



**YARIM-SPİNLİ PARÇACIKLARIN LORENTZYEN  $dS_2$   
MANİFOLDUNDA GÖRELİ KUANTUM DİNAMİĞİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**OĞUZHAN ŞAHİN**

**MERSİN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**FİZİK  
ANABİLİM DALI**

**MERSİN  
ARALIK – 2024**

**YARIM-SPİNLİ PARÇACIKLARIN LORENTZYEN  $dS^2$   
MANİFOLDUNDA GÖRELİ KUANTUM DİNAMİĞİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**OĞUZHAN ŞAHİN**

**ORCID ID: 0009-0004-0233-8205**

**MERSİN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**FİZİK  
ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN  
PROF. DR. MUSTAFA SALTI  
ORCID ID: 0000-0001-9700-8647**

**İKİNCİ DANIŞMAN  
PROF. DR. OKTAY AYDOĞDU  
ORCID ID: 0000-0002-7403-3388**

**MERSİN  
ARALIK – 2024**

## ÖZET

### YARIM-SPİNLİ PARÇACIKLARIN LORENTZYEN $dS_2$ MANİFOLDUNDA GÖRELİ KUANTUM DİNAMİĞİ

Bu tez çalışmasında gökkuşağı formalizmi ve Bogoliubov yaklaşımı kullanılarak iki-boyutlu de Sitter ( $dS_2$ ) manifolduna hapsedilmiş Dirac parçacıklarının görelî kuantum dinamiği tartışılmıştır. Bu amaca ulaşmak adına, seçilen uzay-zaman metriği gökkuşağı formalizmi yardımıyla yeniden yazıldıktan sonra değiştirilmiş  $dS_2$  geometrisinde hareket eden spin-1/2 parçacıklarının görelî kuantum dinamiğini betimleyen çözümleri elde etmek amacıyla kovaryant Dirac ve yarı-klasik Hamilton-Jacobi denklemleri çözülmüştür. Sonrasında, geometrik yapıdaki kuantum etkilerini tartışabilmek amacıyla asimptotik bölgelerdeki vakum durumlarını analiz ettikten sonra Bogoliubov dönüşümleri kullanılarak birim hacim başına üretilen parçacıkların oranı irdelenmiştir. Literatürde genel olarak güçlü elektrik alanlarının veya seçili bir geometrideki genişlemenin vakum durumunda çeşitli parçacıkların üretim sürecini incelemek için bir fırsat sağlayan kararsızlıklara yol açabileceği kabul edilmektedir, bu tez çalışmamızda dış elektromanyetik alan olmadan da bir vakum durumundan kütleli Dirac parçacıklarının üretilebileceği gösterilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Fermiyon, de Sitter, Dirac denklemi, Gökkuşağı gravite, Bogoliubov yaklaşımı.

**Danışman:** Prof. Dr. Mustafa SALTİ, Fizik Anabilim Dalı, Mersin Üniversitesi, Mersin.

**İkinci Danışman:** Prof. Dr. Oktay AYDOĞDU, Mersin Üniversitesi, Fizik Anabilim Dalı, Mersin.

## ABSTRACT

### RELATIVISTIC QUANTUM DYNAMICS OF HALF-SPIN PARTICLES ON A LORENTZIAN dS2 MANIFOLD

In this thesis, making use of the rainbow formalism and the Bogoliubov approximation, the relativistic quantum dynamics of Dirac particles confined in a two-dimensional de Sitter (dS2) manifold was discussed. In order to achieve this goal, the covariant Dirac and semi-classical Hamilton-Jacobi equations were solved to obtain solutions describing the relativistic quantum dynamics of spin-1/2 particles moving in the modified dS2 geometry, with the chosen space-time metric rewritten using the rainbow formalism. Afterwards, in order to discuss quantum effects on the geometric structure, after analyzing the vacuum states in asymptotic regions, the rate of particles produced per unit volume was evaluated by using Bogoliubov transformations. It is generally accepted in the literature that strong electric fields or expansion in a selected geometry can lead to instabilities in the vacuum state, which provides an opportunity to study the production process of various particles, in this thesis research it was shown that massive Dirac particles can be produced from a vacuum state without an external electromagnetic field.

**Keywords:** Fermion, de Sitter, Dirac equation, Rainbow gravity, Bogoliubov approximation.

**Advisor:** Prof. Mustafa SALTI, Department of Physics, Mersin University, Mersin.

**Co-Advisor:** Prof. Oktay AYDOGDU, Department of Physics, Mersin University, Mersin.

## TEŞEKKÜR

Öncelikle verdikleri emeklerinden dolayı değerli danıőmanlarım sayın Prof. Dr. Mustafa SALTI ve sayın Prof. Dr. Oktay AYDOğDU'ya sonsuz teőekkürlerimi sunuyorum. Diğer yandan, lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca desteklerini eksik etmeyen sayın Prof. Dr. Kenan SÖęÜT'e ve tüm Fizik bölümü hocalarıma teőekkürü bir borç bilirim.

Tez sürecim boyunca manevi desteği ile yanımda olan arkadaőım Bahar TAŐ'a da ayrıca teşekkür etmek isterim.

Son olarak, destekleri için önce sevgili aileme sonra da dostlarıma sonsuz teőekkürlerimi sunuyorum.



## İÇİNDEKİLER

	Sayfa
<b>İÇ KAPAK</b>	<b>i</b>
<b>ONAY</b>	<b>ii</b>
<b>ETİK BEYAN</b>	<b>iii</b>
<b>ÖZET</b>	<b>iv</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>v</b>
<b>TEŞEKKÜR</b>	<b>vi</b>
<b>İÇİNDEKİLER</b>	<b>vii</b>
<b>TABLOLAR DİZİNİ</b>	<b>viii</b>
<b>ŞEKİLLER DİZİNİ</b>	<b>ix</b>
<b>SİMGELER VE KISALTMALAR</b>	<b>x</b>
<b>1. GİRİŞ</b>	<b>1</b>
<b>2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI</b>	<b>13</b>
<b>3. MATERYAL ve YÖNTEM</b>	<b>17</b>
3.1. Notasyon Hakkında	17
3.2. Kuramsal Analiz Yaklaşımı Hakkında	17
<b>4. BULGULAR ve TARTIŞMA</b>	<b>29</b>
4.1. Geometrik Model ve Temel Nicelikler	29
4.2. Kovaryant Dirac Denkleminin Tam Çözümü	30
4.3. Enerji Kuantizasyonu	35
4.4. Yarı-Klasik Hamilton-Jacobi Denkleminin Asimptotik Çözümleri	37
4.5. Parçacık Yaratma Olasılığı	39
<b>5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER</b>	<b>47</b>
<b>KAYNAKLAR</b>	<b>51</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ</b>	<b>63</b>

## TABLolar DİZİNİ

	Sayfa
<b>Tablo 1.1.</b> Gökkuşığı fonksiyonlarının farklı seçimleri.	6



## ŞEKİLLER DİZİNİ

	<b>Sayfa</b>
<b>Şekil 1.1.</b> Üç boyutlu Minkowski uzayına gömülü tek yapraklı bir dS2 hiperboloidi	7
<b>Şekil 4.1.</b> Seçilen dS2 geometrisinde hareket eden fermiyonların enerji seviyeleri	37
<b>Şekil 4.2.</b> Sayı yoğunluğunun farklı gökkuşağı çerçevelerinde kütleyle göre değişimi	41
<b>Şekil 4.3.</b> Sayı yoğunluğunun gökkuşağı fonksiyonlarına göre değişiminin üç-boyutlu grafik analizi	41
<b>Şekil 4.4.</b> Sayı yoğunluğunun gökkuşağı fonksiyonlarına göre değişiminin iki-boyutlu derinlik grafiği analizi	41
<b>Şekil 4.5.</b> Yaratılış-yok oluş sürecini anlatan temsil	46
<b>Şekil 4.6.</b> Ortalama popülasyon ve enerji ( $k = 0.001$ durumu)	46
<b>Şekil 4.7.</b> Ortalama popülasyon ve enerji ( $k = 0.2$ durumu)	46

## SİMGELELER VE KISALTMALAR

Kısaltma/Simge	Tanım
$dS$	de Sitter
$dS^2$	İki-boyutlu de Sitter
H-J	Hamilton-Jacobi
DÖG	Deforme Özel Görelilik
DGG	Deforme Genel Görelilik
AdS	Anti de Sitter
WKB	Wentzel-Kramers-Brillouin
FRW	Friedman-Robertson-Walker
DKP	Duffin-Kemmer-Petiau
$G$	Evrensel Gravitasyon Sabiti
$c$	Işık Hızı
$\psi$	Dirac Spinörü
$h$	Tetrad Alanı
$\partial$	Normal (Adi) Türev
$\Gamma_\mu$	Spin Bağlantı Katsayısı
$e$	Elektronun Yüğü
$A_\mu$	Dörtlü-vektör Potansiyeli
$\tilde{\gamma}$	Dirac Gama Matrisi
$\sigma$	Pauli Spin Matrisi
$I$	Birim Matris
$k$	Fermiyon Momentumu (Dalga Vektörü)
$m$	Parçacık Kütlesi
$E$	Parçacık Enerjisi
$g_{\mu\lambda}$	Kovaryant Metrik Tensör
$g^{\mu\lambda}$	Kontravaryant (Ters) Metrik Tensör
$g$	Metrik Tensörün Determinantı
$p$	Parçacık Momentum
$\xi$	Gökkuşığı Fonksiyonu
$E_{pl}$	Planck Enerjisi
$ds^2$	Çizgi-elemanı
$\hat{\chi}$	Yaratma İşlemcisi
$\hat{\zeta}$	Yok etme İşlemcisi
$ V_\chi\rangle$	Vakum Durumu
$a_k$	Bogolubov Katsayısı
$b_k$	Bogolubov Katsayısı
$n$	Parçacık Yaratma Olasılığı/Üretilen Parçacıkların Oranı
$R_{\mu\nu}$	Ricci Tensörü
$R$	Ricci Eğrilik Skalari
$t$	Kozmik Zaman
$\eta$	Konformal Zaman
$\nabla_\alpha$	Kovaryant Türev
$S$	Eylem Fonksiyonu

## 1. GİRİŞ

Gravitasyonel alanının etkisi altındaki bir kuantum sisteminin analizi oldukça uzun bir dönemdir parçacık fizikçilerinin ilgisini çekmektedir, bu nedenle, çeşitli alanlarda çalışan kuramsal fizikçiler özellikle Klein-Gordon (bazen Klein-Fock-Gordon olarak da anılmaktadır) ve Dirac denklemleri başta olmak üzere, görelî dalga denklemleriyle yoğun biçimde ilgilenmektedir (Thaller, 1992; Thomas ve Weise, 2001; Ginocchio, 2004; Gou ve Sheng, 2005; Alhaidari ve ark., 2006; Xu ve ark., 2008; Zhang, 2008; Arda ve Sever, 2009). Bahsi geçen bu dalga denklemlerinin çözümleri görelî etkileri betimlemek için çok önemlidir. Son birkaç yılda, görelî denklemlerin işaret ettiği kesikli enerji seviyelerini ve denklemlere eşlik eden dalga fonksiyonlarını araştırmak amacıyla, Klein-Gordon ve Dirac denklemlerinin doğru çözümlerini elde etme konusunda artan bir ilgi olmuştur (de Castro, 2005; Chen ve ark., 2006; de Souza ve Chen, 2006; Qiang, 2007; Ikhdair, 2009; Hassanabadi ve ark., 2011; Oluwadare ve ark., 2012; Ikot ve ark., 2016; Onyeaju ve ark., 2016).

Elektron temelli yaklaşımların literatürde bu denli dikkat çekmesinin önemli nedenlerinden biri elektromanyetik alandan kaynaklanan enerjinin formu değiştirilerek maddeye dönüştürülebilmesi olasılığıdır. Örneğin, bir vakum ortamında (ya da boş uzayda) bir dış elektromanyetik kaynağın (dolayısıyla harici elektromanyetik alanın) varlığında, ışıktan zıt işaretli yüklere sahip bir elektron çifti üretilerek madde elde edilebilir (Weisskopf, 1936). Diğer bir ifade şekliyle, güçlü bir elektromanyetik alan vakum ortamında bir kararsızlığa neden olabilmekte ve bu sıra dışı istikrarsızlık ise parçacık üretme gibi ilginç fiziksel süreçlerin tartışılmasına olanak sağlayabilmektedir (Sauter, 1931). Elektronun Dirac yaklaşımına atfedilen parçacık üretilmesi (ya da yok edilmesi) süreci birçok fizikçiye göre kuantum mekaniğin süreçlerinin bir sonucudur; ancak temel parçacıkların üretilmesi (ya da yok edilmesi) durumları esasen kuantum mekaniğinin ortaya çıkmasından önce de tartışılmıştır. Parçacık yaratma süreçleri 1920'li yıllarda astrofizik alanında ve 1930'lu yıllarda ise görelî kuantum mekaniği alanında yoğun çalışılan en dikkat çekici konular arasında yer almıştır (Bromberg, 1976). Bu bağlamda, bir harici elektromanyetik alan kaynağının sağladığı vakum ortamından parçacık üretme olasılığı Schwinger tarafından ilk kez 1951 yılında ele alınmıştır (Schwinger, 1951). Bu araştırma, çok önemli iki sonucu ortaya koymuştur:

- i) vakum ortamından parçacık yaratılması için manyetik alan tek başına yeterli değildir,
- ii) vakum ortamı elektrik alan sayesinde rahatsız (tedirgin, pertürbe) edildiğinde, manyetik alan çift üretme olasılığını etkileyebilir.

Bu noktada vakum ortamından parçacık üretmek için gerekli olan dış elektrik alanın şiddetinin oldukça yüksek olması gerektiğini ve bu mertebeye ancak çok güçlü lazerler ile ulaşabileceğini vurgulamak yerinde olacaktır. Laboratuvarlarda oluşturulan vakum ortamlarından parçacık üretme olasılığı oldukça düşüktür, bu nedenle parçacık üretme süreci daha çok astrofizik alanının önemli konusu haline gelmiştir.

Güncel astrofizik gözlemlerden elde edilen verilere göre bazı kara deliklerin yakınlarında vakum ortamında parçacık üretme süreci gerçekleşebilmektedir (Wald, 1975). Dış elektromanyetik alan varlığında vakumdan parçacık yaratma sürecinin yanında vakum ortamından kozmolojik parçacık üretme süreci de oldukça dikkat çekici bir fenomen olup ilk defa Schrödinger tarafından tartışılmıştır (Schrödinger, 1939). Bilim dünyasında uzun bir süre göz ardı edilen Schrödinger'in bu ilginç fikri 1968 yılında Parker tarafından tekrar ele alınarak uzay-zaman geometrisinin genişlemesi durumunda parçacık üretme sürecinin mümkün olabileceği gösterilmiştir (Parker, 1968). Evrenimizin günümüzdeki genişleme davranışının mertebesi parçacık üretme durumunun gerçekleşebilmesi için yeterli değildir, ancak evrenin bebeklik dönemine karşılık gelen enflasyon evresinde hem genişlemenin mertebesi hem de dış elektromanyetik alanın büyüklüğü parçacık yaratma sürecini mümkün kılacak düzeyde olduğu bilinmektedir. Bu nedenle, kozmolojik bir model için parçacık yaratma süreçlerinin tartışılması hem kozmosun evrimsel sürecinin daha iyi anlaşılabilmesi hem de başarılı bir kuantum gravite kuramı inşa edilebilmesi adına önem arz etmektedir.

Yarım-spinli Dirac parçacıkların görelî kuantum dinamiği aşağıdaki gibi yazılan kovaryant Dirac denklemi ile temsil edilmektedir (Cardall ve Fuller, 1996):

$$\left[ i h_{(i)}^{\mu} \tilde{\gamma}^{(i)} (\partial_{\mu} - \Gamma_{\mu} - ieA_{\mu}) - m \right] \psi = 0. \quad (1.1)$$

Burada,  $h_{(i)}^{\mu}$  tetrad alanının bileşenlerini,  $\tilde{\gamma}^{(i)}$  düz-uzay Gamma matrislerini,  $\Gamma_{\mu}$  Dirac parçacıkları üzerindeki gravitasyonel etkileri betimleyen spin bağlantısını,  $A_{\mu}$  elektromanyetik dörtlü-potansiyel bileşenlerini ve  $m$  ise parçacığın kütlesini ifade etmektedir (Dirac, 1928a; 1928b). Ek olarak, orijinal Dirac denkleminde  $\psi$  dört bileşenli spinöre karşılık gelmektedir ve her bir bileşen enerjinin işareti ve spinin yönüne göre farklı durumları temsil eden çözümlerdir (pozitif enerjili yukarı spinli durum, pozitif enerjili aşağı spinli durum, negatif enerjili yukarı spinli durum ve negatif enerjili aşağı spinli durum):

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E > 0, S \uparrow \\ E > 0, S \downarrow \\ E < 0, S \uparrow \\ E < 0, S \downarrow \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Öte yandan, düz (ya da Öklidyen) uzay-zamanda yazılmış olan Gamma matrisleri

$$\{ \tilde{\gamma}^{(i)}, \tilde{\gamma}^{(j)} \} = \tilde{\gamma}^{(i)} \tilde{\gamma}^{(j)} + \tilde{\gamma}^{(j)} \tilde{\gamma}^{(i)} = 0. \quad (1.3)$$

koşulu sağlandığı sürece istendiği gibi seçilebilmekte olup en yaygın kullanılan seçimler şunlardır

- Dirac temsili (Dirac, 1928a; 1928b)

$$\tilde{\gamma}^{(0)} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

$$\tilde{\gamma}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Buradaki  $I_2$ ,  $\sigma^1$ ,  $\sigma^2$  ve  $\sigma^3$ ,  $2 \times 2$ 'lik birim ve Pauli spin matrisleri olup şöyle tanımlanırlar (Pauli, 1935):

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

- Weyl temsili (Kaku, 1993; Kukin, 2016)

$$\tilde{\gamma}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

$$\tilde{\gamma}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

- Weyl temsilinin alternatif versiyonu (Kaku, 1993; Kukin, 2016)

$$\tilde{\gamma}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

$$\tilde{\gamma}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

- Majarona temsili (Weinberg, 2002; Rodrigues ve de Oliveira, 2007)

$$\tilde{\gamma}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^{(1)} = \begin{pmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

$$\tilde{\gamma}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^{(3)} = \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & 0 \\ 0 & -i\sigma^1 \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

- Chiral temsil (Kukin, 2016)

$$\tilde{\gamma}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^1 \\ -i\sigma^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

$$\tilde{\gamma}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^2 \\ -i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^3 \\ -i\sigma^3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

- Görelili-olmayan temsil (Kukin, 2016)

$$\tilde{\gamma}^{(0)} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^1 \\ i\sigma^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.16)$$

$$\tilde{\gamma}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^3 \\ i\sigma^3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Einstein'in Genel Görelilik kuramında spin bağlantı niceliği şöyle tanımlanmaktadır (Brill ve Wheeler, 1957):

$$\Gamma_\alpha = -\frac{1}{8} g_{\mu\lambda} \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda [\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (1.18)$$

Yukarıdaki denklemde yazılan  $g_{\mu\lambda}$  metrik tensördür,  $\Gamma_{\nu\alpha}^\lambda$  Christoffel sembolleri olarak bilinir ve metrik tensör  $g_{\mu\nu}$  ve tersi  $g^{\mu\nu}$  cinsinden şöyle tanımlanmaktadır

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}). \quad (1.19)$$

Metrik tensörün tersi

$$g^{\alpha\beta} = \frac{Cofac g_{\alpha\beta}}{det|g_{\alpha\beta}|} \quad (1.20)$$

ifadesiyle hesaplanabilirken, eğri uzay-zamanda tanımlanan Gamma matrisleri ( $\gamma^\mu$ ) Öklidyen Gamma matrisleriyle tetrad bileşenleri üzerinden aşağıdaki gibi ilişkilendirilirler:

$$\gamma^\mu = h_{(i)}^\mu \tilde{\gamma}^{(i)}. \quad (1.21)$$

Genel Görelilik kuramı tamamen klasik fizik çerçevesinde yazılmıştır. Kuantum mekaniğinin prensiplerini gravitasyonel alana uygulamayı düşünüyorsak, seçilen kuram gravitasyonun temel bir çerçevesinin düşük enerjilerinde etkili bir mekanizma sağlamalıdır. Bu bağlamda, kuantum gravite çalışmaları literatürde aktif olarak gelişmeye devam ederken gravitasyonel ve kuantum mekaniksel etkilerin göz ardı edilemeyeceği ortamlarla başa çıkmak için çeşitli yaklaşımlar ortaya atılmıştır (Rovelli, 2008a). En ünlü kuantum gravite çerçeveleri M-kuramı (Kaku, 1999; Obers ve Pioline, 1999), döngüsel kuantum gravite (Rovelli, 2008b; Ashtekar ve Bianchi, 2021), fraktal kuram (Calcagni, 2010) ve gökkuşağı formalizmidir (Magueijo ve Smolin, 2002; 2004). Her ne kadar literatürde önerilmiş çeşitli kuantum gravite yaklaşımları olmasına rağmen, hangisinin en tutarlı modelleme olduğu henüz net değildir. Ayrıca, bu noktada, tüm bu kuramların öncelikle düşük enerji sınırında Einstein'ın inşa ettiği Genel Görelilik kuramı tarafından sunulan tahminleri yeniden üretmeleri gerektiğini vurgulamakta fayda vardır.

Son derece yüksek bir enerji aşamasındaki fiziği tanımlamak için farkındalığımızı çeşitli fikirlere odaklayabiliriz. Bunlar arasında, Deforme Özel Görelilik (DÖG) yaklaşımı özel göreliliğin ilginç bir yöntemle değiştirilmiş versiyonudur ve küresel Lorentz simetrisinin bir kuantum gravite yaklaşımından yaklaşık bir simetri olarak ortaya çıktığını iddia eder (Amelino ve Camelia, 2022a). Bahsi geçen DÖG yaklaşımı esas olarak

$$E^2 - p^2 = m^2 \quad (1.22)$$

biçiminde yazılan görelilik dağılım ilişkisinin

$$E^2 - p^2 - f(E, p^2; E_{pl}) = m^2, \quad (1.23)$$

şeklinde doğrusal olmayan bir forma değiştirilmesi gerektiğini önermektedir (Amelino-Camelia, 2022b). Burada;  $E$  enerjisi,  $p$  momentumu ve  $E_{pl}$  ise Planck enerjisini temsil etmektedir. Yakın zamanda DÖG yaklaşımı Magueijo ve Smolin tarafından Deforme Genel Görelilik (DGG) adı verilen daha genel bir duruma genişletilmiştir (Magueijo ve Smolin, 2002; 2004). DGG kapsamında denklem (1.22)'de verilen görelilik dağılım ilişkisi aşağıdaki biçime genişletilmiştir:

$$\xi_1^2(\chi)E^2 - \xi_2^2(\chi)p^2 = m^2, \quad (1.24)$$

öyleki

$$\chi = \frac{E}{E_{pl}}. \quad (1.25)$$

Burada yazılan  $\xi_1(\chi)$  ve  $\xi_2(\chi)$  gökkuşağı fonksiyonları olarak bilinmektedir. Denklem (1.24) ile verilen işlem dörtlü-momentum vektöründen kendisine doğrusal olmayan bir eşleme olarak düşünülebilmektedir:

$$f: (E, p) \rightarrow (\xi_1(\chi)E, \xi_2(\chi)p). \quad (1.26)$$

Sonuç olarak, uzay-zaman koordinatları için aşağıdaki formda bir dönüşüm yapılır

$$(dt, d\vec{x}) \rightarrow \left( \frac{dt}{\xi_1(\chi)}, \frac{d\vec{x}}{\xi_2(\chi)} \right). \quad (1.27)$$

Burada metrik yazılırken iki farklı işaret seçimi yapılabilmektedir:

$$ds^2 = \pm dt^2 \mp d\vec{x} \cdot d\vec{x}. \quad (1.28)$$

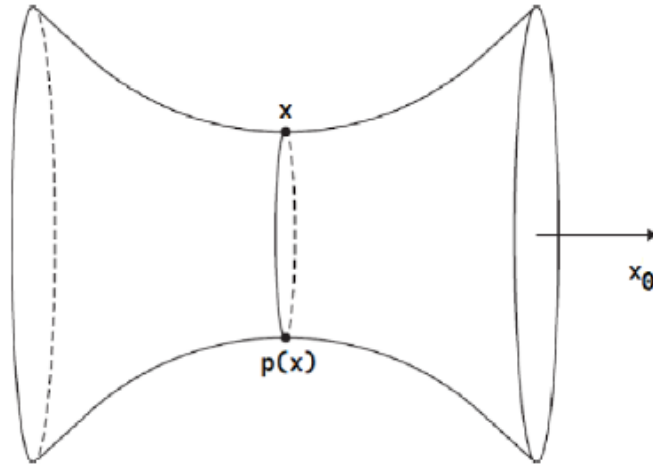
Özel Görelilik kuramındaki dağılım bağıntısının DGG yaklaşımıyla eğri uzay-zamana genelleştirilmesinin ardından gökkuşağı fonksiyonlarının farklı seçimleri için çeşitli problemler irdelenmiştir: (i) karadelikler için entropi, sıcaklık, Hawking ışıması, geometrik özellikler ve faz geçişleri gibi konuların araştırılması, (ii) Yang-Mills kuramının analitik olarak çözülmesi, (iii) nötron yıldızlarının fiziksel özellikleri ve (iv) gravitasyonel çöküşün analizi. Bu araştırmalar sonucunda gökkuşağı fonksiyonları için de çeşitli tanımlamalar ortaya çıkmıştır (Tablo 1.1’de en çok kullanılan seçimler sunulmaktadır).

**Tablo 1.1.** Gökkuşağı fonksiyonlarının bazı farklı seçimleri. Burada  $\zeta$  ve  $\varrho$  keyfi sabitlerdir.

$\xi_1(\chi)$	$\xi_2(\chi)$	Kaynaklar
1	$(1 - \zeta\chi^\varrho)^{1/2}$	(Ashour ve ark., 2016; Denghani, 2018),
$\frac{e^{\zeta\chi} - 1}{\zeta\chi}$	1	(Hendi ve ark., 2016; Deng ve Xie, 2017)
$(1 - \zeta\chi)^{-1}$	$(1 - \zeta\chi)^{-1}$	(Amirabi ve ark., 2018; Awad ve ark., 2013)
$(1 - \zeta\chi)^{-1}$	1	(Feng ve Yang, 2017)
$e^{-\frac{\chi^2}{2}}$	1	(Liu ve Zhu, 2008)
$(1 - \chi^2)^{1/2}$	1	(Ling ve ark., 2007)
1	$1 + \frac{\chi}{2}$	(Leiva ve ark., 2009)
1	$1 + \chi^\varrho$	(Amirabi ve ark., 2018)

Metrik tensör (ya da çizgi-elemanı) uzay-zamanın dokusunu betimleyen matematiksel bir ifadedir. 1917 yılında, de Sitter Genel Göreliliğin alan denkleminde eğriliğin kaynağı olarak kozmolojik sabiti ekleyerek pozitif kozmolojik sabit durumunda dS geometrisini elde ederken negatif kozmolojik sabit durumunda ise anti-dS (AdS) modelini tanımlamıştır (de Sitter, 1917a; 1917b). Süpernova tip Ia gözlemleri kozmolojik sabitin küçük ve pozitif değerler aldığını işaret etmiştir (Schmidt ve ark., 1998) ve böylece dS geometrinin evren için doğal bir limit model olabileceği anlaşılmıştır (Suneeta, 2002). Bununla birlikte, (3+1)-boyutlu uzay-zaman modelleri bağlamında tartışılan kovaryant Dirac denklemlerinin çözümleri için kullanılan matematiksel adımlar oldukça zordur. Sonuç olarak, kuramsal fizikçiler bu zorluğun üstesinden gelebilmek adına çeşitli yaklaşımlar (örneğin zayıf alan yaklaşımı, sayısal analiz, çözümlerin asimptotik davranışların tartışılması, WKB mekanizması) geliştirdiler. Yukarıda bahsi geçen matematiksel zorluğun üstesinden gelebilmek adına daha düşük boyutlu geometrik modellerin kullanılması da bir seçenek olarak ön plana çıkmaktadır ve bu yaklaşım yakın zamanda yapılan bir çalışmayla desteklenmiş olup bu araştırma kapsamında kuantum dünyası için uzay-zamanın iki boyutlu olabileceği ortaya konmuştur (Carlip, 2012).

Buraya kadar sunulan bilgiler ışığında, bu tez kapsamında temel olarak bir dS2 hiperboloidi için gökkuşağı gravite yaklaşımı penceresinden kovaryant Dirac denkleminin tam çözümlerinin elde edilmesi ve sonrasında parçacık yaratma süreçlerinin tartışılması amaçlanmıştır. Şekil 1.1'de bir dS2 manifoldu resmedilmiştir ve bu temsili şekilde hiperboloid üzerindeki bir  $x$  noktası ile birlikte onun antipodu  $p(x)$  ve bunları birleştiren bir zaman dilimi (uzay benzeri jeodezik) gösterilmiştir.



Şekil 1.1. Üç boyutlu Minkowski uzayına gömülü tek yapraklı bir dS2 hiperboloidi (Perez-Nadal ve ark. 2010).

Bir dS2 manifoldu matematiksel olarak aşağıdaki denklem ile ifade edilmektedir

$$ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 . \quad (1.29)$$

Burada betimlenen (2+1)-boyutlu geometrideki her bir nokta, sadelik olması için  $\theta$  ve  $\phi$  koordinatları gizlenmiş iki küreyi temsil etmektedir. Daha önce de vurgulandığı gibi, bu noktada bir dS2 manifoldunun aşağıdaki denklemle betimlenen iki-boyutlu bir hiperboloid olduğunu hatırlamak yerinde olacaktır:

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = -\frac{1}{H^2}. \quad (1.30)$$

Burada,  $H$  sabit bir parametreyi ifade ederken ve  $h = \frac{1}{H}$  ise dS2 ufkunun yarıçapının temsil etmektedir (Hawking ve Ellis, 1975). Bu aşamada, denklem (1.29)'da yazılan koordinat seti için

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{H} \sinh(Ht) + \frac{2x^2}{H} \exp [Ht] \\ \frac{1}{H} \cosh(Ht) - \frac{2x^2}{H} \exp [Ht] \\ x \exp [Ht] \end{pmatrix}, \quad (1.31)$$

tanımı yapıldığında, aşağıda yazılan çizgi-elemanı elde edilmektedir (Padmanabhan, 2003)

$$ds^2 = -dt^2 + e^{(2Ht)} dx^2. \quad (1.32)$$

Yukarıdaki denklemde sunulan çizgi-elemanı  $x_0 + x_1 = 0$  durumundaki null (önemsiz) ışınlar tarafından sınırlandırılan dS2 hiperboloidinin yarısını çevrelemektedir. Ek olarak,

$$\eta = -\frac{1}{H} e^{(-Ht)} \quad (1.33)$$

biçiminde yeni bir değişken tanımlandığında,

$$ds^2 = \frac{1}{H^2 \eta^2} (-d\eta^2 + dx^2) \quad (1.34)$$

ile verilen çizgi elemanı elde edilmektedir. Tez araştırmamız kapsamında, yukarıda yazılan geometrik model gökkuşağı formalizmine göre uygun biçimde değiştirildikten sonra kovaryant Dirac ve yarı-klasik H-J denklemlerinde kullanılacak ve böylece tam ve asimptotik çözümlere ulaşılabilecektir. Dirac, Klein-Gordon, Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) gibi denklemlerinin kovaryant biçimlerinin (eğri uzay-zamandaki formlarının) çözümlerine ulaşmak kozmolojik parçacık üretme süreçlerinin tartışılabilmesi için gerekli olan basamaklardan ilkidir. Elde edilen tam çözümlerden yaratılan parçacıkların sayı yoğunluğunu bulabilmek de bir başka zorlu basamak olarak karşımıza çıkar. Bu zorlu matematiksel

basamakları başarıyla aşabilmek amacıyla literatürde Bogoliubov dönüşümleri (Gavrilov, ve Gitman, 1996; Birrel ve Davies, 1982), tünelleme genliği (Damour, 1975; Nikishov, 1970; Brout ve ark., 1995), yol-integrali (Hartle ve Hawking, 1976; Chtire ve Hartle, 1977), Hamilton köşegenleştirme yaklaşımı (Grib ve ark., 1976), yarı-klasik WKB mekanizması (Biswas ve ark., 1995; 2000) ve Green fonksiyonu yaklaşımı (Gavrilov ve ark., 1997) gibi çeşitli yöntemler önerilmiştir. Bu tez çalışmasında parçacık üretme mekanizması için yoğun biçimde tercih edilen Bogoliubov dönüşümleri kullanılacaktır. Seçilen dS2 metriği bağlamında kuantum mekaniksel etkileri araştırmak amacıyla Bogoliubov yöntemine geçmeden önce vakum ortamında çözümlerin asimptotik davranışlarına bakılır. Çözümlerden elde edilen pozitif ve negatif frekans durumlar esasen zamansal bir killing vektörüyle ilintilidir, ancak böyle bir vektör genişleyen uzay-zaman dokularında mevcut değildir. Dolayısıyla, vakum durumunun makul bir tanımını bulmak için farklı yaklaşımlara başvurmamız gerekmektedir ve adyabatik metod önerilen çeşitli yaklaşımlar arasında en yaygın olanıdır (Parker, 1977; Birrel ve Davies, 1982). Bu durum bizi yarı-spinli parçacıkların görelî kuantum dinamiğini tartışmak istediğimizde kovaryant Dirac denklemi ile yarı-klasik H-J denklemini de dikkate almaya zorlamaktadır (Villalba, 1995). Burada, başlangıç ve son durumları seçmek için doğal bir ölçütün H-J denklemi ile temsil edilen yarı-klasik durumların davranışına odaklanmak olduğunu vurgulamak önemlidir. Bu yöntem uygulanırken sırasıyla üç basamak takip edilir (Audretsch ve Schafer, 2021; Pimentel ve Pineda, 2021):

- Yarı-klasik H-J denkleminin asimptotik çözümlerini elde etmek,
- Dirac denkleminin çözümünün asimptotik davranışı ile H-J denkleminin asimptotik davranışını kıyaslamak,
- Negatif ve pozitif frekans durumlarını bulmak;

$$\Psi \approx \begin{cases} \exp[+iS] \leftrightarrow \text{pozitif enerji (parçacık)} \\ \exp[-iS] \leftrightarrow \text{negatif enerji (anti - parçacık)}. \end{cases} \quad (1.35)$$

Buradaki  $S$  ve  $\Psi$  sırasıyla klasik eylemi ve dalga fonksiyonunu temsil etmektedir. Yaratma ve yok etme katsayılarının tam kip çözümleri dikkate alınarak yazılan ve üretilen parçacıkların sayı yoğunluğunu temsil eden fonksiyonun hesaplandığı bir yöntem olan Bogoliubov dönüşümleri yaklaşımı temel olarak asimptotik başlangıç (sonsuz geçmiş) ve asimptotik gelecek (sonsuz gelecek) anları için elde edilen pozitif ve negatif frekans durumlarının kip çözümleriyle bağdaştırılmasına dayanmaktadır. Tez çalışmamızda yaratma ve yok etme operatörlerini karıştırırken onların komütasyon ilişkilerini koruyan Bogoliubov dönüşümlerinin fermiyonik versiyonu ele alınacaktır. Kuantum alan kuramında, bir alan denkleminin faz durumlarının tanımı olarak iki farklı tam ortogonal küme dikkate alınabilmektedir (Ruijsenaars, 1977; Svozil, 1990). Dolayısıyla, parçacıkların durumlarını  $f_i$  ve  $g_j$  ortogonal bazlarıyla ilişkilendirilerek tanımlamamız gerekmektedir (Mishima ve Nakayama, 1988):

$$\Omega = \sum_i (\hat{\chi}_i f_i + \hat{\chi}_i^\dagger f_i^*) = \sum_j (\hat{\zeta}_j g_j + \hat{\zeta}_j^\dagger g_j^*). \quad (1.36)$$

Buradaki  $\hat{\chi}_i$ ,  $\hat{\chi}_i^\dagger$  ve  $\hat{\zeta}_j$ ,  $\hat{\zeta}_j^\dagger$  ifadeleri sırasıyla, yaratma ve yok etme işlemcilerini ve onların hermitik eşleniklerini temsil etmektedir. Bogoliubov dönüşümleri yöntemi sayesinde bu işlemcileri birbirlerine bağlama olanağı mümkün olmaktadır (Mishima ve Nakayama, 1988):

$$\zeta_j = \sum_i (a_{ij} \hat{\chi}_i + b_{ij} \hat{\chi}_i^\dagger) \quad (1.37)$$

$$\zeta_j^\dagger = \sum_i (a_{ij}^* \hat{\chi}_i^\dagger + b_{ij}^* \hat{\chi}_i) \quad (1.38)$$

Yukarıdaki denklemlerde kompleks eşlenikleriyle birlikte kullanılan  $a_{ij}$  ve  $b_{ij}$  çarpanları Bogoliubov katsayıları olarak bilinmektedir ve şu özellikleri sağlamaktadırlar

$$\sum_i (a_{ni} a_{li}^* - b_{ni} b_{li}^*) = \delta_{nl} \quad (1.39)$$

$$\sum_i (a_{ni} b_{li} - b_{ni} a_{li}) = 0 \quad (1.40)$$

Bu aşamada, her bir parçacık ile ilişkili olan iki farklı vakum durumu  $|V_\chi\rangle$  ve  $|V_\zeta\rangle$  varsayılabilmektedir (Mishima ve Nakayama, 1988; Kodama, 1981):

$$|V_\chi\rangle: \chi_i |V_\chi\rangle = 0 \quad \text{her } i \text{ için,} \quad (1.41)$$

$$|V_\zeta\rangle: \zeta_j |V_\zeta\rangle = 0 \quad \text{her } j \text{ için.} \quad (1.42)$$

Eğer  $|V_\zeta\rangle$  ifadesini doğal vakum durumu olarak alırsak,  $|V_\chi\rangle$ 'yi çok parçacıklı bir faz olarak seçmemiz gerekmektedir (Kodama, 1981). Böylece,  $g_j$  kümesinin parçacık sayısı operatörünün beklenen değeri şöyle tanımlanacaktır (Kodama, 1981):

$$\langle V_\chi | \zeta_j^\dagger \zeta_j | V_\chi \rangle = \sum_i |b_{ji}|^2 \quad (1.43)$$

Parçacık sayısının dağılımını tam olarak elde edebilmek için Bogoliubov katsayılarını hesaplamak bir zorunluluktur. Bogoliubov dönüşümleri yöntemi göz önüne alındığında, pozitif (ya da negatif) “in” (içeri, geçmiş, giriş) frekans durumu “out” (çıkış, dışarı, gelecek) fiziksel durumunun pozitif ve negatif frekanslı durumlarının lineer birleşimi cinsinden yazılabilmektedir:

$$\Phi_{in,k}^+ = a_k \Phi_{out,k}^+ + b_k \Phi_{out,k}^- \quad (1.44)$$

Böylece, bu yöntem sayesinde elde edilen çözümler kullanılarak Bogoliubov katsayıları  $a_k$  ve  $b_k$  hesaplanabilmektedir. Gerekli hesaplamalar fermiyonik durumu temsil eden

$$|a_k|^2 + |b_k|^2 = 1 \quad (1.45)$$

$$n \approx |b_k|^2 \quad (1.46)$$

denklemlerinde kullanıldığında yaratılan parçacıkların sayı yoğunluğunu yazmak ve bu ifadenin davranışını tartışmak mümkün olmaktadır. Tez araştırmaları kapsamında, seçtiğimiz uzay-zaman modeli için buraya kadar tanıtılan nicelikler ile ilgili gerekli tüm hesaplamalar yapılarak hedeflenen kuramsal sonuçlara ulaşıldıktan sonra ayrıca elde edilen sonuçlar grafiksel bağlamda irdelenecektir.



## 2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Evrenimizin çocukluk evresinden itibaren dinamik biçimde değişen doğası hakkında önemli çıkarımlara ulaşmamızı sağlayabilecek olan görelî parçacık dinamiğinin farklı perspektiflerden araştırılması literatürde her zaman yoğun biçimde ele alınmıştır ve halen de dikkat çekmeye devam etmektedir. Bu bölümde, literatürde yer edinmiş ve tez konusuyla bağlantılı önemli bazı çalışmalar hakkında kısa bilgiler verilecektir.

- Bir önceki bölümde kozmolojik parçacık yaratma sürecinin genişleyen bir geometride mümkün olabileceği konusunun ilk defa Parker (Parker, 1968) tarafından irdelendiğini belirtmiştik. Bu dikkat çekici çalışmasından sonra, Parker arkadaşlarıyla birlikte
  - skaler dalga denkleminin izotropik bir geometrik yapı için elde edilen çözümlerini dikkate alarak pion parçacığının yaratılması ve yok edilmesi mekanizmaları (Parker, 1972),
  - bir karadeliğin ürettiği parçacıkların olasılık dağılımları (Parker, 1975),
  - asimptotik ölçekte düz geometrilere tekilliklerden üretilen parçacıklar (Ford ve Parker, 1978),
  - genişleyen bir uzay-zaman modeli için madde ve anti-maddenin asimmetrik yaratılma süreçleri (Papastamatiou ve Parker, 1979),
  - kozmik sicimlerin uzay-zaman dokusunda bir kararsızlık yaratarak gravitasyonel alandan parçacık üretilmesine neden olduğunun ortaya konması (Parker, 1987)gibi alanda öncü niteliğinde araştırmalar yapmıştır.
- Grib ve arkadaşları kozmosun hem erken-zaman ivmeli (enflasyon) evresi hem de geç-zaman ivmeli fazı (karanlık madde-enerji baskın evre) için Friedman geometrisini kullanarak parçacık ve anti-parçacıkların üretilme olasılıklarını yeni bir yaklaşımla el almıştır (Grib ve ark., 1976).
- Chitre ve Hartle 1977 yılında yayınladıkları bir çalışmada Robertson-Walker metriğini özel bir formu ile birlikte Feynman yol-integrali yöntemi kullanılarak genişleyen geometri içerisinde yaratılan parçacıkların olasılık yoğunluğu hesaplanmış ve ilgili sonucun yüksek enerjilerde termal dağılıma indirildiği göstermiştir (Chitre ve Hartle, 1977).
- Audretsch ve Schafer ışınım baskın Robertson-Walker metriği ile betimlenen uzay-zaman yapısında kütleli ve yarı-spinli kozmik parçacıkların üretilmesi sürecini tartışmak için Fock yaklaşımını takip etmiştir (Audretsch ve Schafer, 1978).
- Schafer ve Dehnen 1980 yılında homojen (tekdüze, türdeş) dağılımlı elektromanyetik alanın söz konusu olduğu üç-boyutlu Robertson-Walker tipinde bir çizgi-elemanı için enflasyon evresindeki parçacık çifti üretme olasılığını araştırmış ve evrene dağılmış parçacıkların önemli bir kısmının büyük patlamanın hemen sonrasında vakumdan yaratılmış olması gerektiği sonucuna ulaşmışlardır (Schafer ve Dehnen, 1980).

- 1992 yılında yayınlanan bir çalışmada Villalba ve Percoco asimptotik olarak tekdüze ivmeli hareket sergileyen gözlemciyle betimlenen bir koordinat sistemi için kovaryant Klein-Gordon ve kovaryant Dirac denklemlerinin çözümlerine odaklanarak yaratılan görelî parçacıkların sayı yoğunluğunu tartışmış ve böylece üretilen Dirac parçacıklarının Fermi-Dirac dağılımıyla Klein-Gordon parçacıklarının ise Planck dağılımıyla temsil edildiklerini ortaya koymuşlardır (Villalba ve Percoco, 1992).
- Biswas ve arkadaşları bir kompleks-zaman WKB yaklaşımını takip ederek dS metriği için parçacık yaratma sürecini tartışmıştır (Biswas ve ark., 1995).
- Feinstein ve Sebastian 1995 yılında Bell-Szekeres tipi uzay-zaman metriği için Bogoliubov katsayıları yaklaşımını kullanarak skaler nötr parçacıkların üretilme mekanizmasına odaklanmıştır (Feinstein ve Sebastian, 1995).
- Gavrilov ve arkadaşları 1997 yılında sabit bir elektromanyetik alan durumunu varsayarak Friedman-Robertson-Walker (FRW) tipi bir geometri için bir vakum ortamından başka bir vakuma ortamına geçiş mekanizması, üretilen parçacıkların olasılık dağılımı ve vakum tedirginliği konularını araştırmışlardır (Gavrilov ve ark., 1997).
- 1999 yılında Villalba dikkatini sabit bir elektrik alan içeren anizotropik (eş-yönlü olmayan) bir uzay-zamanda Bogoliubov dönüşümleri yoluyla skaler parçacıkların üretilme sürecini araştırmaya çevirmiştir (Villalba, 1999).
- 2002 yılında Villalba bu kez Greiner ile birlikte zamanla değişen bir dış elektrik alan varlığında yukarıda bahsedilen çalışmada kullanılan uzay-zaman dokusu için kovaryant Klein-Gordon ve kovaryant Dirac denklemlerinin çözümlerini tartışarak yaratılan skaler ve fermiyonik parçacıkların sayı yoğunluğunu çalışmıştır (Villalba ve Greiner, 2002).
- Mendy sabit bir elektrik alan dağılımı ve gravitasyonel alan içeren bir ortamda FRW tipi bir metrik için kovaryant Klein-Gordon ve kovaryant Dirac denklemlerinin ilgili çözümlerini kullanarak yaratılan parçacıkların sayı yoğunluklarını irdelenmiş ve skaler Klein-Gordon parçacıkları için Bose-Einstein istatistiğine uyan ve kütleli fermiyonlar içinse Dirac-Fermi istatistiğiyle betimlenen dağılımlar elde etmiştir (Mendy, 2003).
- 2004 yılında Havare ve arkadaşları statik ve genişleyen dS2 tipi uzay-zaman modelleri için Bogoliubov katsayıları yöntemini kullanılarak yarım-spinli parçacıklarının üretilmesi sürecini araştırmıştır (Havare ve Ark., 2004).
- Moradi 2009 yılında yayınladığı iki farklı makalede kozmolojik parçacık yaratma sürecini analiz etmiştir:
  - İlk olarak asimptotik Robertson-Walker metriğinin iki farklı formu için kovaryant Klein-Gordon ve kovaryant Dirac denklemlerinin tam çözümlerini elde ederek yaratılan skaler Klein-Gordon parçacıklarının ve kütleli fermiyonların olasılık yoğunluklarının hesaplamıştır (Moradi, 2009a).

- Diğer araştırmada ise elektromanyetik ve gravitasyonel alan içeren Robertson-Walker modelinin dS ve asimptotik olarak ışınım baskın formları için yüklü skaler parçacıkların üretilmesi sürecini analiz etmiştir (Moradi, 2009b).
- Lin ve Yang parçacıkların FRW metriğinin görünen ufkundan kuantum tünellemesi yapması durumunu genel göreliliğin gökkuşağı formalizmi kapsamında irdelemiştir (Lin ve Yang, 2009).
- Haouat ve Chekireb 2011 yılında Robertson-Walker tipi bir uzay-zaman metriği varsayarak Bogoliubov dönüşüm yöntemine dayanan kanonik metodu yardımıyla vakumdan skaler parçacıklar üretilmesi sürecini araştırmışlardır (Haouat ve Chekireb, 2011).
- Haouat 2014 yılında bu kez Nouicer ile birlikte kovaryant Klein-Gordon denkleminin çözümlerinden bir elektrik alan vasıtasıyla skaler parçacıkların üretilmesi sürecini ele almıştır (Haouat ve Nouicer, 2014).
- Kangal ve arkadaşları 2014 yılında dış elektrik alan içeren (1+1)-boyutlu dS geometrinin kapsadığı bir vakum ortamından vektör bozonları üretilmesi problemini araştırmışlardır (Kangal ve ark., 2014).
- 2015 yılında Sogut ve Havare Bogoliubov katsayıları yöntemi yardımıyla dış elektromanyetik alan (zamanla değişen elektrik alan ile birlikte sabit manyetik alan) içeren Robertson-Walker tipi bir uzay-zaman modelindeki vakum ortamından üretilen skaler parçacıkların sayı yoğunluğunu elde etmiştir (Sogut ve Havare, 2015).
- Sogut ve arkadaşları 2016 yılında yayınlanan bir çalışmada uzaysal koordinata bağlı manyetik alan ile birlikte zamanla değişen elektrik alan varlığında Bogoliubov katsayılarını kullanarak yarım-spinli parçacıkların üretilme sürecini tartışmışlardır (Sogut ve ark., 2016).
- Lankinen ve Vilja 2016 yılında FRW tipi bir uzay-zaman modeli için gravitasyonel parçacık yaratma mekanizmasını temsili için bir yaklaşım ortaya koymuşlardır (Lankinen ve Vilja, 2016). Bu yöntem kapsamında, eğri uzay-zamanda skaler parçacıkların yaratılma süreci kuantum alan kuramı kullanılarak tartışılmış ve üretilme olasılığını betimleyen fonksiyonun parçacık kütesine ve geometrik modelin genişleme parametresine yakından bağlı olduğu ortaya konmuştur.
- 2017 yılındaki bir çalışmada ise Sogut ve arkadaşları vakum ortamından yarım-spinli parçacıklar üretme sürecinin dış elektromanyetik alanın büyüklüğüne bağlı olduğunu göstermişlerdir (Sogut ve ark., 2017).
- Bezerra ve arkadaşları kovaryant Klein-Gordon denklemi için Schwarzschild metriğinin gökkuşağı versiyonu yardımıyla Heun fonksiyonları cinsinden çözümler elde etmiş ve böylece Hawking ışımasını araştırmışlardır (Bezerra ve ark., 2017a).
- 2017 yılında yayınlanan bir diğer çalışmada ise kapalı Einstein metriği için kovaryant Klein-Gordon denkleminin çözümleri gökkuşağı formalizmi bağlamında elde edilerek Casimir etkisi araştırılmıştır (Bezerra ve ark., 2017b).

- Yine 2017 yılında, Bezerra çalışma arkadaşlarıyla birlikte bu defa kozmik statik sicim metriğinin gökkuşağı formalizmi ile yazılan versiyonunu kullanarak yüklü skaler parçacıkların enerji seviyeleri için kovaryant Klein-Gordon denkleminin çözümlerini araştırmıştır (Bezerra ve ark., 2017c).
- Santos 2020 yılında arkadaşlarıyla birlikte kovaryant Klein-Gordon denklemini gökkuşağı yaklaşımına göre yeniden yazılan kozmik sicim çizgi-elemanı için çözümler skaler parçacıkların görelî kuantum dinamiğini tartışmıştır (Santos ve ark., 2020).
- 2020 yılında Bakke ve Mota gökkuşağı yaklaşımına göre yeniden yazılan kozmik sicim uzay-zaman modelini kullanarak Dirac denklemini çözmüş ve sonrasında Aharonov-Bohm etkisini araştırmıştır (Bakke ve Mota, 2020).
- Hamil ve arkadaşları tarafından 2021 yılında yayınlanan bir araştırmada kozmolojik skaler parçacık üretme süreci zamansal tekillikler içermeyen bir uzay-zaman modelinde araştırılmıştır (Hamil ve ark., 2021).
- 2021 yılında Sogut ve araştırma arkadaşları fotonun görelî kuantum dinamiğine odaklanmış ve kütleli DKP denkleminin çözümlerinden foton için bir enerji özdeğer denklemi elde etmişlerdir. (Sogut ve ark., 2021).
- Kangal ve arkadaşları gökkuşağı formalizmine göre yeniden yazılan Gödel-tipi bir metrik için kovaryant Klein-Gordon denkleminin çözümlerine odaklanarak skaler parçacıkların görelî kuantum dinamiğini araştırmıştır (Kangal ve ark., 2021).
- Kangal 2022 yılında basılan bir çalışmada yarım-spinli ve kütleli parçacıkların görelî kuantum dinamiğini eş-yönlü olmayan bir uzay-zaman modelinin gökkuşağı versiyonu bağlamında tartışmıştır (Kangal, 2022).
- Bilim ve arkadaşları 2023 yılında genel göreliliğin gökkuşağı formalizmi kapsamında elektromanyetik ve gravitasyonel alanlardan kaynaklanan skaler ve spin-1/2 parçacıkların yaratılması sürecini ele almışlardır (Bilim ve ark., 2023a). Bu bağlamda, anizotropik Bianchi I tipi gökkuşağı metriği ile birlikte zamanla azalan bir dış elektrik alan dikkate alınarak yaratılan görelî parçacıkların sayı yoğunluğu hem Klein-Gordon hem de Dirac parçacıkları için elde edilmiştir.
- Yine 2023 yılında, Bilim ve çalışma arkadaşları dikkatlerini bu kez izotropik olmayan genişlemeli bir gökkuşağı metriği ile birlikte sabit bir dış elektrik alanı dikkate alarak spin-0 (skaler) parçacıkların yaratılması sürecini farklı bir perspektiften araştırmaya yönlendirmiştir (Bilim ve ark., 2023b).

Yapılan dikkatli literatür araştırmaları sonucunda yarım-spinli parçacıkların yaratılma sürecinin genel göreliliğin gökkuşağı formalizmi kapsamında dS2 metriği için daha önce çalışılmadığı görülmüştür. Bu bağlamda, tez araştırmaları neticesinde elde edilen kuramsal çıkarımların literatüre özgün ve oldukça önemli katkılar sunacağı öngörülmektedir.

### 3. MATERYAL VE YÖNTEM

Temeli dS2 tipi uzay-zaman geometrisi bağlamında ve genel göreliliğin gökkuşağı formalizmi çerçevesinde yarım-spinli kütleli Dirac parçacıklarının görelî kuantum dinamiğini araştırmak olduğundan bu tez çalışması kuramsal hesaplamalar içermektedir. Araştırma kapsamında herhangi bir materyal kullanılmamıştır. Ancak bazı matematiksel basamakları aşmak adına Wolfram Mathematica olarak bilinen ileri-seviye programlama ortamı kullanılmıştır. Kullanılacak yöntemin ilk basamağında dS2 modeli gravitenin gökkuşağı yaklaşımı kullanılarak yeniden yazılacak ve bazı temel hesaplamalar yapılacaktır, ikinci aşamada tanımlanan uzay-zaman metriği için kovaryant Dirac denkleminin tam çözümleri ve yarı-klasik H-J denkleminin asimptotik çözümleri elde edilecektir, üçüncü aşamada ise Bogoliubov dönüşümleri yöntemiyle fermiyonik parçacıkların yaratılması süreci analiz edilecektir.

#### 3.1. Notasyon Hakkında

Tez kapsamındaki tensörel ifadelerde kullanılan tüm indisler genel olarak “0-3” arasında değerler almaktadır (aksi durumlar olduğunda ilgili yerde özellikle belirtilecektir). “0” sayısı zaman koordinatına, “1, 2, 3” sayıları ise üç uzay koordinatlarına karşılık gelmektedir. Yunan alfabesinin kullanıldığı indisler ( $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$ ) eğri uzay-zaman koordinatlarını betimlerken Latin alfabesiyle yazılan indisler ( $a, b, i, j, \dots = 0, 1, 2, 3$ ) ise düz uzay-zamanı göstermektedir. Bu tez çalışması boyunca metrik için  $(-, +, +, +)$  işaret seçimi kullanılacak ve  $G = c = \hbar = 1$  şeklindeki doğal birimler tercih edilecektir.

#### 3.2. Kuramsal Analiz Yaklaşımı Hakkında

Takip edilecek kuramsal analiz yaklaşımını daha açık biçimde sunmak adına araştırmamız için incelenen kaynaklardan biri olan “*Particle Creation in a universe filled by radiation and dust-like matter*” (Villalba, 1993) başlıklı makale Türkçeye çevrilerek bu alt bölümde sunulmuştur. Villalba tarafından 1993 yılında yayınlanan bu makalede uzaysal olarak açık FRW geometrisiyle betimlenen radyasyon ve toz benzeri madde karışımıyla doldurulmuş izotropik bir evren modeli dikkate alınarak kovaryant Klein-Gordon ve kovaryant Dirac denklemleri çözülmüş ve skaler ve yarım-spinli parçacıkların görelî kuantum dinamiği üzerine yoğunlaşmıştır. Yukarıda bahsi geçen uzay-zaman modelini temsil eden çizgi-elemanı

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 [d\chi^2 + (\sinh(\chi))^2 (d\vartheta^2 + (\sin\vartheta)^2 d\varphi^2)] \quad (3.1)$$

biçiminde yazılmaktadır (Chernin, 1966; Kharbediya, 1977). Bu metrik Einstein'ın Genel Görelilik kuramında ortaya koyduğu

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu} \quad (3.2)$$

biçiminde yazılan alan denkleminde kullanıldığında aşağıdaki sonuçlar elde edilmektedir

$$\frac{d\epsilon}{p + \epsilon} = -3 \frac{da}{a}, \quad (3.3)$$

$$\kappa\epsilon = \frac{3}{a^2} \left[ \left( \frac{da}{dt} \right)^2 - 1 \right]. \quad (3.4)$$

Burada,  $R_{\mu\nu}$  Ricci tensörü,  $R$  Ricci skaleri,  $\kappa$  bir sabit,  $\epsilon$  enerji ve  $p$  ise basınçtır. Ayrıca, ilgili senaryoda radyasyon ile toz benzeri madde arasında bir etkileşim olmadığı kabul edilmiş olup toplam enerji şöyle ifade edilmektedir (Chernin, 1966):

$$\epsilon = \epsilon_d + \epsilon_r, \quad (3.5)$$

$$\epsilon_d = \frac{A}{a^3}, \quad (3.6)$$

$$\epsilon_r = \frac{B}{a^4}. \quad (3.7)$$

Yukarıdaki denklemlerde yazılan  $A$  ve  $B$  iki sabit parametredir. Ek olarak,

$$\eta = \int \frac{dt}{a} \quad (3.8)$$

biçiminde bir konformal dönüşüm tanımlandığında ve  $\eta \rightarrow -\infty$  durumunda  $a(\eta) \rightarrow b$  ( $b$  bir sabittir) kabul edildiğinde denklem (3.1)'de yazılan çizgi elemanı şu biçimi almaktadır (Villalba, 1993)

$$ds^2 = b^2(e^\eta + 1)^2 (-d\eta^2 + d\chi^2 + (\sinh \chi)^2 (d\vartheta^2 + (\sin\vartheta)^2 d\varphi^2)). \quad (3.9)$$

Artık Klein-Gordon ve Dirac denklemlerini kovaryant formlarının tam çözümlerinin araştırılabileceği aşamaya gelinmiştir. Kovaryant Klein-Gordon denklemi

$$(g^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta} - \xi R - m^2)\Phi = 0. \quad (3.10)$$

biçiminde yazılmaktadır. Denklem (3.9)'te yazılan metrik için Ricci skaleri

$$R = \frac{6}{b^2(e^{\eta}+1)^3}. \quad (3.11)$$

biçiminde elde edilmektedir. Ayrıca,  $\xi$  çarpanı konformal bir çiftlenim durumu için  $\xi = \frac{1}{6}$  değerini alan boyutsuz bir parametredir. Klein-Gordon denkleminde (3.9) numaralı denkleme yazılan metrik kullanıldıktan sonra elde edilen diferansiyel denklemi değişkenlerine ayırmak amacıyla

$$\Phi = T(\eta)X(\chi)Y(\vartheta, \varphi) \quad (3.12)$$

tanımı yapıldığında

$$\left(\frac{d^2}{d\vartheta^2} + \cot\vartheta \frac{d}{d\vartheta} + \frac{1}{(\sin\vartheta)^2} \frac{d^2}{d\varphi^2}\right)Y = l(l+1)Y, \quad (3.13)$$

$$\left(\frac{d^2}{d\eta^2} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{d}{d\eta} + \frac{\ddot{a}}{a} + m^2a^2 + \sigma^2 - 1\right)T = 0, \quad (3.14)$$

$$\left(\frac{d^2}{d\chi^2} + 2\coth\chi \frac{d}{d\chi} + \frac{l(l+1)}{(\sinh\chi)^2} + \sigma^2\right)X = 0, \quad (3.15)$$

denklemlerine ulaşılmaktadır. Buradaki  $l$  ve  $\sigma$  ifadeleri  $l \geq 0$  ve  $\sigma^2 > 1$  koşullarına uyan ayırma sabitleridir. Bu basamakta

$$T(\eta) = \frac{Z(\eta)}{a(\eta)}, \quad (3.16)$$

fonksiyonu önerildiğinde denklem (3.14) aşağıdaki diferansiyel denkleme dönüşmektedir

$$\left(\frac{d^2}{d\eta^2} + m^2a(\eta)^2 + \sigma^2 - 1\right)Z = 0. \quad (3.17)$$

Yukarıdaki denklemde

$$a(\eta) = b(e^{\eta} + 1) \quad (3.18)$$

fonksiyonu kullanıldığında aşağıdaki sonuca ulaşılmaktadır

$$\left( \frac{d^2}{d\eta^2} + m^2 b^2 e^{2\eta} + 2m^2 b^2 e^\eta + m^2 b^2 + \sigma^2 - 1 \right) Z = 0. \quad (3.19)$$

Elde edilen bu diferansiyel denklemin çözümü ise hiper-geometrik  $M$  ve  $U$  fonksiyonlarının birleşimi şeklinde şöyle ifade edilmektedir (Abramowitz, 1964):

$$Z(\eta) = e^{\eta c} \exp(-imbe^\eta) \times \left( C_1 M\left(\frac{1}{2} + c + ibm, 2c + 1, 2ibme^\eta\right) + C_2 U\left(\frac{1}{2} + c + ibm, 2c + 1, 2ibme^\eta\right) \right). \quad (3.20)$$

Buradaki  $C_1$  ve  $C_2$  çarpanları keyfi sabitler olup ek olarak

$$c = i(\sigma^2 + m^2 b^2 - 1)^{1/2}, \quad (3.21)$$

biçimindedir. Öte yandan, denklem (3.13)'ün çözümleri harmonik polinomlar  $Y = Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  cinsinden yazılabilmektedir. Ayrıca, denklem (3.16)'in çözümleri ise aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$X = \frac{1}{\sqrt{\sinh \chi}} P_{l-1/2}^{-l-1/2}(\cosh \chi). \quad (3.22)$$

Buradaki  $P_\beta^\alpha(\cosh \chi)$  ifadesi torus fonksiyonu olup ek olarak

$$v^2 = \sigma^2 - 1, \quad (3.23)$$

biçimindedir.

Şimdi kovaryant Dirac denkleminin tam çözümlerine odaklanabiliriz. Eğri uzay-zamanda kovaryant Dirac denklemi

$$\{\gamma^\mu (\partial_\mu - \Gamma_\mu) + m\} \Psi = 0 \quad (3.24)$$

şeklinde yazılmaktadır. Bu denklemdeki  $\gamma^\mu$  ifadesi eğri uzaylar için yazılan gamma matrisleri olup düz uzay gamma matrislerine denklem (1.21)'de yazılan ilişkiyle bağlı olup kovaryant gamma matrisleri

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}_+ = 2g^{\mu\nu} \quad (3.25)$$

koşulunu sağlamaktadırlar. Diğer yandan,  $\Gamma_\mu$  ifadesi ise spin bağlantı katsayısıdır (Brill ve Wheeler, 1957). Denklem (3.9) ile verilen metrik için tetrad alanı bileşenleri kullanıldığında denklem (1.21)'den aşağıdaki sonuçlar elde edilmektedir:

$$\gamma^0 = a^{-1}\tilde{\gamma}^0, \quad (3.26)$$

$$\gamma^1 = a^{-1}\tilde{\gamma}^1, \quad (3.27)$$

$$\gamma^2 = a^{-1}(\sinh\chi)^{-1}\tilde{\gamma}^2, \quad (3.28)$$

$$\gamma^3 = a^{-1}(\sinh\chi)^{-1}(\sin\vartheta)^{-1}\tilde{\gamma}^3. \quad (3.29)$$

Yukarıda yazılan eğri uzay-zaman gamma matrisleri ile birlikte spin bağlantı katsayısının bileşenlerini kovaryant Dirac denkleminde yerine yazarsak aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilmektedir

$$\left\{ \frac{1}{a}\tilde{\gamma}^0\partial_\eta + \frac{1}{a}\tilde{\gamma}^1\partial_\chi + \frac{1}{a\sinh\chi}\tilde{\gamma}^2\partial_\vartheta + \frac{1}{a(\sinh\chi)(\sin\vartheta)}\tilde{\gamma}^3\partial_\varphi + m \right\} \Psi = 0. \quad (3.30)$$

Şimdi de Dirac spinörü için

$$\tilde{\Psi} = a^{-2}(\sinh\chi)^{-1}(\sin\vartheta)^{-1/2}\Psi, \quad (3.31)$$

tanımı yapıldığında elde edilen ifadede cebirsel değişkenlerine ayırma yöntemi (Andrushkevich, 1987; Shishkin, 1989; 1992 ) kullanıldığında şu sonuçlara ulaşılmaktadır

$$[\hat{K}_1, \hat{K}_2]_- = 0, \quad (3.32)$$

$$\{\hat{K}_1 + \hat{K}_2\}\Phi = 0, \quad (3.33)$$

$$\hat{K}_1\Phi = \lambda\Phi = -\hat{K}_2\Phi, \quad (3.34)$$

öyleki

$$\Psi = \tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^3\Phi, \quad (3.35)$$

$$\hat{K}_1 = (\gamma^0\partial_\eta + ma)\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^3, \quad (3.36)$$

$$\hat{K}_2 = \left( \tilde{\gamma}^1 \partial_\chi + \frac{1}{\sinh\chi} \tilde{\gamma}^2 \partial_\vartheta + \frac{1}{(\sinh\chi)(\sin\vartheta)} \tilde{\gamma}^3 \partial_\varphi \right) \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^2 \tilde{\gamma}^3. \quad (3.37)$$

Yukarıdaki ifadelerden ilgili diferansiyel denklemin uzay ( $\chi$ ,  $\vartheta$  ve  $\varphi$ ) ve zaman ( $\eta$ ) koordinatlarına göre başarıyla ayrılabilirdiği görülmektedir. Buradaki matematiksel sorun Denklem (3.37)'ü denklem (3.34)'de kullandığımızda ortaya çıkmaktadır. Matematiksel olarak daha ileri gidebilmek için

$$(\hat{K}_2 + \lambda)\Phi = 0, \quad (3.38)$$

denklemini şöyle yazalım

$$[\hat{K}_3 + \hat{K}_4 \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^2]\Phi = 0, \quad (3.39)$$

öyleki

$$\hat{K}_3 = (\sinh\chi)(\gamma^2 \gamma^3 \partial_\chi + \lambda), \quad (3.40)$$

$$\hat{K}_4 = \left( \gamma^2 \gamma^3 \partial_\vartheta + \frac{1}{\sin\vartheta} \partial_\varphi \right). \quad (3.41)$$

Burada yardımcı spinör  $\Sigma$  kullanılarak

$$\Phi = (\hat{K}_4 + \hat{K}_3 \gamma^1 \gamma^2)\Sigma, \quad (3.42)$$

tanımı yapıldığında denklem (3.39) şu ifadeye indirgenir

$$[\hat{N}_1 + \hat{N}_2]\Sigma = 0, \quad (3.43)$$

öyleki

$$[\hat{N}_1, \hat{N}_2]_- = 0, \quad (3.44)$$

$$\hat{N}_2 \Sigma = -\hat{N}_1 \Sigma = k^2 \Sigma, \quad (3.45)$$

$$\hat{N}_1 = (\sinh\chi)^2 (\partial_\chi^2 + \coth\chi \partial_\chi - \lambda \gamma^2 \gamma^3 \coth\chi + \lambda^2), \quad (3.46)$$

$$\hat{N}_2 = (\partial_\vartheta^2 + i\gamma^2\gamma^3 k_\varphi (\sin\vartheta)^{-2} \cos\vartheta - k_\varphi^2 (\sin\vartheta)^{-2}). \quad (3.47)$$

Yukarıda yazılan  $k_\varphi$  ifadesi  $-i\partial_\varphi$  operatörünün özdeğeridir. Villalba ilgili makalesinde yukarıdaki diferansiyel denklemin tam çözümlerini elde edebilmek adına Clifford cebirini sağlayan düz-uzay Dirac matrisleri için aşağıdaki seçimleri yapmıştır:

$$\tilde{\gamma}^0 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ \sigma^3 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.48)$$

$$\tilde{\gamma}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

Artık  $\Sigma$  spinörünü bileşenleri cinsinden ifade edebiliriz:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} p(\chi)A(\vartheta) \\ q(\chi)B(\vartheta) \\ r(\chi)C(\vartheta) \\ s(\chi)D(\vartheta) \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

Buradaki  $p(\chi)$ ,  $q(\chi)$ ,  $r(\chi)$  ve  $s(\chi)$  fonksiyonları şu diferansiyel denklemi sağlamaktadır:

$$(\sinh\chi(d_\chi \mp i\lambda))(\sinh\chi(d_\chi \pm i\lambda))X(\chi) + k^2X(\chi) = 0. \quad (3.51)$$

Yukarıdaki denklemde üst işaretler  $p(\chi)$  ve  $r(\chi)$  fonksiyonlarına karşılık gelirken alt işaretler ise  $q(\chi)$  ve  $s(\chi)$  fonksiyonlarına karşılık gelmektedir. Diğer yandan,

$$(d_\vartheta \pm k_\varphi (\sin\vartheta)^{-1})(d_\vartheta \mp k_\varphi (\sin\vartheta)^{-1})Y(\vartheta) - k^2Y(\vartheta) = 0, \quad (3.52)$$

denkleminin çözümleri  $A(\vartheta)$ ,  $B(\vartheta)$ ,  $C(\vartheta)$  ve  $D(\vartheta)$  fonksiyonlarıdır. Benzer şekilde, yukarıdaki denklemde verilen üst işaretler  $A(\vartheta)$  ve  $C(\vartheta)$  fonksiyonları için yazılırken alt işaretler ise  $B(\vartheta)$  ve  $D(\vartheta)$  ifadelerine aittir. Denklem (3.50)'daki tanım denklem (3.42)'de yazıldığında şu sonuca ulaşılmaktadır

$$\Phi = ik \begin{pmatrix} p(\chi)B(\vartheta)(1+i)\alpha \\ q(\chi)A(\vartheta)(1-i)\alpha \\ r(\chi)D(\vartheta)(1+i)\beta \\ s(\chi)C(\vartheta)(1-i)\beta \end{pmatrix} e^{ik_\varphi\varphi}. \quad (3.53)$$

Burada  $\alpha$  ve  $\beta$  ifadeleri  $\eta$  değişkenine bağlı fonksiyonlardır. Ayrıca  $A, B, C, D$  ve  $p, q, r, s$  ifadeleri aşağıdaki birleşik kısmi denklem sistemleri ile ilişkilidir:

$$\left(d_{\vartheta} - \frac{k_{\varphi}}{\sin\vartheta}\right) \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = -k \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix}, \quad (3.54)$$

$$\left(d_{\vartheta} + \frac{k_{\varphi}}{\sin\vartheta}\right) \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} = +k \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}, \quad (3.55)$$

$$\sinh\chi(d_{\chi} + i\lambda) \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix}, \quad (3.56)$$

$$\sinh\chi(d_{\chi} - i\lambda) \begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix} = -k \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}. \quad (3.57)$$

Yukarıdaki denklemlerde yazılan  $\lambda$  ve  $k$  ifadeleri birer sabittir. Denklem (3.42) ve denklem (3.53) dikkate alındığında  $p(\chi) = r(\chi)$ ,  $q(\chi) = s(\chi)$ ,  $A(\vartheta) = C(\vartheta)$  ve  $B(\vartheta) = D(\vartheta)$  yazılabileceği anlaşılmaktadır. Öte yandan,  $\alpha$  ve  $\beta$  fonksiyonları şu denklemleri sağlamaktadır:

$$(\partial_{\eta} + ima)\beta = -\lambda\alpha, \quad (3.58)$$

$$(\partial_{\eta} - ima)\alpha = +\lambda\beta. \quad (3.59)$$

Birinci mertebeden bu iki diferansiyel denklem bizi aşağıdaki ikinci mertebeden diferansiyel denklemlere yönlendirmektedir

$$(d_{\eta}^2 + m^2b^2e^{2\eta} + e^{\eta}(2m^2b^2 - imb) + m^2b^2 + \lambda^2)\alpha = 0, \quad (3.60)$$

$$(d_{\eta}^2 + m^2b^2e^{2\eta} + e^{\eta}(2m^2b^2 + imb) + m^2b^2 + \lambda^2)\beta = 0. \quad (3.61)$$

Bu iki denklemin tam çözümleri hiper-geometrik fonksiyonlar cinsinden yazılabilmektedir:

$$\alpha(\eta) = e^{\eta c} e^{-imbe^{\eta}} \left( -c_0 \frac{(c + imb)}{\lambda} M(c + imb + 1, 2c + 1, 2imbe^{\eta}) + c_1 \frac{(c^2 + m^2b^2)}{\lambda} U(c + imb + 1, 2c + 1, 2imbe^{\eta}) \right), \quad (3.62)$$

$$\beta(\eta) = e^{\eta c} e^{-imbe^{\eta}} (c_0 M(c + imb, 2c + 1, 2imbe^{\eta}) + c_1 U(c + imb, 2c + 1, 2imbe^{\eta})). \quad (3.63)$$

Buradaki  $c$  bir sabit olup şöyle tanımlanmaktadır

$$c = -i(\lambda^2 + m^2 b^2)^{1/2}. \quad (3.64)$$

Böylece, denklem (3.54) ve (3.55)'in çözümleri Jacobi polinomları cinsinden şöyle yazılmaktadır

$$A(\vartheta) = \sin^{k_\varphi}(\vartheta) \cos(\vartheta/2) P_n^{(k_\varphi+1/2, k_\varphi-1/2)}(\cos\vartheta), \quad (3.65)$$

$$B(\vartheta) = \sin^{k_\varphi}(\vartheta) \sin(\vartheta/2) P_n^{(k_\varphi-1/2, k_\varphi+1/2)}(\cos\vartheta), \quad (3.66)$$

öyleki

$$n = |k| - |k_\varphi| - \frac{1}{2}. \quad (3.67)$$

Diğer yandan, I birim matris olmak üzere, (3.56) ve (3.57) numaralı denklemlerden oluşan sistem matris formda şöyle yazılabilmektedir:

$$\left( Id_\chi + i\lambda\sigma^3 - \frac{ik}{\sinh\chi}\sigma^2 \right) \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = 0. \quad (3.68)$$

Burada,

$$S^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}, \quad (3.69)$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i\sigma^1), \quad (3.70)$$

denklemlerine göre bir S dönüşüm matrisi tanımlandığında şu denklemler elde edilmektedir:

$$\left( d_\chi - \frac{ik}{\sinh\chi} \right) Q = \lambda P, \quad (3.71)$$

$$\left( d_\chi + \frac{ik}{\sinh\chi} \right) P = -\lambda Q, \quad (3.72)$$

$$P + iQ = p, \quad (3.73)$$

$$Q + iP = q. \quad (3.74)$$

Denklem (3.71) ve (3.72)'den oluşan sistemin çözümleri Gauss hipergeometrik fonksiyon cinsinden yazılabilmektedir (Gradshtein, 1980):

$$P(\chi) = \sinh^{ik}(\chi) \cosh(\chi/2) F\left(\frac{1}{2} + i\lambda + ik, \frac{1}{2} - i\lambda + ik, \frac{3}{2} + ik, (1 - \cosh\chi)/2\right), \quad (3.75)$$

$$Q(\chi) = -\left(\frac{1}{2} + ik\right)/\lambda \sinh^{ik}(\chi) \sinh(\chi/2) \times F\left(\frac{1}{2} + i\lambda + ik, \frac{1}{2} - i\lambda + ik, \frac{1}{2} + ik, (1 - \cosh\chi)/2\right). \quad (3.76)$$

Nihayet, Dirac spinörü şöyle yazılır

$$\tilde{\Psi} = a^{-2} (\sinh\chi)^{-1} (\sin\vartheta)^{-1/2} \begin{pmatrix} p(\chi)B(\vartheta)(1+i)\beta(\eta) \\ q(\chi)A(\vartheta)(1-i)\beta(\eta) \\ p(\chi)D(\vartheta)(1+i)\alpha(\eta) \\ q(\chi)C(\vartheta)(1-i)\alpha(\eta) \end{pmatrix} e^{ik_\varphi\varphi}. \quad (3.77)$$

Kovaryant Klein-Gordon ve kovaryant Dirac denklemlerinin tam çözümleri başarıyla elde edilmiştir. Bu çözümlerin de yardımıyla pozitif ve negatif frekanslı durumları matematiksel olarak tanımlayabilmek için yarı-klasik H-J denkleminin asimptotik çözümlerine odaklanmak yerinde olacaktır. Böylece, seçilen metrik ile betimlenen kozmolojik arka planda skaler ve yarı-spinli parçacıkların yaratma olaylarını incelemek mümkün olabilecektir. Söz konusu modelin  $\eta = -\infty$ 'dan başlayıp  $\eta = +\infty$ 'a evrildiği görülmektedir. Villalba tarafından seçilen metriğe göre evren asimptotik olarak düzdür, fakat geleceğe doğru evrimi sırasında bir daralma dönemi göstermez. Böylece  $\eta = -\infty$  ve  $\eta = +\infty$  limitlerindeki çözümlerin asimptotik davranışlarını oluşturmak için bu aşamada seçilen metrik ile birlikte yarı-klasik H-J denkleminin odaklanmak gerekmektedir. Bahsi geçen H-J denklemi şöyle yazılmaktadır:

$$g^{\alpha\beta} S_{,\alpha} S_{,\beta} + m^2 = 0. \quad (3.78)$$

Buna göre, seçilen metrik yukarıdaki denklemi şu forma dönüştürmektedir:

$$-(S_{,\eta})^2 + (S_{,\chi})^2 + \frac{1}{\sinh^2\chi} \left( (S_{,\vartheta})^2 + \frac{1}{\sin^2\vartheta} (S_{,\varphi})^2 \right) + m^2 a^2 = 0. \quad (3.79)$$

Bu aşamada, yukarıdaki denklemi değişkenlerine ayırabilmek amacıyla

$$S = T(\eta) + F(\chi, \vartheta, \varphi) \quad (3.80)$$

tanımı yapılması yerinde olmaktadır ve şu sonuç elde edilmektedir:

$$(T, \eta)^2 = m^2 a^2 + \Lambda^2. \quad (3.81)$$

Sonuç olarak

$$T = \pm \int (m^2 a^2 + \Lambda^2)^{1/2} d\eta \quad (3.82)$$

çözümü elde edilmektedir. Buradaki  $\Lambda$  niceliği değişkenlerine ayırma parametresidir. Daha sonra, çözümün klasik asimptotu şöyle yazılabilmektedir:

$$\Psi \rightarrow F(\chi, \vartheta, \varphi) \exp(\pm i \int (m^2 a^2 + \Lambda^2)^{1/2} d\eta). \quad (3.83)$$

Denklem (3.82)'deki  $T(\eta)$  fonksiyonunun asimptotik davranışlarından

$$\lim_{\eta \rightarrow -\infty} T \rightarrow \pm (m^2 a^2 + \Lambda^2)^{1/2} \eta \quad (3.84)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} T \rightarrow \pm m b e^\eta \quad (3.85)$$

sonuçları elde edilmektedir. Şimdi, konformal zaman değişkeni  $\eta$  ile kozmik zaman  $t$  arasındaki ilişkiyi şöyle betimleyelim:

$$b(e^\eta + \eta) = t \quad (3.86)$$

Buradaki  $b(e^\eta + \eta)$  ifadesinden  $t$ 'nin monoton olarak arttığı ve ayrıca  $\eta \rightarrow \pm\infty$  limitlerinde  $t \rightarrow \pm\infty$  olduğu ve  $\eta = +\infty$  limitinde metriğimizin Milne evrenine dönüştüğüne dikkat edilmelidir. Bilindiği üzere, asimptotik davranışları ile birlikte Klein-Gordon denkleminin çözümleri  $\eta \rightarrow -\infty$  limitinde

$$Z_{-\infty}(\eta) = (2c)^{-1/2} e^{\eta c} \exp(-imbe^\eta) M\left(\frac{1}{2} + c - ibm, 2c + 1, 2ibme^\eta\right) \quad (3.87)$$

biçiminde yazılırken  $\eta \rightarrow +\infty$  limitinde ise

$$Z_{\infty}(\eta) = e^{i\pi c/2} e^{\eta c} \exp(-imbe^{\eta}) U\left(\frac{1}{2} + c - ibm, 2c + 1, 2ibme^{\eta}\right) \quad (3.88)$$

şeklinde yazılmaktadır. Yukarıdaki ifadeler yazılırken

$$U(\alpha, \gamma, z) \rightarrow z^{-\alpha} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right) \quad (3.89)$$

denklemini (Abramowitz, 1964) kullanılmıştır. Kovaryant Klein-Gordon denkleminin çözümleri elde edilirken tanımlanan ve Denklem (3.21)'de yazılan  $c$  sabiti  $T_{-\infty}$  ve  $T_{\infty}$  sırasıyla  $\eta \rightarrow -\infty$  ve  $\eta \rightarrow \infty$  limitlerindeki pozitif frekans kipleri ile ilişkilendirilebilir. Böylece sıradaki adım  $\eta = -\infty$  ile birlikte  $\eta \rightarrow \infty$ 'daki iki farklı durum ile ilişkili Bogoliubov katsayılarını hesaplamaktır.

## 4. BULGULAR VE TARTIŞMA

### 4.1. Geometrik Model ve Temel Nicelikler

Denklem (1.27) ile tanımlanan dönüşümler denklem (1.34)'te yazılan  $ds^2$  metriğinde kullanıldığında ilgili uzay-zaman modelinin gökkuşağı gravite formalizmi bağlamında değiştirilmiş versiyonu şöyle elde edilecektir:

$$ds^2 = \frac{1}{H^2\eta^2} \left[ -\frac{d\eta^2}{\xi_1^2(\varepsilon)} + \frac{dx^2}{\xi_2^2(\varepsilon)} \right]. \quad (4.1)$$

Buna göre, yukarıda yazılan çizgi-elemanı için metrik tensör  $g_{\alpha\beta}$  ve tersinin (ya da kontravaryant metrik tensör)  $g^{\alpha\beta}$  sıfırdan farklı bileşenleri şöyle ifade edilmektedir:

$$g_{\alpha\beta} = -\frac{1}{\xi_1^2 H^2 \eta^2} \delta_\alpha^0 \delta_\beta^0 + \frac{1}{\xi_2^2 H^2 \eta^2} \delta_\alpha^1 \delta_\beta^1, \quad (4.2)$$

$$g^{\alpha\beta} = -\xi_1^2 H^2 \eta^2 \delta_0^\alpha \delta_0^\beta + \xi_2^2 H^2 \eta^2 \delta_1^\alpha \delta_1^\beta. \quad (4.3)$$

Öte yandan, tetrad alanı bileşenleri eğri-uzay zaman metrik tensörü  $g_{\alpha\beta}$  ile

$$\hat{\eta}_{(ij)} = -\delta_i^0 \delta_j^0 + \delta_i^1 \delta_j^1 \quad (4.4)$$

biçiminde yazılan (1+1)-boyutlu düz uzay-zaman metrik tensörünü

$$g_{\alpha\beta} = h_\alpha^{(i)} h_\beta^{(j)} \hat{\eta}_{(ij)} \quad (4.5)$$

ifadesine göre birbirleriyle ilişkilendirmektedir. Buna göre, tetrad alanları  $h_\alpha^{(i)}$  ve  $h_i^{(\alpha)}$ 'nın sıfırdan farklı olan bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilmektedir:

$$h_\alpha^{(i)} = \frac{1}{\xi_1 H \eta} \delta_0^i \delta_\alpha^0 + \frac{1}{\xi_2 H \eta} \delta_1^i \delta_\alpha^1, \quad (4.6)$$

$$h_i^{(\alpha)} = \xi_1 H \eta \delta_i^0 \delta_0^\alpha + \xi_2 H \eta \delta_i^1 \delta_1^\alpha. \quad (4.7)$$

Burada yazılan tetrad alanı bileşenleri yardımıyla kovaryant gamma matrisleri düz-uzay gamma matrisleri cinsinden şöyle yazılmaktadır:

$$\gamma^0 = \xi_1 H \eta \hat{\gamma}^0, \quad (4.8)$$

$$\gamma^1 = \xi_2 H \eta \hat{\gamma}^1 \quad (4.9)$$

Böylece, gökkuşağı tipi dS2 metriği için Christoffel sembolleri ( $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ ) ve spin bağlantı katsayıları ( $\Gamma_\mu$ ) hesaplandığında sıfırdan farklı olan ve aşağıdaki gibi ifade edilen bileşenler elde edilmektedir:

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{\xi_2^2}{\xi_1^2} \Gamma_{11}^0 = \Gamma_{10}^1 = \Gamma_{01}^1 = -\frac{1}{\eta} \quad (4.10)$$

$$\Gamma_1 = -\frac{\xi_1}{2\eta\xi_2} \hat{\gamma}^0 \hat{\gamma}^1 \quad (4.11)$$

#### 4.2. Kovaryant Dirac Denkleminin Tam Çözümü

Dış elektromanyetik alanın olmadığı gravitasyonel bir ortamda hareket eden yarı-spinli parçacığın görelî dinamiğini (Brill ve Wheeler, 1957) araştırmak için

$$[i\gamma^\lambda (\partial_\lambda + \Gamma_\lambda) - m]\psi = 0 \quad (4.12)$$

denkleminde odaklanacağız. Bu denklem, seçtiğimiz gökkuşağı dS2 modeli için elde edilen ve (4.6)-(4.9) ve (4.11) denklemlerinde nicelikler kullanıldığında

$$\left[ \xi_1 \hat{\gamma}^0 \partial_\eta + \xi_2 \hat{\gamma}^1 \left( \partial_x + \frac{\xi_1}{2\eta\xi_2} \hat{\gamma}^0 \hat{\gamma}^1 \right) + \frac{im}{H\eta} \right] \psi(\eta, x) = 0, \quad (4.13)$$

matris formdaki diferansiyel denklem elde edilmektedir. Metrik tensöre bakıldığında araştırdığımız kuramsal sistemin Hamiltoniyeninin  $x$  koordinatına bağlı olmadığı görülmektedir, yani yukarıdaki diferansiyel denklemin katsayıları sadece konformal zaman koordinatına bağlıdır. Bu nedenle, incelediğimiz fermiyonlar  $x$  koordinatına göre serbest parçacık gibi davranacaktır, dolayısıyla uzay koordinatı için serbest parçacık çözümleri elde edilecektir. Böylece,  $\psi(\eta, x)$  spinör fonksiyonu

$$\psi(\eta, x) = e^{-ikx} \Phi(\eta) \quad (4.14)$$

biçiminde yazılabilecektir. Burada  $k$  çarpanının  $i\partial_x$  lineer momentum operatörünün öz değeri olduğunu vurgulamak faydalı olacaktır. Sonuç olarak, yukarıdaki spinör tanımının kullanılmasıyla Dirac denklemi

$$\left[ \xi_1 \hat{\gamma}^0 \left( \partial_\eta - \frac{1}{2\eta} \right) - ik\xi_2 \hat{\gamma}^1 + \frac{im}{H\eta} \right] \Phi(\eta) = 0, \quad (4.15)$$

biçimini almaktadır. Dikkate alınan uzay-zaman modeli (1+1)-boyutlu olduğundan spinörümüz iki bileşenli olacaktır. Bu nedenle, Dirac gamma matrisleri orijinal formlarından farklı olarak 2x2'lik matrisler olarak yeniden tanımlanmalıdır. Buradan hareketle, düz uzay-zaman gama matrisleri olan  $\hat{\gamma}^0$  ve  $\hat{\gamma}^1$  şöyle seçilebilir:

$$\hat{\gamma}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\gamma}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Bu adımda,  $\Phi(\eta)$  spinörünü açık olarak bileşenlerini oluşturan fonksiyonunlar cinsinden tanımlamamız gerekmektedir:

$$\Phi(\eta) = \sqrt{\eta} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Denklem (4.16), (4.17) ve (4.18)'te yazılan matematiksel ifadeler denklem (4.15)'de yerine yazıldığında iki tane çiftlenimli denklemden oluşan bir diferansiyel denklem sistemi elde edilmektedir:

$$\left( \xi_1 \partial_\eta + \frac{im}{H\eta} \right) \varphi_1 - ik\xi_2 \varphi_2 = 0, \quad (4.18)$$

$$\left( \xi_1 \partial_\eta - \frac{im}{H\eta} \right) \varphi_2 + ik\xi_2 \varphi_1 = 0. \quad (4.19)$$

Bu iki denklemden spinör bileşenleri çekildiğinde

$$\varphi_1 = -\frac{\xi_1}{ik\xi_2} \left( \partial_\eta - \frac{im}{H\eta\xi_1} \right) \varphi_2 \quad (4.20)$$

ve

$$\varphi_2 = \frac{\xi_1}{ik\xi_2} \left( \partial_\eta + \frac{im}{H\eta\xi_1} \right) \varphi_1 \quad (4.21)$$

sonuçları elde edilmektedir. Böylece, denklem (4.20) ve (4.21) tanımları denklem (4.18) ve (4.19)'te uygun yerlere yazılarak spinör bileşenleri için çiftlenimsiz diferansiyel denklemler elde edilmektedir:

$$\left[ \eta^2 \frac{d^2}{d\eta^2} + \left( -\frac{k^2 \xi_2^2}{\xi_1^2} \eta^2 + \frac{m^2}{H^2 \xi_1^2} \mp \frac{im}{H \xi_1} \right) \right] \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (4.22)$$

Bu denklem sistemin tam çözümleri silindirik fonksiyonlar cinsinden verilir. Silindirik fonksiyonlara Bessel fonksiyonları  $J_\nu$  ve  $Y_\nu$  (bunlar Weber ve Neumann fonksiyonları olarak da adlandırılırlar) ile birlikte Henkel fonksiyonları  $H_\nu^{(i)}$  örnek olarak verilebilmektedir (Abramowitz ve Stegun, 1964). Genel olarak

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + ax \frac{dy}{dx} + (bx^n + c)y(x) = 0, \quad (4.23)$$

biçimindeki diferansiyel denklemlerin çözümü transandantal fonksiyonlar olarak bilinmektedir. Buradaki  $a, b, n \neq 0$  ve  $c$  birer serbest parametredir. Yukarıda yazdığımız genel diferansiyel denklemin çözümleri  $n$ . dereceden silindirik fonksiyonlar olarak da bilinmektedir. Buna göre,  $b \neq 0$  varsayımı için şu çözüm elde edilmektedir:

$$y(x) = x^{\frac{1-a}{2}} C_\nu \left( \frac{2}{n} \sqrt{bx^{\frac{n}{2}}} \right), \quad (4.24)$$

öyleki

$$\nu = \frac{1}{n} \sqrt{((1-a)^2 - 4c)}. \quad (4.25)$$

Böylece, denklem (4.22)'deki diferansiyel denklem sistemin tam çözümü sırasıyla

$$x \rightarrow \eta, \quad y \rightarrow \varphi, \quad a = 0, \quad n = 2, \quad (4.26)$$

$$b = -\frac{k^2 \xi_2^2}{\xi_1^2}, \quad (4.27)$$

$$c = \frac{m^2}{H^2 \xi_1^2} \mp \frac{im}{H \xi_1} \quad (4.28)$$

değişimleri ve değerleri kullanılarak denklem (4.24)'dan kolayca elde edilebilecektir. Bu durumda,  $c$ 'deki artı işareti  $\varphi_2(\eta)$  fonksiyonu için yazılırken eksi işareti ise  $\varphi_1(\eta)$  olan spinör bileşeni için kullanılır. Nihayet, Henkel fonksiyonları cinsinden  $\varphi_1(\eta)$  ve  $\varphi_2(\eta)$  spinör bileşenlerinin genel çözümleri aşağıdaki gibi elde edilmektedir:

$$\varphi_1(\eta) = \eta^{\frac{1}{2}} \left[ c_1 H_v^{(2)} \left( \frac{ik\xi_2}{\xi_1} \eta \right) + c_2 H_v^{(1)} \left( \frac{ik\xi_2}{\xi_1} \eta \right) \right], \quad (4.29)$$

$$\varphi_2(\eta) = \eta^{\frac{1}{2}} \left[ c_3 H_{v-1}^{(2)} \left( \frac{ik\xi_2}{\xi_1} \eta \right) + c_4 H_{v-1}^{(1)} \left( \frac{ik\xi_2}{\xi_1} \eta \right) \right], \quad (4.30)$$

öyleki

$$v = \frac{1}{2} + \frac{im}{H\xi_1}. \quad (4.31)$$

Yukarıdaki çözümlerde yazılan  $c_1, c_2, c_3$  ve  $c_4$  çarpanları normalizasyon sabitlerine karşılık gelmektedir. Buradaki spinör bileşenlerinden herhangi biri yarım-spinli parçacıkların görelî kuantum dinamiğini betimlemek için kullanılabilir, çünkü her ikisi de aynı Dirac parçacığını temsil etmektedir.

Öte yandan, düz uzay Dirac matrislerini hermityan Pauli matrisleri cinsinden

$$\hat{\gamma}^0 = i\sigma^3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad (4.32)$$

$$\hat{\gamma}^1 = \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

biçiminde de seçebiliriz. Bu durumda, denklem (4.18) ve (4.19)'teki “ $i$ ” çarpanı ortadan kalkmakta ve daha sade sonuçlara ulaşılmaktadır:

$$\left( \xi_1 \partial_\eta + \frac{m}{H\xi_1} \right) \varphi_1 + k\xi_2 \varphi_2 = 0, \quad (4.34)$$

$$\left( \xi_1 \partial_\eta - \frac{m}{H\xi_1} \right) \varphi_2 - k\xi_2 \varphi_1 = 0. \quad (4.35)$$

Gerekli matematiksel işlemler yapılarak bu iki denklemden spinör bileşenleri çekildiğinde

$$\varphi_1 = -\frac{1}{k\xi_2} \left( \xi_1 \partial_\eta + \frac{m}{H\eta} \right) \varphi_2, \quad (4.36)$$

ve

$$\varphi_2 = \frac{1}{k\xi_2} \left( \xi_1 \partial_\eta - \frac{m}{H\eta} \right) \varphi_1, \quad (4.37)$$

elde edilmektedir. Bu ifadeler denklem (4.34) ve (4.35)'te kullanıldığında

$$\left[ \eta^2 \frac{d^2}{d\eta^2} + \left( \frac{k^2 \xi_2^2}{\xi_1^2} \eta^2 - \frac{m^2}{H^2 \xi_1^2} \mp \frac{m}{H\xi_1} \right) \right] \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (4.38)$$

ikinci dereceden diferansiyel denklemlerine ulaşılmaktadır. Bu diferansiyel denklem çiftinin kompleks katsayılar ve işaretler dışında denklem (4.22) ile benzer olduğu aşikardır dolayısıyla çözümlerin tipi de benzer olacaktır. Diğer yandan, denklem (4.38)'te kompleks çarpanların olmaması bize parçacığın enerjisini kuantize etme olanağı sağlayacaktır. Bu doğrultuda, yukarıdaki denklem sisteminde

$$z = \frac{2ik\xi_2}{\xi_1} \eta, \quad (4.39)$$

biçiminde yeni bir değişken tanımı yapıldığında

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} + \left( -\frac{1}{4} + \frac{-m(m \pm \xi_1 H)}{\xi_1^2 H^2 z^2} \right) \right] \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (4.40)$$

denklem çifti elde edilmektedir. Bu denklemin

$$\frac{d^2 W}{dz^2} + \left( -\frac{1}{4} + \frac{\kappa}{z} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{z^2} \right) W = 0, \quad (4.41)$$

biçiminde yazılan ve iyi bilinen Whittaker denkleminde benzediği aşikardır. Whittaker denkleminde

$$\kappa = 0, \quad (4.42)$$

ile birlikte

$$\mu_{\pm} = \frac{m}{\xi_1 H} \pm \frac{1}{2}, \quad (4.43)$$

tanımları kullanıldığında (4.40) numaralı denklemde verilen diferansiyel denklem çiftinin elde edildiği görülmektedir. Dolayısıyla, denklem sistemi (4.40)

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} + \left( -\frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{4} - \left( \frac{m}{\xi_1 H} + \frac{1}{2} \right)^2}{z^2} \right) \right] \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (4.44)$$

biçiminde yeniden yazıldığında çözümleri Whittaker fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\varphi_1 = C_1 M_{0, \mu_+} \left( \frac{2ik\xi_2}{\xi_1} \eta \right) + C_2 W_{0, \mu_+} \left( \frac{2ik\xi_2}{\xi_1} \eta \right), \quad (4.45)$$

$$\varphi_2 = C_3 M_{0, \mu_-} \left( \frac{2ik\xi_2}{\xi_1} \eta \right) + C_4 W_{0, \mu_-} \left( \frac{2ik\xi_2}{\xi_1} \eta \right). \quad (4.46)$$

Sonuç olarak, Dirac denkleminin tam çözümü şöyle elde edilmiştir:

$$\psi = e^{ikx} \eta^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \varphi_1(\eta) \\ \varphi_2(\eta) \end{pmatrix}. \quad (4.47)$$

### 4.3. Enerji Kuantizasyonu

Literatürde oldukça iyi bilinen hiper-geometrik diferansiyel denklem şu forma sahiptir (Gradshtein ve Ryzhik, 1980):

$$z(1-z) \frac{d^2 y}{dz^2} + (\tilde{c} - (\tilde{a} + \tilde{b} + 1)z) \frac{dy}{dz} - \tilde{a}\tilde{b}y = 0. \quad (4.48)$$

Bu denklemin çözümleri Gauss hiper-geometrik fonksiyonlar  ${}_2F_1(\tilde{a}, \tilde{b}; \tilde{c}; z)$  cinsinden yazılmakta olup bu fonksiyonlar  $\tilde{b} \rightarrow \infty$  limitinde  ${}_1F_1(\tilde{a}; \tilde{c}; z)$  biçiminde gösterilen birleşik (konfluent) hiper-geometrik fonksiyonlara dönüşmektedir (Dixit ve Moll, 2015):

$${}_1F_1(\tilde{a}; \tilde{c}; z) = \lim_{\tilde{b} \rightarrow \infty} {}_2F_1(\tilde{a}, \tilde{b}; \tilde{c}; \frac{z}{\tilde{b}}). \quad (4.49)$$

Böylece denklem (4.48)

$$z \frac{d^2 y}{dz^2} + (\tilde{c} - z) \frac{dy}{dz} - \tilde{a} y = 0, \quad (4.50)$$

formunu almaktadır (Dixit ve Moll, 2015). Bu denklemin çözümleri şöyle tanımlanır

$${}_1F_1(\tilde{a}; \tilde{c}; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\tilde{a})_n z^n}{(\tilde{c})_n n!}, \quad (4.51)$$

öyleki

$$(\tilde{a})_n = \tilde{a}(\tilde{a} + 1) \dots (\tilde{a} + n - 1) = \frac{\Gamma(\tilde{a} + n)}{\Gamma(\tilde{a})}. \quad (4.52)$$

Yukarıda yazılan  $\Gamma(u)$  fonksiyonu kompleks düzlemde

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad (4.53)$$

biçiminde tanımlanan ve iyi bilinen Gama fonksiyonlarıdır (Davis, 1959). Diğer yandan, Whittaker fonksiyonları Kummer'in birleşik hiper-geometrik fonksiyonları cinsinden

$$M_{\kappa, \mu}(z) = e^{-\frac{z}{2}} z^{\mu + \frac{1}{2}} M\left(\mu - \kappa + \frac{1}{2}, 1 + 2\mu, z\right), \quad (4.54)$$

$$W_{\kappa, \mu}(z) = e^{-\frac{z}{2}} z^{\mu + \frac{1}{2}} U\left(\mu - \kappa + \frac{1}{2}, 1 + 2\mu, z\right), \quad (4.55)$$

şeklinde tanımlanabilmektedir (de Branges, 1968), öyleki

$$M(\tilde{a}; \tilde{c}; z) = {}_1F_1(\tilde{a}; \tilde{c}; z), \quad (4.56)$$

$$U(\tilde{a}; \tilde{c}; z) = \frac{\Gamma(1 - \tilde{c})}{\Gamma(\tilde{a} + 1 - \tilde{c})} M(\tilde{a}; \tilde{c}; z) + \frac{\Gamma(\tilde{c} - 1)}{\Gamma(\tilde{a})} z^{1 - \tilde{c}} M(\tilde{a} + 1 - \tilde{c}; 2 - \tilde{c}; z). \quad (4.57)$$

Bilindiği üzere hiper-geometrik diferansiyel denklem (4.48), bir kısıtlamaya işaret etmektedir (Abramowitz ve Stegun, 1964):

$$\tilde{a} = \mu_{\pm} - \kappa + \frac{1}{2} = \frac{m}{\xi_1 H} \pm \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -n. \quad (4.58)$$

Buradaki  $n \neq 0$  pozitif bir tamsayıdır, ayrıca pozitif işaret  $\varphi_1$  spinör bileşeni için geçerliken negatif işaret ise  $\varphi_2$  spinör bileşeni için yazılmıştır. Öte yandan, Tablo 1.1’de verilen modellerden 3. ve 4. satırda bulunanları dikkate alarak sadelik olması adına  $\zeta = E_{pl} = 1$  varsayımı altında

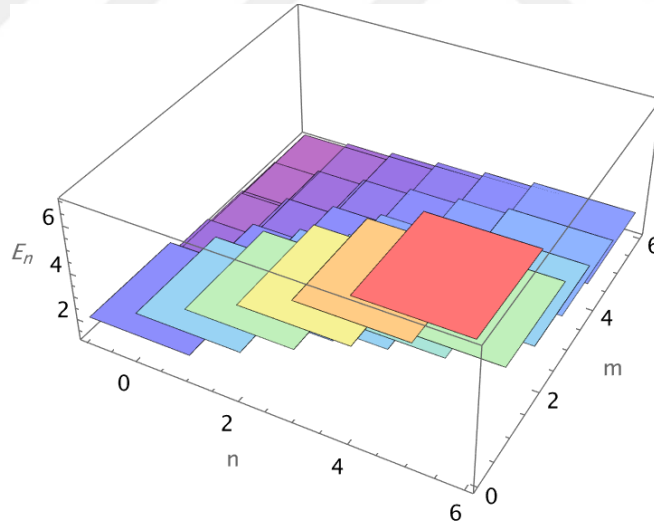
$$\xi_1 = \frac{1}{1-E}, \quad (4.59)$$

yazılabilmektedir. Böylece, kesikli enerji seviyelerini betimleyen matematiksel ifadeler

$$E_n = 1 + \frac{H}{m}(n+1), \quad (\varphi_1 \text{ için}) \quad (4.60)$$

$$E_n = 1 + \frac{H}{m}n, \quad (\varphi_2 \text{ için}) \quad (4.61)$$

biçiminde elde edilmektedir. Görüldüğü üzere her iki fonksiyon da benzer davranışlara sahiptir. Bu aşamada, örnek olması adına,  $\varphi_1$  çözümünü seçerek ilgili enerji seviyelerini grafiksel yöntemle analiz edelim. Buna göre, Şekil 4.1’de yarım-spinli kütleli fermiyonların enerji seviyelerinin değişimi gösterilmiştir.



Şekil 4.1. Seçilen dS2 geometrisinde hareket eden fermiyonların enerji seviyeleri:  $H=1$  seçimi yapılmıştır.

#### 4.4. Yarı-Klasik Hamilton-Jacobi Denkleminin Asimptotik Çözümleri

Bu alt bölümde, denklem (3.78)’te yazılan kovaryant H-J denklemini (Rovelli, 2008b) seçilen dS2 tipi gökkuşağı evreninde çözmek istiyoruz. Öncelikle, klasik eylem fonksiyonunu ele aldığımız uzay-zaman modeline göre

$$S(\eta, x) = T(\eta) + X(x), \quad (4.62)$$

biçiminde değişkenlerine ayırmamız faydalı olacaktır. Böylece, denklem (4.3)'de yazılan ters metrik tensör bileşenleriyle birlikte yukarıdaki tanımları denklem (3.78)'te kullandığımızda

$$(T,\eta)^2 - \frac{\xi_2^2}{\xi_1^2} (X,x)^2 - \frac{m^2}{H^2 \xi_1^2 \eta^2} = 0, \quad (4.63)$$

denkleminde ulaşılmaktadır. Bu aşamada,  $x$  değişkeni ile ilişkilendirilmiş  $\lambda$  ayırma parametresi tanımlandığında, iki ayrı diferansiyel denklem elde edilmektedir

$$\lambda^2 = \frac{\xi_2^2}{\xi_1^2} \left( \frac{dX}{dx} \right)^2, \quad (4.64)$$

$$\left( \frac{dT}{d\eta} \right)^2 = \lambda^2 + \frac{m^2}{H^2 \xi_1^2 \eta^2}. \quad (4.65)$$

Yukarıdaki denklemler ışığında, Dirac denkleminin çözümünün yarı-klasik karakteri şöyle betimlenebilmektedir:

$$\begin{aligned} \psi(\eta, x) &\rightarrow \psi_0(x) e^{\pm i \int \sqrt{\lambda^2 + \frac{m^2}{H^2 \xi_1^2 \eta^2}} d\eta} \\ &= \psi_0(x) \left( \frac{m}{H \xi_1 \lambda} + \sqrt{\eta^2 + \frac{m^2}{H^2 \xi_1^2 \lambda^2}} \right)^{\frac{-im}{H}} \eta^{\pm \frac{im}{H \xi_1}} e^{\pm i \lambda \int \sqrt{\eta^2 + \frac{m^2}{H^2 \xi_1^2 \lambda^2}} d\eta}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Böylece,  $\eta \rightarrow -\infty$  (veya  $t \rightarrow -\infty$ ) limit durumunda

$$\psi(\eta, x) \rightarrow \psi_0(x) e^{\pm \lambda \eta}, \quad (4.67)$$

sonucuna ulaşılrken  $\eta \rightarrow 0$  (veya  $t \rightarrow \infty$ ) limitinde ise

$$\psi(\eta, x) \rightarrow \psi_0(x) \left( \frac{2m}{H \xi_1 \lambda} \right)^{\frac{-im}{H}} \eta^{\pm \frac{im}{H \xi_1}}, \quad (4.68)$$

ifadesi elde edilmektedir. Buradaki negatif işaret negatif frekans durumu ile ilişkililiken pozitif işaret ise pozitif faz ile bağlantılıdır.

#### 4.5. Parçacık Yaratma Olasılığı

Parçacık yaratma oranını (ya da üretilen parçacıkların yoğunluğunu) tanımlayabilmek için Bogoluibov katsayılarını hesaplamamız gerekmektedir. Bu amaca ulaşmak adına öncelikle asimptotik bölgelerdeki pozitif ve negatif faz çözümlerine odaklanmamız ve bunları birbirleriyle ilişkilendirmemiz gerekmektedir. Buna göre, denklem (4.68)'ten aşağıdaki sonuçlara ulaşılmaktadır:

$$\Phi_{out,k}^+(\eta) \sim \left( \frac{2m}{H\xi_1\lambda} \right)^{\frac{-im}{H}} \eta^{+\frac{im}{H\xi_1}}, \quad (4.69)$$

$$\Phi_{out,k}^-(\eta) \sim \left( \frac{2m}{H\xi_1\lambda} \right)^{\frac{-im}{H}} \eta^{-\frac{im}{H\xi_1}}. \quad (4.70)$$

Tez araştırmamız kapsamında, “in (giriş)” durumu için Bunch-Davies vakumu göz önüne alınacaktır (Bunch ve Davies, 1978). Böylece,  $c_1 = 1$  ile birlikte  $c_2 = 0$  değerleri göz önüne alındığında “in (giriş)” pozitif frekans durumu şöyle elde edilecektir:

$$\Phi_{in,k}^+(\eta) = \eta^{\frac{1}{2}} H_\nu^{(2)} \left( \frac{ik\xi_2}{\xi_1} \eta \right), \quad (4.71)$$

öyleki

$$H_\nu^{(2)} \left( \frac{ik\xi_2}{\xi_1} \eta \right) \simeq \sqrt{\frac{2\xi_1}{i\pi k\xi_2\eta}} e^{-i\left[\frac{k\xi_2}{\xi_1}\eta - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right]}. \quad (4.72)$$

Böylesi bir fiziksel “in (giriş)” durumunun tercih edilmesi için çeşitli motivasyon nedenleri vardır: özellikle kozmosun enflasyon evresine yönelik araştırmalarda açık bir şekilde favori seçenekler arasındadır (Garriga, 1994). Diğer bir yandan, literatürde, kozmosun 'hiçlikten' bir de Sitter dönemine çekirdeklenmesi durumunda, alanların çekirdeklenmeden sonra içinde olacağı kuantum fazının bir de Sitter vakumu olması gerektiği kabul edilmektedir (Halliwell ve Hawking, 1985; Vilenkin, 1988). Abramowitz ve Stegun'a göre

$$H_\nu^{(2)}(y) = icsc(\pi\nu)[J_{-\nu}(y) - e^{i\pi\nu}J_\nu(y)], \quad (4.73)$$

biçimindedir (Abramowitz ve Stegun, 1965). Burada,  $y$ 'nin küçük değeri için  $J_\nu$ 'nün davranışları ile birlikte

$$J_\nu(y) \rightarrow \frac{y^\nu}{2^\nu \Gamma(1+\nu)}, \quad (4.74)$$

$$\Gamma(1+\nu)\Gamma(1-\nu) = \frac{\pi\nu}{\sin(\pi\nu)}, \quad (4.75)$$

özellikleri (Abramowitz ve Stegun, 1965) kullanıldığında,  $\eta \rightarrow 0$  (veya  $t \rightarrow \infty$ ) limiti altında

$$\Phi_{in,k}^+ \rightarrow \frac{1}{i\pi\nu} \left[ \left( \frac{ik\xi_2}{2\xi_1} \right)^2 e^{i\pi\nu} \Gamma(1-\nu) - \left( \frac{ik\xi_2}{2\xi_1} \right)^{-\nu} \Gamma(1+\nu) \right], \quad (4.76)$$

sonucuna ulaşılmaktadır. Bu sonucu denklem (1.44)'te yazılan  $\Phi_{in,k}^+ = a_k \Phi_{out,k}^+ + b_k \Phi_{out,k}^-$  tanımıyla karşılaştırdığımızda Bogoluibov katsayıları şöyle elde edilmektedir:

$$a_k = \frac{1}{i\pi\nu} \frac{\eta^{\frac{1}{2}} \frac{im}{H\xi_1}}{\left( \frac{2m}{H\xi_1\lambda} \right)^{\frac{im}{H\xi_1}} \left( \frac{ik\xi_2}{2\xi_1} \right)^\nu} e^{i\pi\nu} \Gamma(1-\nu), \quad (4.77)$$

$$b_k = -\frac{1}{i\pi\nu} \frac{\eta^{\frac{1}{2} + \frac{im}{H\xi_1}}}{\left( \frac{2m}{H\xi_1\lambda} \right)^{\frac{im}{H\xi_1}} \left( \frac{ik\xi_2}{2\xi_1} \right)^{-\nu}} \Gamma(1+\nu). \quad (4.78)$$

Nihayet, Garriga (Garriga, 1994) ile birlikte Mishima ve Nakayama (Mishima ve Nakayama, 1988) tarafından yayınlanan çalışmalar takip edildiğinde

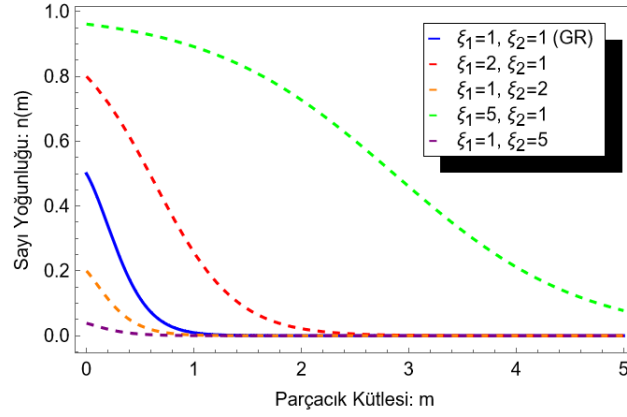
$$|a_k|^2 = e^{\frac{2\pi m}{H\xi_1} + \ln\left(\frac{k^2 \xi_2^2 H^2}{4m + H^2 \xi_1^2}\right)} |b_k|^2, \quad (4.79)$$

ifadesi elde edilmektedir. Bununla birlikte, fermiyonlar için geçerli olan ve denklem (1.45)'te verilen  $|a_k|^2 + |b_k|^2 = 1$  biçimindeki normalizasyon koşulu altında

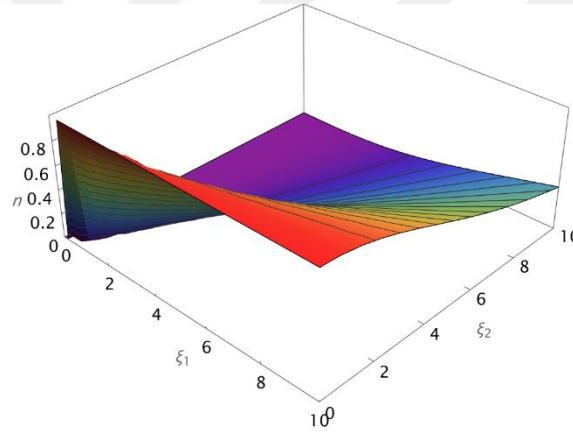
$$n \simeq |b_k|^2 = \frac{1}{e^{\frac{2\pi m}{H\xi_1} + \ln\left(\frac{k^2 \xi_2^2 H^2}{4m + H^2 \xi_1^2}\right)} + 1}, \quad (4.80)$$

parçacık yaratma yoğunluğuna ulaşılmaktadır. Görüldüğü üzere dS2 evreninde yaratılan parçacıkların yoğunluğu gökkuşağı fonksiyonları  $\xi_1$  ve  $\xi_2$ 'ye doğrudan bağlıdır. Bu noktada, iyi tanımlanmış bir fiziksel “out (çıkış)” durumu elde etmek istediğimizde  $m, H, k, \xi_1$  ve  $\xi_2$ 'de herhangi bir kısıtlama olmadığını vurgulamak yerinde olacaktır. Şekil 4.2, 4.3 ve 4.4'te üretilen parçacıkların yoğunluğunun gökkuşağı fonksiyonlarına göre değişimi farklı bakış açılarıyla grafiksel olarak analiz edilmiştir. Burada

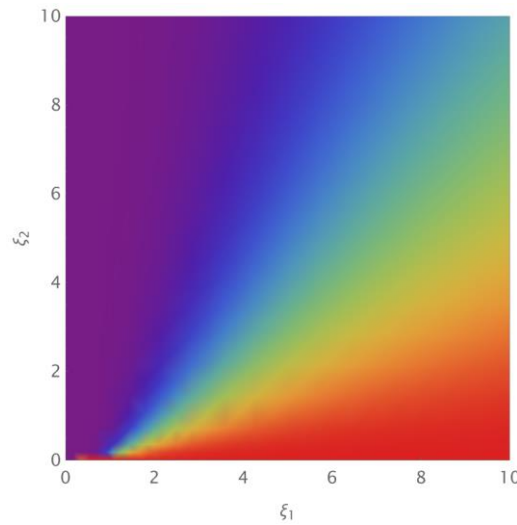
$\xi_1 > \xi_2$  olduğunda önemli oranda yarım-spinli parçacık üretildiği anlaşılırken  $\xi_2 > \xi_1$  olduğunda ise görece daha az sayıda fermiyonik parçacık yaratıldığı sonucuna ulaşılmıştır.



Şekil 4.2. Sayı yoğunluğunun farklı gökkuşağı çerçevelerinde kütleyle göre değişimi.



Şekil 4.3. Sayı yoğunluğunun gökkuşağı fonksiyonlarına göre değişiminin üç-boyutlu grafik analizi.



Şekil 4.4. Sayı yoğunluğunun gökkuşağı fonksiyonlarına göre değişiminin iki-boyutlu derinlik grafiği analizi.

Elde edilen sonuçların özel durumlarına bakmak bize farklı sonuçlar elde etme olanağı sunabilmektedir. Buna göre, denklem (4.79)'teki ifade de yer alan logaritmik  $\ln \left[ \frac{k^2 \xi_2^2 H^2}{4m + H^2 \xi_1^2} \right]$  terimi yok etmek için

$$k^2 \xi_2^2 H^2 = 4m + H^2 \xi_1^2, \quad (4.81)$$

varsayımı yapıldığında

$$|a_k|^2 = e^{\beta m} |b_k|^2, \quad (4.82)$$

durumuna ulaşılmaktadır. Burada,

$$\beta = \frac{2\pi}{H\xi_1}, \quad (4.83)$$

biçimindedir. Böylece, üretilen parçacık yoğunluğu için özel limit durumunda

$$n = \frac{1}{e^{\beta m + 1}}, \quad (4.84)$$

sonucu elde edilecektir. Bilindiği üzere, termodinamik dengede özdeş Dirac parçacıklarından oluşan bir sistemde  $i$  tekli-durumdaki parçacıkların ortalama sayısı Fermi-Dirac dağılım fonksiyonu ile tanımlanmaktadır (Landau ve Lifshitz, 1980):

$$n_{FD} = \frac{1}{e^{\frac{E_i - E_F}{k_B T}} + 1}. \quad (4.85)$$

Buradaki  $k_B$  ifadesi Boltzmann sabiti olup  $T$  ise boşluktaki sıcaklığı temsil etmektedir. Ayrıca,  $E_i$  terimi  $i$  durumundaki parçacığın enerjisine karşılık gelirken  $E_f$  ise Fermi enerjisidir. Bilindiği üzere, görelî kuantum mekaniği, istatistik ile bir fermiyonun spini arasında ilişki kurabilmektedir (esasen bu durum spin-istatistik kuramının en dikkat çekici özelliğidir). Fermi-Dirac istatistiği kuantum istatistiğinin başarılı yaklaşımlarından olup termodinamik dengede Pauli dışarılama ilkesine uyan birçok özdeş ve ayırt edilemez parçacıkları içeren fiziksel sistemlere uygulanabilmektedir (Fermi, 1926; Dirac, 1926). Sonuç olarak, denklem (4.84) ve denklem (4.85) karşılaştırıldığında

$$\frac{1}{k_B T} = \frac{2\pi}{H\xi_1}, \quad (4.86)$$

ifadesine ulaşılmaktadır. Bu sonuç üretilen parçacıkların karşılık gelen spektrumunun termal olduğu anlamına gelmektedir (Villalba, 1999; Villalba, 2002). Dahası,

$$m \gg H\xi_1, \quad (4.87)$$

kabulü ile birim hacim başına parçacık sayısı şöyle elde edilecektir:

$$\frac{dN}{dx} \simeq e^{-\frac{2\pi m}{H\xi_1}} \frac{dk}{2\pi}. \quad (4.88)$$

