T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

İNTEGRAL SINIR ŞARTLI SİNGÜLER PERTÜRBE İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN HOMOJEN İKİNCİ MERTEBEDEN NÜMERİK YÖNTEM

DOKTORA TEZİ

Feriha GÜRMAN
Danışman: Prof. Dr. Musa ÇAKIR

VAN – 2024

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

İNTEGRAL SINIR ŞARTLI SİNGÜLER PERTÜRBE İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN HOMOJEN İKİNCİ MERTEBEDEN NÜMERİK YÖNTEM

DOKTORA TEZİ

Feriha GÜRMAN

Tez Savunma Sınavı Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Esin İnan ESKİTAŞÇIOĞLU (Başkan)

Prof. Dr. Musa ÇAKIR (Danışman)

Doç. Dr. Erkan ÇİMEN (Üye)

Doç. Dr. Derya ARSLAN (Üye)

Doç. Dr. Muaz SEYDAOĞLU (Üye)

VAN – 2024

KABUL VE ONAY SAYFASI

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda Prof. Dr. Musa ÇAKIR danışmanlığında, Feriha GÜRMAN tarafından sunulan "İntegral Sınır Şartlı Singüler Pertürbe İntegro-Diferansiyel Denklemler İçin Homojen İkinci Mertebeden Nümerik Yöntem" başlıklı bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 12/12/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile başarılı bulunmuş ve Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Esin İnan ESKİTAŞÇIOĞLU İmza:

Üye: Prof. Dr. Musa ÇAKIR İmza:

Üye: Doç. Dr. Erkan ÇİMEN İmza:

Üye: Doç. Dr. Derya ARSLAN İmza:

Üye: Doç. Dr. Muaz SEYDAOĞLU İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun …. /.... /…... tarihi ve .... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

İmza

Prof. Dr. Harun AKKUŞ
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

İmza
Feriha GÜRMAN

ÖZET

İNTEGRAL SINIR ŞARTLI SİNGÜLER PERTÜRBE İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN HOMOJEN İKİNCİ MERTEBEDEN NÜMERİK YÖNTEM

GÜRMAN, Feriha
Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Musa ÇAKIR
Aralık 2024, 117 sayfa

Bu tez çalışmasında, integral sınır şartlı lineer singüler pertürbe özellikli integro-diferansiyel denklemler için homojen ikinci mertebeden nümerik yöntemleri sunulacaktır.

Bu çalışma 8 ana bölümden oluşmaktadır. Birinci ve ikinci bölümde ele alınan problemler ile ilgili olarak tarihsel gelişim ve kaynak bildirişleri sunulmaktadır. Üçüncü bölümde, tez için kullanılan materyal ve yöntemler verilmiştir. Dördüncü bölümde, tezde ele alınan problemlerin çözümü için gereken bazı temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Beşinci bölümde, ilk problem için asimptotik değerlendirmeler verildikten sonra kalan terimi integral formda olan kuadratür kuralları ve üstel katsayılı baz fonksiyonları kullanılarak sonlu fark şeması verilmiştir. Kurulan şemanın yakınsaklık analizi ve hata değerlendirmesi verilmiştir. Önerilen nümerik yöntemin etkinliğini göstermek amacıyla ele alınan probleme uygun olarak nümerik örnek ve sonuçları tablo halinde gösterilmiştir.

Altıncı bölümde, ikinci problem için gerekli asimptotik değerlendirmeler yapıldıktan sonra üstel katsayılı baz fonksiyonu kullanılarak düzgün olmayan şebeke üzerinde sonlu fark şeması verilmiştir. Önerilen metodun yakınsaklık analizi ve hata değerlendirmesi yapılmıştır. Son olarak teorik sonuçları destekleyen nümerik örnekler verilmiştir.

Yedinci bölümde, üçüncü problem için asimptotik değerlendirmeler yapılıp lineer baz fonksiyonları yardımı ile sonlu fark şemasının kuruluşu verilmiştir. Kurulan sonlu fark şeması için yakınsaklık analizi ve hata değerlendirmesi yapılmıştır. Son olarak nümerik örnek ile metodun etkinliği gösterilmiştir.

Son bölümde ise ele alınan bu üç problem için elde edilen sonuçların değerlendirildiği ve analiz edildiği tartışma ve sonuç kısmı verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Düzgün yakınsaklık, İntegral sınır şartlı diferansiyel denklemler, İntegro-diferansiyel denklemler, Shishkin şebeke, Sınır değer problemleri, Singüler pertürbe, Sonlu fark şeması

ABSTRACT

HOMOGENEOUS SECOND ORDER NUMERICAL METHOD FOR SINGULARLY PERTURBED INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH INTEGRAL BOUNDARY CONDITION

GURMAN, Feriha
Ph.D. Thesis, Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Musa CAKIR
December 2024, 117 pages

In this thesis, homogeneous second-order numerical methods are presented for singularly perturbed linear integro-differential equations with integral boundary conditions.

This study consists of 8 main chapters. Historical developments and literature declarations are presented in chapters one and two. The third section outlines the materials and methods used for the thesis. Some fundamental definitions and theorem required to solve the problems discussed in the thesis are given in the fourth chapter.

In the fifth chapter, after giving asymptotic estimates for the first introduced problem, a finite difference scheme is constructed using quadrature rules with the remainder term in integral form and basis functions with exponential coefficients. Convergence analysis and error estimates of the established scheme are given. Numerical examples and results are shown in tables to demonstrate the effectiveness of the proposed numerical method.

In the sixth chapter, the necessary asymptotic estimates are made for the second introduced problem and a finite difference scheme was established on the non-uniform mesh using the basis function with exponential coefficients. Finally, numerical examples supporting the theoretical results are given.

In the seventh chapter, asymptotic estimates are made for the third introduced problem, and the finite difference scheme is established using linear basis functions. Finally, the effectiveness of the method is demonstrated with numerical examples.

The results acquired for these three problems are assessed and examined in the last chapter's discussion and conclusion section.

Keywords: Boundary value problems, Differential equations with integral boundary condition, Finite difference scheme, Integro-differential equations, Shishkin mesh, Singularly perturbation, Uniform convergence

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında, her türlü ilgi ve yardımlarını esirgemeyen danışmanım Sayın Prof. Dr. Musa ÇAKIR'a teşekkür ederim.

2024

Feriha GÜRMAN

İÇİNDEKİLER

ÇİZELGELER LİSTESİ

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamalarıyla aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\boldsymbol{\varphi_i}$	Baz fonksiyonu
$\boldsymbol{z}$	Hata fonksiyonu
$\boldsymbol{u}$	Kesin çözüm
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Pertürbasyon parametresi
$\boldsymbol{\omega}$	Şebeke
$\boldsymbol{N}$	Şebeke elemanlarının sayısı
$\boldsymbol{e^N}$	Şebeke üzerinde maksimum hata
$\boldsymbol{e_\varepsilon^N}$	Şebeke üzerinde tam hata
$\boldsymbol{O}(\boldsymbol{h})$	Yakınsama hızı
$\boldsymbol{y}$	Yaklaşık çözüm

1. GİRİŞ

Bilimsel araştırmaların çoğu, nedenler ve bunların sonuçları arasındaki ilişkiye yöneliktir. Sebep küçük ama etki büyük olduğunda bu daha da ilgi çekici hale gelir. Matematiksel veya fiziksel sistemlerdeki pertürbasyon teorisi alanında bu ilişkinin incelenmesinin önemli bir geçmişi vardır ve bunun izi yaklaşık bir yüzyıl önce Prandtl'ın zamanına kadar götürülebilir. Bu uzun geçmişe rağmen konu hala güçlü bir gelişme aşamasındadır ve singüler pertürbasyon teorisi olarak bilinir. Burada "küçük" bir pertürbasyonun "büyük" bir etkiye neden olmasının anlamının açıkça açıklanması gerekir. Singüler pertürbasyon problemlerinin çözümleri, pertürbasyon parametresi sıfıra yaklaştıkça düzgün olmayan bir davranış gösterir. Kısaca singüler pertürbe problemlerde pertürbasyon parametresi ε'a bağlı olarak kesin çözüm olan $u(x)$'in büyük değişimler göstermesidir. Singüler pertürbasyon problemleri iki sınıfa ayrılabilir. Yani kümülatif tipteki singüler pertürbasyonlar ve sınır tabakası tipindeki singüler pertürbasyonlar. Kümülatif tipte singüler pertürbasyonlar sınıfı, küçük parametrenin etkisinin ancak uzun bir süre sonra gözlemlenebilir hale geldiği salınımlı sistemlerle ilgilidir. Bu sınıftaki problemlerin çözümünün asimptotik bir yaklaşımı, t koordinatını genişletme yöntemiyle elde edilebilir. Bu yöntem 19. yüzyılın sonunda Lindstedt ve Poincaré tarafından gök mekaniğindeki pertürbasyon problemleri üzerine yaptıkları çalışmalarla bağlantılı olarak tanıtılmıştır. Çoklu ölçekli teknik olarak adlandırılan bu teknik daha sonra başkaları tarafından geliştirildi ve uygulandı. Çoklu ölçekli teknikle yakından ilişkili olan diğer bir yöntem ise Krilov, Bogoliubov ve Mitropolski'nin ortalama alma ilkesine dayanmaktadır. Fizikte ve mühendislikte, gözlemlenebilir miktarın hızlı bir geçişi ile karakterize edilen, örneğin gaz hareketlerindeki şok dalgalarında, bir cismin yüzeyi boyunca sınır tabakası akışında ve cismin deformasyonundaki kenar etkilerinde meydana gelen çeşitli olaylar vardır (elastik plakalar). Bu olguyu açıklayan matematiksel modeller küçük bir ε parametresi içerir ve bu parametrenin etkisi, bağımlı değişken u_ε'un küçük bir katman içinde meydana gelen ani değişimiyle kendini gösterir. Sınır tabakası akışı ve elastik plaka probleminin çözümü, küçük olan pertürbasyonun sadece sınırın yakınında gözlemlenebilir bir etkiye sahip olması ve bu nedenle "sınırın singüler pertürbasyonu" teriminin kullanılmasıyla karakterize edilir (katman türü). Bununla birlikte, pertürbasyonun bazı sınır veya kenarlara yakın olmayan ince bir katmanda gözlemlenebilir olması da mümkündür ve bu durumda "serbest katman tipinde singüler bir pertürbasyon" elde ederiz. Bu ince katmanlara genellikle akışkanlar mekaniğinde sınır katmanları, katı mekaniğinde kenar katmanları, elektrik uygulamalarında yüzey katmanları, akışkan ve katı mekaniğinde şok katmanları ve kuantum mekaniğinde ise geçiş noktaları adı verilir (Kadalbajoo ve Gupta, 2010).

İntegral denklem, belirlenen bilinmeyen fonksiyon $u(x)$'in integral işareti altında görüldüğü bir denklem olarak tanımlanır. İntegral denklemler konusu hem soyut hem de uygulamalı matematikte en kullanışlı matematiksel araçlardan biridir. Birçok fiziksel problemde geniş uygulamalara sahiptir. Adi diferansiyel denklemler ve kısmi diferansiyel denklemler ile ilişkili birçok başlangıç ve sınır değer problemi, bazı yaklaşık integral denklemlerin çözümü problemlerine dönüştürülebilir (Rahman, 2007).

Bilimin gelişmesi, matematiksel biçimde yeniden ifade edildiğinde sıklıkla diferansiyel denklemler olarak ortaya çıkan birçok fiziksel yasanın oluşmasına yol açmıştır. Mühendislik problemleri matematiksel olarak diferansiyel denklemlerle tanımlanabilmektedir ve bu nedenle diferansiyel denklemler pratik problemlerin çözümünde çok önemli rol oynamaktadır. Örneğin bir parçacığın momentumunun değişim hızının ona etki eden kuvvete eşit olduğunu belirten Newton yasası, diferansiyel denklem olarak matematiksel bir modele çevrilebilir. Benzer şekilde, elektrik devrelerinde, kimyasal kinetikte ve bir ortamdaki ısı transferinde ortaya çıkan problemlerin tümü matematiksel model olarak diferansiyel denklemler yardımıyla temsil edilebilir. Bir integral denklemin genel formu aşağıdaki şekildedir:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)u(t)dt \tag{1.1}$$

burada $K(x,t)$ integral denklemin çekirdeği ve $\alpha(x)$, $\beta(x)$ integral limitleri ve λ bir sabittir.

Bir integral denklem, adi ve kısmi diferansiyel denklemlerde gördüğümüz gibi doğrusal veya doğrusal olmayan bir integral denklem olarak sınıflandırılabilir. Ayrıca bir diferansiyel denklem, integral denklemle eşdeğer olarak temsil edilebilir. En sık kullanılan integral denklemler Volterra ve Fredholm integral denklemleri olmak üzere iki ana sınıfa ayrılır. Volterra ve Fredholm integral denklemlerini ise homojen veya homojen olmayan ve ayrıca doğrusal veya doğrusal olmayan olarak sınıflandırabiliriz (Rahman, 2007; Wazwaz, 2011).

İntegro-diferansiyel denklemler birçok bilimsel uygulamada, özellikle de başlangıç değer problemlerini veya sınır değer problemlerini integral denklemlere dönüştürdüğümüzde ortaya çıkar. Bu tip denklemler hem integral hem de diferansiyel operatörleri içerir ayrıca bilinmeyen fonksiyonların türevleri herhangi bir sırada görünebilir. 1900'lerin başında Vito Volterra kalıtsal etkiler üzerine yoğunlaşarak nüfus artışını incelerken yeni denklem türleri geliştirdi ve bunu integro-diferansiyel denklemler olarak adlandırdı.

Bilim adamları ve mühendisler, ısı ve kütle difüzyon süreçleri, elektrik devresi problemleri, nötron difüzyonu ve artan-azalan üretim oranlarıyla bir arada var olan biyolojik türlerin matematiksel modellemesini integro-diferansiyel denklemler sayesinde yapmışlardır. İntegro-diferansiyel denklemlerin elektromanyetik teori, dağıtıcı dalgalar ve okyanus sirkülasyonlarındaki uygulamaları oldukça önemlidir. Örneğin elektrik mühendisliği probleminde, kapalı bir devrede akan $I(t)$ akımı aşağıdaki formda bir integro-diferansiyel denklem ile verilebilir:

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)d\tau = f(t), I(0) = I_0 \tag{1.2}$$

burada L indüktans, R rezistans, C kapasitans ve $f(t)$ uygulanan voltajdır. Buna benzer örnekler

$$u''(x) = f(x) + \lambda\int_0^x (x-t)u(t)dt, \qquad u(0) = 0, \qquad u'(0) = 1 \tag{1.3}$$

$$u'(x) = f(x) + \lambda\int_0^l (xt)u(t)dt, \qquad u(0) = 1 \tag{1.4}$$

yukarıdaki şekilde yazılabilir. (1.2)ve (1.3) eşitlikleri Volterra tipte integro-diferansiyel denkleme, (1.4) eşitliği ise Fredholm tipte integro-diferansiyel denklemlere örnek olarak verilebilir. Genel anlamda integro-diferansiyel denklemlerin varlık ve tekliği de literatürde oldukça geniş bir çalışma alanına sahiptir (Hamoud ve Ghadle, 2018; Mallika Arjunan ve Selvi, 2011; Çakır ve Güneş, 2021; Mahmood ve Sadoon, 2012; Pachpatta, 1986; Durmaz vd., 2023a; Lakshmikantham ve Rama Mohana Rao, 1995; Tidke, 2009; Çakır ve Güneş, 2022; Durmaz, 2023; Mohapatra, 2014; Güneş ve Çakır, 2024; Shishkin, 1983). Non-lokal sınır şartına sahip denklemlerde lokal olmayan koşulun çözüm üzerinde daha iyi bir etkisi vardır ve fiziksel ölçümler için tek başına klasik $x(0) = x_0$ koşulundan daha kesin sonuçlar verir. Farklı alanlarda da lokal olmayan sınır şartına sahip birçok çalışma literatürde mevcuttur (Liu ve Ezzinbi, 2003; Matar, 2009; Durmaz vd., 2023b; Çakır ve Amiraliyev, 2021).

Bu tez çalışmasında ilk olarak, integral sınır şartlı birinci mertebeden singüler pertürbe Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklem ele alınacakır:

$$Lu \coloneqq L_1 u + \lambda \int_0^x K_1(x,t)u(t)dt + \lambda \int_0^l K_2(x,t)u(t)dt = f(x), \qquad (1.5)$$

$$u(0) = \int_0^l g(x)u(x)dx + A, \qquad (1.6)$$

burada $x \in I = (0,l)$, $L_1 u = \varepsilon u'(x) + a(x)u(x)$, $0 < \varepsilon \ll 1$ pertürbasyon parametresi, $\bar{I} = [0,l]$, λ ve A verilmiş sabitler, $a(x) \geq \alpha > 0$, $g(x) \leq 0$, $f(x)$ fonksiyonları $x \in [0,l]$ aralığında, $K_1(x,t)$, $K_2(x,t)$ fonksiyonları da $(x,t) \in [0,l]^2$ bölgesi üzerinde yeterince düzgün fonksiyonlar olmak koşuluyla (1.5)-(1.6) probleminin çözümü var ve tektir. Bu problem $x = 0$ civarında sınır katına sahiptir (Güçkır Çakır vd., 2022). (1.5)-(1.6) problemi için gerekli asimptotik değerlendirmeler yapılıp üstel baz fonksiyonları yardımı ile sonlu fark şeması kurulmuştur. Önerilen metodun yakınsaklık analizi ve hata değerlendirilmesi yapıldıktan sonra verilen metodun etkinliğini gösteren nümerik örnek verilmiştir.

İkinci olarak, integral sınır şartlı singüler pertürbe reaksiyon-difüzyon tipte Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklem ele alınacakır:

$$Lu \coloneqq L_2 u + \lambda \int_0^x K_1(x,t)u(t)dt + \lambda \int_0^l K_2(x,t)u(t)dt = f(x), \qquad (1.7)$$

$$u(0) = 0, \qquad u(l) = \int_0^l g(x)u(x)dx + A, \tag{1.8}$$

burada $x \in I = (0, l)$, $L_2 u = -\varepsilon^2 u''(x) + a(x)u(x)$, $0 < \varepsilon \ll 1$ pertürbasyon parametresi, $\bar{I} = [0, l]$, λ A ve B verilmiş sabitler, $a(x) \geq \alpha > 0$, $f(x)$ fonksiyonları $x \in [0, l]$ aralığında, $K_1(x,t)$, $K_2(x,t)$ fonksiyonları da $(x,t) \in [0,l]^2$ bölgesi üzerinde yeterince düzgün fonksiyonlar olmak koşuluyla (1.7)-(1.8) probleminin çözümü var ve tektir. Bu problem $x = 0$ ve $x = l$ civarında sınır katına sahiptir (Durmaz vd., 2022a). (1.5)-(1.6) problemine benzer olarak (1.7)-(1.8) problemi için gerekli değerlendirmeler yapılıp hemen hemen ikinci mertebeden yakınsak bir yaklaşım sunulmuştur. Sunulan metodun hata ve yakınsaklık analizi yapılıp önerilen metot nümerik örnekler yardımıyla test edilmiştir.

Üçüncü ve son olarak, integral sınır şartlı singüler pertürbe konveksiyon-difüzyon tipte Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemi ele alınacaktır:

$$Lu \coloneqq L_3 u + \lambda \int_0^x K_1(x,t)u(t)dt + \lambda \int_0^l K_2(x,t)u(t)dt = f(x), \tag{1.9}$$

$$u(0) = A, \qquad u(l) = \int_0^l g(x)u(x)dx + B, \tag{1.10}$$

burada $x \in I = (0, l)$, $L_3 u = \varepsilon u''(x) + a(x)u'(x)$, $0 < \varepsilon \ll 1$ pertürbasyon parametresi, $\bar{I} = [0, l]$, λ, A ve B verilmiş sabitler, $a(x) \geq \alpha > 0$, $f(x)$ fonksiyonları $x \in [0, l]$ aralığında, $K_1(x,t)$, $K_2(x,t)$ fonksiyonları da $(x,t) \in [0,l]^2$ bölgesi üzerinde yeterince düzgün fonksiyonlar olmak koşuluyla (1.9)-(1.10) probleminin çözümü var ve tektir. Bu problem $x = 0$ civarında sınır katına sahiptir (Güneş ve Çakır, 2023a). Yukarıdaki problemler ile benzer şekilde asimptotik değerlendirme, nümerik metodun kurulması, hata değerlendirmesi ve yakınsaklık analizi verildikten sonra nümerik örnek ile önerilen metodun etkinliği gösterilmiştir.

Bu tezde integral sınır şartlı singüler pertürbe problemler için homojen ikinci mertebeden bir fark şeması sunulmuştur. Önerilen metodun teorik sonuçlar ile uygunluğu verilen nümerik örnekler ile gösterilmiştir.

2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Herhangi bir doğa olayı veya bilimsel olarak ele alınan problemleri tek bir denklem ile ifade etmesi oldukça zordur çünkü birden fazla bağımlı değişken vardır. Bu tip problemlerin modellenmesi için diferansiyel, integral veya integro-diferansiyel denklem sistemleri kullanılmaktadır. Singüler pertürbe olmuş problemlerdeki bu denklem sistemlerinin çözümlerinde klasik nümerik metotlar anlık değişimlerin olduğu sınır katlarında kararsız sonuçlar vermektedir. Bu problemlerin çözümü için düzgün yakınsak nümerik metodların kullanılması gerekmektedir. Bu tip problemler ile ilgili literatürde birçok farklı çalışma mevcuttur. Bunlardan bazılarını aşağıdaki şekilde verebiliriz

Durmaz vd., (2022b), $x \in (0, l)$, $0 < \varepsilon \leq 1$ için,

$$\varepsilon^2 u'' + \varepsilon a(x)u' - b(x)u + \lambda \int_0^l K(x,s)u(s)ds = f(x)$$

$$u(0) = 0, \qquad u(l) = 0$$

problemini ele almışlardır. Bu problem için homojen monoton sonlu fark şeması kurup ikinci dereceden yakınsak olduğunu göstermişlerdir.

Amiraliyev vd. (2020), $x \in [0, l]$ ve ε pertürbasyon parametresi olmak üzere,

$$\varepsilon^2 u' + a(x)u + \lambda \int_0^l K(x,s)u(s)ds = f(x)$$

$$u(0) = A$$

başlangıç değer problemi için Shishkin şebeke üzerinde sonlu fark şemasını üstel baz fonksiyonları ve interpolasyon kuadratür kuralları kullanarak kurmuşlardır. Önerilen metodun pertürbasyon parametresinden bağımsız ikinci dereceden düzgün yakınsak olduğunu göstermişlerdir.

Panda vd. (2024), $s \in (0, T)$, $0 < \varepsilon \ll 1$ pertürbasyon parametresi için,

$$\varepsilon z''(s) + a(s)z'(s) - b(s)z(s) + \lambda \int_0^T K(s,\gamma,z(\gamma))d\gamma = f(s,z)$$
$$z(0) = z_0, \qquad z(T) = z_1$$

problemini ele almışlardır. Lineer olmayan terim için quasi-lineerizasyon tekniğini kullanarak Shishkin şebeke üzerinde sonlu fark şemasını oluşturmuşlardır. Önerilen metodun birinci dereden yakınsak olduğunu gösterip post-prossesing yöntemi ile ikinci dereceden bir yakınsaklık elde etmişlerdir.

Iragi ve Munyakazi (2020), $t \in I[0,l]$, ε pertürbasyon parametresi olmak üzere,

$$Lu \coloneqq \varepsilon u'(t) + a(t)u(t) + \int_0^t K(t,s)ds = f(t)$$
$$u(0) = \beta$$

problemini ele almışlardır. Bu problem için Shishkin tipi parçalı düzgün şebeke üzerinde Euler sonlu fark operatörlerini kullanarak önerilen nümerik metodun birinci mertebeden yakınsak olduğunu göstermişlerdir.

Vulanovic (1982), $x \in [0,1]$ olmak üzere,

$$-\varepsilon y''(x) + b^2(x)y(x) = f(x)$$
$$u(0) = u_0, \qquad u(1) = u_1$$

sınır değer problemini incelemiştir. Bu problem için düzgün olmayan şebeke üzerinde sonlu fark metodunu kurmuştur

Güneş ve Çakır (2023),

$$\varepsilon^2 u''(x) + \varepsilon a(x)u'(x) = f(x,u) + \lambda \int_0^x K_1(x,t)u(t)dt + \lambda \int_0^l K_2(x,t)u(t)dt$$

denklemini aşağıdaki integral sınır şartları ile incelemişlerdir:

$$L_0 u \coloneqq u(0) = A + \int_{l_0}^{l_1} g_0(x)u(x)dx$$

$$L_1 u \coloneqq u(l) = B + \int_{l_0}^{l_1} g_1(x)u(x)dx\,, \qquad 0 \le l_0 \le l_1 < l$$

İki integral koşuluna sahip bu problem için düzgün fark şeması oluşturmuşlardır. Önerdikleri metodun birinci dereceden ε-düzgün yakınsak olduğunu ispatlamışlardır.

Matthews vd. (2002),

$$L_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}\vec{u}(x) \equiv \begin{pmatrix} -\varepsilon_1 \dfrac{d^2}{dx^2} & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 \dfrac{d^2}{dx^2} \end{pmatrix} \vec{u}(x) + A(x)\vec{u}(x) = \vec{f}(x)$$

$$\vec{u}(0) = (u_1(0), u_2(0))^T, \qquad \vec{u}(1) = (u_1(1), u_2(1))^T$$

singüler pertürbe olmuş reaksiyon-difüzyon probleminin parçalı-düzgün şebeke üzerinde elde edilen sonuçlarını, iki bağlantılı reaksiyon-difüzyon problemi içeren bir sisteme genişletmişlerdir. Ayrıca önerilen nümerik metodun yakınsaklık analizini yapıp bu metodun geçerliliğini nümerik örnekler üzerinde test etmişlerdir.

Panda vd. (2021), v_0 sabit sayı ve ε pertürbasyon parametresi olmak üzere

$$L^N v(t) \coloneqq \varepsilon v'(t) + a(t)v(t) + \int_0^t K(t,s)v(s)ds = f(t)$$

$$v(0) = v_0$$

problemini ele almışlardır. Parçalı düzgün Shishkin şebeke üzerinde denklemin diferansiyel kısmında sonlu fark operatörü, integral kısmında sağ dikdörtgen kuralı ve yamuk kuralını kullanarak nümerik metodu kurmuşlardır. Richardson extrapolasyon kuralı uygulayarak ikinci dereceden bir yakınsaklık elde etmişlerdir.

Debela ve Duressa (2020),

$$\varepsilon y''(x) + a(x)y'(x) = f(x)$$
$$y'(0) = \frac{\mu_0}{\varepsilon}, \qquad \int_0^l b(x)y(x) = \mu_1$$

problemini ele almışlardır. Bu problem için düzgün şebeke üzerinde sonlu fark şemasını kurmuşlardır. İntegral sınır koşulu için Simpson ve yamuk kuralı kullanarak önerilen metodun düzgün yakınsaklığını göstermişlerdir.

Çimen ve Çakır (2021), $0 < \varepsilon \ll 1$ pertürbasyon parametresi, $x \in \Omega = (0, l)$ ve $\overline{\Omega} = [0, l]$ için,

$$\varepsilon u'' + a(x)u' = f(x) + \lambda \int_0^l K(x,t)u(t)dt$$
$$u(0) = A, \qquad u(l) = B$$

sınır değer problemi için sonlu fark şeması önermiş ve önerilen metodun birinci dereceden yakınsak olduğunu göstermişlerdir.

Shishkin (1983),

$$\varepsilon(a(x)u')' - c(x)u = -\psi(x)$$
$$u = \varphi(x)$$

singüler pertürbe problemini ele almıştır. Bu problem için düzgün olmayan şebeke üzerinde fark şemasını oluşturarak pertürbasyon parametresine göre düzgün yakınsak olduğunu göstermiştir.

Amiraliyev vd. (2023),

$$-\varepsilon u''(x) + a(x)u(x) + \lambda \int_0^l K(x,s)u(s)ds = f(x)$$
$$u(0) = A, \qquad u(l) = B$$

sınır değer problemi için düzgün bir sonlu fark şeması kurmuşlardır. Önerilen metodun ikinci dereceden yakınsak olduğunu göstermişlerdir.

Boglaev (1984), $t \in (0,1)$

$$\varepsilon^2 u'' = f(t, y)$$
$$u(0) = 0, \qquad u(1) = 0$$
$$\varepsilon^2 u'' - \beta u = \varphi(t, u)$$
$$u(0) = 0, \qquad u(1) = 0$$

singüler pertürbe olmuş sınır değer problemlerini incelemiştir. İterasyon dizisi ve Green fonksiyonunu kullanarak bir nümerik metot kurmuştur. Önerilen metodun monotonik yakınsaklığını ispat etmiştir.

Güneş ve Çakır (2024), $\varepsilon \in (0,1]$, $x \in [0, l]$, $0 \leq l_0 \leq l_1 < 1$ ve $(x, t) \in I \times I$ için,

$$\varepsilon u'' + a(x)u' - b(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K_1(x,t)u(t)dt + \lambda \int_0^l K_2(x,t)u(t)dt$$
$$u(0) = A, \qquad u(l) = B + \int_{l_0}^{l_1} v(x)u(x)dx$$

integral sınır şartlı sınır değer problemini ele almışlardır. Ele alınan problem için Shishkin şebeke üzerinde sonlu fark şeması kurmuşlardır. Önerilen bu metodun yakınsaklık analizini yaparak birinci dereceden yakınsak olduğunu verdikleri nümerik örnekler ile göstermişlerdir.

Mohapatra (2014), $0 < \varepsilon, \mu \ll 1$ ve $x \in \overline{\Omega} = (0,1)$ için

$$\varepsilon^2 u'' + \mu p(x)u' - q(x)u = f(x)$$
$$u(0) = A, \qquad u(1) = B$$

iki parametreli konveksiyon-difüzyon sınır değer problemi için sürekli ve süreksiz veriler ile upwind sonlu fark operatörüne uygun adaptive şebeke üzerinde bir nümerik metot önermiştir. Önerilen metodun hata analizini yaparak bu metodun ikinci dereceden bir yakınsaklığa sahip olduğunu göstermiştir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Reaksiyon-difüzyon ve konveksiyon-difüzyon tipteki singüler pertürbe olmuş problemler bir çok alanda karşılaşılan fiziksel olayların modellenmesinde kullanılmaktadır. Bu modellere örnek olarak atmosferik kirlilik, bir nehir ağzında kirletici yayılımı, yeraltı suyu akışı ve çözünen madde taşınımı, oto katalitik reaksiyon durumunda yanma, sinir uyarısı üretimi ve yayılımı, opsiyon fiyatlandırması için Black-Scholes modeli gibi bir çok model denklem verilebilir (Kadalbajoo ve Gupta, 2010) Bu çalışmada, integral sınır şartılı singüler pertürbe olmuş Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemleri incelenmiştir.

