

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**Yüksek Lisans Tezi**

**Hayriye GÜÇKİR**

**İDEMPOTENT DÖNÜŞÜMLER VE İDEMPOTENT DÖNÜŞÜMLER  
TARAFINDAN DOĞURULAN YARIGRUPLAR**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**ADANA, 2012**

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İDEMPOTENT DÖNÜŞÜMLER VE İDEMPOTENT DÖNÜŞÜMLER  
TARAFINDAN DOĞURULAN YARIGRUPLAR**

**Hayriye GÜÇKİR**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Bu tez .../.../2012 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

.....  
Doç. Dr. Gonca AYIK  
DANIŞMAN

.....  
Prof. Dr. Hayrullah AYIK  
ÜYE

.....  
Doç. Dr. Perihan Dinç ARTUT  
ÜYE

Bu Tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.  
**Kod No:**

**Prof. Dr. Mehmet Rifat ULUSOY  
Enstitü Müdürü**

**Not:** Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İDEMPOTENT DÖNÜŞÜMLER VE İDEMPOTENT DÖNÜŞÜMLER  
TARAFINDAN DOĞURULAN YARIGRUPLAR

Hayriye GÜÇKİR

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Doç. Dr. Gonca AYIK  
Yıl:2012, Sayfa: 87

Jüri : Prof. Dr. Hayrullah AYIK  
: Doç.Dr. Perihan Dinç ARTUT

Sonlu bir  $X_n = \{1, 2, \mathbf{K}, n\}$  kümesi üzerinde tanımlanan tüm kısmi dönüşümler yarıgrubu, tüm dönüşümler yarıgrubu ve permütasyon grubunu sırasıyla  $P_n$ ,  $T_n$  ve  $S_n$  ile gösterelim. Öncelikle bazı özel elemanlar, doğuray kümesi, Green denklik bağıntıları,  $P_n$ ,  $T_n$ ,  $S_n$  nin özellikleri ve bu yarıgrupların bazı özel alt yarıgrupları gibi yarıgrup teorideki gerekli kavramları verdik.  $ST_n = T_n \setminus S_n$  olsun. Bu tezde  $P_n$ ,  $T_n$  ve  $ST_n$  nin bazı özellikleri, özellikle idempotent elemanlar, bu yarıgrupların rank özellikleri ve bu yarıgrupların bazı alt kümeleri ve alt yarıgrupları ile ilgili literatürde olan bilgiler derlenmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Singüler dönüşümler yarıgrubu, idempotent eleman, idempotent rank

**ABSTRACT**

**MS THESIS**

**IDEMPOTENT TRANSFORMATION AND SEMIGROUPS GENERATED  
BY IDEMPOTENT TRANSFORMATION**

**Hayriye GÜÇKİR**

**ÇUKUROVA UNIVERSITY  
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES  
DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Gonca AYIK  
Year:2012, Pages: 87  
Jury : Prof. Dr. Hayrullah AYIK  
: Assoc. Prof. Dr. Perihan Dinç ARTUT

Let  $P_n$ ,  $T_n$  and  $S_n$  respectively denote the partial transformation semigroup, full transformation semigroup and permutation semigroup defined on a finite set  $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ . We first give some necessary contents of semigroup theory such as special elements, generating set, Green equivalence relations, properties of  $P_n$ ,  $T_n$ ,  $S_n$  and some special subsemigroup of these semigroups. Let  $ST_n = T_n \setminus S_n$ . In this thesis, we make a survey of some properties of  $P_n$ ,  $T_n$  and  $ST_n$ , especially idempotent elements, rank properties of these semigroups and some special subsets and subsemigroups of these semigroups.

**Keywords:** Singular transformation semigroup, idempotent element, idempotent rank

## **TEŞEKKÜR**

Yüksek lisans eğitimin süresince desteğini ve anlayışını eksik etmeyen değerli danışmanım Doç. Dr. Gonca Ayık'a teşekkür ederim. Ayrıca, Çukurova Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerinden Prof. Dr. Hayrullah Ayık'a çalışmalarına olan katkısından dolayı teşekkürlerimi sunarım. Eğitimim süresince beni her zaman destekleyen anneme, babama ve kardeşlerime teşekkür ederim.

## İÇİNDEKİLER

## SAYFA

ÖZ .....	I
ABSTRACT .....	II
TEŞEKKÜR .....	III
İÇİNDEKİLER .....	IV
ÇİZELGELER DİZİNİ .....	VI
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	VIII
1. GİRİŞ .....	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER .....	5
2.1. Yarıgruplar .....	5
2.2. Doğuray Kümeleri.....	14
2.3. Dönüşüm Yarıgrupları.....	18
2.4. Green Denklik Bağlılıkları .....	21
2.5. Dönüşümlerin Orbitleri .....	26
3. $T_n$ ve $P_n$ YARIGRUPLARI VE BAZI ALT YARIGRUPLARI .....	29
3.1. $T_n$ ve $P_n$ Yarıgruplarının Doğuray Kümeleri.....	29
3.2. $T_n$ ve $P_n$ Yarıgruplarının Altyarıgrupları.....	41
3.3. Stirling Sayıları.....	48
3.4. Catalan Sayıları .....	54
3.5. Altyarıgrupların Rank Özellikleri .....	61
4. İDEMPOTENTLER TARAFINDAN DOĞURULAN DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARI .....	63
4.1. $ST_n$ Yarı grubunda İdempotentlerin İndirgenemez Çarpımı .....	63
4.2. $ST_n$ Yarı grubunun Rank Özellikleri .....	73
KAYNAKLAR .....	85
ÖZGEÇMİŞ .....	87



<b>ÇİZELGELER DİZİNİ</b>	<b>SAYFA</b>
Çizelge 1.1. İzomorfik Olmayan Grup ve Yanıgrup Sayıları.....	1
Çizelge 2.1. $\mathcal{D}$ sınıfının yumurta kutusu .....	24
Çizelge 3.1. $S(m, n)$ Stirling Sayıları .....	50
Çizelge 3.2. $C_n$ Catalan Sayıları.....	56



## ŞEKİLLER DİZİNİ

## SAYFA

Şekil 2.1. $a$ dönüşümünün orbit grafiği.....	27
Şekil 3.1. Altıgenin 14 farklı şekilde üçgenlere ayrılışı.....	55
Şekil 4.1. Bir $I \subseteq T_4$ , alt kümesinin $\Gamma(I)$ grafiği .....	78
Şekil 4.2. Bir $I \subseteq T_5$ , alt kümesinin $\Gamma(I)$ grafiği .....	79



## 1. GİRİŞ

Yarıgrup, sadece birleşme özelliğini sağlayan bir ikili işlem tanımlanmış boştan farklı kümelerdir. Yarıgruplar, grup yapısından daha az koşulu sağladığından dolayı aynı eleman sayısına sahip birbirine izomorfik olmayan yarıgrupların sayısının gruplara oranla çok fazla olduğu, yarıgrup yapısının ilk dikkat çeken özelliğidir. Aşağıdaki tabloda derecesi en fazla 8 olan izomorfik olmayan grup ve yarıgrup sayılarını görmekteyiz.

Çizelge 1.1. İzomorfik Olmayan Grup ve Yarıgrup Sayıları

Derece	Grupların Sayısı	Yarıgrupların Sayısı
1	1	1
2	1	4
3	1	18
4	2	126
5	1	1.160
6	2	15.973
7	1	15.973
8	5	1.843.120.128

Örneğin yukarıdaki çizelgedeki derecesi 8 olan yarıgruplar hakkındaki bilgiler Satoh, S., Yama, K. ve Tokizawa, M., tarafından 1994 yılında yapılan çalışmada bulunan bilgilerden alınmıştır. Bu çalışmada 1,843,120,128 adet birbirine izomorfik olmayan derecesi 8 olan yarıgrupun mevcut olduğu bu yarıgrupların da 221,805 tanesinin değişmeli yarıgrup olduğu bulunmuştur.

$X$  boştan farklı herhangi bir küme olmak üzere  $X$  kümesinden  $X$  kümesine tanımlı tüm dönüşümlerin kümesini  $T_X$  ile gösterelim.  $T_X$  kümesi bileşke işlemi ile bir yarıgrup olup bu yarıgruba tüm dönüşümler yarıgrubu denir.  $T_X$  yarıgrupunun bir alt yarıgrupuna dönüşüm yarıgrubu diyeceğiz.

Yarıgruplarda da grup teorideki Cayley teoreminin benzer ifadesi vardır. Her sonlu yarıgrup sonlu bir dönüşüm yarı grubuna gömülebileceğinden dönüşüm yarı grupları yarı grup teorisinde önemli bir yere sahiptir. Bu sebeple  $T_X$  in yapısını ve elamanlarının özelliklerini bulmak ve  $T_X$  in doğuray kümesini bulmak konusunda uzun zamandır çalışılmaktadır. Bu çalışmalara örnek olarak Araujo, Branco, Fernandes, Gomes, Ruskuc (2001), Ayık, Ayık, Howie (2005), Ayık, Ayık, Howie, Ünlü (2005), Ayık, Ruskuc (1999), Fernanedes (2002), Ganyushkin, Mazorchuk (2008), Gomes, Howie, (1987), Gomes, Howie (1992), Higgins, Howie, Ruskuc (1998), Howie (1966) ,Howie (1995), Howie, McFadden (1990), Howie (1971), Howie (1978), Howie, Ruskuc (1994) ,Kearnes, Szendrei, Wood (2001), Lipscomb, (1996), Ruskuc (1998) makalelerini verebiliriz.

$X$  boştan farklı herhangi bir küme olsun. Eğer  $\forall x \in \text{dom } a$  için  $|xa|=1$  oluyorsa  $a$  ya  $X$  üzerinde bir *kısmi dönüşüm (fonksiyon)* denir.  $X$  üzerindeki tüm kısmi dönüşümlerin kümesi  $P_X$  ile gösterilir.  $X$  kümesi sonlu  $X_n = \{1, 2, \mathbf{K}, n\}$  kümesi olarak alınırsa tanımlanan tüm dönüşümler ile tüm kısmi dönüşümlerin yarı grupları sırasıyla  $T_n$  ve  $P_n$  ile gösterilsin. Klasik sonlu dönüşümler yarı grubu hakkındaki terminolojiyi bir arada bulacağımız kaynaklara örnek olarak Ganyushkin, Mazorchuk (2008), Howie (1966), Howie (1995), Higgins (1992) kaynak ve çalışmalarını verebiliriz.  $T_n$  ve  $P_n$  yarı gruplarının ve bunların bazı alt yarı gruplarının doğuray kümeleri ve rank özellikleri son yıllarda ağırlıklı olarak çalışılan konular arasındadır.  $T_n$  in alt yarı grupları olan sıra koruyan ve sıra azaltan dönüşüm yarı grupları sırasıyla  $O_n$  ve  $D_n$  ile gösterilsin. Bu tezde bu yarı grupların idempotent elemanlarının Green denklik bağıntıları ve orbitleri incelenmiştir. Ayrıca, tüm dönüşümler yarı grubunun idempotent elemanları tarafından doğurulan alt yarı gruplar ile idempotent ranklar hakkındaki çalışmalar derlenmiştir.

$T_n - S_n$  kümesinin elemanları singüler dönüşüm olarak adlandırılıp tüm singüler dönüşümlerin kümesini  $ST_n$  ile gösterelim. Dönüşüm yarı gruplarının doğurayları ile ilgili ilk çalışmalardan biri, yarı grup teorisine yön verenlerden biri

olan J.M. Howie nin, singüler dönüşümler yarıgrubunun idempotentler tarafından doğurulduğunu gösteren 1966 yılında yayımlanan çalışması olmuştur.

Stirling ve Catalan sayıları  $T_n$  ve  $P_n$  nin bazı alt yarıgruplarının eleman sayıları ve bazı alt yarıgrupların belli tipteki elemanların sayıları belirlendiği çalışmalarda karşımıza çıkmaktadır. Bu sebeple Stirling ve Catalan sayıları tanımlanmıştır. Stirling ve Catalan sayılarına rank hesaplamalarında karşılaşılmakta olup ilgili çalışmalar ve sonuçlar üçüncü bölümde derlenmiştir.

Öncelikle  $E(ST_n)$  ile singüler dönüşümler kümesindeki tüm idempotentlerin kümesini gösterelim. Singüler dönüşümler kümesindeki tüm idempotentlerin sayısı

$$|E(ST_n)| = \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} r^{n-r}$$

dir.  $S_n$  nin birim dönüşümü idempotent olup bu sayılara eklenerek,  $T_n$  deki tüm idempotentlerin sayısı bulunur. Bu sayı aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

$$|E(T_n)| = \left( \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} r^{n-r} \right) + 1 = \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} r^{n-r}$$

dir.

Bu tezde singüler dönüşümler yarıgrubu  $ST_n = T_n - S_n$  için doğuray kümesi oluşturan çalışmalar araştırılıp derlenmiştir. Hatırlanacak olursa  $a \in ST_n$  ise  $|ima| \leq n-1$  dir.  $K_{n,r}^*$  kümesini

$$K_{n,r}^* = \{a \in T_n : |ima| = r\}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda dikkat edilecek olursa

$$K_{n,n}^* = S_n \text{ ve } \bigcup_{r=1}^{n-1} K_{n,r}^* = ST_n$$

dir. J.M. Howie nin (1966) daki çalışmasında, eğer bir  $X \subseteq ST_n$  için  $K_{n,n-1}^* \subseteq \langle X \rangle$  ise  $ST_n = \langle X \rangle$  olduğu gösterilmiştir. Yine ayrıca J.M. Howie nin 1966 daki çalışmasında  $n \geq 2$  olmak üzere her  $a \in D_{n-1}$  elemanı defecti 1 olan idempotentlerin çarpımı olarak yazılabileceği gösterilmiştir.

$I$  defecti 1 olan idempotentlerden oluşan bir küme olsun. Köşe kümesi  $X_n$  olan ve kenar (ok) listesi  $\forall \binom{i}{j} \in I$  için  $(j, i)$  oklarından oluşan grafiği  $\Gamma(I)$  ile gösterelim.  $I$  kümesinin,  $ST_n$  in bir doğuray kümesi olması için gerek ve yeter koşulun  $\Gamma(I)$  nin tam ve sıkı bağlantılı olması gerektiği J. M. Howie tarafından 1978 de yapılan çalışmada gösterilmiştir.

$S$  bir yarıgrup olsun. Bu yarı grubun idempotent rankı

$$idrank(S) = \min\{|A| : A \subseteq E(S) \text{ ve } \langle A \rangle = S\}$$

olarak tanımlanır. J.M. Howie, (1978) daki çalışmasında singüler dönüşümler yarı grubunun idempotent rankının  $\frac{n(n-1)}{2}$  ve (1987) de de Gomes ile birlikte yaptığı çalışmada singüler dönüşümler yarı grubunun rankının idempotent rankına eşit olduğunu göstermiştir.

## 2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde, yarıgrup teorisinde yer alan ileride kullanacağımız bazı temel tanım ve teoremleri vereceğiz. Yarıgruplar hakkındaki genel terminoloji için Howie (1995), klasik sonlu dönüşümler yarıgrubu hakkındaki terminoloji için Ganyushkin, Mazorchuk (2008), Higgins (1992) kaynakları kullanılmıştır.

### 2.1. Yarıgruplar

**Tanım 2.1.1:**  $S$  boş olmayan bir küme olsun.

$$m : S \times S \rightarrow S$$

tanımlı fonksiyonuna  $S$  üzerinde bir ikili işlem ve  $(S, m)$  ikilisine bir *grupoid* denir. Her  $s, t \in S$  için  $(s, t)m$  yerine  $s \cdot t$  veya  $st$  ve  $(S, m)$  yerine  $(S, \cdot)$  yazılır.

**Tanım 2.1.2:**  $(S, \cdot)$  bir grupoid olsun. Eğer, her  $s, t, u \in S$  için

$$(s \cdot t) \cdot u = s \cdot (t \cdot u)$$

“ $\cdot$ ” işlemi birleşmeli ise  $(S, m)$  ikilisine bir *yarıgrup* denir.

Eğer bir tek yarıgruptan bahsediliyorsa veya  $S$  üzerinde ikili işlem belli ise  $(S, \cdot)$  yerine kısaca  $S$  olarak alınır.

$\mathbf{N, Z, Q, R, C}$  ve  $\mathbf{Z}_n$  sayı kümeleri hem toplama hem çarpma ile birer yarıgruptur.

**Tanım 2.1.3:**  $S$  bir yarıgrup olsun.

- i. Her  $s, t \in S$  için  $st = ts$  oluyorsa  $S$  yarıgrubuna bir *değişmeli yarıgrup*,
- ii. Her  $a, s, t \in S$  için  $as = at$  iken  $s = t$  oluyorsa  $S$  ye *sol sadeleşmeli yarıgrup*

- iii. Her elemanı idempotent olan bir yarıgruba *band*
- iv. Değişmeli bantlara *yarılatis* denir.

**Tanım 2.1.4:**  $S$  bir yarıgrup olsun. Eğer  $\forall s \in S$  için  $z \cdot s = s$  olacak şekildeki  $z \in S$  elemanı varsa  $z \in S$  elemanına bir *sol sıfır eleman*,  $s \cdot z = z$  olacak şekildeki  $z \in S$  elemanı varsa  $z \in S$  elemanına bir *sağ sıfır eleman* denir.  $z \in S$  elemanı hem sağ sıfır eleman hem de sol sıfır eleman ise  $z$  ye *sıfır eleman* denir.

**Önerme 2.1.5:** Bir  $S$  yarı grubunun sıfır elemanı varsa tektir.

**İspat:**  $0$  ve  $0'$ , bir  $S$  yarı grubunun iki sıfır elemanı olsun.

$$\begin{aligned} 0 &= 00', (0, \text{ sıfır eleman olduğundan}) \\ &= 0', (0', \text{ sıfır eleman olduğundan}) \end{aligned}$$

olur. ■

**Tanım 2.1.6:**  $S$  bir yarıgrup olsun. Her  $s \in S$  için  $es = s$  oluyorsa  $e \in S$  ye  $S$  nin bir *sol birim elemanı*,  $se = s$  oluyorsa  $e \in S$  ye  $S$  nin bir *sağ birim elemanı* denir. Hem sol hem de sağ birim olan elemana *birim eleman* denir.

**Önerme 2.1.7:** Bir  $S$  yarı grubunun birim elemanı mevcut ise tektir.

**İspat:**  $e, f \in S$ ,  $S$  yarı grubunun iki birim elemanı olsun.  $e$  birim eleman olduğundan  $e \cdot f = f$  ve  $f$  birim eleman olduğundan  $f \cdot e = e$  olup

$$f = ef = fe = e$$

olacağından  $e = f$  yani birim eleman tektir. ■

**Tanım 2.1.8:**  $S$  bir yarıgrup olsun. Eğer  $S$  bir birim elemana sahip ise  $S$  ye bir *monoid* denir.

$S$  bir yarıgrup olsun. Eğer  $S$  de birim eleman mevcut ise birim eleman 1 ile sıfır eleman mevcut ise 0 ile gösterilir. Eğer

$$S^1 = \begin{cases} S, & 1 \in S \\ S \cup 1, & 1 \notin S \end{cases}$$

olarak tanımlanan  $S^1$  üzerinde ikili işlem  $\forall s, t \in S^1$  için

$$st = \begin{cases} st, & s, t \neq 1 \\ t, & s = 1 \\ s, & t = 1 \\ 1, & s = t = 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ise  $S^1$  bir monoid olup buna *gerekli ise  $S$  ye birim eleman eklenerek elde edilen monoid* denir.  $S^0$  benzer şekilde tanımlanır ve *gerekli ise  $S$  ye sıfır eleman eklenerek elde edilen yarıgrup* denir.

**Tanım 2.1.9:**  $S$  bir yarıgrup ve  $a \in S$  olsun. Eğer,  $a^2 = a$  ise  $a$  elemanına  $S$  nin bir *idempotent elemanı* denir. Eğer  $S$  sıfırlı bir yarıgrup ve  $a \in S$  için  $a^k = 0$  pozitif  $k$  tamsayısı varsa  $a$  elemanına  $S$  nin bir *nilpotent elemanı* denir.

Bir  $S$  yarıgrupunun tüm idempotent elemanlarının kümesini  $E(S)$  ile ve bir sıfırlı  $S$  yarıgrupunun tüm nilpotent elemanlarının kümesini  $N(S)$  ile gösterelim.

$e^2 = e$  olmak üzere tek elemanlı  $S = \{e\}$  yarıgrupuna *trivial (aşikar) yarıgrup* denir.

**Tanım 2.1.10:**  $S$  bir yarıgrup olsun. Eğer  $\forall a \in S$  için  $aS=S$  ve  $Sa=S$  oluyor ise  $S$  ye bir *grup* denir. Diğer bir deyişle,  $S$  bir yarıgrup ve  $e \in S$  iken  $\forall a \in S$  için  $ea=a=ae$  ve  $ba=e=ab$  olacak şekilde bir  $b \in S$  var ise  $S$  ye bir *grup* denir.

