ÇANKIRI KARATEKİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BULANIK YAKLAŞIMLI KÜMELER

Sabah M. Youns Mohammed ALSHKHLR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇANKIRI
2024

TEZ ONAYI

Sabah M. Youns Mohammed ALSHKHLR tarafından hazırlanan **"Bulanık Yaklaşımlı Kümeler"** adlı tez çalışması 29/08/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Faruk KARAASLAN

Jüri Üyeleri :

Başkan : Prof. Dr. Faruk POLAT
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Üye : Prof. Dr. İrfan DELİ
Matematik Anabilim Dalı
Kilis 7 Aralık Üniversitesi

Üye : Prof. Dr. Faruk KARAASLAN
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ersoy YILMAZ

Enstitü Müdürü

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum "**Bulanık Yaklaşımlı Kümeler**" konulu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, tezin Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nden başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve bu çalışmanın Çankırı Karatekin Üniversitesi tarafından kullanılan "Bilimsel İntihal Tespit Programıyla tarandığını, "intihal içermediğini" beyan ederim. Çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması halinde ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm. Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim (29/08/2024).

Sabah M. Youns Mohammed ALSHKHLR

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BULANIK YAKLAŞIMLI KÜMELER

Sabah M. Youns Mohammed ALSHKHLR

Çankırı Karatekin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Faruk KARAASLAN

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezin giriş kısmıdır. Bu kısımda yapılan çalışmanın önemi ve bir literatür incelemesi sunulmuştur. İkinci bölümde bulanık kümeler, bulanık küme işlemleri ve yaklaşımlı kümeler hakkında ön bilgiler sunulmuştur. Üçüncü bölümde yaklaşımlı kümelerin bilgi sistemleri ile ilişkisi sunularak çıkarım yapma ve özellik indirgeme yöntemi üzerinde durulmuştur. Dördüncü bölümde bulanık yaklaşımlı küme kavramı ve bu kavramlara dayanılarak ortaya atılan genel formlar ve ilişkileri ele alınmıştır. Beşinci bölümde ise tezin sonuçları genel hatlarıyla sunulmuştur.

2024, 59 sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Bulanık küme, Yaklaşımlı küme, Bulanık yaklaşımlı küme, Alt yaklaşım, Üst yaklaşım, Küme işlemleri.

ABSTRACT

Master of Science Thesis

FUZZY ROUGH SETS

Sabah M. Youns Mohammed ALSHKHLR

Çankırı Karatekin University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Faruk KARAASLAN

This thesis consists of five chapters. The first chapter is the introduction to the thesis. The importance of the study and a literature review are presented in this chapter. The second chapter presents preliminary information about fuzzy sets, fuzzy set operations and rough sets. The third chapter presents the relationship between rough sets and information systems, and focuses on inference and feature reduction methods. The fourth chapter discusses the concept of fuzzy rough sets and the general forms and relationships based on these concepts. The fifth chapter presents the results of the thesis in general terms.

2024, 59 pages

Keywords: Fuzzy set, Rough set, Fuzzy rough set, Lower approximation, Upper approximation, Set operations

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Tez danışmanım Prof. Dr. Faruk KARAASLAN'a sabrı, rehberliği ve anlayışı için teşekkür ederim.

Sabah M. Youns Mohammed ALSHKHLR
Çankırı, Ağustos 2024

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathcal{R}$	Bağıntı
I	Başlangıç evreni
$Çek(B)$	B’nin çekirdeği
$I(B)$	B öznitelik kümesine göre U kümesi üzerinde ikili ilişki
$Ind(B)$	B’nin tüm indirgemelerinin kümesi
$Çek^{x}(B)$	B’nin $x \in U$ ya göre karar çekirdeği
$Ind^{x}(B)$	B’nin x için tüm indirgemelerinin ailesi
$\bar{\mathcal{F}}$	Bulanık küme
$\gamma(C,D)$	C durumları ve D karar kümesine göre tutarlılık faktörü
$POS_{C}(D)$	C durumlar kümesine göre D karar kümesinin üst yaklaşımı
$Çek_{D}(C)$	C’nin D −çekirdeği
$Ind_{D}(C)$	C’nin D −indirgemelerinin ailesi
$\mu_{\bar{\mathcal{F}}}$	$\bar{\mathcal{F}}$ bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu
$\mathcal{I}$	İçerme
$co_{\mathcal{N}}$	$\mathcal{N}$ değillemesine göre tümleyen
$\mu_{\bar{\mathcal{F}}}(x)$	x elemanının üyelik değeri
$\mathcal{R}_{*}(\mathcal{X})$	$\mathcal{X}$ kümesinin alt yaklaşımı
$\mathcal{R}^{*}(\mathcal{X})$	$\mathcal{X}$ kümesinin üst yaklaşımı
$\mathcal{RN}(\mathcal{X})$	$\mathcal{X}$ kümesinin sınır bölgesi
$-\mathcal{X}$	$\mathcal{X}$ kümesinin tümleyeni
$\mathfrak{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathcal{N}_{S}$	Standart değilleme dönüşümü
$\mathcal{T}$	t-norm
$\mathcal{S}$	t-conorm
U/D	U’nun D’ ye göre denklik sınıfları

KISALTMALAR DİZİNİ

$Çek$	Çekirdek
inf	İnfimum
mak	Maksimum
min	Minimum
sup	Supremum
t-norm	Üçgensel norm

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Küme kavramı matematikte önemli bir yere sahiptir. Kümeler matematiksel işlemlerin yapıldığı ve yapılan işlemlerin sonuçlarının elde edildiği evrenlerdir. Klasik küme teorisinde "iyi tanımlanmış nesneler topluluğu" sezgisel olarak tanımı verilen küme kavramındaki "iyi tanımlanmış" ifadesi açık önermelere dayanmaktadır. Klasik küme yapısı ile yapılan kümele işlemleri klasik önermelere dayanmaktadır. Yani bir nesne bir kümeye ya aittir ya da değildir. Bir nesnenin evrensel kümenin bir altkümesine ait olup olmadığı evrensel kümeden {0,1} kümesine giden ve karakteristik fonksiyon diye isimlendirilen bir fonksiyonla belirlenir. Klasik küme yapısı matematikte kullanışlı bir araç olmasına rağmen günlük hayatta her zaman bir nesne bir kümeye tam olarak ait olmayabilir. Ayrıca klasik küme yaklaşımı bazı problemlerde kaba bir sınıflama sunar. Örneğin boyu 180 cm olan bir kişiyi uzun boylular sınıfına koyarken boyu 179 cm olanı kısa boylular sınıfına koymak hassas bir sınıflama vermez. Çünkü bunu yaptığımızda boyu 180 cm olanla 210 cm olanı aynı sınıfa, boyu 179 cm ve boyu 150 olanı da aynı sınıfa koymuş oluruz. Oysa boyu 180 cm olan uzun kişiler sınıfı içerisinde az uzun iken 210 cm olan çok uzun olmalıdır. İşte bu gibi durumlarda daha hassas bir sınıflama yapabilmek için 1965 yılında Zadeh (1965) tarafından bulanık küme kavramı ortaya atılmıştır. Bir bulanık küme üyelik fonksiyonu denen başlangıç evreninden [0,1] aralığına giden bir dönüşümle tanımlanır. Bulanık kümede, klasik kümelerdeki karakteristik fonksiyonun yerini daha genel olan üyelik fonksiyonu almaktadır.

Yaklaşımlı küme teorisi, bilgi sistemlerindeki belirsizlik ve ayrıntılılık ile başa çıkmak için Pawlak (1982) tarafından ortaya atılmıştır. Bu teori, bir evrenin keyfi bir alt kümesinin, alt ve üst yaklaşımlar adı verilen iki tanımlanabilir veya gözlemlenebilir alt küme ile yaklaşık olarak hesaplanmasıyla ilgilenir. Makine öğrenimi, akıllı sistemler, tümevarımsal akıl yürütme, desen tanıma, mereoloji, görüntü işleme, sinyal analizi, bilgi keşfi, karar analizi, uzman sistemler ve diğer birçok alana başarıyla uygulanmıştır (Pawlak 1991, Pawlak and Skowron 2007a, 2007b, 2007c). Pawlak'ın kaba küme modelinin eşdeğerlik ilişkilerine (denklik bağıntılarına) dayandığı bilinmektedir. Ancak gerçek dünyada eşdeğerlik ilişkisi birçok pratik uygulama için çok kısıtlayıcıdır. Bu sorunu ele almak için literatürde Pawlak'ın kaba kümelerinin birçok ilginç ve anlamlı bir uzantısı sunulmuştur. Denklik ilişkileri, tolerans ilişkileri (Skowron and Stepaniuk 1996), benzerlik ilişkileri (Slowinski and Vanderpooten 2000), baskınlık ilişkileri (Greco *et al.* 2002), genel ikili ilişkiler (Liu and Zhu 2008, Yao and Lin 1996, Yao 1998, Zhu 2007, Zhu 2009), söylem evreninin örtüleri (Chen *et al.* 2007, Li *et al.* 2008, Xu and Zhang 2007, Zhu 2009) veya komşuluk sistemleri (Wu and Zhang 2002, Xu and Zhang 2007) ile değiştirilebilir. Tüm bu yaklaşımların ortak özelliği, kavramların parçalanış açısından yaklaşık değerleriyle ilgilenmeleridir. Aslında, farklı tipteki genelleştirilmiş kaba kümeler, granüllerin farklı yorumlarına dayanır. Pawlak'ın kaba küme modelinde, her eşdeğerlik sınıfı, ayırt edilemez elemanlardan oluşan bir parçacık olarak görülebilir. Bir eşdeğerlik ilişkisi tarafından oluşturulan parçalanış yapısı, evrenin bir altkümesidir. Eşdeğerlik ilişkilerinin gerekliliğini zayıflatarak, genel ikili ilişkilere veya evrenin örtülerine dayalı daha genel parçacık yapıları elde edilebilir.

Bulanık yaklaşımlı küme teorisi üzerine ilk araştırmalar 1990'larda ve 2000'lerin başında başlamıştır. Dubois ve Prade (1990) bir bulanık küme için bir bulanık bağıntı altında alt ve üst yaklaşım kavramlarını tanımladı ve bulanık yaklaşımlı küme ve yaklaşımlı bulanık küme olmak üzere iki yapıyı literatüre kazandırdı. Kuncheva (1992) bulanık yaklaşımlı kümeleri kullanarak özellik seçimi üzerine çalışmalar yaptı. Lin (1992) bulanık yaklaşımlı kümelerle topolojik yapılar arasındaki ilişkileri incelemiştir. Nanda ve Majumdar (1992) bulanık yaklaşımlı kümeler üzerine çalışmıştır. Yao (1997) yaklaşımlı küme ve bulanık küme modellerinin birleşiminde yer alan bazı temel konuları incelemiştir ve yaklaşımlı bulanık küme ve bulanık-yaklaşımlı küme modellerini, klasik kümeler açısından yapılarına vurgu yaparak analiz etmiştir. Morsi ve Yakout (1998) özel durum $T = Min$ için verilen bulanık T-yaklaşımlı küme $(X, R)'$ nin üst yaklaşım operatörü $A: I^x \to I^x$ için Farinas ve Praden'in (1986) tanımını, keyfi T durumuna genelleştirmiştir. (X, R)' nin alt yaklaşım operatörü $A: I^x \to I^x$ için yeni bir tanım ortaya atmıştır. Thiele (1998) klasik erişilebilirlik bağıntısı yerine alarak kesit noktasını tanımlamaya ve kullanmaya gerek kalmaksızın bir bulanık bağıntıyı kullanmıştır ve böylece verilen bir kümenin alt ve üst yaklaşımlarının bulanık küme olduğunu göstermiştir. Nakamura (1999) yaklaşımlı kümeleri, yaklaşım yerine, yaklaşımsal üyelik fonksiyonu kullanılarak da tanımlanabileceğini göstermiştir. Radsikowska ve Kerre (2002), literatürde iyi bilinen üç ana sınıfa kıyasla üç bulanık yaklaşımlı küme sınıfı tanımlayarak bunların özelliklerini temel yaklaşımlı eşitlikler bağlamında analiz etmiştir. Wu ve Zhang (2002) hem yapıcı hem de aksiyomatik yaklaşımların kullanıldığı bulanık yaklaşımlı kümelerin incelenmesi için genel bir çerçeve sunmuştur.

Geleneksel yaklaşımlı küme teorisi, kümelerin alt ve üst yaklaşımlarını hesaplamak için denklik bağıntısını kullanır. Bir denklik bağıntısına göre denklik sınıfları ya çakışık ya da ayrıktır. Bu ilişki bulanık bir T-denklik bağıntısında geçerli değildir. Ancak, bulanık yaklaşımlı küme teorisi üzerine mevcut çalışmaların hiçbiri, bir elemanın aynı anda birkaç "yumuşak benzerlik sınıfına" bir dereceye kadar ait olabileceği gerçeğinden yararlanmaz. De Cock Vd. (2007) bu gerçeğe dayanarak bulanıklık özelliğini hesaba katarak alt ve üst yaklaşımların yeni ve ilginç tanımlarını sunmuşlardır. Bu ilginç tanımların ikisini ayrıntılı olarak incelemişler ve bunların yaygın olarak kullanılan tanımlardan hangi koşullar altında farklı olduğunu araştırmışlardır.

Bu tezde bulanık kümeler, bulanık küme işlemlerini, yaklaşımlı kümelerin temel tanımlarının literatürdeki çalışmalar ışığında sunulmaktadır. Yaklaşımlı kümelerin bilgi sistemlerindeki temsillerini ve çıkarım yapmadaki uygulamalarından bazılarını detaylı olarak açıklanmıştır. Son olarak De Cock Vd. (2007) makalesini detaylı olarak incelenmektedir. Bu çalışma derleme bir çalışma olup yaklaşımlı kümeler ve bulanık yaklaşımlı kümeler ile ilgili temel bilgileri literatürdeki kaynaklardan yararlanarak sunmayı amaçlamaktadır.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde Zadeh (1965) tarafından ortaya atılan bulanık küme kavramı ve bulanık kümeler arasındaki işlemler tanıtılacaktır.

2.1 Bulanık Kümeler

Tanım 2.1 (Zadeh 1965) $I \neq \emptyset$ olmak üzere, I kümesi üzerinde tanımlanan ve $\bar{\mathcal{F}}$ ile gösterilen bir bulanık küme aşağıdaki gibi ifade edilen ikililerin oluşturduğu bir kümedir:

$$\bar{\mathcal{F}} = \{(x, \mu_{\bar{\mathcal{F}}}(x)) |\ x \in I\ , \mu_{\bar{\mathcal{F}}}(x) \in [0,1]\ \}$$

Burada $\mu_{\bar{\mathcal{F}}}$, I kümesinden $[0,1]$ kapalı aralığına tanımlanan bir fonksiyondur. Bu fonksiyona $\bar{\mathcal{F}}$ bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu denir. Üyelik fonksiyonu altında bir elemanın görüntüsü $\mu_{\bar{\mathcal{F}}}(x)$, x elemanın istenilen özelliği hangi ölçüde sağladığını ifade eder. $\mu_{\bar{\mathcal{F}}}(x) \in [0,1]$ değerine $x \in X$ elemanının üyelik derecesi denir.

Eğer $\mu_{\bar{\mathcal{F}}}(x) = 0$ olması x elemanının I kümesine ait olmadığını, $\mu_{\bar{\mathcal{F}}}(x) = 1$olması ise x elemanın $\bar{\mathcal{F}}$ bulanık kümesine tam olarak ait olduğunu gösterir. I kümesi başlangıç evreni diye isimlendirilir. Yani bir elemanın $\bar{\mathcal{F}}$ bulanık kümesine aitliği $\mu_{\bar{\mathcal{F}}}$ üyelik fonksiyonu altında değerlendirilen elemanların kümesini ifade etmektedir.

Bulanık kümeler başlangıç evrenindeki elemanların ayrık ya da sürekli olmasına göre farklı gösterimlere sahiptir.

Eğer I başlangıç evrenindeki elemanlar ayrık ise $\bar{\mathcal{F}}$ bulanık kümesi

$$\sum_{x \in I} \mu_{\bar{\mathcal{F}}}\,(x)/x$$

Eğer I başlangıç evreni sürekli ise $\bar{\mathcal{F}}$ bulanık kümesi

$$\bar{\mathcal{F}} = \int_I \mu_{\bar{\mathcal{F}}}(x)/x$$

ile gösterilir.

Buradaki integral işareti ve bölüm işlemi yalnızca gösterim için kullanılmaktadır.

2.2 Bulanık Küme İşlemleri

Bulanık kümeler üzerinde tanımlanan işlemler kapsama, kesişim, birleşim, tümleme olmak üzere dört tanedir (Ünal 2009).

$\bar{\mathcal{F}}$ ve $\bar{\mathcal{G}}$ aynı I başlangıç evreni üzerinde üyelik fonksiyonları sırasıyla $\mu_{\bar{\mathcal{F}}}$ ve $\mu_{\bar{\mathcal{G}}}$ olan iki bulanık küme olsun.

- **Bulanık Kümelerin Eşitliği:** Her $x \in I$ için $\mu_{\bar{\mathcal{F}}}(x) = \mu_{\bar{\mathcal{G}}}(x)$ ise, $\bar{\mathcal{F}}$ ve $\bar{\mathcal{G}}$ bulanık kümelerine eşittir denir.

- **Kapsama:** Her $x \in I$ için $\mu_{\bar{\mathcal{F}}}(x) \leq \mu_{\bar{\mathcal{G}}}(x)$ ise, $\bar{\mathcal{F}}$ bulanık kümesine $\bar{\mathcal{G}}$ bulanık kümesinin bulanık altkümesi denir veya $\bar{\mathcal{G}}$ bulanık kümesi $\bar{\mathcal{F}}$ bulanık kümesini kapsar denir.

- **Birleşim İşlemi:** $\bar{\mathcal{F}}$ ve $\bar{\mathcal{G}}$ bulanık kümelerinin $\bar{\mathcal{F}} \dot{\cup} \bar{\mathcal{G}}$ ile gösterilen birleşim işlemi, ikililerin kümesi olarak aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\bar{\mathcal{F}} \dot{\cup} \bar{\mathcal{G}} = \{\left(x, \mu_{\bar{\mathcal{F}} \dot{\cup} \bar{\mathcal{G}}}(x)\right) : \forall x \in I\}$$

Burada, $\mu_{\bar{\mathcal{F}} \dot{\cup} \bar{\mathcal{G}}}(x) = \boldsymbol{M}\{\mu_{\bar{\mathcal{F}}}(x), \mu_{\bar{\mathcal{G}}}(x)\}$ dir. “$\boldsymbol{M}$" maksimum işlemini göstermektedir.

- **Kesişim İşlemi:** $\bar{\mathcal{F}}$ ve $\bar{\mathcal{G}}$ bulanık kümelerinin $\bar{\mathcal{F}} \dot{\cap} \bar{\mathcal{G}}$ ile gösterilen kesişim işlemi, ikililerin kümesi olarak aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\bar{\mathcal{F}} \dot{\cap} \bar{\mathcal{G}} = \{\left(x, \mu_{\bar{\mathcal{F}} \dot{\cap} \bar{\mathcal{G}}}(x)\right) : \forall x \in I\}$$

Burada, $\mu_{\bar{\mathcal{F}} \dot{\cap} \bar{\mathcal{G}}}(x) = \boldsymbol{m}\{\mu_{\bar{\mathcal{F}}}(x), \mu_{\bar{\mathcal{G}}}(x)\}$ dir. "$\boldsymbol{m}$" minimum işlemini göstermektedir.

Örnek 2.2 $I = \{x, y, z, t\}$ evreni üzerinde iki bulanık küme aşağıdaki gibi verilsin.

$$\bar{\mathcal{F}} = \{(x, 0.5), (y, 0.6), (z, 0.2), (t, 0.4)\}$$

ve

$$\bar{\mathcal{G}} = \{(x, 0.4), (y, 0.7), (z, 0.3), (t, 0.2)\}$$

O halde,

$$\overline{\mathcal{F}} \dot{\cup} \bar{\mathcal{G}} = \{(x, 0.5), (y, 0.7), (z, 0.3), (t, 0.4)\}$$

ve

$$\bar{\mathcal{F}} \dot{\cap} \bar{\mathcal{G}} = \{(x, 0.4), (y, 0.6), (z, 0.2), (t, 0.2)\}$$

2.3 Yaklaşımlı Kümeler

Bulanık kümeler klasik kümelerin bir genellemesi olarak Zadeh (1965) tarafından ortaya atılmıştır. Fakat yaklaşımlı kümeler klasik küme teorisine bir alternatif olarak değil, ancak içine klasik kümelerin içine gömülebilir bir yapıdır. Yaklaşımlı küme teorisi, Frege'nin (1983) belirsizlik fikrinin spesifik bir uygulaması olarak görülebilir, yani bu yaklaşımdaki belirsizlik, bulanık küme teorisinde olduğu gibi kısmi bir üyelikle değil, bir kümenin sınır bölgesi ile ifade edilir. Yaklaşımlı küme kavramı topolojideki iç ve kapanış tanımları ile de ifade edilebilir.

Tanım 2.3 (Pawlak 1982) $\mathcal{U}$ evresel küme ve $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ ayırt edilemezlik bağıntısı diye addlandırılan bir denklik bağıntısı olsun. Ayrıca $\mathcal{X}$, $\mathcal{U}$'nun bir alt kümesi olsun. O halde $\mathcal{X}$ kümesini $\mathcal{R}$ bağıntısına göre bazı karakterizasyonları aşağıdaki gibidir.

- $\mathcal{X}$ kümesinin $\mathcal{R}$ bağıntısına göre alt yaklaşımı $\mathcal{R}$ denklik bağıntısına göre $\mathcal{X}$ in alt kümesi olan denklik sınıflarını ifade eder.
- $\mathcal{X}$ kümesinin $\mathcal{R}$ bağıntısına göre üst yaklaşımı $\mathcal{R}$ denklik bağıntısına göre $\mathcal{X}$ tarafında içerilen ve içerilmesi muhtemel elemanların kümesini ifade eder.
- $\mathcal{R}$ bağıntısına göre ne $\mathcal{X}$'te ne de $\mathcal{X}$'te olmayan elemanların kümesine $\mathcal{X}$'in $\mathcal{R}$ bağıntısına göre sınır bölgesi denir.

Bir yaklaşımlı küme yukarıdaki tanımlara dayanılarak aşağıdaki gibi tanımlanır.

Bir $\mathcal{X}$ kümesinin $\mathcal{R}$ bağıntısına göre sınır bölgesi boş küme ise bu $\mathcal{X}$ kümesi net kümedir denir. Şayet $\mathcal{X}$ kümesinin $\mathcal{R}$ bağıntısına göre sınır bölgesi boş küme değilse, o halde $\mathcal{X}$ kümesine yaklaşımlı küme denir.

$\mathcal{X}$ kümesinin alt, üst ve sınır bölgeleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$x \in \mathcal{X}$ elemanının $\mathcal{R}$ denklik bağıntısına göre denklik sınıfı $\mathcal{R}(x)$ ile gösterilsin. O halde:

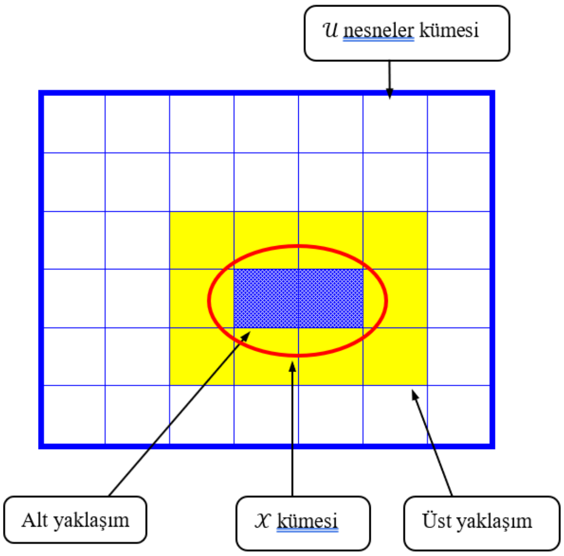
$(\boldsymbol{i})$ $\mathcal{X}$'in alt yaklaşımı: $\mathcal{R}_*(\mathcal{X}) = \bigcup_{x \in U} \{\mathcal{R}(x) : \mathcal{R}(x) \subseteq \mathcal{X}\}$

$(\boldsymbol{ii})$ $\mathcal{X}$'in üst yaklaşımı: $\mathcal{R}^*(\mathcal{X}) = \bigcup_{x \in U} \{\mathcal{R}(x) : \mathcal{R}(x) \cap \mathcal{X} \neq \emptyset\}$

$(\boldsymbol{iii})$ $\mathcal{X}$'in sınır bölgesi: $\mathcal{RN}_{\mathcal{R}}(\mathcal{X}) = \mathcal{R}^*(\mathcal{X}) \setminus \mathcal{R}_*(\mathcal{X})$

(Pawlak 1982)

Bir yaklaşımlı küme ile ilgili olarak yukarıda bahsedilen alt yaklaşım, üst yaklaşım ve sınır bölgesi Şekil 2.1 de gösterilmiştir.



Şekil 2.1 Yaklaşımlı küme ile ilgili temel tanımların gösterimi (Pawlak 1982)

Örnek 2.4 $\mathcal{U} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ kümesi üzerinde tanımlanan $\mathcal{R}$ denklik bağıntısı aşağıdaki gibi verilsin

$$\mathcal{R} = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (f,f), (g,g), (b,f), (f,b), (c,g), (g,c), (a,e), (e,a)\}$$

Burada $\mathcal{R}(a) = \{a, e\}$, $\mathcal{R}(b) = \{b, f\}$, $\mathcal{R}(c) = \{c, g\}$, $\mathcal{R}(d) = \{d\}$, $\mathcal{R}(e) = \{a, e\}$, $\mathcal{R}(f) = \{f, b\}$ $\mathcal{U}$kümesinin elemanlarının $\mathcal{R}$ denklik bağıntısına göre denklik sınıflarıdır. $\mathcal{X} = \{a, e, f, d\}$ kümesinin alt yaklaşımını üst yaklaşımını ve sınır bölgesini bulalım.

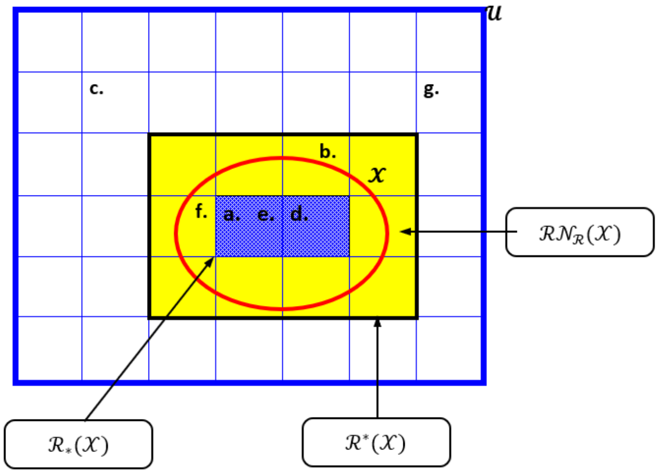
$\mathcal{R}(a) \subseteq \mathcal{X}$, $\mathcal{R}(d) \subseteq \mathcal{X}$ olduğundan $\mathcal{R}_*(\mathcal{X}) = \mathcal{R}(a) \cup \mathcal{R}(d) = \{a, e, d\}$

$\mathcal{R}(a) \cap \mathcal{X} \neq \emptyset$, $\mathcal{R}(b) \cap \mathcal{X} \neq \emptyset$, $\mathcal{R}(d) \cap \mathcal{X} \neq \emptyset$, $\mathcal{R}(e) \cap \mathcal{X} \neq \emptyset$, and $\mathcal{R}(f) \cap \mathcal{X} \neq \emptyset$ olduğundan

$$\mathcal{R}^*(\mathcal{X}) = \mathcal{R}(a) \cup \mathcal{R}(b) \cup \mathcal{R}(d) \cup \mathcal{R}(e) \cup \mathcal{R}(f) = \{a, b, e, f, d\}$$

$\mathcal{RN}_{\mathcal{R}}(\mathcal{X}) = \mathcal{R}^*(\mathcal{X}) - \mathcal{R}_*(\mathcal{X}) = \{b, f\}$ dir.

Burada $\mathcal{RN}_{\mathcal{R}}(\mathcal{X}) \neq \emptyset$ olduğundan $\mathcal{X}$ kümesi $\mathcal{R}$ bağıntısı altında bir yaklaşımlı kümedir. Yukarıda elde ettiğimiz yaklaşım kümelerini ve sınır bölgesini Şekil 2.2 deki gibi gösterilir.



Şekil 2.2 $\mathcal{X}$ kümesinin yaklaşımları ve sınır bölgesi

Önerme 2.5 (Pawlak 1982) $\mathcal{U}$ evrensel küme $\mathcal{R}$, $\mathcal{U}$ üzerinde bir denklik bağıntısı ve $\mathcal{X}$ ve $\mathcal{Y}$, $\mathcal{U}$ 'nun iki altkümesi olsun. O halde

1) $\mathcal{R}_*(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X} \subseteq \mathcal{R}^*(\mathcal{X})$

2) $\mathcal{R}_*(\emptyset) = \mathcal{R}^*(\emptyset) = \emptyset$; $\mathcal{R}_*(\mathcal{U}) = \mathcal{R}^*(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$,

3) $\mathcal{R}^*(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}) = \mathcal{R}^*(\mathcal{X}) \cup \mathcal{R}^*(\mathcal{Y})$

4) $\mathcal{R}_*(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) = \mathcal{R}_*(\mathcal{X}) \cap \mathcal{R}_*(\mathcal{Y})$

5) $\mathcal{R}_*(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}) \supseteq \mathcal{R}_*(\mathcal{X}) \cap \mathcal{R}_*(\mathcal{Y})$

6) $\mathcal{R}^*(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) = \mathcal{R}^*(\mathcal{X}) \cap \mathcal{R}^*(\mathcal{Y})$

7) $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ ise $\mathcal{R}_*(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{R}_*(\mathcal{Y})$ ve $\mathcal{R}^*(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{R}^*(\mathcal{Y})$

8) $\mathcal{R}_*(-\mathcal{X}) = -\mathcal{R}^*(\mathcal{X})$

9) $\mathcal{R}^*(-\mathcal{X}) = -\mathcal{R}_*(\mathcal{X})$

10) $\mathcal{R}_*\big(\mathcal{R}_*(\mathcal{X})\big) = \mathcal{R}^*\big(\mathcal{R}_*(\mathcal{X})\big) = \mathcal{R}_*(\mathcal{X})$

11) $\mathcal{R}^*(\mathcal{R}^*(\mathcal{X})) = \mathcal{R}_*\big(\mathcal{R}^*(\mathcal{X})\big) = \mathcal{R}^*(\mathcal{X})$

Yukarıdaki önermede verilen durumları Örnek 2.4 için inceleyelim.

1) $\mathcal{R}_*(\mathcal{X}) = \{a, e, d\} \subseteq \{a, e, f, d\} = \mathcal{X} \subseteq \{a, b, d, e, f\} = \mathcal{R}^*(\mathcal{X})$

2) Tanımdan açıktır.

3) $\mathcal{X} = \{a, e, f, d\}$ ve $\mathcal{Y} = \{c, d\}$ olsun. $\mathcal{X}$ kümesinin alt ve üst yaklaşımlarını Örnek 2.3 te bulunmuştu. Şimdi $\mathcal{Y}$ kümesinin alt ve üst ve yaklaşımlarını bulalım.

$\mathcal{R}_*(\mathcal{Y}) = \{d\}$ ve $\mathcal{R}^*(\mathcal{Y}) = \{c, d, g\}$ olduğu kolayca görülür.

$$\mathcal{X} \cup \mathcal{Y} = \{a, c, d, e, f\}$$

$\mathcal{R}^*(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ ve $\mathcal{R}^*(\mathcal{X}) \cup \mathcal{R}^*(\mathcal{Y}) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. O halde $\mathcal{R}^*(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}) = \mathcal{R}^*(\mathcal{X}) \cup \mathcal{R}^*(\mathcal{Y})$.

4) Burada $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \{d\}$ dir. O halde $\mathcal{R}_*(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) = \{d\}$ ve $\mathcal{R}_*(\mathcal{X}) \cap \mathcal{R}_*(\mathcal{Y}) = \{a, e, d\} \cap \{d\} = \{d\}$ dir. Buradan $\mathcal{R}_*(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) = \mathcal{R}_*(\mathcal{X}) \cap \mathcal{R}_*(\mathcal{Y})$ olduğu görülür.

5) $\mathcal{R}_*(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}) = \{a, e, d\}$ ve $\mathcal{R}_*(\mathcal{X}) \cup \mathcal{R}_*(\mathcal{Y}) = \{a, e, d\} \cup \{d\} = \{a, e, d\}$.

6) $\mathcal{R}^*(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) = \{d\}$ ve $\mathcal{R}^*(\mathcal{X}) \cap \mathcal{R}^*(\mathcal{Y}) = \{a, b, d, e, f\} \cap \{c, g, d\} = \{d\}$.

7) Örnek 2.3 teki $\mathcal{U}$ kümesini, $\mathcal{R}$ bağıntısını ve $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ olacak şekildeki $\mathcal{X} = \{a, e, f\}$ ve $\mathcal{Y} = \{a, e, f, g, d\}$ kümelerini göz önüne alalım. Burada

$\mathcal{R}_*(\mathcal{X}) = \{a, e\}$, $\mathcal{R}^*(\mathcal{X}) = \{a, e, b, f\}$ ve $\mathcal{R}_*(\mathcal{Y}) = \{a, e, d\}$, $\mathcal{R}^*(\mathcal{Y}) = \mathcal{Y}$ dir.

O halde $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ olduğunda $\mathcal{R}_*(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{R}_*(\mathcal{Y})$ ve $\mathcal{R}^*(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{R}^*(\mathcal{Y})$ dir.

8) Örnek 2.3 te $\mathcal{X} = \{a, e, f, d\}$ olduğundan $-\mathcal{X} = \{b, c, g\}$ dir. O halde $\mathcal{R}_*(-\mathcal{X}) = \{c, g\}$ ve $-\mathcal{R}^*(\mathcal{X}) = \{c, g\}$ dir . Burada $\mathcal{R}_*(-\mathcal{X}) = -\mathcal{R}^*(\mathcal{X})$ olduğunu görürüz.

9) $\mathcal{R}^*(-\mathcal{X}) = \mathcal{R}^*(\{b, c, g\}) = \{b, c, f, g\}$ ve $-\mathcal{R}_*(\mathcal{X}) = -\{a, e, d\} = \{b, c, f, g\}$ dir. Buradan $\mathcal{R}^*(-\mathcal{X}) \subseteq -\mathcal{R}_*(\mathcal{X})$ olduğunu görürüz.

10) Burada $\mathcal{R}_*(\mathcal{R}_*(\mathcal{X})) = \mathcal{R}_*(\{a, d, e\}) = \{a, d, e\} = \mathcal{R}_*(\mathcal{X})$ ve $\mathcal{R}^*(\mathcal{R}_*(\mathcal{X})) = \mathcal{R}^*(\{a, d, e\}) = \{a, d, e\}$=$\mathcal{R}_*(\mathcal{X})$ dir.

Yaklaşımların aslında verilerin oluşturduğu bir topolojide iç ve kapanış işlemleri olduğu kolayca görülebilir. Bu nedenle bulanık küme ve yaklaşımlı küme tamamen farklı matematiksel yapılar olduğu söylenebilir.

Yaklaşımlı kümeler, yaklaşım yerine, yaklaşımsal üyelik fonksiyonu kullanılarak da tanımlanabilir (Nakamura 1999).

Bulanık üyelik işlevi aşağıdaki gibi tanımlanır.

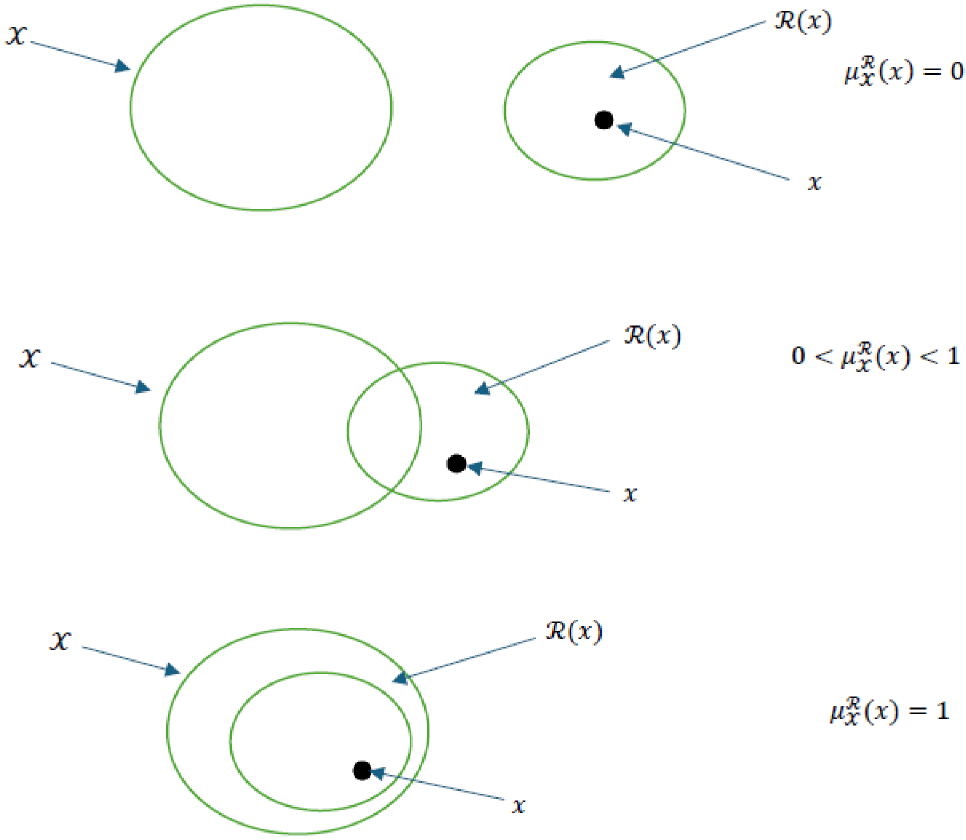
Tanım 2.6 (Pawlak 1994) $\mathcal{U}$ evrensel küme $\mathcal{R}$, $\mathcal{U}$ üzerinde bir bağıntı ve $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{U}$ olsun. $\mu_{\mathcal{X}}^{\mathcal{R}}: \mathcal{U} \to [0,1]$ dönüşümüne yaklaşımsal üyelik fonksiyonu denir. Burada "| |" sembolü, içine yazılan kümenin kardinalitesini göstermek üzere yaklaşımsal üyelik fonksiyonu

$$\mu_{\mathcal{X}}^{\mathcal{R}}(x) = \frac{|\mathcal{X} \cap \mathcal{R}(x)|}{|\mathcal{R}(x)|}$$

ile tanımlanır.

Yaklaşımsal üyelik fonksiyonu bir $x \in \mathcal{X}$ için bu elemanın $\mathcal{R}$ bağıntısı altında $\mathcal{X}$ kümesine ait olma ihtimalini gösterir.

Yaklaşımsal üyelik fonksiyonları Şekil 2.3' deki gibi temsil edilebilir.



Şekil 2.3 Yaklaşımsal fonksiyonlar

Örnek 2.7. Örnek 2.4 teki $\mathcal{X} = \{a, e, d, f\}$ ve $\mathcal{R}$ bağıntısını göz önüne alalım. O halde $\mathcal{U}$ kümesinin elemalarının yaklaşımsal üyelik değerleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\mu_{\mathcal{X}}^{\mathcal{R}}(a) = \frac{|\mathcal{X} \cap \mathcal{R}(a)|}{|\mathcal{R}(a)|} = \frac{|\{a, e, d, f\} \cap \{a, e\}|}{|\{a, e\}|} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\mu_{\mathcal{X}}^{\mathcal{R}}(b) = \frac{|\mathcal{X} \cap \mathcal{R}(b)|}{|\mathcal{R}(b)|} = \frac{|\{a, e, d, f\} \cap \{b, f\}|}{|\{b, f\}|} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\mu_{\mathcal{X}}^{\mathcal{R}}(c) = \frac{|\mathcal{X} \cap \mathcal{R}(c)|}{|\mathcal{R}(c)|} = \frac{|\{a, e, d, f\} \cap \{c, g\}|}{|\{c, g\}|} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\mu_{\mathcal{X}}^{\mathcal{R}}(d) = \frac{|\mathcal{X} \cap \mathcal{R}(d)|}{|\mathcal{R}(d)|} = \frac{|\{a, e, d, f\} \cap \{d\}|}{|\{d\}|} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\mu_{\mathcal{X}}^{\mathcal{R}}(e) = \frac{|\mathcal{X} \cap \mathcal{R}(e)|}{|\mathcal{R}(e)|} = \frac{|\{a, e, d, f\} \cap \{a, e\}|}{|\{a, e\}|} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\mu_{\mathcal{X}}^{\mathcal{R}}(f) = \frac{|\mathcal{X} \cap \mathcal{R}(f)|}{|\mathcal{R}(f)|} = \frac{|\{a, e, d, f\} \cap \{d, f\}|}{|\{d, f\}|} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\mu_{\mathcal{X}}^{\mathcal{R}}(g) = \frac{|\mathcal{X} \cap \mathcal{R}(g)|}{|\mathcal{X}|} = \frac{|\{a, e, d, f\} \cap \{c, g\}|}{|\{c, g\}|} = \frac{0}{2} = 0$$

Yaklaşımsal üyelik fonksiyonlarına dayanarak alt, üst yaklaşımlar ve sınır bölgesi aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\mathcal{R}_*(\mathcal{X}) = \{x \in \mathcal{U}\colon\ \mu_{\mathcal{X}}^{\mathcal{R}}(x) = 1\}$$

$$\mathcal{R}^*(\mathcal{X}) = \{x \in \mathcal{U}\colon\ \mu_{\mathcal{X}}^{\mathcal{R}}(x) > 0\}$$

$$\mathcal{RN}_{\mathcal{R}}(\mathcal{X}) = \{x \in \mathcal{U}\colon\ 0 < \mu_{\mathcal{X}}^{\mathcal{R}}(x) < 1\}$$

Örnek 2.7’ye baktığımızda $a, e, d,$ ve f nin yaklaşımsal üyelik dereceleri 1 dir. Bu bilgiye dayanarak $\mathcal{R}_*(\mathcal{X}) = \{a, e, f, d\}$ yazılabilir. a, b, d, e, f elemanlarının yaklaşımsal üyelik değerleri sıfırdan büyük olduğundan $\mathcal{R}^*(\mathcal{X}) = \{ a, b, d, e, f \}$ dir. Ayrıca b ’nin yaklaşımsal üyelik değeri 0 ile 1 arasında olduğundan b sınır bölgesinin elemanıdır. Yani $\mathcal{RN}_{\mathcal{R}}(\mathcal{X}) = \{b\}$.

Yaklaşımsal üyelik fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlar (Skowron *et al.* 2002):

1. $\mu_{\mathcal{X}}^{\mathcal{R}}(x) = 1$ ancak ve ancak $x \in \mathcal{R}_*(\mathcal{X})$

2. $\mu_{\mathcal{X}}^{\mathcal{R}}(x) = 0$ ancak ve ancak $x \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{R}^*(\mathcal{X})$

3. $x \in \mathcal{X}$ için $\mu_{\mathcal{U}-\mathcal{X}}^{\mathcal{R}}(x) = 1 - \mu_{\mathcal{X}}^{\mathcal{R}}(x)$.

4. $\mu_{\mathcal{X}\cup\mathcal{Y}}^{\mathcal{R}}(x) \geq mak(\mu_{\mathcal{X}}^{\mathcal{R}}(x), \mu_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{R}}(x))$

5. $\mu_{\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}}^{\mathcal{R}}(x) \leq min(\mu_{\mathcal{X}}^{\mathcal{R}}(x), \mu_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{R}}(x))$.

3. YAKLAŞIMLI KÜMELER VE ÇIKARIM YAPMA

Bu bölümde, ikinci bölümde verilen yaklaşımlı kümelerle ilgili formülasyondan ve temel tanımlardan ziyade yaklaşımlı kümelerin bilişim bilimindeki ve akıl yürütme konusundaki uygulamalarından bahsedilecektir. Bu bölüm Pawlak (1982) ve Pawlak (1991) kaynaklarından faydalanılarak oluşturulmuştur. Detaylar için Pawlak (1982) ve Pawlak (1991) kaynakları incelenebilir.

Bir bilgi sisteminde aynı bilgiyi ifade eden unsurlara ayırt edilemez (benzer) ayırt edilemez bilgi denir. Bu bilgiler temel bilgi parçacıkları olarak bloklar oluştururlar. Örneğin, aynı hastalığa sahip hastalar birbirinden ayırt edilemeyebilir ve tek bir hastalık birimi veya tıbbi bilgi parçası olarak düşünülebilir. Bu parçalara temel kümeler (kavramlar) denir ve bilginin temel yapı taşları olarak düşünülebilir. Temel kavramlar bir araya gelerek bileşik kavramları oluştururlar. Bileşik kavram ya da kavramlar tek türlü belirlenmiş temel kavramlar kullanılarak oluşturulabilir. Bir klasik küme temel kümelerin birleşimi iken diğer bütün kümeler yaklaşımlı kümeler olarak isimlendirilir.

Bilginin parçacıklı yapısı nedeniyle yani ayrıntıları nedeniyle, yaklaşımlı kümeler mevcut bilgiler kullanılarak karakterize edilemez. Bu nedenle, bir yaklaşımlı küme, bu yaklaşımlı kümenin alt ve üst yaklaşımı olarak adlandırılan iki küme ile karakterize edilir.

Bir yaklaşımlı küme mevcut bilgiler ışığında kümeye ait elemanları, kümenin tümleyenine ait elemanları ve her iki kümeye de ait olmayan unsurları içerir. Bu nedenle, herhangi bir yaklaşımlı küme, klasik kümenin aksine, boş olmayan bir sınır bölgesine sahiptir.

Sezgisel olarak, bir kümenin alt yaklaşımı, kümeye ait olduğu kesin olan elemanlardan oluşurken, üst yaklaşımı, kümeye ait ve ait olması muhtemel elemanlardan oluşur. Üst yaklaşımın alt yaklaşımdan farkı (küme farkı) sınır bölgesini ifade eder. Yaklaşımlı kümeler alt ve üst yaklaşımla tanımlanabildiği gibi yaklaşımsal üyelik fonksiyonu ile de tanımlanabilir.

Şimdi yaklaşımlı kümelerin gerçek hayatta nasıl kullanıldığı ile ilgili bir motivasyon örneği verilip ardından yaklaşımlı kümeler ile bilişim biliminin irtibatı kurulacaktır.

Örnek 3.1 Belirli bir hastalıktan mustarip hastalar hakkında bilgi içeren bir veri seti Çizelge 3.1 de verilmiştir. Bu çizelgeye göre kümenin elemanları hastalar olarak, semptomlar baş ağrısı, kas ağrısı ve ateş olarak ele alınmıştır. Bu çizelge, bilgi sistemleri, öznitelik-değer çizelgesi veya bilgi çizelgesi diye isimlendirilir. Bu çalışma boyunca biz öznitelik-değer çizelgesi terimini kullanacağız.

Çizelge 3.1 Hasta ve semptom ilişki çizelgesi

Hasta	**Baş ağrısı**	**Kas Ağrısı**	**Ateş**	**Grip**
p_1	hayır	evet	yüksek	evet
p_2	evet	hayır	yüksek	evet
p_3	evet	evet	çok yüksek	evet
p_4	hayır	evet	normal	hayır
p_5	evet	hayır	yüksek	hayır
p_6	hayır	evet	çok yüksek	evet

Bu çizelgenin her bir satırı bir hasta için bilgi içerir. Örneğin, p_2 hastası hakkındaki bilgiler öznitelik-değer kümesiyle aşağıdaki gibi karakterize edilebilir.

(Baş ağrısı, evet), (Kas ağrısı, hayır), (Ateş, yüksek), (Grip, evet)

Çizelgede p_2, p_3 ve p_5 hastaları "baş ağrısı" özelliğine göre ayırt edilemezdir. Çünkü her üçü içinde (Baş ağrısı, evet) ilişkisi mevcuttur. Yine çizelgeye baktığımızda p_2 ve p_5 hastaları Baş Ağrısı, Kas ağrısı ve Ateş özelliklerine göre ayırt edilemezdir. Çünkü her iki hasta içinde (Baş ağrısı, evet), (Kas ağrısı, hayır), (Ateş, yüksek) ilişkileri geçerlidir. Bu nedenle, örneğin, "Baş ağrısı" semptomu $\{p_2, p_3, p_5\}$ ve $\{p_1, p_4, p_6\}$ olmak üzere iki temel küme oluştururken, “Baş Ağrısı” ve “Kas ağrısı” semptomları $\{p_1, p_4, p_6\}, \{p_2, p_5\}$ ve $\{p_3\}$ temel kümelerini oluşturur. Benzer şekilde, herhangi bir öznitelik alt kümesi tarafından oluşturulan temel kümeler tanımlanabilir.

Hasta p_2'de grip varken, hasta p_5'te yoktur ve “Baş Ağrısı”, “Kas ağrısı” ve “Ateş” semptomlarının görülme biçimi aynı iken grip bu nitelikler açısından karakterize edilemez. Bu nedenle, p_2 ve p_5, mevcut bilgiler ışığında sınır bölgesine aittir denir. Geriye kalan p_1, p_3 ve p_6 hastaları, kesin bir şekilde grip olarak sınıflandırmamızı sağlayan semptomlar gösterirler, p_2 ve p_5 hastalarına griptir ya da değildir denemez ve p_4 hastası kesinlikle grip değildir. Bu nedenle, grip olan hasta grubunun alt yaklaşımı $\{p_1, p_3, p_6\}$ kümesi ve bu kümenin üst yaklaşımı $\{p_1, p_2, p_3, p_5, p_6\}$ kümesidir, sınır bölgesindeki hastalar p_2 ve p_5 hastalarıdır. Benzer şekilde, p_4'te grip yoktur ve p_2, p_5'te grip olma ihtimali göz ardı edilemez, bu nedenle bu kavramın alt yaklaşımı $\{p_4\}$ kümesidir, üst yaklaşımı $\{p_2, p_4, p_5\}$ kümesidir ve "grip değil" kavramının sınır bölgesi, önceki durumda olduğu gibi $\{p_2, p_5\}$ kümesidir.

Şimdi yukarıda anlatılan bilişim sistemi yapısının bir modellemesi olarak yaklaşım ve yaklaşımlı küme kavramlarını tekrar ele alalım.

3.1 Bilişim Sistemi ve Yaklaşımlı Küme Teorisi

Boştan farklı $\mathcal{U}$ ve A kümelerini göz önüne alalım, burada $\mathcal{U}$ evrensel küme ve A ise özniteliklerin (değerlendirmede göz önüne alınacak parametrelerin) kümesidir. Her bir a özniteliği ile, a'nın “etki alanı” olarak adlandırılan değerlerinden bir V_a kümesini ilişkilendiririz. A'nın herhangi bir B alt kümesi, $\mathcal{U}$ üzerinde bir ikili ilişki $I(B)$ belirler ve buna bir ayırt edilemezlik ilişkisi denir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$I(B) = \{(a, b) \in \mathcal{U}^2 \colon \mathit{for\ every}\ a \in B, a(x) = a(y)\}$$

Şimdi bu $I(B)$ ilişkisini örnek 3.1 deki bilgi sistemine uygulayarak açıklayalım.

$xI(B)y$ ancak ve ancak $a(x) = a(y)$ her $a \in A$. Burada $a(x)$, x elemanı için a özniteliğinin değerini gösterir. Örnek 3.1'i göz önüne aldığımızda $V_{başağrısı} = \{evet, hayır\}$, $V_{kas\ ağrısı} = \{evet, hayır\}$, $V_{ateş} = \{yüksek, normal, çok\ yüksek\}$ ve $V_{grip} = \{evet, hayır\}$ dir. Şimdi $A = \{baş\ ağrısı, kas\ ağrısı, ateş, grip\}$ kümesinin bir $B = \{baş\ ağrısı, kas\ ağrısı\}$ alt kümesini göz önüne alalım. Bu kümeye göre Örnek 3.1 de $Baş\ ağrısı\ (p_1) = Baş\ ağrısı\ (p_4) = Baş\ ağrısı(p_6)$ ve $Kas\ ağrısı\ (p_1) = Kas\ ağrısı\ (p_4) = Kas\ ağrısı(p_6)$ dır.

Burada $I(B)$ bir denklik bağıntısıdır. Bu semptomlara göre $(p_1, p_4), (p_1, p_6), (p_4, p_6) \in I(B)$ dir ve p_1 ve p_4, p_1 ve p_6, p_4 ve p_6 B deki bilgilere göre ayırtedilemezdir.

Ayırt edilemezlik bağıntısı, yaklaşımlı küme teorisinin temel kavramları olan yaklaşımları tanımlamak için kullanılmaktadır.

Şimdi yaklaşımlar tekrar aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$B_*(\mathcal{X}) = \{x \in \mathcal{U}: B(x) \subseteq \mathcal{X}\}$$

$$B^*(\mathcal{X}) = \{x \in \mathcal{U}: B(x) \cap \mathcal{X} \neq \emptyset\}$$

$\mathcal{U}$ evreninin bir $\mathcal{X}$ alt kümesi için yukarıdaki gibi tanımlanan $B_*(\mathcal{X})$ ve $B^*(\mathcal{X})$ kümeleri sırasıyla $\mathcal{X}'$in B-alt *ve* B-üst yaklaşımları olarak adlandırılır.

$$BN_B(\mathcal{X}) = B^*(\mathcal{X}) - B_*(\mathcal{X})$$

$\mathcal{X}$'in B sınır bölgesi olarak adlandırılır.

Alt yaklaşım, üst yaklaşım ve sınır bölgesi ile ilgili özellik Bölüm 2 deki özelliklerle aynı olduğundan burada tekrar bahsedilmeyecektir.

Bir kümenin alt ve üst yaklaşımlarının, ayırt edilemezlik ilişkisi tarafından oluşturulan bir topolojideki iç ve kapanış işlemleri olduğu kolayca görülebilir.

Dört temel yaklaşımlı küme sınıfı, yani dört belirsizlik kategorisi tanımlanabilir:

a) $\mathcal{X}$ yaklaşımsal olarak B −tanımlanabilir ise $B_*(\mathcal{X}) \neq \emptyset$ ve $B^*(\mathcal{X}) \neq \mathcal{U}$
b) $\mathcal{X}$ içsel olarak B −anımlanamazdır ancak ve ancak $B_*(\mathcal{X}) = \emptyset$ ve $B^*(\mathcal{X}) \neq \mathcal{U}$
c) $\mathcal{X}$ dışsal olarak B −tanımlanabilirdir ancak ve ancak $B_*(\mathcal{X}) \neq \emptyset$ ve $B_*(\mathcal{X}) = \mathcal{U}$
d) $\mathcal{X}$ tam olarak B −tanımlanamazdır ancak ve ancak $B_*(\mathcal{X}) = \emptyset$ ve $B^*(\mathcal{X}) = \mathcal{U}$.

Bu sınıflandırmanın sezgisel anlamı şudur.

Eğer $\mathcal{X}$ yaklaşımsal olarak B −tanımlanabilir ise, bu, $\mathcal{U}$'nun bazı elemanları için B'yi kullanarak $\mathcal{X}$'e mi yoksa $-\mathcal{X}$'e mi ait olduklarına karar verebileceğimiz anlamına gelir.

Eğer $\mathcal{X}$ içsel olarak B −tanımlanamazsa, bu, $\mathcal{U}$'nun bazı elemanlarının $\mathcal{X}$'e 'e ait olup olmadığına karar verebildiğimiz, ancak $\mathcal{U}$'nun herhangi bir elemanı için, $-\mathcal{X}$'e ait olup olmadığına B' yi kullanarak karar veremeyeceğimiz anlamına gelir.

Eğer $\mathcal{X}$ dışsal olarak B −tanımlanamazsa, bu, $\mathcal{U}$'nun bazı elemanları için $\mathcal{X}$'e ait olup olmadıklarına karar verebileceğimiz anlamına gelir, ancak $\mathcal{U}$' nun herhangi bir elemanı için $\mathcal{X}$'e ait olup – olmadığına B'yi kullanarak karar veremeyiz.

Eğer $\mathcal{X}$ tamamen B − tanımlanamaz ise, $\mathcal{U}$ 'nun herhangi bir elemanı için B 'yi kullanarak $\mathcal{X}$'e mi yoksa $-\mathcal{X}$'e mi ait olduğuna karar veremeyiz.

Yaklaşımlı kümeler, aşağıdaki formül yardımıyla sayısal olarak da karakterize edilebilirler

$$\alpha_B(\mathcal{X}) = \frac{|B_*(\mathcal{X})|}{|B^*(\mathcal{X})|}$$

Bu formüle yaklaşımın doğruluğu (kesinliği) olarak adlandırılır. Burada $|\mathcal{X}|$ $\mathcal{X}$'in kardinalitesini belirtir ve $0 \leq \alpha_B(\mathcal{X}) \leq 1$. Eğer $\alpha_B(\mathcal{X}) = 1$, $\mathcal{X}$, B'ye göre kesindir, eğer $\alpha_B(\mathcal{X}) < 1$ ise $\mathcal{X}$, B'ye göre belirsizdir denir.

Yukarıdaki tanımları Çizelge 3.1 de verilen bilgiler ışığında gösterelim. "Grip" kavramını, $\mathcal{X} = \{p_1, p_2, p_3, p_6\} \subseteq \mathcal{U}$ kümesini ve $B = \{Baş\ ağrısı,\ Kas\ ağrısı,\ Ateş\}$ semptomlarını göz önüne alalım. "Grip" kavramı yaklaşımsal olarak B ile tanımlanabilir, çünkü $B_*(X) = \{p_1, p_3, p_6\} \neq \emptyset$ ve $B^*(X) = \{p_1, p_2, p_3, p_5, p_6\} \neq \mathcal{U}$. Bu durumda

$$\alpha_B(Grip) = \frac{3}{5}$$

elde edilir. Bu ise "grip" teşhisinin "Baş ağrısı", "Kas ağrısı" ve "Ateş "gibi semptomlara dayanılarak kısmen karakterize edilebileceği anlamına gelir. Eğer sadece bir semptom $B = \{baş\ ağrısı\}$ göz önüne alınırsa $a_{başağrısı}(p_2) = a_{baş\ ağrısı}(p_3) = a_{baş\ ağrısı}(p_5) = evet$ olduğundan bu semptomun bulunduğu hastaların kümesi yani $\{p_2, p_3, p_5\}$ dir. $\mathcal{X} = \{p_1, p_2, p_3, p_6\}$ olduğundan $\{p_2, p_3, p_5\}$ kümesi $\mathcal{X}$ 'in altkümesi değildir. Bu yüzden $B_*(\mathcal{X}) = \emptyset$ ve $B^*(\mathcal{X}) = \mathcal{U}$ dur. Bu ise "Grip" teşhisinin "Baş ağrısı" semptomuyla tam olarak belirlenemez olduğu anlamına gelir. Diğer bir ifadeyle bu semptom hiçbir şekilde "Grip" için karakteristik bir semptom değildir.

$B = \{Ateş\}$ alınırsa $B_*(\mathcal{X}) = \{p_3, p_6\}$ dır. Burada dikkat edilirse "Ateş" semptomuna göre dört tane "$(Grip, evet)$" sonucu vardır fakat p_1, p_2 ve p_5 hastaları da "Grip" olarak çizelgede görünse de sonuçlarda tutarsızlık vardır çünkü p_1 ve p_2 hastalarının ateşi yüksek iken grip teşhisi konulurken p_5 hastasında ateş semptomu yüksek iken "grip" sonucuna ulaşılmamaktadır. Bu yüzden tutarlı olan durumlara uygun olan p_3 ve p_6 hastaları alt yaklaşımdadır. Her ne kadar p_1, p_2 ve p_5 hastalarının sonuçları arasında tutarsızlık olsa da doğru olma ihtimali vardır bu yüzden $B^*(\mathcal{X}) = \{p_1, p_2, p_3, p_5, p_6\}$ elde edilir. Burada $\alpha_B(\mathcal{X}) = \frac{2}{5}$ dir. Bu ise "Ateş" semptomunun, "Grip" için tüm semptomların kümesine göre daha az belirleyicidir ve bu durumda p_1 hastası grip olarak sınıflandırılamaz.

3.2 Karar Çizelgeleri ve Karar Algoritmaları

Bazen bir bilgi çizelgesinde durum ve karar (eylem) nitelikleri olarak adlandırılan iki sonuç gösterilebilir. Örneğin, Çizelge 3.1'de “Baş ağrısı”, “Kas ağrısı” ve “Ateş” öznitelikleri durum belirten özellikler olarak kabul edilirken (durum belirten özelliklerin kümesi C), “Grip” ise bir karar özelliği (sonuç belirten özelliklerin kümesi D) olarak kabul edilebilir.

Karar çizelgesinin her satırı, öznitelikler tarafından işaret edilen koşullar karşılandığında alınması gereken kararları (eylemleri) belirten bir karar kuralı belirler. Örneğin, Çizelge 3.1'de durum $(baş\ ağrısı, hayır)$, $(kas\ ağrısı, evet)$, $(ateş, yüksek)$ kararı $(Grip, evet)$ karar kuralıdır.

Çizelge 3.1'deki 2. ve 5. satırdaki karar kuralları aynı durumlara ancak farklı kararlara sahiptir. Bu tür kurallar tutarsız (deterministik olmayan, çelişkili) olarak adlandırılır; aksi takdirde kurallar tutarlı (belirli, deterministik, çelişkili olmayan) olarak adlandırılır. Bazen tutarlı karar kurallarına kesin kurallar, tutarsız kurallara ise olası kurallar denir. Tutarsız karar kuralları içeren karar çizelgeleri tutarsız (deterministik olmayan, çelişkili) olarak adlandırılır; aksi takdirde çizelge tutarlıdır (deterministik, çelişkili değildir).

Bir karar çizelgesindeki tüm kurallar için tutarlı kuralların sayısı, karar çizelgesinin tutarlılık faktörü olarak göz önüne alınır ve $\gamma(C, D)$ ile gösterilir. Burada C ve D sırasıyla koşul ve karar özellikleri olarak adlandırılır. Sonuç olarak eğer $\gamma(C, D) = 1$ ise karar çizelgesi tutarlı ve $\gamma(C, D) \neq 1$ ise karar çizelgesi tutarsızdır denir. Karar kuralları genellikle "eğer...o halde..." ile ifade edilir. Örneğin, Çizelge 3.1 de tüm semptomları göz önüne aldığımızda tutarlı karar kuralları aşağıdaki gibidir:

p_1 için (baş ağrısı, hayır) ve (kas ağrısı, evet) ve (ateş, yüksek) ise (Grip, evet).

p_2 için (baş ağrısı, evet) ve (kas ağrısı, hayır) ve (ateş, yüksek) ise (Grip, evet).

p_3 için (baş ağrısı, evet) ve (kas ağrısı, evet) ve (ateş, çok yüksek) ise (Grip, evet)

p_6 için (baş ağrısı, hayır) ve (kas ağrısı, evet) ve (ateş, çok yüksek) ise (Grip, evet).

Bu yüzden $\gamma(C, D) = 4/6$ dır.

Bir dizi karar kuralına karar algoritması denir. Böylece bir karar çizelgesiyle, karar çizelgesinde yer alan tüm karar kurallarından oluşan bir karar algoritmasını ilişkilendirebiliriz. Fakat karar çizelgeleri ve karar algoritmaları arasında bir ayrım yapmamız gerekir. Bir karar çizelgesi verilerin bir koleksiyonudur, oysa bir karar algoritması ise mantıksal ifadeler gibi çıkarımların bir koleksiyonudur.

Verileri değerlendirmek için çeşitli matematiksel yöntemler kullanılır. Bunlara istatistiksel yöntemler ve sonuçları analiz etmek için mantıksal araçların kullanımı örnek verilebilir. Bu iki yaklaşım eşdeğer değildir, ancak basitlik için, burada yaklaşımların mantıksal doğalarına derinlemesine girmeden yapay zeka uygulamalarında sıkça uygulama alanı bulan bu yapıların çıkarım kuralları üzerinde durulacaktır.

3.3 Özelliklerin Bağımlılığı

Veri analizinde bir diğer önemli nokta da öznitelikler arasındaki ilişkileri keşfetmektir. Sezgisel olarak, D karar özellikler kümesi olmak üzere, D'deki tüm özellikler, C'deki özelliklerle tek türlü belirleniyorsa, D özellikleri C özelliklerine bağlıdır denir ve $C \Rightarrow D$ ile gösterilir. Başka bir ifadeyle, D özellikler kümesi ve C özellikler kümesindeki değerler arasında işlevsel bir bağımlılık varsa, D tam olarak C'ye bağlıdır denir. Örneğin, Çizelge 3.1'de tam olarak bağlılık yoktur. Çizelge 3.1'de eğer $C = \{ateş\}$ ve $D = \{Grip\}$ aldığımızda, görüyoruz ki p_1 hastasının ateşi yüksek ve griptir, yine p_2 hastasının ateşi yüksek ve griptir. Fakat p_5 hastasının ateşi yüksek ve grip değildir. Eğer p_5 hastası için "ateş" semptomu "yüksek" yerine "yüksek değil" olsaydı, tam bir bağımlılık $\{Ateş\} \Rightarrow \{Grip\}$ olurdu. Diğer bir ifadeyle "ateş" özelliğinin her değeri için yani C kümesindeki semptomun her değeri için "grip" özelliğinin tekbir değeri karşılık gelmiş olurdu. Ayrıca C kümesinin elemanlarını "baş ağrısı" ve "kas ağrısı" ve "ateş" olarak aldığımızda karar dizilerinin sol tarafı p_2 ve p_5 için aynı olmasına rağmen p_2 hastası grip iken p_5 hastası grip değildir. Bu da $D = \{Grip\}$ özellikler kümesi $C = \{baş\ ağrısı, kas\ ağrısı, ateş\}$ durum kümesi ile bağımlı olmadığını gösterir.

Ayrıca, özelliklerin kısmi bağımlılığı olarak adlandırılan daha genel bir özelliklerin bağımlılığı kavramına da ihtiyaç duyulmaktadır.

Çizelge 3.1'i göz önüne alarak bu durumu somutlaştıralım. Örneğin, "ateş" semptomu, Grip kararının yalnızca bazı değerlerini (evet, hayır) tek bir şekilde belirler. Yani, $(ateş, çok\ yüksek)$ ise $(Grip, evet)$ anlamına gelir, benzer şekilde $(ateş, normal)$ ise $(Grip, hayır)$ anlamına gelir, ancak $(ateş, yüksek)$ her zaman $(Grip,\ evet)$ anlamına gelmez. Çünkü p_5 hastası için $(ateş, yüksek)$ ise $(Grip, hayır)$ dır. Bu nedenle, kısmi bağımlılık, yalnızca bazı karar özellikleri (D) durum özellikleri (C) tarafından belirlendiği anlamına gelir. Bu örnekte ateş için durum özelliği "çok yüksek" olduğunda "grip" için karar değeri "evet"tir. "yüksek" olduğunda bazen "evet" bazen "hayır" dır. Kısmi bağımlılık tamda bu noktada ortaya çıkmaktadır.

Formel olarak bağımlılık kavramı aşağıdaki şekilde tanımlanabilir. D ve C, A'nın alt kümeleri olsun. Şayet $k = \gamma(C, D)$ ise D'nin C'ye k $(0 \leq k \leq 1)$ derecesinde bağlı olduğu söylenir ve bu $C \Rightarrow_k D$ ile gösterilir. Diğer bir ifadeyle tutarlı karar dizisi sayının tüm karar durumlarına oranı k derecesini verir. Eğer $k = 1$ ise, D ' nin tam olarak C'ye bağımlı olduğu söylenir ve eğer $k < 1$ ise, D'nin kısmen (k derecesinde) C'ye bağımlı olduğunu söylenir.

Ayrıca k katsayısı, C niteliklerini kullanarak U/D bölümünün bloklarına uygun şekilde sınıflandırılabilen evrenin tüm öğelerinin oranını ifade eder. Bu nedenle, özelliklerin bağımlılığı kavramı, karar çizelgesinin tutarlılığı ile sıkı bir ilişki içindedir.

Örneğin, Çizelge 3.1'e göre tutarlı karar dizileri aşağıdaki gibidir:

p_1 için (baş ağrısı, hayır) ve (kas ağrısı, evet) ve (ateş, yüksek) ise (Grip, evet).

p_2 için (baş ağrısı, evet) ve (kas ağrısı, hayır) ve (ateş, yüksek) ise (Grip, evet).

p_3 için (baş ağrısı, evet) ve (kas ağrısı, evet) ve (ateş, çok yüksek) ise (Grip, evet)

p_6 için (baş ağrısı, hayır) ve (kas ağrısı, evet) ve (ateş, çok yüksek) ise (Grip, evet).

Bu durumda $\{Baş\ ağrısı, Kas\ ağrısı, Ateş\} \Rightarrow_k \{Grip\}$ için k = 4/6 = 2/3 elde ederiz, çünkü altı hastadan dördünün "baş ağrısı", "kas ağrısı" ve "ateş" semptomlarına dayanılarak grip olup olmadığı ile ilgili olarak tek türlü bir sınıflama yapılabilir.

Hastaların sadece "ateş" değerleri kullanılarak, yani $\{ateş\} \Rightarrow \{Grip\}$ durumunun tam olarak nasıl teşhis edilebileceği ile ilgileniyor olsaydık tutarlı karar dizileri aşağıdaki gibi yazılır:

p_3 için $(ateş, çok\ yüksek)$ ise $(grip, evet)$
p_4 için $(ateş, normal)$ ise $(grip, hayır)$
p_6 için $(ateş, çok\ yüksek)$ ise $(grip, evet)$

Dikkat edilirse diğer üç hasta için D kümesinde tek bir karar değeri karşılık gelmemektedir. Yani, aşağıdaki karar dizilerinde sol taraflarda "ateş" durumu için aynı durum değeri karşılık gelmesine rağmen sağ tarafta farklı karar değerleri karşılık gelmektedir.

p_1 için $(ateş, yüksek)$ ise $(grip, evet)$
p_2 için $(ateş, yüksek)$ ise $(grip,\ evet)$
p_5 için $(ateş, yüksek)$ ise $(grip, hayır)$

Bu durumda, tutarlı durum özelliğine dayanan çıkarım dizisi sayısı 3 ve tüm durum dizi sayısı 6 olduğundan $k = 3/6 = 1/2$ dir. Bu nedenle, tek bir özellik olan "ateş", "baş ağrısı", "kas ağrısı" ve "ateş" özelliklerine dayanılarak yapılan sınıflamadan daha kararsız bir sınıflandırma sunar.

$$\{Baş\ Ağrısı\} \Rightarrow \{Grip\}$$

Durumunu göz önüne aldığımızda, tüm karar dizileri aşağıdaki gibi olur.

p_1 için $(baş\ ağrısı, hayır)$ ise $(grip, evet)$
p_2 için $(baş\ ağrısı, evet)$ ise $(grip,\ evet)$
p_3 için $(baş\ ağrısı, evet)$ ise $(grip,\ evet)$
p_4 için $(baş\ ağrısı, hayır)$ ise $(grip, hayır)$
p_5 için $(baş\ ağrısı, evet)$ ise $(grip, hayır)$
p_6 için $(baş\ ağrısı, hayır)$ ise $(grip,\ evet)$

Dizilerin sol taraflarına baktığımızda $(baş\ ağrısı, hayır)$ durumu için hem $(grip, evet)$ hem de $(grip, hayır)$, $(baş\ ağrısı, evet)$ durumuna baktığımızda hem $(grip, evet)$ hem de $(grip, hayır)$ durumları karşılık gelmektedir. Dolayısıyla tutarlı karar dizisi sayısı 0 dır. Bu ise $\{Baş\ Ağrısı\} \Rightarrow \{Grip\}$ için $k = 0$ olduğu anlamına gelir. Benzer şekilde $\{Kas\ ağrısı\} \Rightarrow \{Grip\}$ 'nin bağımlılık katsayısı $k = 0$ dır.

D tam olarak C'ye bağlıysa, o zaman $I(C) \subseteq I(D)$ olduğu kolayca görülebilir. Bu, C tarafından oluşturulan bölümün D tarafından oluşturulan bölümden daha ince olduğu anlamına gelir. Yukarıda tartışılan bağımlılık kavramının ilişkisel veritabanlarında ele alınana karşılık geldiğine dikkat edilmelidir.

D, k $(0 \leq k \leq 1)$ derecesinde, C'ye bağlıysa, o zaman

$$\gamma(C, D) = \frac{|POS_C(D)|}{|\mathcal{U}|}$$

Burada $POS_C(D) = \bigcup_{X \in \mathcal{U} \setminus I(D)} C_*(\mathcal{X})$ dir.

C' ye göre $\mathcal{U}/D$ bölümünün pozitif bölgesi olarak adlandırılan $POS_C(D)$ ifadesi, C aracılığı ile $\mathcal{U}/D$ bölümünün bloklarına tek türlü sınıflandırabilen $\mathcal{U}$ 'nun tüm elemanlarının kümesidir.

Sonuç olarak $\mathcal{U}$ evrensel kümesinin tüm (bazı) elemanları C kullanılarak $\mathcal{U}/D$ bölümünün blokları ile tek türlü sınıflandırılabiliyorsa, D tamamen (kısmen) C ye bağımlıdır.

3.4 Özelliklerin İndirgenmesi

Bir bilgi sisteminde bazı verileri bilgi sisteminin temel özelliklerini koruyarak kaldırıp kaldıramama ve çizelgenin gereksiz veriler içerip içermediğini belirleme sorunuyla sık sık karşılaşırız.

Örneğin, Çizelge 3.1'e "Baş Ağrısı" veya "Kas ağrısı" öz niteliklerini göz önüne alarak, yaklaşımlar ve bağımlılıklar açısından orijinaline eşdeğer veri setini elde ettiğimiz kolayca görülebilir. Yani, bu durumda, orijinal çizelgedekiyle aynı yaklaşım doğruluğunu ve bağımlılık derecesini elde ederiz, ancak daha az öznitelik kullanırız.

Yukarıdaki bahsettiğimiz fikri daha kesin bir şekilde ifade etmek için bazı yardımcı kavramlara ihtiyacımız var. B, A'nın bir alt kümesi olsun ve a, B'ye ait olsun.

- $I(B) = I(B - \{a\})$ ise, a'nın B'de vazgeçilebilir olduğunu söyleriz*;* aksi takdirde a, B'de vazgeçilmezdir. Yani çizelgedeki özniteliklerden birine ait veriyi çizelgeden çıkardığımızda yine aynı sonuçları elde edebiliyorsak, o zaman bu özelliğe vazgeçilebilirdir denir.
- Eğer B kümesinin, vazgeçilebilir hiçbir elemanı yoksa B kümesi bağımsızdır denir.
- $B' \subseteq B$ olsun eğer B' bağımsızsa ve $I(B') = I(B)$ ise, B' ye B nin indirgenmişidir denir.

Diğer bir ifadeyle indirgeme, başlangıçtaki bilgi sistemi kullanılarak elde edilen sınıflamayı sağlayan minimum sayıda öznitelik içeren kümedir. Bu tanıma dayanarak bir indirgemeye ait olmayan bir özniteliğin, evrenin unsurlarının sınıflandırılması açısından gereksiz olduğu söylenir.

İndirgemelerin birkaç önemli özelliği vardır. Aşağıda bunlardan ikisini sunacağız.

İlk olarak, bazı tanımları vereceğiz.

Tanım 3.2 B tüm özniteliklerin kümesi A’ nın bir alt kümesi olsun. B deki vazgeçilemez tüm elemanların kümesine B kümesinin çekirdeği denir.

$$Çek(B) = \cap\, Ind(B)$$

Burada $Ind(B)$, B’nin tüm indirgemeleridir. Yani B kümesinin çekirdeği $B\,'$nin bütün indirgemelerinin kesişimidir.

Buradan görüldüğü üzere $Çek(B)$, B ’nin tüm indirgemelerinin bir alt kümesidir. Çekirdeğin hiçbir elemanı vazgeçilebilir değildir.

Bir bilgi çizelgesinin daha da basitleştirmek için, çizelgedeki bazı öznitelik değerlerini, çizelgeye göre elde edilebilecek sonuçları değiştirmeyecek şekilde ortadan kaldırabiliriz.

Gerek duyulmayan öz nitelikleri elimine etmek için aşağıdaki prosedürleri uygularız.

- Eğer $a \in B$ için $[x]_{I(B)} = [x]_{I(B)-\{a\}}$ ise x için vazgeçilebilirdir; aksi takdirde a öz niteliği x için vazgeçilmezdir.
- Her $a \in B$ özniteliği x için vazgeçilmezse, B x için ortogonaldir denir.
- $B' \subseteq B$ alt kümesi, x için B'nin bir değer indirgemesidir ancak ve ancak B' x için ortogonaldir *ve* $[x]_{I(B)} = [x]_{I(B')}$.

x için B'deki tüm vazgeçilmez özniteliklerin kümesi, x için B'nin değer çekirdeği olarak adlandırılır ve $Çek^x(B)$ ile gösterilir.

$$Çek^x(B) = \cap\, Ind^x(B)$$

burada $Ind^x(B)$, x için B'nin tüm indirgenmelerinin ailesidir.

$C \Rightarrow D$ gerektirmesinin verildiğini varsayalım. D kümesi C kümesinin tüm elemanlarına bağlı olmayıp C'nin bir C' alt kümesinin elemanlarına bağlı olabilir. Temel amaç bu C' altkümesini bulmaktır. Burada C' kümesi C nin D-indirgemesi olarak adlandırılır. C nin D-indirgemesini bulmak için ileride ele alınacak olan göreceli bir indirgeme yöntemine ihtiyaç duyarız.

$C, D \subseteq A$ olsun. Eğer $C' \subseteq C$, C'nin bir D-indirgemesi ise, o halde C', C nin minimal bir alt kümesidir , öyle ki

$$\gamma(C, D) = \gamma(C', D)$$

- Eğer $POS_C(D) = POS_{(C-\{a\})}(D)$ ise, $a \in C$ özniteliği C 'de D -vazgeçilebilirdir denir. Aksi takdirde $a \in C$ özniteliği D-vazgeçilmezdir denir.

- Eğer tüm $a \in C$ öznitelikleri, C' de C-vazgeçilmez ise, o zaman C, D-bağımsız olarak adlandırılır.

- $C' \subseteq C$ alt kümesi, C'nin bir D-indirgemesidir ancak ve ancak C', D-bağımsızdır ve $POS_C(D) = POS_{C'}(D)$.

C'deki tüm D-vazgeçilmez öznitelikler kümesi, C'nin D-çekirdeği olarak adlandırılır ve $Çek_D(C)$ ile gösterilir. Bu aşağıdaki gibi ifade edilir,

$$Çek_D(C) = \cap Ind_D(C)$$

burada $Ind_D(C)$, C'nin tüm D-indirgemelerinin ailesidir.

Örnek 3.3 Çizelge 3.1' i göz önüne aldığımızda $x = grip$ için {Baş Ağrısı, Ateş} ve {Kas ağrısı, Ateş} C kümesinin iki göreceli indirgemesidir. Bu, "Baş Ağrısı" veya "Kas ağrısı" özelliğinin çizelgeden çıkarılabileceği anlamına gelmektedir. Bu durumda, Çizelge 3.1 yerine daha sade olan Çizelge 3.2 veya Çizelge 3.3'ü kullanabiliriz.

Çizelge 3.2 Karar Çizelgesi

Hasta	Baş ağrısı	Kas Ağrısı	Ateş	Grip
p_1	hayır	evet	yüksek	evet
p_2	evet	hayır	yüksek	evet
p_3	evet	evet	çok yüksek	evet
p_4	hayır	evet	normal	hayır
p_5	evet	hayır	yüksek	hayır
p_6	hayır	evet	çok yüksek	evet

Çizelge 3.3 "Kas ağrısı" çıkarılmış karar çizelgesi

Hasta	Baş ağrısı	Ateş	Grip
p_1	Hayır	Yüksek	evet
p_2	evet	Yüksek	evet
p_3	evet	çok yüksek	evet
p_4	Hayır	Normal	Hayır
p_5	evet	Yüksek	Hayır
p_6	Hayır	çok yüksek	evet

Çizelge 3.4 "Baş ağrısı" çıkarılmış karar çizelgesi

Hasta	Kas Ağrısı	Ateş	Grip
p_1	evet	yüksek	evet
p_2	Hayır	yüksek	evet
p_3	evet	çok yüksek	evet
p_4	evet	normal	Hayır
p_5	Hayır	yüksek	Hayır
p_6	evet	çok yüksek	evet

Şimdi örnekten önce bahsettiğimiz kavramları örnekteki veriler yardımıyla açıklayalım.

$C = \{Baş\ ağrısı, Kas\ ağrısı, Ateş\}$ öznitelikler kümesinin $D = \{grip\}$ için iki indirgemesi $\{Baş\ ağrısı, ateş\}\ ve\ \{Kas\ ağrısı, ateş\}$ olduğundan

$$POS_C(\{grip\}) = POS_{(C-\{baş\ ağrısı\})}(\{grip\}) = \{p_1, p_3, p_6\}$$

$$POS_C(\{grip\}) = POS_{(C-\{kas\ ağrısı\})}(\{grip\}) = \{p_1, p_3, p_6\}$$

ve

$$Çek^{p_1}(C) = \bigcap Ind^{p_1}(C) = \{Baş\ ağrısı, ateş\} \cap \{Kas\ ağrısı, ateş\} = \{ateş\}$$

$$Çek^{p_3}(C) = \bigcap Ind^{p_3}(C) = \{Baş\ ağrısı, ateş\} \cap \{Kas\ ağrısı, ateş\} = \{ateş\}$$

$$Çek^{p_6}(C) = \bigcap Ind^{p_6}(C) = \{Baş\ ağrısı, ateş\} \cap \{Kas\ ağrısı, ateş\} = \{ateş\}$$

Ateş hastaların en azından kısmi teşhisini sağlayan tek semptom olduğu görülür.

Ayrıca bir değer indirgeme ve değer çekirdeği kavramına da ihtiyacımız vardır. Varsayalım ki C, D 'nin bir D-indirgemesi olmak üzere $C \Rightarrow D$ gerektirmesi var olsun. Burada D'den gelen karar değerlerinin, C'den gelen özniteliklerin değerlerine tam olarak nasıl bağlı olduğu sorusu ilgi çekicidir. Bu amaçla, D'den gelen karar değerlerini etkilemeyecek şekilde C kümesi elde etmek için D'den hangi değerleri kaldırılarak C 'nin elde edileceği ile ilgili bir işleyişe ihtiyaç duymaktayız.

- Eğer $[x]_{I(C)} \subseteq [x]_{I(D)}$ olması $[x]_{I(C-\{a\})} \subseteq [x]_{I(D)}$ olmasını gerektiriyorsa $a \in C$ özniteliği $x \in \mathcal{U}$, için D-vazgeçilebilir olduğu söylenir. Aksi takdirde D $-$vazgeçilemezdir.

- Her $a \in C$ özniteliği için $x \in \mathcal{U}$ D-vazgeçilmez ise, o zaman C , x için D-bağımsız (ortogonal) olarak adlandırılır.

- $C' \subseteq C$ alt kümesi, x için C'nin bir D-indirgemesidir (bir değer indirgemesi) ancak ve ancak C', x için D-bağımsızdır ve

$$[x]_{I(C)} \subseteq [x]_{I(D)}\ ;\ [x]_{I(C')} \subseteq [x]_{I(D)}$$

dir.

C kümesindeki öznitelik x değerlerinin tüm D-vazgeçilemez kümesi, x için C kümesinin D-çekirdeği (değer çekirdeği) olarak adlandırılır ve $Çek_D^x(C)$ ile gösterilir. Bu durumda

x için C'nin tüm D-indirgemelerinin ailesi $Ind_D^x(C)$ olmak üzere

$Çek_D^x(C) = \bigcap Ind_D^x\ (C)$ dir.

Değer indirgeme kavramı kullanılarak, Çizelge 3.5 ve Çizelge 3.6 aşağıdaki gibi basitleştirilebilir.

Çizelge 3.5 Değer indirgeme çizelgesi

Hasta	Baş ağrısı	Ateş	Grip
p_1	hayır	yüksek	evet
p_2	evet	yüksek	evet
p_3	–	çok yüksek	evet
p_4	–	normal	hayır
p_5	evet	yüksek	hayır
p_6	–	çok yüksek	evet

Çizelge 3.6 Değer indirgeme çizelgesi

Hasta	Kas Ağrısı	Ateş	Grip
p_1	evet	yüksek	evet
p_2	hayır	yüksek	evet
p_3	–	çok yüksek	evet
p_4	–	normal	hayır
p_5	hayır	yüksek	hayır
p_6	–	çok yüksek	evet

Burada "ateş" vazgeçilemezdir. Çünkü "ateş" için "yüksek" ifadesini göz önüne aldığımızda ilk Çizelge 4 $[p_1]_{\{baş\ ağrısı, kas\ ağrısı, ateş\}} = \{p_1, p_2\}$ ve p_1 ve p_2 grip semptomlarına sahip iken, p_5 tam olarak sahip değildir. Çizelge 3.5 te de aynı sonucu elde ederiz. O halde

$$[p_1]_{\{baş\ ağrısı, kas\ ağrısı, ateş\}} = \{p_1, p_3, p_6\} \subseteq [p_1]_{\{grip\}} = \{p_1, p_2, p_3, p_6\} \text{ ve}$$

$$[p_1]_{\{baş\ ağrısı, ateş\}} = \{p_1, p_2\} \subseteq [p_1]_{\{grip\}} = \{p_1, p_2, p_3, p_6\}$$

olduğundan p_1 D-vazgeçilebilirdir. Elde edilen sonuçları bir karar algoritması şeklinde de sunabiliriz.

Çizelge 3.5 için;

(Baş ağrısı, hayır) ve (Sıcaklık, yüksek) ise (Grip, evet),
(Baş ağrısı, evet) ve (Sıcaklık, yüksek) ise (Grip, evet),
(Sıcaklık, çok yüksek) o zaman (Grip, evet),
(Sıcaklık, normal) o zaman (Grip, hayır),
(Baş ağrısı, evet) ve (Sıcaklık, yüksek) ise (Grip, hayır),
(Sıcaklık, çok yüksek) o zaman (Grip, evet).

ve Çizelge 3.6 için;

(Kas ağrısı, evet) ve (Sıcaklık, yüksek) ise (Grip, evet),
(Kas ağrısı, hayır) ve (Sıcaklık, yüksek) ise (Grip, evet),
(Sıcaklık, çok yüksek) o zaman (Grip, evet),
(Sıcaklık, normal) o zaman (Grip, hayır),
(Kas ağrısı, hayır) ve (Sıcaklık, yüksek) ise (Grip, hayır),
(Sıcaklık, çok yüksek) o zaman (Grip, evet).

Aşağıdaki önemli özellikler geçerlidir.

a) B', B'nin bir indirgenmesi olmak üzere $B' \Rightarrow B - B'$ ise indirgeme ve bağımlı olma özelliği aynı anlama gelir.

Ayrıca,

b) Eğer $B \Rightarrow C$ ise, o halde her $C' \Rightarrow C$ için $B \Rightarrow C'$,

Özel olarak;

c) $B \Rightarrow C$ ise, her $a \in C$ için $B \Rightarrow \{a\}$,

Ayrıca,

d) Eğer B', B'nin bir indirgemesi ise, o halde her $a, b \in B'$ için ne $\{a\} \Rightarrow \{b\}$ ne de $\{b\} \Rightarrow \{a\}$ geçerli değildir. Yani bir indirgemedeki tüm öznitelikler çift olarak bağımsızdır.

İndirgemenin daha iyi anlaşılabilmesi için Pawlak (1991) tarafından verilen örneği aşağıda verelim.

Örnek 3.4 Pawlak (1991) Çizelge 3.7'deki gibi bir karar çizelgesi verilmiş olsun

Çizelge 3.7 Karar çizelgesi

$\mathcal{U}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{d}$	$\boldsymbol{e}$
1	1	0	0	1	1
2	1	0	0	0	1
3	0	0	0	0	0
4	1	1	0	1	0
5	1	1	0	2	2
6	2	1	0	2	2
7	2	2	2	2	2

a, b, c ve d durum özninelikleri ve e'nin karar özniteliği olduğunu kabul edelim. Yani $C = \{a, b, c, d\}$ ve $D = \{e\}$. O halde Çizelge 3.7'deki c özniteliğine karşılık gelen sütunu kaldırdığımızda Çizelge 3.8'i elde ederiz ve c durum özniteliğinin D-vazgeçilebilir olduğunu görebiliriz.

Çizelge 3.8 Karar çizelgesi

$\mathcal{U}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{d}$	$\boldsymbol{e}$
1	1	0	1	1
2	1	0	0	1
3	0	0	0	0
4	1	1	1	0
5	1	1	2	2
6	2	1	2	2
7	2	2	2	2

Bir sonraki adımda, her karar kuralında koşul niteliklerinin gereksiz değerlerini azaltmamız gerekir. Bu amaçla, öncelikle her karar kuralında koşul niteliklerinin çekirdek değerlerini hesaplamamız gerekir.

Örnekleme amacıyla, ilk karar kuralı için koşul niteliklerinin çekirdek değerlerini, yani kümeler ailesinin çekirdeğini hesaplayalım. Burada yukarıdaki örnekteki x değeri 1 olarak göz önüne alınıyor. Aşağıdaki sınıflar elde edilirken $a(1) = a(2) = a(4) = a(5) = 1$ olduğundan $[1]_a$, $b(1) = b(2) = b(3) = 0$ olduğundan $[1]_b$ ve $d(1) = d(4) = 1$ olduğundan $[1]_d$ denklik sınıfları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$[1]_a = \{1,2,4,5\}$$
$$[1]_b = \{1,2,3\}$$
$$[1]_d = \{1,4\}$$

ve $\mathcal{A} = \{[1]_a, [1]_b, [1]_d\} = \{\{1,2,4,5\}, \{1,2,3\}, \{1,4\}\}$.

Önceki bölümlerden biliyoruz ki

$[1]_{\{a,b,d\}} = [1]_a \cap [1]_b \cap [1]_d = \{1,2,4,5\} \cap \{1,2,3\} \cap \{1,4\} = \{1\}$ ve $a(1) = 1$, $b(1) = 0$ ve $d(1) = 1$. Vazgeçilebilir kategorileri bulmak için, bir seferde bir kategoriyi düşürmeli ve kalan kategorilerin kesişiminin hala karar kategorisine $[1]_e = \{1,2\}$ dahil edilip edilmediğini kontrol etmeliyiz. Yani

$$[1]_b \cap [1]_d = \{1,2,3\} \cap \{1,4\} = \{1\}$$

$$[1]_a \cap [1]_d = \{1,2,4,5\} \cap \{1,4\} = \{1,4\}$$

$$[1]_a \cap [1]_b = \{1,2,4,5\} \cap \{1,2,3\} = \{1,2\}$$

Bu, çekirdek değerin $b(1) = 0$ olduğu anlamına gelir. Benzer şekilde, her karar kuralındaki koşul niteliklerinin kalan çekirdek değerlerini hesaplayabiliriz ve nihai sonuçlar aşağıdaki Çizelge 3.9'da sunulmaktadır.

Çizelge 3.9 Karar çizelgesi

$\mathcal{U}$	a	b	d	e
1	-	0	-	1
2	1	-	-	1
3	0	-	-	0
4	-	1	1	0
5	-	-	2	2
6	-	-	-	2
7	-	-	-	2

Durum özniteliklerinin çekirdek değerlerini hesapladıktan sonra, değer indirgemelerini hesaplamaya geçebiliriz. Bir örnek olarak, karar çizelgesinin ilk karar kuralı için değer indirgemelerini hesaplayalım. $\mathcal{A} = \{[1]_a, [1]_b, [1]_d\} = \{\{1,2,4,5\}, \{1,2,3\}, \{1,4\}\}$ ailesinin indirgenmişini hesaplamak için $\cap \mathcal{B} \subseteq [1]_e = \{1,2\}$ olacak şekildeki $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ alt ailelerini bulmamız gerekir.

$\mathcal{A}$ ailesinin aşağıdaki gibi üç alt ailesi vardır.

$$[1]_b \cap [1]_d = \{1,2,3\} \cap \{1,4\} = \{1\}$$

$$[1]_a \cap [1]_d = \{1,2,4,5\} \cap \{1,4\} = \{1,4\}$$

$$[1]_a \cap [1]_b = \{1,2,4,5\} \cap \{1,2,3\} = \{1,2\}$$

Fakat bunlardan yalnızca aşağıdaki iki alt aile $\mathcal{A}'$nın indirgemesidir.

$$[1]_b \cap [1]_d = \{1,2,3\} \cap \{1,4\} = \{1\} \subseteq [1]_e = \{1,2\}$$

Ve

$$[1]_a \cap [1]_b = \{1,2,4,5\} \cap \{1,2,3\} = \{1,2\} \subseteq [1]_e = \{1,2\}$$

Bu nedenle iki değer indirgememiz vardır: $b(1) = 0$ ve $d(1) = 1$ veya $a(1) = 1$ ve $b(1) = 0$. Bu, a ve b veya d ve b özniteliklerinin değerlerinin karar sınıfı 1 için karakteristik olduğu ve karar çizelgesindeki diğer karar sınıflarında bulunmadığı anlamına gelir. Ayrıca, b özniteliğinin değerinin her iki değer indirgemesinin kesişimi olduğunu, $b(1) = 0$ olduğunu, yani çekirdek değer olduğunu görürüz.

Çizelge 3.10'da çizelge 3.8'deki her bir karar kuralı için değer indirgemeleri gösterilmiştir.

Çizelge 3.10 Karar kuralı indirgeme çizelgesi

$\boldsymbol{\mathcal{U}}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{d}$	$\boldsymbol{e}$
1	1	0	×	1
$\mathbf{1'}$	×	0	1	1
2	1	0	×	1
$\mathbf{2'}$	1	×	0	1
3	0	×	×	0
4	×	1	1	0
5	×	×	2	2
6	×	×	2	2
$\mathbf{6'}$	2	×	×	2
7	×	×	2	2
$\mathbf{7'}$	×	2	×	2
$\mathbf{7''}$	2	×	×	2

Çizelge 3.10'da görebileceğimiz gibi karar kuralları 1 ve 2 için durum özniteliklerinin iki değer indirgemesi vardır. Karar kuralları 3, 4 ve 5, her karar kuralı satırı için durum özniteliklerinin yalnızca bir değer indirgemesine sahiptir. Geriye kalan karar kuralları 6 ve 7 sırasıyla iki ve üç değer indirgemesi içerir.

Dolayısıyla karar kuralı 1 ve 2'nin iki indirgenmiş biçimi vardır, karar kuralı 3, 4 ve 5'in her birinin yalnızca bir indirgenmiş biçimi vardır, karar kuralı 6'nın iki indirgemesi ve karar kuralı 7'nin üç indirgemesi vardır.

Dolayısıyla problemimizde $4 \times 2 \times 3 = 24$ (mutlaka farklı olması gerekmeyen) çözüm vardır. Bu çözümlerden biri aşağıda Çizelge 3.11’de sunulmuştur.

Çizelge 3.11 İndirgeme çizelgesi 1

$\boldsymbol{\mathcal{U}}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{d}$	$\boldsymbol{e}$
1	1	0	×	1
2	1	×	0	1
3	0	×	×	0
4	×	1	1	0
5	×	×	2	2
6	×	×	2	2
7	2	×	×	2

Diğer bir indirgeme Çizelge 3.12 de verilmiştir.

Çizelge 3.12 İndirgeme çizelgesi 2

$\boldsymbol{\mathcal{U}}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{d}$	$\boldsymbol{e}$
1	1	0	×	1
2	1	0	×	1
3	0	×	×	0
4	×	1	1	0
5	×	×	2	2
6	×	×	2	2
7	×	×	×	2

1 ve 2 karar kuralları aynı olduğu ve 5, 6 ve 7 karar kuralları da aynı olduğu için Çizelgeyi aşağıdaki şekildeki gibide gösterebiliriz:

Çizelge 3.13 İndirgemelerin diğer bir gösterimi 1

$\boldsymbol{\mathcal{U}}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{d}$	$\boldsymbol{e}$
1,2	1	0	×	1
3	0	×	×	0
4	×	1	1	0
5,6,7	×	×	2	2

Aslında karar kurallarının sıralanması şart değildir, bu nedenle bunları keyfi olarak sıralayabiliriz ve sonuç olarak Çizelge 3.14 elde edilir.

Çizelge 3.14 İndirgemelerin diğer bir gösterimi 2

$\boldsymbol{\mathcal{U}}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{d}$	$\boldsymbol{e}$
1	1	0	×	1
2	0	×	×	0
3	×	1	1	0
4	×	×	2	2

4. BULANIK YAKLAŞIMLI KÜMELER

4.1 Bulanık Kümeler ve Bağıntılar

$\mathcal{X} \neq \emptyset$ kümesi üzerinde bir A bulanık kümesi $\mathcal{X}'$ten $[0,1]$ aralığına tanımlı bir dönüşümdür (Zadeh 1965). Bir $\mathcal{R}$ bulanık bağıntı ise $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ kartezyen çarpım kümesinden [0,1] aralığına tanımlı bir dönüşümdür (Bojedziev 1992). $\mathcal{X}$' teki her y elemanı için, $\mathcal{R}y$ ile gösterilen $\mathcal{R}$-önkümesi her $x \in \mathcal{X}$ için aşağıdaki gibi ifade edilen bir bulanık kümedir (De Cock *et al.* 2007)

$$\mathcal{R}y(x) = \mathcal{R}(x, y)$$

Bulanık kümenin tümleyen kavramı bulanık yaklaşımlı kümelerin tanımlanmasında önemli bir yere sahiptir. Bu yüzden genel bir kavram olan değilleme kavramının en genel halinden bahsedeceğiz.

[0,1] aralığından [0,1] aralığına tanımlı bir değilleme dönüşümü $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}(0) = 1$ ve $\mathcal{N}(1) = 0$ şartını sağlayan azalan bir dönüşümdür (Trillas 1979, Fodor and Roubens 1994). Eğer her $x \in [0,1]$ için $\mathcal{N}(\mathcal{N}(x)) = x$ ise involüttür denir. Standart değilleme dönüşümü $\mathcal{N}_s$ ile gösterilir ve $\mathcal{N}_s = 1 - x$ şeklinde tanımlanır.

Bir değilleme, bulanık kümenin tümleyeni kavramını ifade etmek için kullanılır. Bir A bulanık kümesinin değillemesi $co_{\mathcal{N}}(A) = \mathcal{N}(A(x))$ ile tanımlanır.

Örnek 4.1 $\delta_1 = \{1,4\}$ ve $\delta_2 = \{3,2\}$ kümeleri üzerinde bir bulanık bağıntı $\mathcal{R}$: " -den daha küçük" bağıntısı ve aşağıdaki üyelik fonksiyonu veriliyor.

$$\mathcal{R}(a,b) = \mu_{\mathcal{R}}(a,b) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + \frac{100}{(a-b)^2}}, & b < a \\ 0, & diğer \end{cases}$$

$\delta_1 \times \delta_2 = \{(1,3),(1,2),(4,3),(4,2)\}$ dır.

O halde $\mu_{\mathcal{R}}\big((1,3)\big) = 0$, $\mu_{\mathcal{R}}\big((1,2)\big) = 0$, $\mu_{\mathcal{R}}\big((4,3)\big) = \frac{1}{101}$ ve $\mu_{\mathcal{R}}\big((4,2)\big) = \frac{1}{26}$ dir. Böylece

$$\mathcal{R}3(1) = \mathcal{R}(1,3) = 0, \qquad \mathcal{R}2(1) = \mathcal{R}(1,2) = 0,$$

$$\mathcal{R}3(4) = \mathcal{R}(4,3) = \frac{1}{101}, \qquad \mathcal{R}2(4) = \mathcal{R}(4,2) = \frac{1}{26},$$

Şimdi bulanık küme işlemlerinin tanımlanmasında önemli bir yere sahip olan t-norm ve s-norm kavramlarının tanımını vereceğiz.

Tanım 4.2 (Schweizer and Sklar 1983) $\mathcal{T}$, $[0,1] \times [0,1]$ den $[0,1]$ aralığına tanımlı bir dönüşüm olsun. Eğer her $x \in [0,1]$ için $\mathcal{T}(1,x) = x$ ve $\mathcal{T}$ dönüşümü değişmeli, birleşmeli ve artan bir dönüşüm ise $\mathcal{T}$ dönüşümüne bir üçgensel norm (t-norm) denir.

Tanım 4.3 (Schweizer and Sklar 1983) $\mathcal{S}$, $[0,1] \times [0,1]$ den $[0,1]$ aralığına tanımlı bir dönüşüm olsun. Eğer her $x \in [0,1]$ için $\mathcal{S}(0,x) = x$ ve $\mathcal{S}$ dönüşümü değişmeli, birleşmeli ve artan bir dönüşüm ise $\mathcal{S}$ dönüşümüne bir üçgensel konorm (s-norm) denir. Bundan sonra t-norm ve s-norm kavramları kullanılacaktır.

Bazı önemli t-norm ve s-normlar (Zadeh 1965, Fodor and Roubens 1994 , Hajek 1998) aşağıda verilmiştir.

Çizelge 4.1 Bazı önemli t-norm ve s-normlar

t-norm	s-norm
$\mathcal{T}_M(x,y) = \min(x,y)$ $\mathcal{T}_P(x,y) = xy$ $\mathcal{T}_W(x,y) = mak(x+y-1,0)$	$\mathcal{S}_M(x,y) = \mathrm{mak}(x,y)$ $\mathcal{S}_P(x,y) = x+y-xy$ $\mathcal{S}_W(x,y) = min(x+y,1)$

Bir $\mathcal{X}$ kümesi üzerindeki A ve B bulanık kümelerinin $\mathcal{T}-$kesişim ve $\mathcal{S}-$birleşim işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanır. Her $x \in \mathcal{X}$ için

$$(A \cap_{\mathcal{T}} B)(x) = \mathcal{T}(A(x), B(x))$$

$$(A \cap_{\mathcal{S}} B)(x) = \mathcal{S}(A(x), B(x))$$

Bu tez boyunca bulanık tümleyen için standart değilleme, bulanık kesişim işlemi için $\mathcal{T}_M$ ve bulanık birleşim işlem için $\mathcal{S}_M$ t-norm ve s-normunu kullanacağız.

Örnek 4.4 (De Cork *et al.* 2007) $\mathcal{T}$ keyfi bir t-norm olsun. $X = \{a, b\}$ kümesi üzerinde $\mathcal{T}$-denklik bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlansın.

$\mathcal{R}$	a	b
a	1.0	0.2
b	0.2	1.0

Burada $\mathcal{R}a(a) = 1.0$, $\mathcal{R}a(b) = 0.2$, $\mathcal{R}b(a) = 0.2$, $\mathcal{R}b(b) = 1.0$ dır. O halde $\mathcal{T}$ t-normu için

$$(\mathcal{R}a \cap_{\mathcal{T}} \mathcal{R}b)(a) = (\mathcal{R}a \cap_{\mathcal{T}} \mathcal{R}b)(b) = \mathcal{T}(1.0,0.2) = 0.2$$

Bu $\mathcal{R}a$ ve $\mathcal{R}b$ önkümelerinin ayrık olmadığı anlamına gelir.

Yukarıdaki örnekte $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ normu kullanılmıştır. Diğer t-norm ve s-normlar için sonuçlar aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\left(\mathcal{R}a \cap_{\mathcal{T}_{\mathcal{P}}} \mathcal{R}b\right)(a) = \left(\mathcal{R}a \cap_{\mathcal{T}_{\mathcal{P}}} \mathcal{R}b\right)(b) = \mathcal{T}_{\mathcal{P}}(1.0,0.2) = 1.0 \times 0.2 = 0.2$$

$$\left(\mathcal{R}a \cap_{\mathcal{T}_{\mathcal{W}}} \mathcal{R}b\right)(a) = \left(\mathcal{R}a \cap_{\mathcal{T}_{\mathcal{W}}} \mathcal{R}b\right)(b) = \mathcal{T}_{\mathcal{T}_{\mathcal{W}}}(1.0,0.2) = mak(1 + 0.2 - 1, 0) = 0.2$$

$$\left(\mathcal{R}a \cap_{\mathcal{S}_{\mathcal{M}}} \mathcal{R}b\right)(a) = \left(\mathcal{R}a \cap_{\mathcal{S}_{\mathcal{M}}} \mathcal{R}b\right)(b) = S_{\mathcal{M}}(1.0,0.2) = mak(1,0.2) = 1$$

$$\left(\mathcal{R}a \cap_{\mathcal{S}_{\mathcal{P}}} \mathcal{R}b\right)(a) = \left(\mathcal{R}a \cap_{\mathcal{S}_{\mathcal{P}}} \mathcal{R}b\right)(b) = \mathcal{S}_{\mathcal{P}}(1.0,0.2) = 1 + 0.2 - 1 \times 0.2 = 0.2$$

$$\left(\mathcal{R}a \cap_{\mathcal{S}_W} \mathcal{R}b\right)(a) = \left(\mathcal{R}a \cap_{\mathcal{S}_W} \mathcal{R}b\right)(b) = \mathcal{S}_W(1.0,0.2) = min(1 + 0.2, 1) = 1.$$

Tanım 4.5 (Fodor 1991) $\mathcal{I}$, $[0,1]^2$'den $[0,1]$'e tanımlı bir dönüşüm olsun. Eğer her $x \in [0,1]$ için $\mathcal{I}(0,0) = 1$ ve $\mathcal{I}(1,x) = x$ ise $\mathcal{I}$ dönüşümüne bir içerme denir.

Bir içermenin ilk bileşeni azalan ikinci bileşeninin artan olması gerekmektedir.

$\mathcal{T}$ bir t-norm ise $\mathcal{T}$ normuna bağlı olarak, $\mathcal{I}_\mathcal{T}$ ile gösterilen içerme $x \in [0,1]$ için aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\mathcal{I}_\mathcal{T}(x,y) = sup\{\lambda | \lambda \in [0,1] \ ve \ \mathcal{T}(x,\lambda) \leq y\}$$

(Kacprzyk, 2013)

Bu içerme artık içerme olarak adlandırılır. Eğer $\mathcal{T}$ bir t-norm be $\mathcal{N}$ bir involutif değilleme ise o halde her $x, y \in [0,1]$ için $\mathcal{I}_{\mathcal{T},\mathcal{N}}(x,y) = \mathcal{N}(\mathcal{T}(x,\mathcal{N}(y))$ $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{N}$ tarafından üretilen bir $\mathcal{S}$-içerme olarak adlandırılır. Çizelge 4.2 de bazı önemli $\mathcal{S}$-artık içermeler verilmiştir. Bu çalışmada $\mathcal{S}$-içermeler standart değilleme $\mathcal{N}_s$ ile üretilmiştir.

Çizelge 4.2 Bazı önemli içermeler

$\mathcal{S}$-içerme	Artık içerme
$\mathcal{I}_{\mathcal{S}_M}(x,y) = \text{mak}\,(1-x,y)$ $\mathcal{I}_{\mathcal{S}_P}(x,y) = 1 - x + xy$ $\mathcal{I}_{\mathcal{S}_W}(x,y) = min(1 - x + y, 1)$	$\mathcal{I}_{\mathcal{T}_M}(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ y, & diğer \end{cases}$ $\mathcal{I}_{\mathcal{T}_P}(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ \frac{y}{x}, & diğer \end{cases}$ $\mathcal{I}_{\mathcal{T}_W}(x,y) = \min\,(1 - x + y, 1)$

Bulanık yaklaşımlı küme teorisinde, bazı elemanların birbirlerine benzerlik derecelerini ifade etmek için bir yönteme ihtiyaç duyarız. Benzerlik, bulanık tolerans bağıntısı $\mathcal{R}$ (Komorowski and Pawlak 1999) ile modellenebilir. Yani, her $x, y \in \mathcal{X}$ için

$$\mathcal{R}(x,x) = 1 \text{ (yansıma)}$$

$$\mathcal{R}(x,y) = \mathcal{R}(y,x) \text{ (simerti)}$$

Özellikleri sağlanır. Ek olarak $\mathcal{T}$-geçişme özelliği aşağıdaki gibi ifade edilebilir. Her $x, y, z \in \mathcal{X}$ için.

$$\mathcal{T}\big(\mathcal{R}(x,y), \mathcal{R}(y,z)\big) \leq \mathcal{R}(x,z)$$

Eğer yukarıdaki üç özellikte sağlanıyorsa $\mathcal{R}$ bir $\mathcal{T}$-denklik bağıntısı olarak isimlendirilir. $\mathcal{T}$-denklik bağıntıları genellikle yaklaşık eşitlik ilişkisini göz önüne almak için kullanılır. Genelde bir bulanık tolerans bağıntısı $\mathcal{R}$ için $\mathcal{R}y$, y'nin bulanık benzerlik sınıfı diye isimlendirilir.