Bu tez çalışmasının "Giriş" kısmında ele alınan problemler tanıtılıp bu problemlerin çözümlerindeki amaçlar verilmiştir. "Literatür Bildirişleri" kısmında bu problemlerin başlangıcından günümüze kadar olan gelişimi ile ilgili önemli çalışmalar örnek olarak gösterilmiştir "Temel Tanım ve Önbilgiler" kısmında problemin çözümünde gerekli olan tüm temel bilgiler ve teoremler verilmiştir.

Beşinci kısımda tanıtılan ilk problem, altıncı kısımda tanıtılan ikinci problem, yedinci kısımda tanıtılan son problem ele alınmıştır. Bu problemlerin asimptotik değerlendirmeleri yapıldıktan sonra uygun nümerik metot kurulmuştur. Önerilen metodun hata değerlendirmesi ve yakınsaklık analizleri yapıldıktan sonra teorik bulguları destekleyen nümerik örnekler verilmiştir. Önerilen metotların ikinci dereceden yakınsak oldukları gösterilmiştir.

Son kısımda ise elde edilen sonuçlar değerlendirmiştir. Önerilen nümerik metodun mevcut çalışmalardan farklı olarak ne tür avantajları olduğu ve literatüre olan katkısından bahsedilmiştir.

4. TEMEL TANIMLAR VE ÖNBİLGİLER

Bu kısımda önerilen nümerik metot için gerekli olan temel tanımlar, teoremler ve formüller verilmiştir.

4.1 Şebeke ve Düzgün Olmayan Şebeke

i. $T = [0, l]$ aralığının sonlu sayıdaki noktalardan oluşan parçalanışına şebeke adı verilir. Bu aralık üzerindeki şebekede tanımlanmış olan fonksiyonlara ise şebeke fonksiyonu adı verilir.

ii. T aralığı üzerinde tanımlanmış olan

$$\bar{\omega}_N = \{t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_N = l \ \}$$

ayrık noktalar kümesine düzgün olmayan şebeke adı verilir. $h_i = t_i - t_{i-1}, i = \overline{1, N}$ şebeke adımı ve t_i düğüm noktaları olarak adlandırılır (Amirali ve Amirali, 2023, Samarskii, 2001).

4.2 Maksimum Norm

Herhangi bir $T = \overline{0, l}$ aralığında tanımlı sürekli $g(t)$ fonksiyonunun maksimum normu aşağıdaki şekildedir:

$$\|g\|_{\infty,T} = \max_{0 \le t \le l} |g(t)|$$

$\|g\|_{\infty,\bar{\omega}_N} = \max\limits_{0 \le i \le N} |g_i|$ ifadesi ise düzgün olmayan şebeke için maksimum norm tanımıdır (Samarskii, 2001).

4.3 Düzgün Olmayan Şebekede Fark Türevleri

Bir T aralığında tanımlı $g(t)$ fonksiyonu için düzgün olmayan şebeke üzerindeki fark türevleri $g(t_i) = g_i$ için,

i. $g_{\bar{t},i} = \frac{g_i - g_{i-1}}{h_i}$ ifadesi birinci mertebeden geri fark türevi,

ii. $g_{t,i} = \frac{g_{i+1} - g_i}{h_{i+1}}$ ifadesi birinci mertebeden ileri fark türevi,

iii. $g_{\mathring{t},i} = \frac{g_{t,i} + g_{\bar{t},i}}{2}$ ifadesi birinci mertebeden merkezi fark türevi,

iv. $g_{\bar{t}\hat{t},i} = \frac{g_{t,i} - g_{\bar{t},i}}{\hbar_i}$ ifadesi ikinci mertebeden fark türevi

denir. Burada $\hbar_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}$ ve $h_i = t_i - t_{i-1}$ şeklindedir (Samarskii, 2001).

4.4 Shishkin Şebeke

τ geçiş noktası olmak üzere,

$$\tau = min\left\{\frac{l}{2}, \alpha^{-1}\varepsilon lnN\right\}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $[0,\tau]$ ve $[\tau, l]$ aralıkları $\frac{N}{2}$ tane eşit aralıklı alt aralıklara bölünür. $[0,\tau]$ aralığındaki şebeke adımı $h^{(1)}$ ve $[\tau, l]$ aralığındaki şebeke adımı $h^{(2)}$ olmak üzere

$$\bar{\omega}_N = \begin{cases} t_i = ih^{(1)}, \quad h^{(1)} = \dfrac{2\tau}{N} & i = \overline{0, N/2} \\ t_i = \tau + (i - N/2)h^{(2)}, \quad h^{(2)} = \dfrac{2(l-\tau)}{N}, & i = \overline{\dfrac{N}{2} + 1, N} \end{cases}$$

yukarıda verilen şebeke noktaları düğüm noktalarını göstermektedir (Amirali ve Amirali, 2023).

4.5 Volterra İntegral ve İntegro-Diferansiyel Denklemi

i. Volterra integral denklemi, integral sınırlarından en az birinin değişken olması durumudur. Birinci tip Volterra integral denkleminde, bilinmeyen fonksiyon olan $u(x)$ sadece integral işareti içinde görülebilir:

$$f(x) = \int_0^x K(x,t)u(t)dt$$

İkinci tip Volterra integral denkleminde, bilinmeyen fonksiyon $u(x)$ hem integral işareti içinde hem de dışında görülür:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u(t)dt$$

ii. Volterra-integro diferansiyel denklemi, başlangıç değer probleminin integral denklemlere dönüştürülmesi ile ortaya çıkar. Volterra integro-diferansiyel denklemi, bilinmeyen fonksiyon $u(x)$ ve türevlerinden biri olan $u^{(n)}(x)$'in, $n \geq 1$ için hem integral işareti içinde hem de dışında görülmesi ile oluşur. İntegral sınırlarından en az birisi değişkendir. Bu denklemde integral ve diferansiyel operatörler aynı denklem içinde olduğundan integro-diferansiyel denklem adı verilir. Volterra integro-diferansiyel denklemi aşağıdaki şekildedir (Wazwaz, 2011):

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u(t)dt$$

4.6 Fredholm İntegral ve İntegro-Diferansiyel Denklemi

i. Fredholm integral denklemlerinde integral sınırlarının her ikisi de sabittir.

Birinci tip Fredholm integral denkleminde, bilinmeyen fonksiyon olan $u(x)$ sadece integral işareti içinde görülebilir. Birinci tip Fredholm intagral denklem:

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

şeklindedir. İkinci tip Fredholm integral denklemlerde ise bilinmeyen fonksiyon olan $u(x)$ hem integral işareti içinde hem de dışında görülür. İkinci tip Fredholm integral denklemler:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

şeklindedir.

ii. Fredholm integro-diferansiyel denklemleri, diferansiyel denklemleri integral denklemlere dönüştürdüğümüzde ortaya çıkar. Fredholm integro-diferansiyel denklemi, bilinmeyen fonksiyon olan $u(x)$ ve türevlerinden biri olan $u^{(n)}(x)$'in, $n \geq 1$ için hem integral işareti içinde hem de dışında görülmesi ile oluşur. İntegral sınırlarından her ikisi de sabittir. Bu denklemde integral ve diferansiyel operatörler aynı denklem içinde olduğundan integro-diferansiyel denklem adı verilir. Fredholm-integro diferansiyel denklemi aşağıdaki şekildedir (Wazwaz, 2011):

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

4.7 Genelleştirilmiş Yamuk Kuralı

$[0, T]$ aralığında tanımlı yeterince düzgün olan bir $g(t)$ fonksiyonu için

$$\int_0^T g(t)dt = \sum_{i=1}^{N} \frac{h_i}{2}(g_i + g_{i-1}) + R_N(g) \equiv \sum_{i=0}^{N} \hbar_i g_i + R_N(g) \tag{4.1}$$

şeklindedir. İntegral biçiminde olan kalan terim $R_N(g)$ ise aşağıdaki şekildedir:

$$R_N(g) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - \xi)(t_{i-1} - \xi)\, g''(\xi)d\xi \tag{4.2}$$

Burada, $\hbar_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}$, $\hbar_0 = \frac{h_1}{2}$ ve $\hbar_N = \frac{h_N}{2}$ şeklindedir (Amirali ve Amirali, 2023).

4.8 Diferansiyelleme Kuralı

$g[a,b] = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}$, $g \in C^2$ ve $a_0 \leq x \leq a_1$ için

$$g'(x) = g[a_0, a_1] - \int_{a_0}^{a_1} K_0(\xi, x) g''(\xi) d\xi \tag{4.3}$$

(4.3) bağıntısı diferansiyelleme formülü olarak adlandırılır (Amirali ve Amirali, 2023).

4.9 İnterpolasyon Kuadratür Kuralları

$\rho(x) \in C[a, b]$ fonksiyonu ağırlık fonksiyonu, σ-reel parametre ve $g(x)$ fonksiyonu belirli fonksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned} \int_a^b \rho(x) g(x) dx = & \left[\int_a^b \rho(x) dx\right] \{\sigma g(b) + (1 - \sigma) g(a)\} \\ & + g[a, b] \int_a^b (x - x^\sigma) \rho(x) dx + R_n(g) \end{aligned} \tag{4.4}$$

eşitliği sağlanır. $R_n(g)$ kalan terimi integral formdadır ve $g \in C^n$, $n = 1,2$, $s = 0,1$ olmak üzere

$$R_n(g) = \int_a^b dx \rho\,(x) \int_a^b g^{(n)}(\xi) K_{n-1}(x, \xi) d\xi$$
$$K_s(x, \xi) = T_s(x - \xi) - (b - a)^{-1} (x - a)(b - \xi)^s$$
$$x^\sigma = \sigma b + (1 - \sigma) a$$
$$T_s(\lambda) = \frac{\lambda^s}{s!}, \lambda \geq 0;\ T_s(\lambda) = 0, \lambda < 0$$

eşitlikleri sağlanır.

İkinci kuadratür formülü olarak, $\rho(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$$\int_a^b \rho(x) g'(x) dx = g[a, b] \int_a^b \rho(x) dx + R_n(g) \tag{4.5}$$

şeklindedir. Kalan terim

$$R_n(g) = -\int_a^b dx\rho'(x)\int_a^b g^{(n)}(\xi)K_{n-1}(x,\xi)d\xi$$

bulunur (Amirali ve Amirali, 2023).

4.10 Faktörizasyon Metodu

$A_i \neq 0$ ve $B_i \neq 0$, $i = \overline{1, N-1}$ için aşağıdaki problemi ele alalım:

$$\begin{gathered} A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \qquad i = \overline{1, N-1} \\ y_0 = \varkappa_1 y_1 + \mu_1, \qquad y_N = \varkappa_2 y_{N-1} + \mu_2 \end{gathered} \tag{4.6}$$

(4.6) probleminin çözümü için

$$\begin{gathered} y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1} \\ y_{i-1} = \alpha_i y_i + \beta_i \end{gathered}$$

eşitlikleri geçerlidir. Burada α_i ve β_i belirsiz katsayılardır. (4.6)'da yukarıdaki eşitlikler yerine yazıldığında:

$$\begin{gathered} (A_i\alpha_i - C_i)y_i + A_i\beta_i + B_i y_{i+1} = -F_i \\ [(A_i\alpha_i - C_i)\alpha_{i+1} + B_i]y_{i+1} + A_i\beta_i + (A_i\alpha_i - C_i)\beta_{i+1} = -F_i \end{gathered}$$

$C_i - \alpha_i A_i \neq 0$ için

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \qquad \beta_{i+1} = \frac{A_i\beta_i + F_i}{C_i - \alpha_i A_i}, i = \overline{1, N-1} \tag{4.7}$$

olarak bulunur (Samarskii, 2001).

4.11 Faktörizasyon Metodunun Kararlılığı

$C_i - \alpha_i A_i \neq 0$ ve $1 - \alpha_N \varkappa_2 \neq 0$ için

$$|C_i| \geq |A_i| + |B_i|, \qquad i = \overline{1, N-1}$$
$$|\varkappa_\alpha| \leq 1, \alpha = 1,2, \qquad |\varkappa_1| + |\varkappa_2| < 2$$

olduğunu kabul edelim. Bu şartlar altında $|\alpha_i| \leq 1$, $i = \overline{1, N}$ dir. $|\alpha_i| \leq 1$ için $|\alpha_{i+1}| < 1$ olduğunu gösterelim.

$$|C_i - \alpha_i A_i| - |B_i| \geq |C_i| - |\alpha_i||A_i| - |B_i| \geq |A_i|, \qquad (1 - |\alpha_i|) \geq 0$$

$|C_i - \alpha_i A_i| > 0$ olduğundan

$$|\alpha_{i+1}| = \frac{|B_i|}{|C_i - \alpha_i A_i|} \leq 1$$

bulunur. $|\alpha_1| = |\varkappa_1| < 1$ ve $|\alpha_i| < 1$, $i = \overline{1, N}$ eşitsizliklerinden

$$|1 - \alpha_N \varkappa_2| \geq 1 - |\alpha_N||\varkappa_2| \geq 1 - |\varkappa_2| > 0$$

şeklinde elde edilir. Bu da faktörizasyon metodunun kararlılığını göstermektedir (Samarskii, 2001).

4.12 Yakınsaklık ve Düzgün Yakınsaklık

$$Lu = f(x), \qquad x \in G \tag{4.8}$$
$$lu = \mu(x), \qquad x \in \Gamma \tag{4.9}$$

burada, $f(x), \mu(x)$ belirli fonksiyonlar olmak üzere (4.8)-(4.9) probleminin kesin çözümü $u(x)$ olsun. Bu probleme uygun olan fark probleminin çözümü ise y olsun. $z = y - u$ eşitliği hata fonksiyonudur. $\| \quad \|_1$ ise ele alınan şebekedeki herhangi bir norm olmak üzere,

$$h \to 0 \text{ iken } \|z\|_1 = \|y - u\|_1 \leq Ch^p, \qquad p > 0$$

eşitliği sağlanıyor ise o zaman yaklaşık çözüm kesin çözüme $O(h^p)$ hızı ile yakınsar. C sabiti h ve ε dan bağımsız ise o zaman yaklaşık çözüm kesin çözüme ε'a göre düzgün yakınsaktır denir (Samarskii, 2001).

4.13 Kararlılık

(4.8)-(4.9) problemine karşılık gelen

$$L_h y = \varphi_h, \qquad x \in \omega_h \tag{4.10}$$
$$l_h y = \chi_h, \qquad x \in l_h \tag{4.11}$$

fark problemi olsun. Burada L_h ve l_h, $\bar{G} = G \cup \Gamma$ bölgesindeki herhangi bir $\bar{\omega}_h$ şebekesinde tanımlı fonksiyonlar kümesindeki fark operatörleri, h şebeke adımı ve ω_h, l_h ise belli şebeke fonksiyonlarıdır. (4.10)-(4.11) fark problemi, belli sınıflardan olan her bir ω_h, l_h başlangıç veri fonksiyonları ve yeterince küçük $h < h_0$ için tek bir çözüme sahip olsun. (4.10)-(4.11) probleminin başlangıç veri fonksiyonları $\tilde{\varphi}_h, \tilde{\chi}_h$ için çözümü $\tilde{y}$ olsun. Eğer h dan bağımsız C_1, C_2 sabitleri varsa yeterince küçük $h < h_0$ için

$$\|\tilde{y} - y\|_1 \le C_1 \|\tilde{\varphi}_h - \varphi_h\|_2 + C_1 \|\tilde{\chi}_h - \chi_h\|_3$$

eşitsizliği sağlanıyor ise o zaman (4.10)-(4.11) fark şeması sağ tarafa ve sınır (veya başlangıç) koşuluna göre kararlıdır denir. Burada $\|\ \ \|_1, \|\ \ \|_2, \|\ \ \|_3$ şebeke normlarıdır (Samarskii, 2001).

4.14 Green Fonksiyonu

$$Lu \coloneqq \varepsilon u''(x) + a(x)u(x), \qquad 0 < x < l$$
$$u(0) = 0, \qquad u(l) = 0$$

diferansiyel operatörü için Green fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$G(x,\xi) = \frac{1}{\varepsilon w(\xi)} \begin{cases} \varphi_1(\xi)\varphi_2(x), & 0 \le \xi \le x \le l \\ \varphi_1(x)\varphi_2(\xi), & 0 \le x \le \xi \le l \end{cases}$$

$\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ fonksiyonları sırasıyla

$$\varphi_1(x): L\varphi_1(x) = 0, \qquad \varphi_1(0) = 0, \qquad \varphi_1(l) = 1$$
$$\varphi_2(x): L\varphi_2(x) = 0, \qquad \varphi_2(0) = 1, \qquad \varphi_1(l) = 0$$

denklemlerinin çözümleridir. Ayrıca

$$w(\xi) = \frac{\phi(\xi)}{Q(l)}, \qquad Q(x) = \int_0^x \phi(s)ds\,, \qquad \phi(\xi) = e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\xi a(\tau)d\tau}$$

şeklinde tanımlıdır (Çimen ve Çakır, 2021).

4.15 Diskret Maksimum Prensibi

$$l[y_i] = A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \qquad i = \overline{1, N-1}$$
$$y_0 = \alpha_1, \qquad y_N = \alpha_2$$

problemi için $A_i > 0, B_i > 0, D_i = C_i - A_i - B_i \ge 0, i = \overline{1, N-1}$ olmak koşuluyla y_i şebeke fonksiyonunun iç düğüm noktasında $l[y_i] \ge 0$ ($l[y_i] \le 0$) şartını sağladığı kabul edilsin. Bu şartlar altında y_i şebeke fonksiyonu şebekenin iç noktalarında maksimal pozitif (minimal negatif) değer alamaz (Samarskii, 2001).

5. İNTEGRAL SINIR ŞARTLI BİRİNCİ MERTEBEDEN SİNGÜLER PERTÜRBE OLMUŞ VOLTERRA-FREDHOLM İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEM

Bu bölümde, aşağıdaki integral sınır şartlı singüler pertürbe Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemi ele alınacaktır:

$$Lu \coloneqq L_1 u + \lambda \int_0^x K_1(x,t)u(t)dt + \lambda \int_0^l K_2(x,t)u(t)dt = f(x), \qquad (5.1)$$

$$u(0) = \int_0^l g(x)u(x)dx + A, \qquad (5.2)$$

Burada $x \in (0, l]$, $L_1 u = \varepsilon u'(x) + a(x)u(x)$, $0 \ll \varepsilon < 1$ pertürbasyon parametresi, λ ve A verilmiş sabitler, $a(x) \geq \alpha > 0$, $g(x) \leq 0$, $f(x)$ fonksiyonları $x \in [0, l]$ aralığı üzerinde, $K_1(x,t)$, $K_2(x,t)$, fonksiyonları $(x,t) \in [0, l]^2$ bölgesi üzerinde yeterince düzgün fonksiyonlardır. Bu şartlar altında, (5.1)-(5.2) probleminin çözümü olan $u(x)$ fonksiyonu, $x = 0$ noktası civarında bir sınır katına sahiptir.

5.1 Asimptotik Değerlendirmeler

Bu bölümde nümerik metot kurulmadan önce (5.1)-(5.2) probleminin kesin çözümü ve türevleri ile ilgili bazı değerlendirmeler yapılacaktır. Bu değerlendirmeler uygun nümerik metot kurulurken kullanılacaktır.

Lemma 5.1.1. $a, f, g \in C^2[0, l]$ ve $\frac{\partial^m K_1}{\partial x^m}, \frac{\partial^m K_2}{\partial x^m} \in C^2[0, l], m = 0,1,2$ ve

$$|\lambda| < \frac{\alpha}{(1 + \|g\|_1)\left(\max\limits_{0 \leq x \leq l} \int_0^x |K_1(x,t)|dt + \max\limits_{0 \leq x \leq l} \int_0^l |K_2(x,t)|dt\right)} \qquad (5.3)$$

şartlarının sağlandığı kabul edilsin. Bu kabuller altında (5.1)-(5.2) probleminin $u(x)$ çözümü aşağıdaki sınırları sağlar.

$$\|u\|_\infty \leq C_0 \tag{5.4}$$

$$\left|u^{(k)}(x)\right| \leq C\left\{1 + \varepsilon^{-k} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}\right\}, x \in [0,l], k = 1,2 \tag{5.5}$$

Burada

$$C_0 = \frac{(|A| + (1 + \|g\|_1)\alpha^{-1}\|f\|_\infty)}{\left(1 - \left[|\lambda|\alpha^{-1}(1 + \|g\|_1)\left(\max\limits_{0\leq x\leq l} \int_0^x |K_1(x,t)|dt + \max\limits_{0\leq x\leq l} \int_0^l |K_2(x,t)|dt\right)\right]\right)}$$

şeklindedir.

İspat.(5.1) aşağıdaki şekilde yeniden yazıldığında

$$\varepsilon u'(x) + a(x)u(x) = F(x) \tag{5.6}$$

elde edilir. Burada $F(x)$ aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$F(x) = f(x) - \lambda \int_0^x K_1(x,t)u(t)dt - \lambda \int_0^l K_2(x,t)u(t)dt \tag{5.7}$$

(5.2) ve (5.6) lineer başlangıç değer probleminin çözümünü aşağıdaki şekilde yazılır:

$$u(x) = u(0)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\tau)d\tau} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x F(\xi)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\xi^x a(\tau)d\tau}d\xi$$

(5.6)'da (5.7)'yi göz önünde bulundurarak aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned} u(x) &= u(0)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\tau)d\tau} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x f(\xi)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\xi^x a(\tau)d\tau}d\xi \\ &- \frac{\lambda}{\varepsilon}\int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\xi^x a(\tau)d\tau}\left(\int_0^\xi K_1(x,t)u(t)dt\right)d\xi \\ &- \frac{\lambda}{\varepsilon}\int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\xi^x a(\tau)d\tau}\left(\int_0^l K_2(x,t)u(t)dt\right)d\xi \end{aligned} \tag{5.8}$$

(5.8)’in her iki tarafını $g(x)$ ile çarpıp $[0, l]$ aralığında integral alarak

$$
\begin{aligned}
\int_0^l u(x)g(x)dx &= u(0)\int_0^l g(x)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\tau)d\tau}\,dx \\
&+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^l g(x)\left(\int_0^x f(\xi)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\xi^x a(\tau)d\tau}d\xi\right)dx \\
&-\frac{\lambda}{\varepsilon}\int_0^l g(x)\left(\int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\xi^x a(\tau)d\tau}\left(\int_0^\xi K_1(\xi,t)u(t)dt\right)d\xi\right)dx \\
&-\frac{\lambda}{\varepsilon}\int_0^l g(x)\left(\int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\xi^x a(\tau)d\tau}\left(\int_0^l K_2(\xi,t)u(t)dt\right)d\xi\right)dx
\end{aligned}
$$

yukarıdaki eşitlik elde edilir. Buradan

$$
\begin{aligned}
u(0) = &\left(1-\int_0^l g(x)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\tau)d\tau}\,dx\right)^{-1} \\
&.\left[A+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^l g(x)\left(\int_0^x f(\xi)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\xi^x a(\tau)d\tau}d\xi\right)dx\right. \\
&-\frac{\lambda}{\varepsilon}\int_0^l g(x)\left(\int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\xi^x a(\tau)d\tau}\left(\int_0^\xi K_1(\xi,t)u(t)dt\right)d\xi\right)dx \\
&\left.-\frac{\lambda}{\varepsilon}\int_0^l g(x)\left(\int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\xi^x a(\tau)d\tau}\left(\int_0^l K_2(\xi,t)u(t)dt\right)d\xi\right)dx\right]
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

olur. (5.9) bağıntısının sağ tarafındaki ilk terimin bir ile sınırlı olması göz önünde bulundurulduğunda

$$
\begin{aligned}
|u(0)| \leq |A| &+ \left|\frac{1}{\varepsilon}\int_0^l g(x)\left(\int_0^x f(\xi)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\xi^x a(\tau)d\tau}d\xi\right)dx\right| \\
&+\left|\frac{\lambda}{\varepsilon}\int_0^l g(x)\left(\int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\xi^x a(\tau)d\tau}\left(\int_0^\xi K_1(\xi,t)u(t)dt\right)d\xi\right)dx\right| \\
&+\left|\frac{\lambda}{\varepsilon}\int_0^l g(x)\left(\int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\xi^x a(\tau)d\tau}\left(\int_0^l K_2(\xi,t)u(t)dt\right)d\xi\right)dx\right|
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

olarak yazılabilir. İlk olarak (5.10) bağıntısının sağ tarafındaki ikinci terimi değerlendirmek için $a(x) \geq \alpha > 0$ şartını göz önünde bulundurarak

$$\left|\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x f(\xi)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\xi^x a(\tau)d\tau}d\xi\right| \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x |f(\xi)|e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\xi^x a(\tau)d\tau}d\xi$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon}\|f\|_\infty \int_0^x e^{-\frac{\alpha(x-\xi)}{\varepsilon}d\xi} \leq \frac{1}{\varepsilon}\varepsilon\alpha^{-1}\|f\|_\infty = \alpha^{-1}\|f\|_\infty \qquad (5.11)$$

elde edilir. (5.11) ile benzer şekilde diğer terimler de değerlendirilerek ve (5.10) bağıntısında bu değerlendirmeler göz önünde bulundurularak

$$|u(0)| \leq |A| + \alpha^{-1}\|g\|_1\|f\|_\infty + |\lambda|\alpha^{-1}\|u\|_\infty\|g\|_1 \max_{0\leq\xi\leq l}\int_0^\xi |K_1(\xi,t)|dt$$

$$+|\lambda|\alpha^{-1}\|u\|_\infty\|g\|_1 \max_{0\leq\xi\leq l}\int_0^l |K_2(\xi,t)|dt \qquad (5.12)$$

eşitsizliği bulunur. $L_1u = \varepsilon u'(x) + a(x)u(x)$ diferansiyel operatörüne maksimum prensibi uygulandığında

$$\|u\|_\infty \leq |u(0)| + \alpha^{-1}\|f\|_\infty + |\lambda|\alpha^{-1}\|u\|_\infty \max_{0\leq x\leq l}\int_0^x |K_1(x,t)|dt$$

$$+|\lambda|\alpha^{-1}\|u\|_\infty \max_{0\leq x\leq l}\int_0^l |K_2(x,t)|dt \qquad (5.13)$$

bulunur. (5.12) ve (5.13) yardımıyla

$$
\begin{aligned}
\|u\|_\infty \le \Bigg(|A| + \alpha^{-1}\|g\|_1\|f\|_\infty + |\lambda|\alpha^{-1}\|u\|_\infty\|g\|_1 \max_{0\le\xi\le l}\int_0^{\xi}|K_1(\xi,t)|dt \\
+ |\lambda|\alpha^{-1}\|u\|_\infty\|g\|_1 \max_{0\le\xi\le l}\int_0^{l}|K_2(\xi,t)|dt\Bigg) + \alpha^{-1}\|f\|_\infty \\
+ |\lambda|\alpha^{-1}\|u\|_\infty \max_{0\le x\le l}\int_0^{x}|K_1(x,t)|dt \\
+ |\lambda|\alpha^{-1}\|u\|_\infty \max_{0\le x\le l}\int_0^{l}|K_2(x,t)|dt
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$
\|u\|_\infty \le \frac{|A| + \alpha^{-1}\|g\|_1\|f\|_\infty + \alpha^{-1}\|f\|_\infty}{1-\left(|\lambda|\alpha^{-1}\|g\|_1\left\{\max\limits_{0\le x\le l}\int_0^x|K_1(x,t)|dt + \max\limits_{0\le x\le l}\int_0^l|K_2(x,t)|dt\right\}\right)}
$$

olur. Bu eşitsizlikten

$$
\|u\|_\infty \le C_0 \tag{5.15}
$$

yazılarak (5.4)'ün ispatı tamamlanmış olur. Şimdi, (5.5)'in ispatını $k=1$ için verelim. Bunun için ilk olarak (5.6) aşağıdaki şekilde yeniden yazılsın:

$$
u'(x) = \frac{1}{\varepsilon}[F(x) - a(x)u(x)] \tag{5.16}
$$

(5.16) eşitliği $x=0$ için aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$
u'(0) = \frac{1}{\varepsilon}\left[f(0) - a(0)u(0) - \lambda\int_0^l K_2(0,t)u(t)dt\right] \tag{5.17}
$$

(5.17)'de (5.2) koşulu dikkate alındığında

$$
|u'(0)| \le \frac{1}{\varepsilon}|f(0)| + \frac{1}{\varepsilon}|a(0)|\|u\|_\infty\|g\|_1
$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}|a(0)||A|+\frac{1}{\varepsilon}|\lambda|\int_0^l |K_2(0,s)||u(t)|dt \leq \frac{C}{\varepsilon} \tag{5.18}$$

olur. (5.6)’nın bir kez türevi alınarak

$$\varepsilon u''(x)+a'(x)u(x)+a(x)u'(x)=F'(x) \tag{5.19}$$

yukarıdaki eşitlik yazılabilir. Burada $F'(x)$ terimi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$F'(x)=f'(x)-\lambda\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^x K_1(x,t)\,u(t)dt\right)-\lambda\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^l K_2(x,t)\,u(t)dt\right)$$

(5.19)’da $u'(x)=v(x)$ dönüşümü uygulandığında

$$\varepsilon v'(x)+a(x)v(x)=\phi(x) \tag{5.20}$$

olur. Burada $\phi(x)$ terimi

$$\phi(x)=f'(x)-a'(x)u(x)-\lambda\int_0^x \frac{\partial}{\partial x}K_1(x,t)u(t)dt-\lambda K_1(x,x)u(x)$$
$$-\lambda\int_0^l \frac{\partial}{\partial x}K_2(x,t)u(t)dt$$

yukarıdaki şekilde tanımlıdır. (5.20)’de birinci mertebeden lineer diferansiyel denklem çözümü aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$u'(x)=u'(0)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\tau)d\tau}+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \phi(\xi)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\xi^x a(\tau)d\tau}d\xi \tag{5.21}$$

(5.21)’de $|\phi(x)|\leq C$, $a(x)\geq\alpha>0$ ve $|u'(0)|\leq\frac{C}{\varepsilon}$ eşitsizlikleri göz önünde bulundurulduğunda,

$$|u'(x)| \le \frac{C}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} + \|\phi\|_\infty \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x e^{-\frac{\alpha(x-\xi)}{\varepsilon}} d\xi$$

$$\le \frac{C}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} + C\alpha^{-1}\left(1 - e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}\right) \le C\left\{1 + \varepsilon^{-1} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}\right\} \quad (5.22)$$

bulunur. Şimdi ise (5.5)'in ispatını $k = 2$ için yapalım. (5.19)'da $x = 0$ için (5.15), (5.18) ve $a, f, g \in C^2[0, l], \frac{\partial^m K_1(x,t)}{\partial x^m}, \frac{\partial^m K_2(x,t)}{\partial x^m} \in [0, l]^2$, şartları göz önünde bulundurularak,

$$|u''(0)| \le \frac{1}{\varepsilon}\Big|f'(0) - a'(0)u(0) - a(0)u'(0)$$

$$-\lambda K_1(0,0)u(0) - \lambda \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} K_2(0,t)u(t)dt\Big| \le \frac{C}{\varepsilon^2} \quad (5.23)$$

ifadesi elde edilir. (5.1)'in iki kez türevi alındığında aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\varepsilon u'''(x) + a(x)u''(x) = \psi(x) \quad (5.24)$$

Burada, $\psi(x)$ aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

$$\psi(x) = f''(x) - 2a'(x)u'(x) - a''(x)u(x) - \lambda \frac{\partial}{\partial x} K_1(x,x)u(x)$$

$$-\lambda K_1(x,x)u'(x) - \lambda \int_0^x \frac{\partial^2}{\partial x^2} K_1(x,t)u(t)dt - \lambda \int_0^l \frac{\partial^2}{\partial x^2} K_2(x,t)u(t)dt \quad (5.25)$$

(5.25)'ten

$$|\psi(x)| \le C\left\{1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}\right\} \quad (5.26)$$

olur. (5.24)'te, $u''(x) = w(x)$ dönüşümü yapılırsa

$$\varepsilon w'(x) + a(x)w(x) = \psi(x) \quad (5.27)$$

eşitliği bulunur. (5.27)'de birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemin çözümü:

$$u''(x) = u''(0)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\tau)d\tau} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \psi(\xi)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\xi^x a(\tau)d\tau}d\xi \qquad (5.28)$$

şeklinde elde edilir. (5.28)'de (5.26) değerlendirildiğinde yukarıdakilerle benzer şekilde

$$\begin{aligned} |u''(x)| &\leq \frac{C}{\varepsilon^2}e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} + \frac{C}{\varepsilon}\int_0^x \left\{1 + \frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}\right\}e^{-\frac{\alpha(x-\xi)}{\varepsilon}}d\xi \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon^2}e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} + C\alpha^{-1}\left(1 - e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}\right) + \frac{C}{\varepsilon^2}\int_0^x e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}d\xi \\ &\leq C\left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2}e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}\right) + \frac{Cx}{\varepsilon^2}e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}C\left\{1 + \frac{1}{\varepsilon^2}e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}\right\} \end{aligned} \qquad (5.29)$$

olarak elde edilir. Buradan (5.5)'in ispatı tamamlanmış olur.

5.2 Nümerik Metodun Kurulması

Bu bölümde, (5.1)-(5.2) problemi için düzgün olmayan şebeke üzerinde fark şeması kurulacaktır. $[0, l]$ aralığı üzerinde

$$\omega_N = \{0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N = l, \qquad h_i = x_i - x_{i-1}, \qquad i = \overline{1, N}\}$$

düzgün olmayan şebeke ve $\overline{\omega}_N = \omega_N \cup \{x_0 = 0\}$, $\hbar_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}$ şeklindedir. Ayrıca $\overline{\omega}_N$ üzerinde tanımlı herhangi bir $v(x)$ şebeke fonksiyonu için $v_i = v(x_i)$, $\|v\|_\infty = \|v\|_{\infty,\overline{\omega}_N} = \max\limits_{0 \leq i \leq N}|v_i|$ dir. (5.1)-(5.2) probleminin fark şemasını kurmak için aşağıdaki özdeşlik kullanılacaktır:

$$\chi_i^{-1}h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} Lu(x)\varphi_i(x)dx = \chi_i^{-1}h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\varphi_i(x)dx \qquad (5.30)$$

Burada $\varphi_i(x)$ üstel katsayılı baz fonksiyonu aşağıdaki başlangıç değer probleminin çözümüdür.

$$-\varepsilon\varphi_i'(x) + a_i\varphi_i(x) = 0, \qquad \varphi_i(x_i) = 1$$

Bu çözüm aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\varphi_i(x) = e^{\frac{-a_i(x_i - x)}{\varepsilon}}$$

Ayrıca χ_i katsayısı

$$\chi_i = h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi_i(x)dx = \frac{1 - e^{-a_i\delta_i}}{a_i\delta_i}, \ \ \delta_i = \frac{h_i}{\varepsilon}\varphi_i(x) = e^{\frac{-a_i(x_i - x)}{\varepsilon}}$$

şeklinde tanımlıdır. (5.30)'dan

$$\begin{aligned}
&\chi_i^{-1}h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(\varepsilon u'(x) + a(x)u(x))\varphi_i(x)dx \\
&+ \lambda\chi_i^{-1}h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi_i(x)\left(\int_0^x K_1(x,t)u(t)dt\right)dx \\
&+ \lambda\chi_i^{-1}h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi_i(x)\left(\int_0^l K_2(x,t)u(t)dt\right)dx \\
&= \chi_i^{-1}h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\varphi_i(x)dx
\end{aligned} \tag{5.31}$$

elde edilir (5.31)'in sol tarafındaki ilk terimi

$$\begin{aligned}
&\chi_i^{-1}h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(\varepsilon u'(x) + a(x)u(x))\varphi_i(x)dx \\
&= \chi_i^{-1}h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varepsilon u'(x)\varphi_i(x)dx + \chi_i^{-1}h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}a(x_i)u(x)\varphi_i(x)dx \\
&+\chi_i^{-1}h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\big(a(x) - a(x_i)\big)u(x)\varphi_i(x)dx
\end{aligned} \tag{5.32}$$

şeklinde yazılabilir. İlk olarak (5.32)'nin sağ tarafındaki ilk iki terim ele alınsın. Birinci terim için (4.5)'de verilen ikinci terim için ise (4.4)'te verilen interpolasyon kuadratür kuralı uygulandığında

$$\chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varepsilon u'(x)\varphi_i(x)dx + \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} a(x_i)u(x)\varphi_i(x)dx =$$
$$\varepsilon \chi_i^{-1} h_i^{-1} \left\{ u_{\bar{x},i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x)dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \varphi_i{}'(x) \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(\xi)K_0(x,\xi)d\xi \right\}$$
$$+ a_i u_i \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x)dx + u_{\bar{x},i} a_i \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i)\varphi_i(x)dx$$
$$+ a_i \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \varphi_i(x) \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(\xi)K_0(x,\xi)d\xi \qquad (5.33)$$

eşitliği elde edilir. (5.33)'ün sağ tarafındaki üçüncü terim için

$$u_{\bar{x},i} a_i \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i)\varphi_i(x)dx$$
$$= u_{\bar{x},i} a_i \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} x\varphi_i(x)dx + u_{\bar{x},i} a_i \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} x_i \varphi_i(x)dx \qquad (5.34)$$

şeklinde yazılır. (5.34)'ün sağ tarafındaki ilk terimine kısmi integrasyon uygulanınca aşağıdaki sonuç bulunur:

$$u_{\bar{x},i} a_i \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} x\varphi_i(x)dx$$
$$= \varepsilon u_{\bar{x},i} \chi_i^{-1} h_i^{-1} \left\{ -x_{i-1} e^{-a_i \delta_i} - \frac{\varepsilon}{a_i} + \frac{\varepsilon}{a_i} e^{-a_i \delta_i} + x_i e^{-a_i \delta_i} \right\} \qquad (5.35)$$

Bu taktirde aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$u_{\bar{x},i} a_i \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i)\varphi_i(x)dx$$

$$= u_i a_i + \varepsilon u_{\bar{x},i}\chi_i^{-1}h_i^{-1}\left\{-x_{i-1}e^{-a_i\delta_i} - \frac{\varepsilon}{a_i} + \frac{\varepsilon}{a_i}e^{-a_i\delta_i} + x_i e^{-a_i\delta_i}\right\} \qquad (5.36)$$

(5.36)’yı (5.33)’e yazarsak

$$\chi_i^{-1}h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varepsilon u'(x)\varphi_i(x)dx + \chi_i^{-1}h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}a(x_i)u(x)\varphi_i(x)dx$$
$$= \varepsilon\rho_i u_{\bar{x},i} + a_i u_i + R_{i,1} + R_{2,i} \qquad (5.37)$$

olarak elde edilir. Burada ρ_i katsayısı ve hata terimleri aşağıdaki biçimdedir:

$$\rho_i = \frac{a_i\delta_i}{1 - e^{-a_i\delta_i}}e^{-a_i\delta_i}$$
$$R_{i,1} = -\varepsilon\chi_i^{-1}h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}dx\varphi_i{}'(x)\int_{x_{i-1}}^{x_i}u'(\xi)K_0(x,\xi)d\xi$$
$$R_{i,2} = a_i\chi_i^{-1}h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}dx\varphi_i(x)\int_{x_{i-1}}^{x_i}u'(\xi)K_0(x,\xi)d\xi$$

Ayrıca, buradan gelen $R_{i,1}$ ve $R_{i,2}$ hatalarının toplamının sıfıra eşit olduğu göz önünde bulundurulmalıdır. (5.32)’nin sağ tarafındaki üçüncü terimi ele alınsın. $a(x)$ fonksiyonu için x_{i-1}, x_i noktalarında Newton interpolasyonu uygulandığında

$$a(x) = a(x_i) + (x - x_i)a_{\bar{x},i} + (x - x_i)(x - x_{i-1})\frac{a''(\xi_i(x))}{2}$$

olur. Bu denklem göz önünde bulundurularak aşağıdaki eşitlik yazılır:

$$\chi_i^{-1}h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\big(a(x) - a(x_i)\big)u(x)\varphi_i(x)dx$$
$$= a_{\bar{x},i}\chi_i^{-1}h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x - x_i)u(x)\varphi_i(x)dx$$
$$+\frac{1}{2}\chi_i^{-1}h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x - x_i)(x - x_{i-1})a''(\xi_i(x))u(x)\varphi_i(x)dx \qquad (5.38)$$

(5.38)'in sağ tarafındaki ilk terimi incelensin. Burada $u(x) = u(x_i) - \int_x^{x_i} u'(s)ds$ dönüşümü yapılarak

$$\begin{aligned}
&a_{\bar{x},i}\chi_i^{-1}h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_i)u(x)\varphi_i(x)dx \\
&\quad = u_i a_{\bar{x},i}\chi_i^{-1}h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_i)\varphi_i(x)dx \\
&\quad -a_{\bar{x},i}\chi_i^{-1}h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_i)\varphi_i(x)\left(\int_x^{x_i}u'(s)ds\right)dx \qquad (5.39)
\end{aligned}$$

elde edilir. (5.39)'un sağ tarafındaki ilk terimine kısmi integrasyon uygulandığında

$$\chi_i^{-1}h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_i)\varphi_i(x)dx = h_i\left[\frac{e^{-a_i\delta_i}}{1-e^{-a_i\delta_i}} - \frac{1}{a_i\delta_i}\right] = h_i\nu_i \qquad (5.40)$$

olarak elde edilir. Burada ν_i katsayısı aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

$$\nu_i = \frac{e^{-a_i\delta_i}}{1-e^{-a_i\delta_i}} - \frac{1}{a_i\delta_i}$$

(5.38)'de, (5.39) ve (5.40) göz önünde bulundurularak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\chi_i^{-1}h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\big(a(x)-a(x_i)\big)u(x)\varphi_i(x)dx = a_{\bar{x},i}u_ih_i\nu_i + R_i^{(1)} \qquad (5.41)$$

Burada, kalan terim $R_i^{(1)}$aşağıdaki biçimdedir:

$$\begin{aligned}
R_i^{(1)} &= \frac{1}{2}\chi_i^{-1}h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}a''(\xi_i(x))(x-x_i)(x-x_{i-1})u(x)\varphi_i(x)dx \\
&\quad -a_{\bar{x},i}\chi_i^{-1}h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_i)\varphi_i(x)\left(\int_x^{x_i}u'(s)ds\right)dx \qquad (5.42)
\end{aligned}$$

Sonuç olarak, (5.37) ve (5.42)'den

$$\chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\varepsilon u'(x) + a(x)u(x))\varphi_i(x)dx = \varepsilon \rho_i u_{\bar{x},i} + \bar{a}_i u_i + R_i^{(1)} \tag{5.43}$$

olarak elde edilir. Burada $\bar{a}_i$ katsayısı aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

$$\bar{a}_i = a_i + a_{\bar{x},i} h_i \nu_i$$

Şimdi, (5.31)'in sol tarafındaki üçüncü teriminin çekirdek fonksiyonu olan K_2 terimi için $x = x_i$ noktasında Taylor seri açılımı yapılsın:

$$K_2(x,t) = K_2(x_i,t) + (x - x_i)\frac{\partial}{\partial x}K_2(x_i,t) + \frac{(x - x_i)^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}K_2(\xi_i(x),t) \tag{5.44}$$

(5.44) eşitliği (5.31) eşitliğinin sol tarafındaki üçüncü terimde yerine yazıldığında aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$\begin{aligned}
&\lambda \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x)dx \left(\int_0^l K_2(x_i,t)u(t)dt \right) \\
&+\lambda \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x)dx \left(\int_0^l (x - x_i)\frac{\partial}{\partial x}K_2(x_i,t)u(t)dt \right) \\
&+\lambda \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x)dx \left(\int_0^l \frac{(x - x_i)^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}K_2(\xi_i(x),t)u(t)dt \right) \\
&= \int_0^l K_2(x_i,t)u(t)dt + h_i \nu_i \int_0^l \frac{\partial}{\partial x}K_2(x_i,t)u(t)dt \\
&+\frac{1}{2}\lambda \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i)^2 \varphi_i(x)dx \left(\int_0^l \frac{\partial^2}{\partial x^2}K_2(\xi_i(x),t)u(t)dt \right)
\end{aligned} \tag{5.45}$$

Burada $k_2 = K_2(x_i,t) + h_i \nu_i K_2(x_i,t)$ yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\lambda\chi_i^{-1}h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi_i(x)\,dx\left(\int_0^l K_2(x,t)u(t)dt\right)=\lambda\int_0^l k_2(x_i,t)u(t)dt+R_i^{(2)} \tag{5.46}$$

Hata terimi olan $R_i^{(2)}$ aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$$R_i^{(2)}=\frac{1}{2}\lambda\chi_i^{-1}h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_i)^2\varphi_i(x)\,dx\left(\int_0^l\frac{\partial^2}{\partial x^2}K_2(\xi_i(x),t)u(t)dt\right) \tag{5.47}$$

(5.47)'nın sağ tarafındaki integrale (4.7) ile verilen yamuk kuralı uygulandığında

$$\lambda\int_0^l k_2(x_i,t)u(t)dt=\lambda\sum_{j=0}^{N}\hbar_j k_{2,ij}u_j+R_i^{(3)} \tag{5.48}$$

olarak bulunur. Hata terimi olan $R_i^{(3)}$ ise

$$R_i^{(3)}=\frac{1}{2}\lambda\sum_{j=1}^{N}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\left(x_j-\xi\right)\left(x_{j-1}-\xi\right)\frac{d^2}{d\xi^2}(k_2(x_i,\xi)u(\xi))\,d\xi \tag{5.49}$$

şeklinde tanımlıdır. Sonuç olarak,

$$\lambda\chi_i^{-1}h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi_i(x)\left(\int_0^l K_2(x,t)u(t)dt\right)dx=\lambda\sum_{j=0}^{N}\hbar_j k_{2,ij}u_j+R_i^{(2)}+R_i^{(3)} \tag{5.50}$$

denklemi elde edilir. (5.31)'in sağ tarafındaki ikinci terim için (4.4) ile verilen interpolasyon kuadratür kuralı uygulandığında aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\lambda\chi_i^{-1}h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi_i(x)\left(\int_0^x K_1(x,t)u(t)dt\right)dx$$
$$=\lambda\chi_i^{-1}h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi_i(x)dx\left(\int_0^{x_i}K_1(x_i,t)u(t)dt\right)$$

$$+\lambda\chi_i^{-1}h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_i)\varphi_i(x)dx\left(\int_0^{x_i}\frac{\partial}{\partial x}K_1(x_i,t)u(t)dt\right)$$

$$+\lambda\chi_i^{-1}h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}dx\varphi_i(x)\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\int_0^{\xi}K_1(\xi,t)u(t)dt\right)T_1(\xi-t)d\xi$$

$$=\lambda\int_0^{x_i}K_1(x_i,t)u(t)dt+h_i\nu_i\int_0^{x_i}\frac{\partial}{\partial x}K_1(x_i,t)u(t)dt$$

$$+\lambda\chi_i^{-1}h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}dx\varphi_i(x)\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{d}{d\xi^2}\left(\int_0^{\xi}K_1(\xi,t)u(t)dt\right)T_1(\xi-t)d\xi \quad (5.51)$$

(5.51)’de, $k_1=K_1(x_i,t)+h_i\nu_i\frac{\partial}{\partial x}K_1(x_i,t)$ yazıldığında

$$\lambda\chi_i^{-1}h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi_i(x)\left(\int_0^{x_i}K_1(x,t)u(t)dt\right)dx=\lambda\int_0^{x_i}k_1(x_i,t)u(t)dt+R_i^{(4)} \quad (5.52)$$

olur. Burada hata terimi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$R_i^{(4)}=\lambda\chi_i^{-1}h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}dx\varphi_i(x)\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{d}{d\xi^2}\left(\int_0^{\xi}K_1(\xi,t)u(t)dt\right)T_1(\xi-t)d\xi \quad (5.53)$$

(5.52)’nin sağ tarafındaki ilk terim için (4.7) ile verilen yamuk kuralı uygulandığında aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\lambda\int_0^{x_i}k_1(x_i,t)u(t)dt=\lambda\sum_{j=0}^{i}\hbar_jk_{1,ij}u_j+R_i^{(5)} \quad (5.54)$$

Burada hata terimi

$$R_i^{(5)}=\frac{1}{2}\lambda\sum_{j=1}^{i}\int_{x_{j-1}}^{x_j}(x_j-\xi)(x_{j-1}-\xi)\frac{d^2}{d\xi^2}(k_1(x_i,\xi)u(\xi))\,d\xi \quad (5.55)$$

şeklinde tanımlıdır. Sonuç olarak, bu değerlendirmeler göz önünde bulundurularak

$$\lambda \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x) \left(\int_0^x K_1(x,t) u(t) dt \right) dx = \lambda \sum_{j=0}^{i} \hbar_j k_{1,ij} u_j + R_i^{(4)} + R_i^{(5)} \quad (5.56)$$

eşitliği elde edilir. (5.31)'in sağ tarafındaki terim yukarıdakiler ile benzer olarak incelendiğinde aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \varphi_i(x) dx = f_i + \chi_i^{-1} h_i^{-1} f_{\bar{x},i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) \varphi_i(x) dx$$
$$+ \frac{1}{2} \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i)(x - x_{i-1}) f''(\xi_i(x)) \varphi_i(x) dx = \bar{f_i} + R_i^{(6)} \quad (5.57)$$

Burada $\bar{f_i}$ katsayısı ve $R_i^{(6)}$ kalan terimi aşağıdaki biçimdedir:

$$\bar{f_i} = f_i + h_i \nu_i$$
$$R_i^{(6)} = \frac{1}{2} \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i)(x - x_{i-1}) f''(\xi_i(x)) \varphi_i(x) dx$$
$$- a_{\bar{x},i} \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) \varphi_i(x) \left(\int_x^{x_i} u'(s) ds \right) dx \quad (5.58)$$

Son olarak, (5.2) için $[0, l]$ üzerinde (4.7) ile verilmiş olan yamuk kuralı uygulandığında aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$\int_0^l g(x) u(x) dx = \sum_{j=0}^{N} \hbar_j g_j u_j + r \quad (5.59)$$

Burada kalan terim r aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$r = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(x_{j-1} - \xi) \frac{d^2}{d\xi^2} (g(\xi) u(\xi))\, d\xi \quad (5.60)$$

(5.31), (5.43), (5.50), (5.56), (5.57) ve (5.59) göz önünde bulundurularak $1 \leq i \leq N$ için

$$L_N u_i := \varepsilon \rho_i u_{\bar{x},i} + \bar{a}_i u_i + \lambda \sum_{j=0}^{i} \hbar_j k_{1,ij} u_j + \lambda \sum_{j=0}^{N} \hbar_j k_{2,ij} u_j + R_i = \bar{f}_i \tag{5.61}$$

$$u_0 = \sum_{j=0}^{N} \hbar_j g_j u_j + A + r \tag{5.62}$$

diskret problemi elde edilir.Burada hata terimleri aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

$$R_i = \sum_{n=1}^{6} R_i^{(n)}$$

Kalan terimler (5.42), (5.47), (5.49), (5.53), (5.55), (5.58) ve (5.60) ile verilmiştir. (5.61)-(5.62) kesin bağıntısındaki hata terimleri ihmal edilerek

$$L_N y_i := \varepsilon \rho_i y_{\bar{x},i} + \bar{a}_i y_i + \lambda \sum_{j=0}^{i} \hbar_j k_{1,ij} y_j + \lambda \sum_{j=0}^{N} \hbar_j k_{2,ij} y_j = \bar{f}_i \tag{5.63}$$

$$y_0 = \sum_{j=0}^{N} \hbar_j g_j y_j + A \tag{5.64}$$

fark yaklaşımı elde edilir.

5.3 Hata Analizi

(5.1)-(5.2) problemi için kurulan fark şeması olan (5.63)-(5.64)'ün ε- düzgün yakınsak olması için $\bar{\omega}_N$ üzerinde τ ya bağlı geçiş noktası içeren Shishkin şebeke kullanılacaktır. (5.1)-(5.2) probleminin $x = 0$ noktasında bir sınır katı mevcuttur. İlk olarak nümerik metodun düzgün yakınsaklık analizi yapılacaktır. Hata fonksiyonu $z_i = y_i - u_i, i = \overline{0, N}$ aşağıdaki fark probleminin çözümüdür:

$$L_N z_i := \varepsilon \rho_i z_{\bar{x},i} + \bar{a}_i z_i + \lambda \sum_{j=0}^{i} \hbar_j k_{1,ij} z_j + \lambda \sum_{j=0}^{N} \hbar_j k_{2,ij} z_j = R_i \tag{5.65}$$

$$z_0 = \sum_{j=0}^{N} \hbar_j g_j (y_i - u_i) - r \tag{5.66}$$

Lemma 5.3.1. $a, f, g \in C^2[0,l]$ ve $\frac{\partial^m K_1}{\partial x^m}, \frac{\partial^m K_2}{\partial x^m}, \frac{\partial^{m+1} K_1}{\partial x \partial t^m}, \frac{\partial^{m+1} K_2}{\partial x \partial t^m} \in C^2[0,l], m = 0,1,2$ koşulları altında aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

$$\|R\|_{\infty,\omega_N} \leq CN^{-2} lnN \tag{5.67}$$

$$|r| \leq CN^{-2} lnN \tag{5.68}$$

İspat. İlk olarak (5.60) ile verilen r kesme hatası incelensin. Burada Lemma 5.1.1 de verilen şartlar göz önünde bulundurularak aşağıdaki eşitsizlik yazılır:

$$\begin{aligned} |r| &\leq C \sum_{j=1}^{N} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left|\left(x_j - \xi\right)\left(x_{j-1} - \xi\right)\right| \left(1 + |u'(\xi)| + |u''(\xi)|\right) d\xi \\ &\leq C \left(\sum_{j=1}^{N} h_j^3 + \sum_{j=1}^{N} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left|\left(x_j - \xi\right)\left(x_{j-1} - \xi\right)\right| \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha\xi}{\varepsilon}} d\xi \right. \\ &\left. + \sum_{j=1}^{N} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left|\left(x_j - \xi\right)\left(x_{j-1} - \xi\right)\right| \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha\xi}{\varepsilon}} d\xi \right) \\ &\leq C \left(\sum_{j=1}^{N} h_j^3 + \sum_{j=1}^{N} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left|\left(x_j - \xi\right)\left(x_{j-1} - \xi\right)\right| \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha\xi}{\varepsilon}} d\xi \right) \end{aligned} \tag{5.69}$$

(5.69)'un sağ tarafındaki ilk terim ele alınsın. $\frac{l}{2} < \alpha^{-1} \varepsilon lnN$ değeri için $h^{(1)} = h^{(2)} = h = \frac{l}{N}$ olduğundan aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\sum_{j=1}^{N} h_j^3 = \sum_{j=1}^{N/2} h_j^3 + \sum_{j=\frac{N}{2}+1}^{N} h_j^3 = \frac{N}{2} h^3 + \frac{N}{2} h^3 = Nh^3 \leq N \frac{l^3}{N^3} \leq CN^{-2} \tag{5.70}$$

Şimdi $\alpha^{-1}\varepsilon lnN < \frac{l}{2}$ değeri için

$$\sum_{j=1}^{N/2}\left(h^{(1)}\right)^3 + \sum_{j=\frac{N}{2}+1}^{N}\left(h^{(2)}\right)^3 = \frac{N}{2}\left(\frac{2\tau}{N}\right)^3 + \frac{N}{2}\left(\frac{2(l-\tau)}{N}\right)^3 \leq N\frac{l^3}{N^3} \leq CN^{-2} \tag{5.71}$$

yukarıdaki eşitlik elde edilir. (5.69)'un sağ tarafındaki ikinci terim ele alınsın. $\frac{l}{2} < \alpha^{-1}\varepsilon lnN$ değeri için $h^{(1)} = h^{(2)} = h = \frac{l}{N}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{N}\int_{x_{j-1}}^{x_j}(x_j-\xi)(x_{j-1}-\xi)\frac{1}{\varepsilon^2}e^{-\frac{\alpha\xi}{\varepsilon}}d\xi \\
&= \sum_{j=1}^{N/2}\int_{x_{j-1}}^{x_j}(x_j-\xi)(x_{j-1}-\xi)\frac{1}{\varepsilon^2}e^{-\frac{\alpha\xi}{\varepsilon}}d\xi \\
&\qquad + \sum_{j=\frac{N}{2}+1}^{N}\int_{x_{j-1}}^{x_j}(x_j-\xi)(x_{j-1}-\xi)\frac{1}{\varepsilon^2}e^{-\frac{\alpha\xi}{\varepsilon}}d\xi \\
&\qquad \leq \frac{|h|^2}{\varepsilon^2}\int_0^l e^{-\frac{\alpha\xi}{\varepsilon}}d\xi \leq \frac{|h|^2}{\varepsilon^2}\varepsilon\alpha^{-1}\left(1-e^{-\frac{\alpha l}{\varepsilon}}\right) \\
&\qquad \leq l^2N^{-2}\varepsilon^{-1}\alpha^{-1} \leq CN^{-2}lnN
\end{aligned} \tag{5.72}$$

yukarıdaki eşitlik elde edilir. Şimdi $\alpha^{-1}\varepsilon lnN < \frac{l}{2}$ değeri için $h^{(1)} = \frac{2\tau}{N}$, $h^{(2)} = \frac{2(l-\tau)}{N}$ eşitlikleri göz önünde bulundurularak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{N}\int_{x_{j-1}}^{x_j}(x_j-\xi)(\xi-x_{j-1})\frac{1}{\varepsilon^2}e^{-\frac{\alpha\xi}{\varepsilon}}d\xi \\
&\leq \sum_{j=1}^{N/2}\int_{x_{j-1}}^{x_j}(x_j-\xi)(\xi-x_{j-1})\frac{1}{\varepsilon^2}e^{-\frac{\alpha\xi}{\varepsilon}}d\xi \\
&+ \sum_{j=\frac{N}{2}+1}^{N}\int_{x_{j-1}}^{x_j}(x_j-\xi)(\xi-x_{j-1})\frac{1}{\varepsilon^2}e^{-\frac{\alpha\xi}{\varepsilon}}d\xi
\end{aligned} \tag{5.73}$$

(5.73)'ün sağ tarafındaki ilk terim ele alınsın. Buradan,

$$\sum_{j=1}^{N/2}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\left(x_j-\xi\right)\left(\xi-x_{j-1}\right)\frac{1}{\varepsilon^2}e^{-\frac{\alpha\xi}{\varepsilon}}d\xi$$

$$=\frac{\left|h^{(1)}\right|^2}{\varepsilon^2}\int_0^{\tau}e^{-\frac{\alpha\xi}{\varepsilon}}d\xi\le\left(\frac{2\tau}{N}\right)^2\varepsilon^{-1}\alpha^{-1}\left(e^{-\frac{\alpha\xi}{\varepsilon}}\right)_0^{\tau}\le CN^{-2}lnN \qquad (5.74)$$

olarak bulunur. Son olarak (5.73)'ün sağ tarafındaki ikinci terim ele alınsın. Burada, kısmi integrasyon kuralı uygulanarak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\sum_{j=\frac{N}{2}+1}^{N}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\left(x_j-\xi\right)\left(\xi-x_{j-1}\right)\frac{1}{\varepsilon^2}e^{-\frac{\alpha\xi}{\varepsilon}}d\xi$$

$$=\sum_{j=\frac{N}{2}+1}^{N}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\frac{1}{\varepsilon}\alpha^{-1}\left(\left(x_{j-1}-\xi\right)+\left(x_j-\xi\right)\right)e^{-\frac{\alpha\xi}{\varepsilon}}d\xi$$

$$=\sum_{j=\frac{N}{2}+1}^{N}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\frac{1}{\varepsilon}\alpha^{-1}\left(-2\xi-h^{(2)}+2x_j\right)e^{-\frac{\alpha\xi}{\varepsilon}}d\xi$$

$$=2\alpha^{-1}\sum_{j=\frac{N}{2}+1}^{N}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\frac{1}{\varepsilon}\left(x_j-x-h^{(2)}\right)e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}dx$$

$$\le 2\alpha^{-1}h^{(2)}\int_{\tau}^{l}\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}dx\le 2\alpha^{-1}h^{(2)}\left(e^{-\frac{\alpha\tau}{\varepsilon}}-e^{-\frac{\alpha l}{\varepsilon}}\right)$$

$$\le 2\alpha^{-1}h^{(2)}N^{-1}\le 2\alpha^{-1}\frac{(l-\tau)}{N}N^{-1}\le CN^{-2} \qquad (5.75)$$

