

T.C.
MUĞLA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

LİNEER FONKSİYONEL DENKLEMLERİN
BERNSTEIN POLİNOMLARI VE RASYONEL
FONKSİYONLARA DAYALI SIRALAMA
YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

DOKTORA TEZİ

OSMAN RAŞİT IŞIK

NİSAN 2012

MUĞLA

MUGLA ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

TEZ ONAYI

OSMAN RAŞİT IŞIK tarafından hazırlanan **LİNEER FONKSİYONEL DENK-
LEMLERİN BERNSTEIN POLİNOMLARI VE RASYONEL FONKSİYON-
LARA DAYALI SIRALAMA YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE** başlıklı
tezinin, 24/04/2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda
doktora derecesi için gerekli şartları sağladığı oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

TEZ SINAV JURİSİ

Prof. Dr. Mehmet SEZER (**Jüri Başkanı**)

Matematik Anabilim Dalı, Muğla Üniversitesi, Muğla

Prof. Dr. Zekeriya GÜNEY (**Danışman**)

OFMA Matematik Öğretmenliği, Muğla Üniversitesi, Muğla

Doç. Dr. Mustafa GÜLSU (**Üye**)

Matematik Anabilim Dalı, Muğla Üniversitesi, Muğla

Doç. Dr. Salih YALÇINBAŞ (**Üye**)

Matematik Bölümü, Celal Bayar Üniversitesi, Manisa

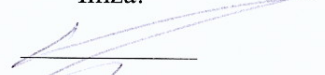
Yrd. Doç. Dr. Niyazi ŞAHİN (**Üye**)

Matematik Anabilim Dalı, Muğla Üniversitesi, Muğla

İmza:



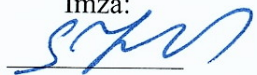
İmza:



İmza:



İmza:



İmza:



ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI ONAYI

Prof. Dr. Mehmet SEZER

Matematik Bölüm Başkanı, Muğla Üniversitesi, Muğla

Prof. Dr. Zekeriya GÜNEY

Danışman, OFMA Matematik Eğitimi, Muğla Üniversitesi, Muğla

İmza:



İmza:



Savunma Tarihi: 24/04/2012

Tez çalışmalarım sırasında elde ettiğim ve sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgelerin tarafımdan bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde edildiğini; akademik ve bilimsel etik kurallarına uygun olduğunu beyan ederim. Ayrıca, akademik ve bilimsel etik kuralları gereği bu tez çalışması sırasında elde edilmemiş başkalarına ait tüm orijinal bilgi ve sonuçlara atıf yapıldığını da beyan ederim.

Osman Raşit Işık

24/04/2012

ÖZET
LİNEER FONKSİYONEL DENKLEMLERİN BERNSTEİN POLİNOMLARI
VE RASYONEL FONKSİYONLARA DAYALI SIRALAMA YÖNTEMİ İLE
ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

Osman Raşit IŞIK

Doktora Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Zekeriya GÜNEY

Nisan 2012, 107 sayfa

Bu çalışmada, lineer fonksiyonel denklemler sınıfından adi diferansiyel denklemler, gecikmeli diferansiyel denklemler, integro-diferansiyel denklemler ve kısmi türevli diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri için sıralama yöntemi ve Bernstein polinomlarına dayalı yeni bir matris yöntemi verilmiştir. Oluşturulan sıralama yönteminin, diğer polinomlara dayalı matris yöntemlerine de uygulanabilirliği olan hata analizi ve yapılan hatanın tahmini yapılmıştır. Bununla beraber, özel bir rasyonel fonksiyonlar ailesi ve matris yöntemi kullanılarak adi diferansiyel denklemler için rasyonel fonksiyon çözümü elde edilmiştir. Son olarak, m –boyutta rasyonel interpolasyon probleminin bir çözümü olarak bir rasyonel fonksiyon ailesi elde edilmiş ve kısmi türevli diferansiyel denklemlerin sayısal çözümü için bu rasyonel fonksiyon ailesi kullanılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Rasyonel İnterpolasyon, Bernstein Polinomları, Sıralama Yöntemi, Adi Diferansiyel Denklemler, Kısmi Diferansiyel Denklemler.

ABSTRACT
ON THE SOLUTIONS OF THE LINEAR FUNCTIONAL EQUATIONS
WITH THE COLLOCATION METHOD DEPENDS ON BERNSTEIN
POLYNOMIALS AND RATIONAL FUNCTIONS

Osman Raşit IŞIK

Doctor of Philosophy (Ph.D.)

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Zekeriya GÜNEY

April 2012, 107 pages

In this study, a new matrix method based on collocation method and Bernstein polynomials was given for the numerical solutions of differential equations, delay differential equations, integro-differential equations and partial differential equations which are linear functional equations. Error analysis of the method and estimation of the absolute error that can be applied other matrix method based on polynomials were given. A new numerical solution based on the matrix method and a family of special rational functions was obtained for differential equations. Finally, as a solution of the interpolation problem in m —dimensions, a family of rational functions was obtained, and they were used to obtain a numerical solution for partial differential equations.

Keywords: Rational Interpolation, Bernstein Polynomials, Collocation Method, Differential Equations, Partial Differential Equations.

Sevgili Eşim ve Çocuklarıma

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın ortaya çıkmasında, gerek ders aşamasında, gerekse tez aşamasında bilgisini, desteğini, ilgisini hiç esirgemeyen, anlayışı ve çalışma azmiyle hepimize örnek olan Prof. Dr. Zekeriya GÜNEY'e, yardımlarından dolayı Prof. Dr. Mehmet SEZER ve Yrd. Doç. Dr. Niyazi ŞAHİN'e, Tarkan ÖNER ve M. Burç KANDEMİR'e, Matematik bölümünün tüm değerli hocalarına ve araştırma görevlisi arkadaşlarıma, hayatımın her döneminde benden desteklerini, sevgilerini ve ilgilerini hiç esirgemeyen aileme, eşime ve oğlum Enes'e teşekkür ederim. TÜBİTAK BİDEB'e, yurt içi doktora burs programı desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	vii
İÇİNDEKİLER	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ	x
ŞEKİLLER DİZİNİ	xii
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xiii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	5
2.1. Fourier Serisi	10
2.2. Yaklaşım Teorisi	12
2.2.1. Metrik uzaylarda yaklaşım	13
2.2.2. Normlu Lineer Uzaylarda Yaklaşım	13
2.2.3. En İyi Yaklaşımın Tekliği	14
2.3. Polinom İnterpolasyonu	15
2.4. Ortogonal Polinomlar	21
2.5. Rasyonel Yaklaşım	23
2.5.1. Rasyonel ve Barycentric Rasyonel İnterpolasyon	25
2.6. Matris Normları ve Lineer Denklem Sistemlerinin Hassaslığı	29
2.7. Bernstein Polinomları	30
3. MATERYAL VE YÖNTEM	31
3.1. Adi Diferansiyel Denklemler İçin Bernstein Seri Çözümü	32
3.1.1. Temel Bağıntılar:	32
3.2. Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerin Bernstein Seri Çözümü	35
3.2.1. Temel Bağıntılar:	36
3.3. Zayıf Tekil Çekirdekli İntegro-diferansiyel Denklemlerin Bernstein Seri Çözümleri	38
3.4. Yüksek Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemlerin Rasyonel Fonksiyon Çözümü	40
3.5. Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Bernstein Seri Çözümü	41

3.6. m –Boyutta Rasyonel İnterpolasyon Fonksiyonu	44
3.7. Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Rasyonel Fonksiyon Çözümü	50
3.8. Bernstein Seri Çözümlerinin Hata Analizi	50
3.8.1. Adi Diferansiyel Denklemler İçin Bernstein Seri Çözümünün Hata Analizi	51
3.8.2. Gecikmeli Diferansiyel Denklemler İçin Bernstein Seri Çözümünün Hata Analizi	53
3.8.3. Zayıf Tekil Çekirdekli İntegro-diferansiyel Denklemler İçin Bernstein Seri Çözümünün Hata Analizi	54
3.8.4. Yüksek Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler İçin Rasyonel Fonksiyon Çözümünün Hata Analizi	55
3.8.5. Kısmi Diferansiyel Denklemler İçin Bernstein Seri Çözümünün Hata Analizi	56
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	59
4.1. Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerin Bernstein Seri Çözümleri İle İlgili Örnekler	59
4.2. Zayıf Tekil Çekirdekli İntegro-diferansiyel Denklemlerin Bernstein Seri Çözümleri İle İlgili Örnekler	67
4.3. Yüksek Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemlerin Rasyonel Fonksiyon Çözümü İle İlgili Örnekler	73
4.4. Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Bernstein Seri Çözümleri İle İlgili Örnekler	79
4.5. İki Değişkenli Fonksiyonların Rasyonel İnterpolasyon Fonksiyonu İçin Örnekler	87
4.6. Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Rasyonel İnterpolasyon Fonksiyonu İle Çözümleri	93
5. TARTIŞMA VE SONUÇLAR	95
KAYNAKLAR	98
ÖZGEÇMİŞ	106

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1. Örnek 4.1.1’de farklı n ve $H.D.$ değerleri için mutlak hatalar . .	62
Çizelge 4.2. Örnek 4.1.1 için mutlak hatalar, hata tahminleri ve hata yaklaşım fonksiyonunun mutlak hataları	64
Çizelge 4.3. Örnek 4.1.2 için mutlak hatalar, hata tahminleri ve hata yaklaşım fonksiyonunun mutlak hataları($20 H.D.$)	65
Çizelge 4.4. Örnek 4.1.2 için mutlak hatalar, hata tahminleri ve hata yaklaşım fonksiyonunun mutlak hataları($40 H.D.$)	66
Çizelge 4.5. Örnek 4.1.3 için farklı n değerlerinde mutlak hatalar ($20 H.D.$)	67
Çizelge 4.6. Örnek 4.1.3 için mutlak hatalar, hata tahminleri ve hata yaklaşım fonksiyonunun mutlak hataları	67
Çizelge 4.7. Örnek 4.2.1’de farklı n ve $20 H.D.$ için mutlak hatalar	68
Çizelge 4.8. Örnek 4.2.1 için mutlak hatalar, hata tahminleri ve hata yaklaşım fonksiyonunun mutlak hataları	69
Çizelge 4.9. Örnek 4.2.2’de farklı n ve $H.D.$ değerleri için mutlak hatalar . .	70
Çizelge 4.10. Örnek 4.2.2 için mutlak hatalar, hata tahminleri ve hata yaklaşım fonksiyonunun mutlak hataları	70
Çizelge 4.11. Örnek 4.2.3 için farklı n ve r değerlerinde mutlak hatalar ($30 H.D.$)	71
Çizelge 4.12. Örnek 4.2.4’de farklı n ve $H.D.$ değerleri için mutlak hatalar . .	72
Çizelge 4.13. Örnek 4.2.4 için mutlak hatalar, hata tahminleri ve hata yaklaşım fonksiyonunun mutlak hataları	72
Çizelge 4.14. Örnek 4.2.5 için farklı n değerlerinde Bernstein seri çözümünün Taylor açılım yöntemi ile kıyaslanması	74
Çizelge 4.15. Örnek 4.3.3’te Bernstein seri çözümünün diğer bazı yöntemlerle kıyaslanması	80
Çizelge 4.16. Örnek 4.4.1’de eşit aralıklı sıralama noktaları için mutlak hatalar, hata tahminleri ve hata yaklaşım fonksiyonunun mutlak hataları ($20 H.D.$)	84
Çizelge 4.17. Örnek 4.4.1’de eşit aralıklı sıralama noktaları için mutlak hatalar, hata tahminleri ve hata yaklaşım fonksiyonunun mutlak hataları ($40 H.D.$)	84

Çizelge 4.18. Örnek 4.4.1’de Chebyshev sıralama noktaları için mutlak hatalar, hata tahminleri ve hata yaklaşım fonksiyonunun mutlak hataları (20 <i>H.D.</i>)	85
Çizelge 4.19. Örnek 4.4.1’de Chebyshev sıralama noktaları için mutlak hatalar, hata tahminleri ve hata yaklaşım fonksiyonunun mutlak hataları (40 <i>H.D.</i>)	85
Çizelge 4.20. Örnek 4.4.2 için mutlak hatalar, hata tahminleri ve hata yaklaşım fonksiyonunun mutlak hataları	86
Çizelge 4.21. Örnek 4.4.3 için mutlak hatalar, hata tahminleri ve hata yaklaşım fonksiyonunun mutlak hataları	89
Çizelge 4.22. Örnek 4.4.3’te mutlak hatalar, hata tahminleri ve hata yaklaşım fonksiyonunun mutlak hataları	89
Çizelge 4.23. Örnek 4.5.1’de $f(x,y) = 32(x+y)^{11/2}$ fonksiyonuna yapılan rasyonel yaklaşımların mutlak hataları	90

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1. Örnek 4.1.1 ve $n = 7$ için mutlak hata fonksiyonu	62
Şekil 4.2. Örnek 4.1.1 için $ e_{12}^* $ fonksiyonu	63
Şekil 4.3. Örnek 4.1.2 ve $n = 15$ için mutlak hata ve $ e_{15}^* $ fonksiyonları . . .	66
Şekil 4.4. Örnek 4.2.4 ve $n = 13$ için mutlak hata ve $ e_{15}^* $ fonksiyonları . . .	73
Şekil 4.5. Örnek 4.3.1'de farklı değerleri için yaklaşık çözümler	77
Şekil 4.6. Örnek 4.3.1'de farklı n, d değerleri için yaklaşık çözümler ve tam çözüm	78
Şekil 4.7. Örnek 4.3.2'de farklı n değerleri için yaklaşık çözümler ve tam çözüm	79
Şekil 4.8. Örnek 4.4.1 ve $n = 8$ için mutlak hata fonksiyonu	82
Şekil 4.9. Örnek 4.4.1 ve $n = 8$ için $ e_{10,10}^* $ fonksiyonu	83
Şekil 4.10. Örnek 4.4.3 ve $n = 12$ için mutlak hata fonksiyonu	87
Şekil 4.11. Örnek 4.4.3 ve $n = 12$ için $ e_{10,10}^* $ fonksiyonu	88
Şekil 4.12. $f(x, y) = 32(x + y)^{11/2}$ fonksiyonuna $n = 6$ ve $d_1 = d_2 = 4$ için yapılan rasyonel yaklaşımın mutlak hata fonksiyonu	90
Şekil 4.13. $f(x, y) = 32(x + y)^{11/2}$ fonksiyonuna $n = 10$ ve $d_1 = d_2 = 7$ için yapılan rasyonel yaklaşımın mutlak hata fonksiyonu	91
Şekil 4.14. $f(x, y) = x^2 y^2 \left(1 - e^{-(x^2 + y^2)}\right)$ fonksiyonuna $n = 8$ ve $d_1 = d_2 = 5$ için yapılan rasyonel yaklaşımın mutlak hata fonksiyonu	92
Şekil 4.15. $f(x, y) = \frac{3}{4}e^{-\frac{(9x-2)^2}{4} - \frac{(9y-2)^2}{4}} + \frac{3}{4}e^{-\frac{(9x-2)^2}{49} - \frac{(9y-2)^2}{10}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{(9x-7)^2}{4} - \frac{(9y-3)^2}{4}} - \frac{1}{5}e^{-(9x-4)^2 - (9y-7)^2}$ fonksiyonuna $n = 10$ ve $d_1 = d_2 = 6$ için yapılan rasyonel yaklaşımın mutlak hata fonksiyonu	93

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$C[a, b]$	$[a, b]$ 'den $\mathbb{R}$ 'ye giden sürekli fonksiyonlar uzayı
P_n	Derecesi en çok n olan polinomlar uzayı
d	Metrik fonksiyon
(X, d)	Metrik fonksiyonu d olan X metrik uzayı
$B(a, \varepsilon)$	a noktasının ε yarıçaplı komşuluğu
$\ v\ $	v vektörünün normu
$\ A\ $	A matrisinin normu
e	Hata fonksiyonu
e_n	$f - p_n$ hata fonksiyonu
l_i	i . Lagrange polinomu
w_i	Nodal polinom
$D^\alpha f$	$\frac{\partial^{ \alpha } f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$
$\text{supp} f$	f fonksiyonunu sıfırdan farklı kılan noktalar kümesinin kapanışı
$D(\Omega)$	$\{f \in C^\infty(\Omega) \mid \exists K \subset \Omega \text{ kompakt, } \text{Supp} f \subset K\}$
$D^\alpha T$	T 'nin zayıf türevi
$W^{k,p}$	Sobolev uzayı
$p_n f$	f 'nin interpolasyon polinomu
T_n	n -dereceli Chebyshev Polinomu
$w(\delta)$	f 'nin sürekliliğinin modülü
$E_n(f; [a, b])$	P_n 'de $[a, b]$ 'den f 'ye en iyi yaklaşımın hatası
$G_n(f; [a, b])$	f 'ye yapılan interpolasyon polinomunun hatası
$P_n^{(\alpha, \beta)}$	Jacobi polinomları
$R(m, n)$	$\left\{ r = \frac{p}{q} \mid p \in P_m, q \in P_n, r \text{ indirgenemez} \right\}$
$B_{k,n}$	n . derece Bernstein polinomları
p_n	1-boyutta Bernstein seri çözümü

$p_{n,n}$	2–boyutta Bernstein seri çözümü
K_n	$f - p_n f$ interpolasyon hata fonksiyonu
ΔG	K_n ile elde edilen G matrisindeki öteleme
e_m^*	e_n hata fonksiyonuna yaklaşım fonksiyonu
$e_{n,n}$	Hata fonksiyonu
$e_{m,m}^*$	$e_{n,n}$ hata fonksiyonuna yaklaşım fonksiyonu Hilbert uzayı
H	Hilbert uzayı
$H.D.$	Hanede duyarlılık

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisi, bir fonksiyona ona göre daha basit olan diğer fonksiyonlarla yaklaşımla ilgilenir. Bir yaklaşımda, yaklaşım fonksiyonunun yapısı ve kolay uygulanabilirliği önemlidir. En genel olarak bir yaklaşım probleminde,

1. Yaklaşım yapılacak olan $f \in X$ fonksiyonu,
2. Yaklaşım fonksiyonlarının kümesi A ,
3. Yapılan yaklaşımın f 'ye ne kadar yaklaştığının belirlenmesi

olmak üzere 3 temel unsur vardır. Herhangi bir $f \in X$ fonksiyonu ve A verildiği zaman, istenilen tutarlılıkta bir yaklaşım bazen tek, bazen birden fazla olabilir. A kümesinin normlu bir uzay olması durumunda yapılan işlemler ve en iyi yaklaşımın tayini daha kolay olmaktadır. Eğer A bir lineer uzay ise, iyi bir yaklaşım elde etmek için A 'nın boyutu artırılabilir. Yaklaşım fonksiyonlarının bulunması için sayısal metotlar gereklidir. Yaklaşım teorisinde polinom yaklaşımları sıklıkla kullanılmaktadır. Örnek olarak, Taylor polinom yaklaşımı verilebilir. Eğer bir f fonksiyonuna yüksek tutarlı bir yaklaşım yapılmak istenirse, f 'nin yüksek mertebeden türevleri mevcut olmadıkça yaklaşım fonksiyonunun tek bir polinom olması uygun değildir. Hatta sonsuz mertebeden diferansiyellenebilir olsa bile polinom yaklaşımları yine de uygun olmayabilir. Bunun bir sebebi, $x \rightarrow \infty$ iken tek sınırlı polinomun sabit polinom olmasıdır. Bu yüzden bilgisayar programlarında rasyonel yaklaşımlar, sinüs, üstel ve arctanjant gibi standart matematik fonksiyonların hesaplanmasında polinomlara tercih edilmektedir. Rasyonel yaklaşımda A kümesi, $p \in P_m$ ve $q \in P_n$ olmak üzere $\frac{p}{q}$ fonksiyonlarından oluşur.

Yaklaşım fonksiyonları, verilen bir fonksiyonel denklemin çözümüne yaklaşım için sıklıkla kullanılmaktadır. Fonksiyonel denklemler, matematiğin birçok alanında ve matematiğin dışında karar verme ve enformasyon, fizik, mühendislik ve ekonomi gibi diğer bir çok alanda karşımıza çıktıkları için çözümün var olduğunu söylemek, analitik olarak çözmek veya çözümüne istenen bir tutarlılıkla yaklaşmak

önem taşımaktadır. Örnek olarak Cauchy denklemi, integral denklemler, diferansiyel denklemler ve kısmi diferansiyel denklemler verilebilir.

Fonksiyonel denklemlerin çözümüne sayısal yaklaşım için bilinen en kolay yöntem sıralama yöntemidir. Bu yöntem,

$$y(x) = y_0(x) + \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i(x) \quad (1.1)$$

açılımında α_i katsayılarının sıralama noktaları kullanarak belirlenmesidir. Sıralama yönteminde y_i fonksiyonları olarak ortogonal polinomlar, parçalı polinomlar gibi çeşitli özel fonksiyon aileleri kullanılır.

Sıralama yöntemi sıralama noktalarının sayısına bağlı olduğu için, uygun bir çözüm bulmak için uygun sayıda sıralama noktası seçilmesi gerekmektedir. Çözüm fonksiyonunun yapısına ve yaklaşım aralığına bağlı olarak nokta sayısının artması yöntemin yakınsaklığını genelde garanti etmemektedir. Bundan dolayı, sıralama yöntemi kullanılarak bulunan bir fonksiyonel denklemin yaklaşık çözümünün gerçek çözüme ne kadar yaklaştığının, diğer bir ifadeyle mutlak hata için bir üst sınırın bulunması, yaklaşımın anlamlılığını artıracaktır.

Fonksiyonel denklemin tam çözümüne yaklaşım için polinomlar uzayını da içine alan, $p \in P_m$ ve $q \in P_n$ olmak üzere

$$r = \frac{p}{q} \quad (1.2)$$

tipindeki rasyonel fonksiyonlar da kullanılabilir. Rasyonel fonksiyonlar için bulunan en iyi yaklaşım, polinomlar için bulunan en iyi yaklaşımdan daha iyi olduğundan; rasyonel fonksiyonlar kullanılarak bulunan bir yaklaşımın da daha iyi olması beklenebilir. Fakat, rasyonel fonksiyonları fonksiyonel denklemlerin çözümlerinde kullanabilmek için en genel olarak fonksiyonel denklemin tam çözümünün süreklilik, türevlenebilirlik gibi temel özelliklerine rasyonel fonksiyon r 'nin de sahip olması gerekmektedir. Ayrıca, yaklaşımda kullanılacak rasyonel fonksiyonun sıralama noktalarında tanımlı olması gerekmektedir. Bunun için, rasyonel fonksiyonun paydasının pozitif veya negatif değerli bir polinom olduğunu garanti etmek yeterlidir. Floater ve Hormann (2006), verilen bir fonksiyona $0 \leq d \leq n$ tamsayı, p_i polinomu $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+d}$ noktalarındaki interpolasyon polinomu ve

$$\lambda_i(x) = \frac{(-1)^i}{(x - x_i) \dots (x - x_{i+d})} \quad (1.3)$$

olmak üzere

$$r(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n-d} \lambda_i(x) p_i(x)}{\sum_{i=0}^{n-d} \lambda_i(x)} \quad (1.4)$$

rasyonel fonksiyonu ile yaklaşmıştır. (1.4) yaklaşımının hatası, aralığın uzunluğu ve fonksiyonun düzgünlüğü ile orantılıdır.

Bu tezin amacı, lineer fonksiyonel denklemlerden adi diferansiyel denklemler, pantograf denklemleri, integral denklemler ve kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri için sıralama yöntemi ve Bernstein polinomlarına dayalı bir matris yöntemi oluşturmaktır. Ayrıca, en genel olarak sıralama yönteminin hata analizi ve yapılan hatanın tahminini yapmaktır. Bununla beraber (1.4)'te verilen rasyonel fonksiyonları sıralama yönteminde kullanmak, m -boyutta rasyonel interpolasyon probleminin bir çözümünü elde etmek ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için bu fonksiyon ailesini kullanmaktır. Verilecek yöntemler, diğer lineer fonksiyonel denklemlere de uygulanabilir.

Tezin ikinci bölümünde, yaklaşım teorisinde temel kavramlar ve teoremler verilip polinom interpolasyonu, rasyonel yaklaşım, Bernstein polinomları ve matris normları ele alınmıştır. Ayrıca bu bölümde, Floater ve Hormann (2006) tarafından verilen rasyonel interpolasyon fonksiyonu da verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Sezer (1994), Akyüz ve Sezer (1999), Akyüz ve Sezer (2003), Akyüz- Daşcıoğlu ve Sezer (2005), Sezer ve Akyüz-Daşcıoğlu (2006), Yalçınbaş ve Sezer (2006), Yalçınbaş vd. (2009) tarafından verilen sıralama yöntemine dayalı Chebyshev matris, Legendre matris ve Taylor matris yöntemlerinde baz fonksiyonları olarak Bernstein polinomları seçilerek Bernstein seri çözümü gecikmeli diferansiyel denklemler ve Abel tipi integro-diferansiyel denklemler için elde edilmiştir. Daha sonra kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için Yüksel (2011) ve Bülbül (2011) tarafından verilen sırasıyla Chebyshev matris yöntemi ve Taylor matris yöntemi, Bernstein polinomları kullanılarak verilmiştir. (1.4) denkleminde p_i polinomları yerine $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+d}$ noktalarındaki Bernstein seri çözümü alınarak bir rasyonel fonksiyon çözümü elde edilmiştir. (1.4) denklemi m -boyut için genellenmiş olup kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri için sayısal bir yöntem bulunmuştur. Verilen tüm yöntemler, hata analizleri, hata tahminleri ve hata tahminlerine dayanan yeni bir yaklaşım formülü ile birlikte verilmiştir.

Dördüncü bölümde, üçüncü bölümde verilen yöntemler Pantograf denklemleri, Abel tipi integro-diferansiyel denklemler için uygulanmış ve yüksek mertebeden adi diferansiyel denklemlerin rasyonel fonksiyon çözümleri elde edilmiştir. $m = 2$ alınarak iki değişkenli verilen fonksiyonların rasyonel fonksiyon yaklaşımları elde edilmiştir. Bunun bir uygulaması olarak, kısmi diferansiyel denklemlerin rasyonel fonksiyon çözümleri elde edilmiştir. Elde edilen yaklaşımların hata değerleri, üçüncü bölümde verilen teorik hata üst sınırı ile karşılaştırılmıştır. Yaklaşımların hata fonksiyonlarının sonsuz normundaki değerleri tablo ile verilmiş ve bazı hata fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. Yaklaşımların hata tahminleri de yapılarak sıralama noktaları eşit aralıklı olarak elde edilen yaklaşımlarda hata tahmininin düzgün fonksiyonlar ve düşük n 'ler için tutarlı sonuçlar verdiği gözlenmiştir.

Son bölümde, üçüncü bölümde verilen yöntemlerin zayıf ve güçlü yönleri maddeler halinde verilmiştir. Bulunan sonuçlar özetlenmiştir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Verilen bir fonksiyonel denklem için fonksiyonel denklemin yapısına göre sayısal çözüm metotları geliştirilmiştir. Adi diferansiyel denklemler için Euler metodu, Runge Kutta metodu gibi zaman adımli metotlarla birlikte sonlu farklar metodu, tau metodu, sıralama yöntemleri örnek olarak verilebilir (Quarteroni vd., 2007; Mason ve Handscomb, 2003). Taylor açılım ve Chebyshev açılım yöntemleri de integral ve diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri için sıklıkla kullanılmışlardır (Mihaila ve Mihaila, 2002; Palusinski ve Szidarovszky, 1994; Kanwal ve Liu, 1989; Khalifa vd., 2003). Sıralama yöntemleri olarak literatürde en çok spline sıralama yöntemleri (Abd El-Salam ve Zaki, 2010; Akram ve Siddiqi, 2006; Al-Said ve Noor, 2002; Al-Said ve Noor, 2004; Al-Said vd., 2006; Usmani, 1992; Usmani ve Warsi, 1980), Taylor polinomuna dayalı sıralama yöntemleri (Gülsu ve Sezer, 2005; Sezer ve Akyüz, 2006; Sezer ve Akyüz-Daşcıoğlu, 2007; Sezer vd., 2008; Yalçınbaş ve Sezer, 2000), Chebyshev polinomlarına dayalı sıralama yöntemleri (Sezer ve Doğan, 1996; Sezer ve Kaynak, 1996) ve Bessel polinomlarına dayalı sıralama yöntemleri (Şahin vd., 2011; Yüzbaşı, 2011; Yüzbaşı vd., 2011a; Yüzbaşı vd., 2011b; Yüzbaşı vd., 2011c;) sıklıkla kullanılmıştır. Kısmi diferansiyel denklemler için sonlu farklar yaklaşımı, spektral sıralama yöntemi, Galerkin ve sonlu farklar metodu başlıca kullanılan yöntemlerdir (Quarteroni vd., 2007). Bu yöntemlerin bir kısmı diğer fonksiyonel denklemler için de geliştirilmiştir. Örneğin, spline sıralama metodu, Volterra integral denkleminin sayısal çözümü için de literatürde kullanılmaktadır (Brunner, 1986). Kısmi diferansiyel denklemler için sıralama metoduna bağlı matris yöntemleri de geliştirilmiş ve tutarlı sonuçlar elde edilmiştir (Bülbül, 2011; Yüksel, 2011).

Kullanılan bir sayısal yöntemin o yönteme özgü avantaj ve dezavantajları bulunmaktadır. Kullanılan bir metodun hata analizinin bilinmesi, kolay uygulanabilirliği, bilgisayar programları ile uyumluluk, yöntemin zaman açısından maliyeti ve en önemlisi metodun yakınsaklığı çok büyük önem kazanmaktadır. Örneğin, tau metot (Mason ve Handscomb, 2003; Doha ve Abd-Elhameed, 2005; Kong ve Wu, 2009), normda yakınsaklığı gösterilmiş bir metottur. Fakat hesaplama

işlemleri tau metot için zordur. Benzer şekilde, spline sıralama yöntemleri için özel sıralama noktaları seçilerek tam çözümün çok az mertebeden de olsa düzgün olması durumunda bazı diğer özel seçimler yapılarak hata analizi verilmiştir (De Boor ve Swartz, 1973). Sıralama metodu verilen fonksiyonel denklemin yapısından bağımsız olduğu ve kolay uygulandığı için çok sık kullanılan yöntemlerden biri olmuş ve bazı fonksiyonları olarak Taylor, Chebyshev, Legendre polinomları alınarak matris formunda sıklıkla kullanılmıştır. Spline sıralama yöntemlerinden daha kolay olarak uygulanabilen bu yöntemlerde, spline yönteminin aksine yakınsama garanti edilememiştir. Bu çalışmalarda sadece tutarlılık ölçülmüş ve mutlak hatalar tayin edilmiştir. Baz polinomları olarak rasyonel fonksiyonlar polinomlara göre uygulama zorluğundan dolayı sıralama yönteminde daha az kullanılmıştır.

Yaklaşım teorisinde, çalışılan uzayların normlu lineer uzay olarak seçilmeleri, yaklaşımın varlığı, tekliği ve yapılan yaklaşımın anlamlılığı gibi soruların cevabı için istenen bir durumdur. Bu yüzden, metrik uzay, normlu lineer uzay, Banach uzayı ve iç çarpım uzayı kavramları verilecektir. Bu kavramlar, herhangi bir fonksiyonel analiz veya metrik uzay kitaplarında bulunabilir (örneğin Güney, 2003; Kreyszig, 1989).

$X \neq \emptyset$, $d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere, eğer $\forall x, y, z \in X$ için

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

şartları sağlanırsa d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik fonksiyon veya kısaca bir metrik denir. X kümesi üzerinde bir metrik tanımlanmasıyla oluşan ve (X, d) şeklinde gösterilen matematiksel yapıya metrik uzay denir. (X, d) metrik uzayında, a noktasına uzaklığı ε 'dan küçük olan noktaların kümesine, a noktasının ε yarıçaplı komşuluğu (veya kısaca komşuluğu) denir ve $B(a, \varepsilon)$ ile gösterilir. (X, d) metrik uzay, $\langle a_n \rangle$ bu uzayda bir dizi olmak üzere, eğer $\forall \varepsilon > 0$ için dizinin n_0 'dan büyük terimleri arasındaki uzaklıklar ε 'dan küçük kalacak şekilde bir n_0 doğal sayısı varsa, $\langle a_n \rangle$ dizisine X uzayında bir Cauchy dizisi denir. Bir (X, d) metrik uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise X uzayına tam uzay denir.

V bir vektör uzayı olsun. V üzerinde bir norm, $\forall v \in V$ 'deki değeri $\|v\|$ ile gösterilen reel değerli bir fonksiyon olup $\forall u, v \in V$ ve $\forall \alpha \in K$ için aşağıdaki şartları sağlar:

1. $\|v\| \geq 0$
2. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
3. $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$
4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

V vektör uzayı üzerinde tanımlanan norm ile birlikte V 'ye normlu lineer uzay yada kısaca normlu uzay denir. V üzerinde tanımlanan bir norm $d(x,y) = \|x - y\|$ ile V üzerinde bir metrik tanımlar. Eğer V normlu uzayı, norm tarafından üretilen metriğe göre tam ise bu normlu uzaya Banach uzayı denir. V vektör uzayı üzerinde bir iç çarpım $V \times V \rightarrow K$ bir dönüşüm olup x ve y vektörlerinin görüntüsü $\langle x, y \rangle$ ile gösterilir ve $\forall u, v, w \in V$ ve $\forall \alpha \in K$ için aşağıdaki şartları sağlar:

1. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
2. $\langle \alpha u, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle$
3. $\langle u, w \rangle = \overline{\langle w, u \rangle}$
4. $\langle u, u \rangle \geq 0; \langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

V üzerinde verilen bir iç çarpım, V üzerinde $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ ile bir norm ve $d(x,y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$ ile bir metrik tanımlar. Böylece her iç çarpım uzayı normlu uzaydır. Bir iç çarpım uzayı, iç çarpımdan üretilen metriğe göre tam ise, bu iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir.

Aşağıda uzaklık ve ortogonalite ile ilgili verilen teoremlerin ispatları Kreyszig (1989)'de bulunabilir.

Tanım 2.0.1. X bir metrik uzay, $x \in X$ ve $M \subset X$ olsun. x elemanının M kümesine uzaklığı

$$\delta = \inf_{y \in M} d(x, y) \tag{2.1}$$

ile tanımlanır. Eğer X normlu uzay ise bu tanım,

$$\delta = \inf_{y \in M} \|x - y\|$$

ile verilir.

(2.1)'de verilen δ uzaklığını gerçekleyen bir $y \in M$ 'nin varlığının ve tekliğinin bilinip bilinmediği, fonksiyonlarla yaklaşım için çok önemlidir.

Örnek 2.0.2. $\mathbb{R}^2$ 'de $B((0,0), 1)$ açık yuvarında $x = (2,0)$ noktasına uzaklığı en küçük olan bir $y \in B((0,0), 1)$ yoktur. Diğer yandan, $(1,0)$ noktasına $A = \{(x,y) | (x-1)^2 + y^2 = 1\}$ kümesinden uzaklığı en küçük olan birden çok $y \in A$ vardır.

