni, P.; Gheri, G.: "Improved shooting technique for numerical computations of eigenvalues in Sturm-Liouville problems", *Nonlinear Analysis*, **(2001)**, **47**, 885-896.
- [23] Ledoux, V.; Van Daele, M.G.; Berghe, V.: "Efficient computation of high index Sturm-Liouville eigenvalues for problems in physics", *Computer Physics Communications*, **(2009)**, **180**, 241-250.
- [24] Kumar, M.: "A new finite difference method for a class of singular two-point boundary value problems", *Applied Mathematics and Computation*, **(2003)**, **143**, 551-557.
- [25] Kumar, M.; Aziz, T.: "A uniform mesh finite difference method for a class of singular two-point boundary value problems", *Applied Mathematics and Computation*, **(2006)**, **180**, 173-177.
- [26] Kumar, M.; Singh, N.: "A collection of computational techniques for solving singular boundary value problems", *Advances in Engineering Software*, **(2008)**, **40**, 288- 297.
- [27] Kreyszig, E.: "Introductory Functional Analysis With Applications", *Wiley Classics Library Edition Published*, **(1989)**.

- [28] Levitan, B. M.; Sargsjan I. S.: "Introduction to Spectral Theory: Selfadjoint Ordinary Differential Operators", American Mathematical Society, (1970), 39
- [29] Mathews, J.H.: "Numerical Methods For Mathematics, Science and Engineering", Prentice Hall International Editions, (1992)
- [30] Jorgens, K.: "Spektral Theory of Second-Order Ordinary Differential Operators", Aarhus, Denmark, (1964).
- [31] Titchmarsh, E.C.: "Eigenfunction expansions", Oxford University Press, Vol I., (1962).
- [32] Everitt, W.N.; Gunson, J.: "Some comments on Sturm-Liouville eigenvalue problems with interior singularities", Journal of Applied Mathematics and Physics., (1987), 38, 813-838.
- [33] Parlett, B. N.: "The Symmetric Eigenvalue Problem", Englewood Cliffs, Prentice-Hall, N. J., (1980).
- [34] Boyce, E. B.; Diprima, R. C.: "Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems", John Wiley & Sons, Inc. (1997).
- [35] Burden, R. L.: "Numerical Analysis", 7th Edition, Pacific Grove, CA : Brooks/Cole, (2001).
- [36] Keller, H. B.: "Numerical Methods For Two-Point Boundary-Value Problems", Blaisdell Publishing Company (1968).
- [37] Aygün, E.; Zengin, D. M.: "Atom ve Molekül Fiziği", Bilim Yayınları, (2009)
- [38] Akulenko, L. D.; Nesterov S.V.: "High Precision Methods in Eigenvalue Problems and Their Applications", Chapman and Hall/CRC, (2004).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler: Güldem Yıldız

Doğum Tarihi: 22.07.1975

Adres: Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı
Göztepe Kadıköy/İstanbul

E-mail: guldem.yildiz@marmara.edu.tr.

Eğitim:

Lisans 1992-1996
Anadolu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Yüksek Lisans 1998-2000
Niğde Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı

İş Deneyimi:

Öğretmen 1996-1998
Malatya Balaban İlköğretim Okulu

Arş. Gör. 1998-2003
Niğde Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Görevlendirilme 2003
Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı