

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

KÜRESEL KONİKLER VE UYGULAMALARI

Bülent ALTUNKAYA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2012**

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Doktora Tezi

KÜRESEL KONİKLER VE UYGULAMALARI

Bülent ALTUNKAYA

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Bu tez yedi bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, koniklerle ve küresel koniklerle ilgili temel tanımlar ve özellikler verilmiştir.

Üçüncü ve dördüncü bölümlerde, literatürde daha önceden bulunan küresel konik denklemleri incelenmiştir.

Beşinci bölümde, bir parametrelili küresel konik denklemleri bulunmuş ve bu formüller yardımıyla bazı özel durumlar incelenmiştir.

Altıncı bölümde, dual sayılar ve D-Modül ile ilgili temel tanımlar verilmiştir.

Yedinci bölümde, bazı özel durumlarda küresel koniklerin E-study dönüşümleri incelenmiştir.

Şubat 2012, 94 sayfa

Anahtar Kelimeler: Elips, Hiperbol, Parabol, Konik, Küresel elips, Küresel Hiperbol, Küresel parabol, Dual sayılar, D-Modül, E-study dönüşümü

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

APPLICATIONS OF THE SPHERICAL CONICS

Bülent ALTUNKAYA

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

This thesis consists of seven chapters.

First chapter is devoted to the introduction.

Second chapter consist of, basic definitions and properties about the conics and the spherical conics.

Third and fourth chapters related to previously known spherical conic equations.

Fifth chapter, one parameter spherical conic equations have been obtained and some special cases have been examined with the help of these equations.

Sixth chapter involves, some basic definitions of the dual numbers and D-modul.

Last chapter, E-study transformations of spherical conics have been obtained in some special cases.

February 2012, 94 pages

Key Words: Ellipse, Hyperbola, Parabola, Conic, Spherical ellipse, Spherical hyperbola, Spherical parabola, Spherical conics, Dual Numbers, D-Modul, E-study Map

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana destek veren ve çalışmalarımın her aşamasında yakın ilgi ve önerileriyle beni yönlendiren Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı Öğretim üyelerinden saygıdeğer hocalarım, Sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI ve Sayın Prof. Dr. H.Hilmi HACISALİHOĞLU'na en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmalarım süresince her zaman yanımda olan, bana manevi destek veren aileme de teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Bülent ALTUNKAYA
Ankara, Şubat 2012

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	2
2.1 Konikler (Koni kestirimleri).....	2
2.1 Küresel Konikler.....	5
3. KÜRESEL KONİK DENKLEMLERİ	9
4. KÜRESEL KONİK DENKLEMLERİNE FARKLI BİR YAKLAŞIM	30
4.1 Küresel Konik Denklemlerinin Eliptik Koni Yardımıyla Bulunması.....	30
4.2 Küresel Konikler için Dördüncü Parametre	37
4.3 Parametreler Arası İlişkiler	39
5. BİR PARAMETRELİ KÜRESEL KONİK DENKLEMLERİ	41
5.1 Küresel Elips.....	41
5.2 Küresel Hiperbol	52
5.3 Küresel Parabol.....	61
6. E.STUDY DÖNÜŞÜMÜ	69
6.1 E.Study Dönüşümünün Temel Kavramları.....	69
7. KÜRESEL KONİKLERİN E.STUDY DÖNÜŞÜMLERİ	82
KAYNAKLAR	93
ÖZGEÇMİŞ.....	94

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
S^2	Birim küre
$\mathbb{D}$	Dual sayılar kümesi
ε	Dual birim
$\mathbb{D}^3$	D-Modül
K	Birim dual küre
$\overrightarrow{E}_l$	Dual baz vektörleri

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 Elips	2
Şekil 2.2 Hiperbol	3
Şekil 2.3 Parabol	3
Şekil 2.4 Konik tanımı	4
Şekil 2.5 Geodezik uzunluk	5
Şekil 3.1 Küresel elips	11
Şekil 3.2 Küresel elips	11
Şekil 3.3 Küresel hiperbol.....	11
Şekil 3.4 Küresel hiperbol.....	12
Şekil 3.5 Alt durum 1.1.2.2.2.2	22
Şekil 3.6 Alt durum 1.1.2.3.2.2	26
Şekil 4.1 Küresel elips	30
Şekil 4.2 Küresel üçgen	30
Şekil 4.3 Eliptik koni	35
Şekil 4.4 Koni ile birim kürenin kesişimi	35
Şekil 4.5 xy , xz ve yz düzlemlerine izdüşümler.....	36
Şekil 4.6 xy , xz ve yz düzlemlerine asimptotik eğriyle beraber izdüşümler.....	37
Şekil 5.1 Küresel elips	41
Şekil 5.2 Küresel elips	44
Şekil 5.3 Küresel elips	45
Şekil 5.4 Küresel elips (Küre olmadan)	45
Şekil 5.5 Küresel elips	46
Şekil 5.6 Küresel elips (Küre olmadan)	46
Şekil 5.7 Küresel elips (Küre olmadan)	47
Şekil 5.8 Küresel elips	49
Şekil 5.9 Küresel elips (Küre olmadan)	49
Şekil 5.10 Küresel elips	50
Şekil 5.11 Küresel elips (Küre olmadan)	50
Şekil 5.12 Küresel hiperbol.....	52
Şekil 5.13 Küresel hiperbol.....	56
Şekil 5.13 Küresel hiperbol (Küre olmadan)	56

Şekil 5.14 Küresel hiperbol.....	58
Şekil 5.15 Küresel hiperbol (Küre olmadan)	59
Şekil 5.16 Küresel parabol	62
Şekil 5.17 Küresel parabol	64
Şekil 5.18 Küresel parabol	65
Şekil 5.19 Küresel parabol (Küre olmadan).....	66
Şekil 5.20 Küresel parabol	66
Şekil 5.21 Küresel parabol (Küre olmadan).....	67
Şekil 6.1 Dual açı	77
Şekil 6.2 Dual çatı	80
Şekil 7.1 Küresel elips	84
Şekil 7.2 Küresel hiperbol.....	87
Şekil 7.1 Küresel parabol	88
Şekil 7.2 Dual çember	89

1. GİRİŞ

Denizcilikteki ana problemlerden birisi seyir halindeki bir geminin yerini belirlemektir. Bunun için çeşitli yöntemler kullanılır. Kullanılan yöntemlerden bir tanesi sabit iki istasyondan gönderilen sinyallerin gemiye ulaşma zamanları arasındaki fark yardımıyla geminin yerini tespit etmektir. Bu yöntem akla düzlemdeki Elips tanımını getirmektedir.

Bildiğimiz gibi Elipsin tanımlarından bir tanesi aşağıdaki gibidir.

“ F_1 ve F_2 düzlemde iki nokta olsun, bu iki noktaya uzaklıkları toplamı sabit olan noktaların geometrik yerine Elips. F_1 ve F_2 noktalarına da Elipsin odakları denir.”

Bu tanımı küre yüzeyine uyguladığımızda karşımıza Küresel Elips kavramı çıkmaktadır. Bu problemi incelemeye başladıktan sonra fark ettik ki Küresel Elips için çok parametrelili denklemler ve çeşitli kuadratik denklemler bulunmasına rağmen denklemler çok değişkenli olduğundan kullanışlı değil. Daha basit bir denklem bulmak için çalışmalara başladık. Zaman içinde bunun için birçok bilim adamının uğraştığını ama henüz gerçekten bizim istediğimiz ölçüde kullanışlı bir denklem bulunamadığını gördük.

Prof. Dr. H. Hilmi Hacısalihoğlu’nun problem için yeni bir çatı oluşturmak gerektiğini ve bu çatıda 3. bileşenin vektörel çarpımla bulunmasının daha faydalı olacağı konusunda yaptığı uyarıyla çalışmalarımız yeni bir yön kazandı ve çalışmada göreceğiniz tek parametrelili denklemleri elde ettik. Bu da aklımıza küresel konikler konusunda başka neler yapılabileceği sorusunu getirdi.

Bu tezdeki grafikler MATLAB ve GEOGEBRA programları kullanılarak çizilmiştir.

2.TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Konikler (Koni kesitleri)

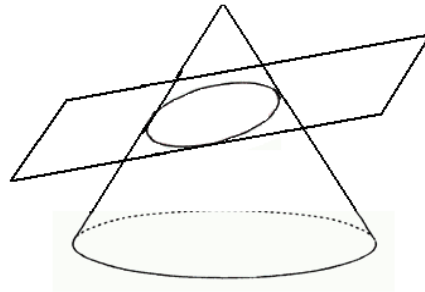
Konikler en önemli geometrik nesnelerdendir. Analitik geometrinin ortaya çıkışıyla özellikle koni kesitlerinin incelenmesi çok kolaylaşmıştır. Bir koni kesiti denildiğinde şu nesneler anlaşılır: Elips, parabol ve hiperbol.

Elipsin özel bir hali olan çember de bazı kaynaklar da ayrı bir konik türü olarak alınır.

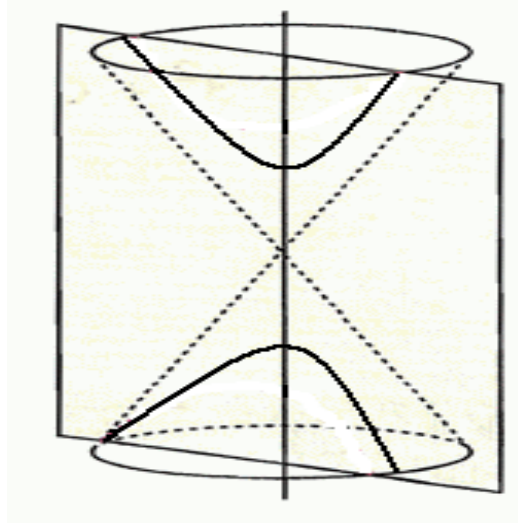
Konik kesitlerin isimlerine gelecek olursak; matematik tarihine baktığımızda, kavramların, kullanılan terimlerden çok daha önemli olması gerekir ancak Apollonius ile beraber gelen bu konik kesitlerin isim değişikliğinin bizim için normalden fazla önemi var. Apollonius'un Konika kitabından önce, 100-150 yıl kadar eğrileri birbirinden ayıran sıradan bir isimlendirme dışında bir isimlendirme söz konusu değildi bulunan eğriler için. Dar açılı konik kesiti için oxytome, dik açılı konik kesiti için orthonome ve geniş açılı konik kesiti için de amblytome kullanılmaktaydı.

Archimedes de bu isimlerle çalışmıştı, ancak; çalışmalarında dik açılı konik kesiti için parabol adını da kullandığını biliyoruz. Elips ve hiperbol isimleri Apollonius sayesinde kullanılmaya başlanmıştır.

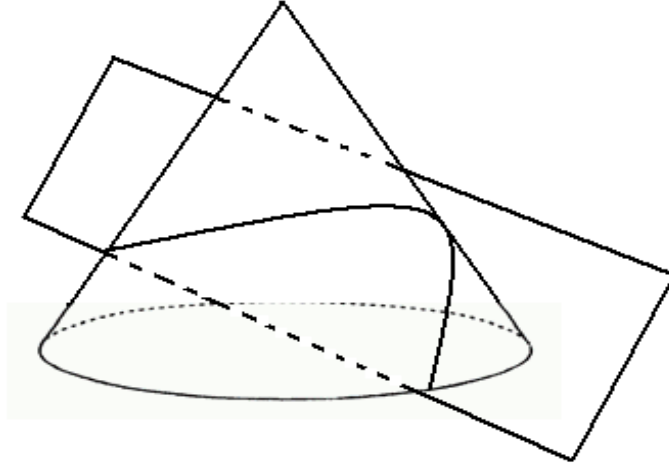
Elips: azlık, yetersizlik; hiperbol: uzağa koymak; parabol: yanında durmak anlamına geliyordu. Konik kesitleri çalışırken benzettiklerinden yola çıkan Apollonius şimdi kullandığımız, bu isimleri kullanmaya başladı, (Şekil 2.1- Şekil 2.3).



Şekil 2.1 Elips



Şekil 2.2 Hiperbol

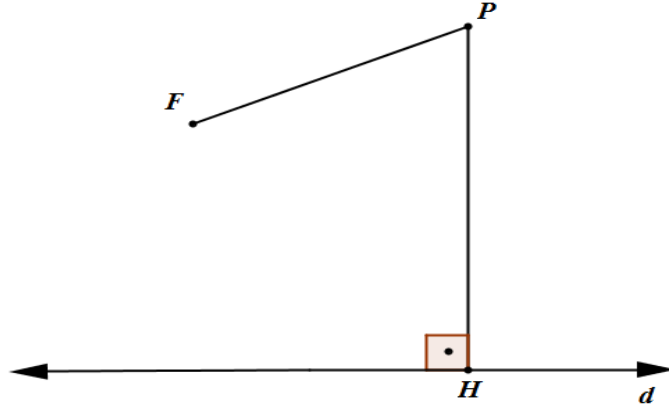


Şekil 2.3 Parabol

Daha sonraki yıllarda konikler için birçok yeni tanım bulunmuştur. Örneğin;

Tanım 2.1.1

Düzlemde sabit bir A noktası ve d doğrusu alındığında, A noktasına uzaklığının d doğrusuna uzaklığına oranı sabit bir $e \in \mathbb{R}$ sayısına eşit olan noktaların kümesine konik denir.



Şekil 2.4 Konik tanımı

$$\frac{\|FP\|}{\|PH\|} = e$$

olmak üzere,

$e < 1$ ise, konik elips

$e = 1$ ise, konik parabol

$e > 1$ ise, konik hiperbol

dür.

Elips ve Hiperbol için aşağıdaki tanımlar da kullanılabilir.

Tanım 2.1.2

Düzlemde F_1 ve F_2 noktalarına uzaklıkları toplamı $2a \in \mathbb{R}^+$ sayısına eşit olan noktaların geometrik yerine elips denir. F_1 ve F_2 noktaları elipsin odaklarıdır.

Tanım 2.1.3

Düzlemde F_1 ve F_2 noktalarına uzaklıkları farkının mutlak değeri $2a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ sayısına eşit olan noktaların geometrik yerine hiperbol denir. F_1 ve F_2 noktaları hiperbolün odaklarıdır.

Tanım 2.2.1 de ki parabol tanımını tek olarak yazarsak,

Tanım 2.1.4

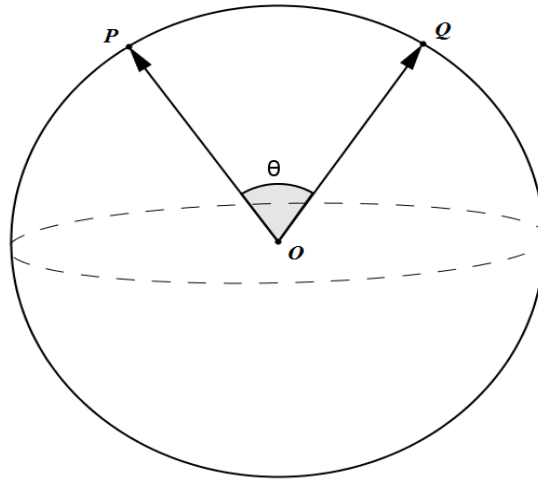
Düzlemde bir F noktasına ve bir d doğrusuna aynı uzaklıkta olan noktaların geometrik yerine parabol denir. F noktası parabolün odağıdır.

Biz bu çalışmada yukarıdaki üç tanımı kullanacağız.

2.2 Küresel Konikler

Düzlemde yapılan bu tanımları birim küre üzerine taşırsak karşımıza küresel konikler çıkar.

$S^2 \subset \mathbb{R}^3$ birim küresi üzerinde P ve Q noktalarını alalım. $\theta = m(\widehat{POQ})$ ve $d(P, Q)$ ile P ve Q noktaları arasındaki geodezik uzunluğu gösterelim.



Şekil 2.5 Geodezik uzunluk

Kosinüs teoreminden

$$\|P - Q\|^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cos \theta$$

$$2 \cos \theta = 2 - \|P - Q\|^2$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\|P - Q\|^2}{2}$$

$$d(P, Q) = \theta = \text{Arccos} \left(1 - \frac{\|P - Q\|^2}{2} \right) \quad (2.1)$$

P ve Q noktalarına karşılık gelen $\vec{P}$ ve $\vec{Q}$ vektörleri için

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = \|\vec{P}\| \|\vec{Q}\| \cos \theta = \cos \theta$$

olduğundan (2.1) denklemini

$$d(P, Q) = \theta = \text{Arccos}(\vec{P} \cdot \vec{Q}) \quad (2.2)$$

biçiminde yazabiliriz.

Tanım 2.2.1

Birim küre üzerinde F_1 ve F_2 noktalarına geodezik uzaklıkları toplamı $2a \in \mathbb{R}^+$ sayısına eşit olan noktaların geometrik yerine küresel elips denir. F_1 ve F_2 noktaları elipsin odaklarıdır.

Tanım 2.2.2

Birim küre üzerinde alınan F noktasına ve S büyük çemberine geodezik uzaklıkları eşit olan noktaların geometrik yerine küresel parabol denir. F noktası parabolün odağıdır.

Tanım 2.2.3

Birim küre üzerinde F_1 ve F_2 noktalarına geodezik uzaklıkları farkının mutlak değeri $2a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ sayısına eşit olan noktaların geometrik yerine küresel hiperbol denir. F_1 ve F_2 noktaları hiperbolün odaklarıdır.

Şimdi küresel elips için önemli bir noktayı açıklayalım:

F_1 ve F_2 , S^2 üzerinde iki nokta ve olsun. $2a > 2c$ o.ü.

$$d(F_1, F_2) = 2c < \pi, c \in \mathbb{R}^+$$

olacak şekilde

$$S = \{X \mid d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a, a \in \mathbb{R}^+, X \in S^2\}$$

noktalarının kümesini alalım. Bu küme küresel elips belirtir.

Düzlemde elipsin parametreleri arasında yalnızca $2a > 2c$ kısıtlaması olduğunu biliyoruz. S^2 üzerinde iki nokta arasındaki en kısa uzaklık π den daha büyük olamayacağı için

$$2c < \pi$$

olur. Dolayısıyla küresel elips için en kısa uzaklıkları alırsak,

$$2\pi - 2c > 2a > 2c$$

kısıtlaması vardır. $2a = \pi$ aldığımızda karşımıza büyük çember çıkar. Bunun ispatını daha sonraki bölümlerde yapacağız.

S^2 üzerinde

$$d(X, F) = \pi - d(X, -F)$$

eşitliği vardır. Dolayısıyla $2a > \pi$ aldığımızda oluşan elipsler, odak noktaları $-F_1, -F_2$ ve $2\pi - 2a < \pi$ aldığımızda ortaya çıkan küresel elipslerdir. Çünkü

$$\pi < 2a = d(X, F_1) + d(X, F_2)$$

$$= \pi - d(X, -F_1) + \pi - d(X, -F_2)$$

$$= 2\pi - (d(X, -F_1) + d(X, -F_2))$$

$\Rightarrow$

$$d(X, -F_1) + d(X, -F_2) = 2\pi - 2a$$

elde ederiz. Bu $-F_1, -F_2$ odaklarına sahip, $-F_1$ ve $-F_2$ noktalarına uzaklıkları toplamı $2\pi - 2a$ olan küresel elipstir.

Benzer şekilde $X \in S^2$ olmak üzere,

$$\{X \mid d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a, a \in \mathbb{R}^+, X \in S^2\}$$

$$\equiv \{X \mid d(X, F_1) - d(X, -F_2) = 2a - \pi, a \in \mathbb{R}^+, X \in S^2\}$$

olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla küresel elips ve küresel hiperbol arasında bir ayrım yapmaya gerek yoktur.

3. KÜRESEL KONİK DENKLEMLERİ

Bu bölümde literatür de kullanılan küresel konik denklemlerini açıklayacağız. Küresel koniklerle ilgili kaynaklarda küresel elips ve küresel hiperbol incelenmiştir. Küresel parabolü 5. bölümde inceleyeceğiz.

Tanım 3.1.1

Birim küre üzerinde F_1 ve F_2 noktalarına geodezik uzaklıkları toplamı (farkının mutlak değeri) $2a \in \mathbb{R}^+$ sayısına eşit olan noktaların geometrik yerine küresel elips (hiperbol) denir. F_1 ve F_2 noktaları elipsin (hiperbolün) odaklarıdır.

Şekil 2.5'deki geodezik uzunluğu kullanırsak, bu durumda küresel elips denklemi $X \in S^2$ olmak üzere,

$$d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a$$

küresel hiperbol denklemi

$$|d(X, F_1) - d(X, F_2)| = 2a \quad (3.1)$$

olur. İki denklemi birleştirirsek

$$\left| \text{Arccos}\left(1 - \frac{\|X - F_1\|^2}{2}\right) \pm \text{Arccos}\left(1 - \frac{\|X - F_2\|^2}{2}\right) \right| = 2a$$

$\vec{X} \cdot \vec{X} = \vec{F}_1 \cdot \vec{F}_1 = \vec{F}_2 \cdot \vec{F}_2 = 1$ olduğu için (2.2) den

$$|\text{Arccos}(\vec{X} \cdot \vec{F}_1) \pm \text{Arccos}(\vec{X} \cdot \vec{F}_2)| = 2a$$

yazabiliriz. Küresel hiperbol için aşağıdaki iki denklemi buluruz.

$$\text{Arccos}(\vec{X} \cdot \vec{F}_1) + \text{Arccos}(\vec{X} \cdot -\vec{F}_2) = 2a + \pi \quad (3.2)$$

$$\text{Arccos}(\vec{X} \cdot -\vec{F}_1) + \text{Arccos}(\vec{X} \cdot \vec{F}_2) = 2a + \pi \quad (3.3)$$

Bu durumda, (3.2) ve (3.3) sırasıyla odak noktaları $\{F_1, -F_2\}$ ve $\{-F_1, F_2\}$ uzaklıkları toplamı $2a + \pi$ olan küresel elipslerdir. (3.2) denkleminde X yerine $-X$ alırsak (3.3) denklemini elde ederiz. Yani (3.2) ve (3.3) birbirlerinin antipodal görüntüleridir.

$$|\text{Arccos}(\vec{X} \cdot \vec{F}_1) \pm \text{Arccos}(\vec{X} \cdot \vec{F}_2)| = 2a$$

$$\cos(\text{Arccos}(\vec{X} \cdot \vec{F}_1) \pm \text{Arccos}(\vec{X} \cdot \vec{F}_2)) = \cos 2a$$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$ olduğundan

$$(\vec{X} \cdot \vec{F}_1)(\vec{X} \cdot \vec{F}_2) \mp \sqrt{1 - (\vec{X} \cdot \vec{F}_1)^2} \sqrt{1 - (\vec{X} \cdot \vec{F}_2)^2} = \cos 2a$$

bulunur. Devam edersek

$$[(\vec{X} \cdot \vec{F}_1)(\vec{X} \cdot \vec{F}_2) - \cos 2a]^2 = \left[\pm \sqrt{1 - (\vec{X} \cdot \vec{F}_1)^2} \sqrt{1 - (\vec{X} \cdot \vec{F}_2)^2} \right]^2$$

$$\begin{aligned} & (\vec{X} \cdot \vec{F}_1)^2 (\vec{X} \cdot \vec{F}_2)^2 - 2 \cos 2a (\vec{X} \cdot \vec{F}_1)(\vec{X} \cdot \vec{F}_2) + \cos^2 2a \\ & = 1 - (\vec{X} \cdot \vec{F}_1)^2 - (\vec{X} \cdot \vec{F}_2)^2 + (\vec{X} \cdot \vec{F}_1)^2 (\vec{X} \cdot \vec{F}_2)^2 \end{aligned}$$

olduğundan küresel elips ve hiperbol için

$$(\vec{X} \cdot \vec{F}_1)^2 + (\vec{X} \cdot \vec{F}_2)^2 - 2 \cos 2a (\vec{X} \cdot \vec{F}_1)(\vec{X} \cdot \vec{F}_2) + \cos^2 2a - 1 = 0 \quad (3.4)$$

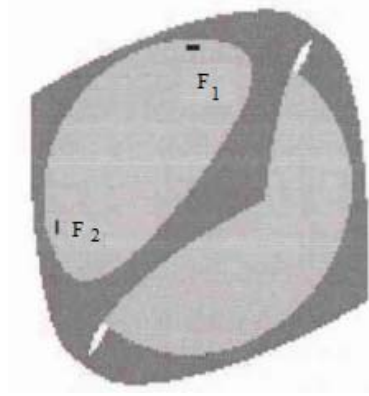
genel denklemini buluruz.

$$\cos 2a = C$$

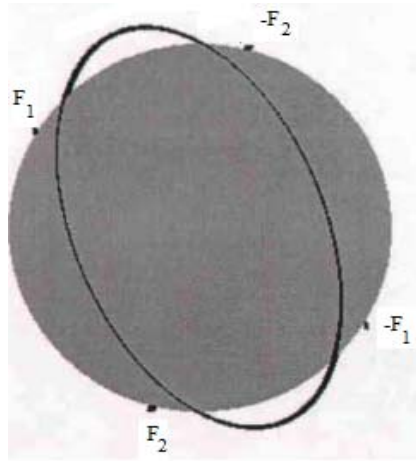
biçiminde yazalım, $\mathbb{R}^3$ de her vektöre bir nokta karşılık geldiğinden (3.4) denklemini düzenlersek (3.4)

$$(X \cdot F_1)^2 + (X \cdot F_2)^2 - 2C(X \cdot F_1)(X \cdot F_2) + C^2 - 1 = 0 \quad (3.5)$$

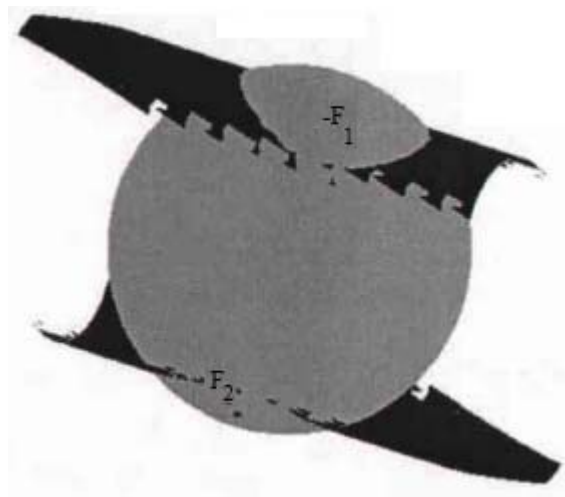
haline gelir



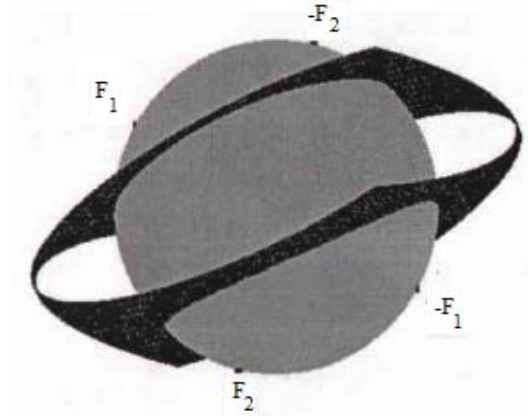
Şekil 3.1 Küresel elips (Jianfei 2004)



Şekil 3.2 Küresel elips (Jianfei 2004)



Şekil 3.3 Küresel hiperbol (Jianfei 2004)



Şekil 3.4 Küresel hiperbol (Jianfei 2004)

Küresel konikler genel olarak düzlemsel eğriler değildir. Eğer düzlemsel ise çemberdir. Küresel koniklerin ne zaman çember olduğuyla ilgili bir teorem verelim.