Tanım 2.0.3. X bir vektör uzayı olmak üzere $x, y \in X$ için x ile y 'yi birleştiren doğru parçası

$$\{z | z = (1 - \alpha)x + \alpha y, \alpha \in [0, 1]\}$$

ile verilir.

Tanım 2.0.4. X bir vektör uzayı, $M \subset X$ olsun. Eğer $\forall x, y \in M$ için x ile y 'yi birleştiren doğru parçası M 'de kalıyorsa, M 'ye konveks küme denir.

Teorem 2.0.5. X bir iç çarpım uzayı ve $\emptyset \neq M \subset X$ konveks ve tam olsun. Bu durumda, $\forall x \in X$ için

$$\delta = \inf_{m \in M} \|x - m\| = \|x - y\|$$

olacak şekilde teklikle belli bir $y \in M$ vardır.

Tanım 2.0.6. X bir iç çarpım uzayı ve $M \subset X$ olsun. Eğer M 'nin her vektörü ikişer ikişer birbirine dik ise M 'ye ortogonal küme denir. Eğer M ortogonal ve her vektörünün normu 1 ise M 'ye ortonormal küme denir.

Bir ortogonal veya ortonormal küme eğer sayılabilirse, kümenin elemanları indislenerek bu küme $\langle x_n \rangle$ dizisi ile gösterilebilir ve bu kümeye ortogonal veya ortonormal dizi adı verilir. En genel olarak, bir indislenmiş küme $\forall \alpha, \beta \in I$ için $\langle x_\alpha, x_\beta \rangle = 0$ oluyorsa $\langle x_\alpha \rangle, \alpha \in I$, ortogonaldır. Eğer $\forall \alpha, \beta \in I$ için

$$\langle x_\alpha, x_\beta \rangle = \begin{cases} 0 & , \alpha \neq \beta \\ 1 & , \alpha = \beta \end{cases}$$

ise bu indislenmiş kümeye ortonormaldir denir.

Teorem 2.0.7. Bir ortonormal küme lineer bağımsızdır.

Örnek 2.0.8. $[0, 2\pi]$ 'de sürekli reel değerli fonksiyonlar kümesi $C[0, 2\pi]$ ve bu küme üzerinde tanımlı iç çarpım

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

olsun. $C[0, 2\pi]$ üzerinde $u_n(x) = \cos nx$ olmak üzere $\langle u_n \rangle$ bir ortogonal dizidir. Benzer şekilde, $v_n(x) = \sin nx$ için $\langle v_n \rangle$ bir ortogonal dizidir. Gerçekten,

$$\langle u_n, u_m \rangle = \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx dx = \begin{cases} 0 & , \quad m \neq n \\ \pi & , \quad m = n \in \mathbb{N} \\ 2\pi & , \quad m = n = 0 \end{cases}$$

bulunur. Benzer şekilde $\langle v_n \rangle$ için de yapılabilir. Buradan eğer

$$e_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow e_n(x) = \frac{u_n(x)}{\|u_n(x)\|} = \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}$$

ile tanımlanırsa elde edilen yeni dizi ortonormal bir dizi olur. Benzer şekilde,

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \tilde{e}_n(x) = \frac{v_n(x)}{\|v_n(x)\|} = \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$$

dizisi de ortonormal bir dizi olur. Aynı zamanda, $\forall m, n$ için $u_n \perp v_m$ 'dir ve bu diziler Fourier açılımında ortaya çıkar.

Ortonormal dizilerle çalışmanın en büyük avantajlarından birisi, eğer verilen bir x elemanın bir ortonormal dizinin bazı terimlerinin lineer kombinasyonu olarak yazılabildiğini biliyorsak, ortonormallik kullanılarak x 'in katsayıları kolayca belirlenebilir. Varsayalım ki, $\langle e_n \rangle$ ortonormal bir dizi ve $x \in \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ yani $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ olsun. Bu durumda α_i katsayıları

$$\langle x, e_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle e_i, e_j \rangle = \alpha_j$$

olarak bulunur ve

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$$

dir.

Teorem 2.0.9. X bir iç çarpım uzayı ve $\langle e_k \rangle$ ortonormal bir dizi olsun. Bu durumda, $\forall x \in X$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2. \quad (2.2)$$

(2.2) eşitsizliğine Bessel eşitsizliği, $\langle x, e_k \rangle$ katsayılarına da x 'in $\langle e_k \rangle$ ortonormal dizisine göre Fourier katsayıları denir.

2.1. Fourier Serisi

Bu kesimde Fourier serilerinden bahsedilecektir. Fourier serileri bir periyodik fonksiyonu basit dalgalı fonksiyonların (sinüs ve kosinüs) toplamına çevirir. Bu kesimde verilen teoremlerin ispatları Kreyszig (1989)'de bulunabilir.

Tanım 2.1.1. X bir normlu uzay, $\langle a_k \rangle$, X 'de bir dizi ve $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ de kısmi toplamlar dizisi olsun. Eğer $\langle s_n \rangle$ dizisi yakınsak ve limiti s ise, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi yakınsaktır ve toplamı s 'dir denir ve

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

yazılır.

Tanım 2.1.2. $\mathbb{R}$ üzerinde reel değerli bir f fonksiyonu eğer $\forall x \in \mathbb{R}$ ve $\exists p \in \mathbb{R}^+$ için $f(x+p) = f(x)$ şartını sağlıyor ise f 'ye periyodik fonksiyon ve periyodu p 'dir denir.

Tanım 2.1.3. $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ formundaki bir seriye trigonometrik seri denir.

Tanım 2.1.4. f 'nin Fourier serisi, a_k ve b_k katsayıları Euler formülleri

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \quad , \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx, \quad (2.3)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx \quad , \quad k \in \mathbb{N}$$

ile verilen bir trigonometrik seridir. a_k ve b_k katsayıları f 'nin Fourier katsayıları denir.

Eğer f 'nin Fourier serisi $\forall x$ için yakınsak ve toplamı $f(x)$ ise,

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (2.4)$$

yazılır. f fonksiyonu periyodu 2π olan periyodik bir fonksiyon olduğundan, (2.3) denklemindeki integrasyon aralığını $[-\pi, \pi]$ gibi uzunluğu 2π olan başka bir aralıkla değiştirebilir.

Fourier serilerinin genel halini bulmak için, (2.4) denkleminde sinüs ve cosinüs yerine $\langle u_k \rangle$ ve $\langle v_k \rangle$ ortogonal dizilerini alalım. Bu durumda (2.4) denklemi,

$$f(x) = a_0 u_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k u_k(x) + b_k v_k(x)] \quad (2.5)$$

olarak yazılabilir. (2.5) denklemini sabit bir u_j ile çarpıp 0'dan 2π 'ye integre edelim. Terim terime integre edilebilirliği varsayarak ve $\forall j, k$ için $u_j \perp v_k$ ile $\langle u_k \rangle$ ve $\langle v_k \rangle$ ortogonalliğini kullanarak

$$\begin{aligned} \langle f, u_j \rangle &= a_0 \langle u_0, u_j \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \langle u_k, u_j \rangle + b_k \langle v_k, u_j \rangle] \\ &= a_j \langle u_j, u_j \rangle = a_j \|u_j\|^2 \\ &= \begin{cases} 2\pi a_0 & , \quad j = 0 \\ \pi a_j & , \quad j = 1, 2, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\langle f, v_j \rangle = b_j \|v_j\|^2 = \pi b_j \quad , \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

elde edilir. Buradan $\langle u_k \rangle$ ve $\langle v_k \rangle$ dizileri ortonormalleştirilerek, yeni oluşan $\langle e_j \rangle$ ve $\langle g_j \rangle$ dizileri için (2.5)'teki Fourier açılımı

$$f = \langle f, e_0 \rangle e_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\langle f, e_k \rangle e_k + \langle f, g_k \rangle g_k]$$

olarak yazılabilir.

Teorem 2.1.5. H Hilbert uzayı ve $\langle e_k \rangle$ bu uzayda bir ortonormal dizi ve α_k 'lar skaler olsun. Bu durumda,

- $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ serisi yakınsaktır (normda) ancak ve ancak $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$ serisi yakınsaktır.
- $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ yakınsak ve toplamı x ise, α_k katsayıları Fourier katsayılarıdır ve böylece

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$$

yazılabilir.

- $\forall x \in H$ için, $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$ normda yakınsar.

2.2. Yaklaşım Teorisi

Yaklaşım teorisi, belirli bir tipteki fonksiyona ona göre daha basit olan diğer fonksiyonlarla yaklaşımla ilgilenir. Sürekli bir fonksiyona polinomlarla yaklaşım, buna bir örnek olarak verilebilir. Böyle bir durum, analizde şu şekilde yapılır: Eğer bir fonksiyonun Taylor açılımı var ise, bu serinin kısmi toplamaları yaklaşımlar olarak alınabilir. Bu yaklaşımların kalitesinin anlaşılması için, kalanlarının belirlenmesi gerekir. Bu kesimde, yaklaşım teorisinde kullanılan temel tanımlar, en iyi yaklaşımların varlık ve teklik problemleri, metrik uzay ve normlu lineer uzay için verilecektir. Bu kesimde verilenler Powell (1981) kitabından alınmıştır.

2.2.1. Metrik uzaylarda yaklaşım

Metrik uzaylar, metrik fonksiyonuna sahip olduklarından yapılan bir yaklaşımın ne kadar iyi olduğunu belirlememiz için genel bir yol sağlarlar. Birçok yaklaşım probleminde f' 'yi ve yaklaşımlar kümesi A' 'yı içeren uygun bir metrik uzay vardır.

Tanım 2.2.1. $\forall a_0, a_1 \in A$ için $d(a_0, f) < d(a_1, f)$ ise a_0 , a_1 'den daha iyi bir yaklaşımdır. $\forall a \in A$ için

$$d(a^*, f) \leq d(a, f)$$

olacak şekilde bir $a^* \in A$ varsa, a^* elemanına bir en iyi yaklaşım denir.

En iyi yaklaşımın var olup olmadığını bilmek önemlidir. Çünkü bir çok hesaplama metodu, bir en iyi yaklaşım ile elde edilen özelliklerden türetilir.

Teorem 2.2.2. (X, d) metrik uzay, $A \subset X$ kompakt ise, $\forall f \in X$ için

$$d(a^*, f) \leq d(a, f)$$

olacak şekilde bir $a^* \in A$ vardır.

A kompakt değil ise bir en iyi yaklaşım olmayabilir.

Örnek 2.2.3. $\mathbb{R}^2$ de $B(0, 1)$ açık yuvarını düşünelim. A 'dan $x = (2, 0)$ noktasına bir en iyi yaklaşım yoktur.

2.2.2. Normlu Lineer Uzaylarda Yaklaşım

Metrik uzayların özellikleri çalışmalarda her zaman yeterli değildir. Her normlu lineer uzay aynı zamanda metrik uzay olduğundan, normlu lineer uzaylarda bulunan sonuçlar metrik uzaylarda da geçerlidir.

Teorem 2.2.4. N normlu bir lineer uzay, $A \subset N$ sonlu boyutlu ise, $\forall f \in N$ için A' dan f' 'ye bir en iyi yaklaşım vardır.

Çalışılan çoğu yaklaşım probleminde f ve A , $F = \{f \mid f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ sürekli}\}$ kümesi ve bu küme üzerinde 3 farklı norm ile üretilen uzaylardan alınmaktadır. Bunlar

$p = 1, 2$ ve ∞ olmak üzere L_p normlarıdır. Bunların içerisinde en az kullanılanı 1–normdur. 2–norm veya w pozitif bir fonksiyon olmak üzere

$$\|f\|_2 = \left[\int_a^b w(x) |f(x)|^2 dx \right]^{1/2}$$

ile tanımlı bir w –ağırlıklı 2–norm, Hilbert uzaylarındaki teorik çalışmalarda karşımıza çıktığından ve en iyi yaklaşım hesaplamalarının 2–normda çözümü kolay olduğundan sıklıkla kullanılmaktadır. ∞ –normu ise yaklaşım teorisinin büyük bir kısmının temelini oluşturur. Eğer ∞ –normuna göre $d(f, a)$ küçükse, 1–norm ve 2–norma göre de $d(f, a)$ küçüktür. Verilen bir f fonksiyonuna p fonksiyonu ile yaklaşımın hatası, hata fonksiyonu

$$e := f - p$$

ile verilir.

Teorem 2.2.5. $\forall f \in C[a, b]$ için

$$\|f\|_1 \leq (b-a)^{\frac{1}{2}} \|f\|_2 \leq (b-a) \|f\|_\infty$$

dur.

2.2.3. En İyi Yaklaşımın Tekliği

Tanım 2.2.6. $\forall s_1, s_2 \in A$ için $\{\theta s_1 + (1-\theta)s_2 | \theta \in (0, 1)\}$ kümesi A kümesi tarafından kapsanıyorsa A 'ya konveks küme denir.

Tanım 2.2.7. $\forall s_1, s_2 \in A, s_1 \neq s_2$ için $\{\theta s_1 + (1-\theta)s_2 | \theta \in (0, 1)\}$ kümesi A kümesinin içi tarafından kapsanıyorsa A 'ya tam konveks küme denir.

Teorem 2.2.8. N normlu bir lineer uzay olsun. Bu durumda $\forall f \in N, \forall r > 0$ için $B(f, r) = \{x | \|x - f\| \leq r, x \in N\}$ yuvarı konvektir.

Tanım 2.2.9. N normlu lineer uzay olsun. $B(0, 1)$ birim yuvarı tam konveks ise N üzerindeki norma tam norm adı verilir.

Teorem 2.2.10. N normlu lineer uzay, $A \subset N$ kompakt ve tam konveks olsun. Bu durumda $\forall f \in N$ için A 'dan f 'ye sadece bir tane en iyi yaklaşım vardır.

Teorem 2.2.11. N normlu tam konveks bir uzay, $A \subset N$ konveks olsun. Bu durumda $\forall f \in N$ için A 'dan f 'ye en çok bir tane en iyi yaklaşım vardır.

2.3. Polinom İnterpolasyonu

$\forall f \in C[a, b]$ fonksiyonuna $p(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i$ polinomuyla yaklaşılmak istenirse,

$$\{c_i | i \in \{0, 1, \dots, n\}\}$$

katsayılarının belirlenmesi gerekir. Bunun için en genel metod f 'nin $(n+1)$ tane farklı $X = \{x_i | i \in \{0, 1, \dots, n\}\} \subset [a, b]$ noktalarında aldığı değeri bilmek ve

$$p(x_i) = f(x_i) \quad (2.6)$$

denklem sistemini çözmektir.

Teorem 2.3.1. $\{x_i | i \in \{0, 1, \dots, n\}\} \subset [a, b]$, $(n+1)$ tane farklı nokta ve $f \in C[a, b]$ olsun. Bu durumda (2.6) denklemini sağlayan tek bir $p \in P_n$ vardır (Quarteroni vd., 2007).

Tanım 2.3.2. X interpolasyon noktalarının kümesi ile ilişkili i . Lagrange polinomu

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}, \quad 0 \leq i \leq n$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.3.3. X interpolasyon noktalarının kümesi ile ilişkili nodal polinom, derecesi $n+1$, başkatsayısı 1 ve interpolasyon noktalarını kök kabul eden teklikle belli

$$w_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

polinomudur.

f 'nin interpolasyon polinomu Lagrange formunda

$$p(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x)$$

yazılabilir.

Teorem 2.3.4. $\{x_i | i \in \{0, 1, \dots, n\}\} \subset [a, b]$, $(n + 1)$ tane farklı interpolasyon noktaları, $f \in C^{(n+1)}[a, b]$ ve $p \in P_n$ (2.6)'deki interpolasyon şartlarını sağlayan polinom olsun. Bu durumda $\forall x \in [a, b]$ için hata, $\xi \in [a, b]$ noktası x 'e bağlı bir nokta olmak üzere

$$e(x) = \frac{1}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j) f^{(n+1)}(\xi)$$

değerini alır (Quarteroni vd., 2007).

f 'nin interpolasyon polinomu $p_n f$ ile gösterilecektir.

Runge'nin örneği olarak bilinen

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad -5 \leq x \leq 5$$

ile tanımlı f fonksiyonunun interpolasyon polinomu bulunmak istenirse, f 'deki değişimlerin çoğu aralığının ortasında olduğundan, f 'e tek bir polinom ile yaklaşmak uygun değildir. Yüksek tutarlılıkta bir yaklaşım için yüksek dereceli bir polinom seçilmesi gerekir. n büyük olduğu zaman interpolasyon noktalarının pozisyonları önemlidir. Eğer interpolasyon noktaları eşit aralıklı seçilmişse, n arttıkça yaklaşımın tutarlılığı bozulur (Powell, 1981).

m -boyutta interpolasyon problemi, 1-boyuttakine benzer şekilde verilir. $\mathbb{R}^m$ 'de $x_i = (x_i^1, \dots, x_i^m)$ n farklı nokta ve $\phi_1, \dots, \phi_m \in C(\mathbb{R}^m)$ lineer bağımsız fonksiyonlar olsun. m -boyutta interpolasyon problemi, $1 \leq i \leq n$ için

$$a_1 \phi_1(x_i) + a_2 \phi_2(x_i) + \dots + a_m \phi_m(x_i) = f(x_i)$$

denklemini sağlayan $a_1, a_2, \dots, a_m$ katsayılarının belirlenmesidir (Phillips, 2003).

Tanım 2.3.5. Negatif olmayan tamsayıların bir n -lisi $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ve $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Çoklu indeks gösterimi ile $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ olmak üzere

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

ile gösterelim.

Tanım 2.3.6. Bir f fonksiyonunu sıfırdan farklı kılan noktalar kümesinin kapanışı, f 'nin desteği olarak adlandırılır:

$$\text{Supp} f = \overline{\{x \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Tanım 2.3.7. $D(\Omega)$ kümesi, sonsuz mertebeden türevli ve Ω 'da sıfırdan farklı olduğu bölgenin kapanışı bir kompakt küme tarafından kapsanan fonksiyonlar kümesi olsun:

$$D(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) \mid \exists K \subset \Omega \text{ kompakt, } \text{Supp} f \subset K\}.$$

Tanım 2.3.8. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ve $T : D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. T 'nin zayıf türevi $\frac{\partial T}{\partial x_i}$,

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \phi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle, \forall \phi \in D(\Omega), i = 1, \dots, n$$

ile tanımlanır. Benzer şekilde, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ çoklu indeks gösterimi ile $D^\alpha T$

$$\langle D^\alpha T, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \phi \rangle, \forall \phi \in D(\Omega)$$

ile verilir.

Tanım 2.3.9. $k \in \mathbb{Z}^+$ ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. $W^{k,p}(\Omega)$ Sobolev uzayı, k 'dan küçük eşit tüm zayıf türevleri $L^p(\Omega)$ uzayında olan $v \in L^p(\Omega)$ fonksiyonlarından oluşur:

$$W^{k,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega) \mid \alpha \text{ çoklu indeks ve } |\alpha| \leq k \text{ için } D^\alpha v \in L^p(\Omega)\}.$$

$W_\infty^n(\Omega)$ uzayı, $\alpha \leq n$ için Ω 'da $D^\alpha f \in L^\infty(\Omega)$ olan tüm fonksiyonların oluşturduğu Sobolev uzayı olsun. $m > 1$ ve $K_j = \{x_j^i \mid a_j = x_j^1 < x_j^2 < \dots < x_j^{n_j} = b_j, i = 1, \dots, n_j\}$, $[a_j, b_j]$ aralığının bir parçalanışı olsun. $\prod_{j=1}^m [a_j, b_j]$ 'nin $K = \prod_{j=1}^m K_j$ tensör çarpım parçalanışı verilsin. I_j polinomu, j . koordinat için interpolasyon polinomu olmak üzere,

$$I := I_m \cdots I_1 : W_\infty^n(K) \rightarrow P_n$$

tensör çarpım interpolasyon polinomu f 'nin K 'da bir interpolasyon polinomudur ve

tektir. Hata fonksiyonu, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$ ve $\|\alpha\| = \max_i \alpha_i$ olmak üzere

$$E = - \sum_{\|\alpha\|=1} (-E_m)^{\alpha_m} \dots (-E_1)^{\alpha_1} \quad (2.7)$$

olarak verilebilir. Böylece, interpolasyon hatası için bir üst sınır

$$v_j = \frac{1}{n_j!} \max_{a_j \leq x \leq b_j} \left| (x - x_j^1)(x - x_j^2) \dots (x - x_j^{n_j}) \right|$$

olmak üzere

$$\|Ef\|_\infty \leq \sum_{\|\alpha\|=1} v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2} \dots v_m^{\alpha_m} \|\partial_1^{\alpha_1 n_1} \partial_2^{\alpha_2 n_2} \dots \partial_m^{\alpha_m n_m} f\|_\infty$$

ile verilebilir (Möbner ve Reif, 2009).

Teorem 2.3.10. $f \in W_\infty^n(K)$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ ve $\alpha n = (\alpha_1 n_1, \alpha_2 n_2, \dots, \alpha_m n_m)$ olmak üzere tensör çarpım interpolasyonu $\prod_{j=1}^m [a_j, b_j]$ üzerinde

$$\|f - If\|_\infty \leq \sum_{\|\alpha\|=1} v^\alpha \|\partial^{\alpha n} f\|_\infty$$

ile sınırlıdır (Möbner ve Reif, 2009).

Özel olarak 2-boyut için, aşağıdaki diğer bir hata formülü Lagrange polinom interpolasyonu için verilebilir:

$\Omega = [a, b] \times [c, d]$ ve $f \in C(\Omega)$ olsun. $[a, b]$ ve $[c, d]$ aralıklarının parçalanışları

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$$

$$c \leq y_0 < y_1 < \dots < y_m \leq d$$

olsun. $p_{n,m}f$ polinomunu

$$p_{n,m}f(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m f(x_i, y_j) l_i(x) l_j(y) \quad (2.8)$$

ile tanımlayalım. Bu durumda $p_{n,m}f$ polinomu f fonksiyonunun

$$\{(x_i, y_j) : 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}$$

noktalarında bir interpolasyon polinomudur (Atkinson, 1997).

Teorem 2.3.11. $\{(x_i, y_j) : 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\} \subset \Omega$ ve varsayalım ki $(x, y) \in \Omega$ için $\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}$ ve $\frac{\partial^{m+1} f}{\partial y^{m+1}}$ mevcut ve sürekli olsunlar. Bu durumda, $\forall (x, y) \in \Omega$ için $\Lambda_n(x) = \sum_{i=0}^n |l_{i,m}(x)|$ Lebesgue sabiti olmak üzere (2.8) interpolasyon polinomu için hata

$$|f(x, y) - p_{n,m}f(x, y)| \leq \frac{|w_n(x)|}{(n+1)!} \max_{\substack{a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d}} \left| \frac{\partial^{n+1} f(x, y)}{\partial x^{n+1}} \right| \\ + \Lambda_n(x) \frac{|w_m(y)|}{(m+1)!} \max_{\substack{a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d}} \left| \frac{\partial^{m+1} f(x, y)}{\partial y^{m+1}} \right|$$

ile sınırlıdır (Atkinson, 1997).

Genel olarak polinom interpolasyonu yakınsak sonuçlar vermez. Fakat, polinom interpolasyonun yakınsak sonuç vermediği durumlarda, aşağıda tanımı verilen Chebyshev polinomlarının kökleri

$$x_i = \cos \left\{ \frac{[2(n-i)+1]\pi}{2(n+1)} \right\}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

kullanılarak interpolasyon hatası Runge'nin örneğinde olduğu gibi düzeltilebilir.

Tanım 2.3.12. $-1 \leq x \leq 1$ aralığında $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$ ile tanımlı T_n fonksiyonuna n -dereceli Chebyshev polinomu denir. Baska bir ifadeyle n -dereceli Chebyshev polinomu

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x), \quad -1 \leq x \leq 1$$

ile verilir (Powell, 1981).

Cosinüs fonksiyonunun $\cos[(n+1)\theta] + \cos[(n-1)\theta] = 2\cos\theta\cos(n\theta)$ özelliğinden,

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad -1 \leq x \leq 1$$

rekürans bağıntısını elde ederiz. Chebyshev polinomları yaklaşım teorisinde birçok uygulamaya sahiptir ve maksimum yükseklikleri 1 olduğundan kullanışlıdır.

Weierstrass teoreminin ispatında kullanılan Bernstein operatörü, aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Tanım 2.3.13. B_n Bernstein operatörü, $n \in \mathbb{N}$ için $C[a, b]$ 'den P_n 'e giden bir operatördür ve $[a, b] = [0, 1]$ olması durumunda

$$(B_n f)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

denklemleri ile tanımlıdır (Powell, 1981).

Teorem 2.3.14. $\forall f \in C[0, 1]$ için B_n Bernstein operatörü olmak üzere $\{B_n f \mid n \in \mathbb{N}\}$ dizisi f 'ye düzgün yakınsar (Powell, 1981).

Teorem 2.3.15. $\forall f \in C[a, b]$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için $\|f - p\|_\infty \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir

$$p(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$$

cebirsal polinomu vardır (Powell, 1981).

Tanım 2.3.16. f fonksiyonu $[a, b]$ 'de tanımlı olsun. f 'nin sürekliliğinin modülü $\delta > 0$ için

$$w(\delta) = \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|$$

ile tanımlanır (Rivlin, 1969).

$[a, b]$ aralığında tanımlı bir f fonksiyonuna P_n polinom uzayından yapılan bir en iyi yaklaşımın hatasını

$$E_n(f; [a, b])$$

ile gösterelim. Bu durumda, en iyi yaklaşımın hatası Jackson's teoremi olarak bilinen aşağıdaki teoremle verilir (Rivlin, 1969).

Teorem 2.3.17. $f \in C[a, b]$ ise,

$$E_n(f; [a, b]) \leq 6w\left(\frac{b-a}{2n}\right).$$

Teorem 2.3.4'de verilen her mertebeden türevleri sürekli bir f fonksiyonu için interpolasyon hatası verilmişti. Eger f fonksiyonu sürekli fakat her mertebeden

türevleri sürekli bir fonksiyon değilse, en genel olarak aşağıdaki interpolasyon hata formülü verilebilir. Bunun için, $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ noktalarında f 'ye yapılan interpolasyon polinomunun hatasını $G_n(f; [a, b])$ ile gösterelim.

Teorem 2.3.18. $f \in C[a, b]$ ve $T, X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, interpolasyon noktalarında interpolasyon operatörü olmak üzere,

$$G_n(f; [a, b]) \leq (1 + \|T\|)E_n(f; [a, b])$$

dir (Rivlin, 1969).

Sonuç 2.3.19. $f \in C[a, b]$ ve $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ interpolasyon noktaları ise,

$$G_n(f; [a, b]) \leq 6(1 + \|T\|)w\left(\frac{b-a}{2n}\right)$$

dir (Rivlin, 1969).

2.4. Ortogonal Polinomlar

$\forall f, g \in C[a, b]$ için $w : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx \quad (2.9)$$

fonksiyonu $C[a, b]$ üzerinde bir iç çarpımdır.

Tanım 2.4.1. w pozitif ağırlık fonksiyonu olmak üzere, (2.9) iç çarpımı ile

$$S = \left\{ f \mid f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \int_a^b f^2(x)w(x)dx < \infty \right\}$$

kümesi bir Hilbert uzayı olup $L_w^2(a, b)$ ile gösterilir.

n tane lineer bağımsız polinom $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ verildiğinde, Gram-Schmidt ortogonalizasyon işlemi ile $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ortonormal kümesi elde edilir. Bunun için, aşağıdaki adımlar uygulanır.

1.adım: $\langle e_n \rangle$ ortonormal dizisinin birinci elemanı için $e_1 = \frac{1}{\|x_1\|}x_1$ alınır.

2.adım: $x_2 = \langle x_2, e_1 \rangle e_1 + v_2$ yazılır ve v_2 vektörü sıfır vektörü değildir. $e_2 = \frac{1}{\|v_2\|}v_2$ alınır ve $\langle v_2, e_1 \rangle = 0$ dır.

3.adım: $v_3 = x_3 - \langle x_3, e_1 \rangle e_1 - \langle x_3, e_2 \rangle e_2$ vektörü sıfır vektörü değildir. $e_3 = \frac{1}{\|v_3\|}v_3$ alınır ve $\langle v_3, e_1 \rangle = \langle v_3, e_2 \rangle = 0$ dır.

$\vdots$

n .adım: $v_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle x_n, e_k \rangle e_k$ vektörü sıfır vektörü değildir ve $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ vektörlerine diktir. Böylece $e_n = \frac{1}{\|v_n\|}v_n$ alınarak $\langle e_n \rangle$ ortonormal dizisi elde edilmiş olur.

Sonuçta derecesi n olan $\forall p \in P$ polinomu

$$p(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k e_k(x), \quad \alpha_k = \langle p, e_k \rangle, \quad 0 \leq k \leq n$$

olacak şekilde tek türlü yazılır ve $j < k$ için

$$\langle e_k, x_j \rangle = 0$$

dır (Kreyszig, 1989).

Ortogonal polinomlara ait bazı özellikler aşağıda verilmiştir ve herhangi bir yaklaşım teorisi veya özel fonksiyonlar kitabında bulunabilir (örneğin Andrews vd., 1999).

Teorem 2.4.2. k_n, p_n polinomunun başkatsayısı ve

$$a_n = \frac{k_{n+1}}{k_n}, \quad b_n = -a_n \langle xp_n, p_n \rangle, \quad c_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}, \quad c_0 = 0$$

olmak üzere $\langle p_k \rangle$ ortonormal dizisi

$$p_{n+1} - (a_n x + b_n)p_n + c_n p_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

rekürans bağıntısını sağlar.

Teorem 2.4.3. $K_n(x, y) = \sum_{k=0}^n p_k(x)p_k(y)$ olmak üzere p_k ortogonal polinoları, Christofel-Darboux formülünü

$$K_n(x, y) = \frac{k_n}{k_{n+1}} \frac{p_n(y)p_{n+1}(x) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{x - y}$$

sağlar.

Teorem 2.4.4. (a, b) aralığında p_n ve p_{n+1} polinomları ortak köke sahip değildir.

Örnek 2.4.5. $P_n^{(\alpha, \beta)}$ Jacobi polinomları, ağırlık fonksiyonu $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ olan ortogonal polinomlardır. Jacobi polinomları, Rodrigues formülü olarak bilinen

$$P_n^{(\alpha, \beta)} = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+j} (1+x)^{\beta+j}]$$

denklemini sağlarlar. Özel olarak, $\alpha = \beta = 0$ için Legendre polinomları, $\alpha = \beta = \frac{-1}{2}$ olması durumunda da Chebyshev polinomları elde edilir.

2.5. Rasyonel Yaklaşım

Bu kesimde rasyonel yaklaşım için temel teoremler ve rasyonel interpolasyon konusu verilecektir. Bu kesimde verilen tanım ve teoremler, Rivlin (1969)'nin kitabından alınmıştır.

$p \in P_m$, $q \in P_n$ olmak üzere $r = \frac{p}{q}$ formunda yazılabilen rasyonel fonksiyonların kümesini $R(m, n)$ ile gösterelim öyle ki p ile q 'nin hiç ortak sıfırı olmasın.

$$R(m, n) = \left\{ r = \frac{p}{q} \mid p \in P_m, q \in P_n, r \text{ indirgenemez} \right\}.$$

$p \in P_m$, $q \in P_n$ için her $\frac{p}{q}$ rasyonel fonksiyonu indirgenemez bir rasyonel fonksiyona, yani $R(m, n)$ 'nin bir elemanına denktir. Derecesi n olan

$$q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$$

polinomunun derecesini $\partial q = n$ ile gösterilir. Eğer $q \neq 0$ sabit ise, $\partial q = 0$ ve $q = 0$ ise, $\partial q = -\infty$ ile gösterilir. $q \neq 0$ olduğu varsayılacaktır.

Teorem 2.5.1. $f \in C[a, b]$ ise, $\forall r \in R(m, n)$ için

$$\|f - r^*\|_\infty \leq \|f - r\|_\infty$$

şartını sağlayan $\exists r^* \in R(m, n)$ vardır.

Tanım 2.5.2. $\{x_i \mid a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N \leq b\}$ kümesi

$$|f(x_j) - r(x_j)| = \|f - r\|_\infty, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

ve

$$f(x_j) - r(x_j) = -[f(x_{j+1}) - r(x_{j+1})], \quad j = 1, 2, \dots, N-1$$

şartlarını sağlarsa, $\{x_i \mid a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N \leq b\}$ kümesine $f - r$ için bir işaret değişim kümesidir denir.

Teorem 2.5.3. $f \in C[a, b]$ ise, $r = \frac{p}{q}$ fonksiyonu $R(m, n)$ 'den f 'ye bir en iyi yaklaşımdır ancak ve ancak

$$N = 2 + \max(n + \partial p, m + \partial q)$$

olmak üzere $f - r$ 'nin N noktalı bir işaret değişim kümesi vardır.

r^* , $R(m, n)$ 'den f 'ye bir en iyi yaklaşım olmak üzere,

$$E_{m,n} = E_{m,n}(f; [a, b]) = \|f - r^*\|_\infty$$

ile tanımlansın. Bu durumda, eğer $k, l \geq 0$ ise $E_{m+k, n+l} \leq E_{m,n}$ ve özel olarak $n \geq 0$ için $E_{m,n} \leq E_{m,0}$ dır. Böylece, eğer $f \in C[a, b]$ ise, Teorem 2.3.17'den

$$\|f - r^*\|_\infty \leq E_{m,0}(f; [a, b]) \leq 6w \left(\frac{b-a}{2m} \right)$$

elde edilir.

Rasyonel yaklaşımı sonlu nokta kümesi üzerinde yaparsak, bazı problemler ortaya çıkabilir. Bunlardan birincisi, hiç en iyi yaklaşım olmayabilir. Örneğin, $R(0, 1)$ 'den $f(0) = 1$ ve $f(1) = 0$ ile verilen değerlere yaklaşım yapmak istenilsin. Bu durumda,

$$r(x) = \frac{a}{bx+a}, \quad |a| + |b| > 0$$

fonksiyonu $R(0, 1)$ 'dedir. $r(0) = 1$ ve $r(1) = \frac{a}{b+a}$ ifadelerinden verilen bir $\varepsilon > 0$ için b 'yi yeteri kadar büyük seçilerek

$$\max\{|f(0) - r(0)|, |f(1) - r(1)|\} = |f(1) - r(1)| < \varepsilon$$

elde edilir. Bu da $R(0,1)$ 'den yapılan en iyi yaklaşımın sıfır hata üretmesi ile mümkündür, bu da ancak ve ancak $\frac{a}{bx+c}$ fonksiyonu $a = 0$ için $x = 1$ de 0 değerini alır. Bu sefer de fonksiyon $x = 0$ 'da 1 değerini almaz. Böylece $R(0,1)$ 'den f 'ye bir en iyi yaklaşım yoktur.

İkincisi, Teorem 2.5.3'ün ifadesi doğru olmayabilir. Örnek olarak, $f(-1) = -1$, $f(\frac{1}{2}) = 2$ ve $f(1) = 1$ değerleri alınsın.

$$r(x) = \frac{-9}{16x-20} \in R(0,1)$$

fonksiyonu için

$$-[f(-1) - r(-1)] = f(\frac{1}{2}) - r(\frac{1}{2}) = -[f(1) - r(1)] = \frac{5}{4}$$

olduğundan $\{-1, \frac{1}{2}, 1\}$, $f - r$ için bir işaret değişim kümesidir fakat $\frac{1}{x} \in R(0,1)$ açıkça r 'den daha iyi bir yaklaşımdır.

$X_m = \{a = x_1, x_2, \dots, x_m = b\}$ ve $\overline{R(m,n)} = R(m,n) \cap C[a,b]$ ile tanımlayalım.

Teorem 2.5.4. f fonksiyonu X_m üzerinde tanımlı ise, $r = \frac{p}{q}$ fonksiyonu $\overline{R(m,n)}$ 'den f 'ye bir en iyi yaklaşımdır; ancak ve ancak $N = 2 + \max(n + \partial p, m + \partial q)$ olmak üzere $f - r$ 'nin N noktalı bir işaret değişim kümesi vardır.

2.5.1. Rasyonel ve Barycentric Rasyonel İnterpolasyon

Bu kesimde, diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılacak olan ve m -boyutta rasyonel interpolasyon probleminin bir çözümüne genellenecek olan, Floater ve Hormann (2006)'nın metodu verilecektir.

Rasyonel interpolasyon, $k = m + n + 1$ olmak üzere birbirinden farklı $x_1, x_2, \dots, x_k$ noktaları ve keyfi $f_1, f_2, \dots, f_k$ değerleri için

$$r(x_i) = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (2.10)$$

şartlarını sağlayan $r \in R(m,n)$ rasyonel fonksiyonunu belirlemektir (Rivlin, 1969).

$R(m,0)$ olması durumunda, rasyonel interpolasyon (2.6)'da verilen polinom interpolasyonu olur ve (2.10) ifadesi daima sağlatılabilir. Fakat bu, genel olarak rasyonel interpolasyonda olmayabilir. Eğer $m = 0$ ve $\exists f_i = 0$ ise, (2.10) şartı

gerçeklenmez.

Teorem 2.5.5. $R(m, n)$ 'de (2.10) interpolasyon probleminin en çok bir çözümü vardır.

Berrut ve Mittelmann (1997), yüksek dereceli fonksiyonları kullanarak rasyonel interpolasyonda kutuplardan kaçınmanın mümkün olabileceğini söylemişlerdir. Bunun için,

$$r(x) = \frac{\sum_{i=0}^n \frac{w_i}{x - x_i} f(x_i)}{\sum_{i=0}^n \frac{w_i}{x - x_i}}$$

formunda yazılabilen interpolasyon fonksiyonlarını düşünelim. Böylece, iyi bir yaklaşım için w_i ağırlıklarının belirlemek yeterli olacaktır. p_n interpolasyon polinomunun kendisi de, barycentric formda

$$w_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{x_i - x_j} \quad (2.11)$$

alınarak yazılabilir. Böylece (2.11)'deki ağırlıklar kutupları önler, fakat genel interpolasyon noktaları için iyi bir yaklaşım vermezler. Diğer taraftan Berrut (1988),

$$w_i = (-1)^i, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

olarak ifadeyi basitleştirmiş ve

$$r(x) = \frac{\sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i f(x_i)}{x - x_i}}{\sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{x - x_i}}$$

interpolasyon fonksiyonunun $\mathbb{R}$ 'de hiçbir kutbunun olmadığını göstermiştir. Ayrıca, sayısal hesaplamalarda $n \rightarrow \infty$ için $O(h)$ mertebeli bir yaklaşım elde etmiştir.

Floater ve Hormann (2006), Berrut'un kullandığı interpolasyon fonksiyonunu da içeren ve istenilen hata mertebesinden yaklaşım elde etmek için barycentric rasyonel interpolasyon fonksiyonları ailesi kullanarak bir yapı oluşturmuşlardır. $\forall d \in \mathbb{Z}$ sayısı $0 \leq d \leq n$ olacak şekilde seçilsin ve $\forall i \in \{0, 1, \dots, n-d\}$ için p_i polinomu, f fonksiyonunun $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+d}$ noktalarındaki interpolasyon

fonksiyonu olsun. r fonksiyonu da,

$$\lambda_i(x) = \frac{(-1)^i}{(x-x_i) \dots (x-x_{i+d})}$$

olmak üzere

$$r(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n-d} \lambda_i(x) p_i(x)}{\sum_{i=0}^{n-d} \lambda_i(x)} \quad (2.12)$$

olarak tanımlansın. Bu yapı, veri noktaları $f(x_i)$ 'lere lineer olarak bağlıdır ve bir rasyonel interpolasyon fonksiyonları ailesini verir. Ayrıca, bu yapının $\mathbb{R}$ 'de hiç kutubu yoktur ve interpolasyon fonksiyonu,

$$h := \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i)$$

ve $f \in C^{d+2}[a, b]$ olmak üzere $h \rightarrow 0$ için $O(h^{d+1})$ mertebeli bir yaklaşım verir (Floater ve Hormann, 2006).

(2.12)'deki interpolasyon fonksiyonlarının $\mathbb{R}$ 'de kutuba sahip olmadıklarını göstermek için (2.12) ifadesinin pay ve paydasını

$$(-1)^{n-d} (x-x_0) \dots (x-x_n)$$

ile çarpılırsa,

$$\mu_i(x) = (-1)^{n-d} (x-x_0) \dots (x-x_n) \lambda_i(x)$$

olmak üzere

$$r(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n-d} \mu_i(x) p_i(x)}{\sum_{i=0}^{n-d} \mu_i(x)} \quad (2.13)$$

elde edilir. (2.13) denklemi, r 'nin pay ve paydasının derecesinin en çok sırasıyla n ve $n-d$ olabileceğini göstermektedir. Pay ve paydanın dereceleri n 'den büyük olmadıkları için, r barycentric formda yazılabilir (Floater ve Hormann, 2006). Bu yapıyı ve bölünmüş farkları kullanarak, Floater ve Hormann (2006) aşağıdaki

sonuçları bulmuşlardır:

Teorem 2.5.6. Her $0 \leq d \leq n$ için (2.13)'deki r rasyonel fonksiyonu, $\mathbb{R}$ 'de hiç bir kutuba sahip değildir.

(2.12)'de verilen r rasyonel fonksiyonunun f' 'ye yakınsaması ve mutlak hatası için de Floater ve Hormann aşağıdaki sonuçları bulmuşlardır:

Teorem 2.5.7. $d \geq 1$, $h = \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i)$ ve $f \in C^{d+2}[a, b]$ olsun. Bu durumda, $n - d$ tek ise,

$$\|r - f\|_{\infty} \leq h^{d+1} (b - a) \frac{\|f^{(d+2)}\|_{\infty}}{d + 2}$$

ve $n - d$ çift ise,

$$\|r - f\|_{\infty} \leq h^{d+1} \left((b - a) \frac{\|f^{(d+2)}\|_{\infty}}{d + 2} + \frac{\|f^{(d+1)}\|_{\infty}}{d + 1} \right)$$

dir.

Floater ve Hormann, $d = 0$ için $O(h)$ yakınsamasını $h \rightarrow 0$ iken

$$\beta := \max_{1 \leq i \leq n-2} \min \left\{ \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i - x_{i-1}}, \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+2} - x_{i+1}} \right\}$$

ifadesi sınırlı oluyorsa elde etmişlerdir.

Teorem 2.5.8. Varsayalım ki $d = 0$ ve $f \in C^2[a, b]$ olsun. Bu durumda, eğer n tek ise

$$\|r - f\|_{\infty} \leq h(1 + \beta)(b - a) \frac{\|f''\|_{\infty}}{2}$$

ve n çift için

$$\|r - f\|_{\infty} \leq h(1 + \beta) \left((b - a) \frac{\|f''\|_{\infty}}{2} + \|f'\|_{\infty} \right)$$

dir.

2.6. Matris Normları ve Lineer Denklem Sistemlerinin Hassaslığı

Bu kesimde, hata analizinde kullanılacak olan matris normları verilecektir. Matris normları kullanılarak lineer denklem sistemlerinin hassaslığı için kullanışlı bir teorem verilecektir. Bu kesimde verilenler Watkins (2002)'den alınmıştır.

Tanım 2.6.1. $\mathbb{C}^{m \times n}$ üzerinde bir matris normu, $\|\cdot\| : \mathbb{C}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyondur ve aşağıdaki özellikleri sağlar:

- $X \neq 0 \Rightarrow \|X\| \neq 0$
- $\|\alpha X\| = |\alpha| \|X\|$
- $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$

Vektör normlarının bütün özellikleri matris normları için geçerlidir. Özel olarak, eğer çarpımın tanımlı olduğu tüm X ve Y 'ler için $\|XY\| \leq \|X\| \|Y\|$ oluyor ise bu norma alt çarpımsal norm adı verilir.

Örnek 2.6.2. Herhangi bir matris için $\|\cdot\|_F$ Frobenius normu

$$\|X\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |x_{ij}|^2}$$

olarak tanımlanır ve alt çarpımsaldır.

Örnek 2.6.3. ∞ -normu ve 1-normu, sırasıyla

$$\|X\|_\infty = \max_i \sum_j |x_{ij}|$$

ve

$$\|X\|_1 = \max_j \sum_i |x_{ij}|$$

olarak tanımlanır. 1-norm ve ∞ -normu alt çarpımsaldır.

Teorem 2.6.4. P matrisi tersinir, $b \neq 0$, x ve $\hat{x} = x + \delta x$ sırasıyla $Px = b$ ve $P\hat{x} = b + \delta b$ sistemlerinin çözümleri olsun. Bu durumda,

$$\|\delta x\| \leq \|P^{-1}\| \|\delta b\|$$

eşitsizliği sağlanır.

2.7. Bernstein Polinomları

Sıralama yönteminde baz polinomları olarak seçilen Bernsteın polinomları, aşağıdaki şekilde tanımlanır (Bhatti ve Bracken, 2007):

Tanım 2.7.1. n . derece Bernstein polinomları

$$B_{k,n}(x) = \binom{n}{k} \frac{x^k (R-x)^{n-k}}{R^n}, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (2.14)$$

ile tanımlanır öyle ki R , Bernstein polinomlarının $[0, R]$ de polinomlar uzayının bir tam bazı olacak şekilde en geniş aralık olsun.

Eğer (2.14) denkleminde

$$(R-x)^{n-k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (-1)^i R^{n-k-i} x^i$$

koyulursa, n . derece Bernstein polinomları

$$B_{k,n}(x) = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{i} \frac{(-1)^i}{R^{k-i}} x^{k+i}.$$

olarak elde edilir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde ilk olarak baz polinomları olarak Bernstein polinomlarının seçilmesi durumunda elde edilen Bernstein seri çözümü olarak adlandıracağımız sıralama metodu, adi diferansiyel, integro-diferansiyel ve pantograf denklemleri için matris formunda verilmiştir. Floater ve Hormann (2006)'nın vermiş olduğu rasyonel interpolasyon fonksiyonunda interpolasyon polinomları yerine Bernstein seri çözümü kullanılarak diferansiyel denklemlerin rasyonel fonksiyon çözümleri elde edilmiştir. Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü için Bernstein seri çözümü 2–boyutta verilmiştir. Daha sonra m –boyutlu rasyonel interpolasyon probleminin bir çözümü için Floater ve Hormann (2006) tarafından verilen yöntem m –boyuta genelleştirilmiştir. Bernstein seri çözümü, rasyonel fonksiyon çözümü ve rasyonel interpolasyon fonksiyonu için hata analizleri verilmiştir. Verilen yöntemler, diğer lineer fonksiyonel denklemlere de uygulanabilir.

Verilen diferansiyel denklemler için tam çözümlerin var olduğunu varsayalım ve bu tam çözümü f ile gösterelim. Bernstein seri çözümü 1 – boyutta f fonksiyonuna

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i B_{i,n}(x) \quad (3.1)$$

polinomu ile p_n , verilen diferansiyel denklemi $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ sıralama noktalarında sağlayan ve başlangıç veya sınır koşullarını gerçekleyen; 2–boyutta da benzer şekilde f fonksiyonuna

$$p_{n,n}(x,y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_{ij} B_{i,n}(x) B_{j,n}(y) \quad (3.2)$$

polinomu ile p_{nn} , $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ sıralama noktalarında verilen kısmi diferansiyel denklemi ve başlangıç veya sınır koşullarını sağlayan polinomlardır.

3.1. Adi Diferansiyel Denklemler İçin Bernstein Seri Çözümü

Bu kesimde,

$$y^{(k)}(0) = \alpha_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.3)$$

başlangıç koşulu veya

$$y^{(k)}(0) = \beta_k, \quad y^{(k)}(R) = \gamma_k, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{m}{2} - 1 \quad (3.4)$$

sınır koşulları ile verilen

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) y^{(k)}(x) = g(x) \quad (3.5)$$

yüksek mertebeden lineer diferansiyel denklemler için Bernstein seri çözümü oluşturulacaktır. Bunun için önce $y = p_n(x)$ alınarak $y^{(k)}$ fonksiyonlarının matris formu, daha sonra $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ sıralama noktaları kullanılarak (3.5) denkleminin temel matris denklemi oluşturulacaktır. Başlangıç veya sınır koşulları için de $y^{(k)}$ 'nin matris formu kullanılarak elde edilen satır matrisleri ile beraber (3.5) denkleminin temel matris denklemi uygun şekilde birleştirilerek (3.1) denklemindeki katsayılar bulunacak ve sonuçta Bernstein seri çözümü elde edilmiş olacaktır.

3.1.1. Temel Bağıntılar:

(3.5) denkleminin Bernstein seri çözümünü bulalım. Bunun için Bernstein seri çözümü $y(x) = p_n(x)$ ve türevleri $y^{(k)}(x) = p_n^{(k)}(x)$ 'in ayrı ayrı matris formlarını oluşturalım.

$$\mathbf{B}_n(x) = \begin{bmatrix} B_{0,n}(x) & B_{1,n}(x) & \cdots & B_{n,n}(x) \end{bmatrix}$$

ve

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^T$$

olmak üzere

$$y(x) = \mathbf{B}_n(x)\mathbf{A} \quad \text{ve} \quad y^{(k)}(x) = \mathbf{B}_n^{(k)}(x)\mathbf{A} \quad (3.6)$$

olarak yazılabilir. Diğer taraftan, $[\mathbf{B}_n(x)]^T$ ifadesi,

$$d_{ij} = \begin{cases} \frac{(-1)^{j-i}}{R^j} \binom{n}{i} \binom{n-i}{j-i} & , \quad i \leq j \\ 0 & , \quad i > j \end{cases}$$

için

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{00} & d_{01} & \cdots & d_{0n} \\ d_{10} & d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n0} & d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{X}(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & \cdots & x^n \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$[\mathbf{B}_n(x)]^T = \mathbf{D}[\mathbf{X}(x)]^T$$

veya

$$[\mathbf{B}_n(x)] = [\mathbf{X}(x)] \mathbf{D}^T \quad (3.7)$$

olarak yazılabilir. $\mathbf{X}^{(1)}$ matrisi,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{X}(x) \mathbf{B}$$

olarak yazılabilir. $\mathbf{X}^{(k)}$ nın matris gösterimi,

$$\mathbf{X}^{(k)} = \mathbf{X}^{(k-1)}(x) \mathbf{B} = \dots = \mathbf{X}(x) \mathbf{B}^k \quad (3.8)$$

olarak bulunur. Böylece, (3.7) ve (3.8) denklemleri (3.6)'da yerine koyularak

$$y^{(k)}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}^k\mathbf{D}^T\mathbf{A} \quad (3.9)$$

elde edilir. (3.9), (3.5)'de yerine yazılarak

$$\sum_{k=0}^m P_k(x)\mathbf{X}(x)\mathbf{B}^k\mathbf{D}^T\mathbf{A} = g(x) \quad (3.10)$$

elde edilir. $0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq R$ sıralama noktaları (3.10)'da koyularak

$$\sum_{k=0}^m P_k(x_i)\mathbf{X}(x_i)\mathbf{B}^k\mathbf{D}^T\mathbf{A} = g(x_i) \quad , i = 0, 1, \dots, n$$

veya kısaca temel matris denklemi

$$\left[\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{X} \mathbf{B}^k \mathbf{D}^T \right] \mathbf{A} = \mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (3.11)$$

elde edilir öyle ki

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} P_k(x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_k(x_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_k(x_n) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_n) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X(x_0) \\ X(x_1) \\ \vdots \\ X(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & (x_0)^n \\ 1 & x_1 & \dots & (x_1)^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & (x_n)^n \end{bmatrix}$$

dir. (3.3)'deki koşullar için matris formları 3.9 ile

$$\mathbf{X}(0)\mathbf{B}^k\mathbf{D}^T\mathbf{A} = [\alpha_k] \quad , \quad k = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.12)$$

ve (3.4) için matris formları

$$\mathbf{X}(0)\mathbf{B}^k\mathbf{D}^T\mathbf{A} = [\beta_k],$$

$$\mathbf{X}(R)\mathbf{B}^k\mathbf{D}^T\mathbf{A} = [\gamma_k], \quad k = 0, 1, \dots, \frac{m}{2} - 1 \quad (3.13)$$

bulunur. Bu formlar

$$\mathbf{U}_k = \begin{bmatrix} u_{k0} & u_{k1} & \cdots & u_{kn} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathbf{U}_k \mathbf{A} = [\alpha_k], \quad k = 0, 1, \dots, m-1$$

veya

$$\mathbf{U}_k \mathbf{A} = [\beta_k],$$

$$\mathbf{U}_k \mathbf{A} = [\gamma_k], \quad k = 0, 1, \dots, \frac{m}{2} - 1$$

olarak yazılabilir. (3.12) veya (3.13)'ü (3.11)'in herhangi m satırıyla $\tilde{\mathbf{W}}$ 'nin rankı $n+1$ olacak şekilde değiştirilerek

$$\tilde{\mathbf{W}} \mathbf{A} = \tilde{\mathbf{G}}$$

denklem sistemi elde edilir ve bu sistemin çözümü olan katsayılar matrisi

$$\mathbf{A} = (\tilde{\mathbf{W}})^{-1} \tilde{\mathbf{G}}$$

olarak yazılabilir. $\mathbf{A}$ matrisi (3.6)'da yerine yazılarak (3.5)'in Bernstein seri çözümü elde edilmiş olur.

3.2. Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerin Bernstein Seri Çözümü

$\forall j, k$ için $P_{jk}(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $[0, R]$ 'de sürekli olmak üzere,

$$\sum_{k=0}^{m-1} c_{ik} y^{(k)}(x_{i0}) = \lambda_i, \quad i = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.14)$$

başlangıç koşulları ile verilen

$$y^{(m)}(x) = \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{m-1} P_{jk}(x) y^{(k)}(\alpha_j x + \beta_j) + g(x), \quad 0 \leq x \leq R, \quad m \geq 1 \quad (3.15)$$

diferansiyel denklemini ele alalım öyle ki c_{ik} , λ_i , α_j ve β_j reel sabitler ve $\forall i$ için $x_{i0} \in [0, R]$ 'dir. (3.15) denkleminin Bernstein seri çözümünü bulmak için (3.5)'de bulunmayan $y^{(k)}(\alpha_j x + \beta_j)$ teriminin matris gösterimi bulunacaktır.

3.2.1. Temel Bağıntılar:

(3.5) denkleminde farklı olarak (3.15) denkleminde bulunan $y^{(k)}(\alpha_j x + \beta_j)$ terimi için matris formunu bulmak için, $X(\alpha_j x + \beta_j)$ ve $X^{(k)}(\alpha_j x + \beta_j)$ matrislerini ele alalım. $\alpha_j \neq 0$ ve $\beta_j \neq 0$ için

$$\mathbf{B}(\alpha_j, \beta_j) = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} (\alpha_j)^0 (\beta_j)^0 & \binom{1}{0} (\alpha_j)^0 (\beta_j)^1 & \cdots & \binom{N}{0} (\alpha_j)^0 (\beta_j)^N \\ 0 & \binom{1}{1} (\alpha_j)^1 (\beta_j)^0 & \cdots & \binom{N}{1} (\alpha_j)^1 (\beta_j)^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \binom{N}{N} (\alpha_j)^N (\beta_j)^0 \end{bmatrix}$$

ve $\alpha_j \neq 0$ ve $\beta_j = 0$ için

$$\mathbf{B}(\alpha_j, 0) = \begin{bmatrix} (\alpha_j)^0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\alpha_j)^1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\alpha_j)^N \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\alpha_j x + \beta_j) &= \begin{bmatrix} 1 & \alpha_j x + \beta_j & \cdots & (\alpha_j x + \beta_j)^N \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{X}(x) \mathbf{B}(\alpha_j, \beta_j) \end{aligned}$$

ve

$$\mathbf{X}'(\alpha_j x + \beta_j) = \mathbf{X}(\alpha_j x + \beta_j) \mathbf{B} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{X}^{(2)}(\alpha_j x + \beta_j) = \mathbf{X}(\alpha_j x + \beta_j) \mathbf{B}^2$$

$\vdots$

$$\mathbf{X}^{(k)}(\alpha_j x + \beta_j) = \mathbf{X}(\alpha_j x + \beta_j) \mathbf{B}^k$$

elde edilir. Böylece (3.9) ile (3.16)'dan

$$y^{(k)}(\alpha_j x + \beta_j) = \mathbf{X}(x) \mathbf{B}(\alpha_j, \beta_j) \mathbf{B}^k \mathbf{D}^T \mathbf{A} \quad (3.17)$$

elde edilir. (3.9) ve (3.17)'yi (3.15) denkleminde yerine yazarak

$$\mathbf{X}(x) \mathbf{B}^m \mathbf{D}^T \mathbf{A} = \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{m-1} P_{jk}(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{B}(\alpha_j, \beta_j) \mathbf{B}^k \mathbf{D}^T \mathbf{A} + g(x) \quad (3.18)$$

denklemini elde edilir. $0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq R$ sıralama noktalarını (3.18)'de koyarak

$$\mathbf{X}(x_i) \mathbf{B}^m \mathbf{D}^T \mathbf{A} = \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{m-1} P_{jk}(x_i) \mathbf{X}(x_i) \mathbf{B}(\alpha_j, \beta_j) \mathbf{B}^k \mathbf{D}^T \mathbf{A} + g(x_i) \quad , i = 0, 1, \dots, n$$

veya kısaca temel matris denklemini

$$\left[\mathbf{X} \mathbf{B}^m \mathbf{D}^T - \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{P}_{jk} \mathbf{X} \mathbf{B}(\alpha_j, \beta_j) \mathbf{B}^k \mathbf{D}^T \right] \mathbf{A} = \mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (3.19)$$

elde edilir öyle ki

$$\mathbf{P}_{jk} = \begin{bmatrix} P_{jk}(x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_{jk}(x_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_{jk}(x_n) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_n) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X(x_0) \\ X(x_1) \\ \vdots \\ X(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & (x_0)^n \\ 1 & x_1 & \dots & (x_1)^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & (x_n)^n \end{bmatrix}$$

dir. (3.14)'daki koşullar için matris formları (3.9) ile

$$\sum_{k=0}^{m-1} c_{ik} \mathbf{X}(x_{i0}) \mathbf{B}^k \mathbf{D}^T \mathbf{A} = [\lambda_i] \quad , \quad i = 0, 1, \dots, m-1$$

olarak bulunur. Bu formlar

$$\mathbf{U}_i = \begin{bmatrix} u_{i0} & u_{i1} & \dots & u_{in} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

olmak üzere

$$\mathbf{U}_i \mathbf{A} = [\lambda_i] \quad (3.21)$$

olarak yazılabilir. (3.21)'yi (3.19)'un herhangi m satırıyla $\text{rank}(\tilde{\mathbf{W}}) = n + 1$ olacak şekilde değiştirilerek

$$\tilde{\mathbf{W}} \mathbf{A} = \tilde{\mathbf{G}} \quad (3.22)$$

denklem sistemi elde edilir. Sonuçta katsayılar matrisi

$$\mathbf{A} = (\tilde{\mathbf{W}})^{-1} \tilde{\mathbf{G}}$$

olarak yazılabilir ve $a_0, a_1, \dots, a_n$ katsayıları belirlenir.

3.3. Zayıf Tekil Çekirdekli İntegro-diferansiyel Denklemlerin Bernstein Seri Çözümleri

c, λ_i ve y_i reel sabitler, $P_i(x), g(x)$ fonksiyonları $[0, R]$ 'de sürekli, $K(x, t)$ fonksiyonu $[0, R] \times [0, R]$ 'de sürekli olmak üzere başlangıç koşulları

$$y^{(i)}(c) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, \max \{J-1, l-1, k-1\}, \quad 0 \leq c \leq R,$$

ile verilen

$$\sum_{i=0}^J P_i(x) y^{(i)}(x) = g(x) + \lambda_1 \int_0^x \frac{y^{(k)}(t)}{\sqrt{x-t}} dt + \lambda_2 \int_0^x K(x, t) y^{(l)}(t) dt \quad (3.23)$$

zayıf tekil çekirdekli integro-diferansiyel denklemini ele alalım. (3.23) denkleminin temel matris denklemini oluşturalım. (3.19) denklemine ek olarak $\lambda_1 \int_0^x \frac{y^{(k)}(t)}{\sqrt{x-t}} dt$ ve $\lambda_2 \int_0^x K(x, t) y^{(l)}(t) dt$ terimlerinin matris gösterimini oluşturalım. Bunun için

$$\int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{x-t}} dt = \frac{\sqrt{\pi} x^{(\frac{1}{2}+n)} \Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{3}{2})}$$

eşitliğinden $\lambda_1 \int_0^x \frac{y^{(k)}(t)}{\sqrt{x-t}} dt$ ifadesi

$$\lambda_1 \int_0^x \frac{y^{(k)}(t)}{\sqrt{x-t}} dt = \lambda_1 \mathbf{Q}_x \mathbf{B}^k \mathbf{D}^T \mathbf{A}$$

olarak yazılabilir öyle ki

$$\mathbf{Q}_x = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{\pi} x^{\frac{1}{2}} \Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})} & \frac{\sqrt{\pi} x^{\frac{3}{2}} \Gamma(2)}{\Gamma(\frac{5}{2})} & \dots & \frac{\sqrt{\pi} x^{(\frac{1}{2}+n)} \Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} \end{bmatrix}$$

dir. $\lambda_2 \int_0^x K(x,t) y^{(l)}(t) dt$ için $K(x,t)$ fonksiyonu $[0, R] \times [0, R]$ 'de sürekli olduğundan $t^i K(x,t)$ fonksiyonu t 'ye göre Riemann integrallenebilir. Böylece,

$$\mathbf{V}_x = \begin{bmatrix} \int_0^x K(x,t) dt & \int_0^x K(x,t) t dt & \dots & \int_0^x K(x,t) t^n dt \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\lambda_2 \int_0^x K(x,t) y^{(l)}(t) dt = \lambda_2 \mathbf{V}_x \mathbf{B}^k \mathbf{D}^T \mathbf{A}$$

yazılabilir. Sonuçta, (3.23) denklemi

$$\sum_{i=0}^J P_i(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{B}^i \mathbf{D}^T \mathbf{A} = g(x) + \lambda_1 \mathbf{Q}_x \mathbf{B}^k \mathbf{D}^T \mathbf{A} + \lambda_2 \mathbf{V}_x \mathbf{B}^k \mathbf{D}^T \mathbf{A} \quad (3.24)$$

formunda yazılabilir. $0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq R$ sıralama noktaları (3.24)'de yerine koyularak, (3.23) denklemi için temel matris denklemini

$$\mathbf{W} \mathbf{A} = \left(\sum_{i=0}^J \mathbf{P}_i \mathbf{X} \mathbf{B}^i \mathbf{D}^T - \lambda_1 \mathbf{Q} \mathbf{B}^k \mathbf{D}^T - \lambda_2 \mathbf{V} \mathbf{B}^k \mathbf{D}^T \right) \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

olarak elde edilir öyle ki

$$\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} P_i(x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_i(x_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_i(x_n) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_{x_0} \\ V_{x_1} \\ \vdots \\ V_{x_n} \end{bmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_{x_0} \\ Q_{x_1} \\ \vdots \\ Q_{x_n} \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_n) \end{bmatrix}$$

dir. (3.20) kullanılarak başlangıç koşulları $\mathbf{W}$ 'nin satırları ile uygun şekilde yer değiştirilerek $\mathbf{A}$ katsayılar matrisi (3.22)'de olduğu gibi elde edilir ve sonuçta Bernstein seri çözümü bulunmuş olur.

3.4. Yüksek Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemlerin Rasyonel Fonksiyon Çözümü

Bu kesimde,

$$y^{(k)}(0) = \alpha_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1$$

başlangıç koşulu veya

$$y^{(k)}(0) = \beta_k, \quad y^{(k)}(R) = \gamma_k, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{m}{2} - 1$$

sınır koşulları ile verilen

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) y^{(k)}(x) = g(x) \quad (3.25)$$

yüksek mertebeden lineer diferansiyel denklemler ele alınacak ve Osman vd. (2011) tarafından ilk defa verilen bir rasyonel fonksiyon çözümü tanıtılacaktır. Bu çözüm, Floater ve Hormann (2006) tarafından verilen rasyonel interpolasyon fonksiyonunda;

$$r(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n-d} \lambda_i(x) p_i(x)}{\sum_{i=0}^{n-d} \lambda_i(x)}$$

p_i interpolasyon polinomları yerine (3.25)'in $\{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+d}\}$ noktaları kullanılarak elde edilen Bernstein seri çözümü alınacaktır. (3.25)'in Bernstein seri çözümü, $d = n$ durumuna karşılık gelen rasyonel fonksiyon çözümü olduğundan, farklı d değerleri için Bernstein seri çözümünden daha iyi sonuçlar bulunabilir.

3.5. Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Bernstein Seri Çözümü

Bu kesimde, kısmi diferansiyel denklemlerin (3.2) denklemi ile verilen Benstein seri çözümü oluşturulacaktır. Bunun için, $\Omega = [0, R_1] \times [0, R_2]$, P, R, S, T, U, V ve G 'de Ω 'da tanımlı fonksiyonlar olmak üzere

$$P \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + R \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + S \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + T \frac{\partial u}{\partial x} + U \frac{\partial u}{\partial y} + Vu = G \quad (3.26)$$

denklemi aşağıdaki karışık koşullar ile verilmiş olsun:

- Durum 1: $(\alpha_k, \beta_k) \in \partial\Omega$, $a_{i,j}^k$ 'lar sabitler olmak üzere

$$\sum_{k=1}^t \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 a_{i,j}^k u^{(i,j)}(\alpha_t, \beta_t) = \lambda_t,$$

- Durum 2: $(x, \gamma_k) \in \partial\Omega$ ve $b_{i,j}^k$ 'lar sabitler olmak üzere

$$\sum_{k=1}^p \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 b_{i,j}^k u^{(i,j)}(x, \beta_k) = k(x),$$

- Durum 3: $(\eta_k, y) \in \partial\Omega$ ve $c_{i,j}^k$ 'lar sabitler olmak üzere

$$\sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 c_{i,j}^k u^{(i,j)}(\eta_k, y) = h(y).$$

$p_{n,n}$ Bernstein seri çözümünü elde etmek için, Bölüm 3.1'dekine benzer şekilde $p_{n,n}$ ve türevlerinin matris formları oluşturulup (3.26) için temel matris denklemi oluşturulacaktır. Sıralama noktaları olarak $\{(x_i, y_j) : 0 \leq i, j \leq n\}$ kümesi alınacaktır.

$p_{n,n}$, (3.26)'nin Bernstein seri çözümü olsun. $p_{n,n}$,

$$\mathbf{Q}_n(y) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_n(y) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_n(y) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{B}_n(y) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} & a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} & \cdots & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$p_{n,n}(x,y) = \mathbf{B}_n(x)\mathbf{Q}_n(y)\mathbf{A} \quad (3.27)$$

olarak yazılabilir. Şimdi, (3.26)'nın Bernstein seri çözümünü elde edebilmek için, (3.27)'nin ve türevlerinin matris bağıntılarını oluşturalım. Bölüm 3.1'de

$$[\mathbf{B}_n(x)]^{(k)} = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}^k\mathbf{D}^T$$

olduğu verilmişti. $\mathbf{Q}_n(y)$ matrisi,

$$\mathbf{Q}_n(y) = \bar{\mathbf{Y}}(y)\bar{\mathbf{D}}$$

olarak yazılabilir öyle ki burada

$$\bar{\mathbf{Y}}(y) = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}(y) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y}(y) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{Y}(y) \end{bmatrix}, \mathbf{Y}(y) = \begin{bmatrix} 1 & y & \cdots & y^n \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^T & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}^T & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{D}^T \end{bmatrix}$$

matrisleridir. $\bar{\mathbf{Y}}(y)^{(l)}$ matrisi de,

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\bar{\mathbf{Y}}(y)^{(l)} = \bar{\mathbf{Y}}(y)\bar{\mathbf{B}}^l$$

dir ve sonuçta, $p_{n,n}(x,y)^{(k,l)} = \frac{\partial^{k+l} p_{n,n}(x,y)}{\partial x^k \partial y^l}$ olmak üzere

$$p_{n,n}(x,y)^{(k,l)} = \mathbf{X}(x)\mathbf{B}^k\mathbf{D}^T\bar{\mathbf{Y}}(y)\bar{\mathbf{B}}^l\bar{\mathbf{D}}\mathbf{A} \quad (3.28)$$

elde edilir. (3.27) ve (3.28) denklemleri (3.26)'de yerine yazılırsa, temel matris denklemi

$$\begin{aligned} & [P(x,y)\mathbf{X}(x)\mathbf{B}^2\mathbf{D}^T\bar{\mathbf{Y}}(y)\bar{\mathbf{D}} + R(x,y)\mathbf{X}(x)\mathbf{B}\mathbf{D}^T\bar{\mathbf{Y}}(y)\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{D}} \\ & + S(x,y)\mathbf{X}(x)\mathbf{D}^T\bar{\mathbf{Y}}(y)\bar{\mathbf{B}}^2\bar{\mathbf{D}} + T(x,y)\mathbf{X}(x)\mathbf{B}\mathbf{D}^T\bar{\mathbf{Y}}(y)\bar{\mathbf{D}} \\ & + U(x,y)\mathbf{X}(x)\mathbf{D}^T\bar{\mathbf{Y}}(y)\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{D}} + V(x,y)\mathbf{X}(x)\mathbf{D}^T\bar{\mathbf{Y}}(y)\bar{\mathbf{D}}] \mathbf{A} = G(x,y) \end{aligned} \quad (3.29)$$

olarak elde edilir. Sıralama noktaları $\{(x_i, y_j) : 0 \leq i, j \leq n\}$ (3.29) denkleminde önce i sabit olacak şekilde yerine yazılarak $(n+1)^2$ tane satır matris elde edilir. Bu matrisleri satır kabul eden matrise $\mathbf{W}$ matrisi diyelim. $\mathbf{G}$ matrisi ile de $G(x,y)$ 'nin sıralama noktalarında önce i sabit olacak şekilde aldığı değerler ile oluşan sütun matrisini gösterelim:

$$[\mathbf{G}]_{li} = G(x_t, y_l), \quad t = \left\lfloor \frac{i}{n+1} \right\rfloor, \quad l = i - t(n+1) - 1.$$

Böylece,

$$\mathbf{WA} = \mathbf{G} \quad (3.30)$$

sistemi elde edimiş olur.