**Tanım 2.1.11:**  $S$  bir yarıgrup ve  $f \neq T \subseteq S$  olsun.

- i.  $T^2 \subseteq T$  ise  $T$  ye  $S$  nin bir *alt yarıgrubu*,
- ii.  $ST \subseteq T$  ise  $T$  ye  $S$  nin bir *sol ideali*,
- iii.  $TS \subseteq T$  ise  $T$  ye  $S$  nin bir *sağ ideali*,
- iv.  $ST \subseteq T$  ve  $TS \subseteq T$  ise  $T$  ye  $S$  nin bir *ideali*

denir.

$S$  bir yarıgrup ve  $f \neq T \subseteq S$ ,  $T$  de  $S$  nin alt yarıgrubu ise  $T \leq S$  ile  $T$  de  $S$  nin ideali ise  $T < S$  ile gösterilir.

**Tanım 2.1.12:**  $S, T$  iki yarıgrup ve herhangi bir  $f : S \rightarrow T$  dönüşümü her  $x, y \in S$  için

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

oluyorsa  $f$  dönüşümüne (yarıgrup) *homomorfizm* denir.

**Tanım 2.1.13:**  $S, T$  iki yarıgrup ve herhangi bir  $f : S \rightarrow T$  dönüşüm olsun.

- i.  $f$  örten bir homomorfizm ise  $f$  ye *epimorfizm*,
- ii.  $f$  birebir bir homomorfizm ise  $f$  ye *monomorfizm*,
- iii.  $f$  birebir ve örten bir homomorfizm ise  $f$  ye *izomorfizm*,

denir

.  $S$  ve  $T$  yarıgrupları arasında bir izomorfizm var ise  $S$  ile  $T$  ye izomorfik yarıgruplar denir ve  $S \cong T$  ile gösterilir. Ayrıca  $f : S \rightarrow S$  dönüşümü bir homomorfizm ise  $f$  ye *endomorfizm*,  $f$  izomorfizm ise  $f$  ye *otomorfizm* denir.

**Tanım 2.1.14:**  $X \neq \emptyset$  bir küme olsun.  $X \times X$  kartezyen çarpımının her alt kümesine bir *bağıntı* denir. Eğer  $a$ ,  $X$  üzerinde bir bağıntı ise

$$a^{-1} = \{(x, y) \in X \times X : (y, x) \in a\}$$

bağıntısına  $a$  nin *ters bağıntısı* denir.  $X$  üzerindeki tüm bağıntıların kümesi  $B_X$  ile gösterilir.

**Tanım 2.1.15:**  $a$ ,  $X$  üzerinde bir bağıntı olsun.

- i. Her  $x \in X$  için  $(x, x) \in a$  ise  $a$  ya *yansımali*,
- ii. Her  $x, y \in X$  için  $(x, y) \in a \Rightarrow (y, x) \in a$  ise  $a$  ya *simetrik*,
- iii. Her  $x, y \in X$  için  $(x, y), (y, x) \in a \Rightarrow x = y$  ise  $a$  ya *anti simetrik*,
- iv. Her  $x, y, z \in X$  için  $(x, y), (y, z) \in a \Rightarrow (x, z) \in a$  ise  $a$  ya *geçişmeli*

*bağıntı* denir. Eğer  $a$  bağıntısı yansıyan, simetrik ve geçişmeli bir bağıntı ise  $a$  ya *denklik bağıntısı*, eğer  $a$  bağıntısı yansıyan, anti simetrik ve geçişmeli bir bağıntı ise  $a$  ya (kısmi) *sıralama bağıntısı* denir.

$B_X$  üzerinde bir “ $\circ$ ” ikili işlemi her  $a, b \in B_X$  için

$$a \circ b = \{(x, y) : \exists z \in X \text{ için } (x, z) \in a \text{ ve } (z, y) \in b\}$$

şeklinde tanımlansın. Tanımlanan bu ikili işlem ile  $(B_X, \circ)$  bir yarıgrup olup buna  $X$  üzerinde *tüm bağıntılar yarı grubu* denir.

**Tanım 2.1.16:**  $a \in B_X$  alalım.

$$\text{dom } a = \{x \in X : \exists y \in X \text{ için } (x, y) \in a\}$$

$$\text{ima } a = \{x \in X : \exists y \in X \text{ için } (y, x) \in a\}$$

şeklinde tanımlanan  $X$  kümesinin altkümelerine sırasıyla  $a$  nın tanım kümesi ve görüntü (imaj)kümesi denir.

Ayrıca,  $\forall x \in X$  ve  $\forall f \neq Y \subseteq X$  için

$$xa = \{y \in X : (x, y) \in a\}$$

ve

$$y = \bigcup_{x \in Y} xa$$

olarak tanımlanır. Sonuç olarak  $x \in \text{doma}$  olması için gerek ve yeter şart  $xa \neq f$  olmasıdır.

Eğer  $a$  bir denklik bağıntısı ise  $X$  kümesini ayırık alt kümelere parçalaması en önemli özelliklerinden biridir. Bu durumda  $x \in X$  için

$$a_x = \{y \in X : (x, y) \in a\}$$

kümesine  $x$  in *denklik sınıfı* denir. Dikkat edilecek olursa  $a_x$  ve  $xa$  aynı kümelerdir. Bazen bu kümeler  $x/a$  olarak da gösterilir. Tüm denklik sınıflarının kümesi  $X/a$  ile gösterilip  $X/a = \{a_x : x \in X\}$  olarak tanımlanır.

$a^{-1}$  ters bağıntısı ve  $1_x = \{(x, x) : x \in X\}$  kümesi  $X$  üzerinde birer denklik bağıntısıdır. Ayrıca  $\{a_i : i \in I\}$ ,  $X$  üzerindeki denklik bağıntılarının bir kümesi ise

$\bigcap_{i \in I} a_i$  kümesi de  $X$  üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

**Tanım 2.1.17:**  $S$  bir yarıgrup ve  $R$  de  $S$  üzerinde bir bağıntı olsun.

- i. Eğer  $\forall a \in S$  ve  $(s, t) \in R$  için  $(as, at) \in R$  ise  $R$  ye *sol uyumlu*,
- ii. Eğer  $\forall a \in S$  ve  $(s, t) \in R$  için  $(sa, ta) \in R$  ise  $R$  ye *sağ uyumlu*

denir. Ayrıca, her  $(u, v), (s, t) \in R$  için  $(us, vt) \in R$  oluyor ise  $R$  ye *uyumlu bağıntı* denir.

**Tanım 2.1.18:**  $S$  bir yarıgrup ve  $R$  de  $S$  üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Eğer  $R$  sol uyumlu ise  $R$  ye *sol kongrüans*,  $R$  sağ uyumlu ise  $R$  *sağ kongrüans* denir. Ayrıca,  $R$  uyumlu ise  $R$  ye *kongrüans* denir.

**Önerme 2.1.19:**  $S$  bir yarıgrup ve  $r$ ,  $S$  üzerinde bir bağıntı olsun.  $r$  nin bir kongrüans olması için gerek ve yeter koşul  $r$  nin hem sol hem de sağ kongrüans olmasıdır.

**İspat:**  $(\Rightarrow)$ :  $r$  bir kongrüans olsun. Eğer  $(s, t) \in r$  ve  $a \in S$  ise yansımaliğtan  $(a, a) \in r$  ve uyumluluktan  $(as, at) \in r$  ve  $(sa, ta) \in r$  olur. Böylece  $r$  hem sol hem de sağ uyumlu olur.

$(\Leftarrow)$ :  $r$  hem sol hem de sağ kongrüans olsun.  $(s, t), (s', t') \in r$  alalım. O zaman sağ uyumluluktan  $(ss', ts') \in r$  ve sol uyumluluktan  $(ts', tt') \in r$  olur. Böylece geçişmelilikten  $(ss', tt') \in r$  dır. Yani  $r$  bir kongrüanstır. ■

**Tanım 2.1.20:**  $S$  bir yarıgrup ve  $R$ ,  $S$  üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. O halde  $R \subseteq S \times S$  olup  $S$  üzerinde  $R$  yi içeren en az bir kongrüans vardır.  $S$  üzerinde  $R$  yi içeren tüm kongrüansların arakesiti de  $R$  yi içeren bir kongrüans olup bu kongrüansa  $R$  tarafından *doğurulan kongrüans* denir ve  $R^\#$  ile gösterilir.

$$R^\# = \mathbf{I} \{ r : R \subseteq r \text{ ve } r, S \text{ üzerinde bir kongrüans} \}$$

tanımdan kolayca görülüyor ki  $R^\#$ ,  $R$  yi içeren en küçük kongrüanstır.

**Önerme 2.1.21:**  $S$  bir yarıgrup ve  $R$ ,  $S$  üzerinde herhangi bir bağıntı olmak üzere

$$R^c = \{(xay, xby) : x, y \in S^1, (a, b) \in R\}$$

şeklinde tanımlanan  $R^c$  kümesi,  $R$  yi içeren en küçük sol ve sağ uyumlu bağıntıdır.

**İspat:**  $R^c$  nin,  $R$  yi içerdiği açıktır.  $R^c$  nin sol uyumlu olduğunu göstermek için  $(u, v) \in R^c$  ve  $w \in S$  alalım. O zaman bazı  $x, y \in S^1$  ve  $(a, b) \in R$  için  $u = xay$  ve  $v = xby$  olur. Böylece  $wu = (wx)ay$  ve  $wv = (wx)by$  dir ve dolayısıyla  $(wu, wv) \in R^c$  elde edilir. Yani  $R^c$  sol uyumludur. Sağ uyumluluk da benzer şekilde gösterilir. Şimdi  $R^c$  nin en küçük olduğunu gösterelim.  $S$ ,  $R$  yi içeren sol ve sağ uyumlu bir başka bağıntı olsun. O zaman tüm  $x, y \in S^1$  ve tüm  $(a, b) \in R$  için  $(xay, xby) \in S$  olur. Dolayısıyla  $R^c \subseteq S$  dir. ■

**Önerme 2.1.22**  $S$  yarıgrubu üzerindeki her  $R$  bağıntısı için  $R^\# = (R^c)^e$  dir.

**İspat:** Yukarıdaki Önerme den  $(R^c)^e$  nin  $R^c$  yi ve elbette  $R$  yi içeren bir denklik bağıntısı olduğu açıktır.  $(R^c)^e$  nin bir kongrüans olduğunu göstermek için hem sol hem de sağ uyumlu olduğunu göstermeliyiz.  $(s, t) \in (R^c)^e$  ve  $a \in S$  olsun. O zaman  $S = R^c \cup (R^c)^{-1} \cup 1_S^c$  olmak üzere bazı  $n \in \mathbb{N}$  için  $(s, t) \in S^n$  olur.  $1_S^c = 1_S$  olduğundan

$$S = R^c \cup (R^{-1})^c \cup 1_S^c = (R \cup R^{-1} \cup 1_S)^c$$

elde edilir. Böylece hem  $S$  hem de  $S^n$  sol ve sağ uyumludur.  $(as, at) \in S^n \subseteq (R^c)^e$  ve  $(sa, ta) \in S^n \subseteq (R^c)^e$  dir ve dolayısıyla  $(R^c)^e$ ,  $S$  yarıgrubu üzerinde  $R$  yi içeren bir kongrüanstır.

$(R^c)^e$  nin  $S$  yarıgrubu üzerinde  $R$  yi içeren en küçük kongrüans olduğunu göstermek için  $S$  yarıgrubu üzerinde  $R$  yi içeren başka bir  $\kappa$  kongrüansını ele alalım.  $\kappa^c = \kappa$  olduğundan  $R^c \subseteq \kappa^c = \kappa$  olur. Yani  $\kappa$ ,  $R^c$  yi içeren bir denklik bağıntısıdır ve  $(R^c)^e \subseteq \kappa$  dır. ■

**Tanım 2.1.23:**  $S$  bir yarıgrup ve  $r$ ,  $S$  üzerinde bir kongrüans olsun.  $S$  nin  $r$  ile bölümünden elde edilen  $S/r$  bölüm kümesi,  $\forall x, y \in S/r$  için

$$(xr)(yr) = (xy)r$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile bir yarıgrup olup bu yarıgruba  $S$  nin  $r$  ile elde edilen *bölüm yarıgrubu* denir.

**Tanım 2.1.24:**  $S$  bir yarıgrup ve  $r$ ,  $S$  üzerinde bir kongrüans olsun.

$$r^* : S \rightarrow S/r$$

$$a \mathbf{a} ar$$

şeklinde tanımlanan  $r^*$ , örten bir homomorfizm olup bu homomorfizme *doğal homomorfizm* denir.

**Teorem 2.1.25:**  $S, T$  iki yarıgrup ve  $f: S \rightarrow T$  bir homomorfizm olsun. Bu durumda

$$\ker f = f \circ f^{-1} = \{(a, b) \in S \times S : af = bf\}$$

$S$  üzerinde bir kongrüanstır.

**İspat:**  $\ker f$ ,  $S$  üzerinde bir denklik bağıntısı olup  $\forall (a,b),(c,d) \in \ker \phi$  için  $a\phi = b\phi$  ve  $c\phi = d\phi$  olduğundan  $(a\phi)(c\phi) = (b\phi)(d\phi)$  olur.  $f$  bir homomorfizm olduğundan  $(ac)\phi = (bd)\phi$  olup  $(ac,bd) \in \ker \phi$  dir. Yani  $\ker \phi$  bir kongrüanstır. ■

**Tanım 2.1.26:**  $S$  bir yarıgrup ve  $R$  de  $S$  üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer  $c, d \in S$  için  $c = sat$  ve  $d = sbt$  olacak şekilde  $s, t \in S^1$  ve  $(a,b) \in R \cup R^{-1}$  mevcut ise  $c$  ile  $d$  bir basit  $R$ -bağlantılıdır veya  $c, d$  den bir  $R$  bağıntısı kullanılarak elde edilmiştir denir ve  $c \xrightarrow{R} d$  ile gösterilir.  $c \xrightarrow{R} d$  ise  $d \xrightarrow{R} c$  olduğu açıktır ve  $(c,d) \in R^c \cup (R^c)^{-1}$  dir.

Ayrıca,  $S$  bir yarıgrup ve  $R$  de  $S$  üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer  $(a,b) \in S$  için  $a = b$  veya  $c_i = s_i a_i t_i$ ,  $c_{i+1} = s_{i+1} b_i t_{i+1}$  ile  $(a_i, b_i) \in R \cup R^{-1}$  olmak üzere  $c_i \xrightarrow{R} c_{i+1}$  bir basit  $R$ -bağlantılı olacak şekilde

$$a = c_1 \rightarrow c_2 \rightarrow \dots \rightarrow c_{n-1} \rightarrow c_n = b$$

$S$  nin elemanlarının sonlu bir dizisi var ise  $a$  ile  $b$   $R$  nin bir sonucudur veya  $a$  ile  $b$   $R$ -bağlantılıdır denir,  $a \xrightarrow[*]{R} b$  ile gösterilir.

## 2.2. Doğuray Kümeleri

**Tanım 2.2.1:**  $S$  bir yarıgrup ve  $X$  de  $S$  nin boş olmayan bir alt kümesi olsun.  $S$  nin  $X$  kümesini içeren tüm altarıgruplarının arakesiti de  $X$  kümesini içeren bir altarıgrup olup bu altarıgruba  $S$  nin  $X$  tarafından doğurulan alt yarıgrup denir ve  $\langle X \rangle$  ile gösterilir.

$M$  bir monoid (grup) ve  $f \neq X \subseteq M$  olsun.  $X$  i içeren  $S$  nin en küçük monoidine (altgrubuna)  $X$  tarafından doğurulan alt monoid (alt grup) denir.

Notasyonda karışıklığı önlemek için  $X$  tarafından doğurulan alt yarıgrup  $sg < X >$ ;  $X$  tarafından doğurulan alt monoid  $mg < X >$  ve  $X$  tarafından doğurulan alt grup  $gg < X >$  ile gösterilir.

**Önerme 2.2.2:**  $S$  bir yarıgrup ve  $X$  ile  $Y$ ,  $S$  nin boş olmayan iki alt kümesi olsun. Eğer  $X \subseteq Y$  ise  $\langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle$  dir.

**İspat:**  $\langle X \rangle = T$  ve  $\langle Y \rangle = U$  olsun.  $X \subseteq T$  ve  $X \subseteq Y \subseteq U$  olduğundan  $X \subseteq U \cap T$  olur.  $U \cap T$  de  $S$  nin bir alt yarıgrubu olup  $X$  i içerir.  $U \cap T \subseteq T$  ve  $T$  de  $X$  i içeren en küçük alt yarıgrup olduğundan  $U \cap T = T$  olur ve dolayısıyla  $T \subseteq U$  olur. ■

**Önerme 2.2.3:**  $S$  bir yarıgrup ve  $f \neq X \subseteq S$  olsun. O halde,  $X$  üzerindeki tüm sonlu çarpımların kümesi, bir diğer deyişle

$$\{x_1 x_2 \dots x_n : n \in \mathbb{Z}^+ \text{ ve } x_1, x_2, \dots, x_n \in X\}$$

kümesi  $X$  in doğurduğu alt yarıgruba eşit olur.

**İspat:**  $T = \{x_1 x_2 \dots x_n : n \in \mathbb{Z}^+ \text{ ve } x_1, x_2, \dots, x_n \in X\}$  olsun.  $\forall n \in \mathbb{Z}^+$  için  $x_1, x_2, \dots, x_n \in X \subseteq \langle X \rangle$  olduğundan  $x_1 x_2 \dots x_n \in \langle X \rangle$  yani  $T \subseteq \langle X \rangle$  olur.

Ayrıca,  $X \subseteq T$  ( $n = 1$ ) ve  $\forall x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n \in X$  için

$$u = x_1 x_2 \dots x_m y_1 \dots y_n$$

de  $X$  üzerinde sonlu bir çarpım olup  $u \in T$  dir. Böylece,  $T$  de  $X$  i içeren bir alt yarıgrup olup  $X \subseteq T$  ve tanım gereği  $\langle X \rangle = T$  olur. ■

Özel olarak, sonlu bir yarıgrup aynı zamanda kendisi için bir sonlu doğuray kümesi olup sonlu doğuraylıdır.

**Tanım 2.2.4:**  $S$  bir yarıgrup ve  $S = \langle X \rangle$  olsun. Eğer  $X = \{x\}$  şeklinde tek elemanlı bir küme ise  $S$  ye *monojenik (tek doğuraylı) yarıgrup* denir ve  $S = \langle x \rangle$  şeklinde de yazılabilir.

**Tanım 2.2.5:**  $S$  bir yarıgrup ve  $f \neq X \subseteq S$  olsun. Eğer  $\langle X \rangle = S$  ise  $X$  e  $S$  nin bir *doğuray* denir. Eğer bir sonlu  $f \neq X$  alt kümesi için  $S = \langle X \rangle$  ise  $S$  ye *sonlu doğuraylı bir yarıgrup* denir.

$S$  sonlu doğuraylı bir yarıgrup olsun. O zaman,

$$\min\{|X| : X \subseteq S, |X| < \infty, \langle X \rangle = S\}$$

pozitif tamsayısına  $S$  nin *yarıgrup rankı* denir;  $rank(S)$  veya  $s\text{-rank}(S)$  ile gösterilir.

**Tanım 2.2.6:**  $S$  bir yarıgrup ve  $A$  da  $S$  nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer  $S$  nin her doğurayı  $A$  yı içeriyor ise  $A$  ya  $S$  nin *indirgenemez elemanlarının bir kümesi* denir.

**Tanım 2.2.7:**  $S$  bir yarıgrup ve  $a \in S$  olsun. Eğer her  $s, t \in S$  için  $st = a$  olduğunda  $s = a$  veya  $t = a$  olmak zorunda ise  $a \in S$  ye  $S$  nin *bir asal elemanı* denir.

**Önerme 2.2.8:**  $S$  bir yarıgrup olsun.  $A = (S \setminus S^2) \cup \{a \in S : a \text{ asal}\}$  olarak tanımlanan  $A$  kümesi indirgenemez elemanlardan oluşur.

**İspat:** Asal ve indirgenemez eleman tanımlarından açıktır. ■

**Not:**  $a$  hem asal hem idempotent olabilir. Bu durumda  $a \notin S \setminus S^2$  dir.

**Önerme 2.2.9:**  $S$  sonlu doğuraylı bir yarıgrup olsun.  $S$  nin (varsa) asal elemanları ve  $S \setminus S^2$  kümesinin elemanları indirgenemezdir.

**İspat:**  $S$  sonlu doğuraylı bir yarıgrup ve  $X \neq f$  de  $S$  nin herhangi bir doğurayı olsun. Eğer  $S \setminus S^2 \neq f$  ise bir  $s \in S \setminus S^2$  alalım.  $S = \langle X \rangle$  olduğundan  $s = x_1 x_2 \dots x_n$  olacak şekilde  $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$  vardır.

$n \geq 2$  olursa  $s = x_1(x_2 x_3 \dots x_n)$  olur ki bu  $S \setminus S^2$  olması ile çelişir ve  $s \in X$  olur. Böylece,  $S \setminus S^2 \subset X$  olur. Dolayısıyla,  $S \setminus S^2$  nin elemanları indirgenemezdir.

Şimdi  $s \in S$  asal elemanını olsun.  $S = \langle X \rangle$  olduğundan  $s = x_1 x_2 \dots x_n$  olacak şekilde  $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$  vardır.  $n = 1$  ise  $s = x_1 \in X$  olur.  $n \geq 2$  ise  $s = x_1(x_2 x_3 \dots x_n)$  şeklinde düşünülürse  $s$  asal olduğundan  $s = x_1$  ise  $s \in X$  olur.  $s = x_2 \dots x_n$  olması durumunda  $n = 2$  ise  $s = x_2 \in X$  olur. Eğer,  $s = x_2(x_3 \dots x_n)$  olup benzer şekilde devam edildiğinde  $n < \infty$  olduğundan en az bir  $1 \leq i \leq n$  için  $s = x_i$  olmak zorundadır. O halde,  $s \in X$  olur. Böylece, asal elemanlar da indirgenemezdir. ■

**Önerme 2.2.10:**  $S$  sonlu doğuraylı bir yarıgrup ve  $T \subseteq S$  olsun. Eğer  $S \setminus T$ ,  $S$  nin bir ideali ise  $S$  nin her doğurayı  $T$  nin bir doğurayını içerir. Bir başka deyişle,  $X$   $S$  nin bir doğurayı ise  $T \cap X$  de  $T$  nin bir doğurayı olur ve  $T$  de sonlu doğuraylı olur.

**Tanım 2.2.11:**  $S$  bir yarıgrup ve  $X$  de  $S$  nin bir sonlu doğurayı olsun. Eğer,  $|X| = \text{rank}(S)$  ise  $X$  e bir *minimal doğuray kümesi* denir. Eğer  $X$  sadece indirgenemez elemanlardan oluşan bir doğuray kümesi ise  $X$  e *minimum doğuray kümesi* denir.

**Tanım 2.2.12:**  $S$  bir yarıgrup ve  $T \leq S$  olsun. Eğer,  $|S \setminus T| < \infty$  ise  $T$  ye  $S$  nin *sonlu indeksli altgrubu* veya  $S$  ye  $T$  nin bir *küçük genişlemesi* denir.

**Önerme 2.2.13:**  $S$  bir yarıgrup,  $T \subseteq S$  ve  $S \setminus T < S$  olsun. Eğer  $S = \langle X \rangle$  ise  $T = \langle T \cap X \rangle$  olur.

**İspat:**  $S = \langle X \rangle$  ve  $Y = T \cap X$  olsun. Herhangi bir  $t \in T$  için  $t \in S = \langle X \rangle$  olduğundan  $t = x_1 x_2 \dots x_{i-1} x_i x_{i+1} \dots x_n$  olacak şekilde  $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n \in X$  vardır. Eğer herhangi bir  $1 \leq i \leq n$  için  $x_i \in S \setminus T$  olsaydı  $S \setminus T < S$  olduğundan  $t = x_1 x_2 \dots x_{i-1} x_i x_{i+1} \dots x_n$  olurdu ki bu da  $t \in T$  ile çelişir. O halde, tüm  $x_1, x_2, \dots, x_n \in T$  olur ve dolayısıyla  $x_1, x_2, \dots, x_n \in Y = T \cap X$  olur. Böylece,  $t \in Y$  yani  $\langle Y \rangle = T$  olur. ■

### 2.3. Dönüşüm Yarıgrupları

Bu bölümde tüm dönüşümler yarıgrubu ve tüm kısmi dönüşümler yarıgrubu, yarıgrupun elamanları, doğuray kümeleri ve rank özellikleri incelenecektir.  $X \neq f$  bir küme olmak üzere  $X$  üzerindeki tüm bağıntıların kümesi daha önce  $B_x$  ile gösterildi.

**Tanım 2.3.1:**  $x \in B_x$  olsun. Eğer  $\forall x \in \text{dom } a$  için  $|xa| = 1$  oluyorsa  $a$  ya  $X$  üzerinde bir *kısmi dönüşüm (fonksiyon)* denir.  $X$  üzerindeki tüm kısmi dönüşümlerin kümesi  $P_x$  ile gösterilir.  $P_x$  kümesi bileşke işlemi ile yarıgrup olup bu yarıgruba  $X$  üzerindeki *tüm kısmi dönüşümler yarıgrubu* denir.

**Önerme 2.3.2:**  $X \neq f$  olmak üzere  $P_x$  kümesi  $B_x$  in bir altarı grubudur.

**İspat:**  $a, b \in P_x$  olsun. Eğer  $\text{dom}(a \circ b) = f$  ise  $a \circ b$  bir boş bağıntı olup  $P_x$  in bir elemanıdır.

$\text{dom}(a \circ b) \neq f$  ise herhangi bir  $x \in \text{dom}(a \circ b)$  alalım. O zaman,  $\exists y \in X$  için  $(x, y) \in (a \circ b)$  olup  $(x, z) \in a$  ve  $(z, y) \in b$  olacak şekilde bir  $z \in X$  vardır.  $(x, u) \in a$  ise  $a \in P_x$  olduğundan  $u = z$  olmak zorundadır. Ayrıca,  $(z, v) \in b$  ise

$b \in P_x$  olduğundan  $v = y$  olmak zorundadır. O halde,  $x(a \bullet b) = \{y\}$  olup  $(a \bullet b) \in P_x$  olur. ■

**Tanım 2.3.3:**  $X \neq f$  olsun.  $a \in P_x$  için  $\text{dom } a = X$  oluyor ise  $a$  ya bir *tam dönüşüm* denir.  $X$  üzerindeki tüm tam dönüşümlerin kümesi  $T_x$  ile gösterilir.  $T_x$  kümesi bileşke işlemi ile yarıgrup olup bu yarıgruba  $X$  üzerindeki *tüm (tam) dönüşümler yarı grubu* denir.

**Önerme 2.3.4:**  $T_x$  kümesi  $P_x$  in bir alt yarı grubudur.

**İspat:**  $a, b \in T_x$  olsun. O zaman,  $\text{dom } a = \text{dom } b = X$  olup  $\forall x \in X$  için  $|xa| = |xb| = 1$  dir.  $\text{dom}(a \bullet b) \subseteq X$  dir. Herhangi bir  $x \in X$  elemanını alalım.  $x \in \text{dom } a$  olduğundan  $(x, y) \in a$  olacak şekilde bir  $y \in X$  vardır. Ayrıca,  $y \in \text{dom } b$  olup  $(y, z) \in b$  olacak şekilde bir  $z \in X$  vardır. Böylece,  $(x, y) \bullet (y, z) = (x, z) \in a \bullet b$  olup  $x \in \text{dom}(a \bullet b)$  olup  $X \subseteq \text{dom}(a \bullet b)$  dir yani  $X = \text{dom}(a \bullet b)$  dir. O halde,  $a \bullet b \in T_x$  dir. ■

**Tanım 2.3.5:**  $X \neq f$  olsun.  $a \in T_x$  için  $\text{ima} = X$  oluyor ise  $a$  ya bir *örten dönüşüm* denir. Eğer  $\forall x, y \in X$  için  $xa = ya$  iken  $x = y$  oluyorsa  $a$  ya bir *birebir dönüşüm* denir.  $a \in T_x$  hem örten hem de birebir dönüşüm ise  $a$  ya  $X$  üzerinde bir *permütasyon* denir.  $X$  üzerindeki tüm permütasyonların kümesi  $S_x$  ile gösterilir.

Eğer  $X$  sonlu bir küme ise  $X$  yerine  $X_n = \{1, 2, \mathbf{K}, n\}$  ve  $B_x, P_x, T_x, S_x$  sembolleri yerine  $B_n, P_n, T_n, S_n$  sembolleri kullanılır.

**Tanım 2.3.6:**  $a \in P_n$  olsun.

$$\ker a = \{(x, y) : xa = ya\}$$

şeklinde tanımlanan  $\ker a$  kümesine  $a$  nın çekirdeği (kernal) denir.

**Teorem 2.3.7:**  $a, b \in T_n$  olsun. O zaman,

- i.  $im(a \circ b) \subseteq imb$
- ii.  $\ker a \subseteq \ker(a \circ b)$

dır.

**İspat:**

- i.  $y \in im(a \circ b)$  olsun. O zaman  $(x, y) \in a \circ b$  olacak şekilde bir  $x \in X_n$  vardır. Bileşkenin tanımından  $(x, z) \in a$  ve  $(z, y) \in b$  olacak şekilde bir  $z \in X_n$  vardır. Böylece  $(z, y) \in b$  olup  $y \in imb$  olur.
- ii.  $(x, y) \in \ker a$  olsun. O zaman,  $xa = ya$  olup  $b$  iyi tanımlı olduğundan  $(xa)b = (ya)b$  yani  $x(a \circ b) = y(a \circ b)$  olup  $(x, y) \in \ker(a \circ b)$  olur. ■

**Tanım 2.3.8:**  $a \in T_n \setminus S_n$  ise  $a$  ya bir *singüler dönüşüm* denir. Singüler dönüşümlerin oluşturduğu küme  $Sing_n$  ya da  $ST_n$  ile gösterilir. Dolayısıyla,

$$Sing_n = ST_n = T_n \setminus S_n$$

dır. Tanım incelenirse

$$a \in ST_n \Leftrightarrow |ima| \leq n-1$$

olduğu kolayca görülür.

**Önerme 2.3.9:**  $ST_n$  kümesi  $T_n$  nin bir idealidir.

**İspat:**  $\forall a \in T_n, b \in ST_n$  için  $im(a \circ b) \subseteq imb$  ve

$$|im(a \circ b)| \leq |imb| \leq n-1$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,  $ST_n$  in  $T_n$  in bir sol ideali olduğu açıktır.

Diğer taraftan,  $b \in ST_n$  ve  $a \in T_n$  olsun. Fonksiyonu tanımı gereği

$$|imb| = |X_n b| \leq n-1$$

dır.

Buradan,

$$|X_n(b \circ a)| = |(X_n b)a| \leq |X_n b| \leq n-1$$

yazılır. Böylece,  $b \circ a \in ST_n$  olup  $ST_n, T_n$  nin bir sağ idealidir. Dolayısıyla,  $ST_n, T_n$  nin bir idealidir. ■

#### 2.4. Green Denklik Bağlıları

Green denklik bağlantıları, bir yarıgrupun elemanlarını, doğrudukları esas idealler vasıtasıyla sınıflandırmaya yarayan beş tane denklik bağlantısıdır. James Alexander Green tarafından ilk kez 1951 yılındaki bir çalışmasında tanımlanmıştır. Bir yarıgrupun içinde bölünebilmenin doğasını anlamak için de Green bağlantıları yararlıdır. Bu bağlantılar grupta da geçerlidir ama kullanışlı bilgiler vermez. Green denklikleri ile çalışırken bir  $S$  yarıgrubu ile doğrudan çalışmak yerine  $S^1$  monoidi ile çalışırız. Böylece bir eleman tarafından doğurulan idealin o elemanı içermesi garanti altına alınmış olur.

**Tanım 2.4.1:**  $S$  bir yarıgrup ve  $a \in S$  olsun.  $S$  nin  $a$  yı içeren en küçük (sağ-sol) idealine  $a$  tarafından doğurulan (sağ-sol) ideal denir. Yani  $a \in S$  elemanı tarafından doğurulan sol ideal,

$$S^1 a = \{sa : s \in S^1\}$$

ve sağ ideal

$$aS^1 = \{as : s \in S^1\}$$

olur. Ayrıca,  $a \in S$  elemanı tarafından doğurulan iki yanlı ideal (veya kısaca ideal)

$$S^1 a S^1 = \{sat : s, t \in S^1\}$$

olarak tanımlanır.

Dikkat edilecek olursa  $aS^1$  kümesi aslında

$$aS^1 = \{as : s \in S^1\} = \{as : s \in S\} \mathbf{U} \{a\} = aS \mathbf{U} \{a\}$$

şeklindedir. Benzer şekilde

$$S^1 a = Sa \mathbf{U} \{a\}$$

$$S^1 a S^1 = SaS \mathbf{U} aS \mathbf{U} Sa \mathbf{U} \{a\}$$

dir.

**Tanım 2.4.2:**  $S$  bir yarıgrup olsun.  $S$  üzerinde tanımlanan

$$\mathcal{L} = \{(a, b) : S^1 a = S^1 b\}$$

$$\mathcal{R} = \{(a, b) : aS^1 = bS^1\}$$

$$\mathcal{J} = \{(a, b) : S^1 a S^1 = S^1 b S^1\}$$

bağıntılarına sırasıyla *sol*, *sağ* ve *J-Green denklik bağıntıları* denir.

Eğer  $(a,b) \in S$  için  $(a,b) \in \mathcal{L}$  ise  $a$  ile  $b$   $\mathcal{L}$ -bağlantılıdır,  $(a,b) \in \mathcal{R}$  ise  $a$  ile  $b$   $\mathcal{R}$ -bağlantılıdır ve ayrıca  $(a,b) \in \mathcal{J}$  ise  $a$  ile  $b$   $\mathcal{J}$ -bağlantılıdır denir. Sırasıyla  $a\mathcal{L}b$ ,  $a\mathcal{R}b$ ,  $a\mathcal{J}b$  ile gösterilir.

**Önerme 2.4.3:**  $S$  bir yarıgrup ve  $a,b \in S$  olsun. O halde,

- i.  $(a,b) \in \mathcal{L}$  olması için yeter ve gerek şart  $a = sb$  ve  $b = ta$  olacak şekilde  $s,t \in S^1$  olmasıdır.
- ii.  $(a,b) \in \mathcal{R}$  olması için yeter ve gerek şart  $a = bu$  ve  $b = av$  olacak şekilde  $u,v \in S^1$  olmasıdır.
- iii.  $(a,b) \in \mathcal{J}$  olması için yeter ve gerek şart  $a = sbu$  ve  $b = tav$  olacak şekilde  $s,t,u,v \in S^1$  olmasıdır.

**İspat:**

i.  $(\Rightarrow)$   $(a,b) \in \mathcal{L} \Rightarrow S^1a = S^1b \Rightarrow a \in S^1b$  olup  $a = xb$  olacak şekilde  $\exists x \in S^1$  vardır. Benzer şekilde  $b = ya$  olacak şekilde  $y \in S^1$  olduğu gösterilebilir.

$(\Leftarrow)$   $a = xb$  ve  $b = ya$  olacak şekilde  $x,y \in S^1$  var olsun.  $S^1a = S^1xb \subseteq S^1b$  ve  $S^1b = S^1ya \subseteq S^1a$  olup  $S^1a = S^1b$  ve buradan  $(a,b) \in \mathcal{L}$  dir.

ii. ve iii. de benzer şekilde gösterilebilir. ■

**Önerme 2.4.4:**  $S$  bir yarıgrup olsun.  $S$  üzerinde sağ ve sol Green denklik bağıntıları değişmelidir. Bir başka deyişle,  $\mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$  dır.

**İspat:** Howie (1995), Proposition 2.1.3'e bakınız. ■

**Tanım 2.4.5:**  $L$  ve  $R$  denklik bağıntılarını içeren  $S$  nin en küçük denklik bağıntısına  $\mathcal{D}$ -Green denklik bağıntısı denir. Bir başka deyişle,  $\mathcal{D}=L \vee R$  dır. Buradan da  $\mathcal{D}=L \circ R$  olduğu kolayca gösterilir.

**Tanım 2.4.6:**  $H$ -Green denklik bağıntısı da  $H=L \wedge R$  olarak tanımlanır.

$\mathcal{D}=L \circ R=R \circ L$  olduğundan  $\mathcal{D}$ ,  $L$  ve  $R$  yi içeren bir denklik bağıntısı olup bir  $\mathcal{D}$ -sınıfı  $D$  ise  $D$   $L$ -sınıflarının ve aynı zamanda  $R$ -sınıflarının bir bileşkesidir. Ayrıca,  $a, b \in S$  için  $L_a$  ve  $R_b$  aynı  $\mathcal{D}$  sınıfı tarafından içeriliyor ise  $L_a \cap R_b \neq \emptyset$  dır.

Gerçekten de  $a \in L_a \subset D$  ve  $b \in R_b \subset D$  ise  $a, b \in D$  yani  $(a, b) \in D$  olur. Dolayısıyla,  $(a, c) \in L$  ve  $(c, b) \in R$  olacak şekilde  $c \in S$  vardır.  $c \in L_a$  ve  $c \in R_b$  olup  $c \in L_a \cap R_b$  dır. Böylece, bir  $\mathcal{D}$ -sınıfı her satırı  $R$ -sınıfı, her sütunu bir  $L$ -sınıfı ve her bir hücresi de  $H$ -sınıfı olan bir yumurta kutusu şeklindedir.

Çizelge 2.1.  $\mathcal{D}$ -sınıfının yumurta kutusu

		$\bullet a$			
$R_a$		$H_a$			

**Teorem 2.4.7 (Green Teoremi):**  $S$  bir yarıgrup,  $a, b \in S$  ve  $aRb$  olsun. O halde,  $as=b$  ve  $bt=a$  olacak şekilde  $s, t \in S^1$  vardır. Bu seçili  $s$  ve  $t$  için

$$\begin{array}{ll} g_s : L_a \rightarrow L_b & g_t : L_b \rightarrow L_a \\ x \rightarrow xs & y \rightarrow yt \end{array}$$

olarak tanımlansın. O zaman,  $g_s$  ve  $g_t$  birbirlerinin tersi olup 1-1 ve örtendir. Ayrıca bunlar bir  $\mathcal{H}$ -sınıfını yine bir  $\mathcal{H}$ -sınıfına götürür.

Yine benzer şekilde,  $S$  bir yarıgrup,  $a, b \in S$  ve  $a \mathcal{L} b$  iken  $tb = a$  ve  $sa = b$  ise

$$\begin{array}{ll} I_s : R_a \rightarrow R_b & I_t : R_b \rightarrow R_a \\ x \rightarrow sx & y \rightarrow ty \end{array}$$

olarak tanımlanan dönüşümler birbirlerinin tersi olup 1-1 ve örtendirler. Ayrıca bu dönüşümler bir  $\mathcal{H}$ -sınıfını bir  $\mathcal{H}$ -sınıfına götürürler.

**İspat:** Howie (1995), Lemma 2.2.1 ve Lemma 2.2.2'ye bakınız. ■

**Sonuç 2.4.8:**  $S$  bir yarıgrup olsun.  $(a, b) \in S$  için  $(a, b) \in D$  oluyor ise  $|L_a| = |L_b|$ ,  $|R_a| = |R_b|$  ve  $|H_a| = |H_b|$  olur. Bir başka deyişle, bir  $\mathcal{D}$ -sınıfı içindeki herhangi iki  $\mathcal{L}$ -sınıfı ( $\mathcal{R}$ -sınıfı veya  $\mathcal{H}$ -sınıfı) eşit sayıda eleman içerir. ■

**İspat:** Howie (1995), Lemma 2.2.3'e bakınız. ■

**Teorem 2.4.9:**  $H$  bir  $\mathcal{H}$ -sınıfı olsun. O halde,  $H$  ya bir gruptur ya da  $H \cap H^2 = f$  dir.

**İspat:** Howie (1995), Theorem 2.2.5'e bakınız. ■

**Sonuç 2.4.10:**  $S$  bir yarıgrup ve  $H$ ,  $S$  de bir  $\mathcal{H}$ -sınıfı olsun. Eğer  $H$  bir idempotent eleman içeriyor ise  $S$  nin bir alt grubudur. ■

**Sonuç 2.4.11:**  $S$  de bir  $\mathcal{H}$ -sınıfı en fazla 1 tane idempotent eleman içerir. ■

### 2.5. Dönüşümlerin Orbitleri

**Tanım 2.5.1:**  $a \in T_n$  ve  $x, y \in X_n$  olsun.  $X_n$  üzerindeki " $\equiv_a$ " bağıntısı

$$"x \equiv_a y \Leftrightarrow xa^r = ya^q \text{ olacak şekilde } r, q \in Z^+ \cup \{0\} \text{ olmasıdır.}"$$

$X_n$  üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısının denklik sınıflarına  $a$  nın orbitleri denir.

$a \in T_n$  için  $a$  nın orbit grafiği  $\Gamma_a$  ile gösterilir.  $\Gamma_a$  grafiği nin köşeleri kümesi  $V(\Gamma_a)$  ve kenarları kümesi  $E(\Gamma_a)$

$$V(\Gamma_a) = X_n, E(\Gamma_a) = \{(x, xa) : x \in X_n\}$$

şeklinde tanımlıdır.