Teorem 3.1.1 (Jianfei 2004)

$X(s): I \rightarrow S^2$ tanımlı, odakları F_1 ve F_2 olan, (3.5) denklemini sağlayan birim hızlı bir küresel konik olsun. Bu durumda (3.5) denklemi çember belirtir $\Leftrightarrow F_1 = \pm F_2$ veya $C = \pm 1$.

İspat: " $\Leftarrow$ " $F_1 = \pm F_2$ olduğunda X in çember belirttiği açıktır. $F_1 \neq F_2$ ve $C = 1$ ise (3.5)

$$(X \cdot F_1)^2 + (X \cdot F_2)^2 - 2(X \cdot F_1)(X \cdot F_2) = 0$$

biçimine gelir. Bu denklemi düzenlersek

$$((X \cdot F_1) - (X \cdot F_2))^2 = 0$$

$$(X \cdot F_1) - (X \cdot F_2) = 0 \Rightarrow X(F_1 - F_2) = 0$$

eşitliğini buluruz. Görüldüğü gibi X , $F_1 - F_2$ ye dik olan büyük çemberdir.

$F_1 \neq -F_2$ ve $C = -1$ ise

$$(X \cdot F_1)^2 + (X \cdot F_2)^2 + 2(X \cdot F_1)(X \cdot F_2) = 0$$

$$\left((X \cdot F_1) + (X \cdot F_2)\right)^2 = 0$$

$$(X \cdot F_1) + (X \cdot F_2) = 0 \Rightarrow X(F_1 + F_2) = 0$$

eşitliğini buluruz. Görüldüğü gibi X , $F_1 + F_2$ ye dik olan büyük çemberdir.

" $\Rightarrow$ " T, N, B Frenet çatısı olsun. X çember ise eğriliği sabittir. (3.5) in türevini alırsak.

$$2(X \cdot F_1)(F_1 \cdot T) + 2(X \cdot F_2)(F_2 \cdot T) - 2C((F_1 \cdot T)(X \cdot F_2) + (X \cdot F_1)(F_2 \cdot T)) = 0 \quad (3.6)$$

Aşağıdaki durumları incelememiz gerekir.

Durum 1: $\forall s \in I$ için $((F_1 \cdot T)(X \cdot F_2) + (X \cdot F_1)(F_2 \cdot T))(s) \neq 0$ alırsak,

$$([(X \cdot F_1)^2 - (X \cdot F_2)^2]\{(F_1 \cdot T)^2[1 - (X \cdot F_2)^2] - (F_2 \cdot T)^2[1 - (X \cdot F_1)^2]\})(s) = 0$$

olduğundan aşağıdaki alt durumları incelemeliyiz.

Alt durum 1.1: $\forall s \in I$ için

$$((F_1 \cdot T)^2[1 - (X \cdot F_2)^2] - (F_2 \cdot T)^2[1 - (X \cdot F_1)^2])(s) = 0$$

Bu alt durumun ispatı teoremin sonunda verilecektir.

Alt durum 1.2: $\exists s_0 \in I$ için $((X \cdot F_1) - (X \cdot F_2))(s_0) = 0$. Dolayısıyla $C = 1$ olmalıdır.

Alt durum 1.3: $\exists s_0 \in I$ için $((X \cdot F_1) + (X \cdot F_2))(s_0) = 0$. Dolayısıyla $C = -1$ olur.

Durum 2: $\exists s_0 \in I$ için $((F_1 \cdot T)(X \cdot F_2) + (X \cdot F_1)(F_2 \cdot T))(s_0) = 0$ olarak alırsak.

Yani

$$\begin{cases} ((F_1 \cdot T)(X \cdot F_2) + (X \cdot F_1)(F_2 \cdot T))(s_0) = 0 \\ ((X \cdot F_1)(F_1 \cdot T) + (X \cdot F_2)(F_2 \cdot T))(s_0) = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

olduğundan aşağıdaki alt durumları incelemeliyiz.

Alt durum 2.1: Eğer $(X \cdot F_1)(s_0) \neq 0$ ise

$$\left(\frac{(F_1 \cdot T)((X \cdot F_1) - (X \cdot F_2))((X \cdot F_1) + (X \cdot F_2))}{(X \cdot F_1)} \right) (s_0) = 0 \quad (3.8)$$

(3.7) ve (3.8) den aşağıdaki alt durumları elde ederiz.

Alt durum 2.1.1: $(X \cdot F_1)(s_0) = 0$ olması durumunda (3.7) den $(F_2 \cdot T)(s_0) = 0$ olur. $(X \cdot F_1)(s_0) \neq 0$ olduğundan

$$((F_1 \cdot T)^2[1 - (X \cdot F_2)^2] - (F_2 \cdot T)^2[1 - (X \cdot F_1)^2])(s_0) = 0$$

Alt durum 2.1.2: $((X \cdot F_1) - (X \cdot F_2))(s_0) = 0$ ise (3.7) den $(F_1 \cdot T)(s_0) = -(F_2 \cdot T)(s_0)$ olur. $(X \cdot F_1)(s_0) \neq 0$ olduğundan

$$((F_1 \cdot T)^2[1 - (X \cdot F_2)^2] - (F_2 \cdot T)^2[1 - (X \cdot F_1)^2])(s_0) = 0$$

Alt durum 2.1.3: $((X \cdot F_1) + (X \cdot F_2))(s_0) = 0$ ise (3.7) den $(F_1 \cdot T)(s_0) = (F_2 \cdot T)(s_0)$ olur. $(X \cdot F_1)(s_0) \neq 0$ olduğundan

$$((F_1 \cdot T)^2[1 - (X \cdot F_2)^2] - (F_2 \cdot T)^2[1 - (X \cdot F_1)^2])(s_0) = 0$$

Alt durum 2.2: $(X \cdot F_1)(s_0) = 0$ ise

$$((F_1 \cdot T)(X \cdot F_2))(s_0) = 0 \text{ ve } ((X \cdot F_2)(F_2 \cdot T))(s_0) = 0$$

olmalıdır. (3.7) ve (3.8) den aşağıdaki alt durumları elde ederiz.

Alt durum 2.2.1: $(X \cdot F_2)(s_0) \neq 0$ ise $(F_1 \cdot T)(s_0) = 0$ ve $(F_2 \cdot T)(s_0) = 0$ olduğundan

$$((F_1 \cdot T)^2[1 - (X \cdot F_2)^2] - (F_2 \cdot T)^2[1 - (X \cdot F_1)^2])(s_0) = 0$$

Alt durum 2.2.2: $(X \cdot F_2)(s_0) = 0$ ise (3.5) ve $(X \cdot F_1)(s_0) = 0$ olduğundan $C = \pm 1$ dir.

Durum 2 incelenirse

$$((F_1 \cdot T)(X \cdot F_2) + (X \cdot F_1)(F_2 \cdot T))(s_0) = 0$$

biçiminde alındığında

$$((F_1 \cdot T)^2[1 - (X \cdot F_2)^2] - (F_2 \cdot T)^2[1 - (X \cdot F_1)^2])(s_0) = 0 \text{ veya } C = \pm 1$$

olmak zorundadır.

Dolayısıyla yalnızca alt durum 1.1 ispatlanırsa, ispat bitmiş olur. Bunun için X in periyodu 2π olan bir fonksiyon olduğunu kabul edelim. X bir çember denklemi olduğundan

$$T\left(s + \frac{\pi}{2}\right) = N(s), \quad N\left(s + \frac{\pi}{2}\right) = -T(s)$$

$$T(s + \pi) = -T(s), \quad N(s + \pi) = -N(s)$$

$$T\left(s + \frac{3\pi}{2}\right) = -N(s), \quad N\left(s + \frac{3\pi}{2}\right) = T(s)$$

eşitlikleri vardır.

X , S^2 üzerinde bir çember olduğundan R, X çemberinin yarıçapı ve $H = -X \cdot B \cdot R$ alırsak, $X = -RN - HB$ eşitliğini yazabiliriz.

$$((F_1 \cdot T)^2[1 - (X \cdot F_2)^2] - (F_2 \cdot T)^2[1 - (X \cdot F_1)^2])(s_0) = 0$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} & (F_1 \cdot T)^2(1 - [R^2(F_2 \cdot N)^2 + 2RH((F_2 \cdot N))(F_2 \cdot B) + H^2(F_2 \cdot B)^2]) \\ &= (F_2 \cdot T)^2(1 - [R^2(F_1 \cdot N)^2 + 2RH((F_1 \cdot N))(F_1 \cdot B) + H^2(F_1 \cdot B)^2]) \end{aligned} \quad (3.9)$$

(3.9) da s yerine $s + \frac{\pi}{2}$ yazarsak,

$$\begin{aligned} & (F_1 \cdot N)^2(1 - [R^2(F_2 \cdot T)^2 - 2RH((F_2 \cdot T))(F_2 \cdot B) + H^2(F_2 \cdot B)^2]) \\ &= (F_2 \cdot N)^2(1 - [R^2(F_1 \cdot T)^2 - 2RH((F_1 \cdot T))(F_1 \cdot B) + H^2(F_1 \cdot B)^2]) \end{aligned} \quad (3.10)$$

(3.9) da s yerine $s + \pi$ yazarsak,

$$\begin{aligned}
& (F_1 \cdot T)^2 (1 - [R^2(F_2 \cdot N)^2 - 2RH((F_2 \cdot N))(F_2 \cdot B) + H^2(F_2 \cdot B)^2]) \\
& = (F_2 \cdot T)^2 (1 - [R^2(F_1 \cdot N)^2 - 2RH((F_1 \cdot N))(F_1 \cdot B) + H^2(F_1 \cdot B)^2]) \quad (3.11)
\end{aligned}$$

(3.9) da s yerine s + $\frac{3\pi}{2}$ yazarsak,

$$\begin{aligned}
& (F_1 \cdot N)^2 (1 - [R^2(F_2 \cdot T)^2 + 2RH((F_2 \cdot T))(F_2 \cdot B) + H^2(F_2 \cdot B)^2]) \\
& = (F_2 \cdot N)^2 (1 - [R^2(F_1 \cdot T)^2 + 2RH((F_1 \cdot T))(F_1 \cdot B) + H^2(F_1 \cdot B)^2]) \quad (3.12)
\end{aligned}$$

(3.9) – (3.11) $\Rightarrow$

$$(F_1 \cdot T)^2 (F_2 \cdot N) (F_2 \cdot B) = (F_2 \cdot T)^2 (F_1 \cdot N) (F_1 \cdot B) \quad (3.13)$$

(3.10) – (3.12) $\Rightarrow$

$$(F_1 \cdot N)^2 (F_2 \cdot T) (F_2 \cdot B) = (F_2 \cdot N)^2 (F_1 \cdot T) (F_1 \cdot B) \quad (3.14)$$

(3.9) + (3.11) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
& (F_1 \cdot T)^2 (1 - [R^2(F_2 \cdot N)^2 + H^2(F_2 \cdot B)^2]) \\
& = (F_2 \cdot T)^2 (1 - [R^2(F_1 \cdot N)^2 + H^2(F_1 \cdot B)^2]) \quad (3.15)
\end{aligned}$$

(3.10) + (3.12) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
& (F_1 \cdot N)^2 (1 - [R^2(F_2 \cdot T)^2 + H^2(F_2 \cdot B)^2]) \\
& = (F_2 \cdot N)^2 (1 - [R^2(F_1 \cdot T)^2 + H^2(F_1 \cdot B)^2]) \quad (3.16)
\end{aligned}$$

(3.15) + (3.16) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
& (F_1 \cdot T)^2 + (F_1 \cdot N)^2 - H^2[(F_1 \cdot T)^2 + (F_1 \cdot N)^2](F_2 \cdot B)^2 \\
& = (F_2 \cdot T)^2 + (F_2 \cdot N)^2 - H^2[(F_2 \cdot T)^2 + (F_2 \cdot N)^2](F_1 \cdot B)^2
\end{aligned}$$

$(F_1 \cdot T)^2 + (F_1 \cdot N)^2 + (F_1 \cdot B)^2 = 1$ ve $(F_2 \cdot T)^2 + (F_2 \cdot N)^2 + (F_2 \cdot B)^2 = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} & 1 - (F_1 \cdot B)^2 - H^2[1 - (F_1 \cdot B)^2](F_2 \cdot B)^2 \\ &= 1 - (F_2 \cdot B)^2 - H^2[1 - (F_2 \cdot B)^2](F_1 \cdot B)^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} & -(F_1 \cdot B)^2 - H^2(F_2 \cdot B)^2 = -(F_2 \cdot B)^2 - H^2(F_1 \cdot B)^2 \\ & (1 - H^2)[(F_1 \cdot B)^2 - (F_2 \cdot B)^2] = 0 \end{aligned}$$

Dolayısıyla aşağıdaki alt durumları elde ederiz.

Alt durum 1.1.1: $H^2 = 1 \Rightarrow R^2 = 0 \Rightarrow X = \pm B$. Bu yalnızca $F_1 = F_2$ ve $d(X, F_1) = 0$ veya π olur.

Alt durum 1.1.2: $1 - H^2 = 0$ ve $(F_1 \cdot B)^2 - (F_2 \cdot B)^2 = 0$

Alt durum 1.1.2.1: $F_1 \cdot B = F_2 \cdot B = 0$. F_1 ve F_2 , B ye dik X e paralel bir büyük çember üzerindedir. Bu durumda yalnız iki nokta koşulu sağlar. X küresel hiperbol olamaz. Ayrıca X üzerinde

$$d(X, F_1) + d(X, F_2) \neq d(X, F_1) + d(X, F_2)$$

olacak şekilde X_1 ve X_2 noktaları bulabileceğimizden X küresel elips olamaz.

Alt durum 1.1.2.2: $F_1 \cdot B = F_2 \cdot B \neq 0$. $\forall s \in I$ için

(3.13) $\Rightarrow$

$$(F_1 \cdot T)^2(F_2 \cdot N) = (F_2 \cdot T)^2(F_1 \cdot N) \quad (3.17)$$

(3.14) $\Rightarrow$

$$(F_1 \cdot N)^2(F_2 \cdot T) = (F_2 \cdot N)^2(F_1 \cdot T) \quad (3.18)$$

olur.

Alt durum 1.1.2.2.1: $\forall s \in I$ için $((F_1 \cdot T)(F_2 \cdot T)(F_1 \cdot N)(F_2 \cdot N))(s) \neq 0$ ise

$$\frac{(F_2 \cdot T)^2(F_1 \cdot N)}{(F_1 \cdot N)^2(F_2 \cdot T)} = \frac{(F_1 \cdot T)^2(F_2 \cdot N)}{(F_2 \cdot N)^2(F_1 \cdot T)}$$

$\Rightarrow$

$$(F_1 \cdot T)(F_1 \cdot N) - (F_2 \cdot T)(F_2 \cdot N) = 0$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{2\kappa} \frac{d}{ds} [(F_1 \cdot T)^2 - (F_2 \cdot T)^2] = 0$$

$\Rightarrow$

$$(F_1 \cdot T)^2 - (F_2 \cdot T)^2 = m, \quad m \in \mathbb{R}$$

s yerine $s + \frac{\pi}{2}$ yazarsak,

$$(F_1 \cdot N)^2 - (F_2 \cdot N)^2 = m$$

$\Rightarrow$

$$(F_1 \cdot T)^2 + (F_1 \cdot N)^2 - [(F_2 \cdot T)^2 + (F_2 \cdot N)^2] = 2m$$

$\Rightarrow$

$$1 - (F_1 \cdot B)^2 - [1 - (F_2 \cdot B)^2] = 2m$$

$\Rightarrow$

$$m = 0$$

$\Rightarrow$

$$(F_1 \cdot T)^2 = (F_2 \cdot T)^2 \text{ ve } (F_1 \cdot N)^2 = (F_2 \cdot N)^2$$

(3.17) ve (3.18) den $F_1 \cdot T = F_2 \cdot T$ ve $F_1 \cdot N = F_2 \cdot N$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $F_1 = F_2$ dir.

Alt durum 1.1.2.2.2: $\exists s_0 \in I$ için $(F_1 \cdot T)(s_0) = 0$ ise (3.17) veya (3.18) den

$[(F_2 \cdot T)(F_1 \cdot N)](s_0) = 0$ dır. Aşağıdaki alt durumları elde ederiz.

Alt durum 1.1.2.2.2.1: $(F_1 \cdot N)(s_0) = 0$ ise

$$F_1 = \pm B$$

ve

$$(3.15) \Rightarrow [(F_2 \cdot T)^2(1 - H^2)](s_0) = 0$$

$$(3.16) \Rightarrow [(F_2 \cdot N)^2(1 - H^2)](s_0) = 0$$

Dolayısıyla

$$1 - H^2 \neq 0 \Rightarrow (F_2 \cdot T)(s_0) = (F_2 \cdot N)(s_0)$$

olur. Yani $F_2 = \pm B$ dir. Buradan $F_1 = F_2$ bulunur.

Alt durum 1.1.2.2.2.2: $(F_2 \cdot T)(s_0) = 0$ ise

$$(3.16) \Rightarrow ((F_1 \cdot N)^2[1 - H^2(F_2 \cdot B)^2])(s_0) = ((F_2 \cdot N)^2[1 - H^2(F_1 \cdot B)^2])(s_0)$$

$$\Rightarrow [(F_1 \cdot N)^2 - (F_2 \cdot N)^2][1 - H^2(F_2 \cdot B)^2](s_0) = 0$$

Bu durumda $1 - H^2 \neq 0$ olduğundan $((F_1 \cdot N)^2 - (F_2 \cdot N)^2)(s_0) = 0$ dır. $H^2 \leq 1$ ve $(F_1 \cdot B)^2 \leq 1 \Rightarrow (1 - H^2)(F_1 \cdot B)^2 > 0$ ve $(F_1 \cdot N)(s_0) = \pm(F_2 \cdot N)(s_0)$ olur.

Eğer $(F_1 \cdot N)(s_0) = (F_2 \cdot N)(s_0)$ ise $(F_1 \cdot T)(s_0) = 0$, $(F_2 \cdot T)(s_0) = 0$, $(F_1 \cdot N)(s_0) = (F_2 \cdot N)(s_0)$ ve $F_1 \cdot B = F_2 \cdot B$ olacağından $F_1 = F_2$ bulunur.

Eğer $(F_1 \cdot N)(s_0) = -(F_2 \cdot N)(s_0)$ ise $((F_1 + F_2) \cdot N)(s_0) = 0$, $(F_1 \cdot T)(s_0) = 0$, $(F_2 \cdot T)(s_0) = 0$ ve $F_1 \cdot B = F_2 \cdot B$ bulunur.

Şekil 3.5 de $F_1 - F_2$, X çemberine paraleldir çünkü $F_1 \cdot B = F_2 \cdot B$ dir. A ve $\bar{A}$, X ile F_1 ve F_2 noktalarından geçen büyük çemberin kesişim noktalarıdır. D noktası da X çemberi üzerinde A ve $\bar{A}$ noktalarının orta noktası olsun.

$$((F_1 + F_2) \cdot N)(s_0) = 0, (F_1 \cdot T)(s_0) = 0, (F_2 \cdot T)(s_0) = 0$$

olduğundan $F_1 + F_2$, X çemberine diktir. Dolayısıyla $F_1 + F_2$, X çemberinin merkezinden geçer.

$$(F_1 \cdot T)(s_0) = 0, (F_2 \cdot T)(s_0) = 0$$

olmasından dolayı

$$A = (-HB - RN)(s_0)$$

$$\bar{A} = (-HB + RN)(s_0)$$

ve

$$D = (-HB + RT)(s_0)$$

alabiliriz.

Eğer X bir küresel hiperbol ise,

$$|d(A, F_1) - d(A, F_2)| = d(F_1, F_2)$$

ve

$$d(D, F_1) - d(D, F_2) = 0$$

olmalıdır. Yani $F_1 = F_2$ dir.

Eğer X bir küresel elips ise,

$$d(A, \bar{A}) = d(A, F_1) + d(A, F_2) = d(D, F_1) + d(D, F_2) = 2d(D, F_1)$$

olur. Dolayısıyla

$$(D, F_1) = -H(F_1 \cdot B)$$

$$(D, F_2) = -H(F_2 \cdot B)$$

ve

$$(A \cdot \bar{A}) = H^2 - R^2$$

ise

$$2 \cos^2 [\text{Arccos}(-H(F_1 \cdot B))] - 1 = H^2 - R^2$$

$\Rightarrow$

$$2H^2(F_1 \cdot B)^2 - 1 = H^2 - R^2$$

$\Rightarrow H^2 + R^2 = 1$ olduğundan

$$H^2((F_1 \cdot B)^2 - 1) = 0$$

olur.

Eğer $(F_1 \cdot B)^2 - 1 = 0$ ise $F_1 = F_2 = \pm B$ dir.

Eğer $H = 0$ ise, $X = -RN$ ve

$$((F_1 + F_2) \cdot N)(s_0) = 0$$

$\Rightarrow$

$$((F_1 + F_2) \cdot X)(s_0) = 0$$

$\Rightarrow$

$$\cos(d(F_1, X(s_0))) + \cos(d(F_2, X(s_0))) = 0$$

$\Rightarrow$

$$2\cos\left(\frac{d(F_1, X(s_0)) + d(F_2, X(s_0))}{2}\right)\cos\left(\frac{d(F_1, X(s_0)) - d(F_2, X(s_0))}{2}\right) = 0$$

Yani

$$\cos\left(\frac{d(F_1, X(s_0)) + d(F_2, X(s_0))}{2}\right) = 0$$

$$d(F_1, X(s_0)) + d(F_2, X(s_0)) = \pi$$

$\Rightarrow$

$$C = -1$$

$$\cos\left(\frac{d(F_1, X(s_0)) - d(F_2, X(s_0))}{2}\right) = 0$$

$\Rightarrow$

$$d(F_1, X(s_0)) - d(F_2, X(s_0)) = \pi$$

$\Rightarrow$

$$d(F_1, X(s_0)) = \pi, d(F_2, X(s_0)) = 0$$

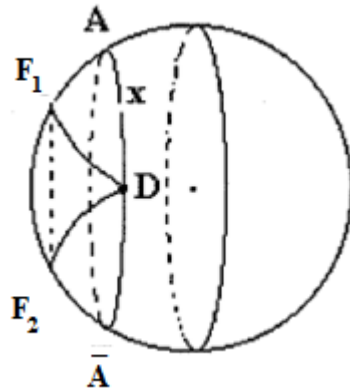
$\Rightarrow$

$$F_1 = -X(s_0), F_2 = X(s_0)$$

$\Rightarrow$

$$F_1 = -F_2$$

bulunur.



Şekil 3.5 Alt durum 1.1.2.2.2.2

Alt durum 1.1.2.2.3: $\exists s_0 \in I$ için $(F_2 \cdot T)(s_0) = 0$. İspat Alt durum 1.1.2.2.2 ile aynıdır.

Alt durum 1.1.2.2.4: $\exists s_0 \in I$ için $(F_1 \cdot N)(s_0) = 0$

$$(3.17) \text{ veya } (3.18) \Rightarrow ((F_1 \cdot T)(F_1 \cdot N))(s_0) = 0$$

ise aşağıdaki alt durumları elde ederiz.

Alt durum 1.1.2.2.4.1: $(F_1 \cdot T)(s_0) = 0$ ise $F_1 = \pm B$ dir.

$$(3.15) \Rightarrow ((F_2 \cdot T)^2(1 - H^2))(s_0) = 0$$

$$(3.16) \Rightarrow ((F_2 \cdot N)^2(1 - H^2))(s_0) = 0$$

Dolayısıyla

$$1 - H^2 \neq 0 \Rightarrow (F_2 \cdot T)(s_0) = (F_2 \cdot N)(s_0) \Rightarrow F_2 = \pm B \Rightarrow F_1 = F_2 = \pm B$$

bulunur.

Alt durum 1.1.2.2.4.2: $(F_2 \cdot N)(s_0) = 0$ ise

$$(3.9) \Rightarrow (F_1 \cdot T)^2(1 - H^2(F_2 \cdot B)^2)(s_0) = (F_2 \cdot T)^2(1 - H^2(F_1 \cdot B)^2)(s_0)$$

$$\Rightarrow [(F_1 \cdot T)^2 - (F_2 \cdot T)^2][(1 - H^2(F_1 \cdot B)^2)](s_0) = 0$$

$1 - H^2(F_1 \cdot B)^2 > 0$ olduğundan $[(F_1 \cdot T)^2 - (F_2 \cdot T)^2](s_0) = 0$ dir.

Eğer $(F_1 \cdot T)(s_0) = (F_2 \cdot T)(s_0)$ ise $F_1 = F_2$ dir.

Eğer $(F_1 \cdot T)(s_0) = -(F_2 \cdot T)(s_0)$

$$(F_1 \cdot N)(s_0) = 0, (F_2 \cdot N)(s_0) = 0, F_1 \cdot B = F_2 \cdot B$$

ve

$$((F_1 + F_2) \cdot T)(s_0) = 0$$

olur. Buradan

$$\left\{ \begin{array}{l} (F_1 \cdot T) \left(s_0 + \frac{\pi}{2} \right) = 0 \\ (F_2 \cdot T) \left(s_0 + \frac{\pi}{2} \right) = 0 \\ F_1 \cdot B = F_2 \cdot B \\ ((F_1 + F_2) \cdot N) \left(s_0 + \frac{\pi}{2} \right) = 0 \end{array} \right.$$

olduğundan ispat alt durum 1.1.2.2.2 gibidir.

Alt durum 1.1.2.3: $F_1 \cdot B = -F_2 \cdot B$ ama $F_1 \cdot B \neq 0$

$$(3.13) \Rightarrow$$

$$(F_1 \cdot T)^2 (F_2 \cdot N) = -(F_2 \cdot T)^2 (F_1 \cdot N) \quad (3.19)$$

$$(3.14) \Rightarrow$$

$$(F_1 \cdot N)^2 (F_2 \cdot T) = -(F_2 \cdot N)^2 (F_1 \cdot T) \quad (3.20)$$

Alt durum 1.1.2.3.1: $\forall s \in I$ için $(F_1 \cdot T)(F_2 \cdot T)(F_1 \cdot N)(F_2 \cdot N)(s) \neq 0$ olduğunda

$$\frac{(F_2 \cdot T)^2 (F_1 \cdot N)}{(F_1 \cdot N)^2 (F_2 \cdot T)} = \frac{-(F_1 \cdot T)^2 (F_2 \cdot N)}{-(F_2 \cdot N)^2 (F_1 \cdot T)}$$

$\Rightarrow$

$$(F_1 \cdot T)(F_1 \cdot N) - (F_2 \cdot T)(F_2 \cdot N) = 0$$

Bu durumda alt durum 1.1.2.2.1 ispatı geçerlidir.

Alt durum 1.1.2.3.2: $\exists s_0 \in I$ için $(F_1 \cdot T)(s_0) = 0$ ise

$$(3.19) \text{ veya } (3.20) \Rightarrow ((F_2 \cdot T)(F_1 \cdot N))(s_0) = 0$$

yazabiliriz. Bu durumda aşağıdaki alt durumları elde ederiz.

Alt durum 1.1.2.3.2.1: $(F_1 \cdot N)(s_0) = 0$. Yani

$$F_1 = \pm B$$

ve

$$(3.15) \Rightarrow ((F_2 \cdot T)^2(1 - H^2))(s_0) = 0$$

$$(3.16) \Rightarrow ((F_2 \cdot N)^2(1 - H^2))(s_0) = 0$$

Dolayısıyla

$$1 - H^2 \neq 0$$

$\Rightarrow$

$$(F_2 \cdot T)(s_0) = (F_2 \cdot N)(s_0) = 0$$

$\Rightarrow$

$$F_2 = \pm B$$

olur.

$$F_1 \cdot B = -(F_2 \cdot B)$$

$\Rightarrow$

$$F_1 = F_2 = \pm B$$

bulunur.

Alt durum 1.1.2.3.2.2: $(F_2 \cdot T)(s_0) = 0$ ise

$$(3.10) \Rightarrow (F_1 \cdot N)^2(1 - H^2(F_2 \cdot B)^2)(s_0) = (F_2 \cdot N)^2(1 - H^2(F_1 \cdot B)^2)(s_0)$$

$$\Rightarrow [(F_1 \cdot N)^2 - (F_2 \cdot N)^2][(1 - H^2(F_1 \cdot B)^2)](s_0) = 0$$

$(F_1 \cdot B) = -(F_2 \cdot B)$ ve $1 - H^2(F_1 \cdot B)^2 > 0$ olduğundan

$$[(F_1 \cdot N)^2 - (F_2 \cdot N)^2](s_0) = 0$$

dır.

Eğer $(F_1 \cdot N)(s_0) = (F_2 \cdot N)(s_0)$ ise

$$(F_1 \cdot T)(s_0) = 0, (F_2 \cdot T)(s_0) = 0, F_1 \cdot B = -(F_2 \cdot B)$$

ve

$$((F_1 - F_2) \cdot N)(s_0) = 0$$

olur.

Eğer X küresel elips ise,

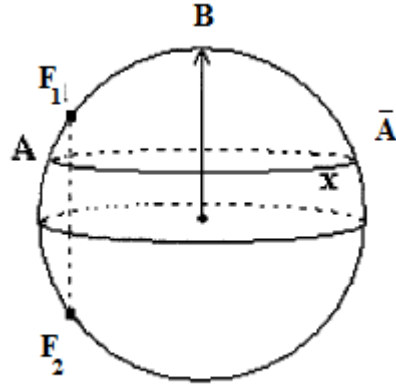
$$d(A, F_1) + d(A, F_2) = d(\bar{A}, F_1) + d(\bar{A}, F_2)$$

$\Rightarrow$

$$d(F_1, F_2) = 2\pi - d(F_1, F_2)$$

$\Rightarrow$

$$d(F_1, F_2) = \pi \Rightarrow F_1 = -F_2$$



Şekil 3.6 Alt durum 1.1.2.3.2.2

Eğer X küresel hiperbol ise,

$$X = -HB - RN \Rightarrow \begin{cases} (F_1 \cdot X) = -H(F_1 \cdot B) - R(F_1 \cdot N) \\ (F_2 \cdot X) = -H(F_2 \cdot B) - R(F_2 \cdot N) = H(F_1 \cdot B) - R(F_1 \cdot N) \end{cases}$$

(3.5) den

$$[-H(F_1 \cdot B) - R(F_1 \cdot N)]^2 + [H(F_1 \cdot B) - R(F_1 \cdot N)]^2$$

$$-2C[-H(F_1 \cdot B) - R(F_1 \cdot N)][H(F_1 \cdot B) - R(F_1 \cdot N)] + C^2 - 1 = 0$$

$C = \cos(d(A, F_1) - d(A, F_2)) = \sqrt{1 - H^2} = R$ olarak alıp devam edersek,

$$2H^2(F_1 \cdot B)^2(1 + R) - H^2 + 2R^2(R - 1)(F_1 \cdot N)^2 = 0 \quad (3.21)$$

(3.21) ifadesinin türevini alırsak,

$$4R(R - 1)(F_1 \cdot N)(F_1 \cdot T) = 0$$

eşitliğini buluruz.

Eğer F_1 , X çemberine dikse, $F_1 = \pm B$ olur. Dolayısıyla $F_1 = -F_2$ dir.

Eğer F_1 , X çemberine dik değilse,

$$((F_1 \cdot N)(F_1 \cdot T))(s) \neq 0$$

olacak şekilde bir $s \in I$ bulabiliriz. Dolayısıyla $R = 1 \Rightarrow C = 1$ dir.

Alt durum 1.1.2.3.3: $\exists s_0 \in I$ için $(F_2 \cdot T)(s_0) = 0$ ise ispat alt durum 1.1.2.3.2 deki gibidir.

Alt durum 1.1.2.3.4: $\exists s_0 \in I$ için $(F_1 \cdot N)(s_0) = 0$ ise

$$(3.19) \text{ veya } (3.20) \Rightarrow ((F_2 \cdot N)(F_1 \cdot T))(s_0) = 0$$

yazabiliriz. Bu durumda aşağıdaki alt durumları elde ederiz.

Alt durum 1.1.2.3.4.1: $(F_1 \cdot T)(s_0) = 0$. Yani

$$F_1 = \pm B$$

ve

$$(3.15) \Rightarrow ((F_2 \cdot T)^2(1 - H^2))(s_0) = 0$$

$$(3.16) \Rightarrow ((F_2 \cdot N)^2(1 - H^2))(s_0) = 0$$

Dolayısıyla

$$1 - H^2 \neq 0$$

$\Rightarrow$

$$(F_2 \cdot T)(s_0) = (F_2 \cdot N)(s_0) = 0$$

$\Rightarrow$

$$F_2 = \pm B$$

olur.

$$F_1 \cdot B = -(F_2 \cdot B)$$

$\Rightarrow$

$$F_1 = F_2 = \pm B$$

bulunur.

Alt durum 1.1.2.3.4.2: $(F_2 \cdot N)(s_0) = 0$ ise

$$(3.10) \Rightarrow (F_1 \cdot T)^2(1 - H^2(F_2 \cdot B)^2)(s_0) = (F_2 \cdot T)^2(1 - H^2(F_1 \cdot B)^2)(s_0)$$

$$\Rightarrow [(F_1 \cdot T)^2 - (F_2 \cdot T)^2][(1 - H^2(F_1 \cdot B)^2)](s_0) = 0$$

$(F_1 \cdot T) = -(F_2 \cdot T)$ ve $1 - H^2(F_1 \cdot B)^2 > 0$ olduğundan

$$[(F_1 \cdot T)^2 - (F_2 \cdot T)^2](s_0) = 0$$

dır.

Eğer $(F_1 \cdot T)(s_0) = -(F_2 \cdot T)(s_0)$ ise $F_1 = -F_2$ olur.

Eğer $(F_1 \cdot T)(s_0) = (F_2 \cdot T)(s_0)$ ise

$$(F_1 \cdot N)(s_0) = (F_2 \cdot N)(s_0) = 0,$$

$$[(F_1 - F_2) \cdot T](s_0) = 0 \text{ ve } (F_1 \cdot B) = -(F_2 \cdot B)$$

olur. Buradan

$$\left\{ \begin{array}{l} (F_1 \cdot T)\left(s_0 + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ (F_2 \cdot T)\left(s_0 + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ F_1 \cdot B = -(F_2 \cdot B) \\ ((F_1 - F_2) \cdot N)\left(s_0 + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{array} \right.$$

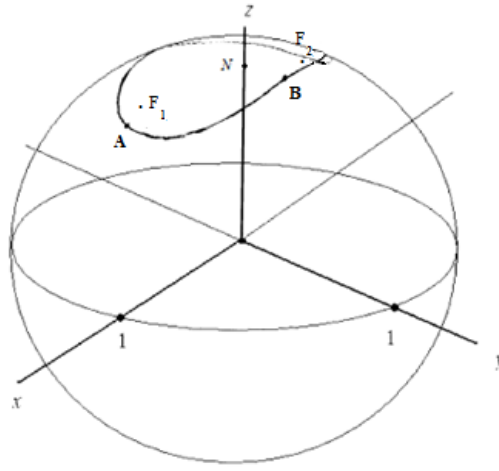
olduğundan ispat alt durum 1.1.2.3.2.2 gibidir.

Alt durum 1.1.2.3.5: $\exists s_0 \in I$ için $(F_1 \cdot N)(s_0) = 0$ ise ispat alt durum 1.1.2.3.4 deki gibidir.

4. KÜRESEL KONİK DENKLEMLERİNE BAŞKA BİR YAKLAŞIM

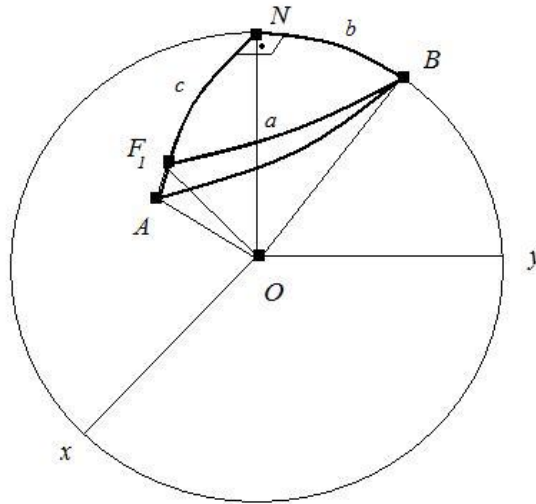
4.1 Küresel Konik Denklemlerinin Eliptik Koni Yardımıyla Bulunması

Odaklarından biri $F_1(\sin c, 0, \cos c)$ ve merkezi $N(0,0,1)$ noktası olan küresel elipsin asal eksen uzunluğu $2a$ olsun. Bu durumda küresel elipsin köşe noktalarından iki tanesi $A(\sin a, 0, \cos a)$ ve $B(0, \sin b, \cos b)$ olur. $(0 < b < a < \frac{\pi}{2}, 0 < c < a)$



Şekil 4.1 Küresel elips

$\triangle BNF_1$ üçgenini alıp Küresel Kosinüs denklemi uygularsak,



Şekil 4.2 Küresel üçgen

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \frac{\pi}{2}$$

$$\cos a = \cos b \cos c \quad (4.1)$$

bulunur. Bunu daha sonra aşağıdaki çok iyi bilinen teoreminin ispatında kullanacağız.

Teorem 4.1.1

Küresel elips $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ küresi ile tepe noktası orijinde olan

$$\frac{x^2}{\tan^2 a} + \frac{y^2}{\tan^2 b} = z^2, z > 0 \quad (4.2)$$

eliptik konisinin kesişimi ile ifade edilir.

İspat:

$X(x,y,z)$ noktası küresel elips üzerinde bir nokta olsun. Şekil 4.1'deki elips için diğer odak noktası $F_2(-\sin c, 0, \cos c)$ olur.

$$\langle X, F_1 \rangle = x \sin c + z \cos c = \cos(\widehat{F_1 O X})$$

$\Rightarrow$

$$\sin(\widehat{F_1 O X}) = \sqrt{1 - (x \sin c + z \cos c)^2}$$

ve

$$\langle X, F_2 \rangle = -x \sin c + z \cos c = \cos(\widehat{F_2 O X})$$

$\Rightarrow$

$$\sin(\widehat{F_2 O X}) = \sqrt{1 - (-x \sin c + z \cos c)^2}$$

olarak bulunur.

$$\cos 2a = \cos(\widehat{F_1 O X} + \widehat{F_2 O X})$$

$$\begin{aligned}
&= \cos(\widehat{F_1OX}) \cos(\widehat{F_2OX}) - \sin(\widehat{F_1OX}) \sin(\widehat{F_2OX}) \\
&= (x \sin c + z \cos c)(-x \sin c + z \cos c) \\
&\quad - \sqrt{1 - (x \sin c + z \cos c)^2} \sqrt{1 - (-x \sin c + z \cos c)^2}
\end{aligned}$$

gerekli işlemleri yaparsak

$$z^2 \cos^2 c - x^2 \sin^2 c - \cos 2a = \sqrt{(1 - (x \sin c + z \cos c)^2)(1 - (-x \sin c + z \cos c)^2)}$$

olur. Her iki tarafın karesini alırsak,

$$\begin{aligned}
&1 - 2(x^2 \sin^2 c + z^2 \cos^2 c) + (z^2 \cos^2 c - x^2 \sin^2 c)^2 \\
&\quad = z^4 \cos^4 c + x^4 \sin^4 c + \cos^2 2a - 2z^2 \cos^2 c \cos 2a \\
&\quad \quad - 2z^2 \cos^2 c x^2 \sin^2 c + 2x^2 \sin^2 c \cos 2a \\
&1 - 2(x^2 \sin^2 c + z^2 \cos^2 c) + (z^2 \cos^2 c - x^2 \sin^2 c)^2 \\
&\quad = (z^2 \cos^2 c - x^2 \sin^2 c)^2 \\
&\quad \quad - 2 \cos 2a (z^2 \cos^2 c - x^2 \sin^2 c) + \cos^2 2a
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$1 - 2(x^2 \sin^2 c + z^2 \cos^2 c) = -2 \cos 2a (z^2 \cos^2 c - x^2 \sin^2 c) + \cos^2 2a$$

$\Rightarrow$

$$-2 \cos 2a z^2 \cos^2 c + 2 \cos 2a x^2 \sin^2 c + \cos^2 2a + 2x^2 \sin^2 c + 2z^2 \cos^2 c - 1 = 0$$

$\Rightarrow$

$$2x^2 \sin^2 c (\cos 2a + 1) - 2z^2 \cos^2 c (\cos 2a - 1) + \cos^2 2a - 1 = 0$$

ifadesinde

$$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

eşitliklerini kullanırsak,

$$4x^2 \sin^2 c \cos^2 a + 4z^2 \cos^2 c \sin^2 a - \sin^2 2a = 0$$

$\Rightarrow$

$$4x^2 \sin^2 c \cos^2 a + 4z^2 \cos^2 c \sin^2 a - 4\sin^2 a \cos^2 a = 0$$

haline gelir. Eşitliğin her iki tarafını

$$4 \sin^2 a \cos^2 a$$

ifadesine bölersek,

$$\frac{x^2}{\sin^2 a / \sin^2 c} + \frac{z^2}{\cos^2 a / \cos^2 c} = 1$$

denklemini elde ederiz. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ve (4.1) eşitliklerini uygularsak,

$$\frac{x^2}{\sin^2 a / \sin^2 c} + \frac{z^2}{\cos^2 b} = x^2 + y^2 + z^2$$

$\Rightarrow$

$$x^2 - \frac{x^2}{\sin^2 a / \sin^2 c} + y^2 = \frac{z^2}{\cos^2 b} - z^2$$

$\Rightarrow$

$$x^2 \left(\frac{\sin^2 a - \sin^2 c}{\sin^2 a} \right) + y^2 = z^2 \tan^2 b$$

$\Rightarrow$

$$\frac{x^2}{\sin^2 a} \left(\frac{\sin^2 a - \sin^2 c}{\tan^2 b} \right) + \frac{y^2}{\tan^2 b} = z^2$$

eşitliğini buluruz. Şimdi

$$\frac{\sin^2 a - \sin^2 c}{\tan^2 b}$$

ifadesini açalım,

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 a - \sin^2 c}{\tan^2 b} &= \frac{1 - \cos^2 a - (1 - \cos^2 c)}{\sin^2 b / \cos^2 b} \\ &= \frac{(\cos^2 c - \cos^2 a) \cos^2 b}{1 - \cos^2 b} \\ &= \frac{\cos^2 c \cos^2 b - \cos^2 a \cos^2 b}{1 - \cos^2 b} \\ &= \frac{\cos^2 a - \cos^2 a \cos^2 b}{1 - \cos^2 b} \\ &= \frac{\cos^2 a (1 - \cos^2 b)}{1 - \cos^2 b} \\ &= \cos^2 a \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} z^2 &= \frac{x^2}{\sin^2 a} \left(\frac{\sin^2 a - \sin^2 c}{\tan^2 b} \right) + \frac{y^2}{\tan^2 b} \\ &= \frac{x^2}{\sin^2 a} \cos^2 a + \frac{y^2}{\tan^2 b} \\ &= \frac{x^2}{\tan^2 a} + \frac{y^2}{\tan^2 b} \end{aligned}$$

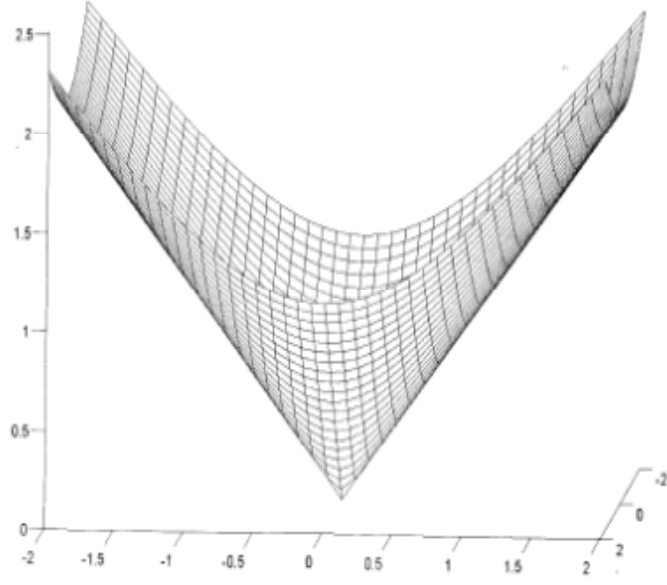
bulunur. Böylece ispatı tamamlamış oluruz.

(4.2) denkleminde

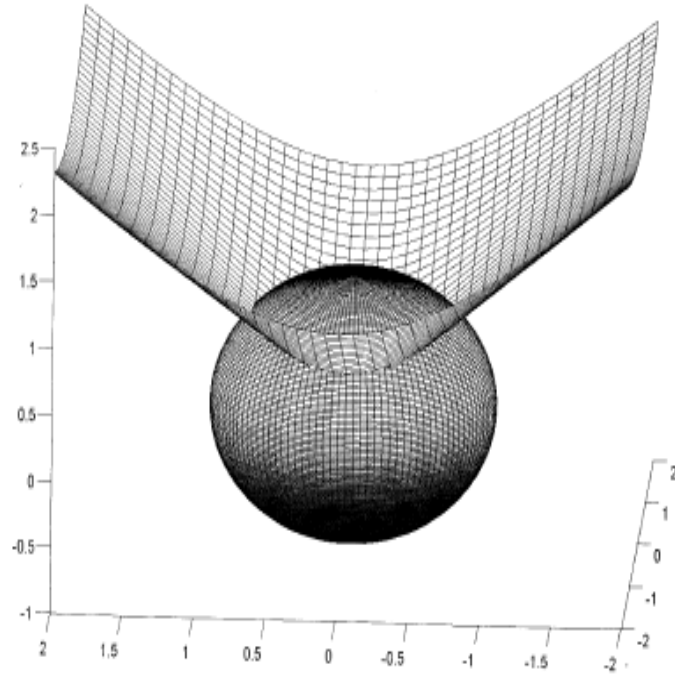
$$a = \frac{\pi}{3}$$

$$b = \frac{\pi}{3}$$

alırsak, aşağıdaki grafikleri elde ederiz.



Şekil 4.3 Eliptik koni



Şekil 4.4 Koni ile birim kürenin kesişimi

Sonuç 4.1.1

Küresel elips birim küre ($x^2 + y^2 + z^2 = 1$) ile aşağıda ki üç silindirin herhangi biriyle kesişiminden elde edilebilir.

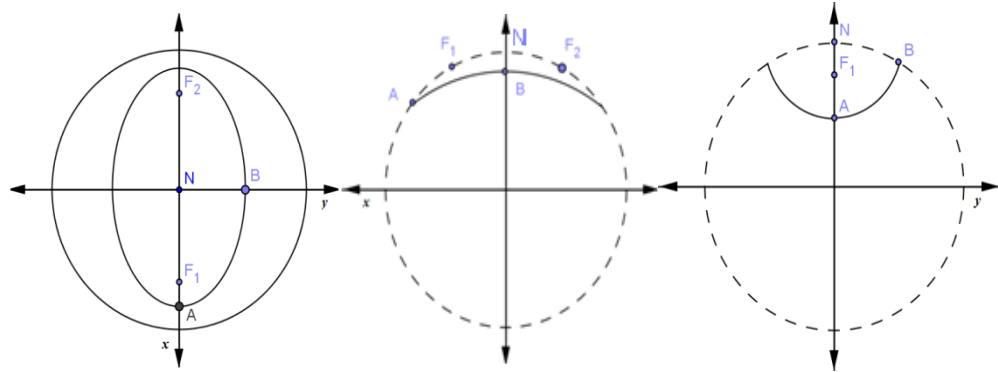
$$\frac{x^2}{\sin^2 a} + \frac{y^2}{\sin^2 b} = 1 \quad (4.3)$$

$$\frac{x^2}{\sin^2 a / \sin^2 c} + \frac{z^2}{\cos^2 b} = 1 \quad (4.4)$$

$$-\frac{y^2}{\cos^2 a \tan^2 b / \sin^2 c} + \frac{z^2}{\cos^2 a} = 1 \quad (4.5)$$

İspat:

Bu denklemler x^2 , y^2 ve z^2 terimlerinin (4.1), (4.2) ve $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ eşitliklerini kullanarak yok edilmesiyle kolayca elde edilir. Denklem (4.3) ; küresel elipsin xy-düzlemine dik izdüşümünün, birim çember içine düşen bir elips, denklem (4.4) ; xz-düzlemine izdüşümünün birim çemberle kesişen bir elips, denklem (4.5) ise yz-düzlemine izdüşümünün hiperbol parçası olduğunu gösterir.



Şekil 4.5 xy, xz ve yz düzlemlerine izdüşümler

4.2 Küresel Konikler için Dördüncü Parametre

d parametresini, (4.5) denkleminin asimptotu ile z-ekseni arasındaki açı olarak tanımlayalım.

$$-\frac{y^2}{\cos^2 a \tan^2 b / \sin^2 c} + \frac{z^2}{\cos^2 a} = 1 \quad (z > 0),$$

denklemini bir hiperbol denklemini olduğundan, asimptot denklemleri

$$y = \pm z \frac{\tan b}{\sin c}$$

biçimindedir.

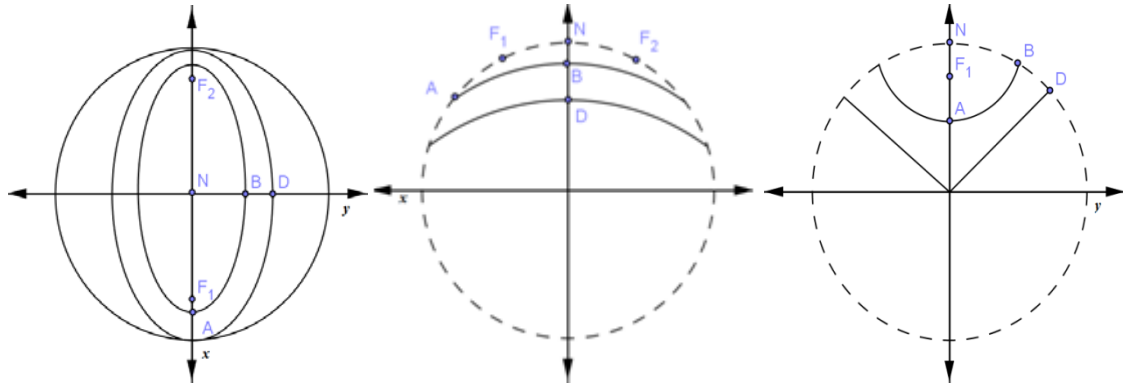
Asimptotik açığı

$$\tan d = \frac{\tan b}{\sin c} \quad (4.6)$$

şeklinde tanımlarsak. Bu durumda denklem (4.5)

$$-\frac{y^2}{\cos^2 a \tan^2 d} + \frac{z^2}{\cos^2 a} = 1 \quad (z > 0),$$

biçimine indirgenir. D, birim küre üzerinde $D(0, \sin d, \cos d)$ koordinatlarına sahip bir nokta olsun.



Şekil 4.6 xy, xz ve yz düzlemlerine asimptotik eğriyle beraber izdüşümler

Şimdi birim küre ile asimptotun kesişimlerinden oluşan asimptotik eğriye odaklanalım.

Bu eğrinin xy ve xz düzlemlerine izdüşümleri

$$x^2 + \frac{y^2}{\sin^2 d} = 1,$$

$$x^2 + \frac{z^2}{\cos^2 d} = 1$$

elipsleridir. Daha da ilginç olanı bu elipslerin, küresel elipsin izdüşümleriyle benzer olmasıdır.

Sonuç 4.2.1.

Asimptotik eğrinin xy ve xz-düzlemlerine izdüşüm eğrileri, küresel elipsin aynı düzlemlere izdüşüm eğrilerine benzerdir (Maeda 2005).

İspat:

Aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\frac{1}{\sin d} = \frac{\sin a}{\sin b} \text{ ve } \frac{1}{\cos d} = \frac{\sin a / \sin c}{\cos b}$$

Bu eşitlikleri göstermek için (4.1) ve (4.6) denklemlerini kullanacağız.

$$\frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\sin b}{\sqrt{1 - \cos^2 b \cos^2 c}}$$

pay ve paydayı $\cos b$ ile bölersek,

$$\frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\tan b}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 b} - \cos^2 c}} = \frac{\tan b}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 b} - 1 + \sin^2 c}} = \frac{\tan b}{\sqrt{\tan^2 b + \sin^2 c}}$$

(4.6) eşitliğini kullanırsak,

$$\frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\sin c \tan d}{\sqrt{\sin^2 c \tan^2 d + \sin^2 c}} = \frac{\tan d}{\sqrt{1 + \tan^2 d}}$$

$$\frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\tan d}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 d}}} = \frac{\sin d}{1}$$

olduğu görülür. Diğer eşitlik için,

$$\frac{\cos d}{1} = \frac{\cos d \tan d}{\tan d} = \frac{\sin d}{\tan d} = \frac{\frac{\sin b}{\sin a}}{\frac{\tan b}{\sin c}} = \frac{\cos b}{\frac{\sin a}{\sin c}}$$

olduğu kolayca görülür.

4.3 Parametreler Arası İlişkiler

Bu bölümde a,b,c ve d parametreleri arasındaki ilişkileri inceleyeceğiz. Bunlardan bazılarını önceki bölümlerde göstermiştik. Toplamda yedi eşitlik göstermiş olacağız.

Teorem 4.3.1. (Maeda 2005)

Üç parametreyi barındıran dört adet eşitlik vardır:

$$\cos a = \cos b \cos c \quad (4.7)$$

$$\tan b = \sin c \tan d \quad (4.8)$$

$$\tan c = \cos d \tan a \quad (4.9)$$

$$\sin b = \sin d \sin a \quad (4.10)$$

Ek olarak dört parametreyi barındıran üç adet eşitlik vardır.

$$\cos b \sin c = \cos d \sin a \quad (4.11)$$

$$\tan b = \cos c \sin d \tan a \quad (4.12)$$

$$\sin b = \cos a \tan c \tan d \quad (4.13)$$

İspat:

(4.7) numaralı eşitlik zaten (4.1) numaralı eşitliktir. (4.8) numaralı eşitlik de (4.6) numaralı eşitliktir. Bunların ispatını önceki bölümlerde yapmıştık. (4.10) numaralı eşitliği de sonuç 4.1.1 de gösterdik. (4.9) numaralı eşitlik için:

$$\tan c = \frac{\sin c}{\cos c} = \frac{\tan b / \tan d}{\cos a / \cos b} = \frac{\sin b}{\tan d \cos a} = \frac{\sin d \sin a}{\tan d \cos a} = \cos d \tan a .$$

(4.11) numaralı eşitlik de sonuç 4.1.1 de gösterilmişti. (4.12) ve (4.13) numaralı eşitlikleri

$$\tan b = \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin d \sin a}{\cos a / \cos c} = \cos c \sin d \tan a$$

$$\sin b = \tan b \cos b = \sin c \tan d \frac{\cos a}{\cos c} = \cos a \tan c \tan d$$

biçiminde gösterebiliriz.

5. BİR PARAMETRELİ KÜRESEL KONİK DENKLEMLERİ

5.1 Küresel Elips

F_1 ve F_2 birim küre yüzeyinde iki nokta, $d(F_1, F_2) = 2c, 0 < c < a \in \mathbb{R}$ ve

$$d(F_1, F_2) = 2c, c \in \mathbb{R}$$

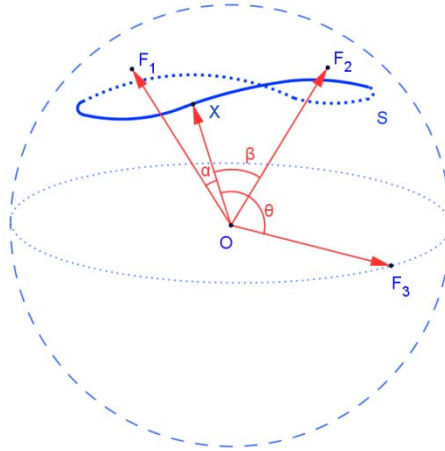
olmak üzere

$$S = \{X \mid d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a, a \in \mathbb{R}, X \in S^2\}$$

noktalarının kümesini alalım. $\vec{F}_3$ vektörünü

$$\vec{F}_3 = \frac{\vec{F}_1 \times \vec{F}_2}{\|\vec{F}_1 \times \vec{F}_2\|}$$

biçiminde tanımlarsak, $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ ve $\vec{F}_3$ lineer bağımsız olur.



Şekil 5.1 Küresel elips

Bu durumda şekle göre

$$d(X, F_1) = \alpha, d(X, F_2) = \beta, d(X, F_3) = \theta$$

ve

$$\alpha + \beta = 2a$$

dır. S^2 üzerindeki herhangi bir X noktasını

$$\vec{X} = \lambda_1 \vec{F_1} + \lambda_2 \vec{F_2} + \lambda_3 \vec{F_3}, \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3$$

biçiminde yazabiliriz. Gerekli işlemleri yaparsak,

$$\vec{X} \cdot \vec{F_1} = \lambda_1 + \lambda_2 \vec{F_1} \cdot \vec{F_2} = \cos \alpha$$

$$\vec{X} \cdot \vec{F_2} = \lambda_1 \vec{F_1} \cdot \vec{F_2} + \lambda_2 = \cos \beta$$

$$\vec{X} \cdot \vec{F_3} = \lambda_3 = \cos \theta$$

eşitliklerini buluruz. Buradan elde edeceğimiz

$$\lambda_1 + \lambda_2 \cos 2c = \cos \alpha$$

$$\lambda_1 \cos 2c + \lambda_2 = \cos \beta$$

$$\lambda_3 = \cos \theta$$

denklem sistemini çözersek, λ_1, λ_2 ve λ_3 sayılarını kolaylıkla bulabiliriz.

$$\lambda_1 = \frac{\begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos 2c \\ \cos \beta & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cos 2c \\ \cos 2c & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\cos \alpha - \cos(2a - \alpha) \cos 2c}{\sin^2 2c}$$

$$\lambda_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cos \alpha \\ \cos 2c & \cos \beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cos 2c \\ \cos 2c & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\cos(2a - \alpha) - \cos \alpha \cos 2c}{\sin^2 2c}$$

$$\lambda_3 = \cos \theta$$

S^2 üzerindeki herhangi bir X noktasını

$$\vec{X} = \frac{\cos \alpha - \cos(2a - \alpha) \cos 2c}{\sin^2 2c} \vec{F_1} + \frac{\cos(2a - \alpha) - \cos \alpha \cos 2c}{\sin^2 2c} \vec{F_2} + \cos \theta \vec{F_3} \quad (5.1)$$

biçiminde yazabiliriz. $X \in S^2$ ise

$$\vec{X} = (x_1, x_2, x_3), \|\vec{X}\|^2 = 1 \quad (5.2)$$

olduğunu biliyoruz. (5.1) ve (5.2) eşitliklerini birleştirdiğimizde denklemimizi bir parametreye indirgemiş oluruz. Şimdi bunu bir örnekle gösterelim.

Örnek 5.1.1

Özel olarak $F_1 = (1,0,0)$, $F_2 = (0,1,0)$ alırsak $F_3 = (0,0,1)$ bulunur. Dolayısıyla

$$\vec{X} = \left(\frac{\cos\alpha - \cos(2a - \alpha)\cos 2c}{\sin^2 2c}, \frac{\cos(2a - \alpha) - \cos\alpha\cos 2c}{\sin^2 2c}, \cos\phi \right)$$

eşitliğini buluruz.

$$2c = \frac{\pi}{2}$$

$$\vec{X} = (x_1, x_2, x_3), \|\vec{X}\|^2 = 1$$

olduğu için

$$\left(\frac{\cos\alpha - \cos(2a - \alpha)\cos 2c}{\sin^2 2c} \right)^2 + \left(\frac{\cos(2a - \alpha) - \cos\alpha\cos 2c}{\sin^2 2c} \right)^2 + \cos^2\phi = 1$$

$$1 - \left(\frac{\cos\alpha - \cos(2a - \alpha) \cdot 0}{1} \right)^2 - \left(\frac{\cos(2a - \alpha) - \cos\alpha \cdot 0}{1} \right)^2 = \cos^2\phi$$

$$1 - \cos^2\alpha - \cos^2(2a - \alpha) = \cos^2\phi$$

$$\cos\phi = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2(2a - \alpha)}$$

$$\vec{X} = \left(\cos\alpha, \cos(2a - \alpha), \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2(2a - \alpha)} \right)$$

olarak bulunur. Buradan da

$$x_1 = \cos\alpha$$

$$x_2 = \cos(2a - \alpha)$$

$$x_3 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2(2a - \alpha)} \quad (5.3)$$

parametrik denklemi elde edilir.

$$2a = \frac{2\pi}{3}$$

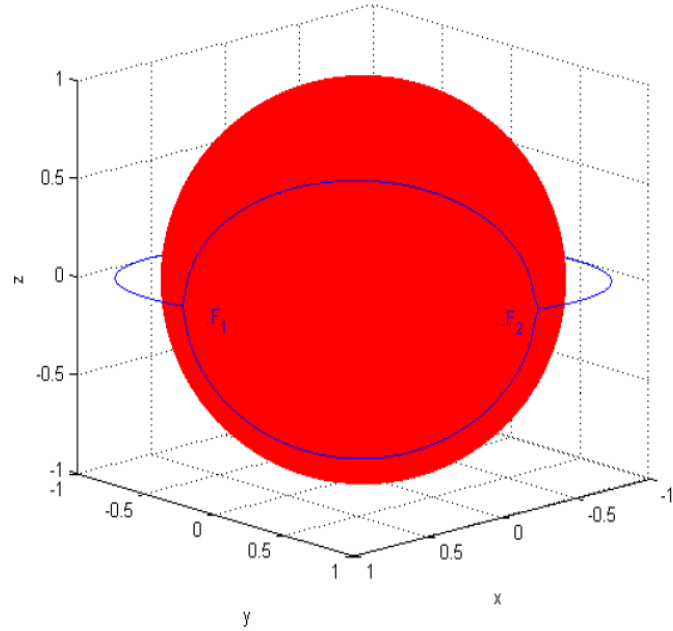
alırsak, (5.3) aşağıdaki biçime gelir.

$$x_1 = \cos \alpha$$

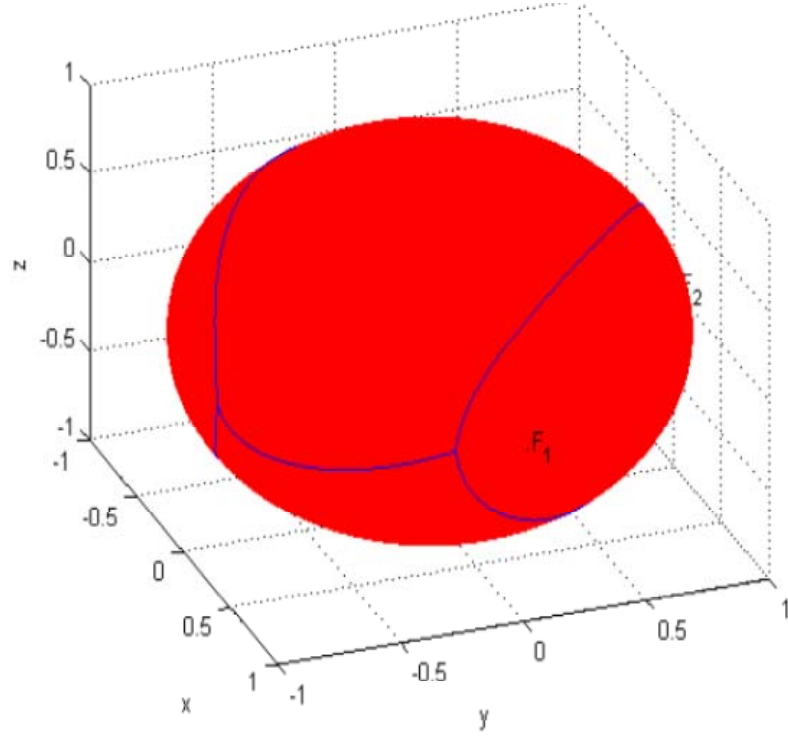
$$x_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)$$

$$x_3 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)}$$

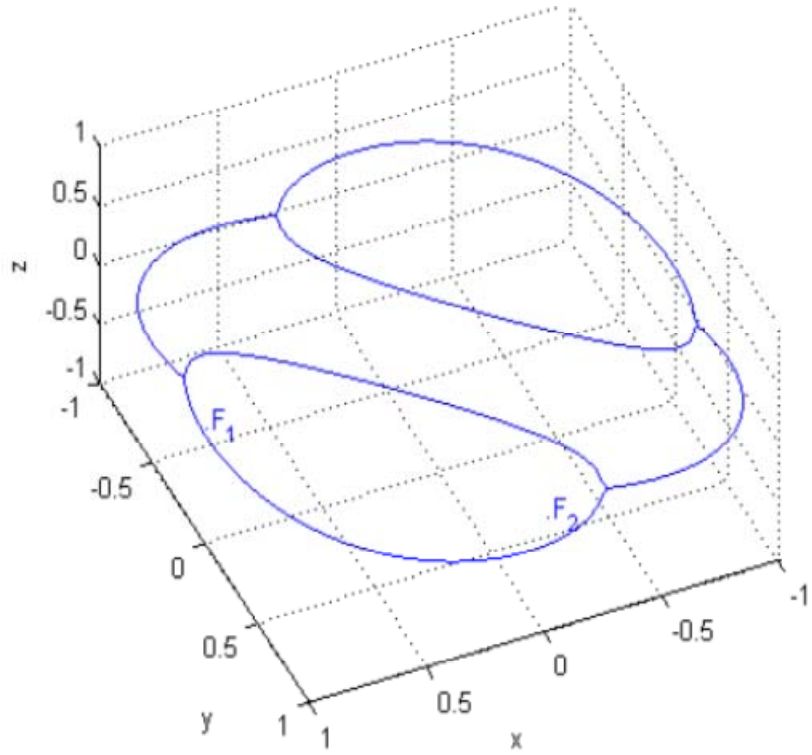
$\alpha \in [0, 2\pi)$ için



Şekil 5.2 Küresel elips

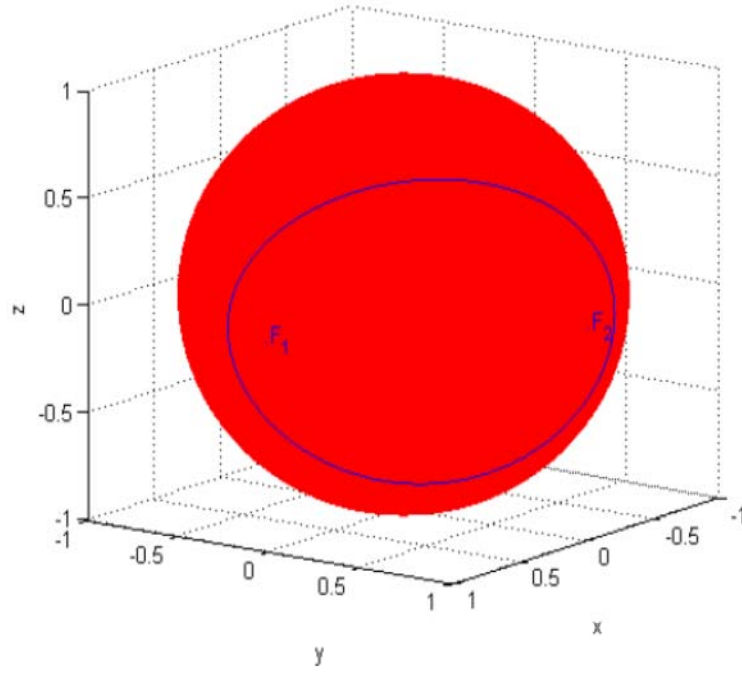


Şekil 5.3 Küresel elips

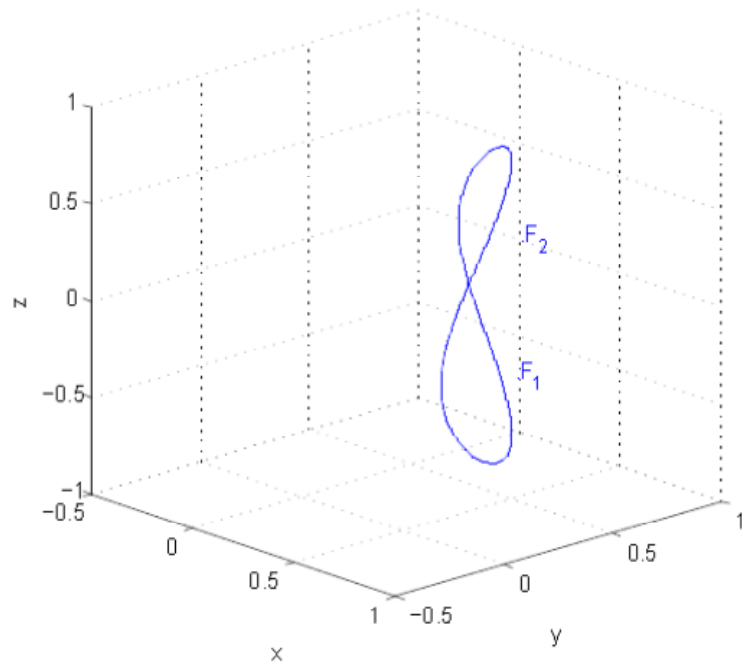


Şekil 5.4 Küresel elips (Küre olmadan)

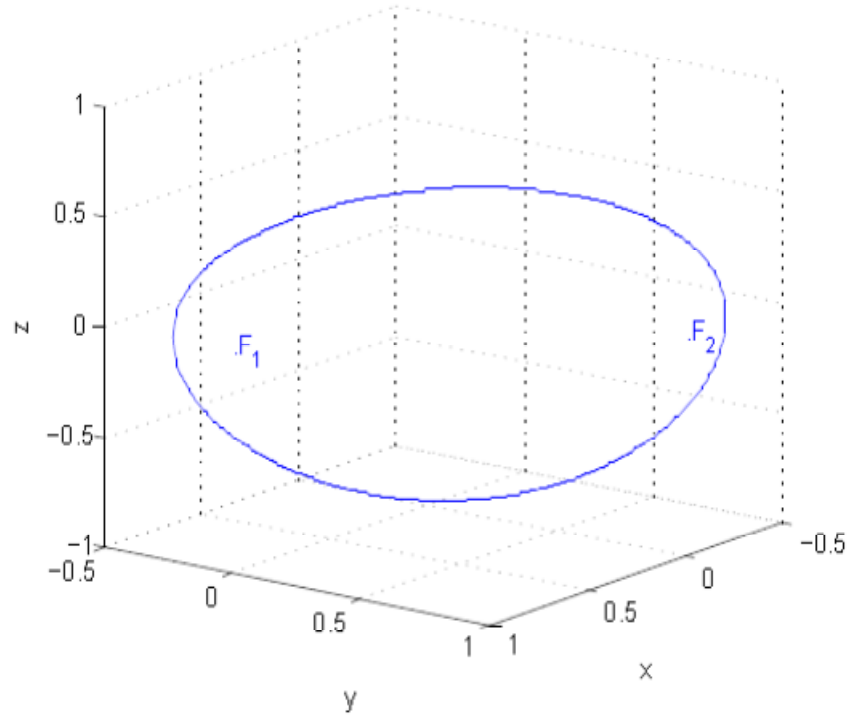
$\alpha \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12} \right)$ için



Şekil 5.5 Küresel elips



Şekil 5.6 Küresel elips (Küre olmadan)



Şekil 5.7 Küresel elips (Küre olmadan)

grafiklerini elde ederiz.

Örnek 5.1.2

Özel olarak $F_1 = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $F_2 = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ alırsak $F_3 = (1, 0, 0)$ alabiliriz.

Dolayısıyla

$$\vec{X} = \frac{\cos \alpha - \cos(2a - \alpha) \cos 2c}{\sin^2 2c} \vec{F}_1 + \frac{\cos(2a - \alpha) - \cos \alpha \cos 2c}{\sin^2 2c} \vec{F}_2 + \cos \theta \vec{F}_3$$

$$\vec{X} = \left(\cos \theta, \cos \alpha - \cos(2a - \alpha), \frac{\sqrt{3}}{3} (\cos \alpha + \cos(2a - \alpha)) \right)$$

eşitliğini buluruz.

$$2c = \frac{\pi}{3}$$

$$\vec{X} = (x_1, x_2, x_3), \|\vec{X}\|^2 = 1$$

olduğu için

$$(\cos \alpha)^2 + (\cos \alpha - \cos(2\alpha - \alpha))^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} (\cos \alpha + \cos(2\alpha - \alpha)) \right)^2 = 1$$

$$1 - (\cos \alpha - \cos(2\alpha - \alpha))^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} (\cos \alpha + \cos(2\alpha - \alpha)) \right)^2 = \cos^2 \alpha$$

$$1 - \left[\frac{4}{3} (\cos^2 \alpha + \cos^2(2\alpha - \alpha) - \cos \alpha \cos(2\alpha - \alpha)) \right] = \cos^2 \alpha$$

$$\vec{X} = \left(\pm \sqrt{1 - \left[\frac{4}{3} (\cos^2 \alpha + \cos^2(2\alpha - \alpha) - \cos \alpha \cos(2\alpha - \alpha)) \right]}, \cos \alpha - \sin \alpha, \frac{\sqrt{3}}{3} (\cos \alpha + \cos(2\alpha - \alpha)) \right)$$

olarak bulunur. Buradan da

$$x_1 = \pm \sqrt{1 - \left[\frac{4}{3} (\cos^2 \alpha + \cos^2(2\alpha - \alpha) - \cos \alpha \cos(2\alpha - \alpha)) \right]}$$

$$x_2 = \cos \alpha - \cos(2\alpha - \alpha)$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} (\cos \alpha + \sin \alpha)$$

parametrik denklemi elde edilir.

$$2\alpha = \frac{\pi}{2}$$

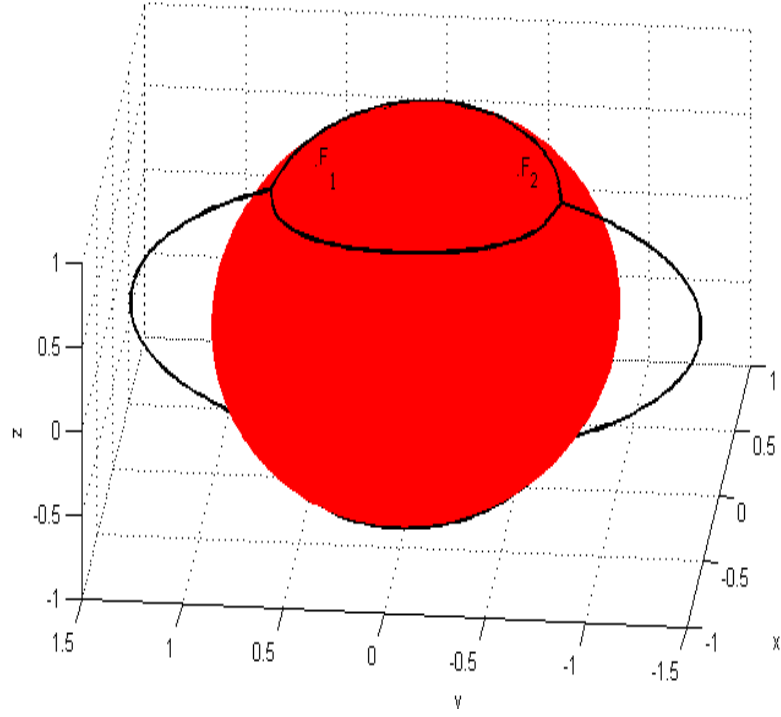
alırsak, denklem aşağıdaki biçime gelir.

$$x_1 = \pm \sqrt{\frac{1}{3} (\sin 2\alpha - 1)}$$

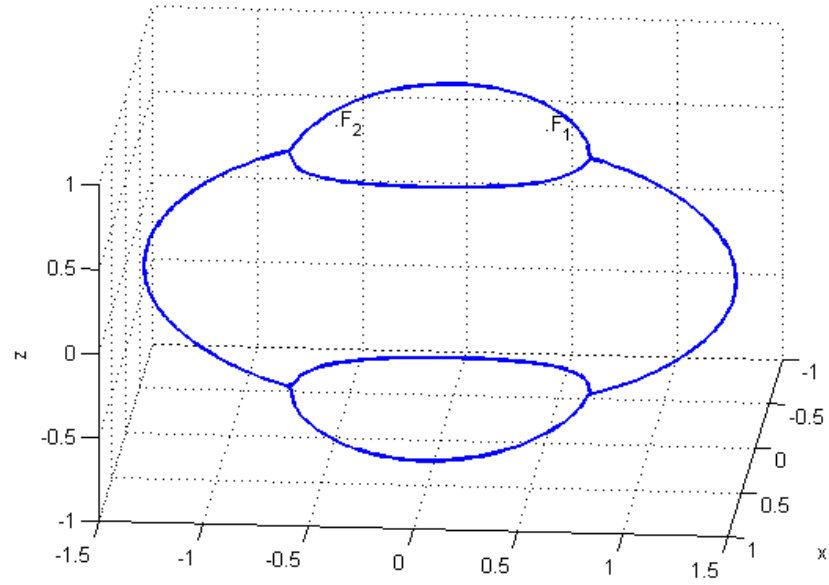
$$x_2 = \cos \alpha - \sin \alpha$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} (\cos \alpha + \sin \alpha)$$

$\alpha \in [0, 2\pi)$ için

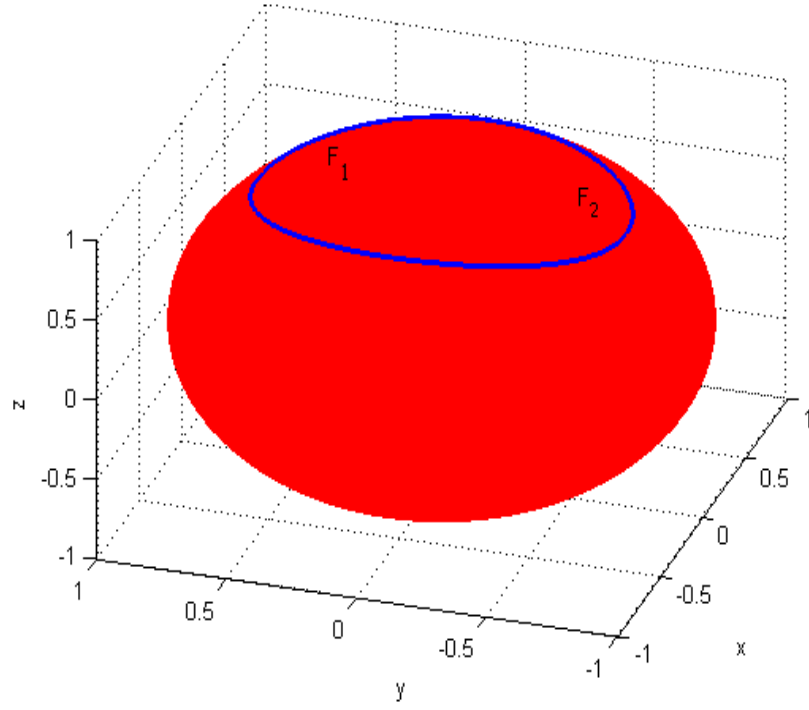


Şekil 5.8 Küresel elips

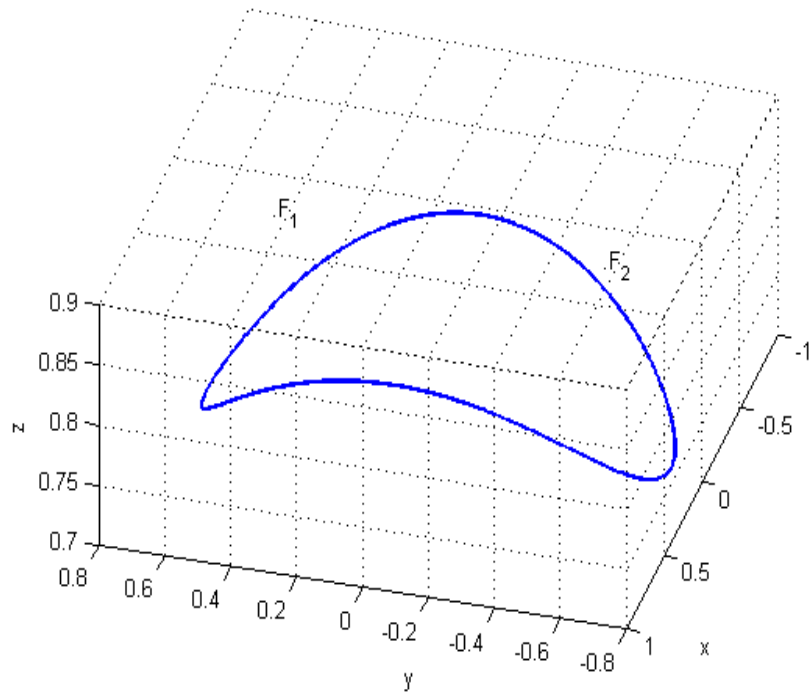


Şekil 5.9 Küresel elips (Küre olmadan)

$\alpha \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12} \right)$ için



Şekil 5.10 Küresel elips



Şekil 5.11 Küresel elips (Küre olmadan)

Teorem 5.1.1:

$X(s): I \rightarrow S^2$ tanımlı, odakları F_1 ve F_2 olan, (5.1) denklemini sağlayan bir küresel elips olsun. $F_1 = \pm F_2$ veya $2a = \pi \Rightarrow$ (5.1) denklemi çember belirtir

İspat:

$F_1 = \pm F_2$ olduğunda X in çember belirttiği açıktır. $F_1 \neq F_2$ ve $2a = \pi$ ise

$$\vec{X} = \frac{\cos \alpha - \cos(2a - \alpha) \cos 2c}{\sin^2 2c} \vec{F}_1 + \frac{\cos(2a - \alpha) - \cos \alpha \cos 2c}{\sin^2 2c} \vec{F}_2 + \cos \theta \vec{F}_3$$

$$\vec{X} = \frac{\cos \alpha + \cos \alpha \cos 2c}{\sin^2 2c} \vec{F}_1 + \frac{-\cos \alpha - \cos \alpha \cos 2c}{\sin^2 2c} \vec{F}_2 + \cos \theta \vec{F}_3$$

$$\vec{X} = \frac{\cos \alpha (1 + \cos 2c)}{\sin^2 2c} \vec{F}_1 - \frac{\cos \alpha (1 + \cos 2c)}{\sin^2 2c} \vec{F}_2 + \cos \theta \vec{F}_3$$

$$\vec{X} = \frac{\cos \alpha (1 + 2 \cos^2 c - 1)}{\sin^2 2c} \vec{F}_1 - \frac{\cos \alpha (1 + 2 \cos^2 c - 1)}{\sin^2 2c} \vec{F}_2 + \cos \theta \vec{F}_3$$

$$\vec{X} = \frac{2 \cos \alpha \cos^2 c}{4 \sin^2 c \cos^2 c} \vec{F}_1 - \frac{2 \cos \alpha \cos^2 c}{4 \sin^2 c \cos^2 c} \vec{F}_2 + \cos \theta \vec{F}_3$$

$$\vec{X} = \frac{\cos \alpha}{2 \sin^2 c} \vec{F}_1 - \frac{\cos \alpha}{2 \sin^2 c} \vec{F}_2 + \cos \theta \vec{F}_3$$

$\vec{X}$ ile $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ vektörlerinin iç çarpımı

$$\vec{X} \cdot (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \left(\frac{\cos \alpha}{2 \sin^2 c} \vec{F}_1 - \frac{\cos \alpha}{2 \sin^2 c} \vec{F}_2 + \cos \theta \vec{F}_3 \right) (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$$

$$= \frac{2 \cos \alpha}{2 \sin^2 c} \vec{F}_1 \cdot \vec{F}_1 - \frac{2 \cos \alpha}{2 \sin^2 c} \vec{F}_2 \cdot \vec{F}_2 + \frac{2 \cos \alpha}{2 \sin^2 c} \vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 - \frac{2 \cos \alpha}{2 \sin^2 c} \vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = 0$$

olduğundan

$$S = \{X \mid d(X, F_1) + d(X, F_2) = \pi, X \in S^2\}$$

kümesi, normali $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ vektörü olan bir büyük çember belirtir.

5.2 Küresel Hiperbol

F_1 ve F_2 birim küre yüzeyinde iki nokta, $d(F_1, F_2) = 2c, 0 \leq a < c \in \mathbb{R}$ ve

$$d(F_1, F_2) = 2c, c \in \mathbb{R}$$

olmak üzere

$$S = \{X \mid |d(X, F_1) - d(X, F_2)| = 2a, X \in S^2\}$$

noktalarının kümesini alalım. $\vec{F}_3$ vektörünü

$$\vec{F}_3 = \frac{\vec{F}_1 \times \vec{F}_2}{\|\vec{F}_1 \times \vec{F}_2\|}$$

biçiminde tanımlarsak, $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ ve $\vec{F}_3$ lineer bağımsız olur.

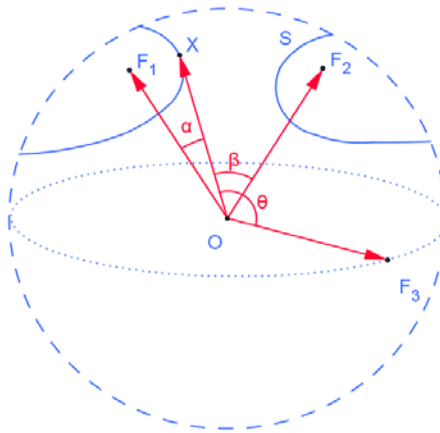
Bu durumda şekil (5.12) ye göre

$$d(X, F_1) = \alpha, d(X, F_2) = \beta, d(X, F_3) = \theta$$

ve

$$|\alpha - \beta| = 2a$$

dır.



Şekil 5.12 Küresel hiperbol

S^2 üzerindeki herhangi bir X noktasını

$$\vec{X} = \lambda_1 \vec{F_1} + \lambda_2 \vec{F_2} + \lambda_3 \vec{F_3}, \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3$$

biçiminde yazabiliriz. Gerekli işlemleri yaparsak,

$$\vec{X} \cdot \vec{F_1} = \lambda_1 + \lambda_2 \vec{F_1} \cdot \vec{F_2} = \cos \alpha$$

$$\vec{X} \cdot \vec{F_2} = \lambda_1 \vec{F_1} \cdot \vec{F_2} + \lambda_2 = \cos \beta$$

$$\vec{X} \cdot \vec{F_3} = \lambda_3 = \cos \theta$$

eşitliklerini buluruz. Buradan elde edeceğimiz

$$\lambda_1 + \lambda_2 \cos 2c = \cos \alpha$$

$$\lambda_1 \cos 2c + \lambda_2 = \cos \beta$$

$$\lambda_3 = \cos \theta$$

denklem sistemini çözersek, λ_1, λ_2 ve λ_3 sayılarını kolaylıkla bulabiliriz.

$$\lambda_1 = \frac{\begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos 2c \\ \cos \beta & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cos 2c \\ \cos 2c & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos 2c}{\sin^2 2c}$$

$$\lambda_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cos \alpha \\ \cos 2c & \cos \beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cos 2c \\ \cos 2c & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\cos \beta - \cos \alpha \cos 2c}{\sin^2 2c}$$

$$\lambda_3 = \cos \theta$$

Hiperbol için $|\alpha - \beta| = 2a$ olduğundan ifadeyi iki ayrı durum için incelemeliyiz. S^2 üzerindeki herhangi bir X noktasını

$(\alpha > \beta)$:

$$\vec{X} = \frac{\cos \alpha - \cos(\alpha - 2a) \cos 2c}{\sin^2 2c} \vec{F}_1 + \frac{\cos(\alpha - 2a) - \cos \alpha \cos 2c}{\sin^2 2c} \vec{F}_2 + \cos \theta \vec{F}_3 \quad (5.4)$$

$(\alpha < \beta)$:

$$\vec{X} = \frac{\cos \alpha - \cos(\alpha + 2a) \cos 2c}{\sin^2 2c} \vec{F}_1 + \frac{\cos(\alpha + 2a) - \cos \alpha \cos 2c}{\sin^2 2c} \vec{F}_2 + \cos \theta \vec{F}_3 \quad (5.5)$$

biçimlerinde yazabiliriz. $X \in S^2$ ise

$$\vec{X} = (x_1, x_2, x_3), \|\vec{X}\|^2 = 1$$

olduğunu biliyoruz. (5.4), (5.2) ve (5.5), (5.2) eşitliklerini birleştirdiğimizde denkleminizi bir parametreye indirgemiş oluruz. Şimdi bunu örneklerle gösterelim. Kolaylık olması için $F_1 = (1,0,0)$ ve $F_2 = (0,1,0)$ alacağız.

Örnek 5.2.1 $(\alpha > \beta)$

Özel olarak $F_1 = (1,0,0)$, $F_2 = (0,1,0)$ alırsak $F_3 = (0,0,1)$ bulunur. Dolayısıyla $\vec{X}$ vektörünü

$$\vec{X} = \left(\frac{\cos \alpha - \cos(\alpha - 2a) \cos 2c}{\sin^2 2c}, \frac{\cos(\alpha - 2a) - \cos \alpha \cos 2c}{\sin^2 2c}, \cos \theta \right)$$

biçiminde yazabiliriz.

$$2c = \frac{\pi}{2}$$

$$\vec{X} = (x_1, x_2, x_3), \|\vec{X}\|^2 = 1$$

olduğu için

$$\left(\frac{\cos \alpha - \cos(\alpha - 2a) \cos 2c}{\sin^2 2c}\right)^2 + \left(\frac{\cos(\alpha - 2a) - \cos \alpha \cos 2c}{\sin^2 2c}\right)^2 + \cos^2 \theta = 1$$

$$\left(\frac{\cos \alpha - \cos(\alpha - 2a) \cdot 0}{1}\right)^2 + \left(\frac{\cos(\alpha - 2a) - \cos \alpha \cdot 0}{1}\right)^2 + \cos^2 \theta = 1$$

$$1 - \cos^2 \alpha - \cos^2(\alpha - 2a) = \cos^2 \theta$$

$$\vec{X} = (\cos \alpha, \cos(\alpha - 2a), \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2(\alpha - 2a)})$$

olarak bulunur. Kosinüs fonksiyonu için

$$\cos(\alpha - 2a) = \cos(2a - \alpha)$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla aşağıdaki parametrik denklemleri elde ederiz.

$$x_1 = \cos \alpha$$

$$x_2 = \cos(2a - \alpha)$$

$$x_3 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2(2a - \alpha)}$$

Dikkat edilirse (5.3) deki denklemin aynısını bulduk. Bunun sebebi

$$\begin{aligned} \{X \mid d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a, a \in \mathbb{R}, X \in S^2\} \\ \equiv \{X \mid d(X, F_1) - d(X, -F_2) = 2a - \pi, a \in \mathbb{R}, X \in S^2\} \end{aligned}$$

olmasıdır.

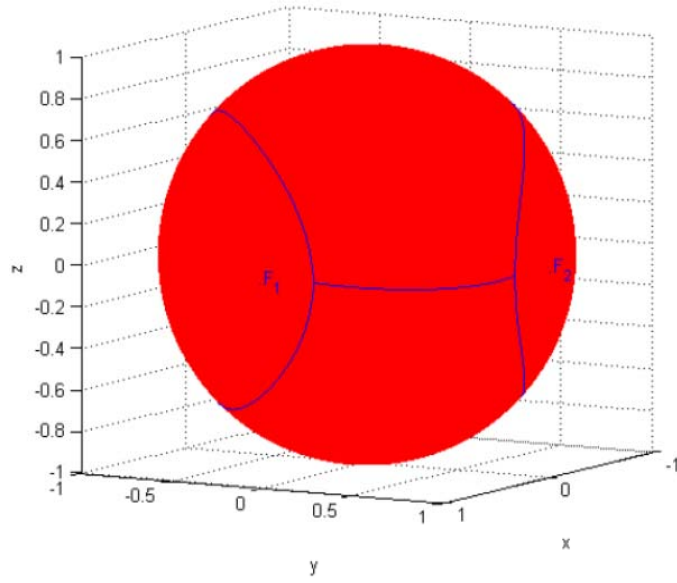
Dolayısıyla (5.3) aşağıdaki biçime gelir.

$$x_1 = \cos \alpha$$

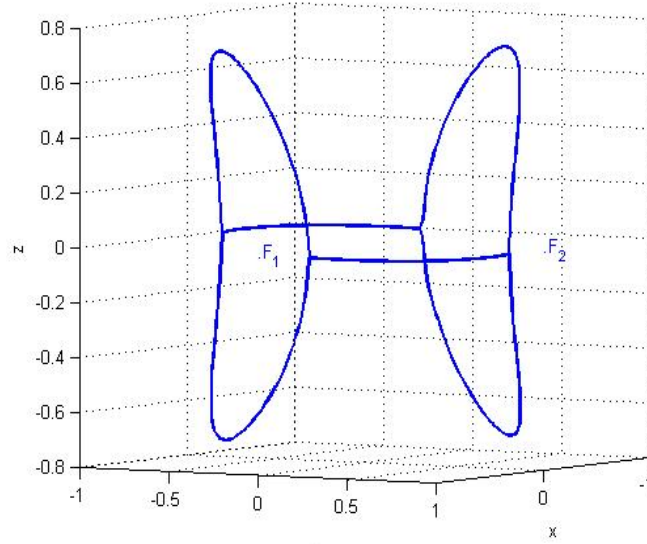
$$x_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)$$

$$x_3 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha \right)}$$

$\alpha \in [0, 2\pi)$ için



Şekil 5.13 Küresel hiperbol



Şekil 5.13 Küresel hiperbol (Küre olmadan)

Örnek 5.2.2 ($\alpha < \beta$)

Özel olarak $F_1 = (1,0,0)$, $F_2 = (0,1,0)$ alırsak $F_3 = (0,0,1)$ bulunur. Dolayısıyla

$$\vec{X} = \left(\frac{\cos \alpha - \cos(\alpha + 2a) \cos 2c}{\sin^2 2c}, \frac{\cos(\alpha + 2a) - \cos \alpha \cos 2c}{\sin^2 2c}, \cos \theta \right)$$

eşitliğini buluruz.

$$2c = \frac{\pi}{2}$$

$$\vec{X} = (x_1, x_2, x_3), \|\vec{X}\|^2 = 1$$

olduğu için

$$\left(\frac{\cos \alpha - \cos(\alpha + 2a) \cos 2c}{\sin^2 2c} \right)^2 + \left(\frac{\cos(\alpha + 2a) - \cos \alpha \cos 2c}{\sin^2 2c} \right)^2 + \cos^2 \theta = 1$$

$$\left(\frac{\cos \alpha - \cos(\alpha + 2a) \cdot 0}{1} \right)^2 + \left(\frac{\cos(\alpha + 2a) - \cos \alpha \cdot 0}{1} \right)^2 + \cos^2 \theta = 1$$

$$1 - \cos^2 \alpha - \cos^2(\alpha + 2a) = \cos^2 \theta$$

$$\cos \theta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2(\alpha + 2a)}$$

$\Rightarrow$

$$\vec{X} = \left(\cos \alpha, \cos(\alpha + 2a), \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2(\alpha + 2a)} \right)$$

olarak bulunur.

Dolayısıyla aşağıdaki parametrik denklemleri elde ederiz.

$$x_1 = \cos \alpha$$

$$x_2 = \cos(\alpha + 2a)$$

$$x_3 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2(\alpha + 2a)}$$

Bu denklemde

$$2a = \frac{\pi}{3}$$

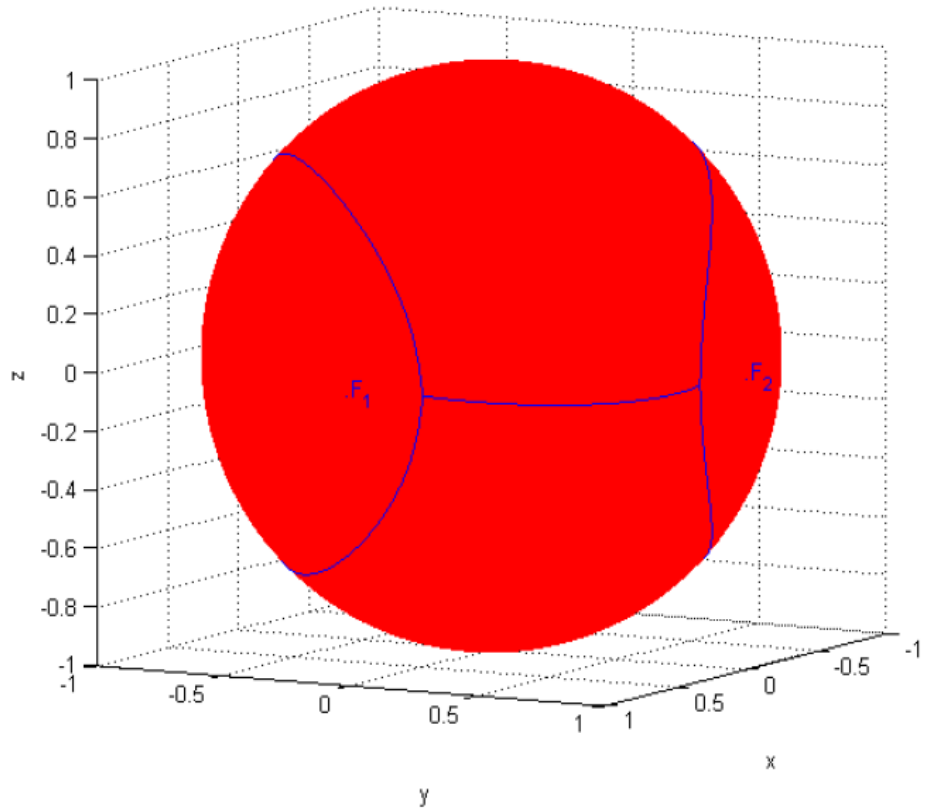
alırsak,

$$x_1 = \cos \alpha$$

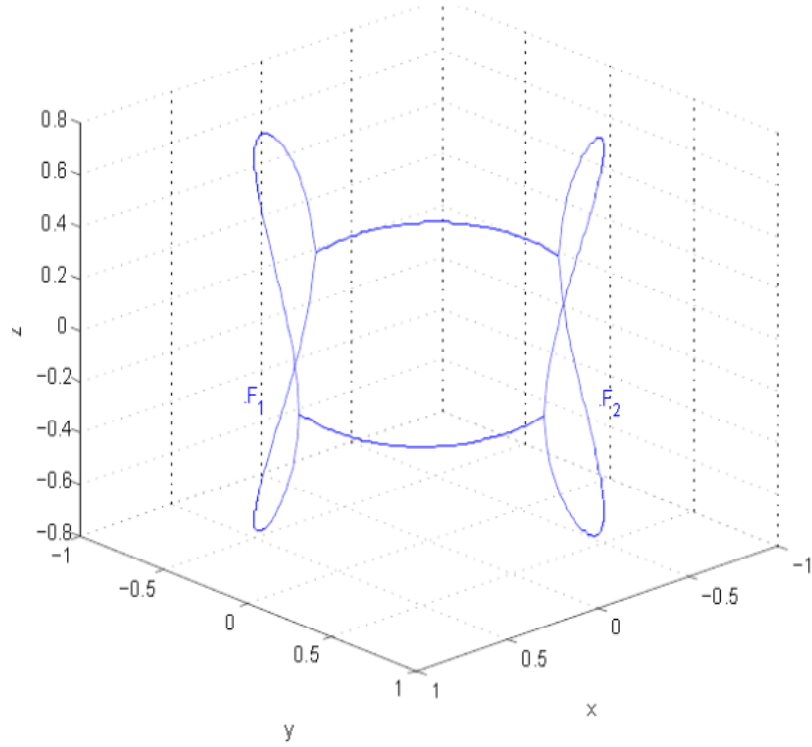
$$x_2 = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$$

$$x_3 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}$$

denklemini buluruz.



Şekil 5.14 Küresel hiperbol



Şekil 5.15 Küresel hiperbol (Küre olmadan)

Teorem 5.2.1:

$X(s): I \rightarrow S^2$ tanımlı, odakları F_1 ve F_2 olan, (5.4) denklemini sağlayan bir küresel hiperbol olsun. $F_1 = \pm F_2$ veya $2a = 0 \Rightarrow$ (5.4) denklemi çember belirtir

İspat:

$F_1 = \pm F_2$ olduğunda X in çember belirttiği açıktır. $F_1 \neq F_2$ ve $2a = 0$ ise

$$\vec{X} = \frac{\cos \alpha - \cos(2a - \alpha) \cos 2c}{\sin^2 2c} \vec{F}_1 + \frac{\cos(2a - \alpha) - \cos \alpha \cos 2c}{\sin^2 2c} \vec{F}_2 + \cos \theta \vec{F}_3$$

$$\vec{X} = \frac{\cos \alpha - \cos \alpha \cos 2c}{\sin^2 2c} \vec{F}_1 + \frac{\cos \alpha - \cos \alpha \cos 2c}{\sin^2 2c} \vec{F}_2 + \cos \theta \vec{F}_3$$

$$\vec{X} = \frac{\cos \alpha (1 - \cos 2c)}{\sin^2 2c} \vec{F}_1 + \frac{\cos \alpha (1 - \cos 2c)}{\sin^2 2c} \vec{F}_2 + \cos \theta \vec{F}_3$$

$$\vec{X} = \frac{\cos \alpha (1 - 1 + 2\sin^2 c)}{\sin^2 2c} \vec{F}_1 + \frac{\cos \alpha (1 - 1 + 2\sin^2 c)}{\sin^2 2c} \vec{F}_2 + \cos \theta \vec{F}_3$$

$$\vec{X} = \frac{2 \cos \alpha \sin^2 c}{4 \sin^2 c \cos^2 c} \vec{F}_1 + \frac{2 \cos \alpha \sin^2 c}{4 \sin^2 c \cos^2 c} \vec{F}_2 + \cos \theta \vec{F}_3$$

$$\vec{X} = \frac{\cos \alpha}{2 \cos^2 c} \vec{F}_1 + \frac{\cos \alpha}{2 \cos^2 c} \vec{F}_2 + \cos \theta \vec{F}_3$$

$\vec{X}$ ile $\vec{F}_1 - \vec{F}_2$ vektörlerinin iç çarpımı

$$\begin{aligned} \vec{X} \cdot (\vec{F}_1 - \vec{F}_2) &= \left(\frac{\cos \alpha}{2 \sin^2 c} \vec{F}_1 + \frac{\cos \alpha}{2 \sin^2 c} \vec{F}_2 + \cos \theta \vec{F}_3 \right) (\vec{F}_1 - \vec{F}_2) \\ &= \frac{2 \cos \alpha}{2 \cos^2 c} \vec{F}_1 \cdot \vec{F}_1 - \frac{2 \cos \alpha}{2 \cos^2 c} \vec{F}_2 \cdot \vec{F}_2 + \frac{2 \cos \alpha}{2 \cos^2 c} \vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 - \frac{2 \cos \alpha}{2 \cos^2 c} \vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = 0 \end{aligned}$$

olduğundan

$$S = \{X \mid |d(X, F_1) - d(X, F_2)| = 0, X \in S^2\}$$

kümesi, normali $\vec{F}_1 - \vec{F}_2$ vektörü olan bir büyük çember belirtir.

Teorem 5.2.2:

$X(s): I \rightarrow S^2$ tanımlı, odakları F_1 ve F_2 olan, (5.5) denklemini sağlayan bir küresel hiperbol olsun. $F_1 = \pm F_2$ veya $2a = 0 \Rightarrow$ (5.5) denklemi çember belirtir

İspat:

$F_1 = \pm F_2$ olduğunda X in çember belirttiği açıktır. $F_1 \neq F_2$ ve $2a = 0$ ise

$$\vec{X} = \frac{\cos \alpha - \cos(\alpha + 2a) \cos 2c}{\sin^2 2c} \vec{F}_1 + \frac{\cos(\alpha + 2a) - \cos \alpha \cos 2c}{\sin^2 2c} \vec{F}_2 + \cos \theta \vec{F}_3$$

denklemini

$$\vec{X} = \frac{\cos \alpha - \cos \alpha \cos 2c}{\sin^2 2c} \vec{F}_1 + \frac{\cos \alpha - \cos \alpha \cos 2c}{\sin^2 2c} \vec{F}_2 + \cos \theta \vec{F}_3$$

$$\vec{X} = \frac{\cos \alpha (1 - \cos 2c)}{\sin^2 2c} \vec{F}_1 + \frac{\cos \alpha (1 - \cos 2c)}{\sin^2 2c} \vec{F}_2 + \cos \theta \vec{F}_3$$

$$\vec{X} = \frac{\cos \alpha (1 - 1 + 2 \sin^2 c)}{\sin^2 2c} \vec{F}_1 + \frac{\cos \alpha (1 - 1 + 2 \sin^2 c)}{\sin^2 2c} \vec{F}_2 + \cos \theta \vec{F}_3$$

$$\vec{X} = \frac{2 \cos \alpha \sin^2 c}{4 \sin^2 c \cos^2 c} \vec{F}_1 + \frac{2 \cos \alpha \sin^2 c}{4 \sin^2 c \cos^2 c} \vec{F}_2 + \cos \theta \vec{F}_3$$

$$\vec{X} = \frac{\cos \alpha}{2 \cos^2 c} \vec{F}_1 + \frac{\cos \alpha}{2 \cos^2 c} \vec{F}_2 + \cos \theta \vec{F}_3$$

$\vec{X}$ ile $\vec{F}_1 - \vec{F}_2$ vektörlerinin iç çarpımı

$$\begin{aligned} \vec{X} \cdot (\vec{F}_1 - \vec{F}_2) &= \left(\frac{\cos \alpha}{2 \sin^2 c} \vec{F}_1 + \frac{\cos \alpha}{2 \sin^2 c} \vec{F}_2 + \cos \theta \vec{F}_3 \right) (\vec{F}_1 - \vec{F}_2) \\ &= \frac{2 \cos \alpha}{2 \cos^2 c} \vec{F}_1 \cdot \vec{F}_1 - \frac{2 \cos \alpha}{2 \cos^2 c} \vec{F}_2 \cdot \vec{F}_2 + \frac{2 \cos \alpha}{2 \cos^2 c} \vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 - \frac{2 \cos \alpha}{2 \cos^2 c} \vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = 0 \end{aligned}$$

olduğundan

$$S = \{X \mid |d(X, F_1) - d(X, F_2)| = 0, X \in S^2\}$$

kümesi, normali $\vec{F}_1 - \vec{F}_2$ vektörü olan bir büyük çember belirtir.

5.3 Küresel Parabol

F_1 ve F_2 birim küre yüzeyinde iki nokta olsun. $\vec{F}_2$ vektörünü normal kabul eden büyük çember S' ve

$$d(F_1, F_2) = 2c, c \in \mathbb{R}$$

olacak şekilde

$$S = \{X \mid d(X, F_1) + \frac{\pi}{2} = d(X, F_2), X \in S^2\}$$

noktalarının kümesini alalım. $\vec{F}_3$ vektörünü

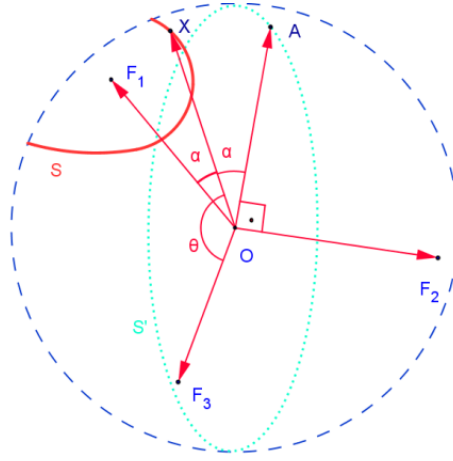
$$\vec{F}_3 = \frac{\vec{F}_1 \times \vec{F}_2}{\|\vec{F}_1 \times \vec{F}_2\|}$$

biçiminde tanımlarsak, $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ ve $\vec{F}_3$ lineer bağımsız olur.

Bu durumda şekil (5.16) ya göre

$$d(X, F_1) = \alpha, d(X, F_2) = \frac{\pi}{2} + \alpha, d(X, F_3) = \theta$$

olur.



Şekil 5.16 Küresel parabol

S^2 üzerindeki herhangi bir X noktasını

$$\vec{X} = \lambda_1 \vec{F}_1 + \lambda_2 \vec{F}_2 + \lambda_3 \vec{F}_3, \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3$$

biçiminde yazabiliriz. Gerekli işlemleri yaparsak,

$$\vec{X} \cdot \vec{F}_1 = \lambda_1 + \lambda_2 \vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = \cos \alpha$$

$$\vec{X} \cdot \vec{F}_2 = \lambda_1 \vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 + \lambda_2 = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\sin \alpha$$

$$\vec{X} \cdot \vec{F}_3 = \lambda_3 = \cos \theta$$

eşitliklerini buluruz. Buradan elde edeceğimiz

$$\lambda_1 + \lambda_2 \cos 2c = \cos \alpha$$

$$\lambda_1 \cos 2c + \lambda_2 = -\sin \alpha$$

$$\lambda_3 = \cos \theta$$

denklem sistemini çözersek, λ_1, λ_2 ve λ_3 sayılarını kolaylıkla bulabiliriz.

$$\lambda_1 = \frac{\begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos 2c \\ -\sin \alpha & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cos 2c \\ \cos 2c & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha \cos 2c}{\sin^2 2c}$$

$$\lambda_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cos \alpha \\ \cos 2c & -\sin \alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cos 2c \\ \cos 2c & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-\sin \alpha - \cos \alpha \cos 2c}{\sin^2 2c}$$

$$\lambda_3 = \cos \theta$$

S^2 üzerindeki herhangi bir X noktasını

$$\vec{X} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha \cos 2c}{\sin^2 2c} \vec{F}_1 + \frac{-\sin \alpha - \cos \alpha \cos 2c}{\sin^2 2c} \vec{F}_2 + \cos \theta \vec{F}_3 \quad (5.6)$$

biçiminde yazabiliriz. $X \in S^2$ ise

$$\vec{X} = (x_1, x_2, x_3), \quad \|\vec{X}\|^2 = 1$$

olduğunu biliyoruz. (5.2) ve (5.6) eşitliklerini birleştirdiğimizde denklemimizi bir parametreye indirgemiş oluruz. Şimdi bunu bir örnekle gösterelim. Kolaylık olması için $F_1 = (1,0,0)$ ve $F_2 = (0,1,0)$ alacağız.

Örnek 5.3.1

Özel olarak $F_1 = (1,0,0)$, $F_2 = (0,1,0)$ alırsak $F_3 = (0,0,1)$ bulunur. Dolayısıyla

$$\vec{X} = \left(\frac{\cos \alpha + \sin \alpha \cos 2c}{\sin^2 2c}, \frac{-\sin \alpha - \cos \alpha \cos 2c}{\sin^2 2c}, \cos \theta \right)$$

eşitliğini buluruz.

$$2c = \frac{\pi}{2}, \quad \vec{X} = (x_1, x_2, x_3), \quad \|\vec{X}\|^2 = 1$$

olduğu için

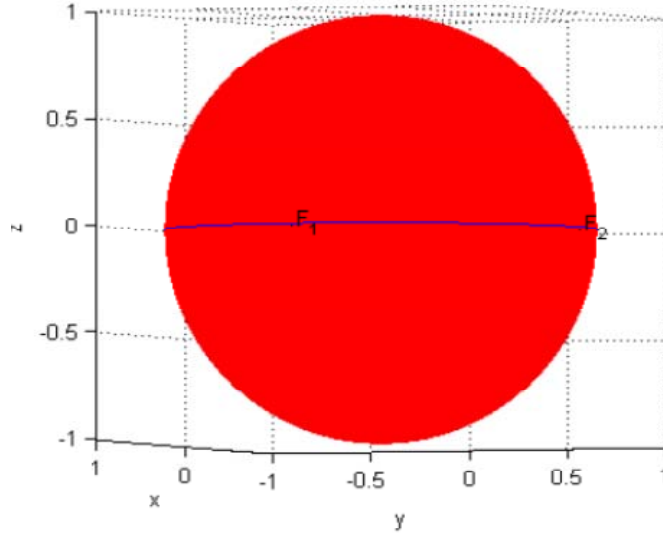
$$\left(\frac{\cos \alpha + \sin \alpha \cos 2c}{\sin^2 2c}\right)^2 + \left(\frac{-\sin \alpha - \cos \alpha \cos 2c}{\sin^2 2c}\right)^2 + \cos^2 \theta = 1$$

$$\left(\frac{\cos \alpha + \sin \alpha \cdot 0}{1}\right)^2 + \left(\frac{-\sin \alpha - \cos \alpha \cdot 0}{1}\right)^2 + \cos^2 \theta = 1$$

$$1 - \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \theta = 0$$

$$\vec{X} = (\cos \alpha, -\sin \alpha, 0)$$

olarak bulunur. Bunun bir çember denklemi olduğu açıktır.



Şekil 5.17 Küresel parabol

Örnek 5.3.2

Özel olarak $F_1 = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $F_2 = \left(0, \frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ alırsak $F_3 = (1, 0, 0)$ alabiliriz.

Dolayısıyla

$$\vec{X} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha \cos 2c}{\sin^2 2c} \vec{F}_1 + \frac{-\sin \alpha - \cos \alpha \cos 2c}{\sin^2 2c} \vec{F}_2 + \cos \theta \vec{F}_3$$

$$2c = \frac{\pi}{3}$$

olduğundan,

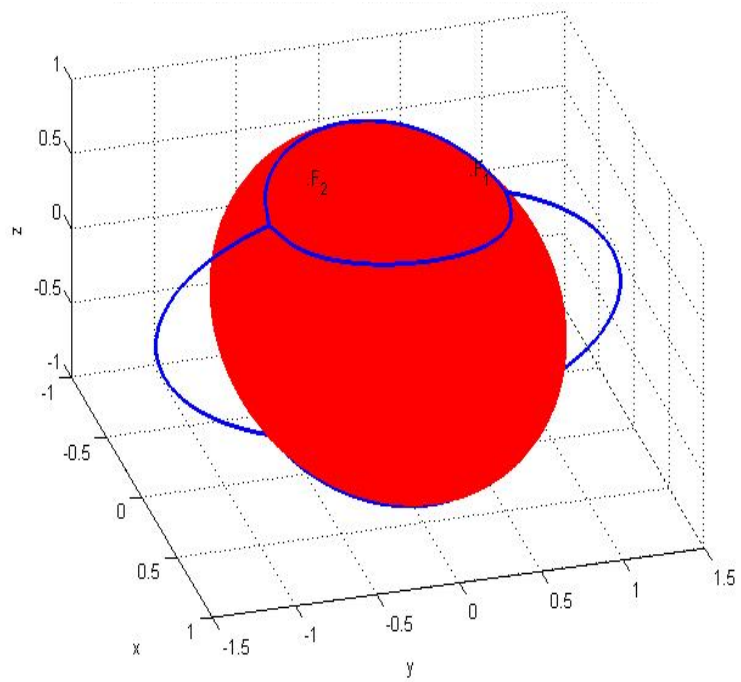
$$\vec{X} = \left(\cos \theta, (\cos \alpha + \sin \alpha), \frac{\sqrt{3}}{3} (\cos \alpha - \sin \alpha) \right)$$

$$\vec{X} = (x_1, x_2, x_3), \|\vec{X}\|^2 = 1$$

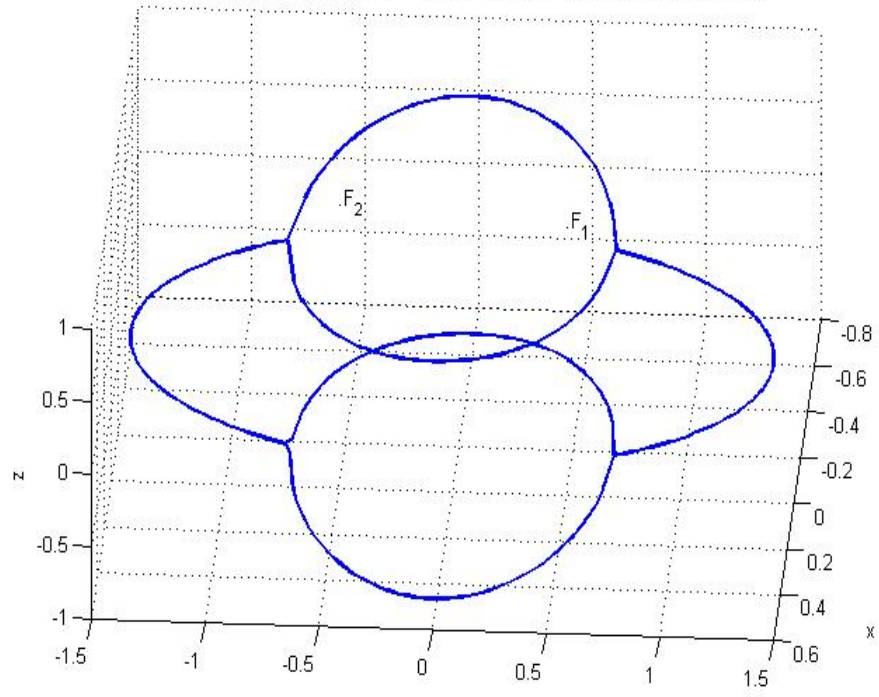
$$\vec{X} = \left(\pm \sqrt{\frac{1}{3} (1 + \sin 2\alpha)}, (\cos \alpha + \sin \alpha), \frac{\sqrt{3}}{3} (\cos \alpha - \sin \alpha) \right)$$

eşitliğini buluruz.