Koşullar için matris formu (3.27) ve (3.28) kullanılarak aşağıda herbir durum için verilmiştir:

- Durum 1: $(\alpha_k, \beta_k) \in \partial\Omega$, $a_{i,j}^k$ 'lar sabitler olmak üzere

$$\mathbf{C}_{1,t}\mathbf{A} = \sum_{k=1}^t \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 a_{i,j}^k \mathbf{X}(\alpha_t) \mathbf{B}^i \mathbf{D}^T \bar{\mathbf{Y}}(\beta_t) \bar{\mathbf{B}}^j \bar{\mathbf{D}} \mathbf{A} = \lambda_t, \quad (3.31)$$

- Durum 2: $(x, \gamma_k) \in \partial\Omega$ ve $b_{i,j}^k$ 'lar sabitler olmak üzere $t = 0, 1, \dots, n$ için

$$\mathbf{C}_{2,t}\mathbf{A} = \sum_{k=1}^p \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 b_{i,j}^k \mathbf{X}(x_t) \mathbf{B}^i \mathbf{D}^T \bar{\mathbf{Y}}(\beta_k) \bar{\mathbf{B}}^j \bar{\mathbf{D}} \mathbf{A} = k(x_t), \quad (3.32)$$

- Durum 3: $(\eta_k, y) \in \partial\Omega$ ve $c_{i,j}^k$ 'lar sabitler olmak üzere $t = 0, 1, \dots, n$ için

$$\mathbf{C}_{3,t}\mathbf{A} = \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 c_{i,j}^k \mathbf{X}(\alpha_k) \mathbf{B}^i \mathbf{D}^T \bar{\mathbf{Y}}(y_t) \bar{\mathbf{B}}^j \bar{\mathbf{D}} \mathbf{A} = h(y_t). \quad (3.33)$$

(3.31), (3.32) ve (3.33)'de verilen denklem sistemleri sırasıyla

$$\mathbf{C}_1 \mathbf{A} = \mathbf{G}_1,$$

$$\mathbf{C}_2 \mathbf{A} = \mathbf{G}_2$$

ve

$$\mathbf{C}_3 \mathbf{A} = \mathbf{G}_3$$

olarak yazılabilir öyle ki burada $[\mathbf{G}_1]_{t1} = \lambda_t$, $[\mathbf{G}_2]_{t1} = k(x_t)$ ve $[\mathbf{G}_3]_{t1} = h(y_t)$ 'dir. $[\mathbf{W}, \mathbf{G}]$ sistemi ile $[\mathbf{C}_1, \mathbf{G}_1]$, $[\mathbf{C}_2, \mathbf{G}_2]$ ve $[\mathbf{C}_3, \mathbf{G}_3]$ sistemleri birleştirilerek elde edilen yeni sistemi $[\tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{G}}]$ ile gösterilsin:

$$[\tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} \mathbf{W} & , & \mathbf{G} \\ \mathbf{C}_1 & , & \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{C}_2 & , & \mathbf{G}_2 \\ \mathbf{C}_3 & , & \mathbf{G}_3 \end{bmatrix}.$$

$[\tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{G}}]$ sistemi $m \times n$, $m > n$ tipinde bir sistem olup Gauss satır indirgeme yolu ile elde edilen ve sıfırdan farklı olan kısmını $[\bar{\mathbf{W}}, \bar{\mathbf{G}}]$ ile gösterelim. Bu durumda $\mathbf{A}$ matrisi eğer $\bar{\mathbf{W}}$ matrisi tersinir ise

$$\mathbf{A} = \bar{\mathbf{W}}^{-1} \bar{\mathbf{G}}$$

ile bulunur. Eğer $\bar{\mathbf{W}}$ matrisi tersinir değilse sıralama noktaları $\bar{\mathbf{W}}$ matrisi tersinir olacak şekilde değiştirilmelidir. Diğer bir yöntem olarak, eğer matrisler çok büyük boyutlu değilse, $\mathbf{W}$ 'nın yarı tersi de

$$\tilde{\mathbf{W}}_{\text{yarı}}^{-1} = (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^T$$

$\mathbf{A}$ matrisini bulmak için kullanılabilir.

3.6. m -Boyutta Rasyonel İnterpolasyon Fonksiyonu

Bu kesimde, m -boyutta rasyonel interpolasyon probleminin bir çözümü olarak Floater ve Hormann (2006) tarafından verilen yöntem m -boyut için genellenmiştir.

m -değişkenli f fonksiyonu ve $1 \leq j \leq m$ için $0 \leq d_j \leq n$ tamsayıları verilsin. $0 \leq i_j \leq n - d_j$ ve $1 \leq j \leq m$ için, $p_{i_1, i_2, \dots, i_m}$ polinomu f 'nin

$$\{(x_1^{t_1}, x_2^{t_2}, \dots, x_m^{t_m}) : i_j \leq t_j \leq i_j + d_j, 1 \leq j \leq m\}$$

noktalarındaki interpolasyon polinomu olsun. r rasyonel fonksiyonunu da $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$

$$\lambda_{i_1, i_2, \dots, i_m}(\mathbf{x}) = \frac{(-1)^{\sum_{k=1}^m i_k}}{\prod_{i=i_1}^{i_1+d_1} (x_1 - x_1^i) \dots \prod_{i=i_m}^{i_m+d_m} (x_m - x_m^i)}$$

olmak üzere

$$r = \frac{\sum_{i_1=0}^{n-d_1} \sum_{i_2=0}^{n-d_2} \dots \sum_{i_m=0}^{n-d_m} \lambda_{i_1, i_2, \dots, i_m} p_{i_1, i_2, \dots, i_m}}{\sum_{i_1=0}^{n-d_1} \sum_{i_2=0}^{n-d_2} \dots \sum_{i_m=0}^{n-d_m} \lambda_{i_1, i_2, \dots, i_m}} \quad (3.34)$$

ile tanımlayalım. (3.34) fonksiyonunun $\mathbb{R}^m$ 'de hiç bir köke sahip olmadığı, Teorem 3.6.1'de ispatlanmıştır:

Teorem 3.6.1. (3.34)'de tanımlanan rasyonel fonksiyonunun $\mathbb{R}^m$ 'de hiç kökü yoktur.

Kanıt: Teoremin ispatında kullanılacak olan $\mu_{i_1, \dots, i_m}$ fonksiyonunu

$$\begin{aligned} \mu_{i_1, \dots, i_m}(\mathbf{x}) &= \prod_{k=0}^{i_1-1} (x_1 - x_1^k) \prod_{k=i_1+d_1+1}^n (x_1^k - x_1) \\ &\quad \dots \prod_{k=0}^{i_m-1} (x_m - x_m^k) \prod_{k=i_m+d_m+1}^n (x_m^k - x_m) \end{aligned}$$

olarak tanımlayalım. (3.34)'nin pay ve paydasının

$$(-1)^{nm - \sum_{k=0}^m d_k} \prod_{k=0}^n (x_1 - x_1^k) \dots \prod_{k=0}^m (x_m - x_m^k)$$

ile çarpılması

$$r = \frac{\sum_{i_1=0}^{n-d_1} \sum_{i_2=0}^{n-d_2} \cdots \sum_{i_m=0}^{n-d_m} \mu_{i_1, i_2, \dots, i_m} p_{i_1, i_2, \dots, i_m}}{\sum_{i_1=0}^{n-d_1} \sum_{i_2=0}^{n-d_2} \cdots \sum_{i_m=0}^{n-d_m} \mu_{i_1, i_2, \dots, i_m}} \quad (3.35)$$

ifadesini verir. (3.35)'in paydası

$$\sum_{i_1=0}^{n-d_1} \mu_{i_1}(x_1) \cdots \sum_{i_m=0}^{n-d_m} \mu_{i_m}(x_m)$$

ifadesine eşittir ve Teorem 2.5.6'dan (3.35)'in paydası pozitiftir.

□

$m = 2$ için (3.34) rasyonel fonksiyonunun hatasını inceleyelim. $(x, y) \in (x_\alpha, x_{\alpha+1}) \times (x_\beta, x_{\beta+1})$ ve $d_1, d_2 > 0$ olsun.

$$\begin{aligned} I_1 &= \{i : i \leq \alpha - d_1, 0 \leq i \leq n - d_1\}, \\ I_2 &= \{i : \alpha - d_1 + 1 \leq i \leq \alpha, 0 \leq i \leq n - d_1\}, \\ I_3 &= \{i : \alpha + 1 \leq i, 0 \leq i \leq n - d_1\} \end{aligned}$$

olmak üzere $s(x) = \sum_{i=0}^{n-d_1} \mu_i(x)$, $h_1 = \max_{0 \leq i \leq n-1} |x_{i+1} - x_i|$ ve $j \in I_2$ için Floater ve Hormann (2006),

$$\left| \sum_{i=0}^{n-d_1} \lambda_i(x) \right| = \frac{s(x)}{\prod_{i=0}^n |x - x_i|} \geq \frac{\mu_j(x)}{\prod_{i=0}^n |x - x_i|} \geq \frac{1}{d_1! h_1^{d_1+1}}$$

olduğunu göstermişlerdir. Benzer şekilde, $s(x, y) = \sum_{i=0}^{n-d_1} \sum_{j=0}^{n-d_2} \mu_{i,j}(x, y)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^{n-d_1} \sum_{j=0}^{n-d_2} \lambda_{i,j}(x, y) \right| &= \frac{s(x, y)}{\prod_{i=0}^n |x - x_i| \prod_{i=0}^n |y - y_i|} \\ &\geq \frac{\mu_j(x) s(y)}{\prod_{i=0}^n |x - x_i| \prod_{i=0}^n |y - y_i|} \geq \frac{s(y)}{d_1! h_1^{d_1+1} \prod_{i=0}^n |y - y_i|} \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Bununla beraber, $h_1 = \max_{0 \leq i \leq n-1} |x_{i+1} - x_i|$ ve

$t_1 = \min_{0 \leq i \leq n-1} |x_{i+1} - x_i|$ olmak üzere

$$\frac{|\mu_i(x)|}{s(x)} \leq \frac{h_1}{t_1} \quad (3.36)$$

dir. Bunu ispatlamak için, ilk olarak $i \in I_1$ olsun. Bu durumda, $|\mu_i(x)| \leq |\mu_{\alpha-d_1}(x)|$ olup $|x - x_{\alpha-d_1}| \leq \frac{h_1}{t_1} |x - x_{\alpha+d_1+1}|$ olduğundan

$$\frac{|\mu_{\alpha-d_1}(x)|}{\mu_{\alpha+d_1+1}(x)} \leq \frac{h_1}{t_1}$$

ve böylece $\frac{|\mu_i(x)|}{s(x)} \leq \frac{h_1}{t_1}$ elde edilir. $i \in I_2$ için $\mu_i(x) > 0$ olduğundan eşitsizlik sağlanır. Benzer adımlar $i \in I_3$ için de gösterilebilir.

Teorem 3.6.2. $d_1, d_2 > 0$, $f \in W_{\infty}^{n+1}([a_1, b_1] \times [a_2, b_2])$ ve $\{(x_i, y_j) : 0 \leq i, j \leq n\}$ interpolasyon noktaları olsun. Bu durumda,

$$h_1 = \max_{0 \leq i \leq n-1} |x_{i+1} - x_i|, h_2 = \max_{0 \leq i \leq n-1} |y_{i+1} - y_i|, \\ t_1 = \min_{0 \leq i \leq n-1} |x_{i+1} - x_i|, t_2 = \min_{0 \leq i \leq n-1} |y_{i+1} - y_i|$$

olmak üzere

$$\|f - r\|_{\infty} \leq (n-d_1)(n-d_2) \left[\frac{h_1^{d_1+1}}{t_1(d_1+1)} \left\| \frac{\partial^{d_1+1} f}{\partial x^{d_1+1}} \right\|_{\infty} + \frac{h_2^{d_2+1}}{t_2(d_2+1)} \left\| \frac{\partial^{d_2+1} f}{\partial y^{d_2+1}} \right\|_{\infty} \right] \\ + \frac{(n-d_1)(n-d_2)h_1^{d_1+1}h_2^{d_2+1}}{(d_1+1)(d_2+1)} \left\| \frac{\partial^{d_1+d_2+2} f}{\partial x^{d_1+1} \partial y^{d_2+1}} \right\|_{\infty}$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt: $f - r$ hata fonksiyonu interpolasyon noktalarında sıfır olduğundan

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \setminus \{(x_i, y_j) : 0 \leq i, j \leq n\}$$

için hatayı belirleyelim. $f - r$ fonksiyonu, $\forall (x, y)$ için

$$f(x, y) - r(x, y) = \frac{\sum_{i_1=0}^{n-d_1} \sum_{i_2=0}^{n-d_2} \lambda_{i_1, i_2}(x, y) [f(x, y) - p_{i_1, i_2}(x, y)]}{\sum_{i_1=0}^{n-d_1} \sum_{i_2=0}^{n-d_2} \lambda_{i_1, i_2}(x, y)}$$

dir. Hata fonksiyonunun payı için bir üst sınır ve paydası için bir alt sınır bulunacaktır. $E = f - p_{i_1, i_2}$ fonksiyonu (2.7) ile $E = E_1 + E_2 - E_1 E_2$ olarak yazılabilir. Böylece,

$$\begin{aligned}
|(f - r)(x, y)| \leq & \frac{\frac{1}{(d_1 + 1)!} \sum_{i_1=0}^{n-d_1} \sum_{i_2=0}^{n-d_2} \frac{1}{|w_{i_2}(y)|} \left\| \frac{\partial^{d_1+1} f}{\partial x^{d_1+1}} \right\|_{\infty}}{\sum_{i_1=0}^{n-d_1} \sum_{i_2=0}^{n-d_2} \lambda_{i_1, i_2}(x, y)} \\
& + \frac{\frac{1}{(d_2 + 1)!} \sum_{i_1=0}^{n-d_1} \sum_{i_2=0}^{n-d_2} \frac{1}{|w_{i_1}(x)|} \left\| \frac{\partial^{d_2+1} f}{\partial y^{d_2+1}} \right\|_{\infty}}{\sum_{i_1=0}^{n-d_1} \sum_{i_2=0}^{n-d_2} \lambda_{i_1, i_2}(x, y)} \\
& + \frac{\frac{1}{(d_1 + 1)!(d_2 + 1)!} \sum_{i_1=0}^{n-d_1} \sum_{i_2=0}^{n-d_2} \left\| \frac{\partial^{d_1+d_2+2} f}{\partial x^{d_1+1} \partial y^{d_2+1}} \right\|_{\infty}}{\sum_{i_1=0}^{n-d_1} \sum_{i_2=0}^{n-d_2} \lambda_{i_1, i_2}(x, y)}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

olarak bulunur. (3.36)'dan (3.37) ifadesi

$$\begin{aligned}
|(f-r)(x,y)| &\leq \frac{\frac{1}{(d_1+1)!} \sum_{i_1=0}^{n-d_1} \sum_{i_2=0}^{n-d_2} \frac{1}{|w_{i_2}(y)|} \left\| \frac{\partial^{d_1+1} f}{\partial x^{d_1+1}} \right\|_{\infty}}{\frac{s(y)}{d_1! h_1^{d_1+1} \prod_{i=0}^n |y-y_i|}} \\
&+ \frac{\frac{1}{(d_2+1)!} \sum_{i_1=0}^{n-d_1} \sum_{i_2=0}^{n-d_2} \frac{1}{|w_{i_1}(x)|} \left\| \frac{\partial^{d_2+1} f}{\partial y^{d_2+1}} \right\|_{\infty}}{\frac{s(x)}{d_2! h_2^{d_2+1} \prod_{i=0}^n |x-x_i|}} \\
&+ \frac{1}{(d_1+1)!(d_2+1)!} \sum_{i_1=0}^{n-d_1} \sum_{i_2=0}^{n-d_2} \left\| \frac{\partial^{d_1+d_2+2} f}{\partial x^{d_1+1} \partial y^{d_2+1}} \right\|_{\infty} \\
&\leq \frac{h_1^{d_1+1}}{d_1+1} \sum_{i_1=0}^{n-d_1} \sum_{i_2=0}^{n-d_2} \frac{|\mu_{i_2}(y)|}{s(y)} \left\| \frac{\partial^{d_1+1} f}{\partial x^{d_1+1}} \right\|_{\infty} \\
&+ \frac{h_2^{d_2+1}}{d_2+1} \sum_{i_1=0}^{n-d_1} \sum_{i_2=0}^{n-d_2} \frac{|\mu_{i_1}(x)|}{s(x)} \left\| \frac{\partial^{d_2+1} f}{\partial y^{d_2+1}} \right\|_{\infty} \\
&+ \frac{h_1^{d_1+1} h_2^{d_2+1}}{(d_1+1)(d_2+1)} \sum_{i_1=0}^{n-d_1} \sum_{i_2=0}^{n-d_2} \left\| \frac{\partial^{d_1+d_2+2} f}{\partial x^{d_1+1} \partial y^{d_2+1}} \right\|_{\infty} \\
&\leq (n-d_1)(n-d_2) \frac{h_1^{d_1+2}}{t_1(d_1+1)} \left\| \frac{\partial^{d_1+1} f}{\partial x^{d_1+1}} \right\|_{\infty} \\
&+ (n-d_1)(n-d_2) \frac{h_2^{d_2+2}}{t_2(d_2+1)} \left\| \frac{\partial^{d_2+1} f}{\partial y^{d_2+1}} \right\|_{\infty} \\
&+ \frac{(n-d_1)(n-d_2) h_1^{d_1+1} h_2^{d_2+1}}{(d_1+1)(d_2+1)} \left\| \frac{\partial^{d_1+d_2+2} f}{\partial x^{d_1+1} \partial y^{d_2+1}} \right\|_{\infty}
\end{aligned}$$

ile sınırlıdır. □

Teorem 3.6.3. $d_1, d_2, \dots, d_m > 0$, $f \in W_{\infty}^{n+1} \left(\prod_{i=0}^m [a_i, b_i] \right)$ ise,

$$h_i = \max_{0 \leq k \leq n-1} |x_i^{k+1} - x_i^k|, \text{ ve } t_i = \min_{0 \leq k \leq n-1} |x_i^{k+1} - x_i^k|$$

olmak üzere

$$\|f-r\|_{\infty} \leq \prod_{i=0}^m (n-d_i) \sum_{\|\alpha\|_{\infty}=1} \left(\frac{h}{t} \right)^{\alpha} h^{\alpha(d+1)} \left\| \partial^{\alpha(d+1)} f \right\|_{\infty}$$

dir öyle ki burada

$$\alpha(d+1) = (\alpha_1(d_1+1), \alpha_2(d_2+1), \dots, \alpha_m(d_m+1)),$$

$$h = (h_1, h_2, \dots, h_m), t = (t_1, t_2, \dots, t_m)$$

dir.

Kanıt: $s(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{i=0}^{n-d_1} \mu_i(x_1) \sum_{i=0}^{n-d_2} \mu_i(x_2) \cdots \sum_{i=0}^{n-d_m} \mu_i(x_m)$ olmak üzere

$$\frac{|\mu_{i_1, i_2, \dots, i_m}(x_1, x_2, \dots, x_m)|}{s(x_1, x_2, \dots, x_m)} \leq 1$$

eşitsizliği ve Teorem 3.6.2'deki adımları kullanılarak ispatlanır. $\square$

Teorem 3.6.2 ile verilen üst sınır, $t_i \rightarrow 0$ için sınırsız olduğundan eşit aralıklı dağılımlar için daha kullanışlı bir hata sınırıdır.

3.7. Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Rasyonel Fonksiyon Çözümü

(3.26) ile verilen kısmi türevli diferansiyel denklemlerin Bernstein seri çözümü Bölüm 3.5.'te verilmişti. (3.34) denkleminde interpolasyon polinomları yerine (3.2) ile verilen Bernstein seri çözümleri alınırsa, (3.26) denklemi için bir r rasyonel fonksiyon çözümü bulunmuş olur. $n = d_1 = d_2$ olması durumunda Bernstein seri çözümü elde edileceğinden, rasyonel fonksiyon çözümleri ile Bernstein seri çözümünden daha iyi sonuçlar elde edilebilir.

3.8. Bernstein Seri Çözümlerinin Hata Analizi

Bu kesimde, yukarıda verilen Bernstein seri çözümler için önce hata analizleri verilecektir. Daha sonra çözümün bilinmediği durumlarda da kullanılabilecek olan Oliveira (1980), Çelik (2005), Çelik (2006) ve Shahmorad (2005) tarafından verilen kalan doğrulaması (residuel correction), Bernstein polinomları için düzenlenerek hata tahmini de verilecektir.

3.8.1. Adi Diferansiyel Denklemler İçin Bernstein Seri Çözümünün Hata Analizi

f fonksiyonu ve f 'nin $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ noktalarındaki $p_n f$ interpolasyon polinomu verilsin. Eğer f yeteri kadar düzgün ise, f fonksiyonu $f = p_n f + K_n$ olarak yazılabilir öyle ki burada

$$K_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j) f^{(n+1)}(\xi)$$

hata fonksiyonudur. Eğer p_n polinomu (3.5)'nin Bernstein seri çözümü ise, (3.5) denklemini sıralama noktalarında sağlar. Böylece,

$$[\Delta \mathbf{G}]_{i1} = \left[-P_m(x_i) K_n^{(m)}(x_i) - P_{m-1}(x_i) K_n^{(m-1)}(x_i) - \dots - P_0(x_i) K_n(x_i) \right]_{i1}$$

olmak üzere p_n ve $p_n f$ sırasıyla $\bar{\mathbf{W}} \mathbf{A} = \bar{\mathbf{G}}$ ve $\bar{\mathbf{W}} \hat{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{G}} + \Delta \mathbf{G}$ deklemlerinin çözümleridir.

Teorem 3.8.1. p_n ve f (3.5) denkleminin sırası ile Bernstein seri çözümü ve tam çözümü olsun. $p_n f$ polinomu f 'nin sıralama noktalarındaki interpolasyon polinomu ve $\bar{\mathbf{W}}, \mathbf{A}, \hat{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{G}}, \Delta \mathbf{G}$, matrisleri yukarıda tanımlanan matrisler olsun. Eğer $f \in C^{n+1}[0, R]$ ise,

$$|f(x) - p_n(x)| \leq |K_n(x)| + \|\Delta \mathbf{G}\| \|\bar{\mathbf{W}}^{-1}\| \|\mathbf{D}^T\| \|\mathbf{X}(x)\|$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt: Mutlak değer özelliklerinden,

$$|f(x) - p_n(x)| \leq |f(x) - p_n f(x)| + |p_n(x) - p_n f(x)|$$

dir. $f \in C^{n+1}[0, R]$ olduğundan dolayı, Teorem 2.3.4'den sağdaki ilk terim $|K_n(x)|$ 'e eşittir ve ikinci terim için bir üst sınır aşağıdaki adımlar norm özellikleri ve Teorem 2.6.4 uygulanarak elde edilmiş olur:

$$\begin{aligned} |p_n(x) - p_n f(x)| &= \left| \mathbf{B}_n(x)(\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}) \right| \leq \|\mathbf{B}_n(x)\| \|\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}\| \\ &\leq \|\mathbf{X}(x)\| \|\mathbf{D}^T\| \|\Delta \mathbf{G}\| \|\bar{\mathbf{W}}^{-1}\|. \end{aligned}$$

□

Tam çözümün bilinmediği durumlarda Teorem 3.8.1'den $e_n = f - p_n$ hata fonksiyonuna e_m^* fonksiyonu ile yaklaşılabılır ve eğer $e_n - e_m^*$ hatası yeteri kadar küçükse, e_m^* hataya yaklaşım fonksiyonu ile e_n hata fonksiyonu tahmin edilebilir. Uygulamada $m \geq n$ seçilmesi ile daha tutarlı sonuçlar elde edilmiştir. e_m^* 'ı bulmak için önce e_n 'nin diferansiyel denklemini kuralım. (3.5) denkleminin her iki tarafına $\left(-\sum_{k=0}^m P_k(x)p_n^{(m)}(x)\right)$ eklenirse, e_n hata fonksiyonu

$$\sum_{k=0}^m P_k(x)e_n^{(m)}(x) = g(x) - \sum_{k=0}^m P_k(x)p_n^{(m)}(x)$$

diferansiyel denklemini sağlar. Başlangıç ve sınır koşulları da sırasıyla

$$e^{(k)}(0) = 0, k = 0, 1, \dots, m-1$$

başlangıç koşulu veya

$$e^{(k)}(0) = 0, e^{(k)}(R) = 0, k = 0, 1, \dots, \frac{m}{2} - 1$$

koşullarına dönüşür. Yeteri kadar küçük ε için $|e_n - e_m^*| \leq \varepsilon$ oluyorsa, $\min_n \|e_n\|_\infty$ ifadesini sağlayan n sayısının seçimi, $\|e_m^*\|_\infty$ ile hesaplanabilir. Benzer şekilde $\min_n \|e_n\|_2$ sayısını sağlayan n sayısında benzer şekilde tayin edilebilir. Açıkça, $p_n + e_m^*$ polinomu (3.5) denkleminin bir yaklaşık çözümüdür ve farklı m değerleri için daha iyi bir yaklaşım elde edilebilir.

Sonuç 3.8.2. Yukarıdaki gösterimler ile, eğer p_n polinomu (3.5)'nin Bernstein seri çözümü ise, $p_n + e_m^*$ da (3.5)'nin diğer bir yaklaşık çözümüdür ve yaklaşımın hatası $e_n - e_m^*$ kadardır.

Bulunan bu sonuçlar, gecikmeli diferansiyel denklemler, integro-diferansiyel denklemler ve kısmi diferansiyel denklemler için genellenmiştir.

3.8.2. Gecikmeli Diferansiyel Denklemler İçin Bernstein Seri Çözümünün Hata Analizi

$f \in C^{n+1}[0, R]$ ise, f fonksiyonu $\forall x$ için

$$f(x) = p_n f(x) + K_n = p_n f(x) + \frac{1}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j) f^{(n+1)}(\xi)$$

olarak yazılabilir ve bir önceki kesimdekine benzer olarak (3.15)'in Bernstein seri çözümü p_n ve (3.15)'in sıralama noktalarındaki interpolasyon polinomu $p_n f$

$$[\Delta G]_{i1} = \left[-K_n^{(m)}(x_i) + \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{m-1} P_{jk}(x) K_n^{(k)}(\alpha_j x + \beta_j) \right]_{i1}$$

için sırasıyla $\bar{W}A = \bar{G}$ ve $\bar{W}\hat{A} = \bar{G} + \Delta G$ deklemlerinin çözümleridir.

Teorem 3.8.3. p_n ve f (3.15) denkleminin sırası ile Bernstein seri çözümü ve tam çözümü olsun. $p_n f$ polinomu f 'nin sıralama noktalarındaki interpolasyon polinomu ve $\tilde{W}$, A , $\hat{A}$, $\tilde{G}$, ΔG , matrisleri yukarıda tanımlanan matrisler olsun. Eğer $f \in C^{n+1}[0, R]$ ise,

$$|f(x) - p_n(x)| \leq |K_n(x)| + \|\Delta G\| \|\tilde{W}^{-1}\| \|\mathbf{D}^T\| \|\mathbf{X}(x)\|$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt: Teorem 3.8.1'in ispatına benzer şekilde yapılır. □

Hata fonksiyonunun tahmini de Bölüm 3.8.1.'dekine benzer şekilde yapılabilir. $e_n = f - p_n$ hata fonksiyonuna e_m^* fonksiyonu ile yaklaşılsa ve eğer $|e_n - e_m^*| \leq \epsilon$ ise, e_m^* ile e_n fonksiyonu tahmin edilebilir. (3.15) denkleminin her iki tarafına

$$-p_n^{(m)}(x) - \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{m-1} P_{jk}(x) p_n^{(k)}(\alpha_j x + \beta_j)$$

eklenirse, e_n hata fonksiyonu

$$\begin{aligned} e^{(m)}(x) &= \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{m-1} P_{jk}(x) e^{(k)}(\alpha_j x + \beta_j) - p_n^{(m)}(x) \\ &\quad + \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{m-1} P_{jk}(x) p_n^{(k)}(\alpha_j x + \beta_j) + g(x) \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} c_{ik} e^{(k)}(x_{i0}) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1$$

diferansiyel denklemini sağlar. $|e_n - e_m^*| \leq \varepsilon$ ise $\min_n \|e_n\|_\infty$ ve $\min_n \|e_n\|_2$ sayılarını veren n sayıları belirlenebilir.

Sonuç 3.8.4. Yukarıdaki gösterimler ile, eğer p_n polinomu (3.15) denkleminin Bernstein seri çözümü ise, $p_n + e_m^*$ da (3.15) denkleminin hata fonksiyonu $e_n - e_m^*$ olan diğer bir yaklaşık çözümdür.

3.8.3. Zayıf Tekil Çekirdekli İntegro-diferansiyel Denklemler İçin Bernstein Seri Çözümünün Hata Analizi

Eğer f yeteri kadar düzgün ise, yukarıdakilere benzer olarak f fonksiyonu

$$f = p_n f + K_n$$

olarak yazılıp

$$[\Delta G]_{i1} = \left[P_m(x_i) K_n^{(m)}(x_i) + P_{m-1}(x_i) K_n^{(m-1)}(x_i) + \dots + P_0(x_i) K_n(x_i) \right]_{i1}$$

olmak üzere (3.23)'ün p_n Bernstein seri çözümü ve sıralama noktalarındaki $p_n f$ interpolasyon polinomu sırasıyla $\tilde{W}A = \tilde{G}$ ve $\tilde{W}\hat{A} = \tilde{G} + \Delta G$ deklemlerinin çözümleridir.

Teorem 3.8.5. p_n ve f (3.23) denkleminin sırası ile Bernstein seri çözümü ve tam çözümü olsun. $p_n f$ polinomu f 'nin sıralama noktalarındaki interpolasyon polinomu ve $\tilde{W}$, A , $\hat{A}$, $\tilde{G}$, ΔG , matrisleri yukarıda tanımlanan matrisler olsun. Eğer $f \in C^{n+1}[0, R]$ ise,

$$|f(x) - p_n(x)| \leq |K_n(x)| + \|\Delta G\| \|\tilde{W}^{-1}\| \|\mathbf{D}^T\| \|\mathbf{X}(x)\|$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt: Teorem 3.8.1'in ispatına benzer şekilde yapılır. □

Hatanın tahmini de benzer şekilde yapılabilir. (3.23) denkleminin her iki tarafına

$$- \sum_{i=0}^J P_i(x) p_n^{(i)}(x) + \lambda_1 \int_0^x \frac{p_n^{(k)}(t)}{\sqrt{x-t}} dt + \lambda_2 \int_0^x K(x, t) p_n^{(l)}(t) dt$$

eklenirse, e_n hata fonksiyonu

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^J P_i(x) e_n^{(i)}(x) &= g(x) + \lambda_1 \int_0^x \frac{e_n^{(k)}(t)}{\sqrt{x-t}} dt + \lambda_2 \int_0^x K(x,t) e_n^{(l)}(t) dt \\ &\quad - \sum_{i=0}^J P_i(x) p_n^{(i)}(x) + \lambda_1 \int_0^x \frac{p_n^{(k)}(t)}{\sqrt{x-t}} dt \\ &\quad + \lambda_2 \int_0^x K(x,t) p_n^{(l)}(t) dt \end{aligned}$$

diferansiyel denklemini sağlar ve başlangıç koşulları da

$$e_n^{(i)}(c) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, \max\{J-1, l-1, k-1\}$$

olur. En iyi yaklaşımı veren n sayısı, $|e_n - e_m^*|$ hatası gözardı edilebilecek kadar küçükse, $\|e_n\|_\infty$ veya $\|e_n\|_2$ ölçülerek bulunabilir. Açıkça, $p_n + e_m^*$ (3.23) denkleminin bir yaklaşık çözümüdür ve farklı m değerleri için daha iyi bir yaklaşım elde edilebilir.

Sonuç 3.8.6. Yukarıdaki gösterimler ile, eğer p_n polinomu (3.23)'in Bernstein seri çözümü ise, $p_n + e_m^*$ da (3.23)'in diğer bir yaklaşık çözümüdür ve yaklaşımın hata fonksiyonu $e_n - e_m^*$ fonksiyonudur.

3.8.4. Yüksek Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler İçin Rasyonel Fonksiyon Çözümünün Hata Analizi

r fonksiyonu (3.25)'in rasyonel fonksiyon çözümü olsun. Teorem 3.8.1 ve Floater ve Hormann (2006)'ın sonuçları kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.8.7. r ve f (3.25) denkleminin sırası ile rasyonel fonksiyon çözümü ve tam çözümü olsun. Bu durumda eğer $f \in C^{d+2}[0, R]$ ise,

$$\begin{aligned} |f(x) - r(x)| &\leq \max_i \left\{ K_d(x) + \|\Delta \mathbf{G}_i\| \left\| \tilde{\mathbf{W}}_i^{-1} \right\| \left\| \mathbf{D}^T \right\| \left\| \begin{bmatrix} 1 & x & \dots & x^d \end{bmatrix} \right\| \right\} \\ &\quad + O(h^{d+1}) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır öyle ki $\Delta \mathbf{G}_i$ ve $\tilde{\mathbf{W}}_i^{-1}$ matrisleri $\{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+d}\}$ ile ilişkili matrislerdir.

Kanıt: $f - r$ hata fonksiyonu

$$f(x) - r(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n-d} \lambda_i(x) [f - p_i](x)}{\sum_{i=0}^{n-d} \lambda_i(x)}$$

yazılarak her bir parça için Teorem 3.8.1 uygulanırsa istenen sonuç elde edilmiş olur. $\square$

3.8.5. Kısmi Diferansiyel Denklemler İçin Bernstein Seri Çözümünün Hata Analizi

f fonksiyonu (3.26)'nın tam çözümü ve $p_{n,n}f$ polinomu da f 'nin sıralama noktalarındaki Lagrange interpolasyon polinomu olsun. Eğer f yeteri kadar düzgünse, f fonksiyonu $f(x,y) = p_{n,n}f(x,y) + K(x,y)$ olarak yazılabilir öyle ki K Teorem 2.3.11'de verilen $\zeta, \eta \in (0, R)$ için

$$K(x,y) = \frac{w_n(x)}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} f(\zeta, y)}{\partial x^{n+1}} + \sum_{i=0}^n l_{i,n}(x) \frac{w_n(y)}{(n+1)!} \frac{\partial^{m+1} f(x_i, \eta)}{\partial y^{m+1}},$$

hata fonksiyonudur.