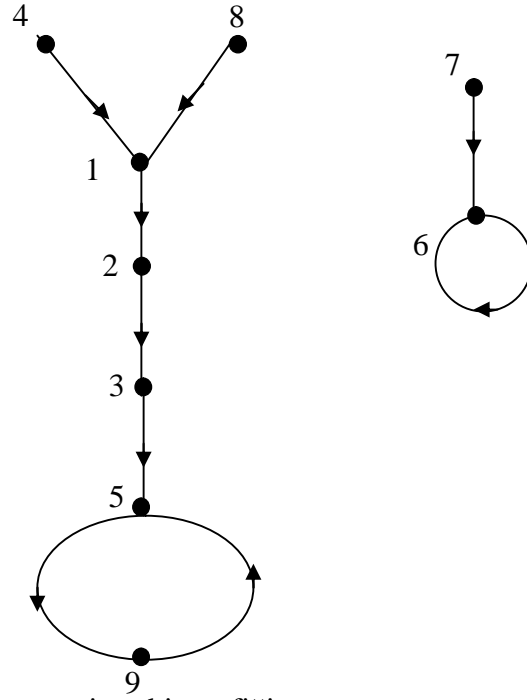
**Örnek 2.5.2:**  $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 5 & 6 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$  alalım.  $a \in T_n$  in orbitleri

$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 9\}$  ve  $\Omega_2 = \{6, 7\}$  olur.

**Not:**  $a \in T_n$  için  $a$  nın orbitleri  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$  ve  $|\Omega_i| = r_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) olsun.  $\Gamma_a$  nin  $m$  tane bağlantılı bileşeni vardır ve bu bağlantılı bileşenler

$$\begin{aligned} \Gamma_{a, \Omega_i} : V(\Gamma_{a, \Omega_i}) &= \Omega_i \\ E(\Gamma_{a, \Omega_i}) &= \{(x, xa) : x \in \Omega_i\} \end{aligned}$$

dır. Ayrıca, her  $1 \leq i \leq n$  için  $\Gamma_{i, \Omega_i}$   $r_i$  köşeli ve  $r_i$  kenarı olan bağlantılı bir grafik olup, ağaç olmaz, dahası;  $\Gamma_{i, \Omega_i}$  de bir tek patika ve devir vardır.  $\Gamma_a$  nın grafiği



Şekil 2.1.  $a$  dönüşümünün orbit grafiği

olur.



### 3. $T_n$ ve $P_n$ YARIGRUPLARI VE BAZI ALT YARIGRUPLARI

$X_n = \{1, 2, \dots, n\}$  kümesi üzerindeki simetrik grup, tüm dönüşümler yarıgrubu, kısmi dönüşümler yarıgrubu ve singüler dönüşümler yarıgrubunu önceki bölümde tanımladık ve sırasıyla  $S_n, T_n, P_n$  ve  $ST_n$  ile gösterdik.

#### 3.1. $T_n$ ve $P_n$ Yarıgruplarının Doğuray Kümeleri

Bu bölümde bazı dönüşüm yarıgruplarının doğuray kümeleri ve rankları bulunmuş olup bu bilgileri derleyeceğiz.

$a, b \in T_n$  için

- i.  $im(ab) \subseteq im(b)$
- ii.  $ker(a) \subseteq ker(ab)$

olduğunu bir önceki bölümde ispatlamıştık.

**Teorem 3.1.1:**  $a, b \in T_n$  olsun. O halde

- i.  $a \mathcal{L} b \Leftrightarrow ima = imb$
- ii.  $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow ker a = ker b$
- iii.  $a \mathcal{D} b \Leftrightarrow |ima| = |imb|$
- iv.  $a \mathcal{H} b \hat{=} ima = imb$  ve  $ker a = ker b$

olmasıdır.

**İspat:**

- i.  $(\Rightarrow)$   $a \mathcal{L} b$  olsun. O halde,  $a = gb$  ve  $b = sa$  olacak şekilde  $g, s \in T_n$  vardır. Dolayısıyla,

3.  $T_n$  ve  $P_n$  YARIGRUPLARI VE BAZI ALT YARIGRUPLARI Hayriye GÜÇKİR

$$ima = im.gb \subseteq imb = im.sa \subseteq ima$$

olup  $ima = imb$  olur.

( $\Leftarrow$ )  $ima = imb = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$  olsun. O zaman,

$$a = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{pmatrix}$$

olacak şekilde  $X_n$  in  $(A_i)_{i=1}^m$  ve  $(B_i)_{i=1}^m$  parçalanışları vardır. Her  $1 \leq j \leq m$  için  $k_j \in B_j$  alalım ve

$$g = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ k_1 & k_2 & \dots & k_m \end{pmatrix}$$

olarak tanımlayalım.

Böylece,

$$\begin{aligned} gb &= \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ k_1 & k_2 & \dots & k_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{pmatrix} = a \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde,  $sa = b$  olacak şekilde bir  $s$  tanımlanacağından  $(a, b) \in \mathcal{L}$  dir.

ii. ( $\Rightarrow$ )  $a \mathcal{R} b$  olsun. O zaman,  $a = bg$  ve  $b = as$  olacak şekilde  $g, s \in T_n$  vardır. Dolayısıyla,

$$\ker a = \ker(bg) \supseteq \ker b = \ker(as) \supseteq \ker a$$

olup  $\ker a = \ker b$  olur.

### 3. $T_n$ ve $P_n$ YARIGRUPLARI VE BAZI ALT YARIGRUPLARI Hayriye GÜÇKİR

( $\Leftarrow$ )  $\ker a = \ker b$  olsun. Bu denklik bağıntısının denklik sınıfları  $A_1, A_2, \dots, A_m$  olsun. O zaman,

$$a = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix}$$

olacak şekilde  $i_1, i_2, \dots, i_m, j_1, j_2, \dots, j_m \in X_n$  vardır.

Şimdi,  $g : X_n \rightarrow X_n$  dönüşümünü  $\forall x \in X_n$  için

$$xg = \begin{cases} i_k, & x = j_k (1 \leq k \leq m) \\ x, & \text{diğer} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım.

O halde,

$$\begin{aligned} bg &= \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_m & X_n / \{j_1, j_2, \dots, j_m\} \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{pmatrix} = a \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde,  $as = b$  olacak şekilde bir  $s$  tanımlanacağından  $(a, b) \in \mathcal{R}$  olur.

iii. ( $\Rightarrow$ )  $a \mathcal{D} b$  olsun.  $\mathcal{D} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$  olduğundan  $a \mathcal{L} g = g \mathcal{R} b$  olacak şekilde bir  $g \in T_n$  vardır. O halde,  $|ima| = r$  ise  $|img| = |ima|$  olduğundan  $|img| = r$  olup  $\ker g$  nin  $r$  tane denklik sınıfı vardır.  $g \mathcal{R} b$  olduğundan  $\ker g = \ker b$  olup  $\ker b$  da  $r$  tane denklik sınıfı vardır. Dolayısıyla,  $|imb| = r$  dir.

( $\Leftarrow$ ) Diğer taraftan,  $|ima| = r = |imb|$  olsun. O zaman,

### 3. $T_n$ ve $P_n$ YARIGRUPLARI VE BAZI ALT YARIGRUPLARI Hayriye GÜÇKİR

$$a = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_r \\ i_1 & i_2 & \dots & i_r \end{pmatrix} \text{ ve } b = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_r \\ j_1 & j_2 & \dots & j_r \end{pmatrix}$$

şeklinde olur. Dolayısıyla,  $g = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_r \\ i_1 & i_2 & \dots & i_r \end{pmatrix}$  alınır ise  $a \mathcal{L}g$  ve  $g \mathcal{R}b$  olacağından  $a \mathcal{D}b$  olur. ■

**Önerme 3.1.2:**  $P_n, T_{n+1}$  in bir altyarıgrupuna izomorfiktir.

**İspat:**  $a \in P_n$  olsun. Her  $x \in X_{n+1}$  için  $a^* : X_{n+1} \rightarrow X_{n+1}$  i

$$xa^* = \begin{cases} xa & x \in \text{doma} \subseteq X_n \\ n+1 & x \notin \text{doma} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. O zaman,  $a^* \in T_{n+1}$  olur.  $f : P_n \rightarrow T_{n+1}$  dönüşümünü  $af = a^*$  ( $\forall a \in P_n$ ) olarak tanımlayalım.

$a, b \in P_n$  olsun.  $a = b \Leftrightarrow a^* = b^*$  olması için yeter ve gerek şart  $f$  nin iyi tanımlı ve birebir olması gerekir.

$$\text{dom}(a \circ b) = [\text{ima} \cap \text{domb}]a^{-1} \quad (1)$$

dır. Şimdi  $(a \circ b)f = af \circ bf = a^* \circ b^*$  olduğunu gösterelim. (1) eşitliği göz önüne alındığında  $\forall x \in X_{n+1}$  için

### 3. $T_n$ ve $P_n$ YARIGRUPLARI VE BAZI ALT YARIGRUPLARI Hayriye GÜÇKİR

$$\begin{aligned}
 x(\mathbf{a} \circ \mathbf{b})^* &= \begin{cases} x(\mathbf{a} \circ \mathbf{b}), & x \in [\mathit{ima} \cap \mathit{domb}]a^{-1} \\ n+1, & \text{diğer} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} x(\mathbf{a} \circ \mathbf{b}), & xa \in [\mathit{ima} \cap \mathit{domb}] \\ n+1, & \text{diğer} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} (xa)\mathbf{b}, & (xa) \in \mathit{domb} \\ n+1, & \text{diğer} \end{cases} \\
 &= x(\mathbf{a}^* \circ \mathbf{b}^*)
 \end{aligned}$$

olduğundan  $f$  bir homomorfizmdir. Böylece,

$$P_n \cong \mathit{im}f \leq T_{n+1}$$

olur. ■

**Önerme 3.1.3:**  $S_n$  in her elemanı ayrık devirlerin bir çarpımı olarak yazılabilir.

Ayrıca,  $(i_1 i_2 i_3 \dots i_r)$   $S_n$  in bir devri ise

$$(i_1 i_2 i_3 \dots i_r) = (i_r i_{r-1})(i_{r-1} i_{r-2}) \dots (i_3 i_2)(i_2 i_1)$$

şeklinde transpozisyonların çarpımı olarak yazılabildiğinden  $S_n$  in her elemanı transpozisyonların çarpımı olarak yazılabilir. Tümevarım yöntemi ile bunu göstermeye çalışalım.

$a = (1 2 3 \dots n-1 n)$  ve  $b = (1 2)$  olsun. O zaman,  $\forall 1 \leq i \leq n$  için

$$\begin{aligned}
 a^{n-i} b a^i &= (a^{-1})^i b a^i \\
 &= (n n-1 \dots 2 1)^i (1 2) (1 2 \dots n-1 n)^i
 \end{aligned}$$

ifadesinden

3.  $T_n$  ve  $P_n$  YARIGRUPLARI VE BAZI ALT YARIGRUPLARI Hayriye GÜÇKIR

$$\begin{aligned} i=1 \quad a^{-1}ba &= (n \ n-1 \dots 21)(12)(12 \dots n-1 \ n) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 2 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix} \\ &= (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i=2 \quad a^{-2}ba^2 &= a^{-1}ba \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 4 & 3 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix} \\ &= (34) \end{aligned}$$

**M**

**M**

$$\begin{aligned} i=n-2, \ a^{-(n-2)}ba^{n-2} &= (n \ n-1 \dots 21)(n-2 \ n-1)(12 \dots n-1 \ n) \\ &= (n-1 \ n) \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece,  $(12), (23), \dots, (n-1 \ n) \in \langle a, b \rangle$  olur.

**Teorem 3.1.4:**  $n \geq 3$  için  $S_n = \langle a, b \rangle$  ve  $\text{rank}(S_n) = 2$  dir.

**İspat:** Her  $1 \leq i \leq j \leq n$  için  $j-i=1$  ise  $(i \ j) \in \langle a, b \rangle$  olduğunu biliyoruz.  $j-i > 1$  ise

$$\begin{aligned} &(i \ i+1)(i+1 \ i+2) \dots (j-2 \ j-1)(j-1 \ j)(j-1 \ j-2) \dots (i+1 \ i+2)(i \ i+1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & j-1 & i & j+1 & \dots & n \end{pmatrix} \\ &= (i \ j) \end{aligned}$$

olup  $(i \ j) \in \langle a, b \rangle$  dir. ■

### 3. $T_n$ ve $P_n$ YARIGRUPLARI VE BAZI ALT YARIGRUPLARI Hayriye GÜÇKİR

**Teorem 3.1.5:**  $T_n = \langle a, b, g \rangle$  olmak üzere  $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$  olsun.

Ayrıca,  $g_{ij} : X_n \rightarrow X_n$  dönüşümünü  $\forall x \in X_n$  için

$$xg_{ij} = \begin{cases} j, & x = i \\ x, & x \neq i \end{cases}$$

olarak tanımlayalım ( $g_{12} = g$ ). O halde,  $g_{ij} \in \langle a, b, g \rangle$  dir.

**İspat:**  $\forall i, j \geq 3$  için

$$(1 \ i) \mathbf{o} g \mathbf{o} (1 \ i) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & i-1 & 2 & i+1 & \dots & n \end{pmatrix} = g_{i2}$$

$$(2 \ j) \mathbf{o} g \mathbf{o} (2 \ j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ j & 2 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \end{pmatrix} = g_{1j}$$

$$(1 \ i) \mathbf{o} (2 \ j) \mathbf{o} g \mathbf{o} (2 \ j) (1 \ i) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j & j+1 \\ 1 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & j & j+1 \end{pmatrix} = g_{ij}$$

$$(i \ j) \mathbf{o} g \mathbf{o} (i \ j) = g_{ji}$$

olur. Böylece,  $\forall i \neq j \in X_n$  için  $g_{ij} \in \langle a, b, g \rangle$  olur. ■

**Teorem 3.1.6:**  $n \geq 3$  için  $T_n = \langle a, b, g \rangle$  ve  $\text{rank} T_n = 3$  dür.

**İspat:**  $a \in T_n$  olsun. Eğer  $|ima| = n$  ise  $a \in S_n$  olup  $a \in \langle a, b \rangle \subseteq \langle a, b, g \rangle$  olur.

$|ima| \leq n-1$  olduğunu varsayalım. O halde, en az bir  $z \in X_n/ima$  mevcuttur.

### 3. $T_n$ ve $P_n$ YARIGRUPLARI VE BAZI ALT YARIGRUPLARI Hayriye GÜÇKİR

Ayrıca,  $a$ , 1-1 değildir. Dolayısıyla,  $ia = ja$  iken  $i \neq j$  olmak üzere en az bir çift  $(i, j)$  vardır.

$$\hat{a} : X_n \rightarrow X_n$$

dönüşümünü  $\forall x \in X_n$  için

$$x\hat{a} = \begin{cases} z, & x = i \\ xa, & x \neq i \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. O zaman,

$$a = g_{ij} \hat{a}$$

olur. Ayrıca,  $im\hat{a} = ima + 1$  olur.

Eğer  $\hat{a} \in S_n$  ise  $\hat{a} \in \langle a, b, g \rangle$  olduğu aşikardır.

Eğer  $\hat{a} \notin S_n$  ise benzer şekilde  $|im\hat{a}| = |im\hat{a}| + 1$  ve  $\hat{a} = g_{kl} \hat{a}$  olacak şekilde

$k, l \in X_n$  ve  $\hat{a} \in T_n$  bulunur. İmaj her defasında 1 arttığından sonlu adım sonra

$$a = g_{ij} g_{kl} \dots g_{pq} \overset{\hat{M}}{\hat{a}} \in \langle a, b, g \rangle$$

olduğu görülür. ■

### 3. $T_n$ ve $P_n$ YARIGRUPLARI VE BAZI ALT YARIGRUPLARI Hayriye GÜÇKİR

**Teorem 3.1.7:**  $a, b \in P_n$  olsun. O zaman,

- i.  $a \mathcal{L} b \Leftrightarrow ima = imb$
- ii.  $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow \ker a = \ker b$

dır.

**İspat:**

i.  $(\Rightarrow)$   $a, b \in P_n$  için  $a \mathcal{L} b$  olsun.  $la = b$  ve  $gb = a$  olacak şekilde  $l, g \in P_n$  vardır. Dolayısıyla

$$ima = im(gb) \subseteq imb = im(la) \subseteq ima$$

olup

$$ima = imb$$

olur.

$(\Leftarrow)$   $ima = imb$  olsun.

$$a = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m & A_{m+1} \\ X_1 & X_2 & \dots & X_m & X_{m+1} \end{pmatrix} \text{ ve } b = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m & B_{m+1} \\ X_1 & X_2 & \dots & X_m & X_{m+1} \end{pmatrix}$$

( $A_{m+1}$  veya  $B_{m+1}$   $f$  olabilir.)

Her  $1 \leq i \leq m$  için bir  $y_i \in A_i$  seçelim (fix) ve

$$I = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m & B_{m+1} \\ Y_1 & Y_2 & \dots & Y_m & Y_{m+1} \end{pmatrix}$$

olarak tanımlayalım.

3.  $T_n$  ve  $P_n$  YARIGRUPLARI VE BAZI ALT YARIGRUPLARI Hayriye GÜÇKİR

$$\begin{aligned}
 l a &= \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m & B_{m+1} \\ Y_1 & Y_2 & \dots & Y_m & Y_{m+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m & A_{m+1} \\ X_1 & X_2 & \dots & X_m & X_{m+1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m & B_{m+1} \\ X_1 & X_2 & \dots & X_m & X_{m+1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde,  $g \in P_n$  mevcut olup  $a \mathcal{L} b$  olur.

ii.  $(\Rightarrow)$   $a, b \in P_n$  için  $a \mathcal{R} b$  olsun.  $al = b$  ve  $bg = a$  olacak şekilde  $l, g \in P_n$  vardır. Dolayısıyla

$$\ker(b) = \ker(al) \supseteq \ker(a) = \ker(bg) \supseteq \ker(b)$$

olup  $\ker(b) = \ker(a)$  olur.

$(\Leftarrow)$   $\ker(b) = \ker(a)$  olsun. O zaman

$$a = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m & A_{m+1} \\ X_1 & X_2 & \dots & X_m & - \end{pmatrix} \text{ ve } b = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m & A_{m+1} \\ Y_1 & Y_2 & \dots & Y_m & - \end{pmatrix}$$

olacak şekilde  $X_i, Y_i \in X_n$  vardır. Her  $1 \leq i \leq m$  için bir  $Z_i \in X_i$  seçelim ve  $Y = X_n / \{Z_1, Z_2, \dots, Z_m\}$  olmak üzere

$$l = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 & \dots & Z_m & Y \\ Y_1 & Y_2 & \dots & Y_m & - \end{pmatrix} \in P_n$$

olarak tanımlayalım. O zaman

$$\begin{aligned}
 al &= \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m & A_{m+1} \\ X_1 & X_2 & \dots & X_m & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 & \dots & Z_m & Z_{m+1} \\ Y_1 & Y_2 & \dots & Y_m & Y_{m+1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m & A_{m+1} \\ Y_1 & Y_2 & \dots & Y_m & - \end{pmatrix} \\
 &= b
 \end{aligned}$$

3.  $T_n$  ve  $P_n$  YARIGRUPLARI VE BAZI ALT YARIGRUPLARI Hayriye GÜÇKİR

olur. Benzer şekilde  $bg = a$  olacak şekilde  $g \in P_n$  bulunur.  $a \mathcal{R}b$  olur. ■

**Önerme 3.1.8:**  $rank(P_n) = 4$  dür.

**İspat:**  $a \in P_n$  olsun. O zaman

$$a = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m & A_{m+1} \\ X_1 & X_2 & \dots & X_m & - \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m & A_{m+1} \\ X_1 & X_2 & \dots & X_m & A_{m+1} \end{pmatrix} (x \in A_{m+1} \text{ ise } xb = x)$$

ve

$$I = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m & A_{m+1} \\ A_1 & A_2 & \dots & A_m & - \end{pmatrix} (\forall x \in A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m \text{ için } xI = x)$$

olarak tanımlanır ise  $a = Ib$  olur.  $i \in X_n$  için  $x_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \mathbf{K} & n \\ 1 & 2 & \dots & - & \mathbf{K} & n \end{pmatrix}$  olarak

tanımlayalım.

Eğer  $A_{m+1} = f$  ise  $I = 1_{X_n}$  ve  $b = a$  olup sonuç açıktır.

Eğer  $A_{m+1} = \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \neq f$  ise o zaman

$$I = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r}$$

olur. Böylece  $a = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r} b$  olur.

$$a_1 = (1 \ 2), a_2 = (1 \ 2 \ \dots \ n), a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} \text{ ve } a_4 = x_1$$

### 3. $T_n$ ve $P_n$ YARIGRUPLARI VE BAZI ALT YARIGRUPLARI Hayriye GÜÇKİR

alalım.  $b \in \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ ,  $x_i \in \langle a_1, a_2, a_4 \rangle$  ve  $a \in \langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle$  olur. Böylece  $rank(P_n) \leq 4$  olur.

Ayrıca,  $T_n \leq P_n$ ,  $SP_n = P_n/T_n < P_n$  ve  $rank(T_n) = 3$  olduğundan  $rank(P_n) \geq 3+1 = 4$  olur. Dolayısıyla

$$rank(P_n) = 4$$

olur. ■

**Tanım 3.1.9:** Bir  $a$  dönüşümü için  $Fix(a)$ ,  $Shift(a)$ ,  $Def(a)$  kümelerini ve  $fix(a)$ ,  $shift(a)$ ,  $def(a)$  pozitif tamsayılarını

$$Fix(a) = \{x \in X_n : xa = x\}$$

$$Def(a) = X_n \setminus im(a)$$

$$Shift(a) = X_n \setminus Fix(a)$$

$$fix(a) = |Fix(a)|$$

$$def(a) = |Def(a)|$$

$$shift(a) = |Shift(a)|$$

olarak tanımlayalım.  $Def(a)$  kümesine  $a$  nın (defect kümesi) *noksanlık kümesi*,  $Fix(a)$  kümesine  $a$  nın (fixleri kümesi) *sabitleri kümesi*,  $Shift(a)$  kümesine  $a$  nın (shiftleri kümesi) *değişenleri kümesi* denir.

**Tanım 3.1.10:**  $f \neq A \subset X_n$  olsun. Eğer  $\forall x, y, z \in X_n$  için  $x, z \in A$  ve  $x < y < z$  olduğunda  $y \in A$  ise  $A$  ya *konveks küme* denir.

$$\min A = r \text{ ve } \max A = q \text{ ise } A = \{r, r+1, \dots, q-1, q\} \text{ dir.}$$

### 3. $T_n$ ve $P_n$ YARIGRUPLARI VE BAZI ALT YARIGRUPLARI Hayriye GÜÇKİR

#### 3.2. $T_n$ ve $P_n$ Yarigruplarının Bazı Altyarigrupları

Sonlu bir  $X_n = \{1, 2, \mathbf{K}, n\}$  kümesi üzerinde tüm dönüşümler yarigrubunu  $T_n$  ile göstermiştik. Bu bölümde tüm dönüşümler yarigrubu  $T_n$  nin bazı özel alt yarigruplarını tanıtarak bu güne kadar belirlenen özellikleri hakkında bir derleme yapılacaktır.

$1 \leq r \leq n-1$  olmak üzere  $K_{n,r}$  kümesi

$$K_{n,r} = \{a \in T_n : |ima| \leq r\}$$

olarak tanımlanır.

Dikkat edilecek olursa  $K_{n,n} = T_n$  ve  $K_{n,n-1} = ST_n$  dir.

**Teorem 3.2.1:**  $K_{n,r}$  kümesi  $T_n$  yarigrubunun bir alt yarigrubudur.

**İspat:**  $a, b \in K_{n,r}$  alalım. O halde  $|ima| \leq r$  ve  $|imb| \leq r$  dir.  $im(ab) \subseteq imb$  olduğundan

$$|im(ab)| \leq |imb| \leq r$$

dir. Böylece  $ab \in K_{n,r}$  olup  $K_{n,r} \leq T_n$  dir. ■

**Teorem 3.2.2:**  $K_{n,r}$  kümesi  $T_n$  yarigrubunun bir idealidir.

**İspat:**  $a \in K_{n,r}$  ve  $b \in T_n$  elemanlarını alalım. O halde  $|ima| \leq r$  ve  $im(ba) \subseteq ima$  olduğundan

$$|im(ba)| \leq |ima| \leq r$$

### 3. $T_n$ ve $P_n$ YARIGRUPLARI VE BAZI ALT YARIGRUPLARI Hayriye GÜÇKİR

olup  $ba \in K_{n,r}$  dir. Böylece  $K_{n,r}$  kümesi  $T_n$  yarıgrubunun bir sol idealidir.  $|imb| = k$  olsun.  $k \leq r$  ise benzer şekilde  $|im(ab)| \leq |imb| = k \leq r$  olup  $ab \in K_{n,r}$  dir.  $k > r$  ise  $ab = (ima)b$  olup  $|im(ab)| \leq |im((ima)b)| \leq r$  dir. Her durumda  $ab \in K_{n,r}$  olup  $K_{n,r}$  kümesi  $T_n$  yarıgrubunun bir sağ idealidir. O halde  $K_{n,r} < T_n$  dir. ■

Dikkat edilecek olursa

$$K_{n,1} \leq K_{n,2} \leq \mathbf{L} \leq K_{n,r-1} \leq K_{n,r}$$

$$K_{n,1} < K_{n,2} < \mathbf{L} < K_{n,r-1} < K_{n,r}$$

dir.

**Tanım 3.2.3:**  $a \in T_n$  alalım.  $\forall x, y \in X_n$  için  $x \leq y$  iken  $xa \leq ya$  oluyor ise  $a$  ya bir *sıra koruyan dönüşüm* denir.  $X_n$  üzerinde tanımlı tüm sıra koruyan tam dönüşümler yarıgrubuna *sıra koruyan dönüşüm yarıgrubu* denir ve  $O_n$  ile gösterilir.

Örneğin  $O_3$  ün tüm elemanları aşağıdadır.

$$O_3 = \left\{ \begin{array}{l} \left( \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right) \\ \left( \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \right) \end{array} \right\}$$

**Teorem 3.2.4:**  $O_n$  kümesi  $T_n$  yarıgrubunun bir alt yarıgrubudur.

**İspat:**  $a, b \in O_n$  olsun. Eğer  $x \leq y$  ise  $a \in O_n$  olduğundan ve  $xa \leq ya$  dir.  $b \in O_n$  olduğundan  $(xa)b \leq (ya)b$  olur yani  $x(ab) \leq y(ab)$  olur bu da  $ab$  nin sıra koruyan dönüşüm olduğunu gösterir. Dolayısıyla,  $O_n \leq T_n$  dir. ■

$$O_n \text{ nin eleman sayısı } \binom{2n-1}{n} = \binom{2n-1}{n-1} \text{ olur.}$$

### 3. $T_n$ ve $P_n$ YARIGRUPLARI VE BAZI ALT YARIGRUPLARI Hayriye GÜÇKİR

**Önerme 3.2.5:**  $a, b \in O_n$  olsun.

- i.  $a \mathcal{L} b \Leftrightarrow ima = imb$
- ii.  $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow \ker a = \ker b$
- iii.  $a \mathcal{D} b \Leftrightarrow |ima| = |imb|$

dır.

**İspat:**  $A_1 = \{1, 2, \dots, r_1\}, A_2 = \{r_1 + 1, r_1 + 2, \dots, r_2\}, \dots, A_m = \{r_{m-1} + 1, r_{m-1} + 2, \dots, n\}$  olmak

üzere,  $a \in O_n$  ise  $a = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{pmatrix}$  olacak şekilde  $X_n$  in bir sıralı konveks

parçalanışı  $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$  ve  $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_m \leq n$  dir.

Teoremin i.,ii.,iii. şıklarındaki ( $\Rightarrow$ ) yönlü ispatlar yukarıda  $T_n$  üzerine olan Teorem 3.1.2 deki ispatın aynısıdır. ( $\Leftarrow$ ) ispatları yapalım.

- i.  $ima = imb$  olsun. O zaman,

$$a = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{pmatrix}$$

olacak şekilde  $X_n$  in sıralı konveks parçalanışları  $\{A_i\}_{i \in I}^r$  ve  $\{B_i\}_{i \in I}^r$  vardır; ayrıca  $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_r \leq n$  olur. Önce her  $1 \leq k \leq m$  için bir  $j_k \in A_k$  seçelim.  $A_k$  ları sıralı konveks parçalanış olduğundan  $j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_m$  olup

$$g = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanır ise  $g \in O_n$  dir ve  $ga = b$  olur. Benzer şekilde,  $lb = a$  olacak şekilde bir  $g \in O_n$  mevcut olup  $a \mathcal{L} b$  olur.

- ii.  $\ker a = \ker b$  olsun. O zaman,

3.  $T_n$  ve  $P_n$  YARIGRUPLARI VE BAZI ALT YARIGRUPLARI Hayriye GÜÇKIR

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix}$$

olacak şekilde  $X_n$  in  $\mathbf{a} = \{A_i\}_{i=1}^m$  sıralı konveks parçalanışı ve

$$\{i_1 < i_2 < \dots < i_m\}, \{j_1 < j_2 < \dots < j_m\} \subseteq X_n$$

vardır.

$$\begin{aligned} B_1 &= \{1, 2, \dots, i_1\} \\ B_2 &= \{i_1 + 1, \dots, i_2\} \\ &\dots\dots\dots \\ B_m &= \{i_{m-1} + 1, \dots, i_m\} \\ B_{m+1} &= X_n / \{1, 2, \dots, i_m\} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m & B_{m+1} \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m & n \end{pmatrix}$$

olsun. O halde,  $\mathbf{g} \in O_n$  dir ve  $\mathbf{a}\mathbf{g} = \mathbf{b}$  olur. Benzer şekilde,  $\mathbf{b}\mathbf{l} = \mathbf{a}$  olacak şekilde

$\mathbf{l} \in O_n$  mevcut olup  $\mathbf{a}\mathbf{R}\mathbf{b}$  olur.

iii.  $|\mathbf{i}\mathbf{m}\mathbf{a}| = |\mathbf{i}\mathbf{m}\mathbf{b}|$  olsun. O halde,

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_m \\ i_1 & \dots & i_m \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix}$$

### 3. $T_n$ ve $P_n$ YARIGRUPLARI VE BAZI ALT YARIGRUPLARI Hayriye GÜÇKİR

olacak şekilde  $X_n$  in  $\{A_i\}$  ve  $\{B_i\}$  sıralı konveks parçalanışı ve  $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_m \leq n$  ve  $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_m \leq n$  vardır.

$$g = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{pmatrix} \in O_n$$

olup benzer şekilde  $a \mathcal{L}g$  ve  $g \mathcal{R}b$  olduğundan  $a \mathcal{D}b$  olur. ■

**Soru 3.2.6:**  $a \in O_n$  ise  $a$  nın orbitlerinin grafiğini bulalım.

**Cevap:**  $a \in O_n$  ise  $x \in X_n$  olsun. Şimdi

$$x, xa, xa^2, \dots, xa^m, xa^{m+1}, \dots, xa^{m+r}, \dots$$

dizisini ele alalım.

Bu dizi sonsuza dek farklı elemanlardan oluşamayacağından dolayı

$$xa^m = xa^{m+r}$$

olacak şekilde  $m, r \in \mathbb{Z}^+$  vardır. Biz bu koşulu sağlayan en küçük  $m$  ve sonra en küçük  $r$  yi seçelim.

$$r \geq 1 \text{ olsaydı, } a \in O_n \text{ olduğundan } xa^m \geq xa^{m+1} \geq \dots \geq xa^{m+r} \text{ olur.}$$

Birinci durumda  $xa^m \leq xa^{m+r-1}$  iken  $xa^{m+1} \leq xa^{m+r} = xa^m$  çelişkisi elde edilir. Benzer şekilde diğer durumda da çelişki elde edilir. Dolayısıyla,  $r = 1$  olmak zorundadır. Sonuç olarak,  $a \in O_n$  ise  $a$  nın orbitlerindeki devirler birer halkadır

**Önerme 3.2.7:**  $a \in O_n$  ise  $a$  nın orbitleri konvektir.

### 3. $T_n$ ve $P_n$ YARIGRUPLARI VE BAZI ALT YARIGRUPLARI Hayriye GÜÇKİR

**İspat:**  $a$  nın herhangi bir orbiti  $\Omega$  olsun. Ayrıca,  $|x-y| \geq 2$  olan  $x, y \in \Omega$  mevcut olsun. Kabul edelim ki  $x < y$  ve bir  $z \in X_n$  için  $x < z < y$  olsun. O zaman,  $xa \leq za \leq ya$  olur. Bir  $t \in \Omega$  için  $\Omega$  daki halka  $t$  olsun. O halde,  $xa^m = t$  ve  $ya^r = t$  olacak şekilde  $m, r \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$  vardır. Genelliği bozmaksızın,  $m \leq r$  olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} xa^r &= xa^{m+(r-m)} = xa^m = t \\ xa^r &= xa^{m+(r-m)} = xa^m a^{r-m} = ta^{r-m} = t \\ ya^r &= t \end{aligned}$$

olup  $t = xa^r \leq za^r \leq ya^r = t$  olduğunda  $za^r = t$  yani  $z \in \Omega$  olur. ■

**Tanım 3.2.8:**  $a \in T_n$  alalım.  $\forall x \in X_n$  için  $xa \leq x$  oluyor ise  $a$  ya *sıra azaltan dönüşüm* denir.  $X_n$  üzerinde tanımlı tüm sıra azaltan dönüşümler yarıgrubuna *sıra azaltan dönüşümler yarıgrubu* denir ve  $D_n$  ile gösterilir.

Örneğin  $D_3$  ün tüm elemanları aşağıdadır.

$$D_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

**Teorem 3.2.9:**  $D_n$  kümesi  $T_n$  yarıgrubunun bir alt yarıgrubudur.

**İspat:**  $a, b \in D_n$  olsun.  $\forall x \in X_n$  için  $xa \leq x$  ve  $xb \leq x$  olup  $x(ab) = (xa)b \leq xa \leq x$  olduğundan  $ab \in D_n$  olur. Dolayısıyla,  $D_n \leq T_n$  dır. ■

$D_n$  in eleman sayısı da  $n!$  olarak bulunur. Dikkat edilecek olursa  $D_n$  ve  $O_n$  de birim dönüşümden başka permütasyon yoktur.  $\forall a \in D_n$  için  $1a = a$  ve

### 3. $T_n$ ve $P_n$ YARIGRUPLARI VE BAZI ALT YARIGRUPLARI Hayriye GÜÇKİR

$$\mathbf{D}_n \cap \mathcal{S}_n = \mathbf{O}_n \cap \mathcal{S}_n = \left\{ I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} \right\}$$

dır. ■

**Tanım 3.2.10:**  $a \in T_n$  alalım.  $\forall x \in X_n$  için  $xa \geq x$  oluyor ise  $a$  ya *sıra arttıran dönüşüm* denir.  $X_n$  üzerinde tanımlı tüm sıra arttıran dönüşümler yarıgrubuna *sıra arttıran dönüşümler yarıgrubu* denir ve  $\mathbf{D}_n^*$  ile gösterilir.

$1 \leq r \leq n-1$  olmak üzere  $D_{n,r}$  kümesi

$$D_{n,r} = \{a \in \mathbf{D}_n : |ima| \leq r\}$$

olarak tanımlanır.  $D_{n,r}$  kümesi  $\mathbf{D}_n$  yarıgrubunun bir alt yarıgrubudur.  $DP_r(n)$  kümesi

$$DP_r(n) = D_{n,r} \setminus D_{n,r-1} = \{a \in \mathbf{D}_n : |ima| = r\}$$

olarak tanımlanır.  $DP_r(n)$  kümesine  $D_{n,r}$  nin *Rees bölümü* denir

**Tanım 3.2.11:**  $a \in T_n$  alalım.  $\forall x, y \in X_n$  için

$$xa \geq x \text{ ve } x \leq y \text{ iken } xa \leq ya$$

oluyor ise  $a$  ya *sıra koruyan ve azaltan dönüşüm* denir.  $X_n$  üzerinde tanımlı tüm sıra koruyan ve azaltan dönüşümlerin yarıgrubuna *sıra koruyan ve azaltan dönüşümler yarıgrubu* denir ve  $\mathbf{C}_n$  ile gösterilir. Dikkat edilecek olursa

$$\mathbf{C}_n = \mathbf{O}_n \cap \mathbf{D}_n$$

### 3. $T_n$ ve $P_n$ YARIGRUPLARI VE BAZI ALT YARIGRUPLARI Hayriye GÜÇKİR

dir.

Örneğin  $C_3$  ün tüm elemanları aşağıdadır.

$$C_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Tüm kısmi dönüşümlerin yarigrubunu  $P_n$  ile göstermiştik. Şimdi  $P_n$  nin bazı alt yarigruplarını tanıyalım.

$1 \leq r \leq n-1$  olmak üzere  $PK_{n,r}$  kümesi

$$K_{n,r} = \{a \in P_n : |ima| \leq r\}$$

olarak tanımlanır.  $PK_{n,r}$  kümesi  $P_n$  yarigrubunun bir alt yarigrubudur.

### **3.3. Stirling Sayıları**

Stirling sayılarını hangi problemlere cevap oluşturduğunu anlatarak tanımlamaya çalışalım.  $A = \{w, x, y, z\}$  ve  $B = \{1, 2, 3\}$  olsun. Bu durumda  $f : A \rightarrow B$  şeklinde  $3^4=81$  tane fonksiyon vardır.  $B$  nin 2 elemanlı alt kümelerinin

sayısı  $\binom{3}{2}=2$  dir. Örneğin  $B$  nin,  $\{1, 2\} \subset B$  alt kümesini alırsak

$f : A \rightarrow \{1, 2\}$  şeklindeki fonksiyonların sayısı  $2^4=16$  dir. Dikkat edilecek olursa

$f : A \rightarrow \{1, 2\}$  şeklindeki fonksiyonlar  $A$  dan  $B$  ye örten olmayan fonksiyonların bir

kısımıdır.  $B$  nin,  $\{1\} \subset B$  alt kümesini alırsak  $f : A \rightarrow \{1\}$  şeklindeki fonksiyonların

sayısı  $1^4=1$  dir.  $f : A \rightarrow \{1\}$  şeklindeki fonksiyonlar da  $A$  dan  $B$  ye örten olmayan

fonksiyonların bir kısmıdır. Fakat örten olmayan fonksiyonları sayarken  $f : A \rightarrow \{1\}$

sabit fonksiyonu  $B$  nin  $\{1, 2\}, \{1, 3\}$  ve  $\{1\}$  öz alt kümeleri için üç defa saydık. Tüm

### 3. $T_n$ ve $P_n$ YARIGRUPLARI VE BAZI ALT YARIGRUPLARI Hayriye GÜÇKİR

bu durumları dikkate alırsak  $A$  dan  $B$  ye örten fonksiyonların sayısı (tüm fonksiyonların sayısından örten olmayanların sayısı çıkarılarak)

$$3^4 - \binom{3}{2}2^4 + \binom{3}{1}1^4 = 36$$

dır.

Genel olarak  $|A|=m$  ve  $|B|=n$  sonlu kümeleri için  $A$  dan  $B$  ye örten fonksiyonların sayısı

$$\binom{n}{n}n^m - \binom{n}{n-1}(n-1)^m + \binom{n}{n-2}(n-2)^m - \mathbf{L} + (-1)^k \binom{n}{n-k}(n-k)^m + (-1)^k \binom{n}{n-k}(n-k)^m \\ + \mathbf{L} + (-1)^{n-2} \binom{n}{2}2^m + (-1)^{n-1} \binom{n}{1}1^m$$

dir. Daha kısa olarak ifade etmek istersek  $|A|=m$  ve  $|B|=n$  sonlu kümeleri için  $A$  dan  $B$  ye örten fonksiyonların sayısı

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{n-k} (n-k)^m = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{n-k} (n-k)^m$$

dir.

Bu sayı sadece örten fonksiyonları vermenin dışında başka problemlerinde yanıtı olarak düşünebiliriz. Bu problemlere örnek olarak aşağıdaki problemi verebiliriz. Genel olarak  $m \geq n$  olmak üzere  $m$  tane nesneyi  $n$  kutuya hiçbir kutu boş kalmayacak biçimde kaç farklı şekilde dağıtabiliriz? Bu problemi de yukarıdaki örten fonksiyonlar gibi düşünersek cevap aynı sayıdır. Yani genel olarak  $m \geq n$  olmak üzere  $m$  tane nesneyi  $n$  kutuya hiçbirini boş kalmayacak şekilde

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{n-k} (n-k)^m = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{n-k} (n-k)^m$$

### 3. $T_n$ ve $P_n$ YARIGRUPLARI VE BAZI ALT YARIGRUPLARI Hayriye GÜÇKİR

farklı şekilde dağıtabiliriz. Kabul edelimki, bu kutuları farklı yapan üzerlerindeki etiketler olsun. Yani etiketler çıkarıldığında kutular tamamen aynı kutular olsun. Bu  $n$  tane farklı etiketi bu  $n$  kutuya  $n!$  farklı şekilde dağıtabileceğimizden,  $m$  tane nesneyi  $n$  kutuya hiçbiri boş kalmayacak şekilde

$$\frac{1}{n!} \left( \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{n-k} (n-k)^m \right) = \frac{1}{n!} \left( \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{n-k} (n-k)^m \right)$$

farklı dağıtabiliriz. Bu sayıya *ikinci tip Stirling Sayısı* denir ve  $S(m,n)$  ile gösterilir.

$$S(m,n) = \frac{1}{n!} \left( \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{n-k} (n-k)^m \right), \quad (m \geq n)$$

Dikkat edilecek olursa  $m$  elemanlı bir kümeden  $n$  elemanlı bir kümeye örten fonksiyonların sayısı

$$n!S(m,n)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Bazı Stirling sayıları aşağıdaki çizelgede ifade edilmiştir.

Çizelge 3.1.  $S(m,n)$  Stirling Sayıları

$m/n$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1							
2	1	1						
3	1	3	1					
4	1	7	6	1				
5	1	15	25	10	1			
6	1	31	90	65	15	1		
7	1	63	301	350	140	21	1	
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1

### 3. $T_n$ ve $P_n$ YARIGRUPLARI VE BAZI ALT YARIGRUPLARI Hayriye GÜÇKİR

Yukarıda bahsedilen dağıtım probleminde boş kutu olmasına izin verilirse, yani problem  $m \geq n$  olmak üzere  $m$  tane nesneyi  $n$  tamamen aynı olan kutuya kaç farklı şekilde dağıtabiliriz olsun. Bu durumda  $m$  tane nesneyi 1 tane, 2 tane, ...,  $n$  tane tamamen aynı olan kutuya dağıtacağız. O halde  $m \geq n$  olmak üzere  $m$  tane nesneyi  $n$  tamamen aynı olan kutuya

$$\sum_{i=1}^n S(m, i)$$

farklı şekilde dağıtabiliriz. Örneğin 4 farklı nesneyi 3 tane tamamen aynı olan kutuya

$$\sum_{i=1}^3 S(4, i) = S(4, 1) + S(4, 2) + S(4, 3) = 1 + 7 + 6 = 14$$

farklı şekilde dağıtabiliriz. ( $S(m, i)$  sayıları Çizelge 2.2 den alınmıştır.)

Stirling sayılarının cevap olduğu problemlere aşağıdaki örneğide verebiliriz.

**Örnek 3.3.1:** 15015 pozitif tamsayısı sıra gözetmeksizin kaç farklı şekilde pozitif tamsayı çarpanlarına ayrılabilirdiğini bulalım. Bunun için önce

$$15015 = 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$$

olup 5 tane asal çarpan olduğuna dikkat edelim. Kutulara sayı yerleştirmek olarak problemi düşünersek 15015 sayısının çarpanlarını kutulara yerleştirilen sayıların çarpımı olarak belirleyelim. O halde 1 kutuya 2 kutuya 3 kutuya 4 kutuya ve 5 kutuya sayıları dağıtabiliriz. Örneğin iki kutuya sayıları atmak demek

$$15015 = (3 \times 5 \times 7) \times (11 \times 13) = 105 \times 143$$

yada

### 3. $T_n$ ve $P_n$ YARIGRUPLARI VE BAZI ALT YARIGRUPLARI Hayriye GÜÇKİR

$$15015 = (3 \times 5) \times (7 \times 11 \times 13) = 15 \times 1001$$

olup  $105 \times 143$  yada  $15 \times 1001$  ifadelerini örnek olarak alabiliriz. Böylece 15015 pozitif tamsayısı sıra gözetmeksizin

$$\sum_{i=1}^5 S(5, i) = S(5, 1) + S(5, 2) + S(5, 3) + S(5, 4) + S(5, 5) = 1 + 15 + 25 + 10 + 1 = 52$$

farklı şekilde pozitif tamsayı çarpanlarına ayrılabilir.

**Teorem 3.3.2:**  $m$  ve  $n$  pozitif iki tam sayı ve  $1 < n \leq m$  olsun. O zaman

$$S(m+1, n) = S(m, n-1) + nS(m, n)$$

dir.

**İspat:**  $A = \{a_1, a_2, \mathbf{L}, a_m, a_{m+1}\}$  olsun.  $A$  kümesindeki elemanları  $n$  tane aynı kutuya hiç biri boş kalmayacak şekilde dağıtalım. Önce  $B = \{a_1, a_2, \mathbf{L}, a_m\}$  kümesini  $n-1$  tane aynı kutuya hiç biri boş kalmayacak şekilde

$$S(m, n-1)$$

farklı dağıtabiliriz.  $A$  kümesinde kalan  $a_{m+1}$  elemanını  $n$ -inci kutuya koyabiliriz. Bu birinci dağıtım şekli olur. Yada  $B$  kümesindeki elemanları  $n$  kutu boş kalmayacak şekilde

$$S(m, n)$$

### 3. $T_n$ ve $P_n$ YARIGRUPLARI VE BAZI ALT YARIGRUPLARI Hayriye GÜÇKİR

farklı dağıtabiliriz. Bu  $n$  kutu içindekiler ile farklı oldu.  $A$  kümesinde kalan  $a_{m+1}$  elemanını  $n$  farklı kutudan birine koyabiliriz. Böylece  $a_{m+1}$  elemanını

$$nS(m, n)$$

farklı şekilde kutuya koyabiliriz. Buda ikinci dağıtım şekli olur.  $m+1$  tane nesneyi  $n$  tamamen aynı olan kutuya  $S(m+1, n)$  farklı şekilde dağıtabiliriz. Bu dağıtımı yukarıda bahsettiğimiz iki farklı şekilde yapabileceğimizden sonuç olarak

$$S(m+1, n) = S(m, n-1) + nS(m, n)$$

eşitliği elde edilmiş olur. ■

Yukarıdaki eşitliği  $n!$  ile çarparsak

$$\begin{aligned} n!S(m+1, n) &= n!S(m, n-1) + n!nS(m, n) \\ n!S(m+1, n) &= n((n-1)!S(m, n-1) + n!S(m, n)) \end{aligned}$$

$m+1$  elemanlı bir kümeden  $n$  elemanlı bir kümeye tanımlı örten fonksiyonların sayısı  $m$  elemanlı bir kümeden  $n-1$  elemanlı bir kümeye tanımlı örten fonksiyonların sayısı ile  $m$  elemanlı bir kümeden  $n$  elemanlı bir kümeye tanımlı örten fonksiyonların sayısının toplamının  $n$  katı olduğu bulunur.

Stirling sayıları  $T_n$  ve  $P_n$  nin bazı alt yarıgruplarının eleman sayıları ve bazı alt yarıgrupların belli tipteki elemanların sayıları belirlendiği çalışmalarda karşımıza çıkmaktadır. Stirling sayılarına rank hesaplamalarında karşılaşılmakta olup ilgili çalışmalar ve sonuçlar bazı alt yarıgrupların rank özellikleri ile ilgili 2.5 nolu bölümde derlenmiştir. Aşağıda Stirling sayıları ile karşılaştığımız sonuçlar derlenmiştir.

### 3. $T_n$ ve $P_n$ YARIGRUPLARI VE BAZI ALT YARIGRUPLARI Hayriye GÜÇKİR

$T_n$  yarıgrubunun  $D_n$  alt yarıgrubunu daha önce tanımlamıştık.  $D_n$  alt yarıgrubunun tüm idempotent elemanlarının kümesi  $E(D_n)$  ve ikinci tip Stirling Sayısı  $S(m, n)$  olmak üzere

$$E(D_n) = \sum_{r=0}^n S(n, r) - 1$$

dir.

$Q = \{a \in P_n : |ima| = r\}$  olmak üzere  $Q$  kümesinin tüm nilpotent elemanlarının sayısı Laradji ve Umar tarafından 2004 yılında yapılan çalışmada

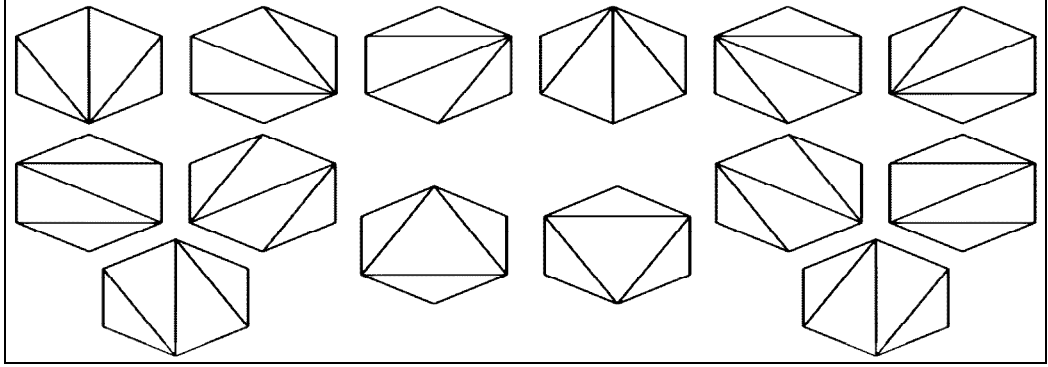
$$|N(Q)| = \binom{n}{r} S(n, r+1) r!$$

olarak bulunmuştur.

#### **3.4. Catalan Sayıları**

Catalan sayılarını hangi problemlere cevap oluşturduğunu anlatarak tanımlamaya çalışalım.  $n+2$  kenarlı bir çokgen köşegenlerle kaç farklı şekilde üçgenlere bölünebileceğini bulmaya çalışalım. Örneğin altıgende 14 tane farklı üçgen vardır. ( $n+2=6, n=4$ )

### 3. $T_n$ ve $P_n$ YARIGRUPLARI VE BAZI ALT YARIGRUPLARI Hayriye GÜÇKİR



Şekil 3.1. Altıgenin 14 farklı şekilde üçgenlere ayrılışı

$n$  basamaklı bir merdivenin,  $n$  tane karoyla kaç farklı şekilde kaplanabileceğinin cevabını arayalım. Örneğin dört basamak 14 tane farklı şekilde karo döşenir.

1'den  $n$ 'e kadar olan sayıların, sıralı üçlü oluşturmamak koşuluyla kaç farklı şekilde dizilebileceğini bulalım. Örneğin 1,2,3,4 ile sıralı üçlü oluşturmamak koşulu ile 14 farklı diziliş vardır. Bu farklı dizilişler

$$1432, 2143, 2413, 2431, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421, \\ 4132, 4213, 4231, 4312, 4321$$

şeklindedir.

$n+1$  tane sayı belli bir sırada verilmiş olsun. Bu sayıların sıralarını değiştirmeden kaç farklı şekilde çarpabileceğimizi bulalım. Örneğin  $n=4$  ise beş tane sayı  $a, b, c, d, e$  olmak üzere 14 farklı şekilde çarpabiliriz. Tüm farklı çarpımlar aşağıdaki gibidir.

$$(((a \cdot b) \cdot c) \cdot d) \cdot e, ((a \cdot b) \cdot c) \cdot (d \cdot e), ((a \cdot b) \cdot (c \cdot d)) \cdot e, (a \cdot b) \cdot ((c \cdot d) \cdot e), (a \cdot b) \cdot (c \cdot (d \cdot e)), \\ ((a \cdot (b \cdot c)) \cdot d) \cdot e, (a \cdot (b \cdot c)) \cdot (d \cdot e), (a \cdot ((b \cdot c) \cdot d)) \cdot e, (a \cdot (b \cdot (c \cdot d))) \cdot e, (a \cdot (((b \cdot c) \cdot d) \cdot e)), \\ a \cdot ((b \cdot c) \cdot (d \cdot e)), a \cdot ((b \cdot (c \cdot d)) \cdot e), a \cdot (b \cdot ((c \cdot d) \cdot e)), a \cdot (b \cdot (c \cdot (d \cdot e)))$$

$n$  tane açan ve  $n$  tane kapanan parantezi kaç farklı şekilde dengeli gruplandırabileceğimizi bulalım. Burada dengeli gruplandırmaktan kasıt parantezlerin dizilişinde herhangi bir yerde ayırma yaparsak soldan sağa doğru açılan

### 3. $T_n$ ve $P_n$ YARIGRUPLARI VE BAZI ALT YARIGRUPLARI Hayriye GÜÇKİR

parantezlerin sayısı kapanan parantezlerin sayısından büyük ya da eşit olmasıdır. Örneğin  $n=4$  alınırsa 14 farklı şekilde dengeli gruplandırabiliriz. Tüm farklı gruplandırmalar aşağıdaki gibidir.

()()(), ()(()), ()()(), ()(()), ()((())), ()()(), ()(()), ()()(), ((()))(), ()(),  
()(), ((()))(), ((())), (((())))

$n \times n$  karelik bir alanda, köşegenin üzerine çıkmayacak şekilde, sol alt köşeden sağ üst köşeye kaç farklı şekilde ulaşılabileceğini bulalım. Örneğin  $4 \times 4$  lük alanda 14 tane farklı yol istenilen özelliği sağlar. Bu problemin cevabının ispatı Nesin (2009) da yer almaktadır.

Genel durum  $n \times n$  karelik bir alanda istenilen yolların sayısı

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

olup bu sayıya *Catalan Sayısı* denir ve  $C_n$  ile gösterilir.

Çizelge 3.2.  $C_n$  Catalan Sayıları

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$C_n$	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796

Yukarıda bahsedilen problemlerden dolayı  $n$  tane parantezin dengeli gruplandırılma sayısının  $n$ -inci Catalan sayısı  $C_n$  olduğunu biliyoruz. Bu  $n$  tane parantezin dengeli gruplandırılma sayısını herhangi bir dengeli gruplandırma üzerinden bulmaya çalışalım. Bir dengeli gruplandırmada bir parantez seçelim. Bu seçtiğimiz parantezin dışındaki parantez sayısı  $A$ , seçtiğimiz parantezin içindeki parantez sayısı  $B$  olsun.

$$A(B)$$

### 3. $T_n$ ve $P_n$ YARIGRUPLARI VE BAZI ALT YARIGRUPLARI Hayriye GÜÇKİR

Bir parantez seçtiğimizden geriye  $n-1$  parantez kalmıştır. Bu durumda  $B$   $n-1$  tane parantez gruplandırma sayısı  $C_{n-1}$  olsa  $A$  da 0 parantez gruplandırma sayısı  $C_0$  olabilir,  $B$   $n-2$  parantez gruplandırma sayısı  $C_{n-2}$  olsa  $A$  da 1 gruplandırma sayısı  $C_1$  olup böylece devam edilirse

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \mathbf{K} + C_{n-1} C_0$$

eşitliği elde edilir.

Catalan sayılarının  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$  olduğunu göstermek için katsayıları

Catalan sayıları olan bir seri tanımlayalım. Bu seri

$$c(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \mathbf{L} = \sum_{i=0}^{\infty} C_i x^i$$

olsun.  $c^2(x)$  yi

$$c^2(x) = C_0 C_0 + (C_0 C_1 + C_1 C_0) x + \mathbf{L} = \sum_{i=0}^{\infty} (C_0 C_i + C_1 C_{i-1} + \mathbf{L} + C_i C_0) x^i$$

olarak elde ederiz. Dikkat edilecek olursa  $c^2(x)$  nin  $i$ -inci teriminin katsayısı  $C_{i+1}$  olup  $c^2(x)$  yi

$$c^2(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \mathbf{L}$$

olup

$$\begin{aligned} x c^2(x) &= C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \mathbf{L} \\ x c^2(x) + C_0 &= C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \mathbf{L} \\ x c^2(x) + C_0 &= c(x) \end{aligned}$$

elde edilir.  $C_0 = 1$  olduğundan son eşitlik

3.  $T_n$  ve  $P_n$  YARIGRUPLARI VE BAZI ALT YARIGRUPLARI Hayriye GÜÇKİR

$$xc^2(x) - c(x) + 1 = 0$$

şeklini alır . Bu denklemin kökleri

$$c(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

dir.  $c(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x}(\sqrt{1-4x})$  alalım ve

$$(1-4x)^{\frac{1}{2}} = \binom{\frac{1}{2}}{0} - \binom{\frac{1}{2}}{1}4x + \binom{\frac{1}{2}}{2}(4x)^2 + \mathbf{L} + (-1)^n \binom{\frac{1}{2}}{n}(4x)^n + \mathbf{L}$$

eşitliğini kullanalım.

$$\begin{aligned} \binom{\frac{1}{2}}{n} 4^n &= \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}-1\right) \left(\frac{1}{2}-2\right) \mathbf{L} \left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} 4^n \\ &= \frac{\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \mathbf{L} \left(-\frac{2n+3}{2}\right)}{n!} 4^n \\ &= \frac{(-1)^{n-1} 1.3.5 \mathbf{L} (2n-3)}{2^n n!} (2.2)^n \\ &= \frac{(-1)^{n-1} 1.3.5 \mathbf{L} (2n-3)}{n!} 2^n \frac{2.4.6 \mathbf{L} (2n-2)}{2.4.6 \mathbf{L} (2n-2)} \\ &= \frac{(-1)^{n-1} 1.3.5 \mathbf{L} (2n-3)}{n!} 2^n \frac{2.4.6 \mathbf{L} (2n-2)}{2^{n-1} (n-1)!} \\ &= \frac{(-1)^{n-1} (2n-2)!}{(n-1)! n!} 2^n \frac{(2n-1)}{(2n-1)} \end{aligned}$$

### 3. $T_n$ ve $P_n$ YARIGRUPLARI VE BAZI ALT YARIGRUPLARI Hayriye GÜÇKİR

olup

$$\binom{\frac{1}{2}}{n} 4^n = (-1)^{n-1} \binom{2n}{n} \frac{1}{2n-1}$$

elde edilir.

$$(1-4x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\frac{1}{2}}{n} 4^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (-1)^{n-1} \binom{2n}{n} \frac{1}{2n-1} x^n$$

eşitliği elde edilir. Yukarıdaki son eşitlik  $c(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x}(1-4x)^{\frac{1}{2}}$  de yerine yazılırsa

$$c(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x}(1-4x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (-1)^{n-1} \binom{2n}{n} \frac{1}{2n-1} x^n$$

eşitliği elde edilir. Buradan  $c(x)$  deki  $x^n$  nin katsayısının  $C_n$  olduğu hatırlanırsa (dikkat edilirse toplam sembolünde  $x^{n+1}$  in katsayısı  $\frac{1}{2}$  ile çarpılınca  $x^n$  nin katsayısı bulunur.)

$$C_n = \frac{1}{2} \frac{1}{2(n+1)-1} \binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{1}{2} \frac{1}{2n+1} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{1}{2} \frac{1}{2n+1} \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{(n+1)n!(n+1)n!}$$

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Catalan sayıları  $T_n$  nin bazı alt yarıgruplarının eleman sayıları ve bazı alt yarıgrupların belli tipteki elemanların sayıları belirlendiği çalışmalarda karşımıza çıkmaktadır. Catalan sayıları ile rank hesaplamalarında karşılaşılmış olup ilgili

### 3. $T_n$ ve $P_n$ YARIGRUPLARI VE BAZI ALT YARIGRUPLARI Hayriye GÜÇKİR

çalışmalar ve sonuçlar bazı alt yarıgrupların rank özellikleri ile ilgili 2.5 nolu bölümde derlenmiştir. Aşağıda Catalan sayıları ile karşılaştığımız sonuçlar derlenmiştir.

Önceki bölümlerde  $X_n = \{1, 2, 3, \mathbf{K}, n\}$  kümesi üzerinde tanımlı tüm sıra koruyan ve azaltan dönüşümlerin yarı grubuna *sıra koruyan ve azaltan dönüşümler yarı grubu* olarak adlandırıp ve  $C_n$  ile gösterildi. Dikkat edilecek olursa

$$C_n = O_n \cap D_n$$

dir. Higgins tarafından 1993 de yapılan çalışmada  $C_n$ ,  $n$ -inci Catalan sayısı olmak üzere sıra koruyan ve azaltan dönüşümlerin yarı grubu  $C_n$  nin eleman sayısının

$$|C_n| = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = C_n$$

olduğu gösterilmiştir.

$T_n$  yarı grubunda sıfır eleman yoktur. Bu yüzden  $T_n$  de nilpotent eleman mevcut değildir. Dikkat edilecek olursa  $T_n$  de sabit dönüşümler  $T_n$  nin sağ sıfır elemanlardır.

$D_n$  ve  $C_n$  yarı grubunda sıfır eleman  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \mathbf{L} & n \\ 1 & 1 & \mathbf{L} & 1 \end{pmatrix}$  dir. Laradji ve Umar

tarafından 2006 de yapılan çalışmada  $C_{n-1}$ ,  $n-1$ -inci Catalan sayısı olmak üzere sıra koruyan ve azaltan dönüşümlerin yarı grubu  $C_n$  nin tüm nilpotent elemanlarının sayısının

$$|N(C_n)| = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} = C_{n-1}$$

olduğu gösterilmiştir.

### 3.5. Bazı Altyarıgrupların Rank Özellikleri

Yukarıda bahsedilen Stirling ve Catalan sayıları  $T_n$  ve  $P_n$  yarıgruplarının bazı alt yarıgruplarının rank ve idempotent rankları hesaplanırken karşılaşılmıştır. Bu bölüm rankları hesaplanırken bu sayılarla karşılaşılan çalışmalar ve bulunan sonuçlar derlenmiştir.