Yukarıda yazılan denklemde  $\xi_1 = 1$  varsayımı yapıldığında genel görelilik durumuna (Villalba, 1995) indirgenebileceğini vurgulamak önemlidir:

$$n_{GR} = \frac{1}{\frac{2\pi m}{H} + 1}. \quad (4.89)$$

Diğer yandan, Enerjisi  $E_i$  olan Dirac parçacıklarının ortalama sayısı, gökkuşağı dağılımı  $n_i$ 'nin yozlaşma katsayısı  $\mu_i$  ile çarpılmasıyla elde edilebilir (Leighton, 1959):

$$\bar{n}(E_i) = \mu_i n_i = \frac{\mu_i}{\frac{2\pi m}{H\xi_1} + 1}. \quad (4.90)$$

Termal parçacık yaratma yoğunluğu ayrıca orbitallerin ortalama fermiyon doluluğu olarak da yorumlanabilmektedir (Leighton, 1959). Orbitallerdeki fermiyon doluluğu genelde sıfır ile bir arasındadır, fakat  $\mu_i \gg 2$  olduğu zaman  $\bar{n}(E_i) > 1$  sonucunun mümkün olduğu görülmektedir. Bu garip durumun temel nedeni Dirac parçacıklarının aynı enerjiyle doldurabileceği birden fazla durum olmasıdır. Eğer bir enerji yarı-sürekliliği E'nin ilişkili bir durum yoğunluğu  $\mu(E)$  varsa, birim hacim başına birim enerji aralığındaki ortalama Dirac parçacığı sayısı şu şekilde olmaktadır (Blakemore, 1982):

$$\bar{n}(E) = \mu(E)f(E). \quad (4.91)$$

Burada

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{2\pi m}{H\xi_1} + 1}}, \quad (4.92)$$

Fermi fonksiyonudur ve aslında gökkuşağı dağılımına karşılık gelmektedir:

$$\bar{n}(E) = \frac{\mu(E)}{\frac{2\pi m}{e^{H\xi_1}} + 1}. \quad (4.93)$$

Öte yandan, gökkuşağı dağılımı fonksiyonu herhangi bir özel kabule gerek kalmadan düşük parçacık yoğunluğu limitinde bir Maxwell-Boltzmann tipi dağılıma yaklaşmaktadır. Bilindiği üzere, kuantum etkilerinin ihmal edilebilecek kadar düşük bir sayı yoğunluğuna sahip olunması durumunda mümkün olan Maxwell-Boltzmann dağılım fonksiyonu termal dengedeki klasik kütleli parçacıklar için yazılmıştır (Carter, 2001). Bu yüzden, düşük parçacık yoğunluğu limitinde

$$\frac{1}{\frac{2\pi m}{e^{H\xi_1}} + 1} \ll 1, \quad (4.94)$$

durumu söz konusu olduğunda

$$\frac{2\pi m}{e^{H\xi_1}} + 1 \gg 1, \quad (4.95)$$

sonucu ya da eşdeğer olarak

$$\frac{2\pi m}{e^{H\xi_1}} \gg 1, \quad (4.96)$$

ifadesi elde edilmektedir. Böyle bir durumda fermiyonlar geniş bir enerji aralığına dağılır ve

$$n \simeq e^{-\frac{2\pi m}{H\xi_1}}, \quad (4.97)$$

dağılımı elde edilir. Bu da Maxwell-Boltzmann istatistiğinin sonucu olarak bilinmektedir (Reif, 1965).

Bu tez çalışmasında elde edilen kuramsal sonuçlar gökkuşağı fonksiyonları için literatürde önerilen ve Tablo 1.1’de sunulan çeşitli modeller kullanılarak özel durumlara indirgenebilmektedir. Denklem (1.24)’te yazılan ilişkiden kütle, momentum ve enerji cinsinden

$$m = \sqrt{\xi_1^2 E^2 - \xi_2^2 k^2} \quad (4.98)$$

şeklinde yazılabilmektedir. Şekil 4.3 ve Şekil 4.4’e göre,  $\xi_2 > \xi_1$  olduğunda genel göreliliğe göre daha az sayıda yaratılmış parçacıkla karşılaşırız. Ayrıca burada kullanılan çerçevenin, genel görelilik alan

denklemlerine pozitif bir kozmolojik sabit eklenerek elde edilen genişletilmiş bir durum olduğunu hatırlatmak yerinde olacaktır. Dolayısıyla, dS2 metriğinin esasen bir karanlık enerji çözümü olması, logaritmik terimin denklem (4.81)'de yazılan  $k^2 \xi_2^2 H^2 = 4m + H^2 \xi_1^2$  varsayımıyla ihmal edildiği varsayımını makul kılmaktadır. Sonuç olarak, büyük kütleli Dirac parçacıklarının gökkuşağı dağılımını enerji açısından Tablo 1.1'den bir senaryo seçerek ifade edebiliriz:

$$n = \frac{1}{e^{\frac{2\pi}{H\xi_1} \sqrt{\xi_1^2 E^2 - \xi_2^2 k^2}} + 1}. \quad (4.99)$$

Tablo 1.1'de yazılan modellerin üç farklı gruba ayrılabilirliği görülmektedir:

- Grup I:
  - $\xi_1 = \xi_1(E)$  ve  $\xi_2 = 1$ ,
- Grup II:
  - $\xi_1 = 1$  ve  $\xi_2 = \xi_2(E)$ ,
- Grup III:
  - $\xi_1 = \xi_1(E)$  ve  $\xi_2 = \xi_2(E)$ ,

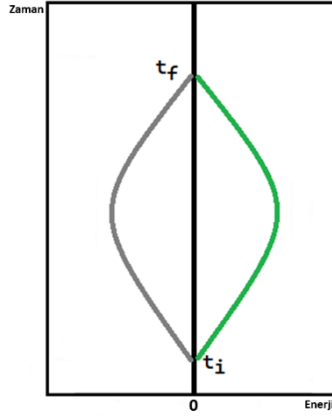
Bu gruplar dikkate alındığında, denklem (4.99)'den aşağıdaki dağılımlar elde edilmektedir:

$$n_{GI}(E) \simeq \frac{1}{e^{\frac{2\pi}{H} \sqrt{E^2 - \frac{k^2}{\xi_1^2}}} + 1}, \quad (4.100)$$

$$n_{GII}(E) \simeq \frac{1}{e^{\frac{2\pi}{H} \sqrt{E^2 - \xi_2^2 k^2}} + 1}, \quad (4.101)$$

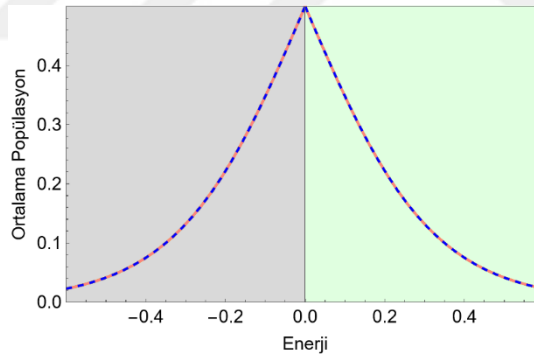
$$n_{GIII}(E) \simeq \frac{1}{e^{\frac{2\pi}{H} \sqrt{E^2 - k^2}} + 1}. \quad (4.102)$$

Negatif enerji durumları genellikle varlığı deneysel olarak doğrulanmış anti-parçacıklarla ilişkilendirilmektedir. Bir parçacık/anti-parçacık çifti yaratım sürecinin zaman aralığı (bakınız Şekil 4.5'teki  $\Delta t = t_f - t_i$  durumu) herhangi bir ölçüm yapılamayacak kadar kısa olduğu sürece “hiçlikten üretilebilir” (Schmitz, 2018).

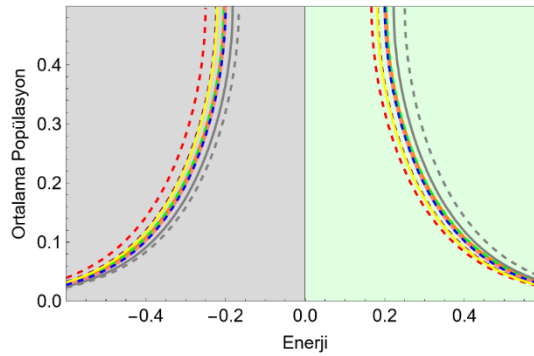


Şekil 4.5. Yaratılış-yok oluş sürecini anlatan temsil.

Şekil 4.6 ve 4.7’de  $k = 0.001$  ve  $k = 0.2$  için sırasıyla enerji açısından büyük Dirac parçacıklarının ortalama popülasyonu (sayı yoğunluğu) resmedilmiştir. Burada, sol paneller (açık gri) anti-parçacıklar için çizilirken, sağ paneller (açık yeşil) parçacıklar için çizilmiştir. Tablo 1.1’de sunulan tüm senaryoların küçük  $k$  değerleri için aynı davranışı gösterdiği ve popülasyon eksenine göre ayna simetrisi olduğu görülmektedir. Ayrıca, ayna simetrisi farklı senaryolarda  $k = 0.2$  için kırılıyor. Ancak, her iki analiz de enerjideki bir artışın (burada mutlak değer kastedilmektedir) ortalama popülasyonu azalttığını göstermektedir.



Şekil 4.6. Ortalama popülasyon ve enerji,  $H = E_{Pl} = 1$  ve  $k = 0,001$ .



Şekil 4.7. Ortalama popülasyon ve enerji,  $H = E_{Pl} = 1$  ve  $k = 0,2$ .

## 5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Evrenimizin yakın bir zamanda tıpkı bebeklik döneminde olduğu gibi tekrar ivmeli genişleme evresine girmiş olması gravitasyonel etkileşimin daha da dikkat çekici bir olgu haline bürünmesine neden olmuştur (Frieman ve ark., 1995; Peebles ve Ratra, 1998; Chimento ve Lazkoz, 2003; Vikman, 2005; Gannouji ve ark., 2006; Chattopadhyay ve Debnath, 2009; Ade ve ark., 2014). Einstein'ın ortaya koyduğu gravitasyonun Genel Görelilik kuramı her ne kadar sonradan deneysel olarak doğrulanan sıra dışı öngörüler sunmuş ve kütleli-etkileşim üzerine bilgi birikimimizi kökten değiştirmiş olsa da kuantum dünyasının etkilerini içermemektedir (Kaku, 1999; Obers ve Pioline, 1999; Rovelli, 2008; Ashtekar ve Bianchi, 2021; Magueijo ve Smolin, 2002; Magueijo ve Smolin, 2004; Calcagni, 2010), çünkü klasik fizik bakış açısıyla yazılmış bir kuramdır. Bununla birlikte, gravitasyonel etkileşim üzerine oluşan ve literatürde paylaşılan bilgi birikimimize göre, bazı sorunlar bu etkileşim biçimini halen tam olarak anlayamadığımızı ortaya koymaktadır:

- Evren nasıl oluştu?
- Kozmos neden sandığımızdan daha hızlı genişlemeye başlamıştır?
- İvmeli genişlemenin kaynağı nedir?
- Karanlık madde nedir?
- Karanlık enerji nedir?
- Evrenimizi nasıl bir son bekliyor?
- Karadeliklerin doğası tam olarak nasıldır?
- Solucan delikleri var mıdır?
- Uzay-zamanda yolculuk yapılabilir mi?
- Gravitasyonel dalgaya bir parçacık eşlik ediyor mu?
- Graviton diye bir parçacık var mıdır?
- Tutarlı bir kuantum gravite kuramını nasıl oluşturabiliriz?

Algıladığımız evrende gravitasyonel etkileşime ek olarak

- Zayıf,
- Güçlü,
- Elektromanyetik,

etkileşimler olmak üzere üç etkileşim tipi daha vardır ve bu etkileşimlerin üçü de kuantum fiziği penceresinden başarılı bir biçimde ifade edilerek Standart Model adı altında tek bir kuramda birleştirilebilmiştir. Fizik dünyasındaki mevcut nihai amaç “Her Şeyin Kuramı” adı verilen ve dört temel etkileşimin birleştirildiği bir model inşa edebilmektir, ancak gravitasyonel etkileşim henüz tam olarak anlaşılmadığı gibi her ölçekte tamamen tutarlı sonuçlar veren bir gravitasyon kuramı henüz ortaya konamamıştır. Bu nedenle,

- Modifiye gravitasyon kuramları,

- Parçacıkların görelî kuantum dinamiği,
- Ekstra-boyutlu modeller,
- Yıldızlar, karadelikler ve solucan deliklerinin doğası,
- Kuantum gravite

gibi konular modern fiziğin en yoğun çalışılan konuları arasındadır. Güçlü elektrik alanlarının veya seçilen uzay-zaman geometrisindeki genişlemenin vakum durumunda kararsızlıklara yol açabileceği ve bu dengesizliklerin de parçacık yaratma süreçlerini tetikleyebileceği düşünülmektedir (Schwinger, 1951). Diğer bir ifade şekliyle, eğri uzay-zamanda parçacık üretilmesi mekanizmasının genel olarak ya evrenin genişleyerek hacim kazanması ya ortamda harici elektromanyetik alan kaynağının bulunması ya da her iki fenomenin aynı anda gerçekleşmesi durumunda vuku bulacağına inanılmaktadır (Parker, 1972; 1972; 1977; 1987). Bu nedenle, kozmolojik parçacık üretme mekanizması özellikle kozmosun enflasyon evresi ve dinamik doğası hakkında dikkat çekici sonuçlara ulaşmamızı sağladığından dolayı oldukça uzun zamandır fiziğin ilgi odağı olmuş konuları arasında yer almaktadır (Villalba, 1992). Bu konu üzerine gerçekleştirilen araştırmalarda, çeşitli yaklaşımlar olmasının yanı sıra genelde Klein-Gordon, Dirac, Weyl, DKP ve Maxwell denklemlerinin analitik çözümleri araştırılır ve bu çözümler farklı metotlar yardımıyla tartışılarak üretilen görelî parçacıkların yaratılma olasılığı (ya da sayı yoğunluğu) elde edilir. Harici elektrik alanının etkisinde parçacık üretme mekanizmaları literatürde oldukça yoğun çalışılmıştır (Villalba, 1993; 1995; 1999; 2002 ve bu çalışmalardaki kaynaklar), zira genişleyen geometriyi betimleyen uzay-zaman metrikleri söz konusu olduğunda görelî parçacık denklemlerinin analitik çözümlerinin elde edilmesinde bazı matematiksel zorluklar doğabilmektedir.

Buraya kadar vurgulanan durumların ışığında, bu tez çalışmasında, (1+1)-boyutlu de Sitter uzayında (de Sitter, 1917a; 1917b) yarım-spinli parçacıkların görelî kuantum dinamiği (parçacık yaratma süreçleri dâhil) gökkuşağı gravite (Magueijo ve Smolin, 2002; Magueijo ve Smolin, 2004) adı verilen bir kuantum gravite formalizmi bağlamında araştırılmıştır. Kuramsal hesaplamalardan elde edilen ana sonuçları maddeler halinde sıralamak yerinde olacaktır:

- Genişleyen  $dS_2$  hiperboloidi içerisine hapsedilmiş yarım spinli parçacıkları betimleyen spinör silindirik fonksiyonlar ya da Whittaker fonksiyonları cinsiden yazılabilmektedir,
- İlgili parçacıkların enerji düzeylerinin kütleyle ters orantılı modelde tanımlanan  $H$  parametresi ile doğru orantılı olarak değiştiği görülmüştür,
- Yaratılan yarım-spinli parçacıkların termal dağılıma sahip olduğu ve burada Fermi-Dirac istatistiğinin geçerli olduğu görülmüştür,
- Elde edilen parçacık yoğunluğu özel limit durumunda Maxwell-Boltzmann dağılımına indirgenebilmektedir.

Bu tez çalışması gökkuşağı gravite yaklaşımını farklı bir pencereden ele aldığı için kuantum gravite araştırmalarına yeni bir perspektiften katkılar sunmuştur. Tez konusundan ilham alarak yeni araştırma konuları üretmek mümkündür:

- Elde edilen sonuçlar farklı gökkuşağı fonksiyonları tanımları için genişletilebilir,
- Tüm problem bir dış elektrik alan varlığında çözülebilir,
- Aynı geometrik model için Klein-Gordon denklemi çözülerek skaler parçacıkların görelî kuantum dinamiği analiz edilebilir,
- Benzer bir yaklaşımla DKP analiz edilerek kütleli spin-1 parçacıklarının kuantum dinamiği araştırılabilir,
- Gökkuşağı gravite bağlamında yeniden yazılan bir uzay-zaman modeli için kütleli DKP denklemi ve Maxwell denklemleri karşılaştırılabilir ve eşdeğerlikleri gösterilebilir.





## KAYNAKLAR

Abramowitz, M and Stegun, I. (1965). "Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables" Dover Publications Inc , New York.

Ade, P.A.R., et al. (Planck Collaboration) (2014). "Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results" *A&A* 571, A1

Alhaidari, A. D. , Bahlouli H. and Al-Hasan, A. (2006). "Dirac and Klein–Gordon equations with equal scalar and vector potentials" *Phys. Lett. A*, Vol. 349, Issue 1-4, pp. 87-97.

Amirabi, Z., Halilsoy, M. And Mazharimousavi, S. H. (2018). "Thin-shell wormholes in rainbow gravity." *Mod. Phys. Lett. A*, Vol. 33(9), 1850049.

Amelino-Camelia, G. (2002a). "Doubly-Special Relativity: First Results and Key Open Problems" *Int. J. Mod. Phys. D* 11,1643.

Amelino-Camelia, G. (2002). "Relativity in Spacetimes with Short-Distance Structure Governed by an Observer-Independent (Planckian) Length Scale" *Int. J. Mod. Phys. D*, Vol.11, pp. 35-59.

Arda, A. and Sever, R. (2009). "Approximate Solution of the effective mass Klein-Gordon Equation for the Hulthen Potential with any Angular Momentum" *Int. J. Theor. Phys.* 48, 945.

Ashour, A., Faizal, M. Ali, F. and Hammand, F. (2016). "Branes in Gravity's Rainbow." *Eur. Phys. J. C*, Vol. 76, 264.

Ashtekar A. and Bianchi, E. (2021). "A short review of loop quantum gravity" *Rep. Prog. Phys.* 84, 042001.

Audretsch J. and Schafer, G. (1978). "Thermal particle production in a radiation dominated Robertson-Walker universe" *J. Phys. A* 11,1583.

Awad, A., Ali, A. F. and Majumder, B. (2013). "Nonsingular rainbow universes." *JCAP*, Vol. 10, 052.

Bezerra, V. B., Christiansen, H. R., Cunha, M. S. and Muniz, C. R. (2017a). "Exact solutions and phenomenological constraints from massive scalars in a gravity's rainbow spacetime." *Phys. Rev. D*, Vol. 96, 024018.

Bakke, K. and Mota, H. (2020). “Aharonov–Bohm effect for bound states in the cosmic string spacetime in the context of rainbow gravity.” *Gen. Rel. Grav.*, Vol. 52, pp. 97.

Bezerra, V. B., Mota, H. F. and Muniz, C. R. (2017b). “Casimir effect in the rainbow Einstein's universe.” *EPL*, Vol. 120(1), pp. 10005.

Bezerra, V. B., Lobo, I. P., Mota, H. F. and Muniz, C. R. (2017c). “Landau levels in the presence of a cosmic string in rainbow gravity.” *Ann. Phys.* Vol. 401, pp. 162-173.

Bilim, A. B., Aydogdu, O, Salti, M. and Sogut, K.(2023a). “Particle production in a rainbow background” *Annals of Physics*, Vol. 449, 169200.

Bilim, A. B., Aydogdu, O and Salti, M. (2023b). “Scalar particle creation in a quantum gravity perspective” *Phys. Scr.*, Vol. 98, No:9, 095303.

Birrel, N. B. and Davies, P. C. W. (1982). “Quantum Fields in Curved Space.” Cambridge University Press, Cambridge, England.

Biswas, S., Guha, J. and Sarkar, N. G. (1995). “Particle production in de Sitter space.” *Clas. Quantum Grav.*, Vol. 12, pp. 1591-1608.

Biswas, S., Shaw, A. and Modak, B. (2000). “Schwinger's result on particle production from complex paths WKB approximation.” *Int. J. Mod. Phys. A*, Vol. 15(23), pp. 3717-3731.