$\bar{p}_{n,n}$ fonksiyonu, (3.26)'nın $\mathbf{A}$ katsayılar matrisi özel olarak $[\tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{G}}]$ matrisinin lineer bağımsız $(n+1)^2$ satırından elde edilen Bernstein seri çözümü, yani $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{W}}_{\tilde{o}}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\tilde{o}}$ olmak üzere $\bar{p}_{n,n} = \mathbf{B}_n(x) \mathbf{B}_n(y) A$ olsun öyle ki burda $\tilde{\mathbf{W}}_{\tilde{o}}$ matrisi $\tilde{\mathbf{W}}$ 'nin $(n+1)^2$ tane lineer bağımsız satırlarını ve $\tilde{\mathbf{G}}_{\tilde{o}}$ 'de bu satırlara karşılık gelen değerleri göstermektedir:

$$\bar{p}_{n,n} = \mathbf{B}_n(x)\mathbf{B}_n(y)\mathbf{A}, \mathbf{A} = \tilde{\mathbf{W}}_{\bar{o}}^{-1}\tilde{\mathbf{G}}_{\bar{o}} \quad (3.38)$$

Bu durumda $\bar{p}_{n,n}$, (3.26)'yı sıralama noktalarında sağlar. Böylece $\bar{p}_{n,n}$ (3.30)'da verilen $\tilde{\mathbf{W}}_{\bar{o}}\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{o}}$, $p_{n,n}f$ 'te $\tilde{\mathbf{W}}_{\bar{o}}\bar{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{o}} + \Delta\mathbf{G}$ denklemlerinin çözümleridir öyle ki

$$[\Delta\mathbf{G}]_{i1} = [(PK_{xx} + RK_{xy} + SK_{yy} + TK_x + UK_y + VK)(x_r, y_s)]_{i1}$$

ve $r = \lceil \frac{i}{n+1} \rceil$, $s = i - (n+1)r + 1$ 'dir. Hesaplama hataları göz ardı edilirse, aşağıdaki teorem mutlak hata için bir üst sınır verir:

Teorem 3.8.8. $\bar{p}_{nn}$ ve f sırasıyla (3.26)'nın (3.38) ile tanımlı Bernstein seri çözümü ve tam çözümü olsun. $\tilde{\mathbf{W}}_{\bar{o}}$, $\mathbf{A}$, $\bar{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{G}}_{\bar{o}}$ ve $\Delta\mathbf{G}$ matrisleri yukarıda tanımlanan matrisler ve $\mathbf{X}(x)$, $\mathbf{Y}(y)$, $\mathbf{D}^T$, $\bar{\mathbf{D}}$, matrisleri de Bölüm 3.5.'deki matrisler olsun. Eğer f yeteri kadar düzgünse, mutlak hata fonksiyonu

$$|f(x,y) - \bar{p}_{n,n}(x,y)| \leq |K(x,y)| + \|\mathbf{B}_n(x)\| \|\mathbf{B}_n(y)\| \|\tilde{\mathbf{W}}_{\bar{o}}^{-1}\| \|\Delta\mathbf{G}\| \quad (3.39)$$

eşitsizliğini sağlar.

Kanıt: $p_{n,n}f$ polinomlarını (3.39)'un sol tarafına ekleyip çıkararak

$$|f(x,y) - \bar{p}_{n,n}(x,y)| \leq |f(x,y) - p_{n,n}f(x,y)| + |p_{n,n}f(x,y) - \bar{p}_{n,n}(x,y)|$$

elde edilir. Sağdaki ilk terim f yeteri kadar düzgün olduğundan Teorem 2.3.11'den $|K(x,y)|$ ile sınırlıdır. İkinci terim için $p_{n,n}f = \mathbf{B}_n(x)\mathbf{B}_n(y)\bar{\mathbf{A}}$ olarak yazılırsa, Teorem 2.6.4 ve norm özelliklerinden

$$\begin{aligned} |p_{n,n}f(x,y) - \bar{p}_{n,n}(x,y)| &= |\mathbf{B}_n(x)\mathbf{B}_n(y)\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{B}_n(x)\mathbf{B}_n(y)\mathbf{A}| \\ &= |\mathbf{B}_n(x)\mathbf{B}_n(y)(\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{A})| \\ &\leq \|\mathbf{B}_n(x)\| \|\mathbf{B}_n(y)\| \|\tilde{\mathbf{W}}_{\bar{o}}^{-1}\| \|\Delta\mathbf{G}\| \end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 3.8.8'deki sınır, $\|\Delta\mathbf{G}\|$ küçükken anlamlı bir sınır verebilir. Bununla beraber n arttıkça hem $\tilde{\mathbf{W}}_{\bar{o}}$ matrisi kötü koşullu olacağından, hem de $\|\mathbf{B}_n(x)\|$ ve $\|\mathbf{B}_n(y)\|$ değerleri büyüyeceğinden kullanışlı bir üst sınır vermeyebilir. Bundan dolayı anlamlı bir üst sınır elde etmek için n sayısı ne çok büyük ne de çok küçük seçilmelidir.

Ayrıca, kullanımı daha kolay olan ve adi diferansiyel denklemler için verilen hata tahmini, kısmi türevli denklemler için de aşağıdaki adımlar uygulanarak verilebilir:

(3.26) denkleminin her iki tarafına

$$\begin{aligned} H(x,y) := & P(x,y) \frac{\partial^2 p_{n,n}}{\partial x^2} + R(x,y) \frac{\partial^2 p_{n,n}}{\partial x \partial y} + S(x,y) \frac{\partial^2 p_{n,n}}{\partial y^2} \\ & + T(x,y) \frac{\partial p_{n,n}}{\partial x} + U(x,y) \frac{\partial p_{n,n}}{\partial y} + V(x,y) p_{n,n} \end{aligned}$$

eklenirse, $e_{n,n} = f - p_{n,n} = u - p_{n,n}$ hata fonksiyonu

$$P \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + R \frac{\partial^2 e}{\partial x \partial y} + S \frac{\partial^2 e}{\partial y^2} + T \frac{\partial e}{\partial x} + U \frac{\partial e}{\partial y} + Ve = G - H \quad (3.40)$$

denklemini aşağıdaki koşullar ile sağlar.

- Durum 1: $\sum_{k=1}^t \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 a_{i,j}^k e^{(i,j)}(\alpha_t, \beta_t) = 0,$
- Durum 2: $\sum_{k=1}^p \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 b_{i,j}^k e^{(i,j)}(x, \beta_k) = 0,$
- Durum 3: $\sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 c_{i,j}^k e^{(i,j)}(\eta_k, y) = 0.$

(3.40) denkleminin Bernstein seri çözümü $e_{m,m}^*$ olsun. Eğer $|e_{n,n} - e_{m,m}^*| \leq \varepsilon$ hatası gözardı edilirse, $\min_n \|e_{n,n}\|_\infty$ sayısını veren n sayısının seçimi yapılabilir. Benzer şekilde $\min_n \|e_{n,n}\|_2$ sayısını veren n sayısı da belirlenebilir. Açıkça, $p_{n,n} + e_{m,m}^*$ (3.26) denkleminin bir yaklaşık çözümüdür ve daha iyi bir yaklaşım elde edilebilir.

Sonuç 3.8.9. Yukarıdaki gösterimler ile, eğer $p_{n,n}$ polinomu (3.26)'nın Bernstein seri çözümü ise, $p_{n,n} + e_{m,m}^*$ da (3.26)'nın diğer bir yaklaşık çözümüdür ve yaklaşımın hata fonksiyonu $e_{n,n} - e_{m,m}^*$ fonksiyonudur.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bölüm 3'te verilen Bernstein seri çözümler, rasyonel fonksiyon yaklaşımları ve adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin rasyonel fonksiyon çözümleri çeşitli örnekler için elde edilecektir. Hesaplamalar, 32 bit Maple 12 ve 64 bit işletim sisteminde yapılmıştır. Ayrıca, hesaplamalarda farklı hanelerde duyarlılıklar kullanılmıştır. Bunun bir sebebi, kesme sınırı n 'den kaynaklanan hatalar dışında bilgisayardan kaynaklanan hesaplama hataları da sonuçları etkilemektedir ve bu etki işlemlerin yüksek duyarlılıkla yapılması ile azaltılabilir. Ayrıca, Chebyshev interpolasyon noktaları, salınımın çok olduğu durumlarda daha tutarlı sonuçlar verebileceğinden, özellikle kısmi diferansiyel denklemlerin Bernstein seri çözümleri bulunurken sıklıkla kullanılmışlardır. Bernstein seri çözümler ve rasyonel interpolasyon yöntemi, diğer bazı yöntemlerle kıyaslanmışlardır. Bölüm 3'te bulunan hata analizi ile ilgili sonuçlar bu bölümde bazı problemler için doğrulanmıştır. Teoriden elde edilen sonuçlar ile uygulamadan elde edilen sonuçlar tutarlıdır.

4.1. Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerin Bernstein Seri Çözümleri İle İlgili Örnekler

Bu kesimde, Bölüm 3.2.'de verilen gecikmeli diferansiyel denklemler için Bernstein seri çözümü elde edilecektir (Osman vd., 2010). Ele alınan her bir örnek için Teorem 3.8.3 kullanılarak mutlak hata için bir üst sınır bulunmuş ve Sonuç 3.8.4 kullanılarak hata tahmini ve yeni bir yaklaşım polinomu elde edilmiştir.

Örnek 4.1.1. Tam çözümü $y(x) = e^x$ olan

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{1}{2}y(x) + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}y\left(\frac{x}{2}\right) , & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

multi pantograf denklemini ele alalım (Evens ve Raslan, 2005). (3.19)'dan $n = 7$ için

temel matris denklemi

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_0 = \frac{1}{2}I_{8 \times 8},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 21 & -35 & 35 & -21 & 7 & -1 \\ 0 & 7 & -42 & 105 & -140 & 105 & -42 & 7 \\ 0 & 0 & 21 & -105 & 210 & -210 & 105 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & -35 & -140 & 210 & -140 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 35 & -105 & 105 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & -42 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.53 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.57 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.62 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.66 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.71 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.76 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.82 \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{7} & (\frac{1}{7})^2 & (\frac{1}{7})^3 & (\frac{1}{7})^4 & (\frac{1}{7})^5 & (\frac{1}{7})^6 & (\frac{1}{7})^7 \\ 1 & \frac{2}{7} & (\frac{2}{7})^2 & (\frac{2}{7})^3 & (\frac{2}{7})^4 & (\frac{2}{7})^5 & (\frac{2}{7})^6 & (\frac{2}{7})^7 \\ 1 & \frac{3}{7} & (\frac{3}{7})^2 & (\frac{3}{7})^3 & (\frac{3}{7})^4 & (\frac{3}{7})^5 & (\frac{3}{7})^6 & (\frac{3}{7})^7 \\ 1 & \frac{4}{7} & (\frac{4}{7})^2 & (\frac{4}{7})^3 & (\frac{4}{7})^4 & (\frac{4}{7})^5 & (\frac{4}{7})^6 & (\frac{4}{7})^7 \\ 1 & \frac{5}{7} & (\frac{5}{7})^2 & (\frac{5}{7})^3 & (\frac{5}{7})^4 & (\frac{5}{7})^5 & (\frac{5}{7})^6 & (\frac{5}{7})^7 \\ 1 & \frac{6}{7} & (\frac{6}{7})^2 & (\frac{6}{7})^3 & (\frac{6}{7})^4 & (\frac{6}{7})^5 & (\frac{6}{7})^6 & (\frac{6}{7})^7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}(\frac{1}{2}, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{64} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{128} \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$[\mathbf{XBD}^T - \mathbf{P}_0 \mathbf{XD}^T - \mathbf{P}_1 \mathbf{XB}(\frac{1}{2}, 0) \mathbf{D}^T] \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

olarak elde edilir. (3.20) denkleminde başlangıç koşulu için

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece, $\tilde{\mathbf{W}}$ ve $\tilde{\mathbf{G}}$ matrisi sırasıyla

$$\begin{bmatrix} -8 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3.26 & -0.37 & 1.48 & 0.86 & 0.22 & 0.03 & 0.002 & 5.0E-5 \\ -1.17 & -1.66 & -0.27 & 0.90 & 0.78 & 0.29 & 0.052 & 0.0037 \\ -0.37 & -1.12 & -1.25 & -0.23 & 0.76 & 0.75 & 0.29 & 0.04 \\ -0.11 & -0.49 & -1.07 & -1.15 & -0.20 & 0.83 & 0.79 & 0.23 \\ -0.03 & -0.18 & -0.52 & -1.07 & -1.25 & -0.19 & 1.16 & 0.88 \\ -0.01 & -0.08 & -0.21 & -0.45 & -1.09 & -1.79 & -0.21 & 0.60 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

olarak elde edilir ve bu sistemin çözümünden Bernstein katsayılar matrisi $\mathbf{A}$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1.1428 & 1.3095 & 1.5048 & 1.7345 & 2.0063 & 2.3299 & 2.7183 \end{bmatrix}^T$$

olarak bulunur.

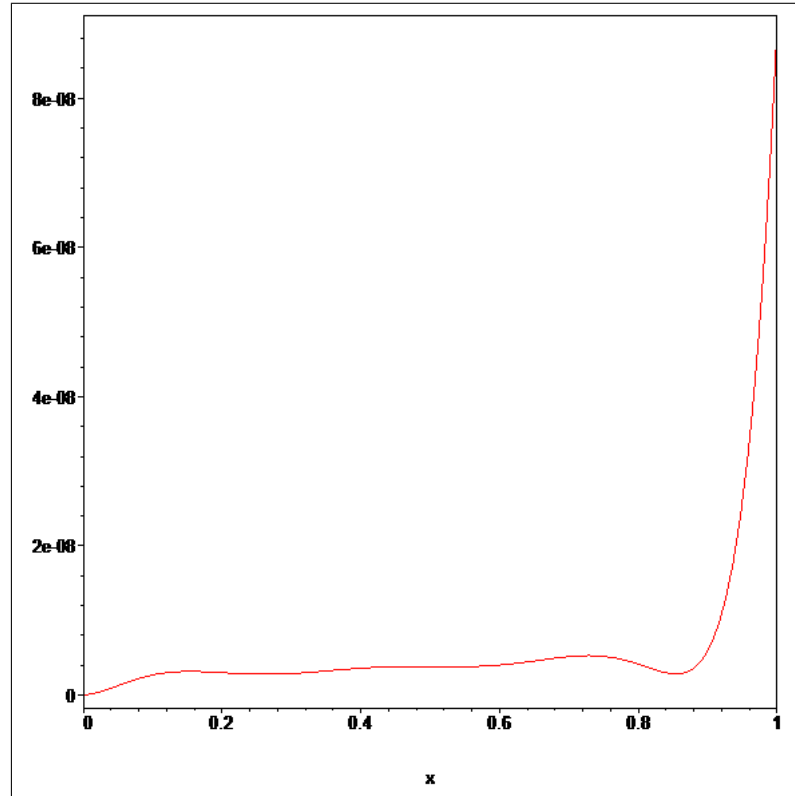
Çizelge 4.1. Örnek 4.1.1’de farklı n ve $H.D.$ değerleri için mutlak hatalar

x_i	$ f - p_7 $ (20 $H.D.$)	$ f - p_{10} $ (20 $H.D.$)	$ f - p_{15} $ (20 $H.D.$)	$ f - p_{25} $ (20 $H.D.$)	$ f - p_{25} $ (30 $H.D.$)
0	0	0	0	0	0
0.2	$0.30 E - 8$	$0.10 E - 12$	$0.43 E - 17$	$0.91 E - 13$	$0.39 E - 23$
0.4	$0.36 E - 8$	$0.13 E - 12$	$0.11 E - 16$	$0.10 E - 12$	$0.40 E - 23$
0.6	$0.40 E - 8$	$0.15 E - 12$	$0.31 E - 16$	$0.65 E - 12$	$0.11 E - 22$
0.8	$0.41 E - 8$	$0.18 E - 12$	$0.16 E - 15$	$0.65 E - 10$	$0.68 E - 21$
1	$0.89 E - 7$	$0.42 E - 11$	$0.15 E - 13$	$0.21 E - 8$	$0.78 E - 20$

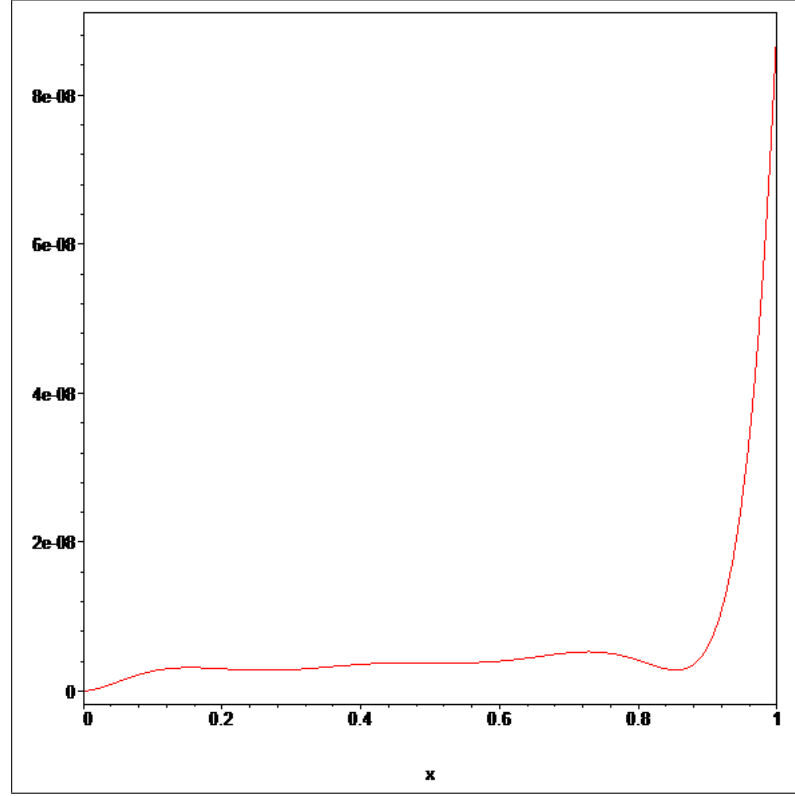
Böylece $n = 7$ için Bernstein seri çözümü

$$p_7(x) = \mathbf{B}_7(x)\mathbf{A} = 1 + x + 0.5x^2 + 0.1667x^3 + 0.0417x^4 \\ + 0.0084x^5 + 0.0012x^6 + 0.0003x^7$$

olarak elde edilir. $n = 7$ için elde edilen mutlak hata ve e_{12}^* fonksiyonlarının grafikleri sırasıyla Şekil 4.1. ve Şekil 4.2.’de verilmiştir. Çeşitli n değerleri ve farklı duyarlılıkta işlemler için mutlak hatalar aşağıda Çizelge 4.1.’de verilmiştir.



Şekil 4.1. Örnek 4.1.1 ve $n = 7$ için mutlak hata fonksiyonu



Şekil 4.2. Örnek 4.1.1 için $|e_{12}^*|$ fonksiyonu

Ayrıca, 20 hanede duyarlılık için mutlak hata fonksiyonunun sonsuz normundaki değerleri, e_{12}^* fonksiyonunun sonsuz normu ve Sonuç 3.8.4 ile verilen yeni yaklaşımın sonsuz normları Çizelge 4.2.'de verilmiştir. Bununla beraber, Teorem 3.8.3 kullanılarak bulunan mutlak hata için üst sınırlar da Çizelge 4.2.'de listelenmiş olup teoriden elde edilen bu üst sınırlar uygulamada elde edilen mutlak hataları sınırlar. e_{12}^* fonksiyonu hesaplanırken Chebyshev interpolasyon noktaları kullanılmıştır.

Ayrıca Sonuç 3.8.4 ile elde edilen yaklaşımların sonsuz normunda Bernstein seri çözümü ile elde edilen sonuçlardan daha iyi olduğu görülmektedir. Ek olarak sabit duyarlılıkla işlem yapılması durumunda hatalar bir noktaya kadar azalmakta ve daha sonra artmaya başlamaktadır. Bu durum, değişken duyarlılıkla işlemler yapılarak Çizelge 4.1.'de olduğu gibi aşılabilir. 20 hanede duyarlılık için sonsuz normuna göre en iyi yaklaşım $n = 13$ için elde edilmiş olup $\|e_{12}^*\|_\infty$ değerinde en küçük olduğu nokta $n = 13$ 'te elde edilmiştir.

Çizelge 4.2. Örnek 4.1.1 için mutlak hatalar, hata tahminleri ve hata yaklaşım fonksiyonunun mutlak hataları

n	3	4	5	6
$\ f - p_n\ _\infty$	0.0080	$0.45E - 3$	$0.35E - 4$	$0.16E - 5$
$\ e_{12}^*\ _\infty$	0.0080	$0.45E - 3$	$0.35E - 4$	$0.16E - 5$
$\ f - p_n - e_{12}^*\ _\infty$	$0.30E - 15$	$0.30E - 15$	$0.30E - 15$	$0.30E - 15$
<i>Üst sınır</i>	2.21	0.65	0.16	0.05
n	7	8	9	10
$\ f - p_n\ _\infty$	$0.89E - 7$	$0.32E - 8$	$0.13E - 9$	$0.42E - 11$
$\ e_{12}^*\ _\infty$	$0.89E - 7$	$0.32E - 8$	$0.13E - 9$	$0.42E - 11$
$\ f - p_n - e_{12}^*\ _\infty$	$0.30E - 15$	$0.30E - 15$	$0.30E - 15$	$0.30E - 15$
<i>Üst sınır</i>	$1.37E - 2$	$3.62E - 3$	$9.98E - 4$	$2.41E - 4$
n	11	12	13	14
$\ f - p_n\ _\infty$	$0.14E - 12$	$0.20E - 14$	$0.30E - 15$	$0.53E - 14$
$\ e_{12}^*\ _\infty$	$0.14E - 12$	$0.19E - 14$	$0.30E - 15$	$0.52E - 14$
$\ f - p_n - e_{12}^*\ _\infty$	$0.30E - 15$	$0.30E - 15$	$0.14E - 16$	$0.90E - 17$
<i>Üst sınır</i>	$0.50E - 4$	$0.11E - 4$	$0.22E - 5$	$0.39E - 6$
n	15	16	17	18
$\ f - p_n\ _\infty$	$0.91E - 13$	$0.70E - 13$	$0.21E - 12$	$0.45E - 11$
$\ e_{12}^*\ _\infty$	$0.91E - 13$	$0.70E - 13$	$0.20E - 12$	$0.43E - 11$
$\ f - p_n - e_{12}^*\ _\infty$	$0.90E - 16$	$2.4E - 15$	$0.90E - 15$	$0.11E - 14$
<i>Üst sınır</i>	$0.70E - 7$	$0.11E - 7$	$0.17E - 8$	$0.26E - 9$
n	19	20		
$\ f - p_n\ _\infty$	$0.39E - 11$	$0.23E - 11$		
$\ e_{12}^*\ _\infty$	$0.38E - 11$	$0.23E - 11$		
$\ f - p_n - e_{12}^*\ _\infty$	$0.70E - 14$	$0.24E - 14$		
<i>Üst sınır</i>	$0.38E - 10$	$0.50E - 11$		

Örnek 4.1.2. Üçüncü mertebe tam çözümü $y(x) = \cos x$ olan,

$$\begin{cases} y'''(x) = xy''(2x) - y'(x) - y\left(\frac{x}{2}\right) + x \cos 2x + \cos \frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = -1 \end{cases}$$

pantograf denklemini ele alalım (Sezer vd., 2008). $n = 6$ için Bernstein seri çözümü

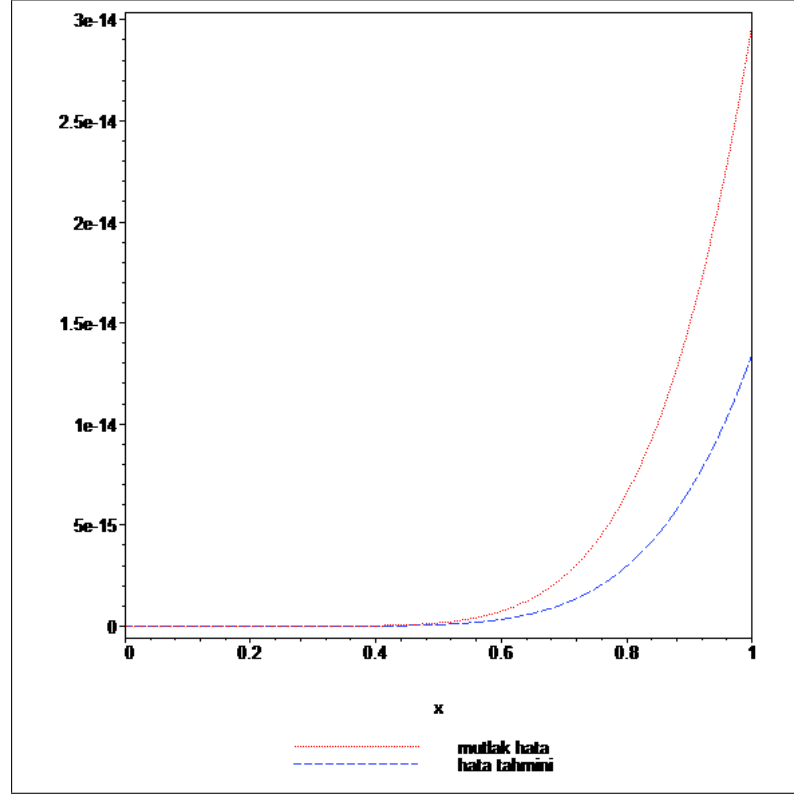
$$y(x) = 1 - 0.5000x^2 + 0.0417x^4 - 0.0001x^5 - 0.0012x^6$$

olarak bulunur. Çizelge 4.3.'de farklı n değerleri ve 20 hanede duyarlılık için bazı noktalardaki mutlak hatalar ve Teorem 3.8.3 kullanılarak elde edilen mutlak hata için üst sınırlar verilmiştir. Ayrıca aynı çizelgede e_{10}^* fonksiyonu ve $f - p_n - e_{10}^*$ fonksiyonlarının sonsuz normları da verilmiştir. $n \leq 12$ için mutlak hatanın sonsuz normu ve $\|e_{10}^*\|_\infty$ sayıları birbirlerine çok yakındır. Mutlak hatalar $n = 14$ 'ten sonra artmaya

Çizelge 4.3. Örnek 4.1.2 için mutlak hatalar, hata tahminleri ve hata yaklaşım fonksiyonunun mutlak hataları(20 H.D.)

n	3	4	5	6
$\ f - p_n\ _\infty$	0.04	$0.99E - 3$	$0.61E - 3$	$0.36E - 4$
$\ e_{10}^*\ _\infty$	0.04	$0.99E - 3$	$0.61E - 3$	$0.36E - 4$
$\ f - p_n - e_{10}^*\ _\infty$	$0.69E - 8$	$0.69E - 8$	$0.69E - 8$	$0.69E - 8$
Üst sınır	13.34	13.63	3.59	2.30
n	7	8	9	10
$\ f - p_n\ _\infty$	$0.16E - 4$	$0.49E - 6$	$0.31E - 6$	$0.98E - 8$
$\ e_{10}^*\ _\infty$	$0.16E - 4$	$0.48E - 6$	$0.31E - 6$	$0.29E - 8$
$\ f - p_n - e_{10}^*\ _\infty$	$0.69E - 8$	$0.69E - 8$	$0.69E - 8$	$0.69E - 8$
Üst sınır	0.58	0.94	2.33	2.67
n	11	12	13	14
$\ f - p_n\ _\infty$	$0.91E - 9$	$0.86E - 10$	$0.46E - 10$	$0.12E - 9$
$\ e_{10}^*\ _\infty$	$0.15E - 10$	$0.10E - 10$	$0.34E - 11$	$0.42E - 11$
$\ f - p_n - e_{10}^*\ _\infty$	$0.92E - 9$	$0.97E - 10$	$0.49E - 11$	$0.13E - 9$
Üst sınır	1.27	3.62	10.67	2.60
n	15	16	17	18
$\ f - p_n\ _\infty$	$0.13E - 9$	$0.34E - 8$	$0.29E - 6$	$0.12E - 5$
$\ e_{10}^*\ _\infty$	$0.19E - 11$	$0.13E - 10$	$0.73E - 10$	$0.10E - 8$
$\ f - p_n - e_{10}^*\ _\infty$	$0.13E - 9$	$0.34E - 8$	$0.29E - 6$	$0.12E - 5$
Üst sınır	1.14	1.87	2.99	1.91
n	19	20		
$\ f - p_n\ _\infty$	$0.19E5$	$0.70E - 4$		
$\ e_{10}^*\ _\infty$	$0.70E - 9$	$0.40E - 7$		
$\ f - p_n - e_{10}^*\ _\infty$	$0.70E - 9$	$0.70E - 4$		
Üst sınır	0.36	0.28		

başlamıştır. Diğer yandan, Teorem 3.8.3 kullanılarak bulunan hata üst sınırları mutlak hataları sınırlamasına karşın, çok kullanışlı bir üst sınır vermemektedir. Bunun bir sebebi, ΔG matrisinin kalan fonksiyonunun 3. mertebe türevinden gelen $n(n+1)(n-1)$ çarpanını içermesidir. Fakat e_{10}^* fonksiyonu ile 20 hanede duyarlılık için sonsuz normunda en iyi yaklaşım olan $n = 13$ sayısının tahmini yapılabilmiş ve deneysel olarak n sayısı 15 ve 13 olarak elde edilmiştir. $n > 12$ için hata tahminini ve Sonuç 3.8.4 ile elde edilen yeni yaklaşımları daha tutarlı hale getirmek için 40 hanede duyarlılık ve $m = 15$ alalım. Bu durumda elde edilen sonuçlar Çizelge 4.4.'te verilmiştir ve sonuçlar Çizelge 4.3.'e göre daha tutarlıdır. $|e_{15}|$ ve $|e_{15}^*|$ fonksiyonlarının grafikleri Şekil 4.3.'de verilmiştir.



Şekil 4.3. Örnek 4.1.2 ve $n = 15$ için mutlak hata ve $|e_{15}^*|$ fonksiyonları

Çizelge 4.4. Örnek 4.1.2 için mutlak hatalar, hata tahminleri ve hata yaklaşım fonksiyonunun mutlak hataları(40 H.D.)

n	11	12	13	14	15
$\ f - p_n\ _\infty$	$0.96E - 9$	$0.86E - 10$	$0.45E - 10$	$0.45E - 12$	$0.31E - 13$
$\ e_{15}^*\ _\infty$	$0.96E - 9$	$0.86E - 10$	$0.45E - 10$	$0.50E - 12$	$0.14E - 13$
$\ e_n - e_{15}^*\ _\infty$	$0.45E - 13$	$0.45E - 13$	$0.45E - 13$	$0.45E - 13$	$0.45E - 13$

Örnek 4.1.3. Tam çözümü $y(x) = e^{-x} \cos x$ olan değişken katsayılı

$$\begin{cases} y'(x) = -y(x) - e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{x}{2}\right) y\left(\frac{x}{2}\right) - 2e^{-\frac{3x}{4}} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{4}\right) y\left(\frac{x}{4}\right), \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

pantograf denklemini ele alalım (Liu ve Li, 2004).

Bernstein seri çözümü $n = 6$ için

$$y(x) = 1 - x + 0.0003x^2 + 0.3314x^3 - 0.1621x^4 + 0.0001x^5 - 0.0298x^6$$

bulunur. Farklı n değerleri için Çizelge 4.5.'te bazı noktalarda mutlak hatanın değerleri 20 hanede duyarlılık için verilmiştir. Çizelge 4.6.'da da mutlak hatalar

Çizelge 4.5. Örnek 4.1.3 için farklı n değerlerinde mutlak hatalar (20 H.D.)

x_i	$n = 6$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
0	0	0	0	0	0
0.2	$0.189E - 5$	$0.503E - 12$	$0.748E - 16$	$0.235E - 11$	$0.298E - 7$
0.4	$0.624E - 6$	$0.398E - 12$	$0.344E - 15$	$0.180E - 11$	$0.229E - 7$
0.6	$0.135E - 5$	$0.285E - 12$	$0.842E - 14$	$0.162E - 10$	$0.305E - 7$
0.8	$0.151E - 5$	$0.130E - 12$	$0.165E - 12$	$0.376E - 8$	$0.259E - 4$
1	$0.477E - 4$	$0.225E - 10$	$0.380E - 11$	$0.157E - 6$	0.011

ve mutlak hataların üst sınırları 40 hanede duyarlılık için verilmiştir.Çizelge 4.5.’ten sabit hanede duyarlılık ile mutlak hataların bir n değerine kadar azaldığı ve sonrasında arttığı görülmektedir. Çizelge 4.6.’dan da Teorem 3.8.3 ile bulunan hata üst sınırlarının mutlak hatayı sınırladığı ve kabul edilebilir hata sınırı oldukları görülmektedir.

Çizelge 4.6. Örnek 4.1.3 için mutlak hatalar, hata tahminleri ve hata yaklaşım fonksiyonunun mutlak hataları

n	8	9	10	11	12
$\ f - p_n\ _\infty$	$0.28E - 7$	$0.80E - 9$	$0.25E - 10$	$0.31E - 11$	$0.13E - 12$
Üst sınır	0.010	0.0037	0.0028	0.0012	$0.26E - 3$
n	13	14	15	16	17
$\ f - p_n\ _\infty$	$0.25E - 14$	$0.52E - 16$	$0.55E - 17$	$0.18E - 18$	$0.50E - 20$
Üst sınır	$0.33E - 4$	$0.18E - 4$	$0.66E - 5$	$0.10E - 5$	$0.10E - 6$
n	18	19	20	21	
$\ f - p_n\ _\infty$	$0.42E - 22$	$0.33E - 23$	$0.90E - 25$	$0.12E - 26$	
Üst sınır	$0.50E - 7$	$0.14E - 7$	$0.19E - 8$	$0.16E - 9$	

4.2. Zayıf Tekil Çekirdekli İntegro-diferansiyel Denklemlerin Bernstein Seri Çözümleri İle İlgili Örnekler

Bu kesimde zayıf çekirdekli singüler integro-diferansiyel denklemlerin Bernstein seri çözümlerine örnekler verilmiştir (Osman vd., 2011a). Örneklerin hata analizleri yapılmış ve hata tahmini yapılarak sonsuz normunda en iyi yaklaşımı veren n sayısı belirlenmiş ve Örnek 4.2.5 için sonuçlar Taylor açılım yöntemi ile kıyaslanmıştır.

Örnek 4.2.1. Tam çözümü $y(x) = x^2$ olan

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) + \int_0^x xy(t)dt + \int_0^x \frac{y(t)}{\sqrt{x-t}}dt = 2 + x^2 + \frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}} + \frac{x^4}{3} \\ y(0) = y'(0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (4.1)$$

lineer zayıf çekirdekli Volterra integro-diferansiyel denklemini ele alalım. $n = 7$ için temel matris denklemi

$$(\mathbf{XB}^2\mathbf{D}^T + \mathbf{XQD}^T + \mathbf{VD}^T)\mathbf{A} = \mathbf{G}$$

ve başlangıç koşulları da

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & ; & \gamma \\ -7 & 7 & 0 & \cdots & 0 & ; & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & ; & 1 \\ -7 & 7 & 0 & \cdots & 0 & ; & 0 \end{bmatrix},$$

olarak elde edilir. Bu elde edilen sistem çözülerek Bernstein katsayılar matrisi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.0476 & 0.1428 & 0.2857 & 0.4762 & 0.7143 & 1 \end{bmatrix}^T$$

olarak elde edilir ve Bernstein seri çözümü $y(x) = \mathbf{B}_7(x)\mathbf{A}$ 'dan

$$y(x) = x^2 + 0.6 \times 10^{-18}x^3 - 0.3 \times 10^{-17}x^4 + 0.7 \times 10^{-17}x^5 - 0.6 \times 10^{-17}x^6 + 0.26 \times 10^{-17}$$

olarak bulunur. Mutlak hatanın bazı değerleri, farklı n 'ler için Çizelge 4.7.'de verilmiştir.