(5.70)-(5.75) göz önünde bulundurulduğunda (5.68)'in ispatı tamamlanmış olur. (5.67)'nin ispatı için R_i hata terimleri tek tek ele alınacaktır. İlk olarak (5.42) hata terimi ele alınsın:

$$R_i^{(1)} = \frac{1}{2}\chi_i^{-1}h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} a''(\xi_i(x))(x-x_i)(x-x_{i-1})u(x)\varphi_i(x)dx$$

$$-a_{\bar{x},i}\chi_i^{-1}h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_i)\varphi_i(x)\left(\int_x^{x_i}u'(s)ds\right)dx$$

$$\left|R_i^{(1)}\right| \le \frac{1}{2}\chi_i^{-1}h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|a''(\xi_i(x))||(x-x_i)||(x-x_{i-1})||u(x)|\varphi_i(x)dx$$

$$+\left|a_{\bar{x},i}\nu_i\right|h_i\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i}|u'(x)|dx\right) \le C\left(h_i^2 + h_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}dx\right)$$

olarak elde edilir. $\frac{l}{2} < \alpha^{-1}\varepsilon lnN$ için yukarıdakine benzer olarak

$$C\left(h_i^2 + h_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}dx\right) \le CN^{-2} \tag{5.76}$$

şeklinde yazılır. Şimdi $\alpha^{-1}\varepsilon lnN < \frac{l}{2}$ durumunu ele alınsın. $h^{(1)} = \frac{2\tau}{N}$, $h^{(2)} = \frac{2(l-\tau)}{N}$ göz önünde bulundurularak aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$C\left(h_i^2 + h_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}dx\right) \le CN^{-2} + \frac{\left|h^{(1)}\right|^2}{\varepsilon} \le CN^{-2}lnN \tag{5.77}$$

$$C\left(h_i^2 + h_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}dx\right) \le CN^{-2} + h^{(2)}\alpha^{-1}\left(e^{-\frac{\alpha x_{i-1}}{\varepsilon}} - e^{-\frac{\alpha x_i}{\varepsilon}}\right)$$

$$\le CN^{-2} + \frac{2(l-\tau)}{N}\alpha^{-1}e^{-\frac{\alpha x_{i-1}}{\varepsilon}} \le CN^{-2} \tag{5.78}$$

(5.76) ve (5.78)'den

$$\left|R_i^{(1)}\right| \le CN^{-2}lnN \tag{5.79}$$

olur. (5.58) için $f\epsilon C^2[0,l]$, $|x-x_i| \le h_i$, $|x-x_{i-1}| \le h_i$ şartları göz önünde bulundurularak

$$R_i^{(6)} = \frac{1}{2}\chi_i^{-1}h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_i)(x-x_{i-1})f''\big(\xi_i(x)\big)\varphi_i(x)dx$$

$$\left|R_i^{(6)}\right| \leq \frac{1}{2}\chi_i^{-1}h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|x-x_i||x-x_{i-1}|\left|f''\big(\xi_i(x)\big)\right|\varphi_i(x)dx$$

$$\leq Ch_i^2 \leq CN^{-2} \tag{5.80}$$

bulunur. (5.80) $\tau = \alpha^{-1}\varepsilon lnN$ ve $\tau = \frac{l}{2}$ için sağlanır. $\frac{\partial^2 K_1}{\partial x^2}$ ve $\frac{\partial^2 K_2}{\partial x^2}$ teriminin sınırlı olması, $|x - x_i| \leq h_i$, koşulları göz önünde bulundurularak (5.47) ve (5.53) için aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\left|R_i^{(2)}\right| \leq \frac{1}{2}\lambda\chi_i^{-1}h_i^{-1}\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_i)^2\varphi_i(x)dx\left(\int_0^l \frac{\partial^2}{\partial x^2}K_2(\xi_i(x),t)u(t)dt\right)\right|$$

$$\leq Ch_i^2 \leq CN^{-2} \tag{5.81}$$

$$\left|R_i^{(4)}\right|$$

$$\leq |\lambda|\chi_i^{-1}h_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}dx\varphi_i(x)\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{d}{d\xi^2}\left(\int_0^\xi |K_1(\xi,t)||u(t)|dt\right)T_1(\xi-t)d\xi$$

$$\leq CN^{-2} \tag{5.82}$$

(5.49) ve (5.55) için (5.60) ile benzer şekilde

$$\left|R_i^{(3)}\right| \leq \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\big(x_j-\xi\big)\big(x_{j-1}-\xi\big)\frac{d^2}{d\xi^2}|k_2(x_i,\xi)u(\xi)|\,d\xi$$

$$\leq C\sum_{j=1}^{N}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\big(x_j-\xi\big)\big(x_{j-1}-\xi\big)\,(1+|u'(\xi)|+|u''(\xi)|)d\xi \leq CN^{-2} \tag{5.83}$$

$$\left|R_i^{(5)}\right| \leq \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\big(x_j-\xi\big)\big(x_{j-1}-\xi\big)\frac{d^2}{d\xi^2}|k_1(x_i,\xi)u(\xi)|\,d\xi$$

$$\leq C\sum_{j=1}^{N}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\big(x_j-\xi\big)\big(x_{j-1}-\xi\big)\,(1+|u'(\xi)|+|u''(\xi)|)d\xi \leq CN^{-2} \tag{5.84}$$

yukarıdaki değerlendirmeler elde edilir (5.79)-(5.84) eşitsizlikleri göz önünde bulundurulduğunda (5.67)'nin doğruluğu ispatlanmıştır.

Lemma 5.3.2. a, f, g, K_1, K_2 fonksiyonları Lemma 5.3.1 in şartlarını sağlaması ve $\bar{a}_i \geq \bar{\alpha} > 0$ için

$$|\lambda| < \frac{\bar{\alpha}}{(1 + \|g\|_1)\left[\max\limits_{1\leq i\leq N} \sum_{j=1}^{i} \hbar_j |K_{1,ij}| + \max\limits_{1\leq i\leq N} \sum_{j=1}^{N} \hbar_j |K_{2,ij}|\right]} \tag{5.85}$$

sağlaması koşulları altında, (5.65)-(5.66) probleminin çözümü olan z aşağıdaki eşitsizliği sağlar:

$$\|z\|_{\infty,\bar{\omega}_N} \leq C\left(\|R\|_{\infty,\omega_N} + |r|\right) \tag{5.86}$$

İspat. (5.65) aşağıdaki şekilde yeniden yazıldığında

$$\varepsilon\rho_i z_{\bar{x},i} + \bar{a}_i z_i = F_i, i = \overline{1, N-1} \tag{5.87}$$

olur. Burada F_i terimi aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$F_i = R_i - \lambda \sum_{j=0}^{i} \hbar_j k_{1,ij} z_j - \lambda \sum_{j=0}^{N} \hbar_j k_{2,ij} z_j$$

(5.87)'den aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\bar{a}_i z_i = F_i - \varepsilon\rho_i \left(\frac{z_i - z_{i-1}}{h_i}\right) = F_i - \varepsilon\rho_i \frac{z_i}{h_i} + \varepsilon\rho_i \frac{z_{i-1}}{h_i}$$

$$z_i = \left(\frac{h_i}{\bar{a}_i h_i - \varepsilon\rho_i}\right)\left(F_i + \varepsilon\rho_i \frac{z_{i-1}}{h_i}\right)$$

$$z_i = \frac{h_i}{\bar{a}_i h_i - \varepsilon\rho_i} F_i + \frac{\varepsilon\rho_i}{\bar{a}_i h_i - \varepsilon\rho_i} z_{i-1} \tag{5.88}$$

(5.88)'e birinci mertebeden fark denkleminin çözümü uygulandığında

$$z_i = z_0 Q_i + \sum_{k=1}^{i} \phi_k \, Q_{i-k} \tag{5.89}$$

olarak yazılabilir. Burada Q_{i-k} ve ϕ_k terimleri

$$Q_{i-k} = \begin{cases} 1, & k = i, \\ \displaystyle\prod_{l=k+1}^{i} \frac{\varepsilon\rho_l}{\varepsilon\rho_l + \bar{a}_l h_l}, & 0 \le k \le i-1, \end{cases}$$

$$\phi_k = \frac{h_i F_i}{\varepsilon\rho_i + \bar{a}_i h_i},$$

şeklinde tanımlanmıştır. (5.66) ve (5.89) göz önünde bulundurularak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$z_0 = \sum_{j=0}^{N} \hbar_j g_j z_j - r$$

$$= z_0 \sum_{k=1}^{N} \hbar_k g_k Q_k + \sum_{i=1}^{N} \hbar_i g_i \left(\sum_{k=1}^{i} \frac{h_k F_k}{\varepsilon\rho_k + \bar{a}_k h_k} Q_{i-k} \right) - r$$

$$z_0 \left(1 - \sum_{k=1}^{N} \hbar_k g_k Q_k \right) = \sum_{i=1}^{N} \hbar_i g_i \left(\sum_{k=1}^{i} \frac{h_k F_k}{\varepsilon\rho_k + \bar{a}_k h_k} Q_{i-k} \right) - r$$

$$z_0 = \frac{\sum_{i=1}^{N} \hbar_i g_i \left(\sum_{k=1}^{i} \frac{h_k F_k}{\varepsilon\rho_k + \bar{a}_k h_k} Q_{i-k} \right) - r}{1 - \sum_{k=1}^{N} \hbar_k g_k Q_k} \tag{5.90}$$

(5.90)'un paydası bir ile sınırlı olduğundan

$$|z_0| \le C\left(\|g\|_1 \|F\|_{\infty,\omega_N} + |r| \right) \tag{5.91}$$

yukarıdaki eşitsizliği elde edilir. (5.90) ve (5.91) göz önünde bulundurulduğunda

$$|z_0| \le C\left(\|g\|_1 \|R\|_{\infty,\omega_N} + \|g\|_1 \bar{\alpha}^{-1} |\lambda| \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{i} \hbar_j \left|K_{1,ij}\right| \|z\|_{\infty,\omega_N} \right.$$

$$\left. + \|g\|_1 \bar{\alpha}^{-1} |\lambda| \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{N} \hbar_j \left|K_{2,ij}\right| \|z\|_{\infty,\omega_N} + |r| \right) \qquad (5.92)$$

yukarıdaki eşitsizlik elde edilir. (5.92) bağıntısında ayrık maksimum prensibi uygululandığında

$$\|z\|_{\infty,\bar{\omega}_N} \le |z_0| + \bar{\alpha}^{-1} \|R\|_{\infty,\omega_N} + \bar{\alpha}^{-1} |\lambda| \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{i} \hbar_j \left|K_{1,ij}\right| \|z\|_{\infty,\omega_N}$$

$$+ \|g\|_1 \bar{\alpha}^{-1} |\lambda| \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{N} \hbar_j \left|K_{2,ij}\right| \|z\|_{\infty,\omega_N} \qquad (5.93)$$

olur. (5.92) eşitsizliği (5.93) eşitsizliğinde yerine yazıldığında, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\|z\|_{\infty,\bar{\omega}_N}$$

$$\le \frac{C\left((1+\|g\|_1)\bar{\alpha}^{-1} \|R\|_{\infty,\omega_N} + |r| \right)}{1 - \left[(1+\|g\|_1)\bar{\alpha}^{-1} |\lambda| \left\{ \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{i} \hbar_j \left|K_{1,ij}\right| + \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{N} \hbar_j \left|K_{2,ij}\right| \right\} \right]} \qquad (5.94)$$

(5.94) elde edilerek ispat tamamlanmış olur.

Temel teoremimizin yakınsaklık sonucunu aşağıdaki teorem ile verebiliriz.

Teorem 5.3.3. u fonksiyonu (5.1)-(5.2) probleminin çözümü ve y fonksiyonu ise (5.63)-(5.64) problemlerinin çözümü olmak üzere

$$\|y-u\|_{\infty,\omega_N} \le CN^{-2} lnN \qquad (5.95)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemma 5.3.1 ve Lemma 5.3.2'nin kombinasyonundan Teorem 5.3.3'ün ispatı çıkar.

5.4 Nümerik Sonuçlar

Bu kısımda (5.1)-(5.2) problemi için önerilen nümerik metodun etkinliğini göstermek için nümerik örnek verilecektir. (5.65)-(5.66) fark yaklaşımı için

$$y_i^{(n)} = \frac{\varepsilon\rho_i y_{i-1}^{(n)} + h_i\bar{f}_i - \lambda h_i\left\{\sum_{j=1}^{i} \hbar_j k_{1,ij} y_j^{(n-1)} + \sum_{j=1}^{N} \hbar_j k_{2,ij}\, y_j^{(n-1)}\right\}}{\varepsilon\rho_i + h_i\bar{a}_i} \tag{5.95}$$

$$y_0^{(n)} = A + \sum_{j=1}^{N} \hbar_j g_j\, y_j^{(n-1)}, \qquad n = 1,2,\ldots \tag{5.96}$$

iterasyon metodu kullanılacaktır.

Örnek 5.4.1. Aşağıdaki test problemini ele alınsın:

$$\varepsilon u'(x) + (1+x^2)u(x) + \int_0^x (1-e^{xt})u(t)dt + \int_0^1 (1-xt)u(t)dt = \frac{1}{1+x}$$

$$u(0) = -1 + \int_0^1 \left(-sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) u(x)dx$$

Bu problemin kesin çözümü bilinmemektedir. Bu yüzden, hata ve yakınsaklık analizi çift şebeke metodu kullanılarak elde edilir. Burada maksimum hata terimi ve hesaplanan hata terimi

$$e_\varepsilon^N = \max_{\omega_N}\left|y_i^{\varepsilon,N} - \tilde{y}_i^{\varepsilon,2N}\right|, \qquad e^N = \max_{\varepsilon} e_\varepsilon^N$$

şeklindedir. Yaklaşık çözüm olan $\tilde{y}_i^{\varepsilon,2N}$

$$\widetilde{\omega}_{2N} = \left\{\frac{x_i}{2} : i = \overline{0,2N}, \qquad x_{i+1/2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right\}$$

şebekesi üzerinde tanımlıdır. Burada yakınsaklık oranı ve hesaplanan ε'a göre düzgün yakınsaklık oranı aşağıdaki şekilde verilmektedir:

$$p^N = \frac{ln(e^N/e^{2N})}{ln2}, \qquad p^{\varepsilon,N} = \frac{ln(e_\varepsilon^N/e_\varepsilon^{2N})}{ln2}$$

Bu nümerik örnek için bulunan değerler Çizelge 5.1'de verilmiştir.

Çizelge 5.1 ε-düzgün yakınsama hızı p^N ve ε'a göre hesaplanmış maksimum hata e^N

ε	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$	$N = 1024$	$N = 2048$
2^{-2}	0.0001736	0.0000441	0.0000111	0.0000027	0.0000007	0.00000017
	1.8416	1.8846	1.9050	1.9150	1.9199	1.9223
2^{-4}	0.0007887	0.0001984	0.0000494	0.0000123	0.0000030	0.00000077
	1.9969	2.0156	2.0153	2.0132	2.0116	2.0108
2^{-6}	0.0032323	0.0008572	0.0002360	0.0000534	0.0000127	0.00000316
	2.0941	2.3151	2.2256	2.0463	1.9800	1.9714
2^{-8}	0.0124947	0.0046590	0.0013299	0.0003565	0.0000905	0.00002218
	1.4388	1.8156	1.9009	1.9794	2.0289	2.0421
2^{-10}	0.0146407	0.0073706	0.0035401	0.0013746	0.0004098	0.00010719
	1.0112	1.0684	1.3697	1.7485	1.9359	1.9574
e^N	0.0146407	0.0073706	0.0035401	0.0013746	0.0004098	0.00010719
p^N	1.0112	1.0684	1.3697	1.7485	1.9359	1.9574

5.5 Sonuç

Bu bölümde singüler pertürbe olmuş integral sınır şartlı Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklem ele alınmıştır. İlk olarak asimptotik değerlendirmeleri yapmak için lineer başlangıç değer probleminin çözümü kullanılmıştır. Daha sonra üstel katsayılı baz fonksiyonu yardımı ve kalan terimi integral formda olan interpolasyon kuadratür kuralları kullanılarak Shishkin şebeke üzerinde uygun fark şeması kurulmuştur. Hata analizi ve hatanın kararlılığı incelenmiştir. Son olarak teorik sonuçları destekleyen nümerik örnek yardımıyla önerilen metodun $O(h^2)$ mertebeden bir yakınsaklığa sahip olduğu gösterilmiştir.

6. İNTEGRAL SINIR ŞARTLI SİNGÜLER PERTÜRBE OLMUŞ REAKSİYON-DİFÜZYON TİPTE VOLTERRA-FREDHOLM İNTEGRO DİFERANSİYEL DENKLEM

Bu bölümde integral sınır şartlı singüler pertürbe reaksiyon-difüzyon denklemi ele alınacaktır:

$$Lu \coloneqq L_2u + \lambda \int_0^x K_1(x,t)u(t)dt + \lambda \int_0^l K_2(x,t)u(t)dt = f(x), \tag{6.1}$$

$$u(0) = A, \qquad u(l) = \int_0^l g(x)u(x)dx + B \tag{6.2}$$

Burada $x \in (0,l)$, $L_2u = -\varepsilon^2 u''(x) + a(x)u(x)$, $0 \ll \varepsilon < 1$ pertürbasyon parametresi, λ ve A verilmiş sabitler, $a(x) \geq \alpha > 0$, $g(x)$, $f(x)$ fonksiyonları $x \in [0,l]$ aralığı üzerinde, $K_1(x,t)$, $K_2(x,t)$, fonksiyonları $(x,t) \in [0,l]^2$ bölgesi üzerinde yeterince düzgün fonksiyonlardır. Bu şartlar altında (6.1)-(6.2) probleminin çözümü var ve tektir. $u(x)$ çözümü, $x = 0$ ve $x = l$ komşuluklarında sınır katına sahiptir.

6.1 Sürekli Problem için Bazı Ön Değerlendirmeler

Bu bölümde nümerik metot kurulmadan önce (6.1)-(6.2) probleminin kesin çözümü ve türevleri ile ilgili bazı değerlendirmeler yapılacaktır. Bu değerlendirmeler uygun nümerik metot kurulurken kullanılacaktır.

Lemma 6.1.1. $a, f, g \in C^2[0,l]$, $\frac{\partial^m K_1}{\partial x^m}, \frac{\partial^m K_2}{\partial x^m} \in C^2[0,l]^2, m = 0,1,2$ ve

$$\max_{0\leq x\leq l} \int_0^l |g(x)|dx + \alpha^{-1}|\lambda| \max_{0\leq x\leq l} \int_0^x |K_1(x,t)|dt$$
$$+\alpha^{-1}|\lambda| \max_{0\leq x\leq l} \int_0^l |K_2(x,t)|dt < 1 \tag{6.3}$$

olduğu kabulüyle (6.1)-(6.2) probleminin çözümü aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar:

$$\|u\|_\infty \le C, \tag{6.4}$$

$$\left|u^{(k)}(x)\right| \le C\left\{1+\varepsilon^{-k}\left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x}{\varepsilon}}+e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x)}{\varepsilon}}\right)\right\}, x\in[0,l], k=1,2 \tag{6.5}$$

Burada

$$C=(1-\gamma)^{-1}[|A|+|B|+\alpha^{-1}\|f\|_\infty]$$

şeklindedir.

İspat. Öncelikle, (6.1)-(6.2) problemine maksimum prensibi uygulandığında

$$|u(x)| \le |A|+|u(l)|+\alpha^{-1}\max_{0\le x\le l}|f(x)|$$
$$+\alpha^{-1}|\lambda|\max_{0\le x\le l}\int_0^x |K_1(x,t)||u(t)|dt+\alpha^{-1}|\lambda|\max_{0\le x\le l}\int_0^l |K_2(x,t)||u(t)|dt$$

olarak elde ederiz. Bu eşitsizlikte (6.2) sınır koşulu göz önünde bulundurulduğunda aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$|u(x)| \le |A|+|B|+\alpha^{-1}\max_{0\le x\le l}|f(x)|+\max_{0\le x\le l}\int_0^l |g(x)||u(x)|dx$$
$$+\alpha^{-1}|\lambda|\max_{0\le x\le l}\int_0^x |K_1(x,t)||u(t)|dt+\alpha^{-1}|\lambda|\max_{0\le x\le l}\int_0^l |K_2(x,t)||u(t)|dt \tag{6.6}$$

Bu eşitsizlikten

$$\|u\|_\infty \le |A|+|B|+\alpha^{-1}\|f\|_\infty+\alpha^{-1}\|u\|_\infty\max_{0\le x\le l}\int_0^l |g(x)|dx$$
$$+\alpha^{-1}\|u\|_\infty|\lambda|\max_{0\le x\le l}\int_0^x |K_1(x,t)|dt+\alpha^{-1}\|u\|_\infty|\lambda|\max_{0\le x\le l}\int_0^l |K_2(x,t)|dt \tag{6.7}$$

olur. (6.7) üzerinde aşağıda verilen eşitlik göz önünde bulundurulsun.

$$\gamma = \max_{0\le x\le l}\int_0^l |g(x)|dx + \alpha^{-1}\left(|\lambda|\max_{0\le x\le l}\int_0^x |K_1(x,t)|dt + |\lambda|\max_{0\le x\le l}\int_0^l |K_2(x,t)|dt\right)$$

Buradan, aşağıdaki ilişki elde edilir:

$$\|u\|_\infty \le (1-\gamma)^{-1}[|A| + |B| + \alpha^{-1}\|f\|_\infty] \tag{6.8}$$

(6.8)'de (6.3) şartı ele alındığında

$$\|u\|_\infty \le C \tag{6.9}$$

olur. Böylece (6.4)'ün ispatı tamamlanmış olur. Şimdi (6.5)'in ispatı ile devam edilsin. (6.1) aşağıdaki şekilde yeniden yazıldığında

$$u''(x) = \frac{-1}{\varepsilon^2}\left[f(x) - a(x)u(x) - \lambda\int_0^x K_1(x,t)u(t)dt - \lambda\int_0^l K_2(x,t)u(t)dt\right]$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}|u''(x)| &\le \frac{1}{\varepsilon^2}\left|f(x) - a(x)u(x) - \lambda\int_0^x K_1(x,t)u(t)dt - \lambda\int_0^l K_2(x,t)u(t)dt\right| \\ &\le \frac{1}{\varepsilon^2}\Bigg[|f(x)| + |a(x)||u(x)| + |\lambda_1|\int_0^x |K_1(x,t)||u(t)|dt \\ &\qquad + |\lambda_2|\int_0^l |K_2(x,t)||u(t)|dt\Bigg]\end{aligned}$$

elde edilir. (6.4) ve $\frac{\partial^m K_1}{\partial x^m}, \frac{\partial^m K_2}{\partial x^m} \in C^2[0,l],\ m = 1,2$ koşulları altında

$$|u''(x)| \le \frac{C}{\varepsilon^2}, \qquad 0 \le x \le l \tag{6.10}$$

değerlendirmesi elde edilir. Şimdi $|u'(0)|$ ve $|u'(l)|$ değerlendirmeleri yapılsın. Bunun için (4.8) ile verilen diferansiyellenme formülünde $g(x) \equiv u(x), x = 0, a_0 = 0$ ve $a_1 = \varepsilon$ yazılıp, (6.10) göz önünde bulundurularak

$$|u'(0)| \leq \frac{|u(\varepsilon)| + |u(0)|}{\varepsilon} + \int_0^{\varepsilon} |K_0(\xi, 0)u''(\xi)| d\xi$$

$$|u'(0)| \leq \frac{C}{\varepsilon} \tag{6.11}$$

eşitsizliği elde edilir. $|u'(l)|$ değerlendirmesinde yukarıdaki ile benzer bir biçimde $g(x) \equiv u(x), x = l, a_0 = l - \varepsilon$ ve $a_1 = l$ yazıldığında,

$$|u'(l)| \leq \frac{|u(l)| + |u(l-\varepsilon)|}{l - (l - \varepsilon)} + \int_{l-\varepsilon}^{l} |K_0(\xi, 0)u''(\xi)| d\xi \leq \frac{C}{\varepsilon} \tag{6.12}$$

elde edilir. (6.1)'in bir kez türevi alınır ve $v(x) = u'(x)$ dönüşümü yapılırsa

$$-\varepsilon^2 v''(x) + a(x)v(x) = \phi(x) \tag{6.13}$$

olur. Burada $\phi(x)$ terimi aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

$$\phi(x) = f'(x) - a'(x)u(x) - \lambda \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} K_1(x,t)u(t) - \lambda K_1(x,x)u(x)$$

$$-\lambda \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} K_2(x,t)u(t) \tag{6.14}$$

(6.11)-(6.12) değerlendirmeleri ile birlikte (6.13) dikkate alınırsa

$$Lv(x) = \phi(x) \tag{6.15}$$

$$v(0) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \qquad v(l) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{6.16}$$

eşitliği yazılabilir. Burada (6.15)-(6.16) probleminin çözümü $v(x) = v_0(x) + v_1(x)$ şeklinde aranabilir. $v_0(x)$ ve $v_1(x)$ fonksiyonları sırası ile aşağıdaki problemlerin çözümüdür:

$$Lv_0(x) = \phi(x), \qquad 0 < x < l \tag{6.17}$$

$$v_0(0) = v_0(l) = 0 \tag{6.18}$$

ve

$$Lv_1(x) = 0, \qquad 0 < x < l \tag{6.19}$$

$$v_1(0) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \qquad v_1(l) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{6.20}$$

şeklindedir. (6.14) için

$$\begin{aligned} |\phi(x)| \leq & \left| f'(x) - a'(x)u(x) - \lambda \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} K_1(x,t)u(t) - \lambda K_1(x,x)u(x) \right. \\ & \left. -\lambda \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} K_2(x,t)u(t) \right| \\ & \leq |f'(x)| + |a'(x)||u(x)| + |\lambda| \left| \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} K_1(x,t)u(t) \right| \\ & +|\lambda||K_1(x,x)u(x)| + |\lambda| \left| \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} K_2(x,t)u(t) \right| \leq C \end{aligned} \tag{6.21}$$

değerlendirmesi doğrudur. (6.17)-(6.18) problemine maksimum prensibi uyguladığınıp (6.21) göz önüne alındığında aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$|v_0(x)| \leq \alpha^{-1} \max_{0 \leq s \leq l} |\phi(s)|$$

$\phi(x)$ fonksiyonunun ε a göre düzgün sınırlı olması göz önünde bulundurularak

$$|v_0(x)| \leq C, \qquad 0 < x < l \tag{6.22}$$

elde edilir. (6.19)-(6.20) problemine maksimum prensibi uygulandığında

$$|v_1(x)| \leq \vartheta(x)$$

olur. Yukarıdaki eşitsizlikte, $\vartheta(x)$ aşağıdaki problemin çözümüdür:

$$-\varepsilon^2\vartheta''(x) + a(x)\vartheta(x) = F(x), \qquad 0 < x < l \tag{6.23}$$

$$\vartheta(0) = |v_0(0)|, \qquad \vartheta(l) = |v_1(l)| \tag{6.24}$$

(6.23)-(6.24) sabit katsayılı probleminin çözümü ise aşağıdaki şekildedir:

$$\vartheta(x) = \frac{v_0(0)sinh\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}(l-x)\right) + |v_1(l)|sinh\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}x\right)}{sinh\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}l\right)} \tag{6.25}$$

(6.20) göz önünde bulundurularak

$$\vartheta(x) \leq \frac{C}{\varepsilon}\left\{e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}x} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}(l-x)}\right\}$$

elde edilir. Yukarıdaki ile benzer şekilde $k = 2$ için ispat yapılır. Bu taktirde Lemma 6.1.1 in ispatı tamamlanmış olur.

6.2 Diskret Problem

Bu bölümde, (6.1)-(6.2) problemi için düzgün olmayan şebeke üzerinde fark şeması kurulacaktır. $[0, l]$ aralığı üzerinde tanımlı şebeke

$$\omega_N = \{0 < x_1 < x_2 < \cdots x_{N-1} < l, \qquad h_i = x_i - x_{i-1}, \qquad i = \overline{1, N}\}$$

şeklindedir $\bar{\omega}_N = \omega_N \cup \{x_0 = 0, x_N = l\}$, $\hbar_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}$ ile tanımlıdır. $[0, l]$ aralığı N nin pozitif ve dörde tam bölünebilen bir tamsayı olması koşulu ile $[0, \sigma], [\sigma, l - \sigma]$ ve $[l - \sigma, l]$ şeklinde üç alt aralığa bölünür. Burada, şebekenin ince ve kaba kısımlarını ayıran σ geçiş noktası

$$\sigma = min\left\{\frac{l}{4}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{\alpha}} lnN\right\}$$

şeklinde tanımlıdır. Şebeke $[0, \sigma]$ ve $[l - \sigma, l]$ aralıklarında ince, $[\sigma, l - \sigma]$ aralığında ise kabadır. Ayrıca düğüm noktaları olan x_i ler ise aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

$$x_i = \begin{cases} ih^{(1)}, & i = \overline{0, \frac{N}{4}} \\ \sigma + (i - N/4)h^{(2)} & i = \overline{\frac{N}{4} + 1, \frac{3N}{4}} \\ (l - \sigma) + (i - 3N/4)h^{(1)} & i = \overline{\frac{3N}{4} +, N} \end{cases}$$

Burada, $h^{(1)} = \frac{4\sigma}{N}, h^{(2)} = \frac{2(l - 2\sigma)}{N}$ ve $h_i = x_i - x_{i-1}, i = \overline{1, N}$ ile verilmiştir. $\bar{\omega}_N$ üzerinde tanımlı herhangi bir $v(x)$ şebeke fonksiyonu için $v_i = v(x_i)$, $\|v\|_\infty = \|v\|_{\infty, \bar{\omega}_N} = \max_{0 \le i \le N} |v_i|$ ve $\hbar_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}$ dir. (6.1)-(6.2) probleminin fark şemasını kurmak için aşağıdaki özdeşlik kullanılacaktır:

$$\chi_i^{-1} \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} Lu(x) \varphi_i(x) dx = \chi_i^{-1} \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \varphi_i(x) dx \,, 1 \le i \le N \qquad (6.26)$$

Burada $\delta_i = \frac{\sqrt{a_i}}{\varepsilon}$ olmak üzere üstel katsayılı baz fonksiyonları $\varphi_i^{(1)}(x)$ ve $\varphi_i^{(2)}(x)$ sırası ile aşağıdaki problemlerin çözümüdür:

$$\varepsilon^2 \varphi_i^{(1)''}(x) - a_i \varphi_i^{(1)}(x) = 0,$$
$$\varphi_i^{(1)}(x_{i-1}) = 0, \qquad \varphi_i^{(1)}(x_i) = 1$$

ve

$$\varepsilon^2 \varphi_i^{(2)''}(x) - a_i \varphi_i^{(2)}(x) = 0,$$
$$\varphi_i^{(2)}(x_i) = 1, \qquad \varphi_i^{(2)}(x_{i+1}) = 0$$

Buradan üstel katsayılı baz fonksiyonu aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \varphi_i^{(1)} = \dfrac{sinh\delta_i(x - x_{i-1})}{sinh\delta_i h_i}, & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \varphi_i^{(2)} = \dfrac{sinh\delta_i(x_{i+1} - x)}{sinh\delta_i h_{i+1}}, & x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0, & x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}) \end{cases}$$

Ayrıca χ_i katsayısı,

$$\begin{aligned} \chi_i &= \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x)dx = \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(1)}(x)dx + \hbar_i^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^{(2)}(x)dx \\ &= \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{sinh\delta_i(x - x_{i-1})}{sinh\delta_i h_i} dx + \hbar_i^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{sinh\delta_i(x_{i+1} - x)}{sinh\delta_i h_{i+1}} dx \\ &= (\delta_i \hbar_i)^{-1} \left(tanh\left(\frac{\delta_i h_i}{2}\right) + tanh\left(\frac{\delta_i h_{i+1}}{2}\right) \right) \end{aligned} \tag{6.27}$$

biçimindedir. (6.26) aşağıdaki şekilde tekrar yazıldığında

$$\begin{aligned} &\chi_i^{-1} \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (-\varepsilon^2 u''(x) + a(x)u(x))\varphi_i(x)dx \\ &+ \lambda \chi_i^{-1} \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) \left(\int_0^x K_1(x,t)u(t)dt \right) dx \\ &+ \lambda \chi_i^{-1} \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) \left(\int_0^l K_2(x,t)u(t)dt \right) dx \\ &= \chi_i^{-1} \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\varphi_i(x)dx \end{aligned} \tag{6.28}$$

elde edilir. İlk olarak (6.28) in sol tarafındaki ilk terim ele alınsın Bu terim aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir:

$$\chi_i^{-1}\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}(-\varepsilon^2u''(x)+a(x)u(x))\varphi_i(x)dx$$
$$=\chi_i^{-1}\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}-\varepsilon^2u''(x)\varphi_i(x)dx+\chi_i^{-1}\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}a(x_i)u(x)\varphi_i(x)dx$$
$$+\chi_i^{-1}\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\big(a(x)-a(x_i)\big)u(x)\varphi_i(x)dx \qquad (6.29)$$

Öncelikle, (6.29)'un sağ tarafındaki ilk terime kısmi integrasyon kuralı uygulandığında

$$-\chi_i^{-1}\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\varepsilon^2u''(x)\varphi_i(x)dx=-\chi_i^{-1}\hbar_i^{-1}\varepsilon^2\big(u'(x)\varphi_i(x)\big)_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}$$
$$+\chi_i^{-1}\hbar_i^{-1}\varepsilon^2\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}u'(x)\varphi_i{}'(x)dx=\chi_i^{-1}\hbar_i^{-1}\varepsilon^2\int_{x_{i-1}}^{x_i}u'(x)\varphi_i^{(1)'}(x)dx$$
$$+\chi_i^{-1}\hbar_i^{-1}\varepsilon^2\int_{x_i}^{x_{i+1}}u'(x)\varphi_i^{(2)'}(x)dx \qquad (6.30)$$

elde edilir. Burada, (4.5) ile verilen interpolasyon kuadratür kuralı (6.30)'un sağ tarafındaki her iki terime uygulandığında

$$\chi_i^{-1}\hbar_i^{-1}\varepsilon^2\int_{x_{i-1}}^{x_i}u'(x)\varphi_i^{(1)'}(x)dx+\chi_i^{-1}\hbar_i^{-1}\varepsilon^2\int_{x_i}^{x_{i+1}}u'(x)\varphi_i^{(2)'}(x)dx$$
$$=\chi_i^{-1}\hbar_i^{-1}\varepsilon^2\left\{u_{\bar{x},i}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi_i^{(1)'}(x)dx-u_{x,i}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi_i^{(2)'}(x)dx\right\}+R_{i,1}$$
$$=-\chi_i^{-1}\hbar_i^{-1}\varepsilon^2\{u_{x,i}-u_{\bar{x},i}\}+R_{i,1} \qquad (6.31)$$

olarak bulunur. Buradan elde edilen hata terimi olan $R_{i,1}$ aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$$R_{i,1}=-\chi_i^{-1}\hbar_i^{-1}\varepsilon^2\left\{\int_{x_{i-1}}^{x_i}dx\varphi_i^{(1)''}(x)\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{d^2u(\xi)}{d\xi^2}T_1(x-\xi)d\xi\right.$$

$$+\int_{x_i}^{x_{i+1}} dx\varphi_i^{(2)''}(x)\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{d^2u(\xi)}{d\xi^2}T_1(x-\xi)d\xi\Bigg\} \tag{6.32}$$

Daha sonra, (6.29)'un sağ tarafındaki ikinci terim ele alınsın:

$$\chi_i^{-1}\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} a(x_i)u(x)\varphi_i(x)dx = a_i\chi_i^{-1}\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u(x)\varphi_i(x)dx \tag{6.33}$$

(6.33)'de $[x_{i-1},x_i]$ aralığında $\sigma = 1, p(x) = \varphi_i^{(1)}(x)$ için, $[x_i,x_{i+1}]$ aralığında ise $\sigma = 0, p(x) = \varphi_i^{(2)}(x)$ için (5.4)'deki interpolasyon kuadratür kuralı uygulanınca

$$\begin{aligned}
&a_i\chi_i^{-1}\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u(x)\varphi_i(x)dx \\
&\qquad = a_i\chi_i^{-1}\hbar_i^{-1}\Bigg\{u(x_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi_i^{(1)}(x)dx \\
&\qquad + u_{\bar{x},i}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_i)\varphi_i^{(1)}(x)dx + u(x_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi_i^{(2)}(x)dx \\
&\qquad + u_{x,i}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x-x_i)\varphi_i^{(2)}(x)dx \\
&\qquad + \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx\varphi_i^{(1)}(x)dx\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{d^2u(\xi)}{d\xi^2}T_1(x-\xi)d\xi \\
&\qquad + \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx\varphi_i^{(2)}(x)dx\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{d^2u(\xi)}{d\xi^2}T_1(x-\xi)d\xi\Bigg\} \\
&= a_i\chi_i^{-1}\hbar_i^{-1}\Bigg\{u(x_i)\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\varphi_i(x)dx + u_{\bar{x},i}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_i)\varphi_i^{(1)}(x)dx \\
&\quad + u_{x,i}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x-x_i)\varphi_i^{(2)}(x)dx\Bigg\} + R_{i,2}
\end{aligned} \tag{6.34}$$

olarak hesaplanır. Burada, hata terimi olan $R_{i,2}$ aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

$$R_{i,2} = a_i \chi_i^{-1} \hbar_i^{-1} \left\{ \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \varphi_i^{(1)}(x) dx \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} T_1(x-\xi) d\xi \right. \\ \left. + \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \varphi_i^{(2)}(x) dx \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} T_1(x-\xi) d\xi \right\} \tag{6.35}$$

şeklindedir. (6.32) ve (6.35) terimlerinin toplamının sıfıra eşit olması göz önünde bulundurularak (6.31) ve (6.34)'ün toplamından

$$-\chi_i^{-1} \hbar_i^{-1} \varepsilon^2 \{u_{x,i} - u_{\bar{x},i}\} + a_i u_i \\ a_i \chi_i^{-1} \hbar_i^{-1} \left\{ u_{\bar{x},i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) \varphi_i^{(1)}(x) dx + u_{x,i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i) \varphi_i^{(2)}(x) dx \right\} \tag{6.36}$$

elde edilir. (6.36)'dan

$$-\varepsilon^2 \chi_i^{-1} \hbar_i^{-1} u_{x,i} \left\{ 1 - \varepsilon^{-2} a_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i) \varphi_i^{(2)}(x) dx \right\} \\ + \varepsilon^2 u_{\bar{x},i} \chi_i^{-1} \hbar_i^{-1} \left\{ 1 + \varepsilon^{-2} a_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) \varphi_i^{(1)}(x) dx \right\} + a_i u_i \\ = -\varepsilon^2 \psi_i u_i + a_i u_i \tag{6.37}$$

olarak elde ederiz. Burada, $\psi_i = \frac{\tau_i^{(2)} u_{x,i} - \tau_i^{(1)} u_{\bar{x},i}}{\hbar_i}$ ve

$$\tau_i^{(1)} = \chi_i^{-1} \left\{ 1 + \varepsilon^{-2} a_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) \varphi_i^{(1)}(x) dx \right\} \\ = \frac{a_i h_i \hbar_i}{\varepsilon^2 sinh(\delta_i h_{i+1}) + \left[tanh\left(\frac{\delta_i h_i}{2}\right) + tanh\left(\frac{\delta_i h_{i+1}}{2}\right) \right]}$$

$$\tau_i^{(2)} = \chi_i^{-1} \left\{ 1 - \varepsilon^{-2} a_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i) \varphi_i^{(2)}(x) dx \right\} \\ = \frac{a_i h_{i+1} \hbar_i}{\varepsilon^2 sinh(\delta_i h_{i+1}) + \left[tanh\left(\frac{\delta_i h_i}{2}\right) + tanh\left(\frac{\delta_i h_{i+1}}{2}\right) \right]}$$

şeklindedir. (6.29)' un sağ tarafındaki üçüncü terimde $a(x)$ fonksiyonu için x_i, x_{i+1} noktalarında Newton interpolasyon formülü uygulanarak

$$a(x) = a(x_i) + (x - x_i)a_{x,i} + \frac{1}{2}(x - x_i)(x - x_{i+1})a''(\xi_i(x)) \tag{6.38}$$

bulunur. (6.29)da (6.38) yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &\chi_i^{-1}\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\big(a(x) - a(x_i)\big)u(x)\varphi_i(x)dx \\ &= \chi_i^{-1}\hbar_i^{-1}a_{x,i}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}(x - x_i)u(x)\varphi_i(x)dx \\ &+\frac{1}{2}\chi_i^{-1}\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}(x - x_i)(x - x_{i+1})a''(\xi_i(x))u(x)\varphi_i(x) \end{aligned} \tag{6.39}$$

bulunur. (6.39)'da $u(x) = u(x_i) + \int_{x_i}^{x} u'(s)ds$ dönüşümü uygulandığında

$$\begin{aligned} &\chi_i^{-1}\hbar_i^{-1}a_{x,i}u_i\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}(x - x_i)\varphi_i(x)dx \\ &+\chi_i^{-1}h_i^{-1}a_{x,i}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}(x - x_i)\varphi_i(x)\left(\int_{x_i}^{x}u'(s)ds\right)dx \\ &+\frac{1}{2}\chi_i^{-1}\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}(x - x_i)(x - x_{i+1})a''(\xi_i(x))u(x)\varphi_i(x) \end{aligned} \tag{6.40}$$

elde edilir. (6.40)'ın sağ tarafındaki ilk terimde η_i dönüşümü yapılıp kısmi integrasyon kuralı uygulandığında

$$\chi_i^{-1}\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\big(a(x) - a(x_i)\big)u(x)\varphi_i(x)dx = \chi_i^{-1}a_{x,i}u_i\eta_i + R_i^{(1)} \tag{6.41}$$

olarak elde edilir. Burada η_i katsayısı ve kalan terimi aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

$$\eta_i = \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)\varphi_i(x)dx = \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i)\varphi_i^{(1)}(x)dx$$

$$+\hbar_i^{-1} \int_{x_i}^{x_i+1} (x - x_i)\varphi_i^{(2)}(x)(x)dx = \hbar_i^{-1} \left(\frac{h_{i+1}\delta_i^{-1}}{sinh(\delta_i h_{i+1})} - \frac{h_i\delta_i^{-1}}{sinh(\delta_i h_i)} \right) \quad (6.42)$$

$$R_i^{(1)} = \frac{1}{2}\chi_i^{-1}\hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1})a''(\xi_i(x))u(x)\varphi_i(x)$$

$$+\chi_i^{-1}h_i^{-1}a_{x,i} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)\varphi_i(x) \left(\int_{x_i}^{x} u'(s)ds \right) dx \quad (6.43)$$

şeklindedir. (6.29),(3.30), (6.33), (6.36), (6.37) ve (6.42) den

$$\chi_i^{-1}\hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (-\varepsilon^2 u''(x) + a(x)u(x))\varphi_i(x)dx$$

$$= -\varepsilon^2\psi_i u_i + \left(\chi_i^{-1}a_{x,i}\eta_i + a_i\right)u_i + R_i^{(1)} \quad (6.44)$$

elde edilir. (6.28)'in sağ tarafındaki terimi için de yukarıdakiyle benzer şekilde

$$\chi_i^{-1}\hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\varphi_i(x)dx = f_i + \chi_i^{-1}f_{x,i}\eta_i + R_i^{(2)} = \bar{f}_i + R_i^{(2)} \quad (6.45)$$

ifadesi elde edilir. Burada, $\bar{f}_i = f_i + \chi_i^{-1}f_{x,i}\beta_i$ ve kalan terimi

$$R_i^{(2)} = \frac{1}{2}\chi_i^{-1}\hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1})f''(\xi_i(x))\varphi_i(x)dx \quad (6.46)$$

şeklindedir. Şimdi, (6.28) bağıntısının sol tarafındaki üçüncü terimi ele alınsın. Çekirdek fonksiyonu olan $K_2(x,t)$ fonksiyonunu $x = x_i$ noktasında Taylor serisi açılımından

$$\lambda\chi_i^{-1}\hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) \left(\int_0^l K_2(x,t)u(t)dt \right) dx$$

$$= \lambda\chi_i^{-1}\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\varphi_i(x)dx\left(\int_0^l K_2(x_i,t)u(t)dt\right)$$

$$+\lambda\chi_i^{-1}\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}(x-x_i)\varphi_i(x)dx\left(\int_0^l \frac{\partial}{\partial x}K_2(x_i,t)u(t)dt\right)$$

$$+\frac{1}{2}\lambda\chi_i^{-1}\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}(x-x_i)^2\varphi_i(x)\,dx\left(\int_0^l \frac{\partial^2}{\partial x^2}K_2(\xi_i(x),t)u(t)dt\right)$$

$$= \lambda\int_0^l K_2(x_i,t)u(t)dt + \lambda\chi_i^{-1}\eta_i\int_0^l \frac{\partial}{\partial x}K_2(x_i,t)u(t)dt + R_i^{(3)} \tag{6.47}$$

elde edilir. Burada, hata terimi olan $R_i^{(3)}$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$R_i^{(3)} = \frac{1}{2}\lambda\chi_i^{-1}\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}(x-x_i)^2\varphi_i(x)\,dx\left(\int_0^l \frac{\partial^2}{\partial x^2}K_2(\xi_i(x),t)u(t)dt\right) \tag{6.48}$$

Şimdi (6.28)'in sol tarafındaki ikinci terim incelensin. Bu terime, (5.4) ile verilen interpolasyon kuadratür kuralı uygulandığında

$$\lambda\chi_i^{-1}\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\varphi_i(x)\left(\int_0^x K_1(x,t)u(t)dt\right)dx$$

$$= \lambda\chi_i^{-1}\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\varphi_i(x)dx\left(\int_0^{x_i} K_1(x_i,t)u(t)dt\right)$$

$$+\lambda\chi_i^{-1}\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}(x-x_i)\varphi_i(x)dx\left(\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x K_1(x_i,t)u(t)dt\right)$$

$$+\lambda\chi_i^{-1}\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}dx\varphi_i(x)\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\int_0^{\xi} K_1(\xi,t)u(t)dt\right)T_1(\xi-t)d\xi$$

$$= \lambda\int_0^{x_i} K_1(x_i,t)u(t)dt + \lambda\chi_i^{-1}\eta_i\left(\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x K_1(x_i,t)u(t)dt\right)$$

$$+\lambda\chi_i^{-1}\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}dx\varphi_i(x)\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\int_0^{\xi} K_1(\xi,t)u(t)dt\right)T_1(\xi-t)d\xi$$

$$\begin{aligned} &= \lambda\int_0^{x_i} K_1(x_i,t)u(t)dt + \lambda\chi_i^{-1}\eta_i\int_0^{x_i}\frac{\partial}{\partial x}K_1(x_i,t)u(t)dt \\ &\quad + \lambda\chi_i^{-1}\eta_i K_1(x_i,x_i)u(x_i) + R_i^{(4)} \end{aligned} \tag{6.49}$$

olur. Burada, hata terimi olan $R_i^{(4)}$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$R_i^{(4)} = \lambda \chi_i^{-1} \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dx \varphi_i(x) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\int_0^{\xi} K_1(\xi_i, t) u(t) dt \right) T_1(\xi - t) d\xi \quad (6.50)$$

şeklindedir. (6.47) ve (6.49) ifadelerinin toplamından

$$\begin{aligned} &\lambda \int_0^l K_2(x_i, t) u(t) dt + \lambda \chi_i^{-1} \eta_i \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} K_2(x_i, t) u(t) dt \\ &\qquad + \lambda \int_0^{x_i} K_1(x_i, t) u(t) dt + \lambda \chi_i^{-1} \eta_i \int_0^{x_i} \frac{\partial}{\partial x} K_1(x_i, t) u(t) dt \\ &\qquad + \lambda \chi_i^{-1} \eta_i K_1(x_i, x_i) u(x_i) + R_i^{(4)} + R_i^{(3)} \end{aligned} \quad (6.51)$$

ifadesi elde edilir. (6.51) ile bulunan ifadeye $k_1 = K_1(x_i, t) + \chi_i^{-1} \eta_i \frac{\partial}{\partial x} K_1(x_i, t)$ ve $k_2 = K_2(x_i, t) + \chi_i^{-1} \eta_i \frac{\partial}{\partial x} K_2(x_i, t)$ dönüşümleri uygulandığında

$$\begin{aligned} &\lambda \int_0^l k_2(x_i, t) u(t) dt + \lambda \int_0^{x_i} k_1(x_i, t) u(t) dt + \lambda \chi_i^{-1} \eta_i K_1(x_i, x_i) u(x_i) + R_i^{(3)} \\ &\qquad + R_i^{(4)} \end{aligned} \quad (6.52)$$

olur. (6.52)'nin ilk iki terimine (5.7) ile verilen yamuk kuralı uygulanarak

$$\lambda \int_0^{x_i} k_1(x_i, t) u(t) dt = \lambda \sum_{j=0}^{i} \hbar_j k_{1,ij} u_j + R_i^{(5)} \quad (6.53)$$

$$\lambda \int_0^{l} k_2(x_i, t) u(t) dt = \lambda \sum_{j=0}^{N} \hbar_j k_{2,ij} u_j + R_i^{(6)} \quad (6.54)$$

elde edilir. Burada, hata terimleri

$$R_i^{(5)} = \frac{1}{2}\lambda \sum_{j=1}^{i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(x_{j-1} - \xi) \frac{d^2}{d\xi^2}(k_1(x_i, \xi)u(\xi))\, d\xi \tag{6.55}$$

$$R_i^{(6)} = \frac{1}{2}\lambda \sum_{j=1}^{N} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(x_{j-1} - \xi) \frac{d^2}{d\xi^2}(k_2(x_i, \xi)u(\xi))\, d\xi \tag{6.56}$$

yukarıdaki şekilde tanımlanır. (6.52)'de (6.53) ve (6.54) yerlerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
&\lambda \chi_i^{-1} \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) \left(\int_0^x K_1(x,t)u(t)dt \right) dx \\
&+\lambda \chi_i^{-1} \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) \left(\int_0^l K_2(x,t)u(t)dt \right) dx = \lambda \sum_{j=0}^{i} \hbar_j k_{1,ij} u_j \\
&+\lambda \sum_{j=0}^{N} \hbar_j k_{2,ij} u_j + \lambda \chi_i^{-1} \eta_i K_1(x_i, x_i) u(x_i) + R_i^{(3)} + R_i^{(4)} + R_i^{(5)} + R_i^{(6)}
\end{aligned} \tag{6.57}$$

olarak bulunur. Son olarak, (6.2) sınır koşulu için $[0, l]$ üzerinde (5.7) ile verilen yamuk kuralı uygulandığında

$$\int_0^l g(x)u(x)dx = \sum_{j=0}^{N} \hbar_j g_j u_j + r \tag{6.58}$$

olarak bulunur. Burada kalan terim olan r,

$$r = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(x_{j-1} - \xi) \frac{d^2}{d\xi^2}(g(\xi)u(\xi))\, d\xi \tag{6.59}$$

şeklindedir. Buradan (7.2) sınır koşulu için

$$u(l) = \sum_{j=0}^{N} \hbar_j g_j u_j + B + r \tag{6.60}$$

eşitliği elde edilir. (6.44), (6.45), (6.57), (6.60) eşitliklerinden $1 \leq i \leq N$ için

$$L_N u_i := -\varepsilon^2 \psi_i u_i + \kappa_i u_i + \lambda \sum_{j=0}^{i} \hbar_j k_{1,ij} u_j + \lambda \sum_{j=0}^{N} \hbar_j k_{2,ij} u_j + R_i = \bar{f}_i \tag{6.61}$$

$$u_0 = A, \qquad u_N = \sum_{j=0}^{N} \hbar_j g_j u_j + B + r \tag{6.62}$$

olarak elde edilir. Burada hata terimleri ve κ_i katsayısı aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$R_i = \sum_{n=1}^{6} R_i^{(n)}, \qquad \kappa_i = \chi_i^{-1} a_{x,i} \eta_i + a_i + \lambda \chi_i^{-1} \eta_i K_1(x_i, x_i) \tag{6.63}$$

Buradaki kalan terimler, (6.43), (6.46), (6.48), (6.50), (6.55), (6.56), (6.59) ile verilmiştir. (6.61)-(6.62) kesin bağıntısındaki hata terimleri ihmal edilerek

$$L_N y_i := -\varepsilon^2 \psi_i y_i + \kappa_i y_i + \lambda \sum_{j=0}^{i} \hbar_j k_{1,ij} y_j + \lambda \sum_{j=0}^{N} \hbar_j k_{2,ij} y_j = \bar{f}_i \tag{6.64}$$

$$y_0 = A, \qquad y_N = \sum_{j=0}^{N} \hbar_j g_j y_j + B \tag{6.65}$$

fark yaklaşımı elde edilir.

6.3 Kararlılık ve Yakınsama

Hata fonksiyonu $z_i = y_i - u_i, i = \overline{0, N}$ aşağıdaki fark probleminin çözümüdür.

$$L_N z_i := -\varepsilon^2 \psi_i z_i + \kappa_i z_i + \lambda \sum_{j=0}^{i} \hbar_j k_{1,ij} z_j + \lambda \sum_{j=0}^{N} \hbar_j k_{2,ij} z_j = R_i \tag{6.66}$$

$$z_0 = 0, \qquad z_N = \sum_{j=0}^{N} \hbar_j g_j (y_i - u_i) - r \tag{6.67}$$

Lemma 6.3.1. $a, f \in C^2[0,l]$ ve $\frac{\partial^m K_1}{\partial x^m}, \frac{\partial^m K_1}{\partial x^m} \in C^2([0,l])^2, m = 0,1,2$ olmak üzere ve

$$\max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{N} \hbar_j |g_j| + \alpha^{-1} \left(|\lambda| \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{i} \hbar_j |K_{1,ij}| + |\lambda| \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{N} \hbar_j |K_{2,ij}| \right) < 1 \tag{6.68}$$

olduğunu kabul edelim. Bu varsayımlar altında (6.66)-(6.67) fark probleminin çözümü olan z aşağıdaki eşitsizliği sağlar:

$$\|z\|_{\infty,\bar{\omega}_N} \le C\left(\|R\|_{\infty,\omega_N} + |r|\right) \tag{6.69}$$

İspat. (6.66)-(6.67) fark problemine diskret maksimum prensibi uygulandığında

$$|z_i| \le |z_0| + |z_N| + \alpha^{-1} \max_{1\le i\le N} |R| + \alpha^{-1} |\lambda| \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{i} \hbar_j |K_{1,ij}| |z_j|$$
$$+ \alpha^{-1} |\lambda| \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{N} \hbar_j |K_{2,ij}| |z_j|$$

bulunur. (6.67) sınır koşulu için

$$|z_N| \le |r| + \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{N} \hbar_j |g_j| |z_j|$$

değerlendirmesi göz önünde bulundurularak

$$|z_i| \le |r| + \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{N} \hbar_j |g_j| \, |z_j| + \alpha^{-1} \max_{1\le i\le N} |R|$$

$$+ \alpha^{-1}|\lambda| \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{i} \hbar_j |K_{1,ij}| \, |z_j| + \alpha^{-1}|\lambda| \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{N} \hbar_j |K_{2,ij}| \, |z_j|$$

$$\le \alpha^{-1}\|R\|_\infty + \alpha^{-1}|\lambda| \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{i} \hbar_j |K_{1,ij}| \, \|z\|_{\infty,\omega_N}$$

$$+\alpha^{-1}|\lambda| \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{N} \hbar_j |K_{2,ij}| \, \|z\|_{\infty,\omega_N} + \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{N} \hbar_j |g_j| \, \|z\|_{\infty,\omega_N}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan,

$$\|z\|_{\infty,\bar{\omega}_N} \le |r| + \alpha^{-1}\|R\|_\infty + + \alpha^{-1}|\lambda| \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{i} \hbar_j |K_{1,ij}| \, \|z\|_{\infty,\omega_N}$$

$$+\alpha^{-1}|\lambda| \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{N} \hbar_j |K_{2,ij}| \, \|z\|_{\infty,\omega_N} + \alpha^{-1} \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{N} \hbar_j |g_j| \, \|z\|_{\infty,\omega_N} \qquad (6.70)$$

elde edilir. (6.70)'de (6.68)'i göz önünde bulundurularak,

$$\|z\|_{\infty,\bar{\omega}_N}$$

$$\le \frac{\alpha^{-1}\|R\|_{\infty,\omega_N} + |r|}{\left[1 - \alpha^{-1}\left(\max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{N} \hbar_j |g_j| + |\lambda| \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{i} \hbar_j |K_{1,ij}| + |\lambda| \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{N} \hbar_j |K_{2,ij}|\right)\right]} \qquad (6.71)$$

eşitsizlik değerlendirmesi elde edilir. (6.71) ile Lemma 6.3.1'in ispatı tamamlanmış olur.