Howie ve McFadden 1990 yılında yaptıkları çalışmada  $T_n$  nin alt yarıgrubu  $K_{n,r}$  nin rankının

$$\text{rank}(K_{n,r}) = S(n, r)$$

olduğunu göstermiştir. Yine aynı çalışmada  $K_{n,r}$  nin idempotent rankının

$$\text{idrank}(K_{n,r}) = S(n, r)$$

olduğunu gösterilerek  $K_{n,r}$  nin rank ve idempotent rankının eşit olduğu bulunmuştur.

$P_n$  yarıgrubunun  $PK_{n,r}$  alt yarıgrubu daha önce tanımlanmıştı. Garba tarafından 1990 yılında yapılan çalışmada  $PK_{n,r}$  alt yarıgrubunun rankı

$$\text{rank}(PK_{n,r}) = S(n+1, r+1)$$

olarak bulunmuştur. Yine aynı çalışmada  $PK_{n,r}$  alt yarıgrubunun idempotent rankının

$$\text{idrank}(PK_{n,r}) = S(n+1, r+1)$$

olarak gösterilip  $PK_{n,r}$  nin rank ve idempotent rankının eşit olduğu bulunmuştur.

### 3. $T_n$ ve $P_n$ YARIGRUPLARI VE BAZI ALT YARIGRUPLARI Hayriye GÜÇKİR

$DP_r(n)$  Rees bölümünü daha önce tanımlanmış olup Umar tarafından 1996 yılında yapılan çalışmada  $DP_r(n)$  nin rankı

$$\text{rank}(DP_r(n)) = S(n, r)$$

olarak bulunmuştur.

#### 4. İDEMPOTENTLER TARAFINDAN DOĞURULAN DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARI

Bu bölümde J.M. Howie tarafından tüm dönüşümler yarı grubunun idempotentler tarafından doğurulan alt yarı grupları ve tüm dönüşümler yarı grubunun idempotent doğurayları ile ilgili 1966 ve 1978 deki çalışmaları derlenecektir.

Öncelikle tüm dönüşümler yarı grubunda bir dönüşümün idempotent olması için gerek ve yeter koşulları aşağıdaki önerme ile ifade edelim.

##### 4.1. $ST_n$ Yarı grubunda İdempotentlerin İndirgenemez Çarpımı

Önceki bölümlerde olduğu gibi  $X_n = \{1, 2, 3, \mathbf{K}, n\}$  bir sonlu küme olmak üzere  $X_n$  kümesinden  $X_n$  kümesine tanımlı tüm dönüşümler yarı grubu  $T_n$  yarı grubunu alalım.

Öncelikle tüm dönüşümler yarı grubu  $T_n$  de bir dönüşümün idempotent olması için gerek ve yeter koşulları aşağıdaki önerme ile ifade edelim.

**Önerme 4.1.1:**  $a \in T_n$  olsun.  $a$  nın idempotent olması için gerek ve yeter koşul  $a|_{ima}$  birim dönüşüm olmasıdır.

**İspat:**  $(\Rightarrow)$   $a^2 = a$  olsun. Herhangi bir  $y \in ima$  alalım. O zaman  $xa = y$  olacak şekilde  $x \in X_n$  vardır. O halde  $a^2 = a$  olduğundan

$$ya = (xa)a = xa = y \Rightarrow ya = y$$

olup  $a|_{ima}$  birim dönüşümdür.

$(\Leftarrow)$   $a|_{ima}$  dönüşümü birim dönüşüm olsun. Her  $x \in X_n$  için  $xa \in ima$  olduğundan

$$(xa)a = xa$$

olup  $a^2 = a$  dir. Yani  $a$  idempotentdir. ■

$E(ST_n)$  ile singüler dönüşümler kümesindeki tüm idempotentlerin kümesini gösterelim. Aşağıdaki teorem singüler dönüşümler kümesindeki idempotentlerin sayısını vermektedir.

**Teorem 4.1.2:**  $|E(ST_n)| = \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} r^{n-r}$  dir.

**İspat:**  $a \in E(ST_n)$  olsun.  $|ima| = r$  olarak alalım.  $a \in ST_n$  olup  $1 \leq r \leq n-1$  dir.  $a$  idempotent olup

$$a|_{ima} : ima \rightarrow ima$$

dönüşümü birim dönüşümdür. Yani  $ima = Y$  ve  $g = a|_{X_n - Y}$  olmak üzere

$$a|_Y : Y \rightarrow Y, \text{ birim dönüşüm}$$

$$g : X_n - Y \rightarrow Y, \text{ herhangi bir dönüşüm}$$

olarak ele alalım. Bu durumda  $a : X_n \rightarrow X_n$ , dönüşümünü her  $x \in X_n$  için

$$xa = \begin{cases} x, & x \in Y \\ xg, & x \notin Y \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa  $a \in E(ST_n)$  olur. Gerçekten de  $xg \in Y$  olduğuna dikkat edilirse

$$x \in Y \Rightarrow xa^2 = (xa)a = xa = x$$

$$x \notin Y \Rightarrow xa^2 = (xg)a = xg = xa$$

olup  $a$  bir idempotent elemandır.

Böylece  $1 \leq r \leq n-1$  ve  $ima = Y$  olmak üzere  $X_n$  nin bir  $r$  elemanlı alt kümesi  $Y$  için  $r^{n-r}$  tane idempotent dönüşüm var.  $r$  elemanlı her farklı  $Y$  kümesi için farklı idempotentler bulunacağından bunların sayısı

$$\binom{n}{r} r^{n-r}$$

dir. Her farklı  $r$  sayısı için sayma yapılırsa

$$|E(ST_n)| = \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} r^{n-r}$$

olarak bulunur. ■

$S_n$  nin birim dönüşümü idempotent olup bu sayılara eklenerek  $T_n$  deki tüm idempotentlerin sayısı bulunur. Bu sayı aşağıdaki sonuçta ifade edilmiştir.

**Sonuç 4.1.3:**  $|E(T_n)| = \left( \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} r^{n-r} \right) + 1 = \sum_{r=1}^n \binom{n}{r} r^{n-r}$  dir. ■

Singüler dönüşümler yarıgrubu  $ST_n = T_n - S_n$  için doğuray kümesi bulalım.

Hatırlanacak olursa  $a \in ST_n$  ise  $|ima| \leq n-1$  dir.  $K_{n,r}^*$  kümesini

$$K_{n,r}^* = \{a \in T_n : |ima| = r\}$$

#### 4. İDEMPOİTENTLER TARAFINDAN DOĞURULAN DÖNÜŞÜM

##### YARIGRUPLARI

Hayriye GÜÇKİR

olarak tanımlayalım. Bu durumda dikkat edilecek olursa  $K_{n,n}^* = S_n$  ve  $\bigcup_{r=1}^{n-1} K_{n,r}^* = ST_n$  dir.

**Önerme 4.1.4:** Eğer bir  $X \subseteq ST_n$  için  $K_{n,n-1}^* \subseteq \langle X \rangle$  ise  $ST_n = \langle X \rangle$  dir.

**İspat:** Bir  $X \subseteq ST_n$  için  $K_{n,n-1}^* \subseteq \langle X \rangle$  olsun. Herhangi bir  $a \in ST_n \setminus K_{n,n-1}^*$  elemanının  $X$  in elemanlarının çarpımı olarak yazılabildiğini göstermeliyiz.

$$ST_n = \bigcup_{r=1}^{n-1} K_{n,r}^*$$

olup  $1 \leq r \leq n-2$  olmak üzere  $a \in K_{n,r}^*$  alalım. En az bir tane farklı çift  $(i, j) \in X_n \times X_n$  için  $ia = ja$  ve en az bir  $y \in X_n - ima$  vardır.  $g_{i,j} : X_n \rightarrow X_n$  ve  $\hat{a}_{i,j} : X_n \rightarrow X_n$  dönüşümleri sırasıyla

$$xg_{i,j} = \begin{cases} j, & x = i \\ x, & x \neq i \end{cases} \text{ ve } x\hat{a}_{i,j} = \begin{cases} y, & x = i \\ xa, & x \neq i \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Dikkat edilecek olursa  $g_{i,j} \in K_{n,n-1}^*$  ve  $|im\hat{a}| = |ima| + 1$  olup  $\hat{a}_{i,j} \in K_{n,r+1}^*$  dir. Yukarıdaki tanımlama ile

$$a = g_{i,j}\hat{a}_{i,j}$$

olur. Benzer şekilde işleme  $a = \hat{a}_{i,j}$  alınarak  $\hat{a}_{k,l} \in K_{n,n-1}^*$  olana kadar devam edilirse

$$a = g_{i,j} \mathbf{L} g_{k,l} \hat{a}_{k,l}$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece

$$g_{i,j}, \mathbf{K}, g_{k,l}, \hat{a}_{k,l} \in K_{n,n-1}^* = \langle X \rangle$$

olup  $a \in \langle X \rangle$  dir. ■

O halde  $K_{n,n-1}^*$  nin her doğuray kümesi  $ST_n$  nin doğuray kümesidir. Yani bir kümenin  $ST_n$  nin doğuray kümesi olduğunu göstermek için o kümenin  $K_{n,n-1}^*$  kümesini doğurduğunu göstermek göstermek yeterli olacaktır.

$def(a) = r$  olmak üzere imaj kümesinde  $n - r$  tane eleman olan dönüşümleri içeren  $\mathcal{D}$ -sınıfını  $D_{n-r}$  ile gösterdiğimizi hatırlayalım.

**Önerme 4.1.5:**  $n \geq 2$  olmak üzere her  $a \in D_{n-1}$  elemanı defecti 1 olan idempotentlerin çarpımı olarak yazılabilir.

**İspat:**  $Shift(a)$ ,  $Def(a)$  kümelerini ve  $shift(a)$ .  $def(a)$  pozitif tam sayılarını daha önce tanımladık.  $a \in D_{n-1}$  ve  $shift(a) = r$  olsun.  $n = 2$  ise

$$D_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

olup sonuç aşıkardır.

$n \geq 3$  alalım.  $shift(a) = r = 1$  ise  $a \in E(D_{n-1})$  olur.

$n \geq 3$  ve  $r \geq 2$  olsun. Genelliği bozmaksızın  $a$  nın  $Shift(a) = \{1, 2, \mathbf{K}, r\}$

olsun. Yani her  $1 \leq i \leq r$  için  $a_i \neq i$  olmak üzere

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \mathbf{L} & r & r+1 & \mathbf{L} & n \\ a_1 & a_2 & \mathbf{L} & a_r & r+1 & \mathbf{L} & n \end{pmatrix}$$

olsun.  $a \in D_{n-1}$  olup  $defect(a) = 1$  olacağından  $z \in X_n$  olmak üzere  $Defect(a) = \{z\}$  olsun. O halde,  $z \in \{1, 2, \dots, r\}$  olur. Dikkat edilecek olursa  $defect(a) = 1$  olduğundan  $\{1, 2, \dots, r\}$  kümesindeki iki elemanın görüntüsü aynıdır, yani  $a_1, a_2, \mathbf{L}, a_r$  listesinde  $r-1$  tane farklı eleman vardır. Ayrıca  $a_1 = a_2 \in \{1, 2\}$  olsa  $shift(a) = r$  oluşu ile çelişir.

O halde düşünmemiz gereken 4 temel durum vardır.

**I. Durum**  $\forall 1 \leq i \leq r$  için  $a_i \in \{1, 2, \dots, r\}$ ,  $a_1 = a_2 \notin \{1, 2\}$ ,  $z \notin \{1, 2\}$

**II. Durum**  $\forall 1 \leq i \leq r$  için  $a_i \in \{1, 2, \dots, r\}$ ,  $a_1 = a_2 \notin \{1, 2\}$ ,  $z = 1$  ( $z = 2$  de olabilir ama farklı bir durum yaratmaz.)

**III. Durum**  $a_r = r+1$ ,  $z \in \{1, 2, \dots, r-1\}$

**IV. Durum**  $a_r = r+1$ ,  $z = r$

**I. Durumda**  $\forall 1 \leq i \leq r$  için  $a_i \in \{1, 2, \dots, r\}$ ,  $a_1 = a_2 \notin \{1, 2\}$ ,  $z \notin \{1, 2\}$  olmak üzere

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 1 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & r & r+1 & \dots & n \\ a_1 & 2 & a_3 & \dots & a_r & r+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanırsa,

$$gb = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & r & r+1 & \dots & n \\ a_1 & a_1 & a_3 & \dots & a_r & r+1 & \dots & n \end{pmatrix} = a$$

olur. Çünkü  $a_1 = a_2 \notin \{1, 2\}$  dir.

**II. Durumda**  $\forall 1 \leq i \leq r$  için  $a_i \in \{1, 2, \dots, r\}$ ,  $a_1 = a_2 \notin \{1, 2\}$ ,  $z = 1$  olmak üzere

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & r & r+1 & \dots & n \\ 1 & 1 & a_3 & \dots & a_r & r+1 & \dots & n \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanırsa

$$bg = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & r & r+1 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_r & r+1 & \dots & n \end{pmatrix} = a$$

olur.

**III. Durumda**  $a_r = r+1, z \in \{1, 2, \dots, r-1\}$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & \dots & r-1 & r & r+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & r-1 & r+1 & r+1 & \dots & n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r-1 & r & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{r-1} & r & \dots & n \end{pmatrix}$$

Olarak tanımlanırsa

$$gb = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r-1 & r & r+1 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{r-1} & r+1 & r+1 & \dots & n \end{pmatrix} = a$$

olur.

**IV. Durumda**  $a_r = r+1, z = r$  olmak üzere

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r-1 & r & r+1 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & r-1 & r+1 & r+1 & \dots & n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r-1 & r & \dots & n \\ r & a_2 & \dots & a_{r-1} & r & \dots & n \end{pmatrix}$$

ve

$$x = \begin{pmatrix} 1 & \dots & r-1 & r & r+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & r-1 & a_1 & r+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanırsa

$$gbx = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r-1 & r & r+1 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{r-1} & r+1 & r+1 & \dots & n \end{pmatrix} = a$$

bulunur.

Bu dört durumda da  $g, x \in E(D_{n-1})$ ,  $b \in D_{n-1}$  ve  $shift(b) = r-1$  olmak üzere  $a$  yı

$$a = gb, a = bg, a = gb \text{ veya } a = gbx$$

şeklinde yazılabilmektedir. İspatı tamamlamak için  $b$  nin idempotent olduğunu göstermek yeterlidir. Eğer  $shift(b) = r-1 = 1$  ise  $b$  bir idempotent olup  $a$  defect i 1 olan idempotentlerin çarpımı olarak yazılabilir. Eğer  $shift(b) = r-1 \geq 2$  ise benzer işlemler  $b$  için de yazılabileceğinden ve her defasında  $shift$  1 azalacağından sonuç elde edilinceye kadar bu işlem tekrarlanabilir. Böylece  $a \in D_{n-1}$  elemanı defecti 1 olan idempotentlerin çarpımı olarak yazılabilir. ■

**Önerme 4.1.6:**  $D_{n-1}$  sınıfındaki tüm idempotentlerin kümesi  $E(D_{n-1})$  olmak üzere

$$|E(D_{n-1})| = n(n-1)$$

dir.

**İspat:**  $a \in E(D_{n-1})$  alalım.  $Y \subseteq X_n$  için  $ima = Y$  ise  $|Y| = n-1$  ve  $a$  bir idempotent olduğundan  $a|_Y = 1_Y$  dir. O halde  $|X_n - Y| = 1$  dir. Dolayısıyla, sadece bir  $x \in X_n - Y$  için  $xa \in Y$  olacak şekilde tanımlamak mümkündür.  $|Y| = n-1$  elemanı

#### 4. İDEMPOİTİNTLER TARAFINDAN DOĞURULAN DÖNÜŞÜM

##### YARIGRUPLARI

Hayriye GÜÇKİR

olduğundan  $xa$  yı  $(n-1)$  farklı Şekilde tanımlayabiliriz. Ayrıca,  $X_n$  in  $n-1$  elemanlı  $n$  tane altkümesi olduğundan

$$|E(D_{n-1})| = n(n-1)$$

olur. ■

$a \in D_{n-1}$  olsun. Ayrıca,

$$a = a_1 a_2 \dots a_m$$

olacak Şekilde  $a_1, a_2, \dots, a_m \in D_{n-1}$  mevcut olsun.

$$|ima| = |ima_1| = |ima_2| = \dots = |ima_m| = n-1$$

ve

$$im(a) = im(a_1 a_2 \dots a_m) \subseteq im(a_m)$$

olduğundan  $im(a) = im(a_m)$  olmak zorundadır. Ayrıca,

$$Ker(a_1) \subseteq Ker(a_1 a_2 \dots a_m) = Ker(a)$$

ve  $Ker(a_1)$  ve  $Ker(a)$  nın denklik sınıflarının sayısı  $(n-1)$  olup

$$Ker(a_1) = Ker(a)$$

olur.

Dikkat edilecek olursa  $D_{n-1}$  deki  $L$  sınıflarının sayısı  $n$ ,  $R$  sınıflarının sayısı  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$  dir.

**Sonuç 4.1.7:** Bir  $A \subseteq D_{n-1}$  için  $D_{n-1} \subseteq \langle A \rangle$  ise  $A$  nın eleman sayısı

$$|A| \geq \max \left\{ n, \frac{n(n-1)}{2} \right\} = \frac{n(n-1)}{2}, \quad (n \geq 3)$$

olur. ■

**İspat:**  $a \in D_{n-1}$  olsun.  $D_{n-1} \subseteq \langle A \rangle$  olduğundan

$$a = a_1 a_2 \dots a_m$$

olacak şekilde  $a_1, a_2, \dots, a_m \in A \subseteq D_{n-1}$  vardır. Özel olarak

$$a = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}, \quad i \neq j$$

seçilir ise  $Ker(a) = Ker(a_1)$  olduğundan  $a_1 \in R_{[i,j]}$  dir. O halde  $a_1 \in R_{[i,j]}$  ve  $a_1 \in A$  olup  $A$  kümesi her bir  $R$  sınıfından bir eleman içermelidir.  $im(a) = im(a_m)$  olup  $a_m \in L_{\{1,2,\dots,i-1,i+1,\dots,n\}}$  dir. O halde  $a_m \in L_{\{1,2,\dots,i-1,i+1,\dots,n\}}$  ve  $a_m \in A$  olup  $A$  kümesi her bir  $L$  sınıfından bir eleman içermelidir. Dolayısıyla,  $A$  her bir  $L$  sınıfından ve her bir  $R$  sınıfından en az bir eleman içermek zorundadır. ■

**4.2.  $ST_n$  Yarigrubunun Rank Özellikleri**

J.M. Howie, (1978) deki çalışmasıyla singüler dönüşümler yarigrubunun idempotent rankının  $\frac{n(n-1)}{2}$  ve (1987) de de Gomes ile birlikte yaptığı çalışmada singüler dönüşümler yarigrubunun rankının idempotent rankına eşit olduğunu göstermiştir. Bu bölümde yukarıda bahsedilen çalışmalar derlemecektir.

**Teorem 4.2.1:**  $a, b \in T_n$

$$def(ab) \geq def a, def b$$

dır.

**İspat:**  $im(ab) \subseteq im(b)$  olup  $def(ab) \geq def(b)$  olduğu açıktır.  
 $Ker(a) \subseteq Ker(ab)$  olup

$$|im(ab)| \leq |im(a)| \Rightarrow def(ab) \geq def(a)$$

olduğu açıktır. O halde

$$def(ab) \geq def a, def b$$

dir. ■

**Önerme 4.2.2:**  $a \in T_n$  ve  $def(a) = 1$  olsun. Eğer  $a = a_1 a_2 \dots a_m$  olacak şekilde defecti 1 olan  $a_i$  dönüşümleri mevcut ise

$$\text{Ker}(a) = \text{Ker}(a_1) \text{ ve } \text{Def}(a) = \text{Def}(a_m)$$

dir.

**İspat:**  $(i, j) \in \text{Ker}(a_1)$  ise  $ia_1 = ja_1$  olup

$$(ia_1)a_2a_3\dots a_m = (ja_1)a_2a_3\dots a_m$$

$$ia = ja \Rightarrow (i, j) \in \text{Ker}a$$

$$\text{Ker}(a_1) \subseteq \text{Ker}(a)$$

olur. Ayrıca  $\text{def}(a_1) = \text{def}(a) = 1$  olduğundan  $\text{Ker}(a_1) = \text{Ker}(a)$  olur.

$$X_n a = X_n (a_1 a_2 \dots a_{m-1}) a_m \subseteq X_n a_m$$

olup  $\text{im}(a) \subseteq \text{im}(a_m)$  dir. Dolayısıyla,  $\text{Def}(a_m) \subseteq \text{Def}(a)$  olur.