Çizelge 4.7. Örnek 4.2.1'de farklı n ve 20 $H.D.$ için mutlak hatalar

x_i	$n = 7, 20 H.D.$	$n = 15, 20 H.D.$
0	0	0
0.2	$0.1000 E - 20$	$0.4300 E - 19$
0.4	0	$0.1450 E - 17$
0.6	$0.4000 E - 19$	$0.2956 E - 16$
0.8	$0.3000 E - 18$	$0.1208 E - 15$
1	$0.1100 E - 17$	$0.1682 E - 14$

Çizelge 4.8.'de de farklı n değerleri için mutlak hatalar; sonsuz ve 1—normunda e_{12}^* 'ın değerleri ölçülerek hata tahminleri ve Sonuç 3.8.6 ile elde edilen yeni

yaklaşımların sonsuz normları verilmiştir. $n = 2$ için tam çözüm elde edilmiştir ve $\|e_{12}^*\|_\infty$ ile $\|e_{12}^*\|_1$ değerleri de 0 olduğundan $\|e_{12}^*\|_\infty$, $\|e_{12}^*\|_1$ değerleri göz önüne alındığında da en iyi yaklaşımın $n = 2$ 'de olduğu görülmektedir. Hesaplamalar eşit aralıklı sıralama noktaları ve 20 hanede duyarlılık ile yapılmıştır. Hata taminlerinin düşük n 'ler için daha büyük gelmesinin nedenlerinden birisi, başka bir ifade ile e_n fonksiyonuna iyi yaklaşım edilememesinin nedenlerinden birisi, p_n Bernstein seri çözümlerinin (4.1)'de yerine koyulduğu zaman eşitliğin sağ tarafında düzgün olmayan bir fonksiyonun elde edilmiş olmasıdır.

Çizelge 4.8. Örnek 4.2.1 için mutlak hatalar, hata tahminleri ve hata yaklaşım fonksiyonunun mutlak hataları

n	2	3	4	5	6
$\ f - p_n\ _\infty$	0	$0.4E - 19$	$0.11E - 19$	$0.20E - 19$	$3.0E - 19$
$\ e_{12}^*\ _\infty$	0	$0.19E - 10$	$0.19E - 10$	$0.19E - 10$	$0.19E - 10$
$\ f - p_{n,n} - e_{12}^*\ _\infty$	0	$0.19E - 10$	$0.19E - 10$	$0.19E - 10$	$0.19E - 10$
$\ e_{12}^*\ _1$	0	$0.35E - 11$	$0.35E - 11$	$0.35E - 11$	$0.35E - 11$
n	7	8	9	10	
$\ f - p_n\ _\infty$	$1.2E - 18$	$4.2E - 19$	$1.4E - 17$	$4.5E - 18$	
$\ e_{12}^*\ _\infty$	$0.19E - 10$	$0.19E - 10$	$0.19E - 10$	$0.19E - 10$	
$\ f - p_{n,n} - e_{12}^*\ _\infty$	$0.19E - 10$	$0.19E - 10$	$0.19E - 10$	$0.19E - 10$	
$\ e_{12}^*\ _1$	$0.35E - 11$	$0.35E - 11$	$0.35E - 11$	$0.35E - 11$	
n	11	12	20	30	
$\ f - p_n\ _\infty$	$3.4E - 17$	$1.8E - 16$	$2.6E - 12$	$1.2E - 7$	
$\ e_{12}^*\ _\infty$	$0.19E - 10$	$0.19E - 10$	$0.24E - 12$	$0.10E - 6$	
$\ f - p_{n,n} - e_{12}^*\ _\infty$	$0.19E - 10$	$0.19E - 10$	$0.22E - 10$	$2.6E - 8$	
$\ e_{12}^*\ _1$	$0.35E - 11$	$0.35E - 11$	$0.43E - 11$	$0.48E - 8$	

Örnek 4.2.2. Tam çözümü $y(x) = x^2$ olan

$$\begin{cases} \int_0^x \cos(x-t)y''(t)dt = 2\sin x, & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

lineer Volterra integro-diferansiyel denklemini ele alalım (Huang ve Li, 2009). Eşit aralıklı sıralama noktaları kullanılması durumunda $n = 5$ için Bernstein seri çözümü

$$y(x) = x^2 - 0.159 \times 10^{-16}x^3 + 0.281 \times 10^{-16}x^4 - 0.227 \times 10^{-16}x^5$$

olarak elde edilir. Mutlak hatanın bazı noktalardaki değeri, farklı hanede duyarlılık ve n ler için Çizelge 4.9.'da verilmiştir.

Çizelge 4.9. Örnek 4.2.2’de farklı n ve $H.D.$ değerleri için mutlak hatalar

	$n = 2$	$n = 5$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 20$
x_i	20 $H.D.$	20 $H.D.$	20 $H.D.$	20 $H.D.$	40 $H.D.$
0	0	0	0	0	0
0.2	0	$0.37 E - 18$	$0.15 E - 11$	0.0130	$0.20 E - 14$
0.4	0	$0.13 E - 17$	$0.20 E - 11$	0.1598	$0.21 E - 14$
0.6	0	$0.25 E - 17$	$0.23 E - 11$	0.3603	$0.23 E - 14$
0.8	0	$0.32 E - 17$	$0.32 E - 11$	0.6611	$0.26 E - 14$
1	0	$0.10 E - 17$	$0.62 E - 10$	0.8770	$0.95 E - 13$

Hesaplamalarda duyarlılık sayısının yeterince büyük seçilmesinin daha tutarlı sonuçlar verdiği, Çizelge 4.9.’da $n = 20$ için 20 ve 40 hanede duyarlılık ile bulunan sonuçların arasındaki farktan anlaşılmaktadır. $m = 12$ ve 20 hanede duyarlılık için mutlak hatalar, e_{12}^* ve $f - p_n - e_{12}^*$ fonksiyonlarının sonsuz normundaki değerleri Çizelge 4.10.’da verilmiştir. Sonsuz normunda en iyi yaklaşımın hangi n değerinde olduğu, e_{12}^* fonksiyonunun sonsuz normunun ölçümü ile bu örnekte de yapılabilmektedir. Ayrıca, $n \leq 12$ için e_{12}^* ile $f - p_n$ fonksiyonlarının sonsuz normları birbirine yeterince yakındır.

Çizelge 4.10. Örnek 4.2.2 için mutlak hatalar, hata tahminleri ve hata yaklaşım fonksiyonunun mutlak hataları

n	2	3	4	5
$\ f - p_n\ _\infty$	0	$0.10E - 18$	$0.24E - 18$	$0.32E - 17$
$\ e_{12}^*\ _\infty$	0	$0.89E - 19$	$0.23E - 18$	$0.33E - 17$
$\ f - p_n - e_{12}^*\ _\infty$	0	$0.62E - 20$	$0.64E - 20$	$0.14E - 19$
n	6	7	8	9
$\ f - p_n\ _\infty$	$0.86E - 16$	$0.41E - 14$	$0.73E - 13$	$0.22E - 11$
$\ e_{12}^*\ _\infty$	$0.86E - 16$	$0.41E - 14$	$0.72E - 13$	$0.22E - 11$
$\ f - p_n - e_{12}^*\ _\infty$	$0.33E - 19$	$0.15E - 16$	$0.23E - 15$	$0.44E - 14$
n	10	11	12	20
$\ f - p_n\ _\infty$	$0.62E - 10$	$0.14E - 8$	$0.23E - 8$	$0.16E - 5$
$\ e_{12}^*\ _\infty$	$0.63E - 10$	$0.14E - 8$	$0.28E - 8$	$0.84E - 8$
$\ f - p_n - e_{12}^*\ _\infty$	$0.73E - 12$	$0.17E - 8$	$0.60E - 9$	$0.16E - 5$

Örnek 4.2.3. r pozitif sayı olmak üzere

$$\int_0^x \frac{y(t)}{\sqrt{x-t}} dt = x^r, \quad 0 < x < 1 \quad (4.2)$$

Abel integral denklemini ele alalım (Singh vd., 2009). (4.2)'in tam çözümü

$$y(x) = \frac{2^{2r-1}}{\pi} r \frac{(\Gamma(r))^2}{\Gamma(2r)} x^{r-\frac{1}{2}}$$

ile verilir (Singh vd., 2009). $r = 2$, $n = 5$ ve 30 hanede duyarlılık için yaklaşık çözüm

$$y(x) = -0.9267 \times 10^{-12} + 0.1390x + 1.4744x^2 - 1.6657x^3 \\ + 1.3492x^4 - 0.4490x^5$$

olarak bulunur. Mutlak hatalar Çizelge 4.11.'de farklı r ve n için verilmiştir. Bulunan sonuçlar Singh vd (2009)'de bulunan sonuçlardan $n = 5$, $r = 1.5$ için daha iyidir.

Çizelge 4.11. Örnek 4.2.3 için farklı n ve r değerlerinde mutlak hatalar (30 H.D.)

x_i	$n = 5,$ $r = 2$	$n = 5,$ $r = 8$	$n = 5,$ $r = 1.5$	$n = 12,$ $r = 8$	$n = 5,$ $r = 2$
0	$0.9E-32$	$0.8E-32$	$0.8E-60$	$0.14E-37$	$0.3E-32$
0.2	$0.45E-3$	$0.19E-2$	0	$0.30E-10$	$0.44E-6$
0.4	$0.11E-3$	$0.11E-2$	$0.1E-29$	$0.14E-10$	$0.16E-6$
0.6	$0.13E-3$	$0.15E-2$	$0.1E-29$	$0.19E-10$	$0.86E-7$
0.8	$0.18E-3$	$0.34E-2$	0	$0.61E-10$	$0.50E-7$
1	$0.77E-3$	$1.79E-2$	$0.46E-8$	$0.175E-4$	$0.17E-4$

Örnek 4.2.4. Tam çözümü $y(x) = 1 + xe^x$ olan

$$\begin{cases} y^{(4)}(x) - y(x) = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x + \frac{11}{3}e^x - \frac{1}{9}x^3e^x + \frac{1}{3}\int_0^x te^{x-t}y(t)dt, & 0 \leq x, t \leq 4 \\ y(0) = y'(0) = 1, y''(0) = 2, y'(2) = 3 \end{cases}$$

lineer Volterra integro-differansiyel denklemini ele alalım. Eşit aralıklı noktalar kullanılarak $n = 10$ için Bernstein seri çözümü

$$y(x) = 1 + x + x^2 + 0.5x^3 + 0.1667x^4 + 0.0410x^5 + 0.0095x^6 \\ + 0.3032 \times 10^{-3}x^7 + 0.6998 \times 10^{-3}x^8 - 0.9860 \times 10^{-4}x^9 \\ + 0.1664 \times 10^{-4}x^{10}$$

olarak bulunur. Farklı hanede duyarlılık ve n 'ler için mutlak hatalar Çizelge 4.12.'de verilmiştir. Çizelge 4.12.'den yüksek hanede duyarlılık ile bulunan yaklaşımın daha tutarlı olduğu görülebilir.

Çizelge 4.12. Örnek 4.2.4’de farklı n ve $H.D.$ değerleri için mutlak hatalar

	$n = 10$	$n = 20$	$n = 20$
x_i	20 $H.D.$	30 $H.D.$	50 $H.D.$
0	0	0	0
0.4	$0.3231E - 5$	$0.5961E - 5$	$0.8339E - 15$
0.8	$0.4898E - 4$	$0.6184E - 4$	$0.8677E - 14$
1.2	$0.1962E - 3$	$0.2262E - 3$	$0.3183E - 13$
1.6	$0.5048E - 3$	$0.5599E - 3$	$0.7888E - 13$
2	$0.1007E - 2$	$0.1131E - 2$	$0.1595E - 12$
2.4	$0.1624E - 2$	$0.2028E - 2$	$0.2860E - 12$
2.8	$0.2396E - 2$	$0.3381E - 2$	$0.4770E - 12$
3.2	$0.3866E - 2$	$0.5433E - 2$	$0.7618E - 12$
3.6	$0.6236E - 2$	$0.8314E - 2$	$0.1223E - 11$
4	$0.7679E - 2$	$0.1806E - 1$	$0.1242E - 11$

$m = 15$ ve 30 hanede duyarlılık için mutlak hatalar, e_{15}^* ve $f - p_n - e_{15}^*$ fonksiyonlarının sonsuz normundaki değerleri Çizelge 4.13.’te verilmiştir. $n \neq 15$ için e_{15}^* ile $f - p_n$ fonksiyonlarının sonsuz normları birbirine yeterince yakındır. $n = 13$ için mutlak hata ve $|e_{15}^*|$ fonksiyonları Şekil 4.4.’te verilmiştir.

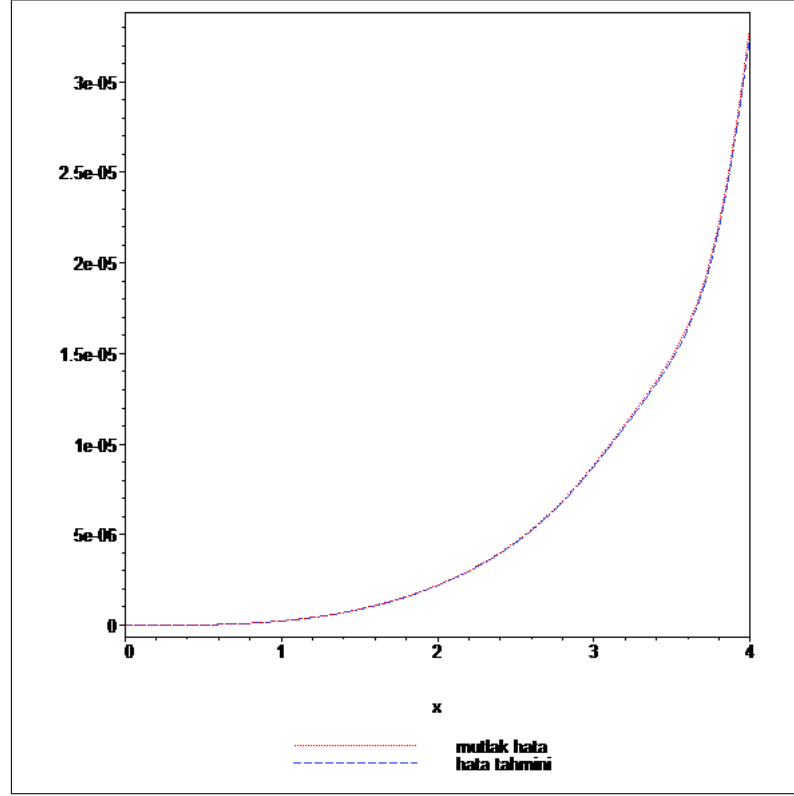
Çizelge 4.13. Örnek 4.2.4 için mutlak hatalar, hata tahminleri ve hata yaklaşım fonksiyonunun mutlak hataları

n	10	11	12	13	14
$\ f - p_n\ _\infty$	0.0076	0.0021	$1.65E - 4$	$3.31E - 5$	$0.25E - 5$
$\ e_{15}^*\ _\infty$	0.0076	0.0021	$1.65E - 4$	$3.27E - 5$	$0.26E - 5$
$\ e_n - e_{15}^*\ _\infty$	$0.41E - 6$	$0.41E - 6$	$0.41E - 6$	$0.41E - 6$	$0.41E - 6$
n	15	16	17	18	
$\ f - p_n\ _\infty$	$0.41E - 6$	$0.23E - 7$	$0.11E - 7$	$0.10E - 5$	
$\ e_{15}^*\ _\infty$	$0.96E - 11$	$0.11E - 7$	$0.22E - 7$	$0.22E - 5$	
$\ e_n - e_{15}^*\ _\infty$	$0.41E - 6$	$0.34E - 7$	$0.39E - 7$	$0.10E - 5$	

Örnek 4.2.5. Tam çözümü $1 + x + x^2$ olan

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{y''(t)}{\sqrt{x-t}} dt = 3 + x + x^2 + \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}, & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$$

zayıf singüler çekirdekli Volterra integro-diferansiyel denklemini ele alalım.



Şekil 4.4. Örnek 4.2.4 ve $n = 13$ için mutlak hata ve $|e_{15}^*|$ fonksiyonları

$n = 5$ için Bernstein seri çözümü

$$y(x) = 1 + x + x^2 + 0.1 \times 10^{-18}x^5$$

olarak bulunur. Böylece, yaklaşımın mutlak hatası

$$\|f - p_5\|_{\infty} = 0.1 \times 10^{-18}$$

olarak bulunur. $n = 2$ ve $n = 4$ için bulunan yaklaşımlar Taylor açılım yöntemi (Huang ve Li, 2009) ile kıyaslanarak Çizelge 4.14.'te verilmiştir.

4.3. Yüksek Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemlerin Rasyonel Fonksiyon Çözümü İle İlgili Örnekler

Bu kesimde, Bölüm 3.4.'te verilen Bernstein seri çözümü ve Floater ve Hormann (2006) tarafından verilen rasyonel interpolasyona dayanan r rasyonel fonksiyonu

Çizelge 4.14. Örnek 4.2.5 için farklı n değerlerinde Bernstein seri çözümünün Taylor açılım yöntemi ile kıyaslanması

x_i	Bernstein seri yöntemi		Taylor açılım yöntemi	
	$n = 2$	$n = 4$	$n = 2$	$n = 4$
0	0	0	0	0
0.2	0.0014	$0.1452E - 4$	$0.7211E - 3$	$0.1372E - 3$
0.4	0.0118	$0.3655E - 4$	0.0099	0.0015
0.6	0.0421	$0.3186E - 4$	0.0514	0.0063
0.8	0.1055	$0.3220E - 3$	0.1824	0.0172
1	0.2182	0.0021	0.5355	0.0369

kullanılarak yüksek mertebe lineer diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri bulunacaktır. Bulunan bu rasyonel fonksiyon çözümleri, Örnek 4.3.4'te diğer bazı metotlarla kıyaslanarak verilmiştir (Osman vd., 2011b).

Örnek 4.3.1. Tam çözümü $y(x) = \sin x$ olan ikinci mertebe lineer

$$\begin{cases} y''(x) + xy'(x) - 2y(x) = x \cos x - 3 \sin x, & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 0, & y'(0) = 1 \end{cases}$$

başlangıç değer problemini düşünelim. $n = 7$ ve $d = 5$ için

$$r(x) = \frac{\sum_{i=0}^{7-5} \lambda_i(x) p_i(x)}{\sum_{i=0}^{7-5} \lambda_i(x)} \quad (4.3)$$

rasyonel fonksiyon çözümünü bulalım. Eşit aralıklı sıralama noktaları

$$\left\{ 0, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \dots, 1 \right\}$$

seçilmiş olsun. Bölüm 2.5.1.'den, p_0f , p_1f ve p_2f interpolasyon polinomları sırasıyla f fonksiyonunun $\{0, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \dots, \frac{5}{7}\}$, $\{\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \dots, \frac{6}{7}\}$ ve $\{\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \dots, 1\}$ noktalarındaki interpolasyon polinomlarıdır. $\{0, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \dots, \frac{5}{7}\}$ noktalarından geçen p_0 Bernstein seri çözümü için temel matris denklemi

$$\mathbf{WA} = (\mathbf{XB}^2\mathbf{D}^T - \mathbf{P}_1\mathbf{XBD}^T - \mathbf{XD}^T) \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

olarak elde edilir öyle ki

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{7} & (\frac{1}{7})^2 & (\frac{1}{7})^3 & (\frac{1}{7})^4 & (\frac{1}{7})^5 \\ 1 & \frac{2}{7} & (\frac{2}{7})^2 & (\frac{2}{7})^3 & (\frac{2}{7})^4 & (\frac{2}{7})^5 \\ 1 & \frac{3}{7} & (\frac{3}{7})^2 & (\frac{3}{7})^3 & (\frac{3}{7})^4 & (\frac{3}{7})^5 \\ 1 & \frac{4}{7} & (\frac{4}{7})^2 & (\frac{4}{7})^3 & (\frac{4}{7})^4 & (\frac{4}{7})^5 \\ 1 & \frac{5}{7} & (\frac{5}{7})^2 & (\frac{5}{7})^3 & (\frac{5}{7})^4 & (\frac{5}{7})^5 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.29 \\ -0.57 \\ -0.86 \\ -1.14 \\ -1.43 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & -20 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 30 & -30 & 10 & 0 & 0 \\ 5 & -20 & 30 & -20 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & -10 & 10 & -5 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{7} \end{bmatrix}$$

matrisleridir. Başlangıç koşulları için matris formları

$$\mathbf{U}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

için

$$\mathbf{U}_0 \mathbf{A} = [0],$$

$$\mathbf{U}_1 \mathbf{A} = [1]$$

olur ve sonuçta $[\tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{G}}]$ matrisi

$$[\tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} 18 & -40 & 20 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 11.28 & -19.53 & 0.99 & 4.27 & 0.94 & 0.06 & ; & -0.29 \\ 6.54 & -6.80 & -7.06 & 2.24 & 2.60 & 0.47 & ; & -0.57 \\ 3.38 & 0.02 & -7.53 & -2.75 & 3.27 & 1.62 & ; & -0.86 \\ -5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Bu sistemin çözümü olan $\mathbf{A}$ matrisi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0.20 & 0.40 & 0.58 & 0.73 & 0.84 \end{bmatrix}^T$$

ve yaklaşık çözüm

$$p_0(x) = x - 0.16669x^3 + 0.00012x^4 + 0.00812x^5$$

olarak hesaplanır. Benzer şekilde, $\{\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \dots, \frac{6}{7}\}$ ve $\{\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \dots, 1\}$ noktaları kullanılarak elde edilen p_1 ve p_2 polinomları

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x + 0.578 \times 10^{-4}x^2 - 0.16669x^3 + 0.00059x^4 + 0.00778x^5 \\ p_2(x) &= x + 0.395 \times 10^{-3}x^2 - 0.16779x^3 + 0.00164x^4 + 0.00729x^5 \end{aligned}$$

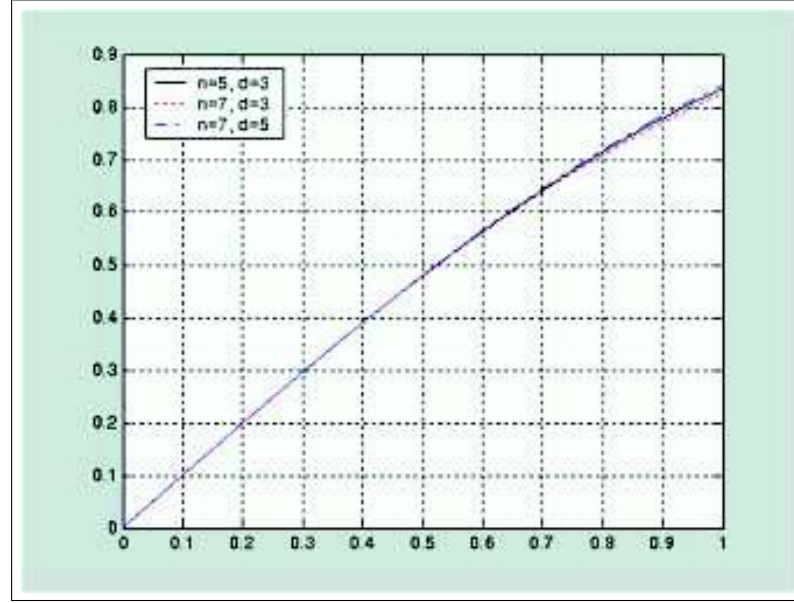
olarak bulunur. Bunlar 4.3'te yerine konursa,

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{0.7631 \times 10^{-2}x(x^2 + 6.7176x + 11.4986)}{x^2 - x + 0.8571} \\ &\quad \times (x^2 - 1.0001x + 0.8572)(x^2 - 6.6567x + 11.3963) \end{aligned}$$

ve

$$\|y - r\|_{\infty} = 0.7806 \times 10^{-4}$$

olarak elde edilir. Şekil 4.5. ve Şekil 4.6.'da farklı n ve d değerleri için yaklaşık çözümler ve tam çözüm fonksiyonu çizilmiştir.



Şekil 4.5. Örnek 4.3.1'de farklı n, d değerleri için yaklaşık çözümler

Örnek 4.3.2. Altıncı mertebe, lineer

$$\begin{cases} y^{(6)}(x) + e^{-x}y(x) = -720 + (x - x^2)^3 e^{-x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = y(1) = y'(1) = y''(1) = 0 \end{cases}$$

sınır değer problemi ele alalım. Problemin tam çözümü $y(x) = x^3(1 - x)^3$ polinomudur (Lamnii vd., 2008). $n = 12$ ve $d = 8$ için yaklaşık çözüm

$$r(x) = \frac{-0.12 \times 10^{-17} x^3 (x-1)(x^2 + 0.5x + 8.33 \times 10^{17})}{x^2 - x + 0.36} \times (x^2 - x + 0.36)(x^2 - 2x + 1)$$

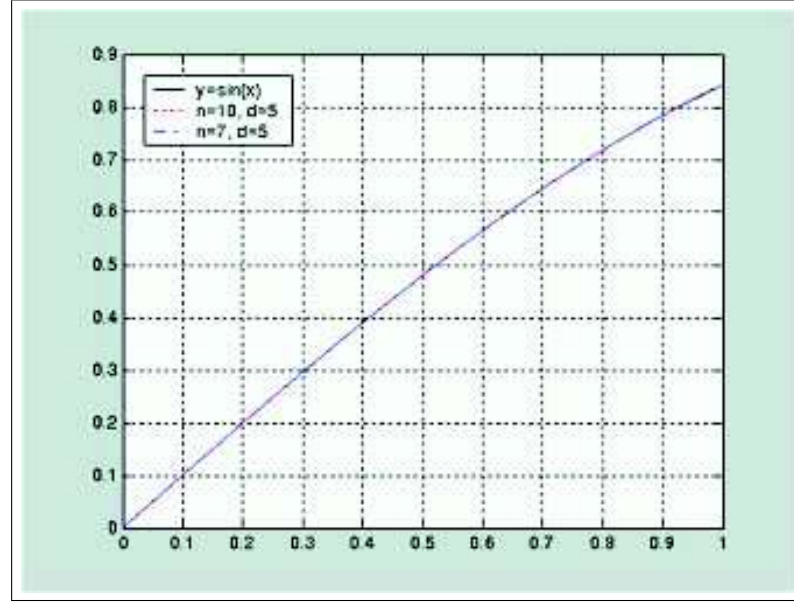
olarak bulunur ve hata

$$\|y - r\|_{\infty} = 3.1419 \times 10^{-19} \quad (4.4)$$

olarak hesaplanır. Tam çözüm C^{∞} sınıfından olduğundan Teorem 2.5.7'den hata

$$\|r - y\|_{\infty} \leq \frac{1}{12^9} \left(\frac{\|y^{(d+2)}\|_{\infty}}{10} + \frac{\|y^{(d+1)}\|_{\infty}}{9} \right) = 0.3784 \times 10^{-10}$$

ile sınırlıdır ve bu sınır (4.4) ile tutarlıdır. Tam çözüm ile $n = 12$, $d = 8$ ve $n = 15$, $d = 8$ için r yaklaşık çözümleri Şekil 4.7.'de verilmiştir.



Şekil 4.6. Örnek 4.3.1’de farklı n değerleri için yaklaşık çözümler ve tam çözüm

Örnek 4.3.3. Sekizinci mertebe lineer

$$\begin{cases} y^{(8)}(x) + xy(x) = -(48 + 15x + x^3)e^x, & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = y''(0) = 0, y'(0) = 1, y'''(0) = -3, \\ y(1) = 0, y'(1) = -e, y''(1) = -4e, y'''(1) = -9e \end{cases}$$

sınır değer problemini ele alalım. Eğer çözümün var olduğu kabul edilirse, $n = 12$, $d = 10$ ve $n = 12$, $d = 5$ için sırasıyla

$$r_1(x) = \frac{-0.27 \times 10^{-4} x(x-1)(x^2 + 5.88x + 9.16)(x^2 + 4.28x + 10.07)}{x^2 - x + 0.9167} \times (x^2 + 1.38x + 14.83)(x^2 - x + 0.92)(x^2 - 4.27x + 26.68)$$

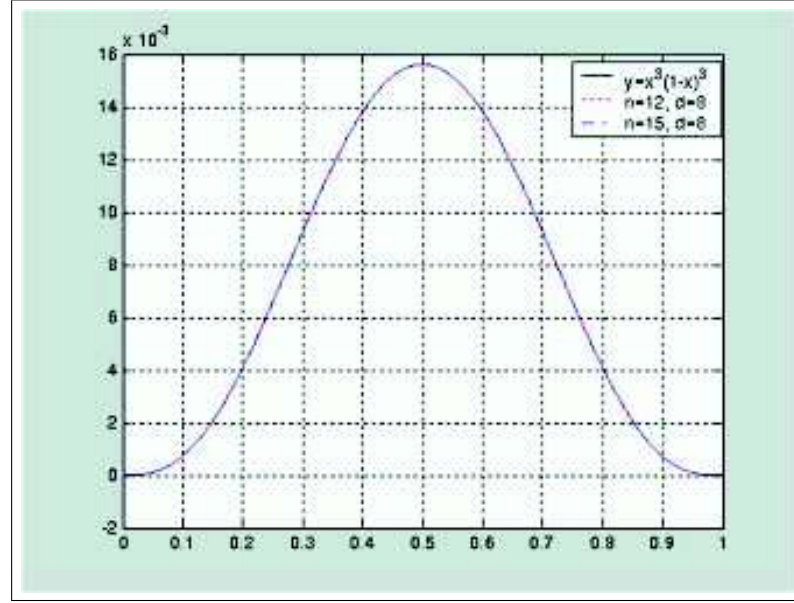
ve

$$r_2(x) = x - \frac{1}{2}x^3 - 3x^4 + \frac{5}{2}x^5 + (x^4 - x^5)e$$

elde edilir. Tam çözüm C^7 sınıfından olduğu için 2.5.7’den

$$\|r_1 - y\|_\infty \leq \|r_1 - r_2\|_\infty + \|r_2 - y\|_\infty \leq O(h^6) + 1.2967 \times 10^{-3}$$

olarak bulunur ve bu da kabul edilebilir bir hata sınırıdır.



Şekil 4.7. Örnek 4.3.2’de farklı n değerleri için yaklaşık çözümler ve tam çözüm

Örnek 4.3.4. Tam çözümünü $x(1-x)e^x$ olan

$$\begin{cases} y^{(4)}(x) + xy(x) = -(8 + 7x + x^3)e^x, & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = y''(0) = 0, y(1) = 0, y''(1) = -4e \end{cases}$$

sınır değer problemini ele alalım. $n = 32, d = 30$ ve $n = 16, d = 15$ için yaklaşımların hatası, diğer bazı metotlarla kıyaslanarak Çizelge 4.15.’te verilmiştir.

4.4. Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Bernstein Seri Çözümleri İle İlgili Örnekler

Bu kesimde, ikinci mertebeden lineer kısmi diferansiyel denklemlerin Bernstein seri çözümlerine örnekler verilecektir. Ele alınan her bir örnek için mutlak hatalar, $e_{m,m}^*$ hataya yaklaşım fonksiyonları ve Sonuç 3.8.9 ile verilen yeni yaklaşım polinomunun sonsuz normundaki değerleri verilecektir. $e_{m,m}^*$ kullanılarak hangi n değeri için sonsuz normunda en iyi yaklaşımın elde edilebileceği tahmin edilmeye çalışılacaktır.