Lemma 6.3.2. $a, f, g \in C^2[0,l]$ ve $\frac{\partial^m K_1}{\partial x^m}, \frac{\partial^m K_2}{\partial x^m}, \frac{\partial^{m+1} K_1}{\partial x \partial t^m}, \frac{\partial^{m+1} K_2}{\partial x \partial t^m} \in C^2[0,l], m = 0,1,2$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde,

$$\|R\|_{\infty,\omega_N} \le CN^{-2} lnN \qquad (6.72)$$

$$|r| \leq CN^{-2}lnN \tag{6.73}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. Hata analizini yapmak için R_i hata terimleri ve integral sınır şartından gelen r terimleri sırasıyla değerlendirilecektir. Bu değerlendirmede, yalnızca $\sigma = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\alpha}} lnN$ durumu göz önünde bulundurulacaktır. $\sigma = \frac{l}{4}$ için yukarıda yapılan değerlendirmelerle benzer olarak klasik yollarla değerlendirmeler yapılabilir. İlk olarak $R_i^{(1)}$ hata değerlendirmesi ile başlansın. $a \in C^2[0,l]$, $|x - x_i| \leq max(h_i, h_{i+1})$, $|x - x_{i+1}| \leq 2\hbar_i$, $h^{(1)}, h^{(2)}) \leq CN^{-1}$ ve $|u(x)| \leq C$ şartları göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned}
\left|R_i^{(1)}\right| &\leq \left|\frac{1}{2}\chi_i^{-1}\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}(x - x_i)(x - x_{i+1})a''(\xi_i(x))u(x)\varphi_i(x)dx \right.\\
&\quad \left. + \chi_i^{-1}h_i^{-1}a_{x,i}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}(x - x_i)\varphi_i(x)\left(\int_{x_i}^{x} u'(s)ds\right)dx\right| \\
&\leq C\{max(h_i, h_{i+1})\}^2 + C\,max(h_i, h_{i+1})\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}|u'(x)|dx \\
&\leq CN^{-2} + CN^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\frac{1}{\varepsilon}\left(\left\{e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}x} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}(l-x)}\right\}\right)dx
\end{aligned} \tag{6.74}$$

olur. Öncelikle, (6.74)'ün $[0,\sigma]$ aralığında değerlendirmesi ile başlanacaktır. Buradan aşağıdaki değerlendirme elde edilir:

$$\begin{aligned}
\left|R_i^{(1)}\right| &\leq CN^{-2} + CN^{-1}\frac{4h^{(1)}}{\varepsilon} = CN^{-2} + CN^{-1}4\left(\sqrt{\alpha}\right)^{-1}N^{-1}lnN \\
&\leq CN^{-2}lnN, i = \overline{1, N/4}
\end{aligned} \tag{6.75}$$

$[l - \sigma, l]$ aralığı için de yukarıdaki ile benzer şekildedir. $[\sigma, l - \sigma]$ aralığında $\frac{N}{4} + 1 \leq i \leq \frac{3N}{4} - 1$ için

$$\left|R_i^{(1)}\right| \leq CN^{-2} + CN^{-1}\left(\sqrt{\alpha}\right)^{-1}\left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}x_{i-1}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}x_{i+1}}\right)$$

$$+CN^{-2} + CN^{-1}\left(\sqrt{\alpha}\right)^{-1}\left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}(l-x_{i+1})} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}(l-x_{i-1})}\right)$$

$$\leq CN^{-2} + CN^{-1}\left(\left(\sqrt{\alpha}\right)^{-1}e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}x_{N/4}} + \left(\sqrt{\alpha}\right)^{-1}e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}(l-x_{3N/4})}\right) \quad (6.76)$$

şeklindedir. $i = N/4$ için değerlendirme yapıldığında

$$\left|R_i^{(1)}\right| \leq CN^{-2} + CN^{-1}\int_{x_{\frac{N}{4}-1}}^{x_{\frac{N}{4}+1}} \frac{1}{\varepsilon}\left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}x} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}(l-x)}\right)dx$$

$$= CN^{-2} + CN^{-1}\left(\sqrt{\alpha}\right)^{-1}\left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}\left(l-x_{\frac{N}{4}+1}\right)} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}\left(l-x_{\frac{N}{4}-1}\right)}\right)$$

$$\leq CN^{-2} + CN^{-1}\left(\sqrt{\alpha}\right)^{-1}\left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}x_{N/4}}e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}h^{(1)}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}\sigma}e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}(l-h^{(2)})}\right)$$

$$\leq CN^{-2} + CN^{-1}\left(\sqrt{\alpha}\right)^{-1}\left(e^{-\frac{4lnN}{N}}e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}x_{\frac{N}{4}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}\sigma}\right) \leq CN^{-2} \quad (6.77)$$

şeklinde bulunur. (6.77) değerlendirmesi $i = 3N/4$ için de geçerlidir. (6.74) ve (6.77) göz önünde bulundurulduğunda

$$\left|R_i^{(1)}\right| \leq CN^{-2}lnN, i = \overline{1, N-1} \quad (6.78)$$

olarak elde edilir. Daha sonra, $R_i^{(2)}$ hata değerlendirmesi yapılsın. $f \in C^2[0,l]$, $|x - x_i| \leq max(h_i, h_{i+1})$, $|x - x_{i+1}| \leq 2\hbar_i$, $h^{(1)}, h^{(2)}) \leq CN^{-1}$ ve $|u(x)| \leq C$ şartları göz önünde bulundurularak

$$\left|R_i^{(2)}\right| \leq C\chi_i^{-1}\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left|(x - x_i)\left((x - x_{i+1})\right)\right||\varphi_i(x)|dx$$

$$\leq Cmax\{h_i, h_{i+1}\}^2 \leq CN^{-2}, i = \overline{1, N-1} \quad (6.79)$$

elde edilir. $R_i^{(3)}$ hata değerlendirmesi için $|u(x)| \leq C$ve $\frac{\partial^2 K_2}{\partial x^2}$ sınırlılığı ile

$$\left|R_i^{(3)}\right| \leq \left|\frac{1}{2}\lambda\chi_i^{-1}\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}(x-x_i)^2\varphi_i(x)\,dx\left(\int_0^l \frac{\partial^2}{\partial x^2}K_2(\xi_i(x),t)u(t)dt\right)\right|$$
$$\leq Cmax\{h_i,h_{i+1}\}^2 \leq CN^{-2}, i=\overline{1,N-1} \tag{6.80}$$

elde edilir. $R_i^{(4)}$ hata değerlendirmesi için $|u(x)| \leq C$ve $\frac{\partial^2 K_1}{\partial x^2}$ sınırlılığı ile

$$\left|R_i^{(4)}\right|$$
$$\leq \left|\chi_i^{-1}\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}dx\varphi_i(x)\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\int_0^{\xi}K_1(\xi_i,t)u(t)dt\right)T_1(\xi-t)d\xi\right|$$
$$\leq Cmax\{h_i,h_{i+1}\}^2 \leq CN^{-2}, i=\overline{1,N-1} \tag{6.81}$$

elde edilir. $R_i^{(6)}$ hata değerlendirmesi için (7.5) göz önünde bulundurarak

$$\left|R_i^{(6)}\right| \leq \left|\frac{1}{2}\lambda\sum_{j=1}^{N}\int_{x_{j-1}}^{x_j}(x_j-\xi)(\xi-x_{j-1})\frac{d^2}{d\xi^2}\big(k_2(x_i,\xi)u(\xi)\big)\,d\xi\right|$$
$$\leq C\sum_{j=1}^{N}\int_{x_{j-1}}^{x_j}(x_j-\xi)(\xi-x_{j-1})(1+|u'(\xi)|+|u''(\xi)|)\,d\xi$$
$$\leq C\sum_{j=1}^{N}h_j^3+\sum_{j=1}^{N}\int_{x_{j-1}}^{x_j}(x_j-\xi)(\xi-x_{j-1})\frac{1}{\varepsilon}\left(\left\{e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}x}+e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}(l-x)}\right\}\right)d\xi \tag{6.82}$$

elde edilir. (6.82)’nin ilk terimi ele alınsın. Buradan

$$\sum_{j=1}^{N}h_j^3=\frac{N}{2}\left|h^{(1)}\right|^3+\frac{N}{2}\left|h^{(2)}\right|^3 \leq CN^{-2} \tag{6.83}$$

olur ve (6.82)’nin ikinci terimi

$$\sum_{j=1}^{N}\int_{x_{j-1}}^{x_j}(x_j-\xi)(\xi-x_{j-1})\frac{1}{\varepsilon}\left(\left\{e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}x}+e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}(l-x)}\right\}\right)d\xi$$

$$=\sum_{j=1}^{N/4}\int_{x_{j-1}}^{x_j}(x_j-\xi)(\xi-x_{j-1})\frac{1}{\varepsilon}\left(\left\{e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}x}+e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}(l-x)}\right\}\right)d\xi$$

$$+\sum_{j=\frac{N}{4}+1}^{3N/4}\int_{x_{j-1}}^{x_j}(x_j-\xi)(\xi-x_{j-1})\frac{1}{\varepsilon}\left(\left\{e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}x}+e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}(l-x)}\right\}\right)d\xi$$

$$+\sum_{j=\frac{3N}{4}+1}^{N}\int_{x_{j-1}}^{x_j}(x_j-\xi)(\xi-x_{j-1})\frac{1}{\varepsilon}\left(\left\{e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}x}+e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}(l-x)}\right\}\right)d\xi \qquad (6.84)$$

şeklinde yazılabilir. (6.84)'ün sağ tarafındaki ilk terim için değerlendirme yapılsın:

$$\sum_{j=1}^{N/4}\int_{x_{j-1}}^{x_j}(x_j-\xi)(\xi-x_{j-1})\frac{1}{\varepsilon}\left(\left\{e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}x}+e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}(l-x)}\right\}\right)d\xi$$

$$\leq\left|h^{(1)}\right|^2\int_0^{\sigma}\frac{1}{\varepsilon}\left(\left\{e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}\xi}+e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}(l-\xi)}\right\}d\xi\right)\leq\left|h^{(1)}\right|^2\frac{2\left(\sqrt{\alpha}\right)^{-1}}{\varepsilon}\leq CN^{-2}lnN \qquad (6.85)$$

(6.84)'ün sağ tarafındaki ikinci terim için de yapılan değerlendirme (6.85) ile benzer şekildedir. Son olarak (6.84)'ün sağ tarafındaki ikinci terim ele alınsın:

$$\sum_{j=\frac{N}{4}+1}^{3N/4}\int_{x_{j-1}}^{x_j}(x_j-\xi)(\xi-x_{j-1})\frac{1}{\varepsilon}\left(\left\{e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}x}+e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}(l-x)}\right\}\right)d\xi$$

$$=2\left(\sqrt{\alpha}\right)^{-1}\sum_{j=\frac{N}{4}+1}^{3N/4}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\left(x_j-\xi-\frac{h^{(2)}}{2}\right)\frac{1}{\varepsilon}\left(\left\{e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}x}+e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}(l-x)}\right\}\right)d\xi$$

$$\leq 2\left(\sqrt{\alpha}\right)^{-1}h^{(2)}\int_{\sigma}^{l-\sigma}\frac{1}{\varepsilon}\left(\left\{e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}\xi}+e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}(l-\xi)}\right\}d\xi\right)$$

$$=4\left(\sqrt{\alpha}\right)^{-2}h^{(2)}\left\{e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}\sigma}+e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}(l-\sigma)}\right\}\leq 4\left(\sqrt{\alpha}\right)^{-2}h^{(2)}N^{-1}\leq CN^{-2} \qquad (6.86)$$

(6.83)-(6.86) göz önünde bulundurarak

$$R_i^{(6)} \leq CN^{-2}lnN, i=\overline{1,N-1} \tag{6.87}$$

şeklinde bulunur. (6.87) ile benzer olarak

$$R_i^{(5)} \leq CN^{-2}lnN, i=\overline{1,N-1} \tag{6.88}$$

şeklinde bulunur. Son olarak integral sınır şartından gelen hata teriminden

$$\begin{aligned}
|r| &\leq C\sum_{j=1}^{N}\int_{x_{j-1}}^{x_j}(x_j-\xi)(\xi-x_{j-1})(1+|u'(\xi)|+|u''(\xi)|)\,d\xi \\
&\leq C\left(\sum_{j=1}^{N}h_j^3+\sum_{j=1}^{N}\int_{x_{j-1}}^{x_j}(x_j-\xi)(x_{j-1}-\xi)\frac{1}{\varepsilon}\left\{e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}\xi}+e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}(l-\xi)}\right\}d\xi\right) \\
&\leq CN^{-2}lnN
\end{aligned} \tag{6.89}$$

şeklinde bulunur. (6.78), (6.79), (6.80),(6.81), (6.87), (6.88) göz önünde bulundurularak (6.72)'nin ispatı tamamlanmış olur. Böylece Lemma 6.3 2 nin ispatı tamamlanmış olur. Lemma 6.3.1 ve Lemma 6.3.2 göz önünde bulundurulduğunda aşağıdaki yakınsaklık sonucu elde edilir.

Teorem 6.3.3. u fonksiyonu (6.1)-(6.2) probleminin çözümü ve y fonksiyonu ise (6.64)-(6.65) problemlerinin çözümü olmak üzere

$$\|y-u\|_{\infty,\omega_N} \leq CN^{-2}lnN \tag{6.90}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Bu teoremin ispatı Lemma 6.3.1 ve Lemma 6.3.2 göz önünde bulundurulduğunda açıktır.

6.4 Algoritma ve Nümerik Örnekler

(6.1)-(6.2) problemin için (5.10)'da verilen kovma (faktörizasyon) metodu uygulandığında A_i, B_i, C_i katsayıları aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$-A_i y_{i-1}^{(n)} + C_i y_i^{(n)} - B_i y_{i+1}^{(n)} = F_i^{(n)}$$
$$A_i = \frac{\varepsilon^2 \tau_i^{(1)}}{h_i \hbar_i}, B_i = \frac{\varepsilon^2 \tau_i^{(2)}}{h_{i+1} \hbar_i}, C_i = \frac{\varepsilon^2 \tau_i^{(1)}}{h_i \hbar_i} + \frac{\varepsilon^2 \tau_i^{(2)}}{h_{i+1} \hbar_i} - \bar{a}_i$$

Burada

$$\bar{a}_i = \chi_i^{-1} a_{x,i} \beta_i + a_i + \lambda \chi_i^{-1} \eta_i K_1(x_i, x_i)$$

şeklindedir. Ayrıca $F_i^{(n)}, \alpha_1, \alpha_{i+1}, \beta_1, \beta_{i+1}$ ise aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

$$F_i^{(n)} = \bar{f}_i - \lambda \sum_{j=0}^{i} \hbar_j k_{1,ij} y_j^{(n)} - \lambda \sum_{j=0}^{N} \hbar_j k_{2,ij} y_j^{(n)}$$
$$\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \qquad \beta_1 = 0, \qquad \beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i - F_i^{(n)}}{C_i - \alpha_i A_i}, i = \overline{1, N-1}$$

Buradan

$$y_i^{(n)} = \alpha_{i+1} y_{i+1}^{(n)} + \beta_{i+1}^{(n)}, \qquad i = \overline{N-1,1}$$

elde edilir.

Örnek 6.4.1. İlk olarak aşağıdaki test problemini ele alınsın. $0 < x < 1$ olmak üzere

$$-\varepsilon^2 u''^{(x)} + (2 - e^{-x})u(x) + \int_0^x \left(e^{-\sin(\pi x t)}\right)u(t)dt + \int_0^1 \left(e^{-x\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)}\right)u(t)dt$$
$$= \frac{1}{1+x^2} + \varepsilon x(\varepsilon - x) - 2$$
$$u(0) = 0, \qquad u(1) = 2 + \int_0^1 \sinh(x)u(x)dx$$

probleminin kesin çözümü bilinmemektedir. Bu yüzden, hata ve yakınsaklık analizi çift şebeke metodu kullanılarak elde edilir. Burada maksimum hata terimi ve hesaplanan hata terimi

$$e_\varepsilon^N = \max_{\omega_N}\left|y_i^{\varepsilon,N} - \tilde{y}_i^{\varepsilon,2N}\right|, \qquad e^N = \max_{\varepsilon} e_\varepsilon^N$$

şeklindedir. Yaklaşık çözüm olan $\tilde{y}_i^{\varepsilon,2N}$

$$\widetilde{\omega}_{2N} = \left\{\frac{x_i}{2} : i = \overline{0,2N}, \qquad x_{i+1/2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right\}$$

şebekesi üzerinde tanımlıdır. Burada yakınsaklık oranı ve hesaplanan ε'a göre düzgün yakınsaklık oranı aşağıdaki şekilde verilmektedir:

$$p^N = \frac{ln(e^N/e^{2N})}{ln2}, \qquad p^{\varepsilon,N} = \frac{ln(e_\varepsilon^N/e_\varepsilon^{2N})}{ln2}$$

Bu nümerik örnek için bulunan değerler Çizelge 6.1'de verilmiştir.

Çizelge 6.1 ε-düzgün yakınsama hızı p^N ve ε'a göre hesaplanmış maksimum hata e^N

ε	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$	$N = 1024$	$N = 2048$
2^{-8}	0.0492095	0.0125539	0.0056537	0.0014728	0.000356
	1.9708	1.1509	1.9405	2.0459	
2^{-9}	0.1236640	0.0260548	0.0063126	0.0016325	0.0003844
	2.2465	2.0452	1.9511	2.0862	
2^{-10}	0.2616609	0.0646812	0.0134564	0.0031649	0.0007484
	2.0162	2.2651	2.0880	2.0803	

Çizelge 6.2 ε-düzgün yakınsama hızı p^N ve ε'a göre hesaplanmış maksimum hata e^N (devam)

2^{-11}	0.4834287	0.1396993	0.0331405	0.0068482	0.0016771
	1.7909	2.0757	2.2749	2.0297	
2^{-12}	0.7788200	0.2734518	0.0722949	0.0167866	0.0042557
	1.5100	1.9193	2.1066	1.9798	
2^{-13}	0.9648169	0.4460292	0.1331502	0.0335508	0.0081456
	1.1131	1.7441	1.9886	2.0422	
2^{-14}	1.1729339	0.7767388	0.2605869	0.0787415	0.0225647
	0.5946	1.5757	1.7266	1.8031	
e^N	1.1729339	0.7767388	0.2605869	0.0787415	0.0225647
p^N	2.2465	2.2651	2.2749	2.0862	

Örnek 6.4.2. $0 < x < 1$ olmak üzere

$$-\varepsilon^2 u''(x) + (3 - e^{-x})u(x) + \frac{1}{2}\int_0^x \left(te^{-\sin(\pi x)}\right)u(t)dt + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-t\sin\left(\frac{\pi x}{8}\right)}u(t)dt$$
$$= \sin(\pi x) + \varepsilon^2 x - 2$$
$$u(0) = 0, \qquad u(1) = 1 + \int_0^1 \sin(\pi x)u(x)dx$$

test problemi ele alınsın. Bu problemin kesin çözümü bilinmemektedir. Bu yüzden hata ve yakınsaklık analizini çift şebeke metodu kullanılarak elde edilir. Burada hata terimi

$$e_\varepsilon^N = \max_{\omega_N}\left|y_i^{\varepsilon,N} - \tilde{y}_i^{\varepsilon,2N}\right|$$

yaklaşık çözüm olan $\tilde{y}_i^{\varepsilon,2N}$

$$e_\varepsilon^N = \max_{\omega_N}\left|y_i^{\varepsilon,N} - \tilde{y}_i^{\varepsilon,2N}\right|, \qquad e^N = \max_{\varepsilon} e_\varepsilon^N$$

yaklaşık çözüm olan $\tilde{y}_i^{\varepsilon,2N}$

$$\widetilde{\omega}_{2N} = \left\{\frac{x_i}{2} : i = \overline{0,2N}, \qquad x_{i+1/2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right\}$$

şebekesi üzerinde tanımlıdır. Burada ε- düzgün yakınsaklık oranı

$$p^N = \frac{ln(e^N/e^{2N})}{ln2}$$

şeklindedir. Bu nümerik örnek için bulunan değerler Çizelge 6.2'de verilmiştir.

Çizelge 6.3 ε-düzgün yakınsama hızı p^N ve ε a göre hesaplanmış maksimum hata e^N

ε	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$	$N = 1024$	$N = 2048$
2^{-8}	0.0319050	0.0066512	0.0014431	0.0003857	0.0000956
	2.2620	2.2044	1.9036	2.0114	
2^{-9}	0.0751449	0.0170675	0.0035360	0.0009749	0.0002613
	2.1384	2.2710	1.8587	1.8995	
2^{-10}	0.1492903	0.0400132	0.0088647	0.0018298	0.0003725
	1.8995	2.1743	2.2763	2.2963	
2^{-11}	0.2597135	0.0822757	0.0206999	0.0045262	0.0011806
	1.6583	1.9908	2.1932	1.9387	
2^{-12}	0.3874135	0.1546916	0.0433296	0.0105416	0.0024966
	1.3244	1.8360	2.0393	2.0780	
2^{-13}	0.4783126	0.2625138	0.0851232	0.0222553	0.0057882
	0.8655	1.6248	1.9354	1.9429	
2^{-14}	0.4775257	0.3874883	0.1566577	0.0447501	0.0120980
	0.3014	1.3065	1.8077	1.8871	
e^N	0.4783126	0.3874883	0.0851232	0.0447501	0.0225647
p^N	2.2620	2.2710	2.2763	2.2963	

6.5 Sonuç

Bu bölümde singüler pertürbe olmuş integral sınır şartlı reaksiyon-difüzyon tipte Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklem ele alınmıştır. İlk olarak asimptotik değerlendirmeleri yapmak için maksimum prensibi, diferansiyelleme formülü kullanılmıştır. Daha sonra hiperbolik baz fonksiyonu yardımı ve kalan terimi integral formda olan interpolasyon kuadratür kuralları kullanılarak Shishkin şebeke üzerinde uygun fark şeması kurulmuştur. Hata analizi ve hatanın kararlılığı incelenmiştir. Son olarak teorik sonuçları destekleyen nümerik örnekler yardımıyla önerilen metodun $O(h^2)$ mertebeden bir yakınsaklığa sahip olduğu gösterilmiştir.

7. İNTEGRAL SINIR ŞARTLI SİNGÜLER PERTÜRBE OLMUŞ KONVEKSİYON-DİFÜZYON TİPTE VOLTERRA-FREDHOLM İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEM

Bu bölümde integral sınır şartlı singüler pertürbe konveksiyon-difüzyon tipte Volterra-Fredholm integro diferansiyel denklemi ele alınacaktır:

$$Lu \coloneqq L_3 u + \lambda \int_0^x K_1(x,t)u(t)dt + \lambda \int_0^l K_2(x,t)u(t)dt = f(x), \qquad (7.1)$$

$$u(0) = A, \qquad u(l) = \int_0^l g(x)u(x)dx + B \qquad (7.2)$$

Burada $x \in (0,l]$, $L_3 u = \varepsilon u''(x) + a(x)u'(x)$, $0 < \varepsilon \ll 1$ pertürbasyon parametresi, λ ve A verilmiş sabitler, $a(x) \geq \alpha > 0$, $g(x)$, $f(x)$ fonksiyonları $x \in [0,l]$ aralığı üzerinde, $K_1(x,t)$, $K_2(x,t)$, fonksiyonları $(x,t) \in [0,l]^2$ bölgesi üzerinde yeterince düzgün fonksiyonlardır. Bu şartlar altında (7.1)-(7.2) ile verilen problemin çözümü var ve tektir. $u(x)$ çözümü $x = 0$ noktası civarında bir sınır katına sahiptir.

7.1 Kesin Çözüm ve Özellikleri

Bu bölümde nümerik metot kurulmadan önce (7.1)-(7.2) ile verilen problemin kesin çözümü ve türevleri ile ilgili bazı değerlendirmeler yapılacaktır. Bu değerlendirmeler uygun nümerik metot kurulurken kullanılacaktır.

Lemma 7.1.1. $a, f, g \in C^2[0,l]$ ve $\frac{\partial^m K_1}{\partial x^m}, \frac{\partial^m K_2}{\partial x^m} \in C^2[0,l], m = 0,1,2$ ve

$$\alpha^{-1}\left(\max_{0\leq x\leq l}\int_0^x |g(x))|dx + |\lambda| \max_{0\leq x\leq l}\int_0^x |K_1(x,t)|dt \right. \\ \left. + |\lambda| \max_{0\leq x\leq l}\int_0^l |K_2(x,t)|dt\right) < 1 \qquad (7.3)$$

olduğunu kabul edelim. Bu varsayımlar altında (7.1)-(7.2) probleminin çözümü olan $u(x)$ aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar.

$$\|u\|_{\infty} \leq C_0 \tag{7.4}$$

$$\left|u^{(k)}(x)\right| \leq C\left\{1+\varepsilon^{-k}e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}\right\}, x \in [0,l], k=1,2 \tag{7.5}$$

Burada

$$C_0 = \frac{(|A|+|B|+\alpha^{-1}\|f\|_{\infty})}{1-\alpha^{-1}\left(\max\limits_{0\leq x\leq l}\int_0^x |g(x))|dx+|\lambda|\max\limits_{0\leq x\leq l}\int_0^x |K_1(x,t)|dt+|\lambda|\max\limits_{0\leq x\leq l}\int_0^l |K_2(x,t)|dt\right)}$$

formundadır.

İspat. (7.1) aşağıdaki şekilde yeniden yazıldığında

$$\varepsilon u''(x)+a(x)u'(x)=F(x) \tag{7.6}$$

elde edilir. Burada

$$F(x)=f(x)-\lambda\int_0^x K_1(x,t)u(t)dt-\lambda\int_0^l K_2(x,t)u(t)dt$$

şeklindedir. (7.6)'da $w(x)=u'(x)$ dönüşümü yapıldığında

$$\varepsilon w'(x)+a(x)w(x)=F(x) \tag{7.7}$$

elde edilir. (7.7) lineer başlangıç değer probleminin çözümü aşağıdaki şekildedir.

$$w(x) = w(0)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\eta)d\eta} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x F(\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^x a(\eta)d\eta}d\tau$$

elde edilir. Buradan

$$u'(x) = u'(0)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\eta)d\eta} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x F(\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^x a(\eta)d\eta}d\tau \tag{7.8}$$

olarak bulunur. (7.8)'in her iki tarafının $(0, x)$ aralığında integrali alınırsa

$$u(x) = u(0) + u'(0)\int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\xi a(\eta)d\eta}\, d\xi + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x d\xi \int_0^\xi F(\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^\xi a(\eta)d\eta}d\tau \tag{7.9}$$

olur. (7.9)'da, $x = l$ için (7.2) sınır şartları göz önünde bulundurularak

$$u'(0) = \frac{\int_0^l g(x)u(x)dx + B - A - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^l d\xi \int_0^\xi F(\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^\xi a(\eta)d\eta}d\tau}{\int_0^l e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\xi a(\eta)d\eta}\, d\xi} \tag{7.10}$$

olur ve buradan

$$u'(0) = \frac{\int_0^l g(x)u(x)dx + B - A - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^l d\tau F(\tau)\int_\tau^l e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^\xi a(\eta)d\eta}d\xi}{\int_0^l e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\xi a(\eta)d\eta}\, d\xi} \tag{7.11}$$

şeklinde yazılır. (7.9) ve (7.11) beraber göz önünde bulundurulduğunda

$$\begin{aligned} u(x) &= A \\ &+ \left(\frac{\int_0^l g(x)u(x)dx + B - A - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^l d\tau F(\tau)\int_\tau^l e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^\xi a(\eta)d\eta}d\xi}{\int_0^l e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\xi a(\eta)d\eta}\, d\xi}\right)\int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\xi a(\eta)d\eta}\, d\xi \\ &+ \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x d\xi \int_0^\xi F(\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^\xi a(\eta)d\eta}d\tau \end{aligned} \tag{7.12}$$

şeklinde yazılır. (7.4)’ün ispatında (7.12)’ye alternatif olarak uygun Green fonksiyonunu kullanacağız. Burada,

$$L^{*}v := \varepsilon v''(x) + a(x)v'(x) = F(x)$$

olarak alınsın. Ayrıca, $F(x)$ aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

$$F(x) = f(x) - \lambda \int_0^x K_1(x,t)u(t)dt - \lambda \int_0^l K_2(x,t)u(t)dt$$

Buradan,

$$G(x,\tau) = \frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^l e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^\xi a(\eta)d\eta}\, d\xi \,\frac{\int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s a(\eta)d\eta}\, ds}{\int_0^l e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\xi a(\eta)d\eta}\, d\xi}$$
$$-\frac{1}{\varepsilon}T_0(x-\tau)\int_\tau^x e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^\xi a(\eta)d\eta}\, d\xi$$
$$T_0(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \geq 0 \\ 0, & \lambda < 0 \end{cases} \qquad (7.13)$$

kullanılarak (7.12)

$$u(x) = A\left\{1 - \frac{\int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\xi a(\eta)d\eta}\, d\xi}{\int_0^l e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\xi a(\eta)d\eta}\, d\xi}\right\}$$
$$+\left(\int_0^l g(x)u(x)dx + B\right)\frac{\int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\xi a(\eta)d\eta}\, d\xi}{\int_0^l e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\xi a(\eta)d\eta}\, d\xi} + \int_0^l G(x,\tau)F(\tau)d\tau \qquad (7.14)$$

şeklinde yazılır. (7.13) ile verilen Green fonksiyonu (5.14) te verildiği şekilde yeniden yazılınca

$$G(x,\tau)$$
$$=\frac{1}{\varepsilon}\begin{cases}\dfrac{\int_0^\tau e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\xi a(\eta)d\eta}\,d\xi}{e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau a(\eta)d\eta}}\left(1-\dfrac{\int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s a(\eta)d\eta}\,ds}{\int_0^l e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\xi a(\eta)d\eta}\,d\xi}\right), 0\le\xi\le x\le l\\ \dfrac{\int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s a(\eta)d\eta}\,ds}{e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau a(\eta)d\eta}}\left(1-\dfrac{\int_0^\tau e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\xi a(\eta)d\eta}\,d\xi}{\int_0^l e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\xi a(\eta)d\eta}\,d\xi}\right), 0\le x\le\xi\le l\end{cases} \tag{7.15}$$

olarak elde edilir. $G(x,\tau)\ge 0$ olduğu, (7.15)’de açıkça görülür. (7.13)’de ise $\max_{x\in\Omega} G(x,\tau)\le\alpha^{-1}$ olduğu görülür. (7.14)’ten elde edilen veriler göz önünde bulundurularak ve (Çakır, 2016) ile benzer şekilde

$$|v(x)|\le|A|+|B|+\int_0^l|G(x,\tau)||F(\tau)|d\tau$$

göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned}|u(x)|&\le|A|+|B|+\alpha^{-1}\max_{0\le x\le l}\int_0^l|g(x)||u(x)|dx+\int_0^l|G(x,\tau)||F(\tau)|d\tau\\ &\le|A|+|B|+\alpha^{-1}\max_{0\le x\le l}\int_0^l|g(x)||u(x)|dx+\max_{x\in\Omega}G(x,\tau)\int_0^l|F(\tau)|d\tau\\ &\le|A|+|B|+\alpha^{-1}\max_{0\le x\le l}\int_0^l|g(x)||u(x)|dx+\alpha^{-1}\int_0^l|F(\tau)|d\tau\\ &\le|A|+|B|+\alpha^{-1}\max_{0\le x\le l}\int_0^l|g(x)||u(x)|dx+\alpha^{-1}\max_{0\le x\le l}|f|\\ &\quad+\alpha^{-1}|\lambda|\max_{0\le x\le l}\int_0^x|K_1(x,t)||u(t)|dt+\alpha^{-1}|\lambda|\max_{0\le x\le l}\int_0^l|K_2(x,t)||u(t)|dt\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}\|u\|_\infty&\le|A|+|B|+\alpha^{-1}\|f\|_\infty+\alpha^{-1}\|u\|_\infty\max_{0\le x\le l}\int_0^l|g(x)|dx\\ &\quad+\alpha^{-1}\|u\|_\infty|\lambda|\max_{0\le x\le l}\int_0^x|K_1(x,t)|dt+\alpha^{-1}\|u\|_\infty|\lambda|\max_{0\le x\le l}\int_0^l|K_2(x,t)|dt\end{aligned} \tag{7.16}$$

olur. (7.16)'dan aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\|u\|_\infty \leq \frac{|A| + |B| + \alpha^{-1}\|f\|_\infty}{\left(1 - \alpha^{-1}\left(\max\limits_{0\le x\le l}\int_0^l |g(x)|dx + |\lambda| \max\limits_{0\le x\le l}\int_0^x |K_1(x,t)|dt + |\lambda| \max\limits_{0\le x\le l}\int_0^l |K_2(x,t)|dt\right)\right)}$$