Blakemore, J. S. (1982). “Approximations for Fermi-Dirac integrals, especially the function  $F_{1/2}(η)$  used to describe electron density in a semiconductor” *Solid-State Electronics*, Vol. 25 , Issue 11 , pp. 1067-1076.

Brill, D. and Wheeler, J. A. (1975). “Interaction of Neutrinos and Gravitational Fields” *American Physical Society, Rev. , Mod. , Phys.* 29, pp. 465.

Bromberg, J. (1976). “The Concept of Particle Creation before and after Quantum Mechanics.” *Historical Studies in the Physical Sciences*, Vol. 7, pp. 161-191.

Brout, R., Massar, S., Parentani, R. and Spindel, P. (1995). “A primer for black hole quantum Physics.” *Phys. Rep.*, Vol. 260(6), pp. 329-346.

Bunch, T. S. and Davies, P. C. W. (1978). "Quantum field theory in de Sitter space: renormalization by point-splitting" *Proc. R. Soc. London A*, Vol.360, pp. 117.

Calcagni, G. (2010). "Fractal Universe and Quantum Gravity" *Phys. Rev. Lett.* 104, 251301.

Carter, A. H. (2001). "Classical and Statistical Thermodynamics" Prentice-Hall Inc ., New Jersey.

Cardall, C. Y. and Fuller, G. M. (1996). "Neutrino oscillations in curved spacetime: A heuristic treatment" *Phys. Rev. D*, Vol. 55, 7960.

Carlip, S. (2012). "The small-scale structure of spacetime" In Murugan, J., Weltman A. and Ellis, G. F. R. (Eds.) "Foundations of Space and Time: Reflections on Quantum Gravity" pp. 69-84, Cambridge University Press, Cambridge.

Chattopadhyay, A. and Debnath, U. (2009). "Tachyonic field interacting with scalar (phantom) field" *Braz. J. Phys.* 39, 86.

Chernin A. D. (1966). "A Singularity of Homogeneous Non-Isotropic Relativistic World Models" *Sov. Astron.* 9, 871.

Chen, G. , Chen, Z.D. and Peng, X.L. (2006). "Exactly solvable potentials of the Klein–Gordon equation with the supersymmetry method" *Phys. Lett. A* 352, 317.

Chitre, D. N. and Hartle, J. B. (1977). "Path-integral quantization and cosmological particle production: An example." *Phys. Rev. D*, Vol. 16(2), pp. 251-560.

Chimento, L.P. and Lazkoz, R. (2003). "Constructing Phantom Cosmologies from Standard Scalar Field Universes" *Phys. Rev. Lett.* 91, 211301.

Damour, T. (1975). "Klein paradox and vacuum polarization." *Proceedings of The First Marcel Grossmann Meeting on General Relativity*, North-Holland, Amsterdam, pp. 459-482.

Davis, P. J. (1959). "Leonhard Euler's Integral: A Historical Profile of the Gamma Function" *American Mathematical Monthly.* 66, pp. 849–869

de Branges, L. (1968). *Hilbert spaces of entire functions.* Prentice-Hall/Pearson Education, Torino, Italy.

de Castro, A.S. (2005). “Klein–Gordon particles in mixed vector–scalar inversely linear potentials” *Phys. Lett. A* 338, 81.

de Sitter, W. (1917a). “On the relativity of inertia: Remarks concerning Einstein's latest hypothesis” *Proc. Kon. Ned. Acad. Wet.* 19, pp. 1217-1225..

de Sitter, W. (1917b). “On the curvature of space” *Proc. Kon. Ned. Acad. Wet.* 20, 229.

de Souza Dutra, A. and Chen, G. (2006). “On some classes of exactly-solvable Klein–Gordon equations” *Phys. Lett. A* 349, pp. 297-301.

Deng, X. M. and Xie, Y. (2017). “Gravitational time advancement under gravity's rainbow.” *Phys. Lett. B*, Vol. 772, pp. 152-158.

Denghani, M. (2018). “Thermodynamics of charged dilatonic BTZ black holes in rainbow gravity.” *Phys. Lett. B*, Vol. 777(10), pp. 351-360.

Dirac, P. A. M. (1926). “On the theory of quantum mechanics” *Proceedings of the Royal Society A*, Vol. 112. , Issue 762, pp. 661.

Dirac, P.A.M. (1928a). “The quantum theory of the electron” *Proc. Roy. Soc. London* 117, 610.

Dirac, P.A.M. (1928b). “The Quantum Theory of the Electron. Part II” *Proc. Roy. Soc. London* 118, 351.

Dixit, A. and Moll, V.H. (2015). “The integrals in Gradshteyn and Ryzhik Part 28: The confluent hypergeometric function and Whittaker functions” *SCIENTIA Series A: Mathematical Sciences*, Vol. 26, pp. 49-61

Feinstein, A. and Sebastian, M. A. P. (1995). “Particle Creation in the Bell-Szekeres Spacetime.” *Class. Quant. Grav.*, Vol. 12, pp. 2723-2734.

Feng, Z. W. and Yang, S. Z. (2017). “Thermodynamic phase transition of a black hole in rainbow gravity.” *Phys. Lett. B*, Vol. 772, pp. 737-742.

Fermi, E. (1926). “Sulla quantizzazione del gas perfetto monoatomico” *Rendiconti Lincei*, Vol. 3, pp. 145-149.

Ford, L.H. and Parker, L. (1978). "Creation of particles by singularities in asymptotically flat spacetimes." *Phys. Rev. D*, Vol. 17, pp. 1485-1496.

Frieman, J., Hill, C., Stebbins, A. and Waga, I. (1995). "Cosmology with Ultra-light Pseudo-Nambu-Goldstone Bosons" *Phys. Rev. Lett.* 75, 2077.

Gannouji, R., Polarski, D., Ranquet, A. and Starobinsky, A.A. (2006). "Scalar-Tensor Models of Normal and Phantom Dark Energy" *JCAP* 0609, 016.

Garriga, J. (1994). "Pair production by an electric field in (1+1)-dimensional de Sitter space" *Phys. Rev. D*, Vol. 49, 6343.

Gavrilov, S. P., Gitman, D. M. and Odintsov, S. D. (1997). "Quantum Scalar Field in the FRW Universe with a Constant Electromagnetic Background." *Int. J. Mod. Phys. A*, Vol. 12(27), pp. 4837-4867.

Ginocchio, J.N. (2004). "Relativistic harmonic oscillator with spin symmetry" *Phys. Rev. C* 69, 034318.

Gradshteyn, I. S. , Ryzhik, I. M. (1980). *Table of integrals, Series and Products*, Academic Press, New York

Gou J.Y. and Sheng, Z.Q. (2005). "Solution of the Dirac equation for the Woods–Saxon potential with spin and pseudospin symmetry" *Phys. Lett. A* 338, pp. 90-96.

Grib, A. A., Mamayev, S. G. and Mostepanenko, V. M. (1976). "Particle creation from vacuum in homogeneous isotropic models of the Universe." *Gen. Rel. Grav.*, Vol. 7, pp. 535-547.

Halliwell, J. J. and Hawking, S. W. (1985). "Origin of structure in the Universe" *Phys. Rev. D*, Vol.31, 1777.

Hamil, B., Merad, M. And Birkandan, T. (2021). "Particle creation in the context of the emergent universe." *Rev. Mex. Fisica*, Vol. 67(2), pp. 219-225.

Haouat, S. and Chekireb, R. (2011). "On the creation of scalar particles in a flat Robertson–Walker spacetime." *Mod. Phys. Lett. A*, Vol. 26(35), pp. 2639-2651.

Haouat, S. and Nouicer, K. (2014). "Influence of a Minimal Length on the Creation of Scalar Particles." *Phys. Rev. D*, Vol. 89, 105030.

Hartle, J. B. and Hawking, S. W. (1976). "Path-integral derivation of black-hole radiance." *Phys. Rev. D*, Vol. 13, pp. 2188-2203.

Havare, A., Yetkin, T., Korunur, M. and Sogut K. (2004). "Creation of spin-1/2 particles in de Sitter space-time" *Nucl. Phys. B*, Vol. 682, pp. 457-464.

Hassanabadi, H., Rahimov, H. and Zarrinkamar, S. (2011). "Cornell and Coulomb interactions for the D-dimensional Klein-Gordon equation" *Ann. Phys.* 523, pp. 566-575.

Hawking S.W. and Ellis, G.F.R. (1975). "The Large Scale Structure of Space-Time" Cambridge Univ. Press, Cambridge.

Hendi, S. H., Momennia, M. Panah, B. E. and Faizal, M. (2016). "Nonsingular Universes In Gauss-Bonnet Gravity's Rainbow." *ApJ*, Vol. 827(2), pp.153.

Ikhdair, S.M. (2009). "Exact Klein-Gordon equation with spatially dependent masses for unequal scalar-vector Coulomb-like potentials" *Eur. Phys. J. A* 40, pp. 143-149.

Ikot, A. N. , Obong, H. P., Abey, T. M., Zare, S., Ghafourian, M. and Hassanabadi, H. (2016). "Bound and Scattering State of Position Dependent Mass Klein-Gordon Equation with Hulthen Plus Deformed-Type Hyperbolic Potential" *Few-Body Syst.* 57, pp. 807-822.

Kangal, E. E., Yanar, H., Havare, A. and Sogut, K. (2014). "Creation of vector bosons by an electric field in curved spacetime." *Ann. Phys.*, Vol. 343, pp. 40-48.

Kangal, E. E., Salti, M., Aydogdu, O. and Sogut, K. (2021). "Relativistic quantum dynamics of scalar particles in the rainbow formalism of gravity." *Physica Scr.*, Vol. 96(9), pp. 095301.

Kangal, E. E. (2022). "Dynamics of the Dirac Particle in an Anisotropic Rainbow Universe." *Cumhuriyet Sci. J.*, Vol. 43(1), pp. 132-136.

Kaku, Michio (1993). *Quantum Field Theory: A Modern Introduction*. Oxford University Press.

Kaku, M. (1999). "Introduction to Superstrings and M-Theory" Springer, New York.

Kharbediya L. I. (1977). "The relativity of space finiteness-infiniteness for some Friedmann cosmological models" *Soviet Astronomy*, 21, pp. 672-674.

- Kukin, V.D. (2016). "Dirac matrices - Encyclopedia of Mathematics". encyclopediaofmath.org.
- Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. (1980). "Statistical Physics: Vol 5 (Course of Theoretical Physics)" Butterworth-Heinemann, Oxford.
- Lankinen, J. and Vilja, L. (2016). "Gravitational Particle Creation in a Stiff Matter Dominated Universe." JCAP, Vol. 8(025), pp. 1475-7516.
- Leighton, R. B. (1959). "Principles of Modern Physics" McGraw-Hill, New York.
- Leiva., C. Saavedra, J. and Villanueva, J. (2009). "Geodesic Structure of the Schwarzschild Black Hole in Rainbow Gravity." Mod. Phys. Lett. A, Vol. 24(18), pp. 1443-1451.
- Lin, K. and Yang, S. Z. (2009). "Quantum Tunneling from Apparent Horizon of Rainbow-FRW Universe." Int. J. Theor. Phys., Vol. 48, pp. 2061-2067.
- Ling, Y., Li, X. and Hang, Z. (2007). "Thermodynamics of modified black holes from gravity's rainbow." Mod. Phys. Lett. A, Vol. 22(36), pp. 2749-2756.
- Liu, C. Z. and Zhu, J. Y. (2008). "Hawking radiation and black hole entropy in a gravity's rainbow." Gen. Rel. Grav., Vol. 40, pp. 1899-1911.
- Magueijo J. and Smolin, L. (2002). "Lorentz Invariance with an Invariant Energy Scale" Phys. Rev. Lett. 88, 190403.
- Magueijo J. and Smolin, L. (2004). "Gravity's Rainbow" Class. Quant. Grav. 21, pp. 1725-1736.
- Mendy, J. E. B. (2003). "Scalar and spin-1/2 particle creation in gravitational and constant electric field backgrounds." J. Math. Phys., Vol. 44, pp. 662.
- Mishima T. and Nakayama, A. (1988). "Notes on the Hawking effect in de Sitter space. I" Phys. Rev. D 37, 348.
- Moradi, S. (2009a). "Particle creation in asymptotically Minkowskian spacetimes." J. Geo. Phys., Vol. 59, pp.173-184.

Moradi, S. (2009b). "Particle Production in Cosmological Spacetimes with Electromagnetic Fields." *Mod. Phys. Lett. A*, Vol. 24(14), pp.1129-1136.

Nikishov, A. I. (1970). "Pair production by a constant external field." *Soviet Physics JETP*, Vol. 30(4), pp. 660-662.

Obers N. A. and Pioline, B. (1999). "U-duality and M-theory" *Phys. Rep.* 318, 113.

Oluwadare, O. J., Oyewumi, K. J., Akoshile C. O. and Babalola, O. A. (2012). "Approximate analytical solutions of the relativistic equations with the Deng–Fan molecular potential including a Pekeris-type approximation to the (pseudo or) centrifugal term" *Phys. Scr.* 86, 035002.

Onyeaju, M.C., Ikot, A.N., Chukwuocha, E.O., Obong, H.P., Zare, S. and Hassanabadi, H. (2016). "Scattering and Bound States of Klein–Gordon Particle with Hylleraas Potential Within Effective Mass Formalism" *Few-Body Syst.* 57, pp. 823-831.

Padmanabhan, T. (2003). "Cosmological constant–the weight of the vacuum" *Phys. Rept.* 380, 235.

Papastamatiou, N. J. And Parker, L. (1979). "Asymmetric creation of matter and antimatter in the expanding universe." *Phys. Rev. D*, Vol. 19, pp. 2283-2299.

Parker, L. (1968). "Particle Creation in Expanding Universes." *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 21, 562.

Parker, L. (1972). "Particle Creation in Isotropic Cosmologies." *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 28, pp. 705-708.

Parker, L. (1975). "Probability distribution of particles created by a black hole." *Phys. Rev. D*, Vol. 12, pp. 1519-1525.

Parker, L. (1977). "The Production of Elementary Particles by Strong Gravitational Fields" Chapter 2 in "Asymptotic Structure of Space-Time", Plenum Press, New York.

Parker, L. (1987). "Gravitational particle production in the formation of cosmic strings." *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 59, pp. 1369-1374.

Pauli, W. (1936). "Contributions mathématiques à la théorie des matrices de Dirac" *Annales de l'Institut Henri Poincaré.* 6: 109.

Peebles, P.J.E. and Ratra, B. (1998). "Cosmology with a Time-Variable Cosmological Constant" *ApJ* 325, L17.

Perez-Nadal, G., Roura, A. and Verdaguer, E. (2010). "Stress tensor fluctuations in de Sitter spacetime" *JCAP* 05, 036.

Pimentel L.O. and Pineda, F. (2021). "Particle creation in some LRS Bianchi I models" *Gen. Relativ. Gravit.* 53, 62.

Reif, F. (1965). "Fundamentals of Statistical and Thermal Physics" McGraw-Hill, New York.

Rodrigues, W.A. and de Oliveira, E.C. (2007). *The Many Faces of Maxwell, Dirac and Einstein Equations: A Clifford Bundle Approach*. Springer Science & Business Media.

Rovelli, C. (2008a) "Quantum Gravity" *Scholarpedia* 3, 7117.

Rovelli, C. (2008b). "Loop Quantum Gravity" *Liv. Rev. Rel.* 11, 5.

Ruijsenaars, S. N. M. (1977) "On Bogoliubov transformations for systems of relativistic charged particles" *J. Math. Phys.* 18, 517.

Santos, L. C. N., Mota, C. E., Barros Jr., C. C., Castro, L. B. and Bezerra, V. B. (2020). "Quantum dynamics of scalar particles in the space-time of a cosmic string in the context of gravity's rainbow." *Ann. Phys.*, Vol. 421, pp. 168276.

Sauter, F. (1931). "Über das Verhalten eines Elektrons im homogenen elektrischen Feld nach der relativistischen Theorie Diracs." *Z. Phys.*, Vol. 69, pp. 742-764.

Schafer, G. and Denhen, H. (1980). "Pair creation in cosmology when electromagnetic fields are present." *J. Phys. A: Math. Gen.*, Vol. 13, pp. 517-528.

Schmidt, B.P., et al. (1998). "The high-Z supernova search: measuring cosmic deceleration and global curvature of the universe using type Ia supernovae" *ApJ* 507, 46.

Schmitz, S. K. (2018). "Chapter 1: Philosophy of Science" in "Physical Chemistry" pp. 183-367, Elsevier Inc.

Schrödinger, E. (1939). "The proper vibrations of the expanding universe." *Physica (Utrecht)*, Vol. 6, pp. 899-912.

Schwinger, J. (1951). "On Gauge Invariance and Vacuum Polarization." *Phys. Rev. D* Vol. 3, pp. 664-679.

Sogut, K. and Havare, A. (2015). "On the scalar particle creation by electromagnetic fields in Robertson–Walker spacetime." *Nucl. Phys. B*, Vol. 901, pp. 76-84.

Sogut, K., Yanar, H. and Havare, A. (2016). "Fermionic Particle Production by Varying Electric and Magnetic Fields." *Commun. Theor. Phys*, Vol. 66(5), pp. 521-525.

Sogut, K., Yanar, H. and Havare, A. (2017). "Production of Dirac Particles in External Electromagnetic Fields." *Acta Phys. Pol. B*, Vol. 48, pp. 1493-1506.

Sogut, K., Aydogdu, O. and Saltı, M. (2021). "Quantum dynamics of photon in rainbow gravity." *Ann. Phys.*, Vol. 431, 168556.

Suneeta, V. (2002). "Notes on Euclidean de Sitter space" *JHEP* 09, 040.

Svozil, K. (1990). "Squeezed fermion states" *Phys. Rev. Lett.* 65, 3341.

Thaller, B. (1992). *The Dirac Equation*, Springer, New York.

Thomas, A.W. and Weise, W. (2001). *Structure of the Nucleon*, Wiley, Berlin.

Qiang, W.C. , Zhou, R. S. and Gao, Y. (2007). "Any -State Solutions of the Klein-Gordon with the Generalized Hulthén Potential" *Phys. Lett. A* 371., 201.

Vikman, A. (2005). "Can dark energy evolve to the phantom?" *Phys. Rev. D* 71, 023515

Villalba, V. M. and Percoco, U. (1992). "Particle creation in an asymptotically uniformly accelerated frame." *Class. Quant. Grav.*, Vol. 9, pp. 307-316.

Villalba, V.M. (1993). "Particle Creation in a universe filled by radiation and dust-like matter", *Prog. Theor. Phys.*, Vol. 90, pp. 851-860.

Villalba, V.M. (1995). “Creation of spin-1/2 particles by an electric field in de Sitter space”. Phys. Rev. D 52, 3742.

Villalba, V. M. (1999). “Creation of scalar particles in the presence of a constant electric field in an anisotropic cosmological universe.” Phys. Rev. D, Vol. 60, 127501.

Villalba, V. M. and Greiner, W. (2002). “Creation of Dirac particles in the presence of a constant electric field in an anisotropic bianchi universe.” Mod. Phys. Lett. A, Vol. 17(28), pp. 1883-1891.

Vilenkin, A. (1988). “Quantum cosmology and the initial state of the Universe”, Phys. Rev. D, Vol. 37, 888.

Wald, R. M. (1975). “On particle creation by black holes.” Com. Math. Phys., Vol. 45, pp. 9-34.

Weinberg, S. (2002). The Quantum Theory of Fields. Cambridge University Press.

Weisskopf, V. F. (1936). “Über die Elektrodynamik des Vakuums auf Grund der Quanten-Theorie des Elektrons.” Dan. Mat. Fys. Medd., Vol. 14(6), pp.1-39.

Xu, Y. , He, S. and Jia, C. S. (2008). “Approximate analytical solutions of the Dirac equation with the Pöschl-Teller potential including the spin-orbit coupling term” J. Phys. A: Math. Theor. 41,255302.

Zhang, Y. (2008). “Approximate analytical solutions of the Klein–Gordon equation with scalar and vector Eckart potentials”. Phys. Scr. 78, 015006.