$\text{def}(a_m) = \text{def}(a) = 1$  olup  $\text{Def}(a_m) = \text{Def}(a)$  olur. ■

**Tanım 4.2.3:**  $a_1, a_2, \dots, a_m$  idempotent olsun. Eğer  $\forall i = 1, 2, \dots, m$  için  $a_i a_{i+1} \neq a_i$  ve  $a_i a_{i+1} \neq a_{i+1}$  ise  $a_1 a_2 \dots a_m$  ifadesine *indirgenemez çarpım* denir.

$a \in E(ST_n)$  ve  $\text{def}(a) = 1$  olsun. O zaman,

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & n \end{pmatrix}, \quad (i \neq j)$$

şeklindedir. Bu yüzden bir  $a = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$  şeklinde yazabiliriz.

$$a = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \text{ ise } Def(a) = \{i\} \text{ ve } Ker(a) = \{(i, j), (j, i)\} \cup \{(k, k) : k \in X_n\}$$

denklik bağıntısını  $[i j]$  ile gösterelim.

$$\text{Not: } a = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \text{ ve } b = \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} \text{ ise } Ker(a) = Ker(b) = [i j] \text{ olur.}$$

**Önerme 4.2.4:**  $a \in ST_n$  ve  $def a = 1$  olsun. Eğer  $a$  defecti 1 olan idempotentlerin

$$a = \begin{pmatrix} i_1 \\ j_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_2 \\ j_2 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} i_m \\ j_m \end{pmatrix}, (m \geq 2)$$

şeklinde bir indirgenemez çarpımı ise

- i.  $Ker(a) = [i_1 j_1]$
- ii.  $Def(a) = [i_m]$
- iii. Her  $r = 2, \dots, m$  için  $i_{r-1} = j_r, j_{r-1} \neq i_r$

dir.

**İspat:** (i) ve (ii) şıkları yukarıdaki önermeden dolayı doğrudur. Şimdi (iii) şikkının doğruluğunu gösterelim.

$$r = 2, 3, \dots, m \text{ için}$$

$$b = \begin{pmatrix} i_{r-1} \\ j_{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_r \\ j_r \end{pmatrix}$$

ele alalım.  $i_{r-1}, i_r, j_{r-1}, j_r$  için 3 durum vardır. Bunlar

- 1) **Durum:** Dördünün de birbirinden farklı olması
- 2) **Durum:** Sadece ikisinin eşit olması ki bunlar

- i.  $i_{r-1} = i_r$
- ii.  $i_{r-1} = j_r$
- iii.  $j_{r-1} = i_r$
- iv.  $j_{r-1} = j_r$

3) **Durum:** İki çiftin birbirine eşit olması

- i.  $i_{r-1} = i_r$  ve  $j_{r-1} = j_r$
- ii.  $i_{r-1} = j_r$  ve  $j_{r-1} = i_r$

dır.

**I.Durum:** Dördünün de birbirinden farklı olsun.  $Def(b) = \{i_{r-1}, i_r\}$  olup bu da  $def(a) = 1$  olması ile çelişir.

**II.Durum:** Sadece  $i_{r-1}, i_r, j_{r-1}, j_r$  den ikisi eşit olsun

- i.  $b = \begin{pmatrix} i_{r-1} \\ j_{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{r-1} \\ j_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{r-1} \\ j_{r-1} \end{pmatrix}$  olup bu durum indirgenemezlik ile çelişir.
- ii.  $b = \begin{pmatrix} i_{r-1} \\ j_{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_r \\ i_{r-1} \end{pmatrix}$  ise  $Def(b) = \{i_r\}$  olup istenilen durum bulunur.
- iii.  $b = \begin{pmatrix} i_{r-1} \\ j_{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{r-1} \\ j_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{r-1} \\ j_r \end{pmatrix}$  ise  $Def(b) = \{i_{r-1}, i_r\}$  olup bu  $def(a) = 1$  olması ile çelişir.
- iv.  $b = \begin{pmatrix} i_{r-1} \\ j_{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_r \\ j_{r-1} \end{pmatrix}$  ise  $Def(b) = \{i_{r-1}, i_r\}$  olup  $def(a) = 1$  olması ile çelişir.

**III.Durum:** İki çift birbirine eşit olsun.

- i.  $b = \begin{pmatrix} i_{r-1} \\ j_{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{r-1} \\ j_{r-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{r-1} \\ j_{r-1} \end{pmatrix}$  olup bu çarpım indirgenemezlik koşulu ile çelişir.
- ii.  $b = \begin{pmatrix} i_{r-1} \\ j_{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{r-1} \\ i_{r-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_{r-1} \\ i_{r-1} \end{pmatrix}$  olup bu da indirgenemezlik koşulu ile çelişir.

O halde  $b = \begin{pmatrix} i_{r-1} \\ j_{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_r \\ i_{r-1} \end{pmatrix}$  istenilen durum olarak bulunur. Yani her

$r = 2, \dots, m$  için  $i_{r-1} = j_r, j_{r-1} \neq i_r$  dir. ■

$a \in ST_n$  ve  $def(a) = 1$  olsun. O zaman,  $a$  defect i 1 olan idempotentlerin çarpımı olarak

$$a = a_1 a_2 \dots a_m$$

şeklinde yazılabilir. Bu çarpım indirgenemez olmayabilir. Bir başka deyişle,

$$a_i a_{i+1} = a_i \text{ veya } a_i a_{i+1} = a_{i+1}$$

şeklinde bir durum olabilir. Bu durumda  $a_i a_{i+1} = a_i$  (veya  $a_{i+1}$ ) ise yukarıdaki çarpımda  $a_i a_{i+1}$  yerine  $a_i$  (veya  $a_{i+1}$ ) yazılabilir. Çarpım hala indirgenemez değil ise bu işleme  $a = a_1 a_2 \dots a_m$  şeklinde indirgenemez çarpım olana kadar devam edilir. Böylece  $a \in ST_n$  ve  $def(a) = 1$  ise

$$a = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_3 \\ i_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_4 \\ i_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_4 \\ i_5 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} i_{m-1} \\ i_{m-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_m \\ i_{m-1} \end{pmatrix}$$

ve  $i_r \neq i_{r+1}$  ( $r = 1, 2, \dots, m-1$ ),  $i_r \neq i_{r+2}$  ( $r = 1, 2, \dots, m-2$ ) ve  $i_1 \neq i_4$  şeklinde yazılabilir.

Yani yukarıdaki çarpım için yazılan şartlar sadece yan yana gelenlerin farklı indirgenemezliğini garanti eden şartlardır.

**Önerme 4.2.5:**  $m \geq 3$  ve tüm  $i_1, i_2, \dots, i_m \in X_n$  ler farklı elemanlar olsun.

$$\left[ \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_3 \\ i_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_4 \\ i_3 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} i_m \\ i_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_2 \\ i_m \end{pmatrix} \right]^{m-1} = \begin{pmatrix} i_2 \\ i_1 \end{pmatrix}$$

olur.

**İspat:**  $b = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_3 \\ i_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_4 \\ i_3 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} i_m \\ i_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_2 \\ i_m \end{pmatrix}$  olsun. O zaman,

$$b = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & \cdots & i_{m-1} & i_m \\ i_m & i_m & i_1 & i_3 & \cdots & i_{m-1} & i_m \end{pmatrix}$$

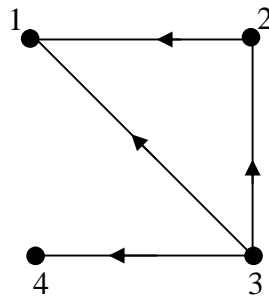
olup

$$b^{m-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & \cdots & i_{m-1} & i_m \\ i_1 & i_1 & i_3 & i_4 & \cdots & i_{m-1} & i_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_2 \\ i_1 \end{pmatrix}$$

dır. ■

$I$  defect  $i$  olan idempotentlerden oluşan bir küme olsun. Köşe kümesi  $X_n$  olan ve kenar (ok) listesi  $\forall \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \in I$  için  $(j, i)$  oklarından oluşan grafiği  $\Gamma(I)$  ile gösterelim. Tüm okların kümesini  $A(\Gamma(I))$  ile gösterelim.

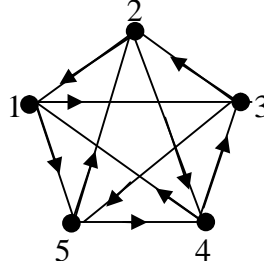
Örneğin;  $I = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \subseteq T_4$  için  $\Gamma(I)$  grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.1. Bir  $I \subseteq T_4$ , alt kümesinin  $\Gamma(I)$  grafiği

Örneğin  $I = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \subseteq T_5$  için

$\Gamma(I)$  aşağıdaki gibi (tam ve sıkı bağlantılı) bir diagramdır.



Şekil 4.2. Bir  $I \subseteq T_5$ , alt kümesinin  $\Gamma(I)$  grafiği

**Tanım 4.2.6:**  $I$  defecti 1 olan idempotentlerin bir kümesi ve  $\Gamma(I)$  da  $I$  nın diyagramı olsun. Eğer  $\forall i \neq j \in X_n$  için  $(i, x_i), (x_i, x_{i_2}), \dots, (x_{i_n}, j) \in A(\Gamma(I))$  olacak şekilde  $x_i, x_{i_2}, \dots, x_{i_n} \in X_n$  var ise  $\Gamma(I)$  ya *sıkı bağlantılı diyagram* denir. Ayrıca, her  $i \neq j \in X_n$  için  $(i, j) \in \Gamma(I)$  veya  $(j, i) \in \Gamma(I)$  ise  $\Gamma(I)$  diagramına *tam diyagram* denir.

**Teorem 4.2.7:**  $I \subseteq E(ST_n)$  defect i 1 olan idempotentlerin kümesi olsun.  $I$  kümesinin,  $ST_n$  in bir doğuray kümesi olması için gerek ve yeter koşul  $\Gamma(I)$  nın tam ve sıkı bağlantılı olmasıdır.

**İspat:**  $(\Rightarrow)$   $ST_n = \langle I \rangle$  ve  $i, j \in X_n$  için  $i \neq j$  olsun.  $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \in I$  ise sonuç aşikardır.

$\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \notin I$  ise

$$\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} x_m \\ x_{m-1} \end{pmatrix} \quad (*)$$

olacak Şekilde  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_m \\ x_{m-1} \end{pmatrix} \in I$  vardır.

$$Def \left( \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \right) = Def \left( \begin{pmatrix} x_m \\ x_{m-1} \end{pmatrix} \right)$$

olduğundan  $x_m = i$  ve  $Ker \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = Ker \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  olduğundan  $[i j] = [x_1 x_2]$  olur.

$[i j] = [x_1 x_2]$  olduğundan  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix}$  olup  $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \notin I$  olduğundan  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix}$  olur.

Böylece,  $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$  veya  $\begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} \in \Gamma(I)$  nın bir elemanıdır. Dolayısıyla,  $\Gamma(I)$  tamdır.

$\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} \in \Gamma(I)$  ise  $i$  den  $j$  ye ve  $j$  den  $i$  ye  $\Gamma(I)$  bir patika vardır.  $\Gamma(I)$  tam

olduğundan  $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \notin I$  olsun. Bu durumda (\*) denkleminde  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} \in \Gamma(I)$  olup

$i$  den  $j$  ye bir patika ve

$$(j, x_3), (x_3, x_4), \dots, (x_{m-1}, i) \in \Gamma(I)$$

olduğundan  $j$  den  $i$  ye bir patika vardır.  $\Gamma(I)$  sıkı bağlantılıdır.

( $\Leftarrow$ )  $\Gamma(I)$  tam ve sıkı bağlantılı olsun.  $i, j \in X_n$  ve  $i \neq j$  olsun.  $\Gamma(I)$  tam

olduğundan  $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \in I$  veya  $\begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} \in I$  dir. Her ikisi de  $I$  da ise sorun yok. Birini  $I$  da

diğerinin  $I$  da olmadığını kabul edelim.  $\begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} \in I$  ve  $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \notin I$  olsun. O zaman  $\Gamma(I)$

sıkı bağlantılı olduğundan

$$(j, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{m-1}, i) \in \Gamma(I)$$

mevcuttur. Bir başka deyişle,  $\begin{pmatrix} x_1 \\ j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} i \\ x_{m-1} \end{pmatrix} \in I$  olur.  $\begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} \in I$  olduğundan

$$b = \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} i \\ x_{m-1} \end{pmatrix} \in \langle I \rangle$$

olur. Bir önceki önermeden,

$$b^m = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \in \langle I \rangle$$

olur. Böylece,  $E(K^*(n, n-1)) \subseteq \langle I \rangle$  olup defect i 1 olan tüm idempotentlerin  $ST_n$  doğurayı olduğundan  $\langle I \rangle = ST_n$  olur. ■

**Tanım 4.2.8:**  $S$  bir yarıgrup olsun. Bu yarı grubun idempotent rankı

$$idrank(S) = \min\{|A| : A \subseteq E(S) \text{ ve } \langle A \rangle = S\}$$

olarak tanımlanır. Tanımlara dikkat edilecek olursa

$$idrank(S) \geq rank(S)$$

dir.

**Sonuç 4.2.9:**  $idrank(ST_n) = \frac{n(n-1)}{2} = rank(ST_n)$  dir. ■

**İspat:** Bir  $A$  kümesinin  $ST_n$  yarıgrubunu doğurduğunu göstermek için  $A$  kümesinin  $K_{n,n-1}^*$  kümesini doğurduğunu göstermek yeterli olacaktır. Bu yüzden  $A$  kümesi  $D_{n-1}$  sınıfındaki her L ve R sınıfından bir eleman içermek zorunda olup daha önce gösterildiği üzere

$$|A| \geq \frac{n(n-1)}{2}$$

dir. Herhangi bir doğuray kümesi en az  $\frac{n(n-1)}{2}$  elemana sahip olmalıdır. Böylece

$$\text{rank}(ST_n) \geq \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\text{idrank}(ST_n) \geq \text{rank}(ST_n) \geq \frac{n(n-1)}{2}$$

dir.

İdempotentlerden oluşan bir  $I$  kümesine karşılık gelen  $\Gamma(I)$  grafiğini düşünelim. Bu grafiğin sıkı bağlantılı olmasını garantilemek için tüm köşeleri içeren bir grafik almalyız. Herhangi bir tam diyagram en az  $\frac{n(n-1)}{2}$  ok içereceğinden

$$|I| = \frac{n(n-1)}{2}$$

olacak şekilde idempotentlerden oluşan bir  $I$  kümesi bulunabiliyorsa

$$\text{idrank}(ST_n) = \text{rank}(ST_n) = \frac{n(n-1)}{2}$$

olur.

$\Gamma(I)$  grafiğini tam sıkı bağlantılı olacak şekilde idempotentlerden oluşan bir

$I$  kümesini  $m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$  olmak üzere

$$I = \left\{ \begin{array}{l} \left( \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \right), \dots, \left( \begin{array}{c} n-1 \\ n \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} n \\ 1 \end{array} \right), \\ \left( \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 1 \\ 4 \end{array} \right), \dots, \left( \begin{array}{c} 1 \\ n-1 \end{array} \right), \\ \left( \begin{array}{c} 2 \\ 4 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 2 \\ 5 \end{array} \right), \dots, \left( \begin{array}{c} 2 \\ n \end{array} \right), \\ \left( \begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 3 \\ 5 \end{array} \right), \dots, \left( \begin{array}{c} 3 \\ n \end{array} \right), \dots, \\ \left( \begin{array}{c} m-1 \\ m+1 \end{array} \right), \dots, \left( \begin{array}{c} m-1 \\ n \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} m \\ n \end{array} \right) \end{array} \right\}$$

olsun.  $\Gamma(I)$  tam ve sıkı bağlantılı olduğundan  $ST_n = \langle I \rangle$  olur.

$$\begin{aligned} |I| &= n + (n-3) + [(n-3) + (n-4) + \dots + 2 + 1] \\ &= 2n - 3 + \frac{(n-3)(n-2)}{2} \\ &= \frac{4n - 6 + n^2 - 5n + 6}{2} \\ &= \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

dir. O halde  $|I| = \frac{n(n-1)}{2}$  olacak şekilde idempotentlerden oluşan bir  $I$  kümesi yukarıdaki gibi mevcut olup

$$idrank(ST_n) = rank(ST_n) = \frac{n(n-1)}{2}$$

olur. ■

## KAYNAKLAR

- ARAUJO, I.M. , BRANCO, M.J.J., FERNANDES, V.H., GOMES, G.M.S., RUSKUC, N. (2001). On Generators and Relations of Unions of Semigroups, *Semigroup Forum*, 63, 49-62.
- AYIK, H., RUSKUC, N., (1999). Generators and Relations of Rees Matrix Semigroups, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 42, 482-495.
- AYIK, G., AYIK, H. and HOWIE, J.M., 2005. On Factorisations and Generators in Transformation Semigroups. *Semigroup Forum*,70: 225-237.
- AYIK, G., AYIK, H., HOWIE, J.M. and ÜNLÜ, Y., 2005a. The Structure of Elements in Finite Full Transformation Semigroups. *Bull. Aust. Math. Soc.*, 71: 69-74.
- FERNANDES, V. H., (2002). Presentations for some monoids of partial transformations on a finite chain:A survey, *Semigroups, Algorithms, Automata and Languages- Coimbra 2001*, World Sci. Publ, 368-378.
- GARBA, G.U., (1990). Idempotents in partial transformation semigroups, *Proc. of Royal Soc. of Edinburgh*, 110A, 359-366.
- GANYUSHKIN, O., MAZORCHUK, V., (2008) Introduction to classical finite transformation semigroup, Springer, 314s.
- GOMES ,G. M. S., AND HOWIE, J. M., (1987). On the rank of certain finite semigroups of transformations, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* 101 395-403.
- GOMES ,G. M. S., AND HOWIE, J. M., (1992). On the ranks of certain semigroups of order-preserving transformations, *Semigroup Forum* 45, 272-282.
- HIGGINS, P.M. , (1992). *Techniques of semigroup theory*. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press.
- HIGGINS, P.M. , (1993). Combinatorial results for semigroups of order-preserving mappings, *Math. Proc.Camb.Phill. Soc.* 113, 281-296.
- HIGGINS, P.M., HOWIE, J.M., RUSKUC, N., (1998). Generators and factorisations of transformation semigroups, *Proc. Royal Soc. Edinburgh A* **128**, 1355-1368.

- HOWIE, J.M., (1966). The subsemigroup generated by the idempotents of a full transformation Semigroup, *J. London Math. Soc.* **41**, 707-716.
- HOWIE, J.M., (1995). *Fundamentals of semigroup theory*. London Mathematical Society Monographs. New Series, 12. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 351s.
- HOWIE, J.M., MCFADDEN, R.B., (1990). Idempotent rank in finite full transformation semigroups, *Proc. Royal Soc. Edinburgh A* **114**, 161-167.
- HOWIE, J.M., (1971). Products of idempotents in certain semigroups of transformation, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* (2) **17**, 223-236.
- HOWIE, J.M., (1978). Idempotent generators in finite full transformation semigroup, *Proc. Royal Soc. Edinburgh* **81A**, 317-323.
- HOWIE, J.M., (1996). “Fundamentals of semigroup theory”, London Mathematical Society Monographs, Oxford University Press, New York, 368s.
- KEARNES, K.A., SZENDREI, A., WOOD, J., (2001). Generating singular transformation, *Semigroup Forum*, **63**, 441-448.
- LARADJI, A., UMAR, A., (2004), On certain finite semigroups of order-decreasing transformations, *Semigroup Forum*, **69**(2), 184-200.
- LARADJI, A., UMAR, A., (2006), Combinatorial results for semigroups of order-preserving full transformations, *Semigroup Forum*, **72**, 51-62.
- LIPSCOMB, S., (1996). “Symmetric Inverse Semigroups”, *Math. Surveys and Monographs*, Vol. 46, American Math Soc., Providence.
- NESİN, A., (2009). “Sayma”, *Nesin Matematik Köyü* ,192s.
- ROTMAN, J. J. 1994. *An Introduction to the Theory of Groups*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 536s.
- RUSKUC, N., (1998). On Large Subsemigroups and Finiteness Conditions of Semigroups, *Proc. London Math. Soc.*, **76**, 383-405.
- SATOH, S., YAMA, K. and TOKIZAWA, M., (1994). Semigroups of order 8 ,. *Semigroup Forum*, **49**, 7–29.
- TAINITER, M., 1968. A characterization of idempotent in semigroups. *J. Combinatorial Theory*, (5):370—373.

## ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Adana'da doğdu. İlkokul öğrenimi Adana'da ortaokul ve lise öğrenimini Çorlu'da yaptı. 2005 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Matematik Bölümü'nde lisans eğitimine başladı ve 2009 yılında mezun oldu. Aynı yıl içerisinde Çukurova Üniversitesi Matematik Bölümü'nde cebir alanında yüksek lisans eğitimine başladı ve Milli Eğitim Bakanlığı YLSY bursu ile ABD'de lisansüstü eğitime hak kazandı. 2011 yılında Michigan State Üniversitesi'nde uygulamalı matematik alanında yüksek lisans eğitimine başladı ve halen devam etmektedir.