Buradan (7.4)'ün ispatı tamamlanmış olur. $u'(x)$ değerlendirmesi ile devam edilsin. Bunun için (7.8)'in [0,l] aralığında integrali alınarak

$$\int_0^l u'(x)dx = u'(0)\int_0^l e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\eta)d\eta}dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^l \int_0^x F(\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^x a(\eta)d\eta}d\tau\, dx$$

$$\int_0^l g(x)u(x)dx + B - A = u'(0)\int_0^l e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\eta)d\eta}dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^l \int_0^x F(\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^x a(\eta)d\eta}d\tau\, dx$$

olarak hesaplanır. Buradan,

$$u'(0) = \frac{\int_0^l g(x)u(x)dx + B - A - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^l \int_0^x F(\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^x a(\eta)d\eta}d\tau\, dx}{\int_0^l e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\eta)d\eta}dx} \qquad (7.17)$$

olarak bulunur. İlk olarak (7.17)'nin pay ve payda kısmındaki gerekli değerlendirmeler yapılsın. $a^* = \|a\|_\infty$, $a(x) \geq \alpha > 0$, $|K_1(x,t)| < C$, $|K_2(x,t)| < C$ ve (7.4) şartları göz önünde bulundurularak

$$\int_0^l e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\xi a(\eta)d\eta}d\xi \geq \int_0^l e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\xi a^* d\eta}d\xi = \int_0^l e^{-\frac{1}{\varepsilon}a^*\xi}d\xi \geq \frac{\varepsilon}{a^*}\left(1 - e^{-a^* l}\right)$$
$$\geq c_1\varepsilon \qquad (7.18)$$

ve

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^l d\tau F(\tau)\int_\tau^l e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^\xi a(\eta)d\eta}\,d\xi \le \frac{1}{\varepsilon}\int_0^l d\tau|F(\tau)|\int_\tau^l e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^\xi \alpha d\eta}\,d\xi$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon}\int_0^l d\tau|F(\tau)|\int_\tau^l e^{-\frac{1}{\varepsilon}(\xi-\tau)}\,d\xi \le \frac{1}{\varepsilon}\int_0^l d\tau|F(\tau)|\,\alpha^{-1}\varepsilon\left(1-e^{\frac{-\alpha(l-\tau)}{\varepsilon}}\right)$$

$$\le \alpha^{-1}\int_0^l |F(\tau)|\,d\tau \le \alpha^{-1}\|f\|_\infty + \alpha^{-1}\|u\|_\infty|\lambda|\max_{0\le x\le l}\int_0^x |K_1(x,t)|dt$$

$$+\alpha^{-1}\|u\|_\infty|\lambda|\max_{0\le x\le l}\int_0^l |K_2(x,t)|dt \le c_2 \tag{7.19}$$

olarak elde edilir. Sınır şartının da ele alınmasıyla

$$\int_0^l g(x)u(x)dx \le \int_0^l |g(x)||u(x)|dx \le \alpha^{-1}\|u\|_\infty \max_{0\le x\le l}\int_0^l |g(x)|dx \le c_3 \tag{7.20}$$

olur. (7.18), (7.19) ve (7.20) eşitsizlikleri (8.17)'de göz önünde bulundurulduğunda

$$u'(0) \le \frac{|A|+|B|+c_1+c_2+c_3}{c_1\varepsilon} \le \frac{C}{\varepsilon} \tag{7.21}$$

şeklinde elde edilir. (7.8)'de (7.19) ve (7.21) bağıntıları değerlendirildiğinde

$$u'(x) \le \frac{C}{\varepsilon}e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} + C = C\left\{1+\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}\right\} \tag{7.22}$$

olarak bulunur. $u''(x)$ değerlendirmesi için (7.6) bağıntısı bir kere türetilirse

$$\varepsilon u'''(x) + a'(x)u'(x) + a(x)u''(x) = F'(x) \tag{7.23}$$

şeklinde elde edilir. (7.23)'de $u''(x) = w(x)$ dönüşümü yapılırsa

$$\varepsilon w'(x) + a(x)w(x) = F^*(x) \tag{7.24}$$

denklemi bulunur. Burada,

$$F^*(x) = -a'(x)u'(x) + f'(x) - \lambda \frac{\partial}{\partial x}\int_0^x K_1(x,t)u(t)dt$$
$$- \lambda \frac{\partial}{\partial x}\int_0^l K_2(x,t)u(t)dt \tag{7.25}$$

olarak tanımlanmıştır. (7.24) lineer başlangıç değer probleminin çözümü aşağıdaki şekildedir:

$$u''(x) = u''(0)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\eta)d\eta} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x F^*(\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^x a(\eta)d\eta}d\tau \tag{7.26}$$

Buradan

$$u''(x) \leq |u''(0)|e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\eta)d\eta} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x |F^*(\tau)|e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^x a(\eta)d\eta}d\tau \tag{7.27}$$

olur. (7.27) değerlendirmesi için ilk olarak (7.6)'da $x = 0$ için

$$\varepsilon u''(0) + a(0)u'(0) = f(0) - \lambda\int_0^0 K_1(0,t)u(t)dt - \lambda\int_0^l K_2(0,t)u(t)dt$$

olarak elde ederiz. Buradan

$$|u''(0)| \leq \frac{1}{\varepsilon}\left[|a(0)||u'(0)| + |f(0)| + |\lambda|\int_0^l |K_2(0,t)||u(t)|dt\right]$$
$$\leq \frac{|f(0)| + \frac{C}{\varepsilon}|a(0)| + +\alpha^{-1}\|u\|_\infty |\lambda| \max_{0\leq x\leq l}\int_0^l |K_2(0,t)|dt}{\varepsilon} \leq \frac{C}{\varepsilon^2} \tag{7.28}$$

elde edilir. İkinci olarak, (7.25) teriminin değerlendirmesi ile devam edilsin:

$$|F^*(x)| \leq |f'(x)| + |a'(x)||u'(x)| + |\lambda|\int_0^x \frac{\partial}{\partial x}|K_1(x,t)||u(t)|dt$$

$$+|\lambda||K_1(x,x)||u(x)| + |\lambda|\int_0^l \frac{\partial}{\partial x}|K_2(x,t)||u(t)|dt \le C\{1+|u'(x)|\} \qquad (7.29)$$

olarak elde edilir. (7.27)’de, (7.28) ve (7.29) göz önünde bulundurulunca

$$\begin{aligned}|u''(x)| &\le |u''(0)|e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\eta)d\eta} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x |F^*(\tau)|e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^x a(\eta)d\eta}d\tau \\ &\le \frac{C}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x C\{1+|u'(\tau)|\}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^x a(\eta)d\eta}d\tau \\ &\le \frac{C}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x C\left\{1+\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{\alpha\tau}{\varepsilon}}\right\}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^x a(\eta)d\eta}d\tau \le C\left\{1+\frac{1}{\varepsilon^2}e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}\right\} \qquad (7.30)\end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece (7.5)’in ispatı yapılarak Lemma 7.1 1’in ispatı tamamlanmış olur.

7.2 Şebeke ve Fark Şeması

Bu bölümde, (7.1)-(7.2) ile verilen problem için düzgün olmayan şebeke üzerinde fark şeması kurulacaktır. $[0,l]$ aralığı üzerinde tanımlı olan şebeke

$$\omega_N = \{0 < x_1 < x_2 < \cdots x_{N-1} < l, \qquad h_i = x_i - x_{i-1}, \qquad i = \overline{1,N}\}$$

şeklindedir $\overline{\omega}_N = \omega_N \cup \{x_0 = 0, x_N = l\}$, $\hbar_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}$ dir. $[0,l]$ aralığı N pozitif ve ikiye tam bölünebilen bir tamsayı olması koşulu ile $[0,\sigma]$ ve $[\sigma,l]$ şeklinde iki alt aralığa bölünür. Burada, şebekenin ince ve kaba kısımlarını ayıran σ geçiş noktası

$$\sigma = min\left\{\frac{l}{2}, \alpha^{-1}\varepsilon lnN\right\}$$

ile tanımlıdır. Şebeke $[0,\sigma]$ aralığında ince $[\sigma,l]$ aralığında ise kabadır. Ayrıca düğüm noktaları olan x_i ler ise

$$x_i = \begin{cases} x_i = ih^{(1)}, & i = \overline{0, \frac{N}{2}} \\ \sigma + (i - N/2)h^{(2)}, & i = \overline{\frac{N}{2} + 1, N} \end{cases}$$

formundadır. Burada $h^{(1)} = \frac{2\sigma}{N}, h^{(2)} = \frac{2(l-\sigma)}{N}$ ve $h_i = x_i - x_{i-1}, i = \overline{1, N}$ ile tanımlıdır. $\bar{\omega}_N$ üzerinde tanımlı herhangi bir $v(x)$ şebeke fonksiyonu için $v_i = v(x_i)$, $\|v\|_\infty = \|v\|_{\infty, \bar{\omega}_N} = \max_{0 \le i \le N} |v_i|$, $v_{\bar{x}\hat{x},i} = \frac{v_{x,i} - v_{\bar{x},i}}{\hbar_i}$, $\hbar_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}$ dir. (7.1)-(7.2) probleminin fark şemasını kurmak için aşağıdaki özdeşlikten yararlanılacaktır:

$$\hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} Lu(x)\varphi_i(x)dx = \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\varphi_i(x)dx\, , i = \overline{1, N-1} \qquad (7.31)$$

Burada $\varphi_i^{(1)}(x)$ ve $\varphi_i^{(2)}(x)$ lineer baz fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki problemlerin çözümüdür:

$$\varphi_i^{(1)''}(x) = 0$$
$$\varphi_i^{(1)}(x_i) = 1, \qquad \varphi_i^{(1)}(x_{i-1}) = 0$$

ve

$$\varphi_i^{(2)''}(x) = 0$$
$$\varphi_i^{(2)}(x_i) = 1, \qquad \varphi_i^{(2)}(x_{i-1}) = 0$$

Bu problemlerin çözümünden, $\varphi_i(x)$ baz fonksiyonunu aşağıdaki şekilde yazarız:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \varphi_i^{(1)} = \dfrac{x - x_{i-1}}{h_i}, & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \varphi_i^{(1)} = \dfrac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}}, & x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0, & x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}) \end{cases}$$

(7.31) aşağıdaki şekilde tekrar yazılırsa

$$\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} Lu(x)\varphi_i(x)dx = \hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (\varepsilon u''(x) + a(x)u'(x))\varphi_i(x)dx$$

$$+\lambda\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x)\left(\int_0^x K_1(x,t)u(t)dt\right)dx$$

$$+\lambda\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x)\left(\int_0^l K_2(x,t)u(t)dt\right)dx$$

$$= \hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\varphi_i(x)dx \tag{7.32}$$

eşitliği elde edilir. Öncelikle, (7.32)'nin sol tarafındaki ilk terim ele alındığında

$$\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (\varepsilon u''(x) + a(x)u'(x))\varphi_i(x)dx$$

$$= \hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varepsilon u''(x)\varphi_i(x)dx + \hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} a(x_i)u'(x)\varphi_i(x)dx$$

$$+\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \big(a(x) - a(x_i)\big)u'(x)\varphi_i(x)dx \tag{7.33}$$

olur. Daha sonra, (7.33)'ün sağ tarafındaki ilk terim ele alınsın. Burada, (x_{i-1}, x_i) ve (x_i, x_{i+1}) aralığında kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varepsilon u''(x)\varphi_i(x)dx = \varepsilon\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u'(x)\varphi_i{}'(x)dx$$

$$= \varepsilon\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x)\varphi_i{}^{(1)'}(x)dx + \varepsilon\hbar_i^{-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} u'(x)\varphi_i{}^{(2)'}(x)dx \tag{7.34}$$

bulunur. (7.34) ile verilen denkleme (5.5) ile verilen interpolasyon kuadratür kuralı uygulandığında

$$\varepsilon\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u''(x)\varphi_i(x)dx = \varepsilon\hbar_i^{-1}\big(u_{x,i} + u_{\bar{x},i}\big) = \varepsilon u_{\bar{x}\hat{x},i} + R^* \tag{7.35}$$

olur. Burada

$$R^* = \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx\varphi_i^{(1)''}(x) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{d^2u(\xi)}{d\xi^2} T_1(x-\xi)d\xi$$
$$+ \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx\varphi_i^{(2)''}(x) \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d^2u(\xi)}{d\xi^2} T_1(x-\xi)d\xi$$

olarak tanımlıdır. R^* teriminin sıfıra eşit olduğu göz önünde bulundurulmalıdır. Daha sonra, (7.33)'ün ikinci terimini ele alınsın:

$$\hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} a(x_i)u'(x)\varphi_i(x)dx$$
$$= a_i\hbar_i^{-1} \left\{ \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x)\varphi_i^{(1)}(x)dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'(x)\varphi_i^{(2)}dx \right\} \tag{7.36}$$

(7.36)'ya (5.5) ile verilen interpolasyon kuadratür kuralı uygulanırsa

$$\hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} a(x_i)u'(x)\varphi_i(x)dx$$
$$= a_i\hbar_i^{-1} \left\{ u_{\bar{x},i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(1)}(x)dx + u_{x,i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^{(2)}dx \right\} + R_i^{(1)}$$
$$= \frac{a_i\hbar_i^{-1}}{2} u_{x,i}h_{i+1} + \frac{a_i\hbar_i^{-1}}{2} u_{\bar{x},i}h_i + R_i^{(1)} \tag{7.37}$$

olarak elde edilir. Burada elde edilen hata terimi aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

$$R_i^{(1)} = -a_i\hbar_i^{-1} \left\{ \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx\varphi_i^{(1)'}(x) \int_{x_{i-1}}^{x_i} u''(\xi)K_0(x,\xi)d\xi \right.$$
$$\left. + \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx\varphi_i^{(2)'}(x) \int_{x_i}^{x_{i+1}} u''(\xi)K_0(x,\xi)d\xi \right\} \tag{7.38}$$

Şimdi, (7.33)'ün sağ taraftaki son terimi ele alınsın. $a(x)$ fonksiyonu için x_i, x_{i+1} noktalarında Newton interpolasyon polinom açılımı uygulandığında

$$\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\big(a(x)-a(x_i)\big)u'(x)\varphi_i(x)dx$$
$$=a_{x,i}\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}(x-x_i)u'(x)\varphi_i(x)dx$$
$$+\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}(x-x_i)(x-x_{i+1})\frac{a''(\xi_i(x))}{2}u'(x)\varphi_i(x)dx \quad (7.39)$$

eşitliği elde edilir. (7.39)'un sağ tarafındaki ilk terim ele alınsın:

$$a_{x,i}\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}(x-x_i)u'(x)\varphi_i(x)dx$$
$$=a_{x,i}\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}xu'(x)\varphi_i^{(1)}(x)dx-a_{x,i}\hbar_i^{-1}x_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}u'(x)\varphi_i^{(1)}(x)dx$$
$$+a_{x,i}\hbar_i^{-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}xu'(x)\varphi_i^{(2)}(x)dx-a_{x,i}\hbar_i^{-1}x_i\int_{x_i}^{x_{i+1}}u'(x)\varphi_i^{(2)}(x)dx \quad (7.40)$$

olarak yazılır. (7.40)'ın sağ tarafındaki ilk terim için $f'(x)=u'(x)$ ve $p(x)=x\varphi_i^{(1)}(x)$ ve üçüncü terim için $f'(x)=u'(x)$ ve $p(x)=x\varphi_i^{(2)}(x)$ alınarak (5.5) ile verilen interpolasyon kuadratür kuralını uygulanınca

$$a_{x,i}\hbar_i^{-1}u_{\bar{x},i}\int_{x_{i-1}}^{x_i}x\varphi_i^{(1)}(x)dx+a_{x,i}\hbar_i^{-1}u_{x,i}\int_{x_i}^{x_{i+1}}x\varphi_i^{(2)}(x)dx+R_i^{(2)} \quad (7.41)$$

ifadesi bulunur. Burada, kalan terim

$$R_i^{(2)}=-a_{x,i}\hbar_i^{-1}\left\{\int_{x_{i-1}}^{x_i}dx\left(x\varphi_i^{(1)}\right)'\int_{x_{i-1}}^{x_i}u''(\xi)K_0(x,\xi)d\xi\right.$$
$$\left.+\int_{x_i}^{x_{i+1}}dx\left(x\varphi_i^{(2)}\right)'\int_{x_i}^{x_{i+1}}u''(\xi)K_0(x,\xi)d\xi\right\} \quad (7.42)$$

olarak tanımlıdır. (7.41)'in ilk ve ikinci terimine kısmi integrasyon uygulanırsa:

$$a_{x,i}\hbar_i^{-1}u_{\bar{x},i}\int_{x_{i-1}}^{x_i} x\varphi_i^{(1)}(x)dx + a_{x,i}\hbar_i^{-1}u_{x,i}\int_{x_i}^{x_{i+1}} x\varphi_i^{(2)}(x)dx$$
$$= a_{x,i}\hbar_i^{-1}u_{\bar{x},i}\left(\frac{x_i h_i}{2} - \frac{h_i^2}{6}\right) + a_{x,i}\hbar_i^{-1}u_{x,i}\left(\frac{x_i h_{i+1}}{2} + \frac{{h_{i+1}}^2}{6}\right) \tag{7.43}$$

elde edilir. (7.40)’ın ikinci ve dördüncü terimleri ele alınsın. Burada, ikinci terim için $f'(x) = u'(x)$ ve $p(x) = \varphi_i^{(1)}(x)$ ve dördüncü terim için $f'(x) = u'(x)$ ve $p(x) = \varphi_i^{(2)}(x)$ alınarak (5.5) ile verilen interpolasyon kuadratür kuralı uygulanırsa:

$$-a_{x,i}\hbar_i^{-1}x_i\int_{x_i}^{x_{i+1}} u'(x)\varphi_i^{(2)}(x)dx - a_{x,i}\hbar_i^{-1}x_i\int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x)\varphi_i^{(1)}(x)dx$$
$$= -a_{x,i}\hbar_i^{-1}x_i\left(\frac{u_{\bar{x},i}h_i}{2} + \frac{u_{x,i}h_{i+1}}{2}\right) + R_i^{(3)} \tag{7.44}$$

bulunur. Burada,$R_i^{(3)}$ hata terimi

$$R_i^{(3)} = -a_i\hbar_i^{-1}x_i\left\{\int_{x_{i-1}}^{x_i} dx\left(\varphi_i^{(1)}\right)'\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''(\xi)K_0(x,\xi)d\xi\right.$$
$$\left.+\int_{x_i}^{x_{i+1}} dx\left(\varphi_i^{(2)}\right)'\int_{x_i}^{x_{i+1}} u''(\xi)K_0(x,\xi)d\xi\right\} \tag{7.45}$$

formunda tanımlıdır. (7.40)’da (7.41)-(7.45) göz önünde bulundurulunca

$$a_{x,i}\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}(x - x_i)u'(x)\varphi_i(x)dx$$
$$= a_{x,i}\hbar_i^{-1}u_{\bar{x},i}\left(\frac{x_i h_i}{2} - \frac{h_i^2}{6}\right) + a_{x,i}\hbar_i^{-1}u_{x,i}\left(\frac{x_i h_{i+1}}{2} - \frac{{h_{i+1}}^2}{6}\right)$$
$$-a_{x,i}\hbar_i^{-1}x_i\left(\frac{u_{\bar{x},i}h_i}{2} + \frac{u_{x,i}h_{i+1}}{2}\right) + R_i^{(2)} + R_i^{(3)} \tag{7.46}$$

olarak elde edilir. (7.39)’da (7.46) yerine yazıldığında

$$\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\big(a(x)-a(x_i)\big)u'(x)\varphi_i(x)dx$$

$$= a_{x,i}\hbar_i^{-1}u_{\bar{x},i}\left(\frac{x_ih_i}{2}-\frac{h_i^2}{6}\right)+a_{x,i}\hbar_i^{-1}u_{x,i}\left(\frac{x_ih_{i+1}}{2}-\frac{{h_{i+1}}^2}{6}\right)$$

$$-a_{x,i}\hbar_i^{-1}x_i\left(\frac{u_{\bar{x},i}h_i}{2}+\frac{u_{x,i}h_{i+1}}{2}\right)+R_i^{(2)}+R_i^{(3)}+R_i^{(4)} \qquad (7.47)$$

olur. Burada, hata terimi olan $R_i^{(4)}$ aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

$$R_i^{(4)}=\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}(x-x_i)(x-x_{i-1})\frac{a''(\xi_i(x))}{2}u'(x)\varphi_i(x)dx \qquad (7.48)$$

(7.33)'de (7.35), (7.37) ve (7.47) göz önünde bulundurulduğunda

$$\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}(\varepsilon u''(x)+a(x)u'(x))\varphi_i(x)dx$$

$$=\varepsilon u_{\bar{x}\hat{x},i}+\theta_{1,i}u_{\bar{x},i}+\theta_{2,i}u_{x,i}+R_i^{(1)}+R_i^{(2)}+R_i^{(3)}+R_i^{(4)} \qquad (7.49)$$

olarak elde edilir. Burada, $\theta_{1,i}$, $\theta_{2,i}$ ve β_i katsayıları aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\theta_{1,i}=a_i\frac{h_i}{2}\hbar_i^{-1}-a_{x,i}\hbar_i^{-1}\frac{h_i^2}{6}, \qquad \theta_{2,i}=a_i\frac{h_{i+1}}{2}\hbar_i^{-1}-a_{x,i}\hbar_i^{-1}\frac{h_{i+1}^2}{6} \qquad (7.50)$$

ve

$$\beta_i=\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}(x-x_i)\varphi_i(x)dx=\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_i)\varphi_i^{(1)}(x)dx$$

$$+\hbar_i^{-1}\int_{x_i}^{x_i+1}(x-x_i)\varphi_i^{(2)}(x)(x)dx=x_i-\frac{\hbar_i^{-1}}{6}\left({h_i}^2+{h_{i+1}}^2\right) \qquad (7.51)$$

Daha sonra, (7.32)'nin sol tarafındaki üçüncü terim ele alınsın. Bu ifadenin çekirdek fonksiyonu olan K_2 terimi $x=x_i$ noktasında Taylor serisine açılırsa

$$\lambda\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\varphi_i(x)\left(\int_0^l K_2(x,t)u(t)dt\right)dx$$

$$=\lambda\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\varphi_i(x)dx\left(\int_0^l K_2(x_i,t)u(t)dt\right)$$

$$+\lambda\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}(x-x_i)\varphi_i(x)dx\left(\int_0^l \frac{\partial}{\partial x}K_2(x_i,t)u(t)dt\right)$$

$$+\lambda\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\varphi_i(x)dx\left(\int_0^l \frac{(x-x_i)^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}K_2(\xi_i(x),t)u(t)dt\right)$$

$$=\lambda\int_0^l K_2(x_i,t)u(t)dt+\lambda\beta_i\int_0^l \frac{\partial}{\partial x}K_2(x_i,t)u(t)dt$$

$$+\frac{1}{2}\lambda\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}(x-x_i)^2\varphi_i(x)dx\left(\int_0^l \frac{\partial^2}{\partial x^2}K_2(\xi_i(x),t)u(t)dt\right) \tag{7.52}$$

olarak elde edilir. (7.52)'de $k_2=K_2(x_i,t)+\beta_i\frac{\partial}{\partial x}K_2(x_i,t)$ dönüşümü altında

$$\lambda\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\varphi_i(x)\,dx\left(\int_0^l K_2(x,t)u(t)dt\right)=\lambda\int_0^l k_2(x_i,t)u(t)dt+R_i^{(5)} \tag{7.53}$$

bulunur. Burada hata terimi olan $R_i^{(3)}$ aşağıdaki formdadır:

$$R_i^{(5)}=\frac{1}{2}\lambda\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_i)^2\varphi_i(x)\,dx\left(\int_0^l \frac{\partial^2}{\partial x^2}K_2(\xi_i(x),t)u(t)dt\right) \tag{7.54}$$

(7.53)'ün sağ tarafındaki ilk terime (5.7) ile verilen yamuk kuralı uygulandığında

$$\lambda\int_0^l k_2(x_i,t)u(t)dt=\lambda\sum_{j=0}^{N}\hbar_j k_{2,ij}u_j+R_i^{(6)} \tag{7.55}$$

olarak elde ederiz. Burada, kalan terim

$$R_i^{(6)} = \frac{1}{2}\lambda \sum_{j=1}^{N} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(x_{j-1} - \xi) \frac{d^2}{d\xi^2}(k_2(x_i, \xi)u(\xi))\, d\xi \tag{7.56}$$

formundadır. Sonuç olarak, (7.32)'nin sol tarafındaki üçüncü terimden

$$\lambda \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) \left(\int_0^l K_2(x,t)u(t)dt \right) dx = \lambda \sum_{j=0}^{N} \hbar_j k_{2,ij} u_j + R_i^{(5)} + R_i^{(6)} \tag{7.57}$$

elde edilir. (7.32)'nin sol tarafındaki ikinci terimi ele alınsın. Bu terime (5.4) ile verilen interpolasyon kuadratür kuralı uygulandığında

$$\begin{aligned}
&\lambda \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) \left(\int_0^x K_1(x,t)u(t)dt \right) dx \\
&= \lambda \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x)dx \left(\int_0^{x_i} K_1(x_i,t)u(t)dt \right) \\
&+ \lambda \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)\varphi_i(x)dx \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{x_i} K_1(x_i,t)u(t)dt \right) \\
&+ \lambda \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dx\varphi_i(x) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{d}{d\xi^2} \left(\int_0^{\xi} K_1(\xi,t)u(t)dt \right) T_1(\xi - t)d\xi \\
&= \lambda \int_0^{x_i} K_1(x_i,t)u(t)dt + \lambda\beta_i \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{x_i} K_1(x_i,t)u(t)dt \right) \\
&+ \lambda \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dx\varphi_i(x) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\int_0^{\xi} K_1(\xi_i,t)u(t)dt \right) T_1(\xi - t)d\xi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \lambda \int_0^{x_i} K_1(x_i,t)u(t)dt + \lambda\beta_i \int_0^{x_i} \frac{\partial}{\partial x} K_1(x_i,t)u(t)dt + \lambda\beta_i K_1(x_i,x_i)u(x_i) \\
+ R_i^{(7)}
\end{aligned} \tag{7.58}$$

eşitliği elde edilir. Burada, kalan terim

$$R_i^{(7)} = \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dx\varphi_i(x) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\int_0^{\xi} K_1(\xi_i,t)u(t)dt \right) T_1(\xi - t)d\xi \tag{7.59}$$

formundadır. (7.58)'e $k_1 = K_1(x_i,t) + \beta_i K_1(x_i,t)$ dönüşümü uygulandığında

$$\lambda \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) \left(\int_0^x K_1(x,t)u(t)dt \right) dx = \lambda \int_0^l k_1(x_i,t)u(t)dt + R_i^{(7)} \qquad (7.60)$$

elde edilir. (7.60)'ın sağ tarafındaki ilk terim için (5.7) ile verilen yamuk kuralı uygulandığında

$$\lambda \int_0^l k_1(x_i,t)u(t)dt = \lambda \sum_{j=0}^{N} \hbar_j k_{1,ij} u_j + R_i^{(8)} \qquad (7.61)$$

elde edilir. Burada, $R_i^{(8)}$ hata terimi

$$R_i^{(8)} = \frac{1}{2}\lambda \sum_{j=1}^{i} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(x_{j-1} - \xi) \frac{d^2}{d\xi^2} \left(k_1(x_i,\xi)u(\xi)\right) d\xi \qquad (7.62)$$

formundadır. Sonuç olarak, (7.32)'nin sol tarafındaki ikinci terimden

$$\lambda \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) \left(\int_0^x K_1(x,t)u(t)dt \right) dx = \lambda \sum_{j=0}^{i} \hbar_j k_{1,ij} u_j + R_i^{(7)} + R_i^{(8)} \qquad (7.63)$$

olarak elde edilmiş olunur. (7.32)'nin sağ tarafındaki terim de ele alınsın:

$$\begin{aligned} \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\varphi_i(x)dx &= \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(f(x) - f(x_i)\right)\varphi_i(x)dx \\ +\hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x_i)\varphi_i(x)dx &= \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(f(x) - f(x_i)\right)\varphi_i(x)dx + f_i \end{aligned} \qquad (7.64)$$

(7.64)'ün sağ tarafındaki ilk terim için $x = x_i$ noktasındaki Taylor seri açılımı

$$f(x) = f(x_i) + (x - x_i)f_{\bar{x},i} + \frac{(x - x_i)(x - x_{i-1})}{2} f''\big(\xi_i(x)\big) \tag{7.65}$$

formundadır. (7.65) eşitliği, (7.64)'te yerine yazıldığında

$$\hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\varphi_i(x)dx = \hbar_i^{-1} f_{\bar{x},i} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)\varphi_i(x)dx + f_i$$
$$+\frac{1}{2}\hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i-1}) f''\big(\xi_i(x)\big)\varphi_i(x)dx = \bar{f_i} + R_i^{(9)} \tag{7.66}$$

olur. Burada, $\bar{f_i} = f_i + \beta_i f_{\bar{x},i}$ ve hata terimi

$$R_i^{(9)} = \frac{1}{2}\hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i-1}) f''\big(\xi_i(x)\big)\varphi_i(x)dx \tag{7.67}$$

formunda elde edilir. Son olarak, (7.2) sınır koşulu için $[0, l]$ üzerinde (5.7) ile verilmiş olan yamuk kuralı uygulandığında

$$\int_0^l g(x)u(x)dx = \sum_{j=0}^{N} \hbar_j g_j u_j + r \tag{7.68}$$

olarak bulunur. Burada kalan terim olan r

$$r = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \big(x_j - \xi\big)\big(x_{j-1} - \xi\big) \frac{d^2}{d\xi^2}\big(g(\xi)u(\xi)\big)\, d\xi \tag{7.69}$$

şeklindedir. Buradan (7.2) sınır koşulu için

$$u(l) = \sum_{j=0}^{N} \hbar_j g_j u_j + B + r \tag{7.70}$$

elde edilir. (7.49), (7.57), (7.63), (7.66), (7.68) ve (7.70)'den $1 \le i \le N$ için

$$L_N u_i := \varepsilon u_{\bar{x}\hat{x},i} + \theta_{1,i} u_{\bar{x},i} + \theta_{2,i} u_{x,i} + \lambda \sum_{j=0}^{i} \hbar_j k_{1,ij} u_j + \lambda \sum_{j=0}^{N} \hbar_j k_{2,ij} u_j + R_i = \bar{f}_i \qquad (7.71)$$

$$u(0) = A, \qquad u(l) = \sum_{j=0}^{N} \hbar_j g_j u_j + B + r \qquad (7.72)$$

olur. Burada, $R_i = \sum_{n=1}^{9} R_i^{(n)}$ olarak tanımlıdır. Buradaki kalan terimler, (7.38), (7.42), (7.45), (7.48), (7.54), (7.56), (7.59), (7.62), (7.67) ve (7.69) ile verilmiştir. (7.71)-(7.72) kesin bağıntısındaki hata terimleri ihmal edilerek

$$L_N y_i := \varepsilon y_{\bar{x}\hat{x},i} + \theta_{1,i} y_{\bar{x},i} + \theta_{2,i} y_{x,i} + \lambda \sum_{j=0}^{i} \hbar_j k_{1,ij} y_j + \lambda \sum_{j=0}^{N} \hbar_j k_{2,ij} y_j = \bar{f}_i \qquad (7.73)$$

$$y(0) = A, \qquad y(l) = \sum_{j=0}^{N} \hbar_j g_j y_j + B \qquad (7.74)$$

fark yaklaşımı elde edilir.