$\alpha \in [0, 2\pi)$ için

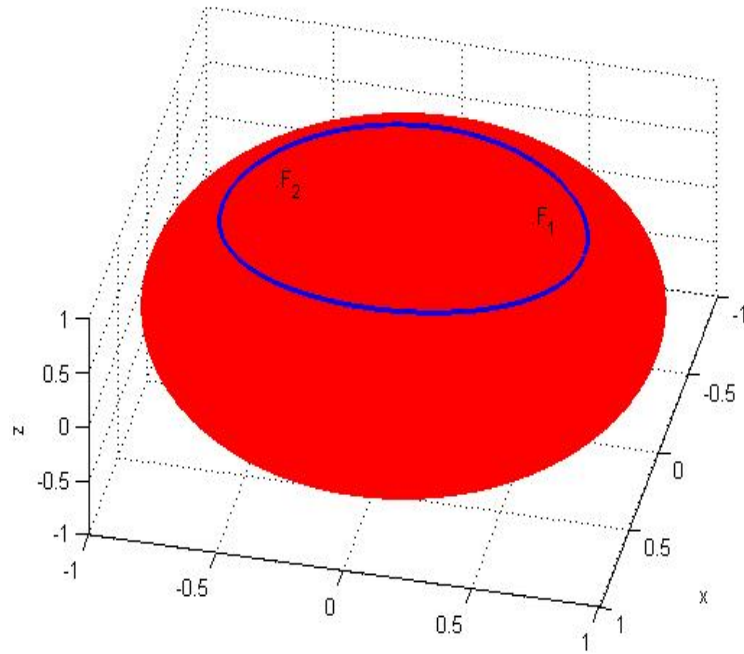


Şekil 5.18 Küresel parabol

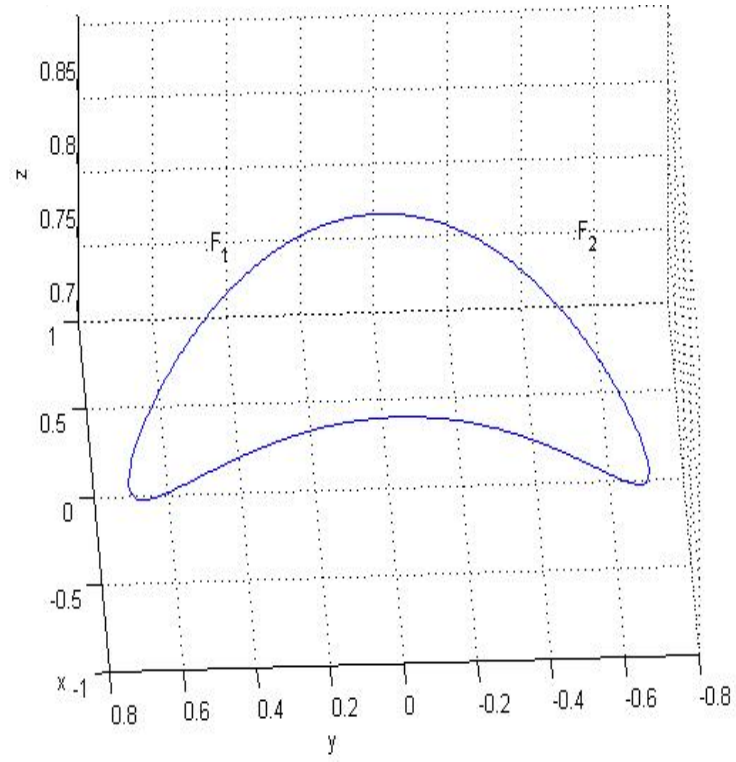


Şekil 5.19 Küresel parabol (Küre olmadan)

$\alpha \in \left[\frac{19}{24}, \frac{23\pi}{24}\right)$ için



Şekil 5.20 Küresel parabol



Şekil 5.21 Küresel parabol (Küre olmadan)

Teorem 5.3.1:

F_1 ve F_2 birim küre yüzeyinde iki nokta olsun. $\vec{F_2}$ vektörünü normal kabul eden büyük çember S' ve

$$d(F_1, F_2) = \frac{\pi}{2}$$

olacak şekilde

$$S = \{X \mid d(X, F_1) + \frac{\pi}{2} = d(X, F_2), X \in S^2\}$$

noktalarının kümesinden oluşan küresel parabol ise (5.6) denklemi çember belirtir

İspat:

$$\vec{X} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha \cos 2c}{\sin^2 2c} \vec{F}_1 + \frac{-\sin \alpha - \cos \alpha \cos 2c}{\sin^2 2c} \vec{F}_2 + \cos \theta \vec{F}_3$$

denkleminde $2c = \frac{\pi}{2}$ alırsak denklem,

$$\vec{X} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha 0}{1} \vec{F}_1 + \frac{-\sin \alpha - \cos \alpha 0}{1} \vec{F}_2 + \cos \theta \vec{F}_3$$

$$\vec{X} = \cos \alpha \vec{F}_1 - \sin \alpha \vec{F}_2 + \cos \theta \vec{F}_3$$

$\vec{X}$ ile $\vec{F}_3$ vektörlerinin iç çarpımı

$$\begin{aligned} \vec{X} \cdot \vec{F}_3 &= \left(\frac{\cos \alpha}{2 \sin^2 c} \vec{F}_1 - \frac{\cos \alpha}{2 \sin^2 c} \vec{F}_2 + \cos \theta \vec{F}_3 \right) \cdot \vec{F}_3 \\ &= 0 - 0 + \cos \theta = \cos \theta \end{aligned}$$

olur.

$\vec{F}_2$ vektörünü normal kabul eden büyük çember S' ve

$$d(F_1, F_2) = \frac{\pi}{2}$$

olduğundan, S' büyük çemberi $\vec{F}_1$ den geçer. Bu durumda $\theta = \frac{\pi}{2}$ dır.

$$\vec{X} \cdot \vec{F}_3 = \cos \theta = 0$$

olduğundan

$$S = \{X \mid d(X, F_1) + \frac{\pi}{2} = d(X, F_2), X \in S^2\}$$

noktalarının kümesi normali $\vec{F}_3$ olan büyük çemberdir

6. E.STUDY DÖNÜŞÜMÜ

6.1 E.Study Dönüşümünün Temel Kavramları

Tanım 6.1.1 (Dual Sayı)

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi olmak üzere

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

kümesi üzerinde toplama, çarpma ve eşitlik işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanmış ise $\mathbb{D}$ kümesine dual sayılar sistemi ve $\forall (a, a^*) \in \mathbb{D}$ elemanına da bir dual sayı denir.

i) Toplama:

$$\oplus : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

iç işlemi $A = (a, a^*)$ ve $B = (b, b^*)$ olmak üzere

$$A \oplus B = (a, a^*) \oplus (b, b^*) = (a + b, a^* + b^*)$$

şeklinde tanımlanır ve $\mathbb{D}$ deki toplama olarak adlandırılır.

ii) Çarpma:

$$\odot : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

iç işlemi $A = (a, a^*)$ ve $B = (b, b^*)$ olmak üzere

$$A \odot B = (a, a^*) \odot (b, b^*) = (ab, ab^* + a^*b)$$

şeklinde tanımlanır ve $\mathbb{D}$ deki çarpma olarak adlandırılır.

iii) Eşitlik:

$A = (a, a^*)$ ve $B = (b, b^*) \in \mathbb{D}$ için $a = b$ ve $a^* = b^*$ ise

A ile B eşittir denir ve $A = B$

ile gösterilir.

Teorem 6.1.1

$(\mathbb{D}, \oplus, \odot)$ üçlüsü birimli ve değişimli bir halkadır.

İspat:

H1)

$$\oplus : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

şeklinde tanımlandığından $\mathbb{D}$ kümesi toplama işlemine göre kapalıdır.

H2)

$$\oplus : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

işleminin birleşme özelliği vardır. Gerçekten $\forall A = (a, a^*), B = (b, b^*), C = (c, c^*) \in \mathbb{D}$ için

$$\begin{aligned} (A \oplus B) \oplus C &= ([a + b] + c, [a^* + b^*] + c^*) \\ &= (a + [b + c], a^* + [b^* + c^*]) \\ &= A \oplus (B \oplus C) \end{aligned}$$

H3) $0 = (0, 0) \in \mathbb{D}$ elmanı $\forall A = (a, a^*) \in \mathbb{D}$ için $A \oplus 0 = 0 \oplus A = A$ eşitliğini sağladığından $0, \oplus$ işlemi için etkisiz elemandır.

H4) $\forall A = (a, a^*) \in \mathbb{D}$ için $A^{-1} = (-a, -a^*)$ alırsak, $A \oplus A^{-1} = A^{-1} \oplus A = 0$ eşitliği sağlandığından $\forall A = (a, a^*) \in \mathbb{D}$ için bir $A^{-1} = (-a, -a^*)$ ters elemanı olduğu görülür.

H5) $\forall A = (a, a^*), B = (b, b^*) \in \mathbb{D}$ olduğu $\oplus$ işleminin tanımından açıktır.

Dolayısıyla $(\mathbb{D}, \oplus)$ bir abel grubudur.

H6)

$$\odot : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

şeklinde tanımlandığından $\mathbb{D}$ kümesi çarpma işlemine göre kapalıdır.

H7) $\forall A = (a, a^*), B = (b, b^*)$ ve $C = (c, c^*) \in \mathbb{D}$ için

$$\begin{aligned} (A \odot B) \odot C &= (ab, ab^* + a^*b) \odot (c, c^*) \\ &= ([ab]c, [ab]c^* + [ab^* + a^*b]c) \\ &= (a[bc], a[bc^* + b^*c] + a^*[bc]) \\ &= A \odot (B \odot C) \end{aligned}$$

olduğundan, $\odot$ işleminin birleşme özelliği vardır.

H8) $\forall A = (a, a^*), B = (b, b^*)$ ve $C = (c, c^*) \in \mathbb{D}$ için toplama, çarpma işlemlerinin tanımlarını yukarıdaki gibi uygularsak

$$(A \oplus B) \odot C = (A \odot C) \oplus (B \odot C)$$

ve

$$C \odot (A \oplus B) = (C \odot A) \oplus (C \odot B)$$

olduğundan, $\odot$ işleminin $\oplus$ işlemi üzerine dağılma özelliği vardır.

Dolayısıyla $(\mathbb{D}, \oplus, \odot)$ üçlüsü bir halkadır. Ayrıca

$$\text{H9)} \quad \forall A = (a, a^*), B = (b, b^*) \in \mathbb{D} \text{ için}$$

$$A \odot B = B \odot A$$

ve

$$\text{H10)} \quad \forall A = (a, a^*) \in \mathbb{D} \text{ için } E = (1, 0) \text{ dual sayısı}$$

$$A \odot E = E \odot A = A$$

olduğundan, $\odot$ işleminin değişme özelliği vardır.

Dolayısıyla $(\mathbb{D}, \oplus, \odot)$ üçlüsü değişimli ve birimli bir halkadır. Bu halkayı $\mathbb{D}$ ile göstereceğiz.

Teorem 6.1.2

$\mathbb{D}$ dual sayılar halkası, $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesine izomorf bir alt kümeyi alt cisim olarak kapsar.

İspat:

$$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonunu

$$f : (a, 0) \rightarrow a$$

olarak tanımlayalım. f bir izomorfizmdir.

i) f lineerdir: $A = (a, 0), B = (b, 0) \in \mathbb{D}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f(A \oplus B) &= f(a + b, 0) \\ &= a + b \\ &= f(A) + f(B) \end{aligned}$$

ayrıca

$$\begin{aligned} f(A \odot B) &= f(ab, 0) \\ &= ab \\ &= f(A) \cdot f(B) \end{aligned}$$

dır.

ii) f birebirdir: $A = (a, 0), B = (b, 0) \in \mathbb{D}$ olmak üzere

$$A \neq B \Rightarrow a \neq b \Rightarrow f(A) \neq f(B)$$

iii) f örtendir: $\forall a \in \mathbb{R}$ için bir tek $(a, 0)$ sayısı vardır.

Bu teoremin sonucu olarak $(a, 0)$ dual sayısı izomorfu olduğu a ile gösterilebilir. Yani

$$(a, 0) = a$$

yazılabilir.

Tanım 6.1.2.

$(0,1) = \varepsilon \in \mathbb{D}$ sayısına dual birim denir. $\varepsilon^2 = (0,0)$ olduğu açıktır.

Teorem 6.1.3

$A = (a, a^*) \in \mathbb{D}$ dual sayısı $A = a + \varepsilon a^*$ şeklinde yazılabilir.

İspat:

$\oplus$ işleminin tanımından

$$\begin{aligned} A &= (a, 0) \oplus (0, a^*) \\ &= (a, 0) \oplus (0, 1) \odot (0, a^*) \\ &= a + \varepsilon a^* \end{aligned}$$

dır.

Bu teoremin bir sonucu olarak $\mathbb{R}$ de tanımlanan “+” ve “.” işlemlerine ait kurallar $\mathbb{D}$ de de aynen kullanılabilir. Bundan sonra $\oplus$ ve $\odot$ yerine “+” ve “.” kullanacağız.

Teorem 6.1.4

$a, a^* \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} a & a^* \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

formundaki matrislerin kümesi $\mathbb{M}$ ise $\mathbb{M}$ ile $\mathbb{D}$ izomorftur.

İspat:

Teorem 6.1.2 ye benzer şekilde yapılabilir.

Tanım 6.1.3 (MODÜL)

Birimi 1 olan değişimli bir halka H olsun. H üzerinde bir modül diye bir S abel grubu ile aşağıdaki özelliklere sahip olan S üzerindeki bir

$$H \times S \rightarrow S$$

$$(a, \beta) \rightarrow a\beta$$

dış işlemine denir. $a, b \in H$ ve $\beta, \theta \in S$ olmak üzere

$$\text{i) } a(\beta + \theta) = a\beta + a\theta$$

$$\text{ii) } (a + b)\beta = a\beta + b\beta$$

$$\text{iii) } (ab)\beta = a(b\beta)$$

$$\text{iv) } 1. \beta = \beta.$$

Şimdi $\mathbb{D}^3$ ün $\mathbb{D}$ üzerinde bir modül olduğunu gösterelim $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{D}$ olmak üzere

$$\mathbb{D}^3 = \mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \mathbb{D}$$

biçiminde gösterilirse $A = (A_1, A_2, A_3) \in \mathbb{D}^3$ tür. Bu sayı $A = (A_i), i = 1, 2, 3$ biçiminde de yazılabilir. Bunun için aşağıdaki tanımlara ihtiyacımız olacak.

Tanım 6.1.4

$A = (A_i), B = (B_i) \in \mathbb{D}^3$ olmak üzere

$$A = B \Leftrightarrow A_i = B_i, i = 1, 2, 3$$

Tanım 6.1.5

$A = (A_i), B = (B_i) \in \mathbb{D}^3, i = 1, 2, 3$ olmak üzere,

$$+: \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \rightarrow \mathbb{D}^3$$

iç işlemi A ile B ye

$$A + B = (A_i + B_i)$$

üçlüsünü karşılık tutsun. $A + B$ ye $\mathbb{D}^3$ de A ile B nin toplamı denir.

Tanım 6.1.6

$\lambda \in \mathbb{D}$ ve $A = (A_i) \in \mathbb{D}^3, i = 1,2,3$ için ,

$$: \mathbb{D} \times \mathbb{D}^3 \rightarrow \mathbb{D}^3$$

dış işlemi

$$\lambda A = (\lambda A_i), i = 1,2,3$$

üçlüsünü karşılık tutsun. λA sayısına A nın λ skaları ile çarpımı denir.

Teorem 6.1.5.(D-MODÜL)

$\mathbb{D}^3$, yukarıda tanımlanan toplama ve çarpma işlemleri ile $\mathbb{D}$ üzerinde bir modüldür.

İspat:

G1)

$$+ : \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \rightarrow \mathbb{D}^3$$

şeklinde tanımlandığından $\mathbb{D}^3$ kümesi toplama işlemine göre kapalıdır.

G2)

$$+ : \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \rightarrow \mathbb{D}^3$$

işleminin birleşme özelliği vardır. Gerçekten $\forall A, B, C \in \mathbb{D}^3$ için toplama tanımı ve (H2) den

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$

olduğu görülür.

G3)

$$0 = (0,0,0) \in \mathbb{D}^3 \text{ elmanı } \forall A \in \mathbb{D}^3 \text{ için } A + 0 = 0 + A = A$$

eşitliğini sağladığından 0, + işlemi için etkisiz elemandır.

G4)

$$\forall A \in \mathbb{D}^3 \text{ için } A^{-1} = (-A_i), i = 1,2,3 \text{ alırsak , } A + A^{-1} = A^{-1} +$$

$A = 0$ eşitliği sağlandığından $\forall A \in \mathbb{D}^3$ için bir $A^{-1} \in \mathbb{D}^3$ ters elemanı olduğu görülür.

G5)

$$\forall A, B \in \mathbb{D}^3 \text{ olduğu } + \text{ işleminin tanımından açıktır.}$$

Dolayısıyla $(\mathbb{D}^3, +)$ bir abel grubudur.

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{D}$ ve $\forall A, B \in \mathbb{D}^3$ için

M1)

$$\alpha(A + B) = \alpha(A_1 + B_1, A_2 + B_2, A_3 + B_3)$$

$$\begin{aligned}
&= (\alpha (A_1 + B_1), \alpha (A_2 + B_2), \alpha (A_3 + B_3)) \\
&= (\alpha A_1, \alpha A_2, \alpha A_3) + (\alpha B_1, \alpha B_2, \alpha B_3) \\
&= \alpha A + \alpha B
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{M2)} \quad (\alpha + \beta) A &= (\alpha + \beta)(A_1, A_2, A_3) \\
&= ((\alpha + \beta) A_1, (\alpha + \beta) A_2, (\alpha + \beta) A_3) \\
&= \alpha (A_1, A_2, A_3) + \beta (A_1, A_2, A_3) \\
&= \alpha A + \beta A
\end{aligned}$$

$$\text{M3)} \quad (\alpha\beta) A = \alpha (\beta A)$$

olduğu tanım 1.1.5 den (M2) deki gibi görülür.

$$\begin{aligned}
\text{M4)} \quad (1,0) \in \mathbb{D} \text{ elemanını } \mathbb{R} \text{ deki izomorf } 1 \text{ için} \\
1 A = A
\end{aligned}$$

dır.

Dual sayılar halkası üzerinde tanımlanan bu modül $\mathbb{D}$ -Modül biçiminde adlandırılır.

Tanım 6.1.7

$\mathbb{D}$ -Modül'ün elemanları olan sıralı üçlülere dual vektörler denir. Yukarıdaki tanımlardan faydalanılarak aşağıdaki üç teorem kolayca ispatlanabilir.

Teorem 6.1.6

$\vec{a}, \vec{a}^* \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere $\mathbb{D}$ -Modül'de her bir $\vec{A}$ dual vektörü

$$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 6.1.7

$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* = (\vec{a}, \vec{a}^*)$ dual vektörünün $\lambda \in \mathbb{D}$ skaları ile çarpımı

$$\lambda \vec{A} = (\lambda \vec{a}, \lambda \vec{a}^*)$$

dır.

Teorem 6.1.8

$\vec{A} = (\vec{a}, \vec{a}^*)$ ve $\vec{B} = (\vec{b}, \vec{b}^*) \in \mathbb{D}\text{-Modül}$ için

$$\vec{A} = \vec{B} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b} \text{ ve } \vec{a}^* = \vec{b}^*$$

Tanım 6.1.8

$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$, $\vec{B} = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^* \in \mathbb{D}\text{-Modül}$ dual vektörlerinin iç çarpımı

$$f: \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \rightarrow \mathbb{D}$$

şeklinde bir dönüşümdür ve

$$f(\vec{A}, \vec{B}) = \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*, \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^* \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \varepsilon [\langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle]$$

olarak tanımlanır.

Tanım 6.1.9

Bir $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ dual vektörünün normu diye

$$\|\vec{A}\| = (\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle)^{\frac{1}{2}} = \left(\|\vec{a}\|, \varepsilon \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|} \right), \vec{a} \neq 0$$

dual sayısına denir.

Tanım 6.1.10

Normu reel birime karşılık gelen (1,0) dual sayısı olan dual vektöre birim dual vektör denir. Yani $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ birim dual vektör ise

$$\|\vec{a}\| = 1 \text{ ve } \langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle = 0$$

dır.

Tanım 6.1.11

$$\{\vec{X} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^* \mid \|\vec{X}\| = (1,0); \vec{x}, \vec{x}^* \in \mathbb{R}^3\}$$

kümesine $\mathbb{D}$ –Modül de birim dual küre denir.

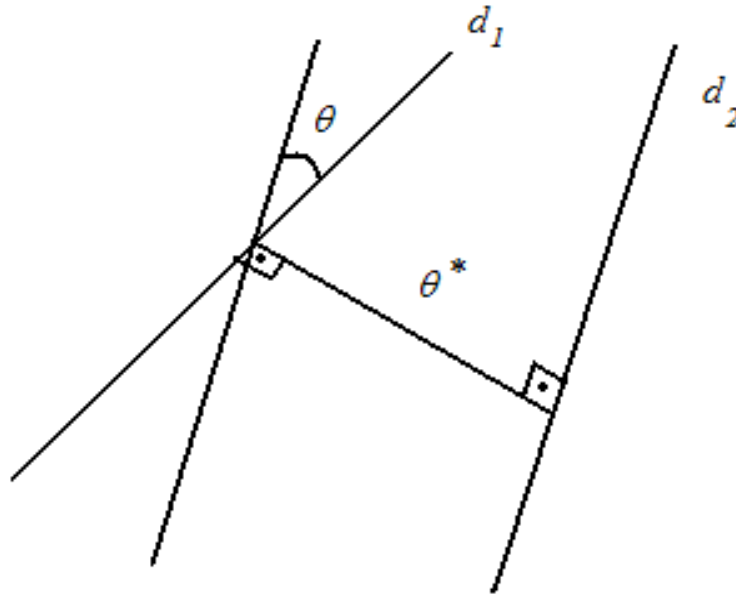
Teorem 6.1.9(E.Study dönüşümü)

$\vec{A} \neq (\vec{0}, \vec{a}) \in \mathbb{D}$ -Modül olmak üzere $\mathbb{D}$ –Modül de denklemi

$$\|\vec{A}\| = (1,0)$$

olan birim dual kürenin dual noktaları, $\mathbb{R}^3$ deki yönlü doğrulara birebir karşılık gelir.

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ iki birim dual vektör olsunlar. Yukarıdaki teoremden de anlaşılacağı üzere $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerine $\mathbb{R}^3$ de iki yönlü doğru karşılık gelir. Bu doğrular d_1 ve d_2 olsunlar.



Şekil 6.1 Dual açı

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \varepsilon [\langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle]$$

dersek, iç çarpımının reel kısmı olan

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

olur, dual kısmı olan

$$[\langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle] = -\theta^* \sin \theta$$

ifadesine eşittir. Burada θ^* iki doğru arasında ki en kısa uzaklıktır. Dolayısıyla

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \cos \theta - \theta^* \sin \theta$$

bulunur. Eğer dual açığı

$$\alpha = \theta + \varepsilon \theta^*$$

biçiminde alırsak Taylor serisinden

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= 1 - \frac{1}{2!} \alpha^2 + \frac{1}{4!} \alpha^4 - \dots \\ &= \frac{1}{2!} \theta^2 + \frac{1}{4!} \theta^4 - \dots - \varepsilon \theta^* \left(\theta - \frac{1}{3!} \theta^3 + \frac{1}{5!} \theta^5 - \dots \right) \\ &= \cos \theta - \theta^* \sin \theta \end{aligned} \tag{6.1}$$

olur. Dolayısıyla

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \cos \alpha = \cos(\theta + \varepsilon \theta^*) = \cos \theta - \theta^* \sin \theta$$

olur. Benzer olarak aşağıdaki bağıntı da bulunabilir.

$$\sin \alpha = \sin(\theta + \varepsilon \theta^*) = \sin \theta + \theta^* \cos \theta \tag{6.2}$$

A ve B noktalarını birim dual küre üzerinde alırsak, $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \cos \theta - \theta^* \sin \theta$ eşitliğinin 4 önemli sonucu vardır.