Çizelge 4.15. Örnek 4.3.3'te Bernstein seri çözümünün diğer bazı yöntemlerle kıyaslanması

Yöntemler ($h = \frac{1}{n}$)	$h = 32$	$h = 16$
Rasyonel fonksiyon çözümü	$2.19E - 15$	$1.50E - 13$
Nonpolynomial Spline Tekniği (Abd El-Salam ve Zaki, 2010)	$5.79E - 13$	$2.22E - 11$
Quartic spline sıralama yöntemi (Zhu, 2001)	$4.75E - 12$	$2.98E - 10$
Sonlu farklar yöntemi (Al-Said ve Noor, 2004)	$5.02E - 11$	$3.12E - 9$
Quintic nonpolynomial spline çözümü (Ramadan vd., 2009)	$1.49E - 9$	$2.27E - 8$
Nonpolynomial spline çözümü (Ramadan vd., 2008)	$2.20E - 10$	$1.30E - 8$
Cubic splines yöntemi (Al-Said vd., 2006)	$3.71E - 5$	$1.47E - 4$
Quartic splines yöntemi (Al-Said ve Noor,)	$5.40E - 5$	$2.16E - 4$
Quartic splines yöntemi (Usmani, 1992)	$2.70E - 5$	$1.08E - 4$
Smooth spline çözümü (Usmani ve Warsi, 1980)	$5.88E - 5$	$6.39E - 4$

Örnek 4.4.1. İlk olarak Dirichlet sınır koşullarıyla verilmiş olan Laplace denklemini

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \\ u(x, 0) = u(x, 1) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right), \\ u(0, y) = \frac{\cosh\left(\frac{\pi y}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}, u(1, y) = 0 \end{cases}, \quad (4.5)$$

ele alalım. Problemin tam çözümü

$$u(x, y) = \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cosh\left(\frac{\pi y}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

dir (Doha ve Abd-Elhameed, 2005). (4.5) denkleminin Bernstein seri çözümünü $0 \leq x, y \leq 1$ için bulalım. (4.5) denkleminin temel matris denklemi

$$[\mathbf{X}(x)\mathbf{B}^2\mathbf{D}^T\bar{\mathbf{Y}}(y)\bar{\mathbf{D}} + \mathbf{X}(x)\mathbf{D}^T\bar{\mathbf{Y}}(y)\bar{\mathbf{B}}^2\bar{\mathbf{D}}] \mathbf{A} = 0$$

olur. Sıralama noktaları olarak Chebyshev polinomlarının kökleri seçilirse, yani

$$\left\{ (x_i, y_j) : 0 \leq i, j \leq n, x_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right), y_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2j-1}{2n}\pi\right) \right\}$$

alınırsa, $\mathbf{W}$ matrisi her bir satırı $\mathbf{X}(x_i)\mathbf{B}^2\mathbf{D}^T\bar{\mathbf{Y}}(y_j)\bar{\mathbf{D}} + \mathbf{X}(x_i)\mathbf{D}^T\bar{\mathbf{Y}}(y_j)\bar{\mathbf{B}}^2\bar{\mathbf{D}}$ olan matris olup $\mathbf{G}$ matrisi sıfır matrisidir. Koşulların matris denklemleri de $u(x, 0) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ için

$$p_{n,n}(x_i, 0) = \mathbf{X}(x_i)\mathbf{D}^T\bar{\mathbf{Y}}(0)\bar{\mathbf{D}}\mathbf{A} = \cos\left(\frac{\pi x_i}{2}\right), i = 0, 1, \dots, n,$$

$u(x, 1) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ için

$$p_{n,n}(x_i, 1) = \mathbf{X}(x_i)\mathbf{D}^T\bar{\mathbf{Y}}(1)\bar{\mathbf{D}}\mathbf{A} = \cos\left(\frac{\pi x_i}{2}\right), i = 0, 1, \dots, n,$$

$u(0, y) = \frac{\cosh\left(\frac{\pi y}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ için

$$p_{n,n}(0, y_i) = \mathbf{X}(0)\mathbf{D}^T\bar{\mathbf{Y}}(y_i)\bar{\mathbf{D}}\mathbf{A} = \frac{\cosh\left(\frac{\pi y_i}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}, i = 0, 1, \dots, n$$

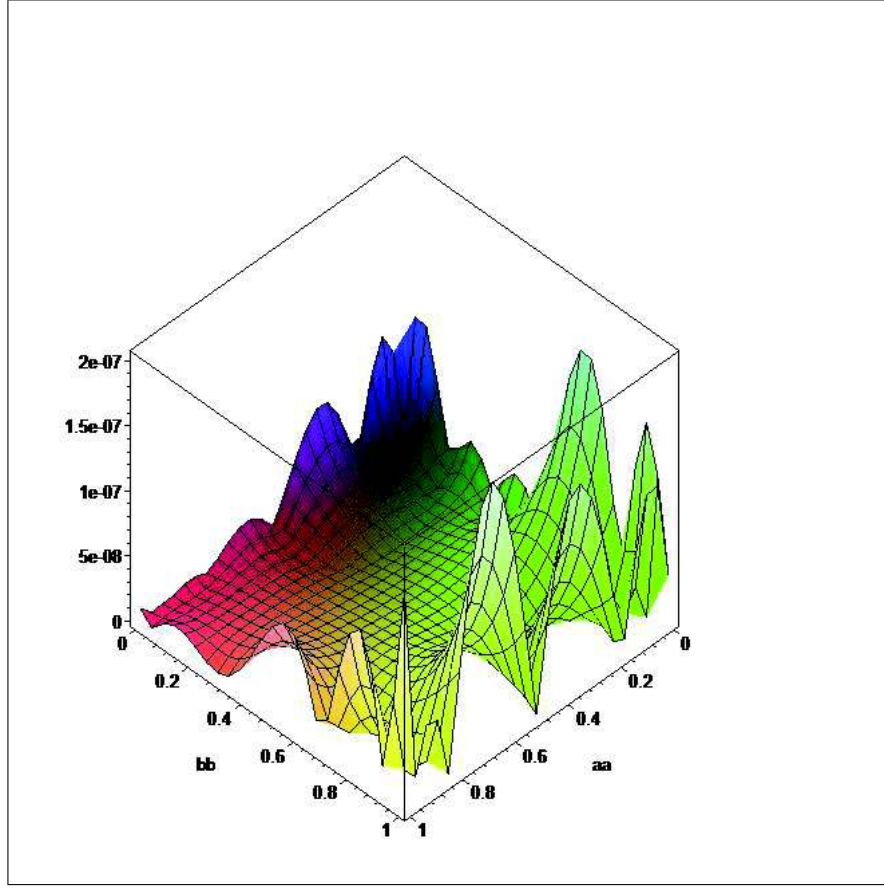
ve $u(1, y) = 0$ için

$$p_{n,n}(1, y_i) = \mathbf{X}(1)\mathbf{D}^T\bar{\mathbf{Y}}(y_i)\bar{\mathbf{D}}\mathbf{A}, i = 0, 1, \dots, n$$

olup bunlara karşılık gelen matrisler $[\mathbf{W}, \mathbf{G}]$ matrisine eklenerek $[\tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{G}}]$ elde edilir.

Gauss satır indirgeme ile $[\bar{\mathbf{W}}, \bar{\mathbf{G}}]$ matrisi ve sonuçta $\mathbf{A}$ matrisi elde edilmiş olur. Farklı n değerleri için sonuçlar elde edilmiş ve mutlak hata fonksiyonları aşağıda eşit aralıklı noktalar ve 20 hanede duyarlılık için Çizelge 4.16.' da, eşit aralıklı noktalar ve 40 hanede duyarlılık için Çizelge 4.17.' de sonsuz normuna göre verilmiştir. 20 ve 40 hanede duyarlılık için Chebyshev sıralama noktaları kullanılarak elde edilen sonuçlar da sırasıyla Çizelge 4.18. ve Çizelge 4.19.'da verilmiştir. Ayrıca $m = 10$ alınarak $e_{10,10}^*$ ve $f - p_{n,n} - e_{10,10}^*$ fonksiyonları da elde edilmiş ve sonsuz normunda büyüklükleri de verilmiştir. $n = 8$ için Chebyshev sıralama noktalarında elde edilen mutlak hata ve $e_{10,10}^*$ fonksiyonlarının grafikleri sırasıyla Şekil 4.8., Şekil 4.9.'de verilmiştir.

Chebyshev sıralama noktaları kullanılarak elde edilen yaklaşımların mutlak hataları eşit aralıklı sıralama noktaları ile elde edilen yaklaşımların mutlak hatalarından daha

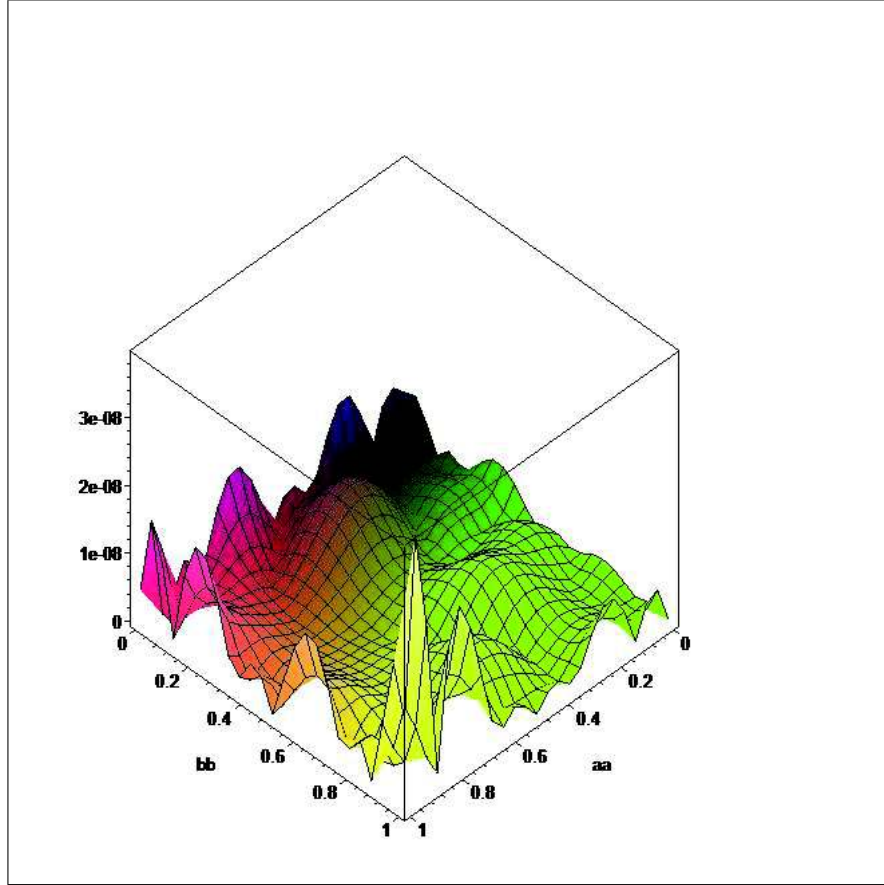


Şekil 4.8. Örnek 4.4.1 ve $n = 8$ için mutlak hata fonksiyonu

iyidir. $e_{10,10}^*$ 'ın sonsuz normu ile mutlak hata fonksiyonunun sonsuz normu eşit aralıklı sıralama noktalarında birbirine yakın olup $n \leq 11$ için $p_{n,n} - e_{10,10}^*$ yaklaşımları sonsuz normunda Bernstein seri çözümlerinden daha iyidir. n büyüdükçe eşit aralıklı sıralama noktaları kullanılması durumunda $n = asal$ için elde edilen sonuçlar hesaplama hataları büyüdüğü için kötüleşmektedir. Chebyshev sıralama noktaları kullanıldığında $n \geq 10$ için $e_{10,10}^*$ 'ın sonsuz normu ile mutlak hata fonksiyonunun sonsuz normu birbirine yakındır ve $n \leq 7$ için $\|e_{10,10}^*\|_\infty$ sıfıra yakın olup mutlak hataların sonsuz normlarını temsil etmemektedir. Bu durum, $e_{10,10}^*$ hesaplanırken sıralama noktalarının değiştirilmesi ile giderilebilir.

Örnek 4.4.2. $\Omega_0 \subset \Omega = \{(x,y) : 0 \leq x,y \leq 1\}$ için eliptik, lineer ve değişken katsayılı genelleştirilmiş Poisson denklemi Ω_0 üzerinde Dirichlet sınır koşulları ile

$$\begin{cases} x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2x^2 y^2 e^{xy}, \\ u(x, 0) = 1, u(x, 1) = e^x, \\ u(0, y) = 1, u(1, y) = e^y \end{cases}$$



Şekil 4.9. Örnek 4.4.1 ve $n = 8$ için $|e_{10,10}^*|$ fonksiyonu

olarak verilir. Bu problemin analitik çözümü

$$f(x,y) = e^{xy}$$

fonksiyonudur (Kong ve Wu, 2009). Elde edilen yaklaşımların mutlak hataları, $m = 10$ alınarak elde edilen $e_{10,10}^*$ fonksiyonları ve $f - p_{n,n} - e_{10,10}^*$ fonksiyonlarının sonsuz normundaki büyüklükleri Çizelge 4.20.'de 20 hanede duyarlılık için verilmiştir. Hesaplamalarda, Bernstein seri çözümü için Chebyshev interpolasyon noktaları ve $e_{10,10}^*$ için eşit aralıklı sıralama noktaları seçilmiştir.

Sonsuz normunda yapılan en iyi yaklaşımın $n = 11$ için olduğu Çizelge 4.20.'den görülmektedir. Ayrıca, $\|e_{10,10}^*\|_{\infty}$ değerinin en az olduğu değer de $n = 11$ 'de olup $e_{10,10}^*$ fonksiyonu $f - p_{n,n}$ fonksiyonuna sonsuz normunda çok yakındır. $e_{10,10}^*$ fonksiyonu kullanılarak elde edilen yeni yaklaşımın mutlak hatasının sonsuz normundaki değeri de $f - p_{n,n}$ mutlak hata fonksiyonunun sonsuz normuna oldukça yakındır.

Çizelge 4.16. Örnek 4.4.1’de eşit aralıklı sıralama noktaları için mutlak hatalar, hata tahminleri ve hata yaklaşım fonksiyonunun mutlak hataları (20 H.D.)

n	5	6	7	8	9
$\ e_{n,n}\ _{\infty}$	0.14	0.0006	0.0006	$2.0E-5$	$3.0E-7$
$\ e_{10,10}^*\ _{\infty}$	0.14	0.0003	0.0006	$2.0E-5$	$3.0E-7$
$\ e_{n,n} - e_{10,10}^*\ _{\infty}$	0.0055	0.0006	$1.7E-5$	$3.95E-8$	$9.7E-9$
n	10	11	12	13	14
$\ e_{n,n}\ _{\infty}$	$2.0E-6$	0.017	$1.9E-9$	0.92	0.0015
$\ e_{10,10}^*\ _{\infty}$	$2.0E-6$	0.018	$3.5E-8$	2.5	0.016
$\ e_{n,n} - e_{10,10}^*\ _{\infty}$	$7.0E-10$	0.016	$3.5E-8$	2.5	0.016
n	15	16	17	18	19
$\ e_{n,n}\ _{\infty}$	$6.0E-7$	$1.4E-5$	x	x	x
$\ e_{10,10}^*\ _{\infty}$	$2.0E-6$	$9.2E-5$	x	x	x
$\ e_{n,n} - e_{10,10}^*\ _{\infty}$	$2.0E-6$	$9.2E-5$	x	x	x

Çizelge 4.17. Örnek 4.4.1’de eşit aralıklı sıralama noktaları için mutlak hatalar, hata tahminleri ve hata yaklaşım fonksiyonunun mutlak hataları (40 H.D.)

n	5	6	7	8	9
$\ e_{n,n}\ _{\infty}$	0.14	0.0006	0.0006	$2.0E-5$	$3.0E-7$
$\ e_{10,10}^*\ _{\infty}$	0.14	0.0003	0.0006	$2.0E-5$	$3.0E-7$
$\ e_{n,n} - e_{10,10}^*\ _{\infty}$	0.0055	0.0006	$1.7E-5$	$3.9E-8$	$9.7E-9$
n	10	11	12	13	14
$\ e_{n,n}\ _{\infty}$	$2.0E-6$	$1.4E-6$	$2.1E-9$	$1.25E-9$	$2.8E-12$
$\ e_{10,10}^*\ _{\infty}$	$2.0E-6$	$3.1E-6$	$3.6E-8$	$2.5E-8$	$4.5E-10$
$\ e_{n,n} - e_{10,10}^*\ _{\infty}$	$7.5E-10$	$3.0E-6$	$3.6E-8$	$2.5E-8$	$4.5E-10$
n	15	16	17	18	19
$\ e_{n,n}\ _{\infty}$	$9.0E-15$	$8.5E-15$	$5.5E-9$	$3.2E-18$	$4.3E-6$
$\ e_{10,10}^*\ _{\infty}$	$8.0E-14$	$1.0E-13$	$1.2E-7$	$1.2E-17$	$3.4E-5$
$\ e_{n,n} - e_{10,10}^*\ _{\infty}$	$8.0E-14$	$1.0E-13$	$1.2E-7$	$1.2E-17$	$3.4E-5$

Örnek 4.4.3. $\Omega = \{(x,y) : 0 \leq x,y \leq 1\}$ için değişken katsayılı ikinci mertebe hiperbolik kısmi diferansiyel denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{2}x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (4.6)$$

Çizelge 4.18. Örnek 4.4.1’de Chebyshev sıralama noktaları için mutlak hatalar, hata tahminleri ve hata yaklaşım fonksiyonunun mutlak hataları (20 H.D.)

n	5	6	7	8	9
$\ e_{n,n}\ _{\infty}$	0.0008	0.00015	$4.2E-5$	$2.0E-7$	$7.0E-8$
$\ e_{10,10}^*\ _{\infty}$	$5.0E-19$	$1.6E-18$	$1.5E-17$	$1.5E-17$	$1.5E-17$
$\ e_{n,n} - e_{10,10}^*\ _{\infty}$	0.0008	0.00016	$4.5E-5$	$2.4E-7$	$8.0E-8$
n	10	11	12	13	14
$\ e_{n,n}\ _{\infty}$	$9.0E-10$	$5.0E-10$	$1.70E-11$	$1.7E-13$	$2.5E-13$
$\ e_{10,10}^*\ _{\infty}$	$6.0E-10$	$1.5E-10$	$1.55E-12$	$1.1E-13$	$5.1E-13$
$\ e_{n,n} - e_{10,10}^*\ _{\infty}$	$9.8E-10$	$4.8E-10$	$1.70E-11$	$1.7E-13$	$5.1E-13$
n	15	16	17	18	19
$\ e_{n,n}\ _{\infty}$	$2.0E-12$	$2.5E-12$	$8.2E-12$	$4.0E-11$	$9.1E-10$
$\ e_{10,10}^*\ _{\infty}$	$1.4E-13$	$2.9E-12$	$1.8E-11$	$3.0E-11$	$7.7E-10$
$\ e_{n,n} - e_{10,10}^*\ _{\infty}$	$1.9E-12$	$4.2E-12$	$1.8E-11$	$3.6E-11$	$1.7E-9$

Çizelge 4.19. Örnek 4.4.1’de Chebyshev sıralama noktaları için mutlak hatalar, hata tahminleri ve hata yaklaşım fonksiyonunun mutlak hataları (40 H.D.)

n	5	6	7	8	9
$\ e_{n,n}\ _{\infty}$	0.0008	0.00015	$4.2E-5$	$2.0E-7$	$7.0E-8$
$\ e_{10,10}^*\ _{\infty}$	$6.0E-39$	$4.5E-39$	$1.1E-37$	$4.0E-8$	$1.2E-8$
$\ e_{n,n} - e_{10,10}^*\ _{\infty}$	0.0008	0.00016	$4.5E-5$	$2.4E-7$	$8.0E-8$
n	10	11	12	13	14
$\ e_{n,n}\ _{\infty}$	$8.7E-10$	$4.5E-10$	$1.7E-11$	$2.5E-13$	$5.9E-15$
$\ e_{10,10}^*\ _{\infty}$	$3.5E-9$	$9.0E-11$	$1.9E-12$	$5.0E-14$	$3.8E-15$
$\ e_{n,n} - e_{10,10}^*\ _{\infty}$	$9.0E-9$	$4.5E-10$	$1.7E-11$	$1.25E-13$	$5.5E-15$
n	15	16	17	18	19
$\ e_{n,n}\ _{\infty}$	$7.0E-16$	$3.4E-18$	$1.4E-19$	$5.5E-22$	$1.6E-22$
$\ e_{10,10}^*\ _{\infty}$	$9.0E-17$	$6.5E-18$	$6.5E-20$	$3.5E-21$	$8.0E-23$
$\ e_{n,n} - e_{10,10}^*\ _{\infty}$	$7.5E-16$	$6.5E-18$	$1.7E-19$	$3.5E-21$	$1.9E-22$

başlangıç koşulları

$$u(x, 0) = x,$$

$$u_y(x, 0) = x^2$$

Çizelge 4.20. Örnek 4.4.2 için mutlak hatalar, hata tahminleri ve hata yaklaşım fonksiyonunun mutlak hataları

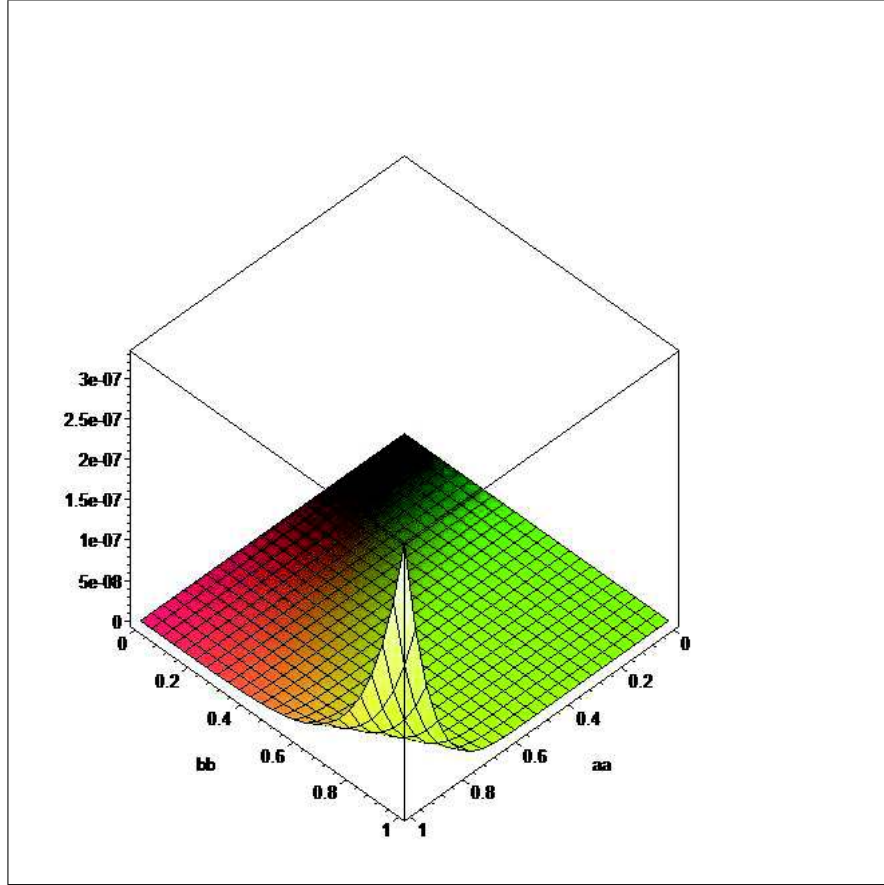
n	6	7	8	9	10
$\ e_{n,n}\ _{\infty}$	$4.0E-7$	$1.4E-8$	$5.0E-10$	$1.0E-11$	$2.0E-13$
$\ e_{10,10}^*\ _{\infty}$	$1.0E-7$	$7.0E-9$	$3.5E-10$	$1.15E-11$	$1.8E-13$
$\ e_{n,n} - e_{10,10}^*\ _{\infty}$	$3.6E-7$	$1.35E-8$	$5.0E-10$	$1.12E-11$	$2.5E-13$
n	11	12	13	14	15
$\ e_{n,n}\ _{\infty}$	$4.2E-14$	$1.3E-13$	$4.5E-14$	$6.0E-13$	$3.0E-12$
$\ e_{10,10}^*\ _{\infty}$	$1.1E-14$	$1.8E-13$	$2.5E-13$	$6.0E-13$	$2.6E-12$
$\ e_{n,n} - e_{10,10}^*\ _{\infty}$	$2.6E-14$	$1.9E-13$	$2.5E-13$	$8.5E-13$	$6.0E-12$
n	16	17	18	19	20
$\ e_{n,n}\ _{\infty}$	$5.0E-12$	$7.0E-11$	$4.0E-11$	$1.5E-9$	$1.6E-9$
$\ e_{10,10}^*\ _{\infty}$	$3.6E-12$	$7.2E-11$	$5.0E-11$	$3.2E-10$	$5.5E-10$
$\ e_{n,n} - e_{10,10}^*\ _{\infty}$	$6.0E-12$	$1.25E-10$	$8.0E-11$	$1.4E-9$	$1.6E-9$

ile verilsin. (4.6) denkleminin tam çözümü

$$u(x, y) = x + x^2 \sinh y$$

fonksiyonudur (Jin, 2008). Sıralama noktaları Chebyshev interpolasyon noktaları ve 30 hanede duyarlılıkla işlem yapılması durumunda Bernstein seri çözümler elde edilmiştir. Sonuçta elde edilen mutlak hata fonksiyonlarının sonsuz normundaki büyüklükleri ve $e_{10,10}^*$ ile $f - p_{n,n} - e_{10,10}^*$ fonksiyonlarının sonsuz normundaki değerleri Çizelge 4.21.'de verilmiştir. $n = 12$ için elde edilen mutlak hata ve $|e_{10,10}^*|$ fonksiyonları Şekil 4.10. ve Şekil 4.11.'te verilmiştir.

Elde edilen mutlak hata fonksiyonlarının sonsuz normları bir n değerine kadar azalıp sonra artmaya başlamıştır. $e_{10,10}^*$ fonksiyonlarının normları, seçilen sıralama noktaları ve $m = 10$ için mutlak hata fonksiyonlarından en az 10^{-2} kat daha az bulunmuştur. Bu durum, sıralama noktalarının Bernstein seri çözümleri veya $e_{10,10}^*$ bulunurken kullanılan sıralama noktaları değiştirilerek Çizelge 4.22.'de olduğu gibi giderilebilir. Sıralama noktalarının Bernstein seri çözümleri için eşit aralıklı ve $e_{10,10}^*$ bulunurken Chebyshev interpolasyon noktaları seçilmesi durumunda elde edilen sonuçlar Çizelge 4.22.'de verilmiştir. Çizelge 4.22.'deki sonuçlardan, $n \leq 10$ için $\|f - p_{n,n}\|_{\infty}$ ve $\|e_{10,10}^*\|_{\infty}$ değerleri birbirine çok yakın olduğu ve $p_{n,n} - e_{10,10}^*$ yaklaşımının Bernstein seri çözümünden sonsuz normuna göre daha iyi olduğu



Şekil 4.10. Örnek 4.4.3 ve $n = 12$ için mutlak hata fonksiyonu

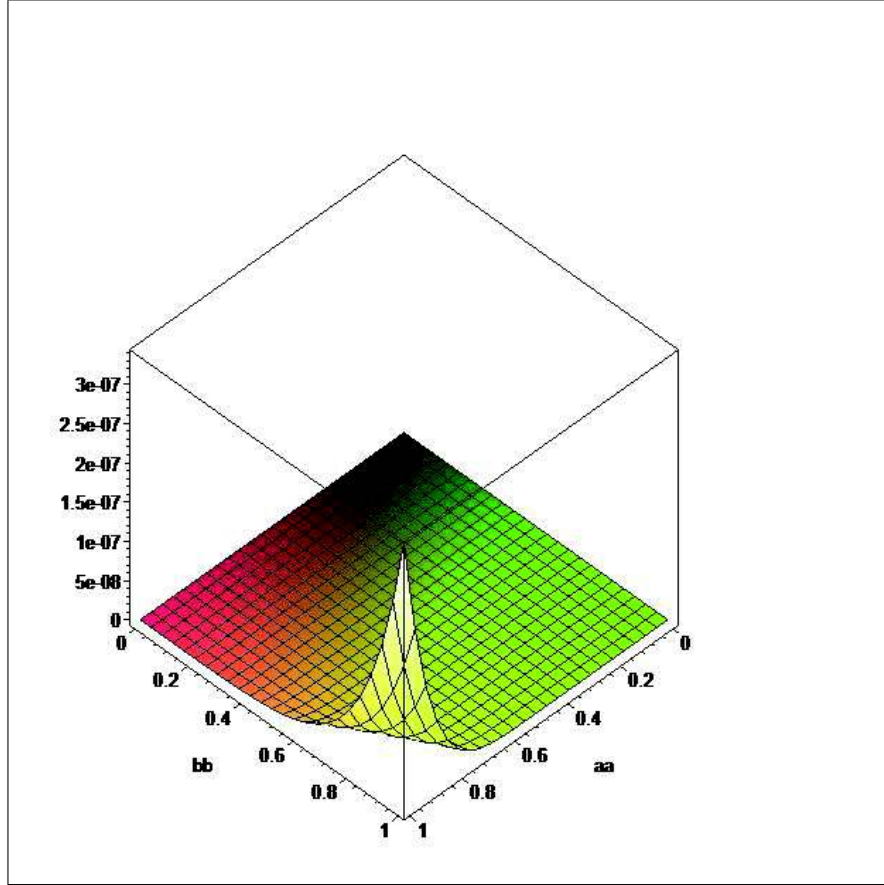
söylenebilir.

4.5. İki Değişkenli Fonksiyonların Rasyonel İnterpolasyon Fonksiyonu İçin Örnekler

Bölüm 3.6.'da verilen m -boyutta rasyonel interpolasyon fonksiyonları için özel olarak $m = 2$ alınarak verilen iki değişkenli fonksiyonların yaklaşık çözümleri bulunacaktır. Yapılan yaklaşımların mutlak hata fonksiyonlarının sonsuz normundaki değerleri de hesaplanacaktır.

Örnek 4.5.1. $[0, 1] \times [0, 1]$ 'de $f(x, y) = 32(x + y)^{11/2}$ fonksiyonuna (3.34) rasyonel fonksiyonu ile yaklaşalım (Möbner ve Reif, 2009). İnterpolasyon noktaları

$$\left\{ (x_i, y_j) : x_i = \frac{i}{6}, y_j = \frac{j}{6}, 0 \leq i, j \leq 6 \right\}$$



Şekil 4.11. Örnek 4.4.3 ve $n = 12$ için $|e_{10,10}^*|$ fonksiyonu

olarak seçilirse $n = 6$ ve $d_1 = d_2 = 4$ için hata fonsiyonunun sonsuz normu

$$\|f - r\|_{\infty} \leq 0.09$$

ile sınırlıdır. Benzer şekilde, interpolasyon noktaları eşit aralıklı alınarak $n = 10$ ve $d_1 = d_2 = 7$ için hata fonsiyonunun sonsuz normu

$$\|f - r\|_{\infty} \leq 10^{-5}$$

ile sınırlıdır. $n = 6$, $d_1 = d_2 = 4$ ve $n = 10$, $d_1 = d_2 = 7$ için mutlak hata fonsiyonlarının grafikleri sırasıyla Şekil 4.12. ve Şekil 4.13.'te verilmiştir. Çizelge 4.23.'te de $n = 10$ ve farklı d_1, d_2 değerleri için hata fonsiyonlarının sonsuz normları verilmiştir.

Örnek 4.5.2. $[0, 1] \times [0, 1]$ 'de $f(x, y) = x^2 y^2 (1 - e^{-(x^2 + y^2)})$ fonksiyonunu ele alalım (Möbner ve Reif, 2009). Eşit aralıklı interpolasyon noktaları ve $n = 8$, $d_1 = d_2 = 5$

Çizelge 4.21. Örnek 4.4.3 için mutlak hatalar, hata tahminleri ve hata yaklaşım fonksiyonunun mutlak hataları

n	5	6	7	8	9
$\ e_{n,n}\ _{\infty}$	0.002	0.0023	$4.0E-5$	$1.4E-5$	$3.7E-6$
$\ e_{10,10}^*\ _{\infty}$	$4.0E-5$	$6.0E-5$	$5.5E-6$	$8.0E-6$	$2.5E-7$
$\ e_{n,n} - e_{10,10}^*\ _{\infty}$	0.002	0.0023	$3.5E-5$	$5.6E-6$	$3.5E-6$
n	10	11	12	13	14
$\ e_{n,n}\ _{\infty}$	$5.0E-7$	$1.2E-8$	$1.8E-9$	$3.5E-11$	$7.0E-12$
$\ e_{10,10}^*\ _{\infty}$	$5.2E-20$	$1.4E-10$	$1.0E-11$	$1.25E-13$	$1.2E-14$
$\ e_{n,n} - e_{10,10}^*\ _{\infty}$	$5.0E-7$	$1.2E-8$	$1.8E-9$	$3.5E-11$	$7.0E-12$
n	15	16	17	...	20
$\ e_{n,n}\ _{\infty}$	$1.2E-12$	$1.7E-13$	$7.0E-13$	...	$5.0E-10$
$\ e_{10,10}^*\ _{\infty}$	$2.5E-17$	$1.2E-18$	$5.5E-18$	...	$6.0E-20$
$\ e_{n,n} - e_{10,10}^*\ _{\infty}$	$1.2E-12$	$1.6E-13$	$7.0E-13$	...	$3.0E-18$

Çizelge 4.22. Örnek 4.4.3'te mutlak hatalar, hata tahminleri ve hata yaklaşım fonksiyonunun mutlak hataları

n	5	6	7	8	9
$\ e_{n,n}\ _{\infty}$	0.001	0.0014	0.0003	0.0002	$2.5E-7$
$\ e_{10,10}^*\ _{\infty}$	0.001	0.0014	0.0004	0.0002	$7.0E-7$
$\ e_{n,n} - e_{10,10}^*\ _{\infty}$	$8.5E-8$	$8.5E-8$	$8.5E-8$	$8.5E-8$	$5.0E-7$
n	10	11	12	13	14
$\ e_{n,n}\ _{\infty}$	$3.0E-6$	$1.5E-9$	$9.2E-9$	$4.0E-9$	$3.8E-10$
$\ e_{10,10}^*\ _{\infty}$	$2.5E-6$	$5.0E-5$	$3.8E-7$	$2.7E-6$	$7.6E-11$
$\ e_{n,n} - e_{10,10}^*\ _{\infty}$	$5.0E-7$	$5.0E-5$	$3.8E-7$	$2.7E-6$	$4.5E-10$
n	15	16	17	...	20
$\ e_{n,n}\ _{\infty}$	$5.2E-10$	$6.0E-13$	$8.0E-13$	...	$9.0E-14$
$\ e_{10,10}^*\ _{\infty}$	$7.0E-9$	$6.0E-9$	$5.2E-9$	...	$6.0E-14$
$\ e_{n,n} - e_{10,10}^*\ _{\infty}$	$7.8E-9$	$1.6E-13$	$5.2E-9$	...	$1.5E-13$

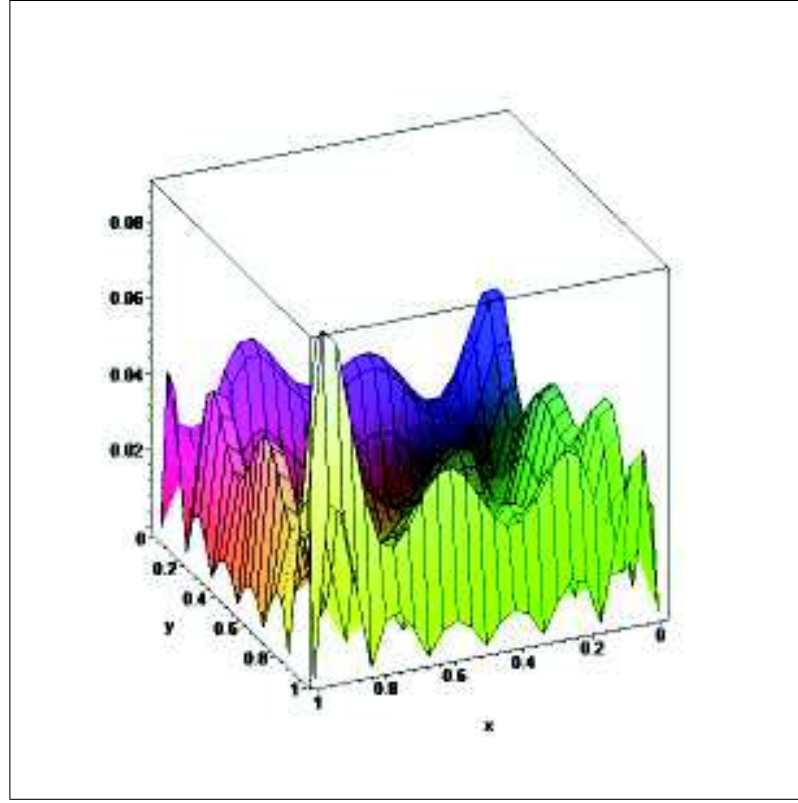
için r rasyonel yaklaşımının mutlak hatası

$$\|f - r\|_{\infty} \leq 9.6 \times 10^{-7}$$

ile sınırlıdır. Hata fonksiyonunun grafiği Şekil 4.14.'te verilmiştir.

