



**ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE DIAMOND ALFA TÜREVİ VE
İNTEGRALI**

Tuğba DOĞRUÖZ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

HAZİRAN 2016

Tuğba DOĞRUÖZ tarafından hazırlanan “ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE DIAMOND ALFA TÜREVİ VE İNTEGRALI” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Adil MISIR

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Başkan : Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye : Prof. Dr. Fatma AYAZ

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 23 /06/2016

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....
Prof. Dr. Metin GÜRÜ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Tuğba DOĞRUÖZ

23.06.2016

ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE DIAMOND ALFA TÜREVİ VE İNTEGRALI

(Yüksek Lisans Tezi)

Tuğba DOĞRUÖZ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2016

ÖZET

Bu tezde, öncelikle zaman skalası ve onun ile ilgili genel tanımlar verilmiştir. Daha sonra ileri ve geri sıçrama operatörleri yardımıyla tanımlanan delta türev ve integral ile birlikte nabla türev ve integralin özellikleri verilmiştir. Son olarak diamond alfa türevi ve diamond alfa integrali tanımlanmış ve önemli özellikleri incelenmiştir.

Bilim Kodu : 20406

Anahtar Kelimeler : Zaman skalası, Diamond alfa türevi ve integrali

Sayfa Adedi : 53

Danışman : Doç. Dr. Adil MISIR

DIAMOND ALFA DERIVATIVE AND INTEGRAL ON TIME SCALES

(M. Sc. Thesis)

Tuğba DOĞRUÖZ

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2016

ABSTRACT

In this thesis, firstly, time scale and its general definitions were given. After that, the properties of delta derivative and integral together with nabla derivative and integral, which are defined by the help of forward and backward jump operators, were given. Finally, diamond alpha derivative and diamond alpha integral were defined or described and their important characteristics or properties were examined.

Science Code : 20406

Key Words : Time scales, Diamond alpha derivative and integral

Page Number : 53

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Adil MISIR

TEŞEKKÜR

Tez çalışmalarım boyunca bana her zaman yardımcı olan ve beni tecrübeleri ve bilgisiyle yönlendiren danışman hocam Sayın Doç. Dr. Adil MISİR'a, yardımını hiçbir zaman esirgemeyen Nesibe MANAV'a ve eğitimim süresince bana her zaman destek olan aileme teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	viii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	x
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
3. DELTA TÜREV VE DELTA İNTEGRAL.....	9
3.1. Delta Türev.....	9
3.2. Delta İntegral.....	16
4. NABLA TÜREV VE NABLA İNTEGRAL.....	21
4.1. Nabla Türev.....	21
4.2. Nabla İntegral.....	23
5. DIAMOND ALFA TÜREV VE DIAMOND ALFA İNTEGRAL	27
5.1. Diamond- α Türev.....	27
5.2 Diamond- α İntegral.....	43
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	49
KAYNAKLAR	51
ÖZGEÇMİŞ	53

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 2.1. Noktaların Sınıflandırılması	5



ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Noktaların Gösterimi	6



SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler	Açıklamalar
$\mathbb{T}$	Zaman Skalası
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar
σ	İleri Sıçrama Operatörü
ρ	Geri Sıçrama Operatörü
μ	Granül Fonksiyonu
η	Granül Fonksiyonu
f^Δ	Delta Türev
f^∇	Nabla Türev
$f^{\diamond_\alpha}$	Diamond Alfa Türev
Δf	İleri Fark Operatörü
∇f	Geri Fark Operatörü
C_{rd}	rd-sürekli Fonksiyonlar Kümesi
$\mathbb{T}^K$	Zaman Skalasından Türetilmiş Bir Küme
$\mathbb{T}_K$	Zaman Skalasından Türetilmiş Bir Küme
$\mathbb{T}_K^K$	Zaman Skalasından Türetilmiş Bir Küme

1. GİRİŞ

Fark denklemler teorisi, matematiğin sistematik olarak gelişmesiyle birlikte ortaya çıkan ilk teorilerden birisidir. Bu teori, zamana bağlı ayırık olayların matematiksel ifadesinde kullanılmıştır. Fark denklemler birçok doğa olayını ifade etmekte kullanılır. Bununla birlikte fark denklemler diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinin incelenmesinde de kullanılır. Yani, verilen bir diferansiyel denklemin, ayırık benzeri olan fark denklem ifade edilir ve bu fark denklem, diferansiyel denklemin çözümünün yapısını araştırmak için incelenir. Bu nedenledir ki fark denklem teorisi ve diferansiyel denklem teorisi birbirine çok yakın ve paralel olarak gelişmektedir. Fark denklem teorisi ile diferansiyel denklem teorisi arasında çok fazla benzerlikler olduğu kadar çok önemli farklılıkları da vardır. Örneğin, birinci mertebeden bir diferansiyel denklemin salınımlı olan çözümleri yok iken bu denkleme ilişkin fark denklemi salınımlı çözümlere sahip olabilmektedir.

Fark denklemler teorisi yaklaşık olarak sekiz asırlık çalışmalar sonunda sistematik bir hale gelmişken, diferansiyel denklemler teorisi dört asırdır çalışılmaktadır. Diferansiyel denklemler teorisinin daha kısa süredir çalışılmasının sebebi, doğa olaylarının kesiksiz olduğunun var sayılmasıdır. Bu yüzden, diferansiyel denklemler teorisi; fizik, kimya, biyoloji, astronomi, ekonomi ve diğer bilimlere ait matematiksel ifade yöntemi olarak kullanılır. Ancak zaman sürekli olarak ilerlese de, olaylarının kendi içinde süreklilik ve süreksizlik hallerinin aynı anda varlığı bir gerçektir. Dolayısıyla, her matematiksel olayı diferansiyel denklemlerle ve fark denklemlerle ifade etmek mümkün değildir.

Fark denklemler Fibonacci tarafından çalışma konusu olarak dikkate alınmıştır ve onun çok başarılı çalışmaları sonucunda birçok matematikçi daha sonralarda bu ilginç alana yönelmiştir. Örneğin, Laplace sabit katsayılı homojen doğrusal fark denklemleri, Guichard ise aynı denklemin homojen olmayan özel hallerini ve Gelgrum bu denklemlerin çözümlerinin asimptotik davranışını inceleme konusu olarak seçmiştir.

Diferansiyel denklemler teorisi ise Leibnitz ve Newton tarafından başlatılıp, Claurit, Frobenious, Euler ve diğer birçok matematikçi tarafından geliştirilmiştir. Bu teoriye adını veren Leibnitz'dir.

Yukarıda değinildiği gibi, doğa olayları ne tam olarak sürekli ne de tam olarak kesiklidir. Dolayısıyla, olaylara ilişkin denklemlerin modellemelerinde yeni bir teoriye ihtiyaç duyulmaktadır. İşte bu teorinin adı Zaman Skalasıdır. Zaman skalası teorisi ile birlikte, hem süreklilik hem de süreksizlik içeren olayların denklemlerinin matematiksel modellenmesi formülize edilebilmektedir.

Bu tezin ikinci bölümünde zaman skalası tanıtılmış ve zaman skalasında temel kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde Delta Türevinin ve İntegralinin tanımı ve özellikleri verilmiştir. Dördüncü bölümde Nabla Türevinin ve İntegralinin tanımı ve özellikleri verilmiştir. Beşinci bölümde ise Delta ve Nabla Türev yardımıyla tanımlanan Diamond Alfa Türev ile Delta ve Nabla İntegral yardımıyla tanımlanan Diamond Alfa İntegral tanımı verilmiş ve özellikleri incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Tanım

Reel sayılar kümesinin herhangi bir kapalı alt kümesine bir zaman skalası denir ve $\mathbb{T}$ ile gösterilir [1]. Bu küme üzerindeki metrik $\mathbb{R}$ deki alışılmış metrik olarak alınacaktır.

2.1. Örnek

$\mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, [2, 4] \cup \{6\}, q^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$ gibi kümeler birer zaman skalasıdır. Ancak $\mathbb{Q}, \mathbb{C}, (0, 2)$ birer zaman skalası değildir.

2.2. Tanım

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası ve $t \in \mathbb{T}$ olsun. İleri sıçrama operatörü $\sigma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$

$$\sigma(t) = \begin{cases} \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}, & t \neq \sup \mathbb{T} \\ t, & t = \sup \mathbb{T} \end{cases} \quad (2.1)$$

ve geri sıçrama operatörü $\rho : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$

$$\rho(t) = \begin{cases} \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}, & t \neq \inf \mathbb{T} \\ t, & t = \inf \mathbb{T} \end{cases} \quad (2.2)$$

ile tanımlanır [1].

2.2. Örnek

(i) $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alınırsa $t \in \mathbb{R}$ için

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{R} : s > t\} = \inf(t, \infty) = t$$

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{R} : s < t\} = \sup(-\infty, t) = t$$

dır.

(ii) $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ alınırsa $t \in \mathbb{Z}$ için

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{Z}: s > t\} = \inf\{t+1, t+2, t+3, \dots\} = t+1$$

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{Z}: s < t\} = \sup\{\dots, t-3, t-2, t-1\} = t-1$$

dır.

(iii) $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0^{\frac{1}{2}} = \{\sqrt{n}: n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}\}$ olsun. $t \in \mathbb{N}_0^{\frac{1}{2}}$ için $t = \sqrt{n}$ ise $n = t^2$ dır.

$$\sigma(t) = \sigma(\sqrt{n}) = \sqrt{n+1} = \sqrt{t^2+1}$$

$$\rho(t) = \rho(\sqrt{n}) = \sqrt{n-1} = \sqrt{t^2-1}$$

dır.

2.3. Tanım

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. Bu durumda

$$\mu: \mathbb{T} \rightarrow [0, \infty), \mu(t) = \sigma(t) - t \tag{2.3}$$

$$\eta: \mathbb{T} \rightarrow [0, \infty), \eta(t) = t - \rho(t) \tag{2.4}$$

ile tanımlı μ ve η fonksiyonlarına granül fonksiyonu denir [1].

2.3. Örnek

(i) $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise $\sigma(t) = t$ olduğundan $\mu(t) = t - t = 0$,

$$\rho(t) = t \text{ olduğundan } \eta(t) = t - t = 0 \text{ olur.}$$

(ii) $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise $\sigma(t) = t+1$ olduğundan $\mu(t) = t+1 - t = 1$,

$$\rho(t) = t-1 \text{ olduğundan } \eta(t) = t - (t-1) = 1 \text{ olur.}$$

2.4. Tanım

Bir $t \in \mathbb{T}$ noktası

(i) Eğer $t < \sup \mathbb{T}$ ve $\sigma(t) > t$ ise t sağ saçılımlı nokta,

(ii) Eğer $t > \inf \mathbb{T}$ ve $\rho(t) < t$ ise t sol saçılımlı nokta,

(iii) Eğer sol saçılımlı ve sağ saçılımlı ise izole nokta,

(iv) Eğer $t < \sup \mathbb{T}$ ve $\sigma(t) = t$ ise t sağ yoğun nokta,

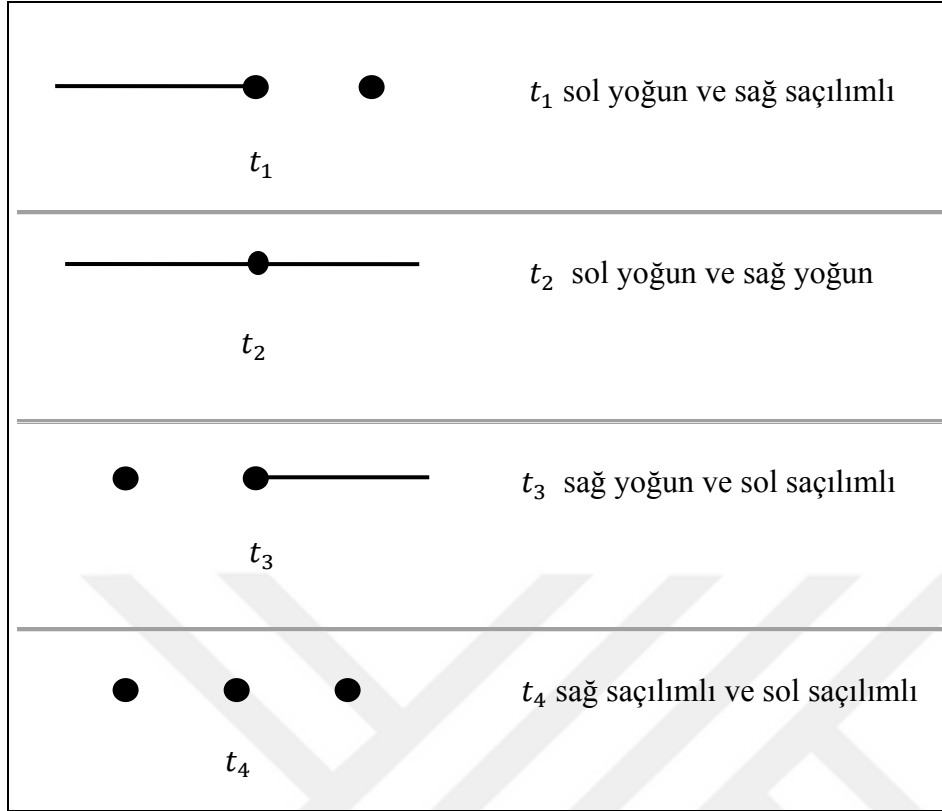
(v) Eğer $t > \inf \mathbb{T}$ ve $\rho(t) = t$ ise t sol yoğun nokta,

(vi) Eğer sağ yoğun ve sol yoğun nokta ise yoğun nokta denir [1].

Noktaların sınıflandırılması Çizelge 2.1 de, noktaların şematik gösterimi Şekil 2.1 de gösterilmiştir.

Çizelge 2.1. Noktaların Sınıflandırılması

t sağ saçılımlı	$t < \sigma(t)$
t sağ yoğun	$t = \sigma(t)$
t sol saçılımlı	$\rho(t) < t$
t sol yoğun	$\rho(t) = t$
t izole	$\rho(t) < t < \sigma(t)$
t yoğun	$\rho(t) = t = \sigma(t)$



Şekil 2.1. Noktaların Gösterimi

2.5. Tanım

$\mathbb{T}$ zaman skalası olsun.

$$\mathbb{T}^K = \begin{cases} \mathbb{T} - \{m\}, & m = \sup \mathbb{T} \text{ ve } m \text{ sol saçılımlı nokta} \\ \mathbb{T} & , \text{ diğ}er hallerde \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\mathbb{T}_K = \begin{cases} \mathbb{T} - \{m\}, & m = \inf \mathbb{T} \text{ ve } m \text{ sağ saçılımlı nokta} \\ \mathbb{T} & , \text{ diğ}er hallerde \end{cases} \quad (2.6)$$

dır. Ayrıca $\mathbb{T}_K^K = \mathbb{T}^K \cap \mathbb{T}_K$ dır [1].

$\mathbb{T}$ de tanımlanan bir f fonksiyonu için

$$f^\sigma(t) = f(\sigma(t)),$$

$$f^\rho(t) = f(\rho(t))$$

dır [1].



3. DELTA TÜREV VE DELTA İNTEGRAL

3.1. Delta Türev

3.1.1. Tanım

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası, $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^K$ olsun. Eğer $L \in \mathbb{R}$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - L[\sigma(t) - s]| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s| \quad (3.1)$$

eşitsizliğini her $s \in U_\delta(t)$ için sağlayacak şekilde bir $U_\delta(t) = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ komşuluğu bulunabiliyor ise $L \in \mathbb{R}$ sayısına f fonksiyonunun $t \in \mathbb{T}^K$ noktasındaki delta türevi denir ve bu durum $L = f^\Delta(t)$ ile gösterilir [1].

3.1.1. Örnek

$\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere her $t \in \mathbb{T}$ için $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(t) = \alpha$ ise $f^\Delta(t) = 0$ dır. Hakikaten zaman skalasında türev tanımı kullanılırsa her $s \in U_\delta(t)$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - 0[\sigma(t) - s]| = |\alpha - \alpha| = 0 \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|$$

olur ki bu da $f^\Delta(t) = 0$ demektir.

3.1.2. Örnek

Her $t \in \mathbb{T}$ için $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(t) = t$ ise $f^\Delta(t) = 1$ dır. Gerçekten her $s \in \mathbb{T}$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - [\sigma(t) - s]| = |\sigma(t) - s - [\sigma(t) - s]| = 0 \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|$$

eşitsizliği sağlandığından $f^\Delta(t) = 1$ dır.

3.1.1. Teorem

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^k$ olsun. Bu durumda

(i) f, t noktasında delta türevlenebilir ise f, t noktasında sürekli.

(ii) f, t noktasında sürekli ve t noktası sağ saçılımı ise f fonksiyonu t noktasında delta türevlenebilirdir ve

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} \quad (3.2)$$

dır.

(iii) f fonksiyonu için

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

limiti var ve t sağ yoğun nokta ise f fonksiyonu t noktasında delta türevlenebilirdir ve

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} \quad (3.3)$$

dır.

(iv) f fonksiyonu t noktasında delta türevlenebilir ise

$$f^\sigma(t) = f(t) + \mu(t)f^\Delta(t) \quad (3.4)$$

sağlanır [1].

3.1.3. Örnek

(i) $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise $t \in \mathbb{R}$ için Teorem 3.1.1 (iii) den

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t)$$

dır.

(ii) $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise $t \in \mathbb{Z}$ için Teorem 3.1.1 (ii) den

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t)$$

ileri fark operatörüdür.

3.1.4. Örnek

$h > 0$ ve $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}$ olmak üzere $t \in \mathbb{T}$ için

$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\} = \inf\{t + nh : n \in \mathbb{N}\} = t + h$ elde edilir. Benzer şekilde $\rho(t) = t - h$ bulunur. Her $t \in \mathbb{T}$ noktası izole nokta ve her $t \in \mathbb{T}$ için

$\mu(t) = \sigma(t) - t = t + h - t = h$ olmak üzere $\mu(t)$ sabittir.

Her $t \in \mathbb{T}$ için $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyonun türevi

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

şeklindedir.

3.1.2. Teorem

$f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı fonksiyonlar ve $t \in \mathbb{T}^k$ de delta türevlenebilir ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

(i) $f + g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu t noktasında delta türevlenebilirdir ve

$$(f + g)^\Delta(t) = f^\Delta(t) + g^\Delta(t) \tag{3.5}$$

dır.

(ii) Her α sabiti için $\alpha f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilirdir ve

$$(\alpha f)^\Delta(t) = \alpha f^\Delta(t) \quad (3.6)$$

dır.

(iii) $fg: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilirdir ve

$$(fg)^\Delta(t) = f^\Delta(t)g(t) + g^\Delta(t)f(\sigma(t)) \quad (3.7a)$$

$$= g^\Delta(t)f(t) + f^\Delta(t)g(\sigma(t)) \quad (3.7b)$$

dır.

(iv) $f(t)f(\sigma(t)) \neq 0$ olmak üzere $\frac{1}{f}$ fonksiyonu türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{1}{f}\right)^\Delta(t) = -\frac{f^\Delta(t)}{f(t)f(\sigma(t))} \quad (3.8)$$

dır.

(v) $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$ olmak üzere $\frac{f}{g}$ fonksiyonu türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^\Delta(t) = \frac{f^\Delta(t)g(t) - f(t)g^\Delta(t)}{g(t)g(\sigma(t))} \quad (3.9)$$

dır [1].

3.1.3. Teorem

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ de sürekli ve $[a, b)$ de türevlenebilir ise

$$f^\Delta(\xi) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f^\Delta(\xi') \quad (3.10)$$

olacak şekilde $\xi, \xi' \in [a, b)$ vardır [1].

3.1.2. Tanım

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{T}^{K^2} = (\mathbb{T}^K)^K$ olsun. Eğer f^Δ mevcut ise

$$(f^\Delta)^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f^\Delta(\sigma(t)) - f^\Delta(s)}{\sigma(t) - s} \quad (3.11)$$

ifadesine f fonksiyonunun t noktasındaki ikinci mertebeden delta türevi denir [1].

3.1.5. Örnek

$q > 1$ için $q^\mathbb{Z} = \{q^k: k \in \mathbb{Z}\}$ ve $\overline{q^\mathbb{Z}} = q^\mathbb{Z} \cup \{0\}$ olarak tanımlanır. Bu durumda $\mathbb{T} = \overline{q^\mathbb{Z}}$ olarak alınırsa

$\sigma(t) = \inf\{q^n: n \in [m+1, \infty)\} = q^{m+1} = qq^m = qt$ ve $t = q^m \in \mathbb{T}$ ise $\sigma(0) = 0$ dır. Buradan her $t \in \mathbb{T}$ için $\sigma(t) = qt, \rho(t) = \frac{t}{q}$ ve $\mu(t) = \sigma(t) - t = qt - t = t(q-1)$ olarak elde edilir. Böylece 0, sağ yoğun minimum ve $\mathbb{T}$ zaman skalasında diğer tüm noktalar izole noktadır.

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve her $t \in \mathbb{T} \setminus \{0\}$ için

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(qt) - f(t)}{(q-1)t}$$

ve

$$f^\Delta(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(0) - f(s)}{0 - s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(s) - f(0)}{s}$$

olur. $t \neq 0$ olmak üzere ikinci türevi hesaplırsak

$$(f^\Delta)^\Delta(t) = \frac{f^\Delta(\sigma(t)) - f^\Delta(t)}{\mu(t)}$$

$$= \frac{f^\Delta(qt) - f^\Delta(t)}{(q-1)t}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{f(q^2t)-f(qt)}{q(q-1)t} - \frac{f(qt)-f(t)}{(q-1)t}}{(q-1)t} \\
&= \frac{f(q^2t) - (q+1)f(qt) + qf(t)}{q(q-1)^2t^2}
\end{aligned}$$

elde edilir.

3.1.6. Örnek

Genel olarak f ve g nin ikisi de iki kez türevlenebilir olsa bile fg iki kez türevlenemeyebilir. Şöyle ki

$$(fg)^\Delta = f^\Delta g + f^\sigma g^\Delta$$

olduğundan f ve g iki kez türevlenebilir ve f^σ türevlenebilir ise bu durumda

$$\begin{aligned}
(fg)^{\Delta\Delta} &= (f^\Delta g + f^\sigma g^\Delta)^\Delta \\
&= f^{\Delta\Delta} g + f^{\Delta\sigma} g^\Delta + f^{\sigma\Delta} g^\Delta + f^{\sigma\sigma} g^{\Delta\Delta} \\
&= f^{\Delta\Delta} g + (f^{\Delta\sigma} + f^{\sigma\Delta}) g^\Delta + f^{\sigma\sigma} g^{\Delta\Delta}
\end{aligned}$$

olur.

3.1.3. Tanım

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonunun $\mathbb{T}$ üzerinde sağ yoğun noktalarında sonlu bir sağ limiti ve sol yoğun noktalarında sonlu bir sol limiti varsa f fonksiyonuna düzenli fonksiyon denir [1].

3.1.4. Tanım

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu $\mathbb{T}$ üzerinde tüm sağ yoğun noktalarında sürekli ve $\mathbb{T}$ üzerinde sol yoğun noktalarında sonlu bir sol limiti varsa f

fonksiyonuna rd-sürekli fonksiyon denir. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı rd-sürekli fonksiyonların kümesi

$$C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

şeklinde gösterilir. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlanan rd-sürekli ve delta türevlenebilir fonksiyonların kümesi

$$C_{rd}^1 = C_{rd}^1(\mathbb{T}) = C_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

şeklinde gösterilir [1].

3.1.4. Teorem

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda

- (i) Eğer f fonksiyonu sürekli ise f fonksiyonu rd-sürekli.
- (ii) Eğer f fonksiyonu rd-sürekli ise f fonksiyonu düzenlidir.
- (iii) σ ileri sıçrama operatörü rd-sürekli.
- (iv) Eğer f fonksiyonu düzenli veya rd-sürekli ise, bu durumda f^σ fonksiyonu da aynı şekildedir.
- (v) f sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu düzenli veya rd-sürekli ise $f \circ g$ fonksiyonu da aynı şekildedir [1].

3.1.5. Tanım

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı sürekli bir fonksiyon olsun. $D \subset \mathbb{T}^K$ ve $\mathbb{T}^K \setminus D$ bölgesi sayılabilir ve $\mathbb{T}$ nin sağ saçılımlı elemanlarını içermeyen ve her bir $t \in D$ noktasında f fonksiyonu türevlenebilir ise, bu taktirde f fonksiyonu D türevlenebilir bölgesinde ön türevlenebilirdir denir [1].

3.1.5. Teorem

Kapalı bir aralıkta her düzenli fonksiyon sınırlıdır [1].

3.1.6. Teorem

f ve g fonksiyonları $\mathbb{T}$ üzerinde tanımlanan reel değerli ve D türevlenebilir bölgesinde ön türevlenebilir iki fonksiyon olmak üzere her $t \in D$ için

$$|f^\Delta(t)| \leq g^\Delta(t) \quad (3.12)$$

şartı sağlanırsa bu durumda $r \leq s$ olmak üzere, her $r, s \in \mathbb{T}$ için

$$|f(s) - f(r)| \leq g(s) - g(r) \quad (3.13)$$

elde edilir [1].

3.1.6. Tanım

f düzenli bir fonksiyon olsun. Böylece her $t \in D$ için D türevlenebilir bölgesinde ön türevlenebilir ve $F^\Delta(t) = f(t)$ olacak şekilde bir F fonksiyonu vardır [1].

3.2. Delta İntegral

3.2.1. Tanım

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ düzenli bir fonksiyon, f fonksiyonunun ön antitürevi F ve c keyfi bir sabit olmak üzere f fonksiyonunun belirsiz integrali

$$\int f(t) \Delta t = F(t) + c \quad (3.14)$$

biçiminde tanımlanır.

Tüm $a, b \in \mathbb{T}$ için f nin a dan b ye delta integrali

$$\int_a^b f(t) \Delta t = F(b) - F(a) \quad (3.15)$$

ile tanımlanır.

Eğer her $t \in \mathbb{T}^k$ için $F^\Delta(t) = f(t)$ şartı sağlanıyorsa bu durumda $F: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun anti türevi denir [1].

3.2.1. Örnek

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $f(t) = a^t$ ve $a \neq 1$ olmak üzere $\int a^t \Delta t$ integralini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} f^\Delta(t) &= \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} \\ &= \frac{a^{\sigma(t)} - a^t}{t + 1 - t} \\ &= \frac{a^{t+1} - a^t}{1} \\ &= a^t(a - 1) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $a \neq 1$ olduğundan

$$\left[\frac{a^t}{a - 1} \right]^\Delta = \Delta \left(\frac{a^t}{a - 1} \right) = \frac{a^{t+1} - a^t}{a - 1} = a^t$$

eşitliğini elde ederiz ki bunun anlamı c sabit olmak üzere

$$\int a^t \Delta t = \frac{a^t}{a - 1} + c$$

olmasıdır.

3.2.1. Teorem

$f \in C_{rd}$ ve $t \in \mathbb{T}^K$ ise bu durumda

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau) \Delta\tau = \mu(t)f(t) \quad (3.16)$$

dır [2].

3.2.2. Teorem

$a, b, c \in \mathbb{T}$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f, g \in C_{rd}$ ise bu durumda

$$(i) \int_a^b [f(t) + g(t)] \Delta t = \int_a^b f(t) \Delta t + \int_a^b g(t) \Delta t \quad (3.17)$$

$$(ii) \int_a^b (\alpha f)(t) \Delta t = \alpha \int_a^b f(t) \Delta t \quad (3.18)$$

$$(iii) \int_a^b f(t) \Delta t = - \int_b^a f(t) \Delta t \quad (3.19)$$

$$(iv) \int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^c f(t) \Delta t + \int_c^b f(t) \Delta t \quad (3.20)$$

$$(v) \int_a^b f(\sigma(t)) g^\Delta(t) \Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t) g(t) \Delta t \quad (3.21)$$

$$(vi) \int_a^b f(t) g^\Delta(t) \Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t) g(\sigma(t)) \Delta t \quad (3.22)$$

$$(vii) \int_a^a f(t) \Delta(t) = 0 \quad (3.23)$$

$$(viii) \text{ Eğer } [a, b] \text{ üzerinde } |f(t)| \leq g(t) \text{ ise } \left| \int_a^b f(t) \Delta t \right| \leq \int_a^b g(t) \Delta t, \quad (3.24)$$

$$(ix) \text{ Eğer bütün } a \leq t < b \text{ için } f(t) \geq 0 \text{ ise } \int_a^b f(t) \Delta t \geq 0 \quad (3.25)$$

ifadeleri geçerlidir [1].

3.2.3. Teorem

$a, b \in \mathbb{T}$ ve $f \in C_{rd}$ olmak üzere

(i) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise $\int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^b f(t) dt$ biçiminde bilinen Riemann anlamında integraldir.

(ii) Eğer $[a, b]$ kapalı aralığı sadece izole noktaları içeriyorsa

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \begin{cases} \sum_{t \in [a, b)} \mu(t) f(t), & a < b \\ 0, & a = b \\ -\sum_{t \in [b, a)} \mu(t) f(t), & a > b \end{cases} \quad (3.26)$$

olur.

(iii) Eğer $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}, h > 0$ ise

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \begin{cases} \sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} f(kh)h, & a < b \\ 0, & a = b \\ -\sum_{k=\frac{b}{h}}^{\frac{a}{h}-1} f(kh)h, & a > b \end{cases} \quad (3.27)$$

elde edilir.

(iv) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \begin{cases} \sum_{t=a}^{b-1} f(t), & a < b \\ 0, & a = b \\ -\sum_{t=b}^{a-1} f(t), & a > b \end{cases} \quad (3.28)$$

biçimindedir [1].

3.2.2. Örnek

$b < c$ için $\mathbb{T} = [a, b]_{\mathbb{R}} \cup \{c\}$ olmak üzere $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$\int_a^c f(t)\Delta t$ integralini hesaplayalım. Teorem 3.2.1, Teorem 3.2.2 (iv) ve Teorem 3.2.3 (i) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
 \int_a^c f(t)\Delta t &= \int_a^b f(t)\Delta t + \int_b^c f(t)\Delta t \\
 &= \int_a^b f(t)dt + \int_b^{\sigma(b)} f(t)\Delta t \\
 &= \int_a^b f(t)dt + f(b)\mu(b) \\
 &= \int_a^b f(t)dt + (c-b)f(b)
 \end{aligned}$$

elde edilir.

4. NABLA TÜREV VE NABLA İNTEGRAL

4.1. Nabla Türev

4.1.1. Tanım

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası, $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}_K$ olsun. Eğer $L \in \mathbb{R}$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$|f(\rho(t)) - f(s) - L[\rho(t) - s]| \leq \varepsilon |\rho(t) - s| \quad (4.1)$$

eşitsizliğini her $s \in U_\delta(t)$ için sağlayacak şekilde bir $U_\delta(t) = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ komşuluğu bulunabiliyor ise $L \in \mathbb{R}$ sayısına f fonksiyonunun $t \in \mathbb{T}_K$ noktasındaki nabla türevi denir ve bu durum $L = f^\nabla(t)$ ile gösterilir [3].

4.1.1. Teorem

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $t \in \mathbb{T}_K$ olsun. Böylece

- (i) f fonksiyonu t noktasında nabla türevlenebilir ise bu durumda f fonksiyonu t noktasında sürekli.
- (ii) f fonksiyonu t noktasında sürekli ve t noktası sol saçılımlı ise bu durumda f fonksiyonu t noktasında nabla türevlenebilirdir ve

$$f^\nabla(t) = \frac{f(t) - f(\rho(t))}{\eta(t)} \quad (4.2)$$

biçimindedir.

- (iii) t noktası sol yoğun ise f fonksiyonu t noktasında nabla türevlenebilirdir ve

$$f^\nabla(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} \quad (4.3)$$

dır.

(iv) f fonksiyonu t noktasında nabla türevlenebilir ise

$$f^\rho(t) = f(t) - \eta(t)f^\nabla(t) \quad (4.4)$$

dır [3].

4.1.1. Örnek

(i) $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise $t \in \mathbb{R}$ için $f^\nabla(t) = f'(t)$ olur.

(ii) $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise $t \in \mathbb{Z}$ için $f^\nabla(t) = \nabla f(t) = f(t) - f(t-1)$ geri fark operatörüdür [3].

4.1.2. Teorem

$f, g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı ve $t \in \mathbb{T}_K$ noktasında nabla türevlenebilir olsunlar. Bu durumda

(i) $f + g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu da t noktasında nabla türevlenebilirdir ve

$$(f + g)^\nabla(t) = f^\nabla(t) + g^\nabla(t) \quad (4.5)$$

olur.

(ii) Her α sabiti için, $\alpha f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu da nabla türevlenebilirdir ve

$$(\alpha f)^\nabla(t) = \alpha f^\nabla(t) \quad (4.6)$$

biçimindedir.

(iii) $fg: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu da nabla türevlenebilirdir ve

$$(fg)^\nabla(t) = f(t)g^\nabla(t) + f^\nabla(t)g(\rho(t)) \quad (4.7a)$$

$$= f^\nabla(t)g(t) + f(\rho(t))g^\nabla(t) \quad (4.7b)$$

dır.

(iv) $f(t)f(\rho(t)) \neq 0$ ise $\frac{1}{f}$ fonksiyonu nabla türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{1}{f}\right)^\nabla(t) = -\frac{f^\nabla(t)}{f(t)f(\rho(t))} \quad (4.8)$$

(v) Eğer $g(t)g(\rho(t)) \neq 0$ ise $\frac{f}{g}$ fonksiyonu nabla türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^\nabla(t) = \frac{f^\nabla(t)g(t) - f(t)g^\nabla(t)}{g(t)g(\rho(t))} \quad (4.9)$$

şeklindedir [3].

4.1.3. Teorem

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ de sürekli ve $[a, b)$ de türevlenebilir ise

$$f^\nabla(\xi) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f^\nabla(\xi') \quad (4.10)$$

olacak şekilde $\xi, \xi' \in [a, b)$ vardır [3].

4.2. Nabla İntegral

4.2.1. Tanım

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu düzenli ise $F^\nabla(t) = f(t)$ olacak şekilde bir F fonksiyonu vardır ve F fonksiyonuna f fonksiyonun antitürevi denir [3].

4.2.2. Tanım

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $t \in \mathbb{T}_K$ için $F^\nabla(t) = f(t)$ şartı sağlanırsa $F: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna f fonksiyonunun nabla antitürevi denir ve c keyfî bir sabit olmak üzere f fonksiyonunun nabla belirsiz integrali

$$\int f(t) \nabla t = F(t) + c \quad (4.11)$$

biçiminde tanımlanır.

Tüm $a, b \in \mathbb{T}$ için f nin a dan b ye nabla integrali

$$\int_a^b f(t) \nabla t = F(b) - F(a) \quad (4.12)$$

biçimindedir [3].

4.2.3. Tanım

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonunun $\mathbb{T}$ üzerinde sol yoğun noktalarda sürekli ve $\mathbb{T}$ üzerinde sağ yoğun noktalarda sağdan limitleri varsa f fonksiyonuna ld-sürekli fonksiyon denir [3].

4.2.1. Teorem

Eğer $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ld-sürekli ve $t \in \mathbb{T}_K$ ise, bu durumda

$$\int_{\rho(t)}^t f(\tau) \nabla \tau = f(t) \eta(t) \quad (4.13)$$

dır [3].

4.2.2. Teorem

$a, b, c \in \mathbb{T}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $f, g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ld-sürekli ise bu durumda

$$(i) \int_a^b [f(t) + g(t)] \nabla t = \int_a^b f(t) \nabla t + \int_a^b g(t) \nabla t \quad (4.14)$$

$$(ii) \int_a^b (\alpha f)(t) \nabla t = \alpha \int_a^b f(t) \nabla t \quad (4.15)$$

$$(iii) \int_a^b f(t) \nabla t = - \int_b^a f(t) \nabla t \quad (4.16)$$

$$(iv) \int_a^b f(t) \nabla(t) = \int_a^c f(t) \nabla(t) + \int_c^b f(t) \nabla t \quad (4.17)$$

$$(v) \int_a^b f(\rho(t))g^\nabla(t)\nabla t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\nabla(t)g(t)\nabla t \quad (4.18)$$

$$(vi) \int_a^b f(t)g^\nabla(t)\nabla t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\nabla(t)g(\rho(t))\nabla t \quad (4.19)$$

$$(vii) \int_a^a f(t)\nabla t = 0 \quad (4.20)$$

ifadeleri vardır [3].

4.2.3. Teorem

$a, b \in \mathbb{T}$ ve $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ld-süreklili olsun. Böylece

(i) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise $\int_a^b f(t)\nabla t = \int_a^b f(t)dt$ biçiminde bilinen Riemann integraline eşittir.

(ii) $\mathbb{T}$ sadece izole noktaları içeriyorsa

$$\int_a^b f(t)\nabla t = \begin{cases} \sum_{t \in (a,b]} \eta(t)f(t), & a < b \\ 0, & a = b \\ -\sum_{t \in (b,a]} \eta(t)f(t), & a > b \end{cases} \quad (4.21)$$

dır.

(iii) $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, $h > 0$ olarak alınırsa

$$\int_a^b f(t)\nabla t = \begin{cases} \sum_{k=\frac{a}{h}+1}^{\frac{b}{h}} f(kh)h, & a < b \\ 0, & a = b \\ -\sum_{k=\frac{b}{h}+1}^{\frac{a}{h}} f(kh)h, & a > b \end{cases} \quad (4.22)$$

dır.

(iv) $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olarak alınırsa

$$\int_a^b f(t) \nabla t = \begin{cases} \sum_{t=a+1}^b f(t), & a < b \\ 0, & a = b \\ -\sum_{t=b+1}^a f(t), & a > b \end{cases} \quad (4.23)$$

biçimindedir [3].

4.2.1. Sonuç

$t \in \mathbb{T}_K^K$ ve $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda f fonksiyonunun t de delta türevinin var olması nabla türevinin de var olduğu anlamına gelmez. Terside doğrudur [4].

İspat

$\mathbb{T} = [-2, -1] \cup [0, 1]$ zaman skalası için

$$f(t) = \begin{cases} t \sin\left(\frac{1}{t}\right), & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

fonksiyonu olmak üzere bu f fonksiyonu 0 noktasında süreklidir ve $0 \in \mathbb{T}$ noktası sağ yoğun, sol saçılımlıdır. Teorem 3.1.1 (ii) den dolayı f fonksiyonu 0 noktasında nabla türevlenebilir. Fakat 0 noktasında

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

sonlu bir limiti yoktur. Böylece f , 0 noktasında delta türevlenebilir değildir.

Aynı f fonksiyonunun 0 noktasında delta türevinin varlığında, nabla türevinin de var olduğu anlamına gelmeyeceğini göstermek için $\mathbb{T} = [-1, 0] \cup [1, 2]$ zaman skalası alınabilir.

5. DIAMOND ALFA TÜREV VE DIAMOND ALFA İNTEGRAL

5.1. Diamond- α Türev

Bu kesimde gösterimin sadeliği bakımından $\mu_{ts} = \sigma(t) - s$ ve $\eta_{ts} = \rho(t) - s$ ile göstereceğiz.

5.1.1. Tanım

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası, $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}_K^K$ olsun. Eğer $L \in \mathbb{R}$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$|\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\eta_{ts} + (1 - \alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - L\mu_{ts}\eta_{ts}| \leq \varepsilon|\mu_{ts}\eta_{ts}| \quad (5.1)$$

eşitsizliğini her $s \in U_\delta(t)$ için sağlayacak şekilde bir $U_\delta(t) = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ komşuluğu bulunabiliyor ise $L \in \mathbb{R}$ sayısına f fonksiyonunun $t \in \mathbb{T}_K^K$ noktasındaki diamond- α türevi denir ve $L = f^{\diamond\alpha}(t)$ ile gösterilir [4].

Hatırlatma: Diamond- α türev tanımında $\alpha = 1$ alınırsa $f^{\diamond\alpha}(t)$ diamond- α türevi, $f^\Delta(t)$ türeve ve $\alpha = 0$ alınırsa $f^\nabla(t)$ türeve indirgenir. Diamond- α türev birçok avantajlara sahiptir.

Yukarıda tanımlanan fonksiyon iyi tanımlıdır. Gerçekten, her $\varepsilon > 0$ verildiğinde t nin U_1 ve U_2 komşuluğundaki her bir $\phi_1(t)$ ve $\phi_2(t)$ değerler olmak üzere her $s \in U_1$ için

$$|\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\eta_{ts} + (1 - \alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - \phi_1(t)\mu_{ts}\eta_{ts}| < \varepsilon|\mu_{ts}\eta_{ts}| \quad (5.2)$$

ve her $s \in U_2$ için

$$|\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\eta_{ts} + (1 - \alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - \phi_2(t)\mu_{ts}\eta_{ts}| < \varepsilon|\mu_{ts}\eta_{ts}| \quad (5.3)$$

yazılabilir. $\varepsilon > 0$ için $\varepsilon_* = \varepsilon/2$ olsun. Bu takdirde her $s \in U = U_1 \cap U_2$ için

$$\begin{aligned}
|\phi_1(t) - \phi_2(t)| |\mu_{ts} \eta_{ts}| &= |\phi_1(t) \mu_{ts} \eta_{ts} - \phi_2(t) \mu_{ts} \eta_{ts}| \\
&= |-\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\eta_{ts} - (1 - \alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} + \phi_1(t) \mu_{ts} \eta_{ts} \\
&\quad + \alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\eta_{ts} + (1 - \alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - \phi_2(t) \mu_{ts} \eta_{ts}| \\
&< |\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\eta_{ts} + (1 - \alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - \phi_1(t) \mu_{ts} \eta_{ts}| \\
&\quad + |\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\eta_{ts} + (1 - \alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - \phi_2(t) \mu_{ts} \eta_{ts}| \\
&< \varepsilon_* |\mu_{ts} \eta_{ts}| + \varepsilon_* |\mu_{ts} \eta_{ts}| < \varepsilon |\mu_{ts} \eta_{ts}|
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $|\phi_1(t) - \phi_2(t)| < \varepsilon$ elde edilir ve $\varepsilon \rightarrow 0$ alınırsa $\phi_1(t) = \phi_2(t)$ olur.

5.1.1. Örnek

$k \in \mathbb{R}$ olmak üzere her $t \in \mathbb{T}$ için $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(t) = k$ ise $f^{\diamond\alpha}(t) = 0$ dır. Gerçekten türev tanımını kullanılırsa her $s \in U_\delta(t)$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
&|\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\eta_{ts} + (1 - \alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - f^{\diamond\alpha}(t) \mu_{ts} \eta_{ts}| \\
&= |\alpha[k - k]\eta_{ts} + (1 - \alpha)[k - k]\mu_{ts} - 0 \mu_{ts} \eta_{ts}| \\
&= 0 \leq \varepsilon |\mu_{ts} \eta_{ts}|
\end{aligned}$$

olur ki bu da $f^{\diamond\alpha}(t) = 0$ demektir.

5.1.2. Örnek

Her $t \in \mathbb{T}$ için $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(t) = t$ ise $f^{\diamond\alpha}(t) = 1$ dir. Gerçekten $s \in \mathbb{T}$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
& |\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\eta_{ts} + (1 - \alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - f^{\diamond\alpha}(t)\mu_{ts}\eta_{ts}| \\
&= |\alpha[\sigma(t) - s]\eta_{ts} + (1 - \alpha)[\rho(t) - s]\mu_{ts} - \mu_{ts}\eta_{ts}| \\
&= |\alpha\mu_{ts}\eta_{ts} + (1 - \alpha)\mu_{ts}\eta_{ts} - \mu_{ts}\eta_{ts}| = 0 \leq \varepsilon|\mu_{ts}\eta_{ts}|
\end{aligned}$$

sağlandığından $f^{\diamond\alpha}(t) = 1$ dir.

5.1.1. Teorem

$0 \leq \alpha \leq 1$ olmak üzere f fonksiyonu $t \in \mathbb{T}$ de hem Δ -türevlenebilir hem de ∇ -türevlenebilirse bu durumda f fonksiyonu t de $\diamond_\alpha$ -türevlenebilirdir ve bu türev

$$f^{\diamond\alpha}(t) = \alpha f^\Delta(t) + (1 - \alpha)f^\nabla(t) \quad (5.4)$$

biçimindedir [4].

İspat

$f^\Delta(t)$ ve $f^\nabla(t)$ türevleri mevcut olsun. Böylece her $\varepsilon > 0$ için U_1 ve U_2 komşulukları vardır ki her $s \in U_1$ için

$$|[f^\sigma(t) - f(s)] - f^\Delta(t)\mu_{ts}| < \varepsilon|\mu_{ts}| \quad (5.5)$$

ve her $s \in U_2$ için

$$|[f^\rho(t) - f(s)] - f^\nabla(t)\eta_{ts}| < \varepsilon|\eta_{ts}| \quad (5.6)$$

yazılır. Bu takdirde her $s \in U_1$ için

$$|\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\eta_{ts} - \alpha f^\Delta(t)\mu_{ts}\eta_{ts}| < \alpha\varepsilon|\mu_{ts}\eta_{ts}| \quad (5.7)$$

ve her $s \in U_2$ için

$$|(1 - \alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - (1 - \alpha)f^\nabla(t)\mu_{ts}\eta_{ts}| < (1 - \alpha)\varepsilon|\mu_{ts}\eta_{ts}| \quad (5.8)$$

elde edilir. Böylece her $s \in U = U_1 \cap U_2$ için

$$\begin{aligned} & |\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\eta_{ts} + (1 - \alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - [\alpha f^\Delta(t) + (1 - \alpha)f^\nabla(t)]\mu_{ts}\eta_{ts}| \\ & \leq |\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\eta_{ts} - \alpha f^\Delta(t)\mu_{ts}\eta_{ts}| \\ & \quad + |(1 - \alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - (1 - \alpha)f^\nabla(t)\mu_{ts}\eta_{ts}| \\ & < \alpha\varepsilon|\mu_{ts}\eta_{ts}| + (1 - \alpha)\varepsilon|\mu_{ts}\eta_{ts}| = \varepsilon|\mu_{ts}\eta_{ts}| \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $f^{\diamond\alpha}(t)$ türevi vardır ve

$$f^{\diamond\alpha}(t) = \alpha f^\Delta(t) + (1 - \alpha)f^\nabla(t) \quad (5.9)$$

elde edilir.

5.1.3. Örnek

(i) $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alınırsa $t \in \mathbb{R}$ için

$$f^{\diamond\alpha}(t) = \alpha f^\Delta(t) + (1 - \alpha)f^\nabla(t) = \alpha f'(t) + (1 - \alpha)f'(t) = f'(t)$$

olur.

(ii) $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ alınırsa $t \in \mathbb{Z}$ için

$$\begin{aligned} f^{\diamond\alpha}(t) &= \alpha f^\Delta(t) + (1 - \alpha)f^\nabla(t) = \alpha \Delta f(t) + (1 - \alpha)\nabla f(t) \\ &= \alpha(f(t + 1) - f(t)) + (1 - \alpha)(f(t) - f(t - 1)) \\ &= (\alpha - 1)f(t - 1) + (1 - 2\alpha)f(t) + \alpha f(t + 1) \end{aligned}$$

olur.

Dikkat edilirse $\alpha = 1$ alındığında $f^{\diamond_1}(t) = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t)$ ileri fark operatörü, $\alpha = 0$ alındığında $f^{\diamond_0}(t) = f(t) - f(t-1) = \nabla f(t)$ geri fark operatörüdür. Böylece diamond- α türev ileri fark operatörünü ve geri fark operatörünü barındırır.

5.1.4. Örnek

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ve $f(t) = t^2$ olsun.

$$f^\Delta(t) = \Delta f(t) = f(t+1) - f(t) = (t+1)^2 - t^2 = 2t + 1 \text{ olur.}$$

$f^\Delta(t) = 0$ yapan değer $2t + 1 = 0$ dan $t = -\frac{1}{2}$, $\mathbb{Z}$ nin elemanı değildir.

$$f^\nabla(t) = \nabla f(t) = f(t) - f(t-1) = t^2 - (t-1)^2 = 2t - 1 \text{ olur.}$$

$f^\nabla(t) = 0$ yapan değer $2t - 1 = 0$ dan $t = \frac{1}{2}$, $\mathbb{Z}$ nin elemanı değildir.

$f^{\diamond_\alpha}(t) = \alpha f^\Delta(t) + (1 - \alpha)f^\nabla(t) = \alpha(2t + 1) + (1 - \alpha)(2t - 1)$ dır. Ancak $\alpha = 1/2$ alındığında $f^{\diamond_{\frac{1}{2}}}(t) = 0$ yapan değer $\frac{1}{2}(2t + 1) + \frac{1}{2}(2t - 1) = 0$ dan $t = 0$, $\mathbb{Z}$ nin elemanıdır. Bu sonuç geometrik olarak daha anlamlıdır.

5.1.1. Sonuç

$t \in \mathbb{T}$ noktası yoğun nokta olmak üzere $f'(t)$ varsa

$$f^{\diamond_\alpha}(t) = f^\Delta(t) = f^\nabla(t) = f'(t) \tag{5.10}$$

dır [4].

İspat

t noktası yoğun ve $f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$ sonlu değeri olarak limiti mevcut olsun. t nin yeterli küçük bir U komşuluğundaki her $s, t \in U$ için $h = s - t$ alınırsa

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \quad (5.11a)$$

$$= \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} \quad (5.11b)$$

olur. Teorem 3.1.1 (iii) den dolayı $f^\Delta(t) = f'(t)$ ve Teorem 4.1.1 (iii) den dolayı

$f^\nabla(t) = f'(t)$ olur. Böylece Teorem 5.1.1 den

$$f^{\diamond\alpha}(t) = \alpha f^\Delta(t) + (1 - \alpha) f^\nabla(t) = \alpha f'(t) + (1 - \alpha) f'(t) = f'(t) \quad (5.12)$$

dır.

5.1.1. Lemma

$t \in \mathbb{T}$ saçılımlı nokta olsun. Bu durumda f, t de süreklidir [4].

İspat

t saçılımlı nokta olsun. O zaman $\mu(t) > 0$ ve $\eta(t) > 0$ dır. $0 < \delta < \min(\mu(t), \eta(t))$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için t nin bir $U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ komşuluğunda sadece t elemanı olacağından $s = t$ olmalıdır ve böylece $|f(t) - f(s)| = 0 < \varepsilon$ olur.

5.1.2. Sonuç

$t \in \mathbb{T}$ saçılımlı nokta olsun. Bu durumda

$$(i) f^\Delta(t) \text{ vardır ve } f^\Delta(t) = \frac{f^\sigma(t) - f(t)}{\sigma(t) - t},$$

$$(ii) f^\nabla(t) \text{ vardır ve } f^\nabla(t) = \frac{f^\rho(t) - f(t)}{\rho(t) - t},$$

$$(iii) f^{\diamond\alpha}(t) \text{ vardır ve } f^{\diamond\alpha}(t) = \alpha \frac{f^\sigma(t) - f(t)}{\sigma(t) - t} + (1 - \alpha) \frac{f^\rho(t) - f(t)}{\rho(t) - t}$$

biçimindedir [4].

İspat

Lemma 5.1.1 den f, t de süreklidir. Böylece Teorem 3.1.1 (ii) kullanılarak (i) elde edilir. Teorem 4.1.1 (ii) den (ii) bulunur. Teorem 5.1.1 yardımıyla

$$f^{\diamond\alpha}(t) = \alpha f^{\Delta}(t) + (1 - \alpha) f^{\nabla}(t) \quad (5.13a)$$

$$= \alpha \frac{f^{\sigma(t)} - f(t)}{\sigma(t) - t} + (1 - \alpha) \frac{f^{\rho(t)} - f(t)}{\rho(t) - t} \quad (5.13b)$$

bulunur.

5.1.3. Sonuç

$t \in \mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ sol saçılımlı, sağ yoğun ve

$$f'(t^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \quad (5.14)$$

olsun. Böylece

$$(i) f^{\Delta}(t) = f'(t^+) \quad (5.15)$$

$$(ii) f^{\nabla}(t) = \frac{f^{\rho(t)} - f(t)}{\rho(t) - t} \quad (5.16)$$

$$(iii) f^{\diamond\alpha}(t) = \alpha f'(t^+) + (1 - \alpha) \frac{f^{\rho(t)} - f(t)}{\rho(t) - t} \quad (5.17)$$

biçimindedir [4].

İspat

$\delta < t - \rho(t)$ olmak üzere t nin tüm $U = (t - \delta, t + \delta)$ komşuluğundaki her $s, t \in U$ için $s - t > 0$ dir. Böylece $h = s - t$ alınırsa

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} \quad (5.18)$$

bulunur. Teorem 3.1.1 (iii) yardımıyla

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t^+) \quad (5.19)$$

olur. $f'(t^+)$ türevi olduğundan Teorem 4.1.1 (ii) den dolayı (ii) bulunur. Bu takdirde Teorem 5.1.1 yardımıyla

$$f^{\diamond_\alpha}(t) = \alpha f^\Delta(t) + (1 - \alpha) f^\nabla(t) \quad (5.20a)$$

$$= \alpha f'(t^+) + (1 - \alpha) \frac{f^\rho(t) - f(t)}{\rho(t) - t} \quad (5.20b)$$

bulunur.

5.1.4. Sonuç

$t \in \mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ sol yoğun, sağ saçılımlı ve

$$f'(t^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \quad (5.21)$$

olsun. Bu durumda

$$(i) f^\Delta(t) = \frac{f^\sigma(t) - f(t)}{\sigma(t) - t} \quad (5.22)$$

$$(ii) f^\nabla(t) = f'(t^-) \quad (5.23)$$

$$(iii) f^{\diamond_\alpha}(t) = \alpha \frac{f^\sigma(t) - f(t)}{\sigma(t) - t} + (1 - \alpha) f'(t^-) \quad (5.24)$$

biçimindedir [4].

5.1.2. Teorem

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası ve $0 \leq \alpha \leq 1$ olsun. f , t noktasında $\diamond_\alpha$ -türevlenebilir ise f , t noktasında süreklidir [4].

İspat

f , $t \in \mathbb{T}$ noktasında $\diamond_\alpha$ -türevlenebilir olsun. Eğer yoğun veya saçılımlı bir nokta ise, bu sonuçlar sırasıyla Sonuç 5.1.1 ve Sonuç 5.1.2 den bulunur. Burada t nin, sağ yoğun ve sol saçılımlı veya sağ saçılımlı ve sol yoğun olma durumları vardır.

t sağ yoğun ve sol saçılımlı olsun $\sigma(t) = t$ ve $\rho(t) < t$ olur. $\varepsilon \in (0, 1)$ olsun ve

$$\varepsilon_* = \frac{\varepsilon \alpha |\rho(t) - t|}{(1 - \alpha) |[f^\rho(t) - f(t)] - f^{\diamond_\alpha}(t) [\alpha(\rho(t) - t) - 1]| + |\rho(t) - t| + 1}$$

olsun. Böylece $0 < \varepsilon_* < 1$ dir. O zaman t nin bir U_1 komşuluğu ve her $s \in U_1$ için

$$\begin{aligned} & |\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\eta_{ts} + (1 - \alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - f^{\diamond_\alpha}(t)\mu_{ts}\eta_{ts}| \\ &= |\alpha[f(t) - f(s)][(\rho(t) - t) + (t - s)] \\ &+ (1 - \alpha)[(f^\rho(t) - f(t)) + (f(t) - f(s))](t - s) \\ &- f^{\diamond_\alpha}(t)(t - s)[(\rho(t) - t) + (t - s)]| \\ &= |\alpha[f(t) - f(s)](\rho(t) - t) + (1 - \alpha)[f^\rho(t) - f(t)](t - s) \\ &+ [f(t) - f(s)](t - s) - f^{\diamond_\alpha}(t)(t - s)[(\rho(t) - t) + (t - s)]| \\ &= |[f(t) - f(s)][\alpha(\rho(t) - t) + (t - s)] \\ &+ [(1 - \alpha)[f^\rho(t) - f(t)] - f^{\diamond_\alpha}(t)[\alpha(\rho(t) - t) + (t - s)]](t - s)| \\ &< \varepsilon_* |\mu_{ts}\eta_{ts}| = \varepsilon_* |(t - s)| |[(\rho(t) - t) + (t - s)]| \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
& \left| [f(t) - f(s)][\alpha(\rho(t) - t) + (t - s)] \right| \\
& - \left| [(1 - \alpha)[f^\rho(t) - f(t)] - f^{\diamond\alpha}(t)[\alpha(\rho(t) - t) + (t - s)](t - s) \right| \\
& < \varepsilon_* |(t - s)| |(\rho(t) - t) + (t - s)|
\end{aligned}$$