7.3 Hata Değerlendirmeleri

(7.1)-(7.2) ile verilen problem için kurulan fark şeması (7.73)-(7.74) probleminin ε- düzgün yakınsak olması için $\overline{\omega}_N$ üzerinde τ ya bağlı geçiş noktası içeren Shishkin şebeke kullanılacaktır. (7.1)-(7.2) ile verilen problemin $x = 0$ noktasında bir sınır katı mevcuttur. İlk olarak nümerik metodun düzgün yakınsaklık analizi yapılacaktır. $z_i = y_i - u_i, i = \overline{0, N}$ hata fonksiyonu aşağıdaki fark probleminin çözümüdür:

$$L_N z_i := \varepsilon z_{\bar{x}\hat{x},i} + \theta_{1,i} z_{\bar{x},i} + \theta_{2,i} z_{x,i} + \lambda \sum_{j=0}^{i} \hbar_j k_{1,ij} z_j + \lambda \sum_{j=0}^{N} \hbar_j k_{2,ij} z_j = R_i \qquad (7.75)$$

$$z_0 = 0, \qquad z_N = \sum_{j=0}^{N} \hbar_j g_j z_i - r \qquad (7.76)$$

Lemma 7.3.1. $a, f \in C^2[0,l]$ ve $\frac{\partial^m K_1}{\partial x^m}, \frac{\partial^m K_1}{\partial x^m} \in C^2([0,l])^2, m = 0,1,2$ ve

$$\alpha^{-1}\left(\max_{1\le i\le N}\sum_{j=1}^{N}\hbar_j|g_j| + |\lambda|\max_{1\le i\le N}\sum_{j=1}^{i}\hbar_j|K_{1,ij}| + |\lambda|\max_{1\le i\le N}\sum_{j=1}^{N}\hbar_j|K_{2,ij}|\right) \le 1 \tag{7.77}$$

olduğunu varsayalım. Bu taktirde (7.75)-(7.76) fark probleminin çözümü aşağıdaki eşitsizliği sağlar:

$$\|z\|_{\infty,\bar{\omega}_N} \le C\big(\|R\|_{\infty,\omega_N} + |r|\big) \tag{7.78}$$

İspat. (7.75)-(7.76) fark problemine diskret maksimum norm uygulandığında

$$|z_i| \le |z_0| + |z_N| + \alpha^{-1}\max_{1\le i\le N}|R| + \alpha^{-1}|\lambda|\max_{1\le i\le N}\sum_{j=1}^{i}\hbar_j|K_{1,ij}||z_j|$$
$$+\alpha^{-1}|\lambda|\max_{1\le i\le N}\sum_{j=1}^{N}\hbar_j|K_{2,ij}||z_j|$$

şeklindedir. (7.76) sınır koşulu için

$$|z_N| \le |r| + \alpha^{-1}\max_{1\le i\le N}\sum_{j=1}^{N}\hbar_j|g_j||z_j|$$

değerlendirmesi göz önünde bulundurularak

$$|z_i| \le |z_0| + |r| + \alpha^{-1} \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{N} \hbar_j |g_j| |z_j| + \alpha^{-1} \max_{1\le i\le N} |R|$$

$$+ \alpha^{-1}|\lambda| \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{i} \hbar_j |K_{1,ij}| |z_j| + \alpha^{-1}|\lambda| \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{N} \hbar_j |K_{2,ij}| |z_j|$$

$$\le \alpha^{-1}\|R\|_\infty + \alpha^{-1}|\lambda| \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{i} \hbar_j |K_{1,ij}| \|z\|_{\infty,\omega_N}$$

$$+\alpha^{-1}|\lambda| \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{N} \hbar_j |K_{2,ij}| \|z\|_{\infty,\omega_N}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan,

$$\|z\|_{\infty,\bar{\omega}_N} \le |r| + \alpha^{-1}\|R\|_\infty + + \alpha^{-1}|\lambda| \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{i} \hbar_j |K_{1,ij}| \|z\|_{\infty,\omega_N}$$

$$+\alpha^{-1}|\lambda| \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{N} \hbar_j |K_{2,ij}| \|z\|_{\infty,\omega_N} + \alpha^{-1} \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{N} \hbar_j |g_j| \|z\|_{\infty,\omega_N} \qquad (7.79)$$

elde edilir. (7.79)'da (7.77)'i göz önünde bulundurularak,

$$\|z\|_{\infty,\bar{\omega}_N} \le$$

$$\frac{\alpha^{-1}\|R\|_{\infty,\omega_N} + |r|}{\left[1 - \alpha^{-1}\left(\max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{N} \hbar_j |g_j| + |\lambda| \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{i} \hbar_j |K_{1,ij}| + |\lambda| \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{N} \hbar_j |K_{2,ij}|\right)\right]} \qquad (7.80)$$

elde edilir. (7.80) ile Lemma 7.3.1'in ispatı tamamlanmış olur.

Lemma 7.3.2. $a, f, g \in C^2[0,l]$ ve $\frac{\partial^m K_1}{\partial x^m}, \frac{\partial^m K_2}{\partial x^m}, \frac{\partial^{m+1} K_1}{\partial x \partial t^m}, \frac{\partial^{m+1} K_2}{\partial x \partial t^m} \in C^2[0,l], m = 0,1,2$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde

$$\|R\|_{\infty,\omega_N} \le CN^{-2} lnN \qquad (7.81)$$

$$|r| \le CN^{-2} lnN \qquad (7.82)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. İlk olarak (7.69)'da verilmiş olan r kesme hatası ele alınsın. Burada, (7.82) için Lemma 7.1.1 de verilen şartlar altında (5.60) ile benzer olarak

$$|r| \leq C\sum_{j=1}^{N}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\left(x_j-\xi\right)\left(x_{j-1}-\xi\right)(1+|u'(\xi)|+|u''(\xi)|)\,d\xi \leq CN^{-2}lnN \quad (7.83)$$

eşitsizliği elde edilir. (7.81) eşitsizliğinin ispatı için R_i hata terimleri tek tek ele alınacaktır. İlk olarak, (7.38) hata terimi ele alınsın. (7.38) hata teriminin değerlendirmesini yapmak için ilk olarak $\sigma=\frac{l}{2}$, $\frac{l}{2}<\alpha^{-1}\varepsilon lnN$ ve $h^{(1)}=h^{(2)}=h=lN^{-1}$ durumu göz önüne alınsın. $a(x)\in C^2[0,l]$, $\left|\varphi_i^{(1)'}(x)\right|<C$, $\left|\varphi_i^{(2)'}(x)\right|<C$ eşitsizlikleri göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned}\left|R_i^{(1)}\right| &\leq |a_i|\left|\hbar_i^{-1}\right|\left\{\int_{x_{i-1}}^{x_i}dx\left|\varphi_i^{(1)'}(x)\right|\int_{x_{i-1}}^{x_i}|u''(\xi)||K_0(x,\xi)|d\xi\right.\\ &\qquad\left.+\int_{x_i}^{x_{i+1}}dx\left|\varphi_i^{(2)'}(x)\right|\int_{x_i}^{x_{i+1}}|u''(\xi)||K_0(x,\xi)|d\xi\right\}\\ &\leq Ch\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}|u''(\xi)|d\xi \leq C\left\{h^2+h\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\frac{1}{\varepsilon^2}e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}d\xi\right\}\\ &\leq C\left\{h^2+\frac{h}{\varepsilon}\alpha^{-1}e^{-\frac{\alpha x_{i-1}}{\varepsilon}}\right\}\leq C\left\{h^2+\frac{h}{\varepsilon}\alpha^{-1}N^{-1}\right\}\leq CN^{-2}lnN, i=\overline{1,N} \quad (7.84)\end{aligned}$$

olarak elde edilir. $\sigma=\alpha^{-1}\varepsilon lnN<l/2$ için $[0,\sigma]$ aralığında $i=1,\ldots,N/2$ için

$$\begin{aligned}\left|R_i^{(1)}\right| &\leq C\left\{\left|h^{(1)}\right|^2+\left|h^{(1)}\right|^2\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\frac{1}{\varepsilon^2}e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}d\xi\right\}\leq C\left\{\left|h^{(1)}\right|^2+\frac{\left|h^{(1)}\right|^2}{\varepsilon^2}\right\}\\ &\leq C\left\{\left|h^{(1)}\right|^2+\alpha^{-1}N^{-2}lnN\right\}\leq CN^{-2}lnN \quad (7.85)\end{aligned}$$

şeklindedir. $[\sigma,l]$ aralığında $i=\frac{N}{2}+1,\ldots,N$ için

$$\left|R_i^{(1)}\right| \le C\left\{\left|h^{(2)}\right|^2 + \left|h^{(2)}\right|^2 \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} d\xi\right\}$$

$$\le C\left\{\left|h^{(2)}\right|^2 + \frac{\left|h^{(2)}\right|^2}{\varepsilon}\alpha^{-1}\left(e^{-\frac{\alpha x_{i+1}}{\varepsilon}} - e^{-\frac{\alpha x_{i-1}}{\varepsilon}}\right)\right\}$$

$$\le C\left\{\left|h^{(2)}\right|^2 + \frac{\left|h^{(2)}\right|^2}{\varepsilon}N^{-1}\right\} \le CN^{-2} \qquad (7.86)$$

olarak elde edilir. Yukarıdaki ile benzer şekilde (7.42) ve (7.45) terimlerinin değerlendirmeleri yapılacaktır. İlk olarak (7.42) için $\sigma = \frac{l}{2}$, $\frac{l}{2} < \alpha^{-1}\varepsilon lnN$ ve $h^{(1)} = h^{(2)} = h = lN^{-1}$ olmak üzere

$$\left|R_i^{(2)}\right| \le CN^{-2} \qquad (7.87)$$

ve $\sigma = \alpha^{-1}\varepsilon lnN < l/2$ için $[0,\sigma]$ aralığında $i = 1, \dots, N/2$ için

$$\left|R_i^{(2)}\right| \le CN^{-2} \qquad (7.88)$$

ve $\sigma = \alpha^{-1}\varepsilon lnN < l/2$ için $[\sigma, l]$ aralığında $i = \frac{N}{2} + 1, \dots, N$ için

$$\left|R_i^{(2)}\right| \le CN^{-2} \qquad (7.89)$$

olarak elde edilir. (7.45) için $\sigma = \frac{l}{2}$, $\frac{l}{2} < \alpha^{-1}\varepsilon lnN$ ve $h^{(1)} = h^{(2)} = h = lN^{-1}$ olmak üzere

$$\left|R_i^{(3)}\right| \le CN^{-2} \qquad (7.90)$$

ve $\sigma = \alpha^{-1}\varepsilon lnN < l/2$ için $[0,\sigma]$ aralığında $i = 1, \dots, N/2$ için

$$\left|R_i^{(3)}\right| \le CN^{-2} \qquad (7.91)$$

ve $\sigma = \alpha^{-1}\varepsilon lnN < l/2$ için $[\sigma, l]$ aralığında $i = \frac{N}{2} + 1, \dots, N$ için

$$\left|R_i^{(3)}\right| \leq CN^{-2} \tag{7.92}$$

olarak elde edilir. (7.48) hata terimi ele alınsın. $a(x)\epsilon C^2[0, l]$, $|x - x_i| \leq h_i$, $|x - x_{i-1}| \leq h_i$ göz önünde bulundurularak ve (5.42) ile benzer şekilde

$$\begin{aligned} R_i^{(4)} &\leq \frac{1}{2}\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |a''(\xi_i(x))||(x - x_i)||(x - x_{i-1})||u(x)|\varphi_i(x)dx \left|R_i^{(4)}\right| \\ &\leq CN^{-2} \end{aligned} \tag{7.93}$$

olarak elde edilir. (7.54) hata terimi $\tau = \alpha^{-1}\varepsilon lnN$ ve $\tau = \frac{l}{2}$ için sağlanır. $\frac{\partial^2 K_1}{\partial x^2}$ ve $\frac{\partial^2 K_2}{\partial x^2}$ teriminin sınırlı olması, $|x - x_i| \leq h_i$, koşulları göz önünde bulundurularak ve (5.47) ile benzer şekilde

$$\begin{aligned} \left|R_i^{(5)}\right| &\leq \frac{1}{2}\lambda\hbar_i^{-1}\left|\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)^2\varphi_i(x)dx\left(\int_0^l \frac{\partial^2}{\partial x^2}K_2(\xi_i(x), t)u(t)dt\right)\right| \\ &\leq CN^{-2} \end{aligned} \tag{7.94}$$

olarak elde edilir. (7.59) ve (7.62) için yukarıdakiler ile bbenzer şekilde:

$$\begin{aligned} &\left|R_i^{(7)}\right| \\ &\leq \lambda\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dx\varphi_i(x)\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\int_0^\xi K_1(\xi_i, t)u(t)dt\right)T_1(\xi - t)d\xi \\ &\leq CN^{-2} \end{aligned} \tag{7.95}$$

ve

$$\left|R_i^{(8)}\right| \leq C\sum_{j=1}^{N}\int_{x_{j-1}}^{x_j} \left(x_j - \xi\right)\left(x_{j-1} - \xi\right)(1 + |u'(\xi)| + |u''(\xi)|)d\xi$$

$$\leq CN^{-2} \tag{7.96}$$

olarak elde edilir. Son olarak (7.67) hata terimi için $f\epsilon C^2[0,l]$, $|x - x_i| \leq h_i$, $|x - x_{i-1}| \leq h_i$ göz önünde bulundurularak ve (5.58) ile benzer şekilde

$$\left|R_i^{(9)}\right| \leq \frac{1}{2}\hbar_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}|x - x_i||x - x_{i-1}|\left|f''\big(\xi_i(x)\big)\right|\varphi_i(x)dx$$
$$\leq CN^{-2} \tag{7.97}$$

olarak bulunur. (7.84)-(7.97) göz önünde bulundurulduğunda (7.81) ile verilen eşitsizliğin doğruluğu ispatlanmıştır.

Teorem 7.3.3. u fonksiyonu (7.1)-(7.2) probleminin çözümü ve y fonksiyonu ise (8.73)-(8.74) problemlerinin çözümü olmak üzere

$$\|y - u\|_{\infty,\omega_N} \leq CN^{-2}lnN \tag{7.98}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Bu teoremin ispatı Lemma 7.3.1 ve Lemma 7.3.2 göz önünde bulundurulduğunda aşikardır.

7.4 Nümerik Sonuçlar

Örnek 7.4.1. İlk olarak aşağıdaki test problemi ele alınsın. $0 < x < 1$ olmak üzere

$$\varepsilon u''(x) + (2 - x^2)u'(x) + \int_0^x (x+t)^2 u(t)dt$$
$$+\int_0^1 (x^2 - t^2)u(t)dt = (1 - x^2)e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + 2$$
$$u(0) = 0, \qquad u(1) = \int_0^1 \left(1 + e^{-\frac{x}{4}}\right)u(x)dx$$

probleminin kesin çözümü bilinmemektedir. Bu yüzden, hata ve yakınsaklık analizi çift şebeke metodu kullanılarak elde edilir. Burada maksimum hata terimi ve hesaplanan hata terimi

$$e_\varepsilon^N = \max_{\omega_N} \left| y_i^{\varepsilon,N} - \tilde{y}_i^{\varepsilon,2N} \right|, \qquad e^N = \max_{\varepsilon} e_\varepsilon^N$$

şeklindedir. Yaklaşık çözüm olan $\tilde{y}_i^{\varepsilon,2N}$

$$\widetilde{\omega}_{2N} = \left\{ \frac{x_i}{2} : i = \overline{0,2N}, \qquad x_{i+1/2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right\}$$

şebekesi üzerinde tanımlıdır. Burada yakınsaklık oranı ve hesaplanan ε'a göre düzgün yakınsaklık oranı aşağıdaki şekilde verilmektedir:

$$p^N = \frac{ln(e^N/e^{2N})}{ln2}, \qquad p^{\varepsilon,N} = \frac{ln(e_\varepsilon^N/e_\varepsilon^{2N})}{ln2}$$

Bu nümerik örnek için bulunan değerler Çizelge 7.1'de verilmiştir.

Çizelge 7.1 ε-düzgün yakınsama hızı p^N ve ε'a göre hesaplanmış maksimum hata e^N

ε	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$	$N = 1024$
2^{-9}	0.0267688	0.0159116	0.0088539	0.0042387	0.0017292
	1.7727	2.0268	2.1845	1.9973	1.4980
2^{-10}	0.0233001	0.0136169	0.0082248	0.0046138	0.0022125
	1.5728	1.7990	2.0747	2.2426	2.0499
2^{-11}	0.0210212	0.0115300	0.0069823	0.0042657	0.0024089
	1.4225	1.5579	1.8366	2.1247	2.3040
2^{-12}	0.0192254	0.0.0101861	0.0058485	0.0035944	0.0022184
	1.2650	1.3801	1.5801	1.8794	2.1841
2^{-13}	0.0178358	0.0094132	0.0050645	0.0029845	0.0018561
	1.1286	1.2658	1.3723	1.6105	1.9262
e^N	0.0267688	0.0159116	0.0088539	0.0046138	0.0024089
p^N	1.7727	2.0268	2.1845	2.2426	2.3040

7.5 Sonuç

Bu bölümde singüler pertürbe olmuş integral sınır şartlı konveksiyon-difüzyon tipte Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklem ele alınmıştır. İlk olarak asimptotik değerlendirmeleri yapmak için Green fonksiyonu kullanılmıştır. Daha sonra lineer baz fonksiyonu yardımı ve kalan terimi integral formda olan interpolasyon kuadratür kuralları kullanılarak Shishkin şebeke üzerinde uygun fark şeması kurulmuştur. Hata analizi ve hatanın kararlılığı incelenmiştir. Son olarak teorik sonuçları destekleyen nümerik örnekler yardımıyla önerilen metodun $O(h^2)$ mertebeden bir yakınsaklığa sahip olduğu gösterilmiştir.

8. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında singüler pertürbe olmuş integral sınır şartlı birinci mertebeden Volterra-Fredholm integro diferansiyel denklem, singüler pertürbe olmuş integral sınır şartlı konveksiyon-difüzyon tipte Volterra-Fredholm integro diferansiyel denklem ve singüler pertürbe olmuş integral sınır şartlı reaksiyon-difüzyon tipte Volterra-Fredholm integro diferansiyel denklem ele alınmıştır.

İlk olarak ele alınan problem için gerekli olan asimptotik değerlendirmeler yapılmıştır. Daha sonra üstel katsayılı baz fonksiyonları kullanılarak ve kalan terimi integral biçimde olan interpolasyon kuadratür kuralları yardımıyla Shishkin tipte şebeke üzerinde fark şeması kurulmuştur. Önerilen bu nümerik metodun hata terimleri değerlendirilerek hemen hemen ikinci mertebeden yakınsak olduğu gösterilmiştir. Teorik sonuçların doğruluğunu gösteren nümerik örnek verilmiştir.

İkinci olarak singüler pertürbe olmuş integral sınır şartlı reaksiyon-difüzyon tipte Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklem ele alınmıştır. Kesin çözüm ve türevleri için asimptotik değerlendirmeler yapıldıktan sonra hiperbolik baz fonksiyonları ve interpolasyon kuadratür kuralları yardımıyla uygun fark şeması sunulmuştur. Önerilen nümerik metodun hemen hemen ikinci mertebeden düzgün yakınsaklığını gösteren ve teorik sonuçlar ile uyumlu iki nümerik örnek verilmiştir.

Son olarak singüler pertürbe olmuş integral sınır şartlı konveksiyon-difüzyon tipte Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklem ele alınmıştır. Kesin çözüm ve türevleri için Green fonksiyonu kullanılarak değerlendirmeler yapılmıştır. Linner baz fonksiyonları ve interpolasyon kuadratür kuralları yardımıyla nümerik metod kurulmuştur. Önerilen nümerik metodun hata değerlendirmesi yapılmıştır ve hemen hemen ikinci mertebeden düzgün yakınsaklık elde edilmiştir. Teorik sonuçları destekleyen nümerik örnekler verilmiştir.

Ele alınan üç farklı tipte singüler pertürbe olmuş integral sınır şartlı Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklem tipi için üç farklı baz fonksiyonu kullanılarak nümerik metodlar önerilmiştir. Ele alınan problemlerde esas zorluk singüler pertürbe tipte ve integral sınır şartına sahip problemler olmalarıdır. Singüler pertürbe olmuş problemler sınır katı civarında anlık değişimler göstermektedirler. Bu tarz problemlerde klasik metodlar yeterince iyi sonuçlar vermemektedir. Bundan dolayı, ele alınan problemler için

Shishkin şebeke üzerinde homojen fark şemaları kurulmuştur ve ikinci mertebeden düzgün yakınsak oldukları gösterilmişir. Bu tezde önerilen metodlar klasik metodlarda elde edilen hatalara göre çok daha küçüktür ve yakınsaklık analizi yapmayı kolaylaştırmaktadır. Ayrıca non-lokal sınır şartı ile de yakınsama daha iyi hale getirilmiştir. Bu tez çalışmasının gelecekte benzer veya farklı tipteki adi ve kısmi türevli diferansiyel denklemler için bir yol haritası olması ümit edilmektedir.

KAYNAKLAR

Amirali, G., Amirali, I. (2023). ***Nümerik analiz, teori ve uygulamalarla*** . Seçkin Yayınevi: Ankara, Türkiye.

Amiraliyev, G. M., Durmaz, M. E., Kudu, M. (2020). Fitted second order numerical method for a singularly perturbed Fredholm integro-differential equation. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society*, 27(1), 71-88.

Amiraliyev, G. M., Durmaz, M. E., Kudu, M. (2021). A numerical method for a second order singularly perturbed Fredholm integro-differential equation. *Miskolc Mathematical Notes*, 22(1), 37-48.

Arjunan, M. M., Selvi, S. (2011). Existence results for impulsive mixed Volterra-Fredholm integro-differential inclusions with nonlocal conditions. *International Journal of Mathematical Sciences and Applications*, 1(2).

Boglaev, I. P. (1984). Approximate solution of a nonlinear boundary value problem with a small parameter for the highest-order differential. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 24(6), 30-35.

Cakir, M., (2016). A numerical study on the difference solution of singularly perturbed semilinear problem with integral boundary condition. *Mathematical Modelling and Analysis*, 21(5), 644-658.

Cakir, M., Amiraliyev, G. M. (2021). A second order numerical method for singularly perturbed problem with non-local boundary condition. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 67, 919-936.

Cakir Guckir, H., Cakir, F., Cakir, M. (2022). A numerical method on Bakhvalov Shishkin mesh for Volterra integro-differential equations with a boundary layer. *Communications Faculty of Science University of Ankara Series A1Mathematics and Statistics*, 7(1), 51-67.

Cakir, M., Gunes, B. (2021). A new diference method for the singularly perturbed Volterra-Fredholm integro-differential equations on a Shishkin mesh. *Hacettepe Journal of Mathematics & Statistics*, 51(3), 787-799.

Cakir, M., Gunes, B. (2022). A fitted operator finite difference approximation for singularly perturbed Volterra-Fredholm integro-differential equations. *Mathematics*, 10(19), 3560.

Cimen, E., Cakir, M. (2021). A uniform numerical method for solving singularly perturbed Fredholm integro-differential problem. *Computational and Applied Mathematics*, 40(42).

Debela, H. G., Duressa, G. F. (2020). Uniformly convergent numerical method for singularly perturbed convection-diffusion type problems with nonlocal boundary condition. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* , 92(12), 1914-1926.

Durmaz, M. E. (2023). A numerical approach for singularly perturbed reaction diffusion type Volterra-Fredholm integro-differential equations. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 69, 3601-3624.

Durmaz, M. E., Amirali, I., Mohapatra, J., Amiraliyev, G. M. (2023a). A second-order numerical approximation of a singularly perturbed nonlinear Fredholm integro-differential equation. *Applied Numerical Mathematics*, 191, 17-28.

Durmaz, M. E., Amirali, I., Amiraliyev, G. M. (2023b). An efficient numerical method for a singularly perturbed Fredholm integro-differential equation with integral boundary condition. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 69, 505-528.

Durmaz, M. E., Cakir, M., Amirali, G. (2022a). Parameter uniform second-order numerical approximation for the integro-differential equations involving boundary layers. *Communications Faculty of Science University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics* , 71(4), 954-967.

Durmaz, M. E., Cakir, M., Amirali, I., Amiraliyev, G. M. (2022b). Numerical solution of singularly perturbed Fredholm integro-differential equations by homogeneous second order difference method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 412, 114327.

Gunes, B., Cakir, M. (2023). A uniformly convergent numerical method for singularly perturbed semilinear integro-differential equations with two integral boundary conditions. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 63(12), 2513-2527.

Gunes, B., Cakir, M. (2024). A fitted approximate method for solving singularly perturbed Volterra-Fredholm integro-differential equations with an integral boundary condition. *Ukrains'kyi Matematyehnyi Zhurnal*, 76(1), 115-131.

Hamoud, A. A., Ghadle, K. P. (2018). Existence and uniqueness of the solution for Volterra-Fredholm integro-differential equations. *Journal of Siberian Federal University Mathematics & Physics*, 11(6), 692-701.

Iragi, B. C., Munyakazi, J. B. (2020). A uniformly convergent numerical method for a singularly perturbed Volterra integro-differential equation. *International Journal of Computer Mathematics*, 97(4), 759-771.

Kadalbajoo, M. K., Gupta, V. (2010). A brief survey on numerical methods for solving singularly perturbed problems. *Applied Mathematics and Computation*, 217(8), 3641-3716.

Lakshmikantham, V., Rama Mohana Rao, M. (1995). ***Theory of integro-differential equations*** (1. ed.). Gordon and Breach Science Publishers: USA.

Liu, J. H., Ezzinbi, K. (2003). Non-autonomous integro-differential equations with non-local conditions. *Journal of Integral Equations and Applications*, 15(1).

Mahmood, A. H., Sadoon, L. H. (2012). Existence of a solution of a certain Volterra-Fredholm integro-differential equations. *Journal of Education and Science,* 25(3), 62-67.

Matar, M. M. (2009). Existence and uniqueness of solution to fractional semilinear mixed Volterra-Fredholm integro-differential equations with nonlocal conditions. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2009(155), 1-7.

Matthews, S., O'Riordan, E. O., Shishkin, G. I. (2002). A numerical method for a system of singularly perturbed reaction-diffusion equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 145(1), 151-166.

Mohapatra, J. (2014). Equidistribution grids for two-parameter convection-diffusion boundary-value problems. *Journal of Mathematical Modeling*, 2(1), 1-21.

Pachpatta, B. G. (1986). On mixed Volterra-Fredholm type integral equations. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 17(4), 488-496.

Panda, A., Mohapatra, J., Amirali, I. (2021). A second-order post-processing tecnique for singularly perturbed Volterra integro-differential equations. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 18(6), 231.

Panda, A., Mohapatra, J., Amirali, I., Durmaz, M. E., Amiraliyev, G. M. (2024). A numerical technique for solving nonlinear singularly perturbed Fredholm integro-differential equations. *Mathematics and Computers in Simulation*, 220, 618-629.

Rahman, M. (2007). ***Integral equations and their applications*** . WIT Press: Southampton, UK.
Samarskii, A. A. (2001). ***The theory of difference schemes*** . Moscow M. V. Lomonosov State University: Russia.
Shishkin, G. I. (1983). A difference scheme on a non-uniform mesh for a differential equation with a small parameter in the highest derivative. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 23(3), 59-66.
Tidke, H. (2009). Existence of global solutions to nonlinear mixed Volterra-Fredholm integro-differential equations with nonlocal conditions. *Electronic Journal of Differential Equations,* 2009(55), 1-7.
Vulanovic, R. (1982). An exponentially fitted scheme on a non-uniform mesh. *Zbornik Radova Prirodno-Matematičkog Fakulteta Univerzitet u Novom Sadu Knjiga,* 12, 205-215.
Wazwaz, A. M. (2011). ***Linear and nonlinear integral equations***. Higher Education Press: Beijing.

ÖZ GEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı	:	Feriha GÜRMAN

Eğitim Bilgileri

Lisans

Üniversite	:	Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi
Fakülte	:	Fen Fakültesi
Bölüm	:	Matematik
Mezuniyet Yılı	:	2013

Yüksek Lisans

Üniversite	:	Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi
Enstitü	:	Fen Fakültesi
Anabilim Dalı	:	Matematik
Mezuniyet Yılı	:	2017

VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
LİSANSÜSTÜ TEZ ORİJİNALLİK RAPORU

Tarih. 16/12/2024

Tez başlığı İNTEGRAL SINIR ŞARTLI SİNGÜLER PERTÜRBE İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN HOMOJEN İKİNCİ MERTEBEDEN NÜMERİK YÖNTEM

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışmamın, kapak sayfası, giriş, ana bölümler ve sonuç bölümlerinden oluşan toplam 114 (yüz on dört) sayfalık kısmına ilişkin, 16/12/2024 tarihinde şahsım tarafından Turnitin adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre tezimin benzerlik oranı %19 (on dokuz) dır.

Uygulanan filtreler aşağıda verilmiştir:
- Kabul ve onay sayfası hariç,
- Teşekkür hariç,
- İçindekiler hariç,
- Simge ve kısaltmalar hariç,
- Gereç ve yöntemler hariç,
- Kaynakça hariç,
- Alıntılar hariç,
-Tezden çıkan yayınlar hariç,
- 7 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç (Limit match size to 7 words)

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılmasına İlişkin Yönergeyi inceledim ve bu yönergede belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini bilgilerinize arz ederim.

16/12/2024

Adı soyadı: Feriha GÜRMAN
Öğrenci no: 18910002078
Anabilim dalı: Matematik
Programı: Matematik
Statüsü: ( ) Yüksek lisans (X) Doktora

DANIŞMAN **ENSTİTÜ ONAYI**

Prof. Dr. Musa ÇAKIR

UYGUNDUR UYGUNDUR