- i) $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ ve $\theta^* = 0$ olur. Bu durumda $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ doğruları dik olarak kesişirler.

- ii) $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \text{saf dual} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ ve $\theta^* \neq 0$ olur. Bu durumda $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ doğruları dik durumlu aykırı doğrulardır.
- iii) $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \text{saf reel} \Rightarrow \theta \neq \frac{\pi}{2}$ ve $\theta^* = 0$ olur. Bu durumda $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ doğruları kesişirler.
- iv) $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \mp 1 \Rightarrow \theta = 0$ ve $\theta^* = 0$ olur. Bu durumda $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ doğruları çakışıktır.

K, O ve $\{O; \vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3\}$ birim dual küreyi gösterebiliriz. Bu durumda

$$\vec{E}_i = \vec{e}_i + \varepsilon \vec{e}_i^* \quad ; 1 \leq i \leq 3.$$

olur.

$\{1,2,3\}$ kümesinin tüm permutasyonlarını S_3 ile gösterelim. Bu durumda

$$\begin{cases} \vec{E}_{\sigma(1)} = \text{sgn}(\sigma) \vec{E}_{\sigma(2)} \times \vec{E}_{\sigma(3)} & , \text{sgn}(\sigma) = \pm 1 \\ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) \end{pmatrix} \end{cases}$$

Burada $\times$ ile dış çarpım gösterilmektedir. Dolayısıyla

$$\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$$

ortonormal sistemi $\mathbb{R}^3$ çizgiler uzayının çatısıdır. Yani $\vec{e}_i^*$ moment vektörleri de $\mathbb{R}^3$ 'ün elemanları olduklarından,

$$\vec{e}_i^* = \vec{MO} \times \vec{e}_i \quad , 1 \leq i \leq 3$$

biçiminde yazılabilirler. Biz bu vektörleri

$$\vec{e}_i^* = \sum_{j=1}^3 \lambda_{ij} \vec{e}_j \quad , \quad \lambda_{ij} \in \mathbb{R} \quad , \quad 1 \leq i \leq 3$$

şeklinde yazabiliriz.

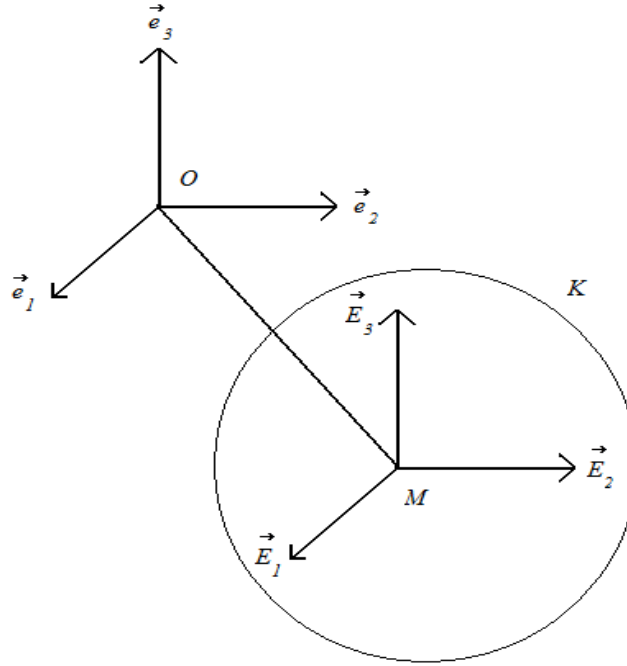
Şekil 6.2' den anlaşılabilirliği gibi

$$\lambda_{ij} = 0 \quad , \quad \lambda_{ij} = -\lambda_{ji} \quad , \quad 1 \leq i \leq 3$$

olur. Yani $\lambda_{ij} = \lambda_i$ yazabiliriz. Bu eşitliği matris çarpımı biçiminde yazarsak

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_1^* \\ \vec{e}_2^* \\ \vec{e}_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 & -\lambda_3 \\ -\lambda_1 & 0 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & -\lambda_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix}$$

ifadesini elde ederiz.



Şekil 6.2 Dual Çatı

Study dönüşümü $K \rightarrow \mathbb{R}^3$ 'e bir dönüşüm olduğundan bu dönüşümü ortogonal bir matris kullanarak yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \\ \vec{E}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon\lambda_1 & -\varepsilon\lambda_3 \\ -\varepsilon\lambda_1 & 1 & \varepsilon\lambda_2 \\ \varepsilon\lambda_3 & -\varepsilon\lambda_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

Teorem 6.1.10

E.Study dönüşümü bir lineer izomorfizmdir.

Teorem 6.1.11

$\mathbb{R}^3$ deki Öklid hareketleri dual ortogonal matrislere birebir karşılık gelir.

Birim dual küre K üzerinde diferensiyellenebilir

$$t \in \mathbb{R} \rightarrow \vec{X}(t) \in K$$

eğrisi $\mathbb{R}^3$ de diferensiyellenebilir yönlü doğruların ailesidir. Bu aileye regle yüzey denir.

7. KÜRESEL KONİKLERİN E.STUDY DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölümde küresel koniklerin E.Study dönüşümlerini bazı özel durumlarda inceleyeceğiz. Bunun için (6.3) deki eşitliği; $\vec{g}$, $\vec{E}_3$ üzerinde bir doğru olacak şekilde seçip M noktasını $\vec{g}$ üzerinde alırsak,

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

olacağından (6.3) eşitliği

$$\begin{bmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \\ \vec{E}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon\lambda_1 & 0 \\ -\varepsilon\lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix}$$

haline gelir. Bu ifadenin ters dönüşümü

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon\lambda_1 & 0 \\ \varepsilon\lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \\ \vec{E}_3 \end{bmatrix}$$

olur. Küresel koniklerin E.Study dönüşümlerini bulurken yukarıdaki eşitliği kullanacağız.

Durum 1:

Örnek 5.1.2 den

$$F_1 = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), F_2 = \left(0, \frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

alırsak

$$F_3 = (1,0,0)$$

Dolayısıyla

$$\vec{X} = \frac{\cos \alpha - \cos(2a - \alpha) \cos 2c}{\sin^2 2c} \vec{F}_1 + \frac{\cos(2a - \alpha) - \cos \alpha \cos 2c}{\sin^2 2c} \vec{F}_2 + \cos \theta \vec{F}_3$$

$$2c = \frac{\pi}{3}$$

$\Rightarrow$

$$\vec{X} = \left(\cos \theta, \cos \alpha - \cos(2a - \alpha), \frac{\sqrt{3}}{3} (\cos \alpha + \cos(2a - \alpha)) \right)$$

parametrik denklemi olduğunu biliyoruz.

$$2a = \pi$$

alırsak denklem

$$\vec{X} = (\cos \theta, 2\cos \alpha, 0)$$

$$\vec{X} = (x_1, x_2, x_3), \|\vec{X}\|^2 = 1$$

olduğu için

$$x_1 = \pm \sqrt{1 - 4\cos^2 \alpha}$$

$$x_2 = 2\cos \alpha$$

$$x_3 = 0$$

buluruz.

Teorem 5.1.1 den

$$S = \{X \mid d(X, F_1) + d(X, F_2) = \pi, X \in S^2\}$$

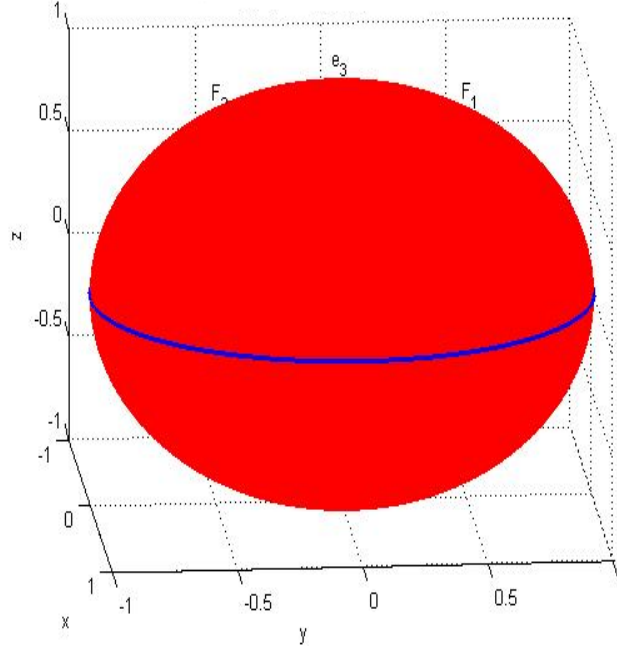
kümesi, normali $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ vektörü olan bir çember belirtir.

$$\langle \vec{X}, \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \rangle = \langle \vec{X}, \vec{e}_3 \rangle = 0$$

olduğundan

$$S = \{X \mid d(X, F_1) + d(X, F_2) = \pi, X \in S^2\}$$

kümesi, normalı $\vec{e}_3$ olan büyük çemberdir.



Şekil 7.1 Küresel elips

Durum 2:

Küresel hiperbol için (5.4) denklemini kullanalım.

$$F_1 = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), F_2 = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

alırsak

$$F_3 = (1, 0, 0)$$

olur. Dolayısıyla

$$\vec{X} = \frac{\cos \alpha - \cos(\alpha - 2a) \cos 2c}{\sin^2 2c} \vec{F}_1 + \frac{\cos(\alpha - 2a) - \cos \alpha \cos 2c}{\sin^2 2c} \vec{F}_2 + \cos \theta \vec{F}_3$$

için

$$2c = \frac{\pi}{3}$$

olduğundan

$$\vec{X} = \left(\cos \theta, \frac{\sqrt{3}}{3} (\cos \alpha + \cos(\alpha - 2a)), \frac{1}{2} (\cos \alpha - \cos(\alpha - 2a)) \right)$$

parametrik denklemini buluruz.

$$2a = 0$$

alırsak deklemler,

$$\vec{X} = \left(\cos \theta, \frac{2\sqrt{3}}{3} \cos \alpha, 0 \right)$$

$$\vec{X} = (x_1, x_2, x_3), \|\vec{X}\|^2 = 1$$

olduğu için

$$x_1 = \pm \sqrt{1 - \frac{4}{3} \cos^2 \alpha}$$

$$x_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cos \alpha$$

$$x_3 = 0$$

buluruz.

Teorem 5.2.1 den

$$S = \{X \mid |d(X, F_1) - d(X, F_2)| = 0, X \in S^2\}$$

kümesi, normali $\vec{F}_1 - \vec{F}_2$ vektörü olan bir büyük çember belirtir.

$$\langle \vec{X}, \vec{F}_1 - \vec{F}_2 \rangle = \langle \vec{X}, \vec{e}_3 \rangle = 0$$

$$S = \{X \mid d(X, F_1) + d(X, F_2) = \pi, X \in S^2\}$$

kümesi, normali $\vec{e}_3$ olan büyük çemberdir.

Durum 3:

Küresel hiperbol için (5.5) denklemini kullanalım.

$$F_1 = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), F_2 = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

alırsak

$$F_3 = (1, 0, 0)$$

olur. Dolayısıyla

$$\vec{X} = \frac{\cos \alpha - \cos(\alpha + 2a) \cos 2c}{\sin^2 2c} \vec{F}_1 + \frac{\cos(\alpha + 2a) - \cos \alpha \cos 2c}{\sin^2 2c} \vec{F}_2 + \cos \theta \vec{F}_3$$

için

$$2c = \frac{\pi}{3}$$

olduğundan

$$\vec{X} = \left(\cos \theta, \frac{\sqrt{3}}{3} (\cos \alpha + \cos(\alpha + 2a)), \frac{1}{2} (\cos \alpha - \cos(\alpha + 2a)) \right)$$

parametrik denklemini buluruz.

$$2a = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{X} = \left(\cos \theta, \frac{2\sqrt{3}}{3} \cos \alpha, 0 \right)$$

$$\vec{X} = (x_1, x_2, x_3), \|\vec{X}\|^2 = 1$$

olduğu için

$$x_1 = \pm \sqrt{1 - \frac{4}{3} \cos^2 \alpha}$$

$$x_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cos \alpha$$

$$x_3 = 0$$

buluruz. Teorem 5.2.2 den

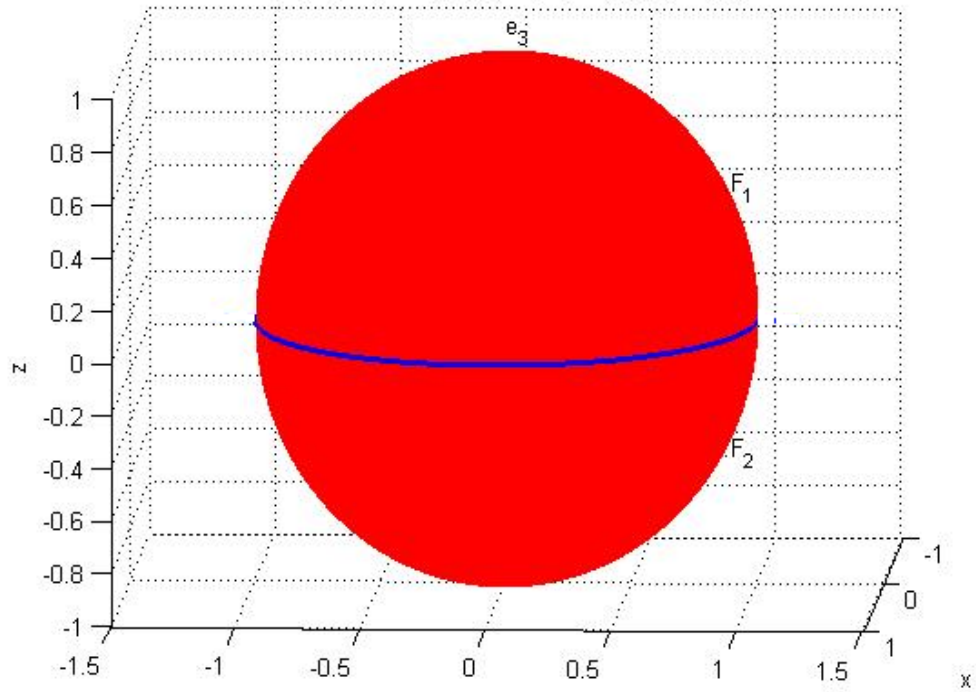
$$S = \{X \mid |d(X, F_1) - d(X, F_2)| = 0, X \in S^2\}$$

kümesi, normal $\vec{F}_1 - \vec{F}_2$ vektörü olan bir büyük çember belirtir.

$$\langle \vec{X}, \vec{F}_1 - \vec{F}_2 \rangle = \langle \vec{X}, \vec{e}_3 \rangle = 0$$

$$S = \{X \mid d(X, F_1) - d(X, F_2) = \pi, X \in S^2\}$$

kümesi, normal $\vec{e}_3$ olan büyük çemberdir.



Şekil 7.2 Küresel hiperbol

Durum 4:

Örnek 5.3.1 de

$$F_1 = (1,0,0), F_2 = (0,1,0)$$

alırsak,

$$F_3 = (0,0,1)$$

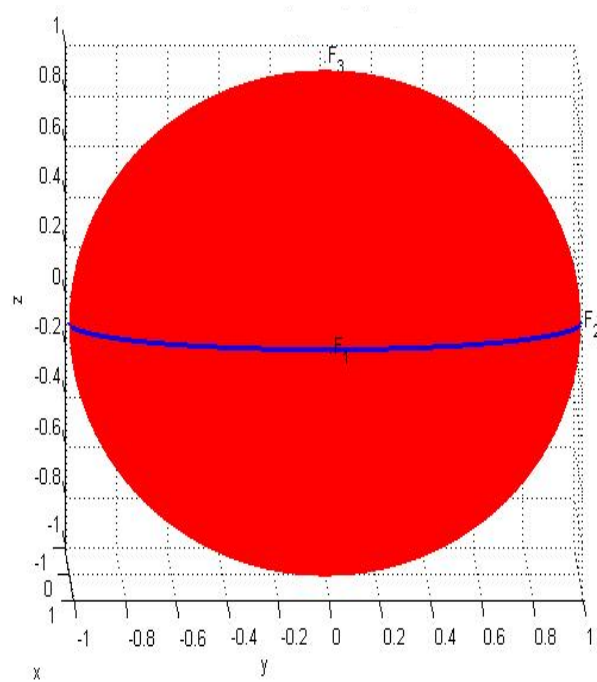
$$2c = \frac{\pi}{2}$$

olduğunu gördük.

Teorem 5.3.1 den

$$S = \{X \mid d(X, F_1) + \frac{\pi}{2} = d(X, F_2), X \in S^2\}$$

noktalarının kümesi $\overrightarrow{F_3}$ vektörünü normal kabul eden büyük çemberdir



Şekil 7.3 Küresel parabol

Bu örnekte

$$F_1 = e_1, F_2 = e_2 \text{ ve } F_3 = e_3$$

olduğundan bu çemberi $\langle \vec{X}, \vec{e}_3 \rangle = 0$ biçiminde ifade edebiliriz.

Sonuç 7.1:

Durum 1, Durum 2, Durum 3 ve Durum 4 de gördüğümüz gibi küresel elips, hiperbol ve küresel parabol denklemleri

$$\langle \vec{X}, \vec{e}_3 \rangle = 0$$

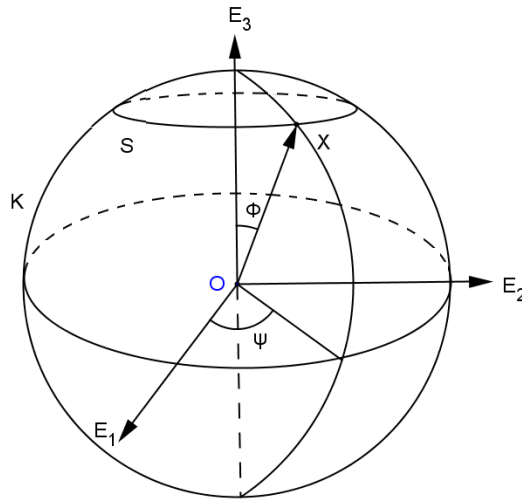
büyük çemberi çıkabiliyor. Bu çemberin E. Study dönüşümünü bulursak,

$$S = \{ \vec{X} | \langle \vec{X}, \vec{E}_3 \rangle = \cos \Phi \text{ (sabit)}, \vec{X} \in K \}$$

birim dual küre K üzerinde bir çemberdir. $\vec{X}$ dual vektörünü $\Phi = \frac{\pi}{2} + \varepsilon\varphi^*$ ve $\Psi = \psi + \varepsilon\psi^*$ olarak alırsak

$$\vec{X} = \sin \Phi \cos \Psi \vec{E}_1 + \sin \Phi \sin \Psi \vec{E}_2 + \cos \Phi \vec{E}_3 \quad (7.1)$$

biçiminde ifade edebiliriz.



Şekil 7.4 Dual çember

$\vec{X}$ bir dual vektör olduğu için

$$\vec{X} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^*$$

olduğunu biliyoruz. (6.1) ve (6.2) den

$$\sin \Phi = 1 \quad , \quad \sin \Psi = \sin \psi + \varepsilon \psi^* \cos \psi$$

$$\cos \Phi = -\varepsilon \varphi^* \quad , \quad \cos \Psi = \cos \psi - \varepsilon \psi^* \sin \psi$$

(7.1) de bu eşitlikleri kullanırsak $\vec{x}$ ve $\vec{x}^*$ aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\vec{x} = [\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3] \begin{bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

ve

$$\vec{x}^* = [\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3] \begin{bmatrix} -(\psi^* + \lambda_1) \sin \psi \\ -(\psi^* + \lambda_1) \cos \psi \\ -\varphi^* \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

Diğer taraftan

$$\langle \vec{X}, \vec{E}_3 \rangle = \cos \Phi = -\varepsilon \varphi^*$$

olduğundan

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ ve } \varphi^* = c$$

olur. (7.2) ve (7.3) dan aşağıdaki eşitlikleri buluruz.

$$\begin{cases} \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 1 \\ \langle \vec{x}, \vec{x}^* \rangle = 0 \\ \langle \vec{x}, \vec{e}_3 \rangle = 0 \\ \langle \vec{x}, \vec{e}_3^* \rangle + \langle \vec{x}^*, \vec{e}_3 \rangle + \varphi^* = 0 \end{cases}$$

Bu eşitlikler yalnızca ψ ve ψ^* parametrelerine bağlıdır, dolayısıyla $\mathbb{R}^3$ de doğru kongrüansı belirtir. Şimdi bu kongrüansın Plücker koordinatlarındaki karşılığını bulalım. $\vec{y}$ bu kongrüansın bir noktası olmak üzere

$$\vec{y} = \vec{x} \times \vec{x}^* + v\vec{x} \quad , v \in \mathbb{R}$$

biçimindedir. $\vec{y}$ noktasının koordinatları (y_1, y_2, y_3) olmak üzere

$$\begin{cases} y_1 = -\varphi^* \sin \psi + v \cos \psi \\ y_2 = \varphi^* \cos \psi + v \sin \psi \\ y_3 = (\psi^* + \lambda_1) \end{cases}$$

olarak bulunur.

$$\begin{cases} y_1^2 + y_2^2 = c^2 + v^2 \\ y_3 = \psi^* + \lambda_1 \end{cases} \quad (7.4)$$

denklemini elde edilir. Görüldüğü gibi bu denklem ψ^* ve λ_1 parametrelerine bağlı 2. dereceden bir doğru kongrüansı belirtir. Bu kongrüansın doğruları aşağıdaki özellikleri sağlarlar.

1. Bu doğrular ve g doğrusu arasındaki en kısa uzaklık $\varphi^* = c$ dir.
2. Bu doğrular ve g doğrusu arasındaki açı her zaman $\varphi = \frac{\pi}{2}$ dir.

Tanım 7.1

Bir doğru kongrüansının bütün doğruları ile belirli doğru arasındaki açı sabitse bu kongrüansa, eğim kongrüansı denir.

Bu tanıma göre, (7.4) bir eğim kongrüansı belirtir.

Teorem 7.1

S birim dual küre K üzerinde iki parametrelili bir çember olsun. Bu çemberin Study dönüşümü ikinci dereceden bir doğru kongrüansıdır.

Teoremin ispatı için (Hacısalıhoğlu 1975) bakınız.

Dolayısıyla şunu söyleyebiliriz. (7.4) kongrüansının doğruları yarıçapı φ^* ve ana doğrusu g olan silindirin yüzeyini $\frac{\pi}{2}$ açısı altında keserler.

$\boldsymbol{\varphi}^* = \mathbf{0}$ alırsak

(7.4) denklemi

$$\begin{cases} y_1^2 + y_2^2 = v^2 \\ y_3 = \lambda_1 \end{cases}$$

halini alır.

Dolayısıyla eğim kongrüansı lineer doğru demeti olur.

KAYNAKLAR

Hacısalıhoğlu, H.H. 1983. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi, Gazi Üni. Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları.

Hacısalıhoğlu, H.H. 2000. Lineer cebir I, Hacısalıhoğlu Yayınları.

Hacısalıhoğlu, H.H. 2000. Lineer cebir II, Hacısalıhoğlu Yayınları.

Hacısalıhoğlu, H.H. 1975. Study map of a circle, J.Fac. Sci. of K.T.Ü. Vol. 1/6 pp.53-58

Maeda, Y. 2005. Spherical conic and the fourth parameter, KMITL Sci. J. Vol. 5/1.

Ryan, P.J. 1983. Euclidean and non-euclidean geometry, Cambridge University Press.

Süer, B. 1993. Küresel geometri, Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları

Xiong, J. 2004. Geometry and singularities of spatial and spherical curves, Doktora tezi,

Hawai.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Bülent ALTUNKAYA

Doğum Yeri: ANKARA

Doğum Tarihi: 30 / 09/ 1974

Medeni Hali: Evli

Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Aydın Lisesi/1992

Lisans : Hacettepe Üniversitesi/1997

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi/2007

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Mucur Lisesi 1997-2000

Prof. Dr. İ. K. Fen Lisesi 2000-...

Yayınları (SCI ve diğer)

- 1) Equations of the spherical conics, The Electronic Journal of Mathematics and Technology, Volume 5, Number 3, ISSN 1933-2823