bulunur. t sol saçılımlı, sağ yoğun olduğundan her $s \in U_1$ için $\rho(t) < t \leq s$ olur. Böylece her $s \in U = U_1 \cap (t - \varepsilon_*, t + \varepsilon_*)$ için

$$\begin{aligned}
& |[f(t) - f(s)]\alpha(\rho(t) - t)| < |[f(t) - f(s)][\alpha(\rho(t) - t) + (t - s)]| \\
& < |(1 - \alpha)[f^\rho(t) - f(t)] - f^{\diamond\alpha}(t)[\alpha(\rho(t) - t) + (t - s)]||t - s| \\
& + \varepsilon_* |t - s| |(\rho(t) - t) + (t - s)| \\
& < \varepsilon_* |(1 - \alpha)[f^\rho(t) - f(t)] - f^{\diamond\alpha}(t)[\alpha(\rho(t) - t) - 1]| + \varepsilon_* [|\rho(t) - t| \\
& + 1]
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
|f(t) - f(s)| & < \frac{\varepsilon_* [|(1 - \alpha)[f^\rho(t) - f(t)] - f^{\diamond\alpha}(t)[\alpha(\rho(t) - t) - 1]| + |\rho(t) - t| + 1]}{\alpha|\rho(t) - t|} \\
& = \varepsilon
\end{aligned}$$

bulunur.

5.1.3. Teorem

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası ve $0 < \alpha < 1$ olsun. Eğer f, t noktasında $\diamond_\alpha$ -türevlenebilirse f, t noktasında hem Δ -türevlenebilir hem de ∇ -türevlenebilirdir [4].

İspat

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası ve $0 < \alpha < 1$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin ve $\varepsilon_* = \varepsilon \frac{1-\alpha}{1+\alpha} > 0$ olsun. f, t de $\diamond_\alpha$ -türevlenebilir olsun. Böylece Teorem 5.1.2 den f, t de sürekli. Eğer t , yoğun veya saçılımlı bir nokta ise bu sonuç sırasıyla Sonuç 5.1.1 ve Sonuç 5.1.2 den bulunur. Buradan t nin sağ yoğun ve sol saçılımlı veya sağ saçılımlı ve sol yoğun olması durumları vardır.

t sağ saçılımlı ve sol yoğun olsun. Böylece $\sigma(t) > t$ ve $\rho(t) = t$ dir. Ayrıca f, t de sürekli olduğundan Teorem 3.1.1 (ii) den f, t de Δ -türevlenebilirdir. Her $\varepsilon_* > 0$ için t nin bir U_1 komşuluğundaki her $s \in U_1$ için

$$|\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\eta_{ts} + (1 - \alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - f^{\diamond_\alpha}(t)\mu_{ts}\eta_{ts}| < \varepsilon_*|\mu_{ts}\eta_{ts}| \quad (5.25)$$

ve t nin bir U_2 komşuluğundaki her $s \in U_2$ için

$$|[f^\sigma(t) - f(s)] - f^\Delta(t)\mu_{ts}| < \varepsilon_*|\mu_{ts}| \quad (5.26)$$

yazılır. $\gamma, f^{\diamond_\alpha}(t) = \alpha f^\Delta(t) + (1 - \alpha)\gamma$ denklemindeki gibi seçilsin. O zaman t nin $U = U_1 \cap U_2$ komşuluğundaki her $s \in U$ için

$$\begin{aligned} & |\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\eta_{ts} + (1 - \alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - [\alpha f^\Delta(t) + (1 - \alpha)\gamma]\mu_{ts}\eta_{ts}| \\ &= |\alpha[f^\sigma(t) - f(s) - f^\Delta(t)\mu_{ts}]\eta_{ts} + (1 - \alpha)[f^\rho(t) - f(s) - \gamma\eta_{ts}]\mu_{ts}| \\ &< \varepsilon_*|\mu_{ts}\eta_{ts}| \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} & |(1 - \alpha)[f^\rho(t) - f(s) - \gamma\eta_{ts}]\mu_{ts}| \leq \varepsilon_*|\mu_{ts}\eta_{ts}| + |\alpha[f^\sigma(t) - f(s) - f^\Delta(t)\mu_{ts}]\eta_{ts}| \\ &< \varepsilon_*|\mu_{ts}\eta_{ts}| + \alpha\varepsilon_*|\mu_{ts}\eta_{ts}| = (1 + \alpha)\varepsilon_*|\mu_{ts}\eta_{ts}| \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda

$$|[f^\rho(t) - f(s)] - \gamma\eta_{ts}| < \varepsilon_* \frac{1+\alpha}{1-\alpha} |\eta_{ts}| = \varepsilon |\eta_{ts}| \quad (5.27)$$

olur. Böylece $f^\nabla(t) = \gamma$ vardır. t nin sağ yoğun, sol saçılımlı olduğu durum benzer şekilde ispatlanır.

Hatırlatma: $0 < \alpha < 1$ aralığında kesin eşitsizlikler yukarıdaki sonuçlar için gereklidir. $\alpha = 1$ durumunda $\diamond_\alpha$ türevi Δ -türeve indirgenir fakat Sonuç 4.2.1 den ∇ -türevi olduğu anlamına gelmez. $\alpha = 0$ durumu da benzerdir [4].

5.1.4. Teorem

$f, g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{T}$ de diamond- α türevlenebilir olsun. Bu durumda

(i) $f + g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{T}$ de diamond- α türevlenebilirdir ve

$$(f + g)^{\diamond_\alpha}(t) = f^{\diamond_\alpha}(t) + g^{\diamond_\alpha}(t) \quad (5.28)$$

(ii) Herhangi bir c sabiti için $cf: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{T}$ de diamond- α türevlenebilirdir ve

$$(cf)^{\diamond_\alpha}(t) = cf^{\diamond_\alpha}(t) \quad (5.29)$$

(iii) $fg: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{T}$ de diamond- α türevlenebilirdir ve

$$(fg)^{\diamond_\alpha}(t) = f^{\diamond_\alpha}(t)g(t) + \alpha f^\sigma(t)g^\Delta(t) + (1 - \alpha)f^\rho(t)g^\nabla(t) \quad (5.30)$$

(iv) $g(t)g^\sigma(t)g^\rho(t) \neq 0$ için $1/g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{T}$ de diamond- α türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{1}{g}\right)^{\diamond_\alpha}(t) = -\frac{(g^\sigma(t)+g^\rho(t))g^{\diamond_\alpha}(t)-\alpha g^\Delta(t)g^\sigma(t)-(1-\alpha)g^\nabla(t)g^\rho(t)}{g(t)g^\sigma(t)g^\rho(t)} \quad (5.31)$$

(v) $g(t)g^\sigma(t)g^\rho(t) \neq 0$ için $f/g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{T}$ de diamond- α türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\diamond\alpha}(t) = \frac{f^{\diamond\alpha}(t)g^{\sigma}(t)g^{\rho}(t) - \alpha f^{\sigma}(t)g^{\rho}(t)g^{\Delta}(t) - (1-\alpha)f^{\rho}(t)g^{\sigma}(t)g^{\nabla}(t)}{g(t)g^{\sigma}(t)g^{\rho}(t)} \quad (5.32)$$

dır [5].

İspat

(i) Diamond- α türevin tanımı, Teorem 3.1.2 (i) ve Teorem 4.1.2 (i) kullanılarak

$$\begin{aligned} (f + g)^{\diamond\alpha}(t) &= \alpha(f + g)^{\Delta}(t) + (1 - \alpha)(f + g)^{\nabla}(t) \\ &= \alpha f^{\Delta}(t) + \alpha g^{\Delta}(t) + (1 - \alpha)f^{\nabla}(t) + (1 - \alpha)g^{\nabla}(t) = f^{\diamond\alpha}(t) + g^{\diamond\alpha}(t) \end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) Diamond- α türevin tanımı, Teorem 3.1.2 (ii) ve Teorem 4.1.2 (ii) kullanılarak

$$(cf)^{\diamond\alpha}(t) = (\alpha c)f^{\Delta}(t) + (1 - \alpha)cf^{\nabla}(t) = c\left(\alpha f^{\Delta}(t) + (1 - \alpha)f^{\nabla}(t)\right) = cf^{\diamond\alpha}(t)$$

dır.

(iii) Diamond- α türevin tanımı, Teorem 3.1.2 (iii) ve Teorem 4.1.2 (iii) kullanılarak

$$\begin{aligned} (fg)^{\diamond\alpha}(t) &= \alpha(fg)^{\Delta}(t) + (1 - \alpha)(fg)^{\nabla}(t) \\ &= \alpha f^{\Delta}(t)g(t) + \alpha f^{\sigma}(t)g^{\Delta}(t) + (1 - \alpha)f^{\nabla}(t)g(t) + (1 - \alpha)f^{\rho}(t)g^{\nabla}(t) \\ &= f^{\diamond\alpha}(t)g(t) + \alpha f^{\sigma}(t)g^{\Delta}(t) + (1 - \alpha)f^{\rho}(t)g^{\nabla}(t) \end{aligned}$$

bulunur.