Çizelge 4.23. Örnek 4.5.1’de $f(x,y) = 32(x+y)^{11/2}$ fonksiyonuna yapılan rasyonel yaklaşımların mutlak hataları

$d_1 = d_2 = 3$	$d_1 = d_2 = 4$	$d_1 = d_2 = 5$	$d_1 = d_2 = 6$
0.031	0.007	$1.5E - 4$	$4.4E - 5$



Şekil 4.12. $f(x,y) = 32(x+y)^{11/2}$ fonksiyonuna $n = 6$ ve $d_1 = d_2 = 4$ için yapılan rasyonel yaklaşımın mutlak hata fonksiyonu

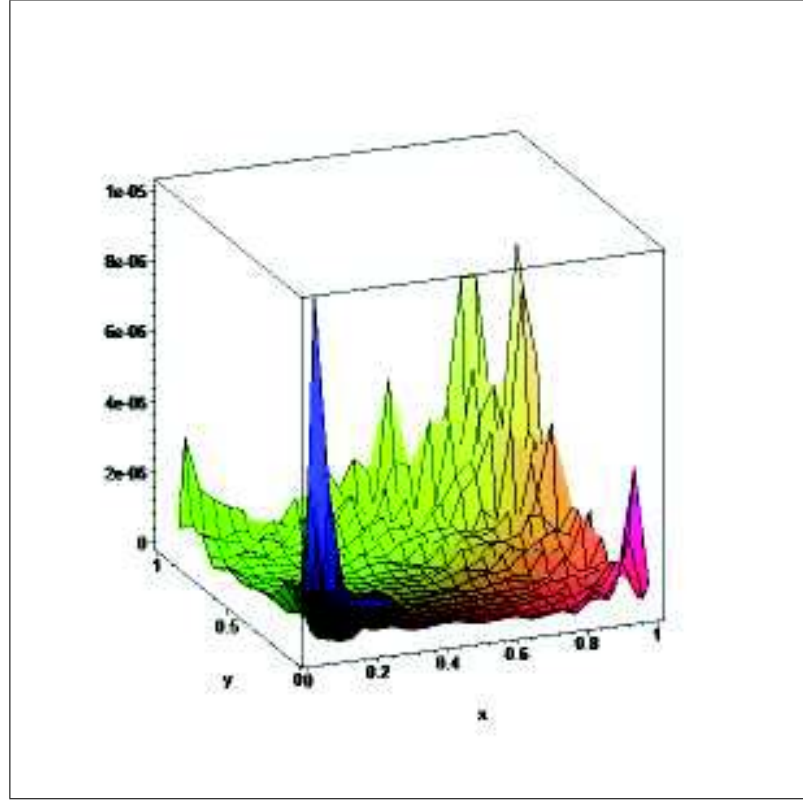
Örnek 4.5.3. $[0, 1] \times [0, 1]$ ’de

$$f(x,y) = \frac{3}{4}e^{-\frac{(9x-2)^2}{4} - \frac{(9y-2)^2}{4}} + \frac{3}{4}e^{-\frac{(9x-2)^2}{49} - \frac{(9y-2)^2}{10}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{(9x-7)^2}{4} - \frac{(9y-3)^2}{4}} - \frac{1}{5}e^{-(9x-4)^2 - (9y-7)^2},$$

fonksiyonunu ele alalım (Sommariva vd., 2005). $n = 10$, $d_1 = d_2 = 6$ için rasyonel yaklaşımın mutlak hatası için bir üst sınır

$$\|f - r\|_{\infty} \leq 0.035$$

olarak bulunur. Hata fonksiyonunun grafiği Şekil 4.15.’te verilmiştir.



Şekil 4.13. $f(x,y) = 32(x+y)^{11/2}$ fonksiyonuna $n = 10$ ve $d_1 = d_2 = 7$ için yapılan rasyonel yaklaşımın mutlak hata fonksiyonu

Örnek 4.5.4. Rasyonel yaklaşım metodunu

$$f(x,y) = e^x \cos y, (x,y) \in [0,1] \times [0,1]$$

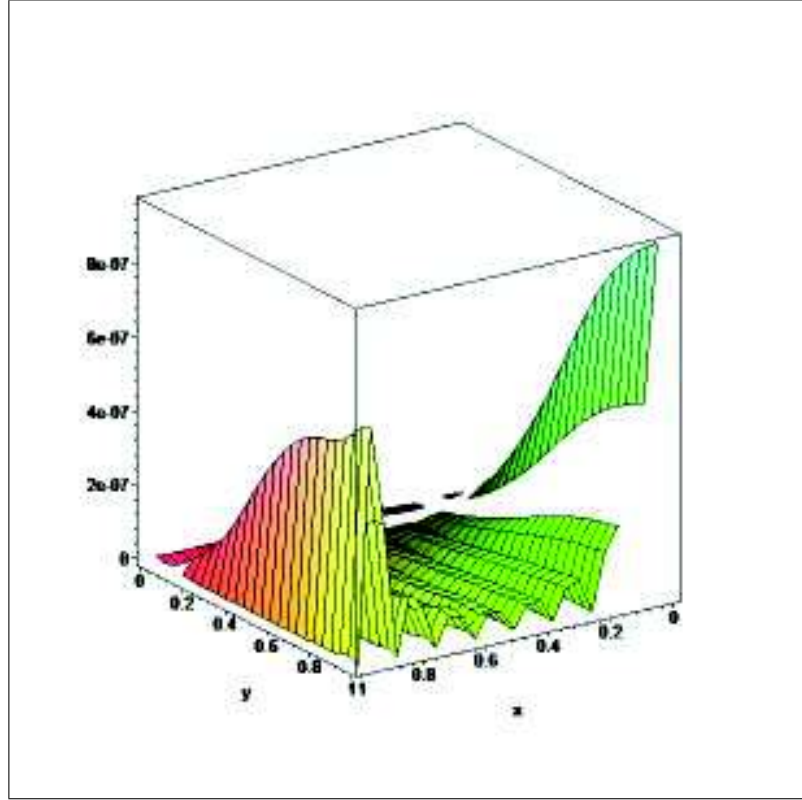
fonksiyonuna uygulayalım. Eşit aralıklı noktalar kullanılarak $n = 5$, $d_1 = d_2 = 4$ ve $n = 10$, $d_1 = d_2 = 7$ için elde edilen rasyonel yaklaşımların hataları sırasıyla $\|f - r\|_\infty \leq 0.9446 \times 10^{-3}$ ve $\|f - r\|_\infty \leq 0.3821 \times 10^{-10}$ ile sınırlıdır.

Örnek 4.5.5. $[0,1] \times [0,1]$ 'de

$$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$$

fonksiyonu verilsin (Quarteroni vd., 2007). $n = 4$, $d_1 = d_2 = 2$ için 2. derece parçalı polinom interpolasyonu ve rasyonel polinom interpolasyonu ile bulunan yaklaşımların hataları sırası ile

$$\|f - r\|_\infty \leq 1.6678 \times 10^{-3}$$



Şekil 4.14. $f(x,y) = x^2y^2 \left(1 - e^{-(x^2+y^2)}\right)$ fonksiyonuna $n = 8$ ve $d_1 = d_2 = 5$ için yapılan rasyonel yaklaşımın mutlak hata fonksiyonu

ve

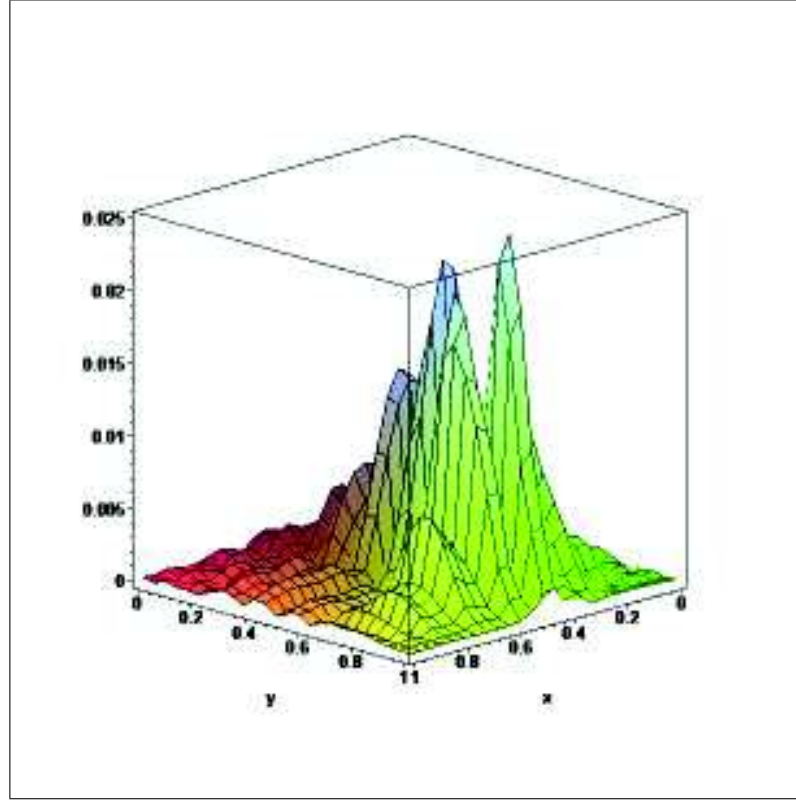
$$\|f - r\|_{\infty} \leq 4.4842 \times 10^{-3}$$

olarak bulunur. $n = 8$, $d_1 = d_2 = 2$ için de 2. derece parçalı polinom interpolasyonu ve rasyonel polinom interpolasyonunun hataları sırası ile

$$\|f - r\|_{\infty} \leq 2.8151 \times 10^{-4}$$

ve

$$\|f - r\|_{\infty} \leq 4.5000 \times 10^{-5}$$



Şekil 4.15.

$f(x,y) = \frac{3}{4}e^{-\frac{(9x-2)^2}{4}-\frac{(9y-2)^2}{4}} + \frac{3}{4}e^{-\frac{(9x-2)^2}{49}-\frac{(9y-2)^2}{10}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{(9x-7)^2}{4}-\frac{(9y-3)^2}{4}} - \frac{1}{5}e^{-(9x-4)^2-(9y-7)^2}$
fonksiyonuna $n = 10$ ve $d_1 = d_2 = 6$ için yapılan rasyonel yaklaşımın mutlak hata fonksiyonu

ile sınırlıdır. Bulunan sonuçlar 2. derece parçalı polinom interpolasyonu ve $n = 4$, $d_1 = d_2 = 2$ için daha iyi olmasına karşın rasyonel polinom interpolasyonu ile bulunan sonuçlar $n = 8$, $d_1 = d_2 = 2$ için daha iyidir.

4.6. Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Rasyonel İnterpolasyon Fonksiyonu İle Çözümleri

Bölüm 3.6.'da verilen m -boyutta rasyonel interpolasyon fonksiyonları ve Bernstein seri çözümü kullanılarak, kısmi diferansiyel denklemlerin rasyonel fonksiyon çözümleri bulunabilir.

Örnek 4.6.1. Dirichlet sınır koşullu Örnek 4.4.1’de verilen Laplace denklemini

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

ele alalım. $n = 12$, $d_1 = d_2 = 10$ için Chebyshev sıralama noktaları kullanılarak her bir $p_{i,j}$, $0 \leq i, j \leq 2$ Bernstein seri çözümleri hesaplanarak (3.34)’de yerine konursa, bulunan r yaklaşımının mutlak hatası için üst sınır

$$\|f - r\|_{\infty} \leq 2.72 \times 10^{-7}$$

olarak bulunur.

Örnek 4.6.2. $\Omega_0 \subset \Omega = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$ için genelleştirilmiş Poisson denklemi üzerinde Dirichlet sınır koşulları ile

$$-\Delta u + e^{x+y}u_x + e^{x-y}u_y + u = g(x, y), (x, y) \in \Omega_0$$

olarak verilir. Bu problemin analitik çözümü

$$g(x, y) = 2 \sin x \sin y + e^{x+y} \cos x \sin y + e^{x-y} \cos y \sin x + \sin x \sin y$$

için

$$f(x, y) = \sin x \sin y$$

fonksiyonudur (Kong ve Wu, 2009). Eşit aralıklı sıralama noktaları ve $n = 7$, $d_1 = d_2 = 4$ için $p_{i,j}$, $0 \leq i, j \leq 3$ Bernstein seri çözümleri (3.34)’de yerine konursa, bulunan r yaklaşımının mutlak hatası

$$\|f - r\|_{\infty} \leq 0.0078$$

ile sınırlıdır.

5. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu tezin amaçlarından birisi, Bernstein polinomlarına dayalı sıralama yönteminin diferansiyel denklem, gecikmeli diferansiyel denklem, integro-diferansiyel denklem ve kısmi diferansiyel denklemler için oluşturularak Bernstein seri çözümlerinin bulunmasıdır. İkinci bir amaç olarak, Taylor ve Chebyshev polinomları gibi özel polinomlara dayalı matris yöntemleri için genel bir hata analizi oluşturmaktır. Üçüncü bir amaç olarak, bulunan Bernstein seri çözümleri ve Floater ve Hormann (2006)'ın rasyonel interpolasyon formülü kullanılarak diferansiyel denklemlerin rasyonel fonksiyon çözümleri elde etmektir. Dördüncü bir amaç olarak m -boyutlu rasyonel interpolasyon probleminin çözümü için Floater ve Hormann (2006)'ın 1-boyutta verdiği rasyonel interpolasyon yöntemini m -boyuta genellemektir. Son olarak m -boyutta verilen rasyonel interpolasyon formülü ve Bernstein seri çözümler kullanılarak kısmi diferansiyel denklemler için rasyonel fonksiyon çözümü oluşturmaktır. Hedeflenen amaçlara ulaşılmış olup elde edilen sonuçlar her bölüm için ayrı ayrı gruplanarak aşağıda verilmiştir.

Bölüm 3.1'de Bernstein seri çözümler adi diferansiyel denklemler için elde edilmiştir. Bu yöntem kullanılarak, Bölüm 4.3.'de $p_{i,j}$ polinomları hesaplanmıştır. Yöntem, her türlü adi diferansiyel denkleme kolaylıkla uygulanabilir ve hata analizi ile mutlak hatası için bir üst sınır bulunabilir. Tam çözümün bilinmemesi durumunda hata tahmini e_m^* fonksiyonu ile yapılabilir. Bernstein seri çözümüne e_m^* eklenerek yeni bir yaklaşık çözüm elde edilebilir.

Bölüm 3.2'de Bernstein seri çözümler gecikmeli diferansiyel denklemler için oluşturulmuş ve Bernstein seri çözümler için çoğu ortak olan sonuçlar aşağıda verilmiştir:

- Bu yöntem, gecikmeli diferansiyel denklemlere kolayca uygulanabilir.
- Daha tutarlı sonuçlar elde etmek için n 'nin büyük seçilmesi gerekmektedir. Fakat çok büyük n 'ler için yöntem güvenilir olmayabilir.
- Tam çözüm f fonksiyonunun polinom olması durumunda, tam çözüm veya ona çok yakın yaklaşık çözümler elde edilir. $n \geq \deg(f)$ için Teorem 3.8.3'den hata

sıfır olacağından, eğer hesaplama hataları gözardı edilirse, tam çözüm yani f elde edilir.

- Bilgisayar yuvarlama hatalarını azaltmak için bilgisayarda kullanılan programlarda işlemlerin yüksek duyarlılık sayısı ile yapılması tutarlılığı artıracaktır.
- Eşit aralıklı noktalar için bulunan çözümlerin tutarlılığı, uygulamada Chebyshev sıralama noktaları kullanılarak elde edilen sonuçlardan daha azdır.
- Eğer n asalsa, eşit aralıklı sıralama noktaları için yuvarlama hataları daha büyük olacağından sonuçlar daha az tutarlıdır.
- Hata analizi yapılarak mutlak hata için bir üst sınır bulunabilmesi, fonksiyonun düzgünlüğü ile orantılıdır.
- Yöntem, her durum için yakınsak değildir.
- İyi sonuçlar elde etmek için n sayısı ne çok küçük ne de çok büyük olmalıdır.
- Tam çözüm bilinmese bile, tam çözümün interpolasyon polinomu yakınsak ise, e_m^* ile hata fonksiyonun tahmini yapılabilir.
- Örneklerde, eşit aralıklı sıralama noktaları ve $n \leq m$ için, e_m^* hata fonksiyonuna sonsuz normunda oldukça yakındır ve $p_n + e_m^*$ polinomu Bernstein seri çözümünden sonsuz normunda daha iyidir.

Bölüm 3.3'te elde edilen sonuçlar Bölüm 3.2 ile benzer olup ek olarak, tam çözüm f 'nin polinom olması durumunda $n \neq \deg(f)$ için e_m^* , hata fonksiyonuna yeterince yakın olmayabileceği örneklerden söylenebilir.

Bölüm 3.4'te verilen Bernstein seri çözümüne dayalı rasyonel fonksiyon çözümü, Bernstein seri çözümünün sahip olduğu özelliklere sahip olup ek olarak aşağıdaki sonuçlar bulunmuştur:

- Bernstein seri çözümlerine göre daha tutarlı ve kararlı sonuçlar elde edilebilir.
- Hata analizi için tam çözümün daha düşük mertebeden türevlerinin olması yeterlidir.
- Yüksek n 'ler için de kararlı çözümler elde edilebilir.

- Sıralama metoduna göre işlemler daha çoktur, fakat yüksek n ve düşük d için sıralama metodunda büyük n 'ler için elde edilen sonuçlardan daha az sürede aynı tutarlılık elde edilebilir.

Bölüm 3.5'te verilen kısmi diferansiyel denklemlerin Bernstein seri çözümü için aşağıdaki sonuçlar bulunmuştur:

- Bilgisayar yuvarlama hatalarını azaltmak için bilgisayarda kullanılan programlarda işlemlerin yüksek duyarlılık sayısı ile yapılması tutarlılığı artıracaktır.
- Chebyshev sıralama noktaları kullanılarak elde edilen sonuçlar, sıralama yöntemi ile elde edilen sonuçlardan daha tutarlı olabilir.
- Asal n 'ler ve eşit aralıklı sıralama noktaları için yuvarlama hataları daha büyük olacağından sonuçlar daha az tutarlı olabilir.
- Hata analizi yapılarak mutlak hata için bir üst sınır bulunabilmesi, fonksiyonun düzgünlüğü ile orantılıdır.
- Yöntem, her durum için yakınsak değildir.
- İyi sonuçlar elde etmek için n sayısı ne çok küçük ne de çok büyük olmalıdır.
- Tam çözüm bilinmese bile, tam çözümün interpolasyon polinomu yakınsak ise, $e_{m,m}^*$ ile hata fonksiyonun tahmini yapılabilir..
- Örneklerde, eşit aralıklı sıralama noktaları ve $n \leq m$ için, $e_{m,m}^*$ hata fonksiyonuna sonsuz normunda oldukça yakındır ve $p_{n,n} + e_{m,m}^*$ polinomu Bernstein seri çözümünden sonsuz normunda daha iyidir.
- $n > 20$ için Bernstein seri çözümünün hesaplanması çoğu durumda mümkün olmamaktadır ve $\tilde{W}$ 'nin koşul sayısı arttığından hesaplamalar yapılsa bile sonuçlar güvenilir olmayabilir

Bölüm 3.6'da verilen m —boyutta rasyonel interpolasyon fonksiyonu için aşağıdaki sonuçlar bulunmuştur:

- 3.34’de verilen r fonksiyonu $\mathbb{R}^m$ ’de tanımlıdır.
- Yaklaşım yapılan fonksiyon $f \in W_{\infty}^{n+1}$ ise uygun d_i ’ler seçilerek yakınsak sonuçlar elde edilir.
- Yöntem için $m(n+1)$ fonksiyon hesaplamak gerekir.
- Yöntem interpolasyon noktalarının tensör çarpım olması dışında noktaların dağılımından bağımsız olsa da sonuçlar eşit aralıklı dağılımlar için daha anlamlı bir hata üst sınırı verir.
- Yöntemle elde edilen sonuçlar düzgün fonksiyon olduğundan diferansiyel denklemlerin çözümlerinde kullanılabilir.

Son bölümde verilen kısmi diferansiyel denklemlerin rasyonel fonksiyon çözümleri için, m –boyutta rasyonel interpolasyon fonksiyonunun ve Bernstein seri çözümlerinin özelliklerine sahiptir. Rasyonel fonksiyon çözümünün Bernstein seri çözümüne göre en büyük avantajı, $n > 20$ için düşük d_i ’ler seçilerek daha az zamanda daha tutarlı sonuçlar elde edilebilir.

Gelecek çalışmalar için, sıralama metodunun hata analizi yapılırken gerekli olan şartlar azaltılmaya çalışılabilir. Sıralama metodunda, farklı rasyonel fonksiyonlar kullanılabilir. En önemlisi, Bölüm 3’te verilen her metodun her durumda yakınsaklığı garanti edilebilir mi sorusunun cevabı araştırılabilir. Ayrıca, lineer fonksiyonel denklemler için verilen bu yöntemler, lineer olmayan fonksiyonel denklemlere de uygulanabilir mi sorusunun cevabı araştırılabilir.

KAYNAKLAR

- Abd El-Salam, F.A. ve Zaki, Z.A. (2010) The numerical solution of linear fourth order boundary value problems using nonpolynomial spline technique, *J American Sci* 12: 310–316.
- Akram, G. ve Siddiqi, S.S. (2006) Nonic spline solutions of eighth order boundary value problems, *Appl Math Comput* 182: 829–845.
- Akyüz, A. ve Sezer, M. (1999) A Chebyshev collocation method for the solution of linear integro-differential equations, *Int J Comput Math* 72: 491–507.
- Akyüz, A. ve Sezer, M. (2003) Chebyshev polynomial solutions of systems of high-order linear differential equations with variable coefficients, *Appl Math Comp* 144 (2-3): 237–247.
- Akyüz-Daşcıoğlu, A. ve Sezer, M. (2005) Chebyshev polynomial solutions of systems of higher-order linear Fredholm–Volterra integro-differential equations, *J Franklin I* 342 (6): 688–701.
- Al-Said, E.A. ve Noor, M.A. (2002) Quartic spline method for solving fourth order obstacle boundary value problems, *J Comput Appl Math* 143: 107–116.
- Al-Said, E.A. ve Noor, M.A. (2004) Finite difference method for solving fourth order obstacle problems, *Int J Comput Math* 81: 741–748.
- Al-Said, E.A., Noor, M.A. ve Rassias T.M. (2006) Cubic splines method for solving fourth order obstacle boundary value problems, *Appl Math Comput* 81: 180–187.
- Andrews, G.E., Askey, R. ve Roy, R. (1999) *Special Functions*, 1. Baskı, Cambridge University Press, New York, 664s.

- Atkinson, K.E. (1997) *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*, 1. Baskı, Cambridge University Press, New York, 552s.
- Berrut, J.P. (1988) Rational functions for guaranteed and experimentally well-conditioned global interpolation, *Comput Math Appl* 15 (1): 1–16.
- Berrut, J.P. ve Mittelmann, H.D. (1997) Lebesgue constant minimizing linear rational interpolation of continuous functions over the interval, *Comput Math Appl* 33 (6): 77–86.
- Bhatti, M.I. ve Bracken, P. (2007) Solutions of differential equations in a Bernstein polynomial basis, *J. Comput Appl Math* 205: 272–280.
- Brunner, H. (1986) Polynomial spline collocation methods for Volterra integrodifferential equations with weakly singular kernels, *IMA J Numer Anal* 6 (2): 221–239.
- Bülbül, B. (2011) *İkinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin Taylor polinom çözümleri*, Doktora tezi, Muğla Üniversitesi, Muğla. 88s.
- Çelik, I. (2005) Approximate calculation of eigenvalues with the method of weighted residuals–collocation method, *Appl Math Comput* 160: 401–410.
- Çelik, I. (2006) Collocation method and residual correction using Chebyshev series, *Appl Math Comput* 174: 910–920.
- De Boor, C. ve Swartz, B. (1973) Collocation at Gaussian points, *SIAM J Numer Anal* 10 (4): 582–606.
- Doha E.H. ve Abd-Elhameed W.M. (2005) Accurate spectral solutions for the parabolic and elliptic partial differential equations by the ultraspherical tau method, *J Comp Appl Math* 181: 24–45.
- Evens, D.J. ve Raslan, K.R. (2005) The adomian decomposition method for solving delay differential equation, *Int J Comp Math* 82 (1): 49–54.

- Floater, M.S. ve Horman, K. (2006) Barycentric rational interpolation with no poles and high rates of approximation, *Numerische Mathematik* 107: 315–331.
- Gulsu, M. ve Sezer, M. (2005) The approximate solution of high-order linear difference equation with variable coefficients in terms of Taylor polynomials, *Appl Math Comput* 168: 76–88.
- Güney, Z. (2003) *Metrik ve Topolojik Formüller*, Muğla Üniversitesi Yayınları, Muğla, 295s.
- Huang, Y. ve Li, X.F. (2010) Approximate solution of a class of linear integro-differential equations by Taylor expansion method, *Int J Comp Math* 87 (6): 1277–1288.
- Işık, O.R., Sezer, M. ve Güney, Z. (2011a) Bernstein series solution of a class of linear integro-differential equations with weakly singular kernel, *Appl Math Comp* 217(16): 7009–7020.
- Işık, O.R., Sezer, M. ve Güney, Z. (2011b) A rational approximation based on Bernstein polynomials for high order initial and boundary values problems, *Appl Math Comp* 217 (22): 9438–9450.
- Işık, O.R., Güney, Z. ve Sezer, M. (2012) Bernstein series solutions of pantograph equations using polynomial interpolation, *J Differ Equ Appl* 18 (3), 357–374.
- Kanwal, R.P. ve Liu, K.C. (1989) Taylor expansion approach for solving integral equations, *Int J Math Educ Sci Technol* 20 (3):, 411–414.
- Khalifa, A.K., Elbarbary, E.M.E. ve Abd Elrazek, M.A. (2003) Chebyshev expansion method for solving second and fourth-order elliptic equations, *Appl Math Comput* 135 (2-3): 307–318.
- Kong, W. ve Wu, X. (2009) Chebyshev tau matrix method for Poisson-type equations in irregular domain, *J Compt Appl Math* 228 (1): 158–167.
- Kreyszig, E. (1989) *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley& Sons, USA, 688s.

- Lamnii, A., Mraoui, H., Sbibi, D., Tijini, A. ve Zidna, A. (2008) Spline collocation method for solving linear sixth-order boundary-value problem, *Int J Comp Math* 85: 1673–1684.
- Liu, M.Z. ve Li, D. (2004) Properties of analytic solution and numerical solution of multi-pantograph equation, *Appl Math Comp* 155: 853–871.
- Mason, J.C. ve Handscomb, D.C. (2003) *Chebyshev Polynomials*, Chapman ve Hall/Crc, Washington, 341s.
- Mihaila, B. ve Mihaila, I. (2002) Numerical approximations using Chebyshev polynomial expansions: El-gendi's method revisited, *J Phys A: Math Gen* 35: 731–746.
- Möbner, B. ve Reif, U. (2009) Error bounds for polynomial tensor product interpolation, *Computing* 86: 185–197.
- Oliveira, F.A. (1980) Collocation and residual correction, *Numer Math* 36: 27–31.
- Palusinski, O.A. ve Szidarovszky, F. (1994) A Chebyshev expansion method for solving nonlinear circuit equations, *Appl Math Comput* 60 (2-3): 299 – 310.
- Phillips, G.M. (2003). *Interpolation and Approximation by Polynomials*, Springer, New York, 312s.
- Powell, M.D. (2003) *Approximation Theory and Methods*, Springer, New York, 312s.
- Quarteroni, A., Sacco, R. ve Saleri, F. (2007) *Numerical Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 339s.
- Ramadan, M.A., Lashien, I.F. ve Zahra, W.K. (2008) High order accuracy nonpolynomial spline solutions for order two point boundary value problems, *Appl Math Comput* 204: 920–927.

- Ramadan, M.A., Lashien, I.F. ve Zahra, W.K. (2009) Quintic nonpolynomial spline solutions for fourth order two point boundary value problems, *Commun Nonlinear Sci* 14: 1105–1114.
- Rivlin, T.J. (1969) *An Introduction to the Approximation of Functions*, Dover Publications, New York, 150s.
- Sezer, M. (1994) Taylor polynomial solutions of Volterra integral equations, *Int J Math Educ Sci Techno* 25 (5): 625–633.
- Sezer, M. ve Akyüz-Daşcıoğlu, A. (2006) Taylor polynomial solutions of general linear differential–difference equations with variable coefficients, *Appl Math Comp* 174 (2): 1526–1538.
- Sezer, M. ve Akyüz-Daşcıoğlu, A. (2007) A Taylor method for numerical solution of generalized pantograph equations with linear functional argument, *J Comp Appl Math* 200: 217–225.
- Sezer, M. ve Doğan, S. (1996) Chebyshev series solutions of Fredholm integral equations, *Int J Math Educ Sci Technol* 27 (5): 649–657.
- Sezer, M. ve Kaynak, M. (1996) Chebyshev polynomial solutions of linear differential equations, *Int J Math Educ Sci Technol* 27 (4): 607–618.
- Sezer, M., Yalçınbaş, S. ve Gülsu, M. (2008) A Taylor polynomial approach for solving generalized pantograph equations with nonhomogenous term, *Int J Comput Math* 85: 1055–1063.
- Singh, V.K., Randey, R.K. ve Singh, O.P. (2009) New stable numerical solutions of singular integral equations of Abel type by using normalized Bernstein polynomials, *Appl Math Sci* 3 (5): 241–255.
- Shahmorad, S. (2005) Numerical solution of the general form linear Fredholm–Volterra integro-differential equations by the tau method with an error estimation, *Appl Math Comput* 167: 1418–1429.

- Sommariva, A., Vianello, M. ve Zanovello, R. (2005) Adaptive bivariate Chebyshev approximation, *Numer Algorithms* 38: 79-94.
- Şahin, N., Yüzbaşı, Ş. ve Gülsu, M. (2011) A collocation approach for solving systems of linear Volterra integral equations with variable coefficients, *Comput Math Appl* 62: 755–769.
- Usmani, R.A. (1992) The use of quartic splines in the numerical solution of a fourth order boundary problems, *J. Comput Appl Math* 44: 187–199.
- Usmani, R.A. ve Warsi, S.A. (1980) Smooth spline solutions for boundary value problems in plate deflection theory, *J Comput Math Appl* 6: 205–211.
- Watkins, D.S. (2002) *Fundamentals of Matrix Computations*, John Wiley& Sons, New York, 618s.
- Yalçınbaş, S. ve Sezer, M. (2000) The approximate solution of high-order linear Volterra–Fredholm integro-differential equations in terms of Taylor polynomials, *Appl Math Comput* 112: 291–308.
- Yalçınbaş, S. ve Sezer, M. (2006): A Taylor collocation method for the approximate solution of general linear Fredholm–Volterra integro-difference equations with mixed argument, *Appl Math Comp* 175 (1): 675–690.
- Yalçınbaş, S., Sezer, M. ve Sorkun, H.H. (2009) Legendre polynomial solutions of high-order linear Fredholm integro-differential equations, *Appl Math Comp* 210 (2): 334–349.
- Yüksel, G. (2011). *İkinci mertebe lineer kısmi diferansiyel denklemlerin Chebyshev polinom çözümleri*, Doktora Tezi, Muğla Üniversitesi, Muğla. 95s.
- Yüzbaşı, Ş. (2011) A numerical approach for solving the high-order linear singular differential–difference equations, *Comput Math Appl* 62 (5): 2289–2303.
- Yüzbaşı, Ş., Şahin, N. ve Sezer, M. (2011a) Bessel matrix method for solving high-order linear Fredholm integro-differential equations, *JARAM* 3 (2): 23–47.

Yüzbaşı, Ş., Şahin, N. ve Sezer, M. (2011b) A Bessel polynomial approach for solving linear neutral delay differential equations with variable coefficients, *JARAM* 3 (1): 81– 101.

Yüzbaşı, Ş., Şahin, N. ve Sezer, M. (2011c) Numerical solutions of systems of linear Fredholm integro-differential equations with Bessel polynomial bases, *Comput Math Appl* 61 (10): 3079–3096.

Zhu, Y. (2001) Quartic spline collocation methods for fourth order two point boundary value problems, Master's thesis, University of Toronto, Toronto.73s.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Ad Soyad : Osman Raşit Işık
Uyruk : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi: Karaman 02/03/1980
Medeni Hali : Evli
Telefon : 0 505 402 76 79
E-posta : osmanrasit@mu.edu.tr

Eğitim

Alınan Derece	Aldığı Kurum/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lise	Konya Atatürk Sağlık Meslek Lisesi	1997
Lisans	Muğla Üniversitesi	2003
Yüksek Lisans	Muğla Üniversitesi	2007

İş Tecrübesi

Yıl	Yer	Pozisyon/görev
2001-2003	Sağlık Bakanlığı	Sağlık Memuru
2003-	Muğla Üniversitesi	Arş. Görevlisi

Yabancı Dil(ler)

Dil (İngilizce, vs)	Başlangıç	Orta	İleri
Yazma			x
Konuşma		x	
Anlama			x
Okuma			x

Bilimsel Faaliyetler

1. "Homotopi Denkliği" ve "Örtü Uzaylarında Temel Grupların Hareketi", Ege Üniversitesi Matematik Bölüm Seminerleri, 23 Mart 2006, 11 Mayıs 2006, İzmir.
2. Cebirsel Topoloji ve Özel Holonomi Lisansüstü Yaz Okulu, İstanbul Teknik Üniversitesi-TÜBİTAK, İstanbul, 12-31 Haziran 2006.
3. Mod-p Steenrod Cebirinde Adem Bağıntılarının Bazı Kombinatorik Hesaplamaları, 20. Ulusal Matematik Sempozyumu, Erzurum, 2007.
4. Kompleks Geometri ve Sicim Kuramındaki Uygulamaları, İstanbul Teknik Üniversitesi-TÜBİTAK, İstanbul, 9 Haziran- 4 Temmuz 2008.
5. İzmir Cebirsel Geometrik Topoloji Günleri Çalıştayı, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir, 9-14 Ocak 2009.(Dinleyici)

6. 16. Gökova Geometri-Topoloji Çalıştayı, Muğla, 25-29 Mayıs 2009. (Dinleyici)
7. Ortogonal polinomlar, TMD yaz okulu, Şirince Matematik Köyü, İzmir. 17-24 Ağustos 2009. (Dinleyici)
8. Zekeriya Güney, Nebiye Korkmaz, Osman Raşit Işık, Matematik Öğretiminde 'Yapılandırmacı Yaklaşım'ın Sakıncaları, 9. Ulusal Fen Bilimleri Ve Matematik Eğitimi Kongresi, 23-25 Eylül 2010, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir. (Poster)
9. 5th Training School In Symbolic Computation, 28 Jun 2010 - 09 Jul 2010, Risc, Avusturya. (Dinleyici)

Yayınlar

1. Osman Raşit Işık, Mehmet Sezer, Zekeriya Güney: Bernstein series solution of a class of linear integro-differential equations with weakly singular kernel. Applied Mathematics and Computation 217(16): 7009-7020 (2011).
2. Osman Raşit Işık, Mehmet Sezer, Zekeriya Güney: A rational approximation based on Bernstein polynomials for high order initial and boundary values problems. Applied Mathematics and Computation 217(22): 9438-9450 (2011).
3. Osman Raşit Işık, Zekeriya Güney, Mehmet Sezer: Bernstein series solutions of pantograph equations using polynomial interpolation. Journal of Difference Equations and Applications 18 (3): 357-374 (2012).

Burslar

1. TÜBİTAK Bideb yurt içi doktora bursu.
2. Yurtdışı doktora araştırma bursu, University of Pittsburgh, PA, 23 Eylül 2010- 11 Ağustos 2011.