4.2 Bulanık Yaklaşımlı Kümeler

Pawlak'ın tanımının ruhuna uygun olarak alt ve üst yaklaşımların bulanıklaştırılmasına yönelik araştırmalar 1980'lerin sonlarında ortaya çıktı. Kronolojik olarak ilk öneriler Nakamura'ya (1988) ve Del Cerro ve Prade'nin (Del Cerro and Prade 1986) daha önceki bir yayınından ilham alan Dubois ve Prade'ye (Dubois and Prade 1990) aittir.

Genellemeleri geliştirirken odak noktası, elemanların ayırt edilemezliğinden ziyade (örneğin, bir bilgi sistemindeki öznitelik değerlerine göre) elemanların benzerlikleri olmuştur. Bu yaklaşımda elemanlar, birbirlerine benzerliklerine göre "yumuşak" sınırları olan sınıflara ayrılır. Bunun somut bir avantajı, sınıflar arasındaki ani geçişlerin yerini kademeli geçişlerin almasıdır; böylece bir elemanın (değişen derecelerde) birden fazla sınıfa ait olabilmesi sağlanır. Örneğin, bir bilgi çizelgesindeki "yaş" özelliğini göz önüne alalım, denklik sınıflarının sayısını kısıtlamak için, klasik yaklaşımlı küme teorisi, yaş değerlerinin evrenini [0, 10], [10, 20] aralıkları kullanarak kesin bir parçalanışını almamızı gerektirir. Ancak bu her zaman sezgilerimizi yansıtmaz: Bu kadar sert sınırlar vermek, on bir yaşına yeni girmiş bir kişi, [0, 10] sınıfından yalnızca minimum düzeyde uzakta olsa bile [0, 10] sınıfında dikkate alınmayacaktır.

Yukarıda belirtilenler ışığında birçok araştırmacı genelleştirilmiş yaklaşım operatörlerini tanımlamak için alternatifler önermiştir; bunların bazıları Iwinski-tipi (Nanda and Majumdar 1992) yaklaşımlı kümeler, aksiyomatik yaklaşımlar (Morsi and Yakout 1998), α-kesimleri (Yao 1997), seviye bulanık kümeleri (Liu *et al.* 2004) veya bulanık kapsama ölçümleri (Kuncheva 1992). Bazı yazarlar (Thiele 1998, Yao 1997), yaklaşımlı bulanık kümeler (kesin bir yaklaşım uzayındaki bir bulanık kümenin yaklaşımları) ve bulanık yaklaşımlı kümeler (bulanık bir yaklaşım uzayındaki bir kesin kümenin yaklaşımları, yani bir bulanık ilişki $\mathcal{R}$ ile tanımlanan) arasında açıkça bir ayrım yapmışlardır.

Daha önceki çalışmaları içine alan bulanık yaklaşımlı kümenin oldukça genel bir tanımı Radzikowska ve Kerre (2002) tarafından verilmiştir. Bir $\mathcal{X}$ kümesi üzerinde tanımlı bir bulanık A kümesinin alt ve üst yaklaşımlarını, $\mathcal{X}$'teki $\mathcal{R}_*(A)$ ve $\mathcal{R}^*(A)$ bulanık kümeleri olarak tanımlamak için, yaklaşımlı kümelerin alt ve üst yaklaşım kavramlarını bir içerme $\mathcal{I}$ ve bir t-norm $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{X}$'te bir bulanık $\mathcal{T}$-denklik bağıntısı $\mathcal{R}$ yardımıyla aşağıdaki gibi tanımladırlar. Her $y \in \mathcal{X}$ için

$$\mathcal{R}_*(A)(y) = \inf_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{I}(\mathcal{R}(x,y), A(x)) \qquad (4.1)$$

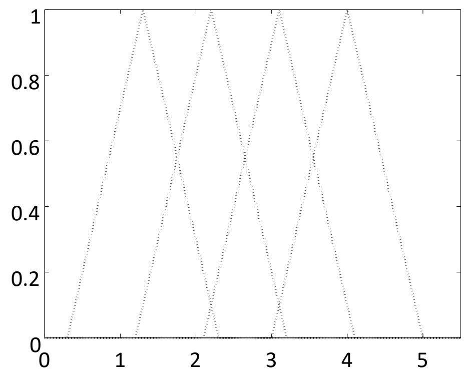
$$\mathcal{R}^*(A)(y) = \sup_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{T}(\mathcal{R}(x,y), A(x)) \qquad (4.2)$$

Burada $\mathcal{R}_*(A) = A_1$ ve $\mathcal{R}^*(A) = A_2$ olmak üzere (A_1, A_2), $(\mathcal{X}, \mathcal{R})$ de bir bulanık yaklaşımlı küme olarak adlandırılır. Ayrıca $\mathcal{R}_*(A)$ kümesi A bulanık kümesinde $\mathcal{R}y$'nin içerme derecesi $\mathcal{R}^*(A)$ kümesi ise A bulanık kümesinde $\mathcal{R}y$'nin aşma derecesi olarak isimlendirilir.

Ancak bu tanım eğer $\mathcal{R}$ bulanık bir $\mathcal{T}$-denklik bağıntısı ise, orta üyelik dereceleri nedeniyle farklı öngörülerin zorunlu olarak ayrık olmamasının oldukça normal olduğu gerçeğidir. (De Cock *et al.* 2007)' dan alınan aşağıdaki örnek bunu göstermektedir.

Örnek 4.6 Uygulamalarda $\mathcal{T}_W$ t-normunu sıklıkla kullanırız. Çünkü $\mathcal{T}_W$-denklik bağıntısı pseudo-metriğin dualidir. $\mathfrak{R}$, reel sayılar kümesi üzerinde her $x, y \in \mathfrak{R}$ için

$\mathcal{R}(x,y) = mak(1 - |x-y|,0)$ şeklinde tanımlanan bir $\mathcal{T}_W$-denklik bağıntısı olsun. Şekil 4.1, 1.3, 2.2, 3.1 ve 4' ün $\mathcal{R}$-önkümelerini göstersin



Şekil 4.1 Bulanık benzerlik sınıfları (De Cock *et al.* 2007)

Burada 3.1 ve 4'ün $\mathcal{R}$-önkümeleri açık bir şekilde farklıdır.

$$\mathcal{R}(3.1,3.5) = mak(1 - |3.1 - 3.5|, 0) = 0.6$$

$$\mathcal{R}(4.0,3.5) = mak(1 - |4 - 3.5|, 0) = 0.5$$

dir.

$\mathcal{T}_W(0.6,0.5) = mak(0.6 + 0.5 - 1,0) = 0.1$ olduğundan dolayı 3.5'in 3.1 ve 4'ün R-önkümelerinin, yani $\mathcal{R}3.5(3.1)$ ve $\mathcal{R}3.5(4)$ 'nin $\mathcal{T}_W$-kesişimi 0.1 dir. O halde 3.1 ve 4'ün $\mathcal{R}$-önkümeleri ayrık değildir.

Başka bir deyişle, denk ve denk olmayan bağıntılar arasındaki geleneksel ayrım, bulanık bir $\mathcal{T}$-denklik bağıntısı göz önüne alındığında ortadan kalkar, dolayısıyla herhangi bir elemanın aynı anda çeşitli $\mathcal{R} -$ önkümelerine bir dereceye kadar ait olabileceği söylenebilir. Bu nedenle genelleştirilmiş yaklaşım uzayındaki yaklaşımlı kümelerle ilgili tanımlara ilişkin doğal genellemeler (De Cock *et al.* 2004, De Cock *et al.* 2007) ortaya konulmuştur.

Şu ana kadar kullanılan tanıma göre, eğer $\mathcal{R}y$ A tarafından kapsanıyorsa y, A'nın alt yaklaşımına ait olduğu söylenmekteydi. Bununla birlikte, yukarıdaki tartışma göz önüne alındığında, y'yi içeren diğer $\mathcal{R} -$önkümelerini de dikkate almak ve bunlarında alt yaklaşıma dahil edildiğini söylemek ve üst yaklaşımının ise A ile örtüştüğünü söylemek yerinde olacaktır. Alt yaklaşım için de A'ya ve üst yaklaşım için bunların A ile örtüştüğü fikri ilk kez Pomykala (1987) tarafından öne sürülmüştür. Bu fikre dayanarak, A'nın alt ve üst yaklaşımı için aşağıdaki tanımlar verilebilir.

Tanım 4.7 (Pomykala 1987)

1. y, A'nın alt yaklaşımına aittir ancak ve ancak

a. y' yi içeren bütün ön kümeler A tarafından kapsanır

b. A tarafından kapsanan en az bir $\mathcal{R}$-önkümesi vardır

c. $\mathcal{R}y$, A tarafından kapsanır.

2. y, A'nın üst yaklaşımına aittir ancak ve ancak

a. y'yi içeren bütün $\mathcal{R}$ −önkümeleri A ile boştan farklı bir kesişime sahiptir

b. A ile kesişimleri boştan farklı olan ve y yi içeren en az bir R-önkümesi vardır

c. $\mathcal{R}y$ ile A nın kesişimi boştan farklıdır.

Yukarıdaki ifadeler aşağıdaki gibi sembolize edilir.

1. A'nın sıkı, gevşek ve olağan alt yaklaşımı şu şekilde tanımlanır: her $y \in \mathcal{X}$ için

a) $\mathcal{R}_*\big(\mathcal{R}_*(A)\big)(y) = \inf_{z \in X} \mathcal{I}(\mathcal{R}z(y), \inf_{x \in X} \mathcal{I}(\mathcal{R}z(x), A(x)))$

b) $\mathcal{R}^*\big(\mathcal{R}_*(A)\big)(y) = \sup_{z \in X} \mathcal{T}(\mathcal{R}z(y), \inf_{x \in X} \mathcal{I}(\mathcal{R}z(x), A(x)))$

c) $\mathcal{R}_*(A)(y) = \inf_{x \in X} \mathcal{I}(\mathcal{R}y(x), A(x))$

2. A'nın sıkı, gevşek ve olağan üst yaklaşımı şu şekilde tanımlanır: her $y \in \mathcal{X}$ için

a) $\mathcal{R}_*\big(\mathcal{R}^*(A)\big)(y) = \inf_{z \in \mathcal{X}} \mathcal{I}(\mathcal{R}z(y), \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{T}(\mathcal{R}z(x), A(x)))$

b) $\mathcal{R}^*\big(\mathcal{R}^*(A)\big)(y) = \sup_{z \in \mathcal{X}} \mathcal{T}(\mathcal{R}z(y), \sup_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{T}(\mathcal{R}z(x), A(x)))$

c) $\mathcal{R}^*(A)(y) = \sup_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{T}(\mathcal{R}y(x), A(x))$

Burada ki "sıkı yaklaşım" terimi tam ve tutarlı koşulları doğuran bütün bulanık benzerlik sınıflarının hesaba katılmasını ifade eder. "gevşek yaklaşım" terimi ise sadece en iyi olanı göz önüne aldığımız durumu ifade eder. Burada 1c ve 2c'de verilen ifadeler sırasıyla literatürde var olan denklem (4.1) ve (4.2) deki bulanık alt ve üst yaklaşımları ifade etmektedir. 1b ve 2a daki tanımlar (Bodanhofer 2003) de sırasıyla genelleştirilmiş açılış ve kapanış operatörleridir. Ayrıca, klasik küme teorisine göre düşündüğümüzde, (1a)' dan (1c)' ye kadar olan seçenekler ve (2a)'dan (2c)'ye kadar olan seçenekler çakışmaktadır, çünkü y'nin ait olduğu tam olarak bir denklik sınıfı $\mathcal{R}y$ vardır.

Tezin kalan kısımlarında $\mathcal{R}$ bir benzerliği modeleyen bir bağıntı ise $\mathcal{R}$ bağıntısı X üzerinde yansıyan ve simetrik bir bağıntı olarak göz önüne alınacaktır. Bazı durumlarda $\mathcal{R}$ bağıntısının $\mathcal{T}$-geçişli olması gerekebilir.

4.3 Yaklaşımlar Arasındaki İlişkiler

$\mathcal{R}$'nin simerti özelliğini göz önüne alarak aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

Önerme 4.8 (De Cock *et al.* 2007) $\mathcal{X}$ kümesi üzerinde bir bulanık küme A olsun.

$$(\mathcal{R}_*)_*(A) = \mathcal{R}_*(\mathcal{R}_*(A))$$

$$(\mathcal{R}^*)_*(A) = \mathcal{R}^*(\mathcal{R}_*(A))$$

$$(\mathcal{R}_*)^*(A) = \mathcal{R}_*\left(\mathcal{R}^*(A)\right)$$

$$(\mathcal{R}^*)^*(A) = \mathcal{R}^*(\mathcal{R}^*(A))$$

Aşağıdaki önerme alt ve üst yaklaşım fikrini destekler.

Önerme 4.9 (Radzikowska and Kerre 2002) $\mathcal{X}$ kümesi üzerinde bir bulanık küme A olsun.

$$\mathcal{R}_*(A) \subseteq A \subseteq \mathcal{R}^*(A)$$

Önerme 4.10 (Radzikowska and Kerre 2002) $\mathcal{X}$ kümesi üzerinde tanımlı her A ve B bulanık kümesi için $A \subseteq B$ ise

a) $\mathcal{R}_*(A) \subseteq \mathcal{R}_*(B)$
b) $\mathcal{R}^*(A) \subseteq \mathcal{R}^*(B)$
c) $(\mathcal{R}^*)^*(A) \subseteq (\mathcal{R}^*)^*(B)$
d) $(\mathcal{R}_*)^*(A) \subseteq (\mathcal{R}_*)^*(B)$
e) $(\mathcal{R}^*)_*(A) \subseteq (\mathcal{R}^*)_*(B)$
f) $(\mathcal{R}_*)_*(A) \subseteq (\mathcal{R}_*)_*(B)$

Bu özellikleri bir önceki önermeyle birleştirdiğimizde sıkı alt ve gevşek üst yaklaşımların aslında sırasıyla $\mathcal{R}_*(A)$'nın alt kümesi ve $\mathcal{R}^*(A)$ nın bir üst kümesi olduğu sonucuna ulaşırız.

Önerme 4.11 (Radzikowska and Kerre 2002) $\mathcal{X}$ kümesi üzerinde bir bulanık küme A olsun.

$$(\mathcal{R}_*)_*(A) \subseteq \mathcal{R}_*(A) \subseteq A \subseteq \mathcal{R}^*(A) \subseteq (\mathcal{R}^*)^*(A)$$

$$\mathcal{R}_*(A) \subseteq (\mathcal{R}^*)_*(A) \subseteq \mathcal{R}^*(A)$$

$$\mathcal{R}_*(A) \subseteq (\mathcal{R}_*)^*(A) \subseteq \mathcal{R}^*(A)$$

Burada $(\mathcal{R}_*)_*(A)$, $\mathcal{R}_*(A)$, $\mathcal{R}^*(A)$ ve $(\mathcal{R}^*)^*(A)$ sırasıyla "son derece A", "çok A", "az çok A" ve "yaklaşık A" olarak dilsel değişkenlere karşılık gelir. (De Cock 2002).

Bu önerme kapsama bağıntısı açısından gevşek alt yaklaşım ve sıkı üst yaklaşım arasındaki ilişki ile ilgili doğrudan bir bilgi vermez. Aşağıdaki önerme bu duruma bir açıklama getirmektedir.

Önerme 4.12 (De Cock *et al.* 2007) Eğer her $x, y \in [0,1]$ için $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{I}$ operatörleri $\mathcal{T}\big(x, \mathcal{I}(x,y)\big) \leq y$ ve $y \leq \mathcal{I}(x, \mathcal{T}(x,y))$ ilişkilerini sağlarsa X üzerindeki her A bulanık kümesi için

$$(\mathcal{R}^*)_*(A) \subseteq A \subseteq (\mathcal{R}_*)^*(A)$$

dır.

Özel olarak $\mathcal{T}$ bir sol sürekli t-norm ve $\mathcal{I}$, $\mathcal{T}$'nin bir artık içermesi ise o halde özellik sağlanır. Önerme diğer durumlarda genel olarak sağlanmaz. Bu durum aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 4.13 (De Cock *et al.* 2007) $\boldsymbol{\mathcal{X}} = \{a, b\}$ kümesi üzerinde aşağıdaki gibi verilen R, $\mathcal{T}$-denklik bağıntısını göz önüne alalım

$\mathcal{R}$	a	b
a	1.0	0.2
b	0.2	1.0

$\mathcal{X}$ kümesi üzerinde bir A bulanık kümesi $A(a) = 1$ ve $A(b) = 0.8$ olarak tanımlansın. Ayrıca $\mathcal{T} = \mathcal{T}_M$ ve $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathcal{S}_M, \mathcal{N}_s}$ olsun. O halde $\mathcal{R}^*(A)(a) = 1$ ve $\mathcal{R}^*(A)(b) = 0.8$ dir. Böylece,

$$(\mathcal{R}_*)^*(A)(a) = \min\big(mak(0,1), mak(0.8,0.8)\big) = 0.8$$

Buradan $A \nsubseteq (\mathcal{R}_*)^*(A)$ olduğu açıktır. Ayrıca aşağıdaki ilişkiler elde edilir

$$(\mathcal{R}_*)_*(A) \subseteq \mathcal{R}_*(A) \subseteq (\mathcal{R}^*)_*(A) \subseteq A \subseteq (\mathcal{R}_*)^*(A) \subseteq \mathcal{R}^*(A) \subseteq (\mathcal{R}^*)^*(A)$$

Bu ise $\mathcal{T}$'nin Önerme 4.12'yi sağladığını gösterir.

Burada $\mathcal{R}$ bağıntısının yansıma ve simetri özelliğini sağladığına dikkat edilmelidir. Bu sıkı ve gevşek yaklaşımlar için alt ve üst ismini doğrular. Ayrıca aşağıdaki örnek yeni yaklaşımların mevcut yaklaşımlardan farklı olduğunu gösterir.

Örnek 4.14 (De Cock *et al.* 2007) $\boldsymbol{\mathcal{X}} = [0,1]$ ve $\mathcal{X}$ kümesi üzerinde A bulanık kümesi her $x \in \mathcal{X}$ için $A(x) = x$ şeklinde tanımlansın. $\mathcal{R}$'de $\mathcal{X}$ üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanan yansımalı ve simetrik bir bağıntı olsun. Her $x, y \in \mathcal{X}$ için

$$\mathcal{R}(x,y) = \begin{cases} 1, & |x-y| \leq 0.1 \\ 0, & diğer \end{cases}$$

O halde
$$\begin{aligned} \mathcal{R}_*(A)(y) &= inf_{z\in\mathcal{X}}\mathcal{I}\big(\mathcal{R}(z,y), A(z)\big) \\ &= \inf\{z|z \in \mathcal{X} \wedge z \in (y-0.1, y+0.1)\} \\ &= mak(0, y-0.1) \end{aligned}$$

Böylece $\mathcal{R}_*(A)(0.95) = 0.85$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^*(A)(y) &= sup_{z\in\mathcal{X}}\mathcal{T}(A(z), \mathcal{R}(z,y)) \\ &= sup\{z|z \in \mathcal{X} \wedge z \in (y-0.1, y+0.1)\} \\ &= min(1, y+0.1) \end{aligned}$$

Böylece $\mathcal{R}^*(0.05) = 0.15$.

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}_*)_*(A)(0.95) &= \inf_{z\in\mathcal{X}} \mathcal{I}\big(\mathcal{R}(z, 0.95), mak(0, z-0.1)\big) \\ &= inf\{mak(0, z-0.1)|z \in (0.85,1]\} = 0.75 \end{aligned}$$

ve

$$(\mathcal{R}^*)_*(A)(0.95) = \sup_{z \in \mathcal{X}} \mathcal{T}(\mathcal{R}(z, 0.95), mak(0, z - 0.1))$$

$$= sup\{mak(0, z - 0.1) | z \in (0.85, 1]\} = 0.9$$

Benzer şekilde $(\mathcal{R}^*)^*(A)(0.05) = 0.25$ ve $(\mathcal{R}_*)^*(A)(0.05) = 0.1$ dir. Bu örnek Tanım 4.7'de verilen yaklaşımların farklı yaklaşımlar olduğunu gösterir.

4.4 Küme Teorik İşlemlerle İlişkiler

Bulanık kümenin tümleyeni göz önüne alındığında alt yaklaşımın ve üst yaklaşımın birbirinin duali olduğu aşağıdaki önermede ifade edilmiştir.

Önerme 4.15 (De Cock 2002) $\mathcal{T}$ bir t-norm, $\mathcal{N}$ bir involütiv değilleme operatörü ve $\mathcal{I}$ bir $\mathcal{S}$-çıkarım; ya da $\mathcal{T}$ bir sol sürekli t-norm, $\mathcal{I}$ $\mathcal{T}$'nin çıkarımı ve $\mathcal{N}$ her $x \in [0,1]$ için $\mathcal{N}(x) = \mathcal{I}(x, 0)$ şeklinde tanımlı bir involüt değilleme ise o halde

$$\mathcal{R}^*(A) = co_{\mathcal{N}}(\mathcal{R}_*(co_{\mathcal{N}}A))$$

$$\mathcal{R}_*(A) = co_{\mathcal{N}}(\mathcal{R}^*(co_{\mathcal{N}}A))$$

Önerme 4.16 (Radzikowska and Kerre 2002) $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ kümesi üzerinde iki bulanık küme A ve B olsun. O halde;

1. $\mathcal{R}_*(A \cap B) = \mathcal{R}_*(A) \cap \mathcal{R}_*(B)$
2. $\mathcal{R}^*(A \cap B) \subseteq \mathcal{R}^*(A) \cap \mathcal{R}^*(B)$
3. $\mathcal{R}_*(A \cup B) = \mathcal{R}_*(A) \cup \mathcal{R}_*(B)$
4. $\mathcal{R}^*(A \cup B) = \mathcal{R}^*(A) \cup \mathcal{R}^*(B)$

Önerme 4.8'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

- $(\mathcal{R}_*)_*(A \cap B) = (\mathcal{R}_*)_*(A) \cap (\mathcal{R}_*)_*(B)$
- $(\mathcal{R}^*)^*(A \cup B) = (\mathcal{R}^*)^*(A) \cup (\mathcal{R}^*)^*(B)$

4.5 Maksimal Genişleme ve İndirgeme

Uygulamada, A'nın üst yaklaşımının alınması A'nın genişletilmesine karşılık gelirken, alt yaklaşım A'nın indirgenmesi anlamına gelir. Ancak bu süreç sonsuza kadar sürmez. Aşağıdaki özellik, gevşek alt yaklaşım kullanılarak maksimum küçültme ve sıkı üst yaklaşım kullanılarak genişlemenin elde edilebileceğinim ifade etmektedir.

Önerme 4.17 (Bodenhofer 2003) Eğer $\mathcal{T}$ bir sol-sürekli t-norm ve $\mathcal{I}$ $\mathcal{T}$'nin bir artık çıkarımı ise $\mathcal{X}$ üzerindeki her bulanık A kümesi için

$$(\mathcal{R}^*)_*\big((\mathcal{R}^*)_*(A)\big) = (\mathcal{R}^*)_*(A) \quad \text{ve } (\mathcal{R}_*)^*\big((\mathcal{R}_*)^*(A)\big) = (\mathcal{R}_*)^*(A)$$

Gevşek üst ve sıkı alt yaklaşımın genişleme ve indirgeme ile ilgili özelliklerini incelemek için öncelikle $\mathcal{R}$'nin kendisiyle olan bileşimiyle bağlantılar kurarız. $\mathcal{X}$'teki $\mathcal{R}$ ve $\mathcal{S}$ bulanık bağıntılarının bileşiminin, $\mathcal{X}$ 'teki $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ bulanık bağıntısı olduğunu ve aşağıdaki şekilde tanımlandığını hatırlatalım: her $x, z \in \mathcal{X}$ için

$$(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})(x,z) = \sup_{y\in\mathcal{X}} \mathcal{T}(\mathcal{R}(x,y), \mathcal{S}(y,z))$$

Önerme 4.18 (De Cock *et al.* 2007) Eğer $\mathcal{T}$ bir sol-sürekli t-norm ise o halde $\mathcal{X}$ üzerindeki her A bulanık kümesi için

$$(\mathcal{R}^*)^*(A) = (\mathcal{R} \circ \mathcal{R})^*(A)$$

dir.

İspat: Her $y \in \mathcal{X}$ için

$$\begin{aligned}\big((\mathcal{R} \circ \mathcal{R})^*\,(A)\big)(y) &= \sup_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{T}((\mathcal{R} \circ \mathcal{R})(x,y), A(x)) \\ &= sup_{x\in\mathcal{X}}\mathcal{T}(sup_{z\in\mathcal{X}}\mathcal{T}\big(\mathcal{R}(x,z), \mathcal{R}(z,y)\big), A(x)) \\ &= sup_{x\in\mathcal{X}}sup_{z\in\mathcal{X}}\mathcal{T}(\mathcal{T}\big(\mathcal{R}(x,z), \mathcal{R}(z,y)\big), A(x))\end{aligned}$$

$$= sup_{z\in\mathcal{X}}\mathcal{T}\left(\mathcal{R}(z,y), sup_{x\in\mathcal{X}}\mathcal{T}\big(\mathcal{R}(x,z),A(x)\big)\right)$$
$$= sup_{z\in\mathcal{X}}\,\mathcal{T}(\mathcal{R}(z,y),\mathcal{R}^*(A)(z))$$
$$= (\mathcal{R}^*)^*(A)(y)$$

Önerme 4.19 (De Cock *et al.* 2007) Eğer $\mathcal{J}'$nın ilk bileşeni sol-sürekli, ikinci bileşeni sağ sürekli ve $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{J}$ için $\mathcal{J}(\mathcal{T}(x,y),z)=\mathcal{J}(x,\mathcal{J}(y,z))$ ise o halde $\mathcal{X}$ üzerindeki her A bulanık kümesi için

$$(\mathcal{R}_*)_*(A) = (\mathcal{R}\circ\mathcal{R})_*(A)$$

dir.

İspat: İspat Önerme 4.18'in ispatına benzer şekilde yapılır.

Not 1: $n > 1$ için $\mathcal{R}^1 = \mathcal{R}$ ve $\mathcal{R}^n = \mathcal{R}\circ\mathcal{R}^{n-1}$.

Önerme 4.20 (Radzikowska and Kerre 2002) Eğer $\mathcal{R}$, $\mathcal{X}$ üzerinde bir $\mathcal{T}$-denklik bağıntısı ise, o halde

$$\mathcal{R}\circ\mathcal{R} = \mathcal{R}$$

dir.

Diğer bir ifadeyle bir $\mathcal{T}$-geçişli bulanık $\mathcal{R}$ bağıntısı göz önüne alındığında, Tanım 4.7 'nin (1a) ve (1c) seçeneklerinin yanı sıra (2b) ve (2c) seçenekleri de çakışır.

Aşağıdaki önerme bu koşullar altında sırasıyla (1b) ve (2a) tanımlarının da örtüştüklerini ifade etmektedir.

Önerme 4.21 (Bodenhofer 2003, Radzikowska and Kerre 2002) Eğer $\mathcal{R}$, $\mathcal{X}$ kümesi üzerinde bir bulanık $\mathcal{T}$-denklik bağıntısı, $\mathcal{T}$ bir sol-sürekli t-norm ve $\mathcal{J}$, $\mathcal{T}$'nin bir artık çıkarımı ise $\mathcal{X}$ üzerindeki her A bulanık kümesi için

$$(\mathcal{R}^*)_*(A) = \mathcal{R}_*(A) \text{ ve } (\mathcal{R}_*)^*(A) = \mathcal{R}^*(A)$$

dır.

Bu önerme, yaklaşık eşitliği modellemek için Tanım 4.7' deki yaklaşımlardan hangisinin kullanıldığına bakılmaksızın, bulanık bir $\mathcal{T}-$denklik bağıntısının kullanarak tek bir adımda maksimum indirgemeyi veya genişlemeyi elde edebileceğimiz anlamına gelir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde bulanık kümeler, bulanık küme işlemlerini, yaklaşımlı kümelerin temel tanımlarının literatürdeki çalışmalar ışığında sunuyoruz. Yaklaşımlı kümelerin bilgi sistemlerindeki temsillerini ve çıkarım yapmadaki uygulamalarından bazılarını detaylı olarak açıklıyoruz. Son olarak De Cock vd. (2007) makalesini detaylı olarak inceliyoruz. Bu çalışma derleme bir çalışma olup yaklaşımlı kümeler ve bulanık yaklaşımlı kümeler ile ilgili temel bilgileri literatürdeki kaynaklardan yararlanarak sunmayı amaçlamaktadır. Ayrıca bu çalışma bu alanda çalışmak isteyen araştırmacılar için Türkçe bir kaynak olması açısından önem arz etmektedir.

KAYNAKLAR

Bodenhofer, U. 2003. A unified framework of opening and closure operators with respect to arbitrary fuzzy relations, Soft Comput. 7: 220–227.

Bojadziev, G. and Bojadziev, M. 1995. Fuzzy sets, fuzzy logic, applications (Vol. 5). World Scientific.

Chen, D., Wang, C.Z. and Hu. Q.H. 2007. A new approach to attribute reduction of consistent and inconsistent covering decision systems with covering rough sets, Inf. Sci. 177: 3500–3518.

De Cock, M. 2002. A thorough study of linguistic modifiers in fuzzy set theory, Ph.D. thesis (in Dutch), Ghent University, 2002.

De Cock, M., Cornelis, C. and Kerre, E.E. 2007. Fuzzy rough sets: The forgotten step, IEEE Trans. Fuzzy Syst. 15(1): 121-130.

De Cock, M., Cornelis, C. and Kerre, E.E. 2004. Fuzzy rough sets: Beyond the obvious, Proc. FUZZ-IEEE 1: 103-108.

Del Cerro, L.F. and Prade, H. 1986. Rough sets, twofold fuzzy sets and modal logic-Fuzziness in indiscernibility and partial information, Math. Fuzzy Syst., Verlag TUV Rheinland, p. 103–120.

Dubois, D. and Prade, H. 1990. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets, Int. J. Gen. Syst. 17: 91–209.

Fodor, J. 1991. On fuzzy implication operators, Fuzzy Sets Syst. 42: 293–300.

Fodor, J. and Roubens, M. 1994. Fuzzy Preference Modeling and Multicriteria Decision Support. Kluwer.

Frege, G. 1983. Grundlagen der Arithmetik, 2, Verlag von Herman Pohle, Jena, 1893.

Greco, S., Matarazzo, B. and Slowinski, R. 2002. Rough approximation by dominance relations, Int. J. Intell. Syst. 17: 153–171.

Hajek, P. 1998. Metamathematics of Fuzzy Logic. Kluwer.

Kacprzyk, J. 2013. Studies in Fuzziness and Soft Computing 295.

Kuncheva, L.I. 1992. Fuzzy rough sets: Application to feature selection, Fuzzy Sets Syst. 51: 147-153.

Li, T.J., Leung, Y. and Zhang, W.X. 2008. Generalized fuzzy rough approximation operators based on fuzzy coverings, Int. J. Approx. Reason. 48: 836–856.

Lin, T. Y. 1992. Topological and fuzzy rough sets. In Intelligent decision support: Handbook of applications and advances of the rough sets theory (pp. 287-304). Dordrecht: Springer Netherlands.

Liu, G. and Zhu, W. 2008. The algebraic structures of generalized rough set theory, Inf. Sci. 178: 4105–4113.

Liu, W.N., Yao, J.T. and Yao, Y.Y. 2004. Rough approximations under level fuzzy sets, Lect. Notes Artif. Intell. 3066: 78-83.

Morsi, M. and Yakout, M. 1998. Axiomatics for fuzzy rough sets, Fuzzy Sets Syst. 100(1–3): 327–342.

Nakamura, A. 1988. Fuzzy rough sets, Note Mult. Val. Log. Jpn. 9: 1–8.

Nakamura, A. 1999. Conflict Logic with Degrees, Rough Fuzzy Hybridization: A New Trend in Decision-Making, Springer, 1999: 136-150.

Nanda, S. and Majumdar, S. 1992. Fuzzy rough sets, Fuzzy Sets Syst. 45: 157-160.

Pawlak, Z. 1982. Rough sets, Int. J. Inf. Comput. Sci. 11(5): 341-356.

Pawlak, Z. 1991. Rough Sets: Theoretical Aspects of Reasoning about Data, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991.

Pawlak, Z. and Skowron, A. 1994. Rough membership function, in: R. E Yeager, M. Fedrizzi and J. Kacprzyk (eds.), Adv. Demp.-Shafer Evid., Wiley, New York, 251-271.

Pawlak, Z. and Skowron, A. 2007a. Rudiments of rough sets, Inf. Sci. 177: 3–27.

Pawlak, Z. and Skowron, A. 2007b. Rough sets: Some extensions, Inf. Sci. 177: 28–40.

Pawlak, Z. and Skowron, A. 2007c. Rough sets and Boolean reasoning, Inf. Sci. 177: 41–73.

Pomykala, J.A. 1987. Approximation operations in approximation space, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 35: 653–662.

Radzikowska, A.M. and Kerre, E.E. 2002. A comparative study of fuzzy rough sets, Fuzzy Sets Syst. 126: 137–156.

Schweizer, B. and Sklar, A. 1983. Probabilistic Metric Spaces. North-Holland, Amsterdam.

Skowron, A. and Stepaniuk, J. 1996. Tolerance approximation spaces, Fundam. Inform. 27: 245–253.

Skowron, A., Komorowski, J., Pawlak, Z. and Polkowski, L. 2002. Rough set perspective on data and knowledge, Handb. Data Min. Knowl. Discov., Oxford Univ. Press, 2002: 134-149.

Słowinski, R. and Vanderpooten, D. 2000. A generalized definition of rough approximations based on similarity, IEEE Trans. Knowl. Data Eng. 12: 331–336.

Thiele, H. 1998. Fuzzy rough sets versus rough fuzzy sets-An interpretation and a comparative study using concepts of modal logic, Tech. Rep. ISSN 1433-3325, Univ. Dortmund.

Trillas, E. 1979. Sobre funciones de negacion en la teoria de conjuntos difusos, Stochastica 3: 47–60.

Ünal, B. 2009. Bulanık fonksiyonlar ile bulanık sistem modelleme (Master's thesis, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi).

Wu, W.Z. and Zhang, W.X. 2002. Neighborhood operator systems and approximations, Inf. Sci. 144: 201–217.

Xu, W.X. and Zhang, W.X. 2007. Measuring roughness of generalized rough sets induced by a covering, Fuzzy Sets Syst. 158: 2443–2455.

Yao, Y.Y. 1997. Combination of rough and fuzzy sets based on alpha-level sets, Rough Sets Data Min., Kluwer Acad. Publ., 301–321.

Yao, Y.Y. 1998a. Constructive and algebraic methods of the theory of rough sets, Inf. Sci. 109: 21–47.

Yao, Y.Y. 1998b. Relational interpretations of neighborhood operators and rough set approximation operators, Inf. Sci. 111: 239–259.

Zadeh, L.A. 1965. Fuzzy sets, Inf. Control 8: 338-253.

Zhu, W. 2007. Generalized rough sets based on relations, Inf. Sci. 177: 4997–5011.

Zhu, W. 2009. Relationship between generalized rough sets based on binary relation and covering, Inf. Sci. 179: 210–225.