(iv) (iii) den ve Teorem 3.1.2 (iv) ve Teorem 4.1.2 (iv) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g}\right)^{\diamond_\alpha}(t) &= -\alpha \frac{g^\Delta(t)}{g(t)g^\sigma(t)} - (1-\alpha) \frac{g^\nabla(t)}{g(t)g^\rho(t)} \\
&= -\alpha \frac{g^\Delta(t)}{g(t)g^\sigma(t)} - (1-\alpha) \frac{g^\nabla(t)}{g(t)g^\sigma(t)} + (1-\alpha) \frac{g^\nabla(t)}{g(t)g^\sigma(t)} \\
&\quad - (1-\alpha) \frac{g^\nabla(t)}{g(t)g^\rho(t)} - \alpha \frac{g^\Delta(t)}{g(t)g^\rho(t)} + \alpha \frac{g^\Delta(t)}{g(t)g^\rho(t)} \\
&= -\frac{1}{g(t)g^\sigma(t)} \left(\alpha g^\Delta(t) + (1-\alpha)g^\nabla(t) \right) \\
&\quad - \frac{1}{g(t)g^\rho(t)} \left(\alpha g^\Delta(t) + (1-\alpha)g^\nabla(t) \right) \\
&\quad + \frac{1}{g(t)g^\sigma(t)g^\rho(t)} (\alpha g^\Delta(t)g^\sigma(t) + (1-\alpha)g^\nabla(t)g^\rho(t)) \\
&= -\frac{1}{g(t)g^\sigma(t)g^\rho(t)} ((g^\sigma(t) + g^\rho(t))g^{\diamond_\alpha}(t) - \alpha g^\Delta(t)g^\sigma(t) \\
&\quad - (1-\alpha)g^\nabla(t)g^\rho(t))
\end{aligned}$$

elde edilir.

(v) (iii) ve (iv) den $\frac{f(t)}{g(t)} = f(t) \frac{1}{g(t)}$ yazılarak bulunur.

5.1.5. Teorem

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{T}$ de diamond- α türevlenebilir olsun. Aşağıdakiler sağlanır [5].

$$(i) (f^{\diamond_\alpha})^\Delta(t) = \alpha(f^\Delta)^\Delta(t) + (1-\alpha)(f^\nabla)^\Delta(t) \quad (5.33)$$

$$(ii) (f^{\diamond_\alpha})^\nabla(t) = \alpha(f^\Delta)^\nabla(t) + (1-\alpha)(f^\nabla)^\nabla(t) \quad (5.34)$$

$$(iii) (f^\Delta)^{\diamond_\alpha}(t) = \alpha(f^\Delta)^\Delta(t) + (1 - \alpha)(f^\Delta)^\nabla(t) \neq (f^{\diamond_\alpha})^\Delta(t) \quad (5.35)$$

$$(iv) (f^\nabla)^{\diamond_\alpha}(t) = \alpha(f^\nabla)^\Delta(t) + (1 - \alpha)(f^\nabla)^\nabla(t) \neq (f^{\diamond_\alpha})^\nabla(t) \quad (5.36)$$

$$(v) (f^{\diamond_\alpha})^{\diamond_\alpha}(t) = \alpha^2(f^\Delta)^\Delta(t) + \alpha(1 - \alpha)((f^\nabla)^\Delta(t) + (f^\Delta)^\nabla(t)) + (1 - \alpha)^2(f^\nabla)^\nabla(t) \neq \alpha^2(f^\Delta)^\Delta(t) + (1 - \alpha)^2(f^\nabla)^\nabla(t) \quad (5.37)$$

İspat

(i) $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{T}$ de diamond- α türevlenebilir olsun. Teorem 5.1.1 den

$$(f^{\diamond_\alpha})^\Delta(t) = (\alpha f^\Delta + (1 - \alpha)f^\nabla)^\Delta(t) \quad (5.38a)$$

$$= \alpha(f^\Delta)^\Delta(t) + (1 - \alpha)(f^\nabla)^\Delta(t) \quad (5.38b)$$

olur.

(ii) $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{T}$ de diamond- α türevlenebilir olsun. Teorem 5.1.1 den

$$(f^{\diamond_\alpha})^\nabla(t) = (\alpha f^\Delta + (1 - \alpha)f^\nabla)^\nabla(t) \quad (5.39a)$$

$$= \alpha(f^\Delta)^\nabla(t) + (1 - \alpha)(f^\nabla)^\nabla(t) \quad (5.39b)$$

olur.

(iii) ve (iv) Teorem 5.1.1 den açıkça görülür.

(v) $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{T}$ de diamond- α türevlenebilir olsun. (iii) ve (iv) den

$$\begin{aligned}
(f^{\diamond\alpha})^{\diamond\alpha}(t) &= (\alpha f^\Delta + (1 - \alpha)f^\nabla)^{\diamond\alpha}(t) = (\alpha f^\Delta)^{\diamond\alpha}(t) + \left((1 - \alpha)f^\nabla\right)^{\diamond\alpha}(t) \\
&= \alpha^2(f^\Delta)^\Delta(t) + \alpha(1 - \alpha)(f^\Delta)^\nabla(t) + \alpha(1 - \alpha)(f^\nabla)^\Delta(t) \\
&\quad + (1 - \alpha)^2(f^\nabla)^\nabla(t) \\
&= \alpha^2(f^\Delta)^\Delta(t) + \alpha(1 - \alpha)((f^\nabla)^\Delta(t) + (f^\Delta)^\nabla(t)) + (1 - \alpha)^2(f^\nabla)^\nabla(t)
\end{aligned}$$

elde edilir.

5.1.6. Teorem

f fonksiyonu $[a, b]$ de sürekli ve $[a, b]$ nin her noktasında diamond- α türevlenebilir olsun. Eğer $f(a) = f(b)$ ise öyle $\xi, \xi' \in [a, b)$ noktaları vardır ki

$$f^{\diamond\alpha}(\xi') \leq 0 \leq f^{\diamond\alpha}(\xi) \quad (5.40)$$

sağlanır [6].

5.1.7. Teorem (Ortalama Değer Teoremi)

f fonksiyonu $[a, b]$ de sürekli ve $[a, b]$ nin her noktasında diamond- α türevlenebilir olsun. Bu durumda öyle $\xi, \xi' \in [a, b)$ noktaları vardır ki

$$f^{\diamond\alpha}(\xi')(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq f^{\diamond\alpha}(\xi)(b - a) \quad (5.41)$$

sağlanır [6].

5.2 Diamond- α İntegral

5.2.1. Tanım

$a, t \in \mathbb{T}$ ve $h: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. h nin a dan t ye delta-integral ve nabla-integrali varsa h nin a dan t ye diamond- α integrali

$$\int_a^t h(\tau) \diamond_{\alpha} \tau = \alpha \int_a^t h(\tau) \Delta \tau + (1 - \alpha) \int_a^t h(\tau) \nabla \tau, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (5.42)$$

ile tanımlanır. $\diamond_{\alpha}$ integral Δ ve ∇ integrallerinin lineer kombinasyonudur.

Genelde $t \in \mathbb{T}$ için

$$\left(\int_a^t f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau \right)^{\diamond_{\alpha}} = f(t) \quad (5.43)$$

sağlanmaz [5].

5.2.1. Örnek

$\mathbb{T} = \{0, 1, 2\}$, $a = 0$ ve $\tau \in \mathbb{T}$ için $h(\tau) = \tau^2$ olsun.

$$\left(\int_0^t h(\tau) \diamond_{\alpha} \tau \right)^{\diamond_{\alpha}} \Big|_{t=1} = h(1) + 2\alpha(1 - \alpha)$$

dır.

5.2.2. Örnek

(i) $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alınırsa $a, b \in \mathbb{T}$ için

$$\int_a^b f(t) \diamond_{\alpha} t = \alpha \int_a^b f(t) \Delta t + (1 - \alpha) \int_a^b f(t) \nabla t = \int_a^b f(t) dt$$

olur.

(ii) $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ alınırsa $a, b \in \mathbb{T}$ ve $a < b$ için

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(t) \diamond_{\alpha} t &= \alpha \int_a^b f(t) \Delta t + (1 - \alpha) \int_a^b f(t) \nabla t \\
 &= \alpha \sum_{t=a}^{b-1} f(t) + (1 - \alpha) \sum_{t=a+1}^b f(t) \\
 &= \alpha f(a) + \alpha \sum_{t=a+1}^{b-1} f(t) + (1 - \alpha) \sum_{t=a+1}^{b-1} f(t) + (1 - \alpha) f(b) \\
 &= \sum_{t=a+1}^{b-1} f(t) + \alpha f(a) + (1 - \alpha) f(b)
 \end{aligned}$$

dır.

(iii) $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ alınırsa $h > 0$, $a, b \in \mathbb{T}$ ve $a < b$ için

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(t) \diamond_{\alpha} t &= \alpha \int_a^b f(t) \Delta t + (1 - \alpha) \int_a^b f(t) \nabla t \\
 &= \alpha \sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} hf(kh) + (1 - \alpha) \sum_{k=\frac{a}{h}+1}^{\frac{b}{h}} hf(kh) \\
 &= \alpha f(a)h + \alpha \sum_{k=\frac{a}{h}+1}^{\frac{b}{h}-1} hf(kh) + (1 - \alpha) \sum_{k=\frac{a}{h}+1}^{\frac{b}{h}-1} hf(kh) + (1 - \alpha) f(b)h \\
 &= \sum_{k=\frac{a}{h}+1}^{\frac{b}{h}-1} hf(kh) + \alpha f(a)h + (1 - \alpha) f(b)h
 \end{aligned}$$

dır.

5.2.1. Teorem

$a, b, t \in \mathbb{T}$ ve $c \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

$$(i) \int_a^t (f(\tau) + g(\tau)) \diamond_{\alpha} \tau = \int_a^t f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau + \int_a^t g(\tau) \diamond_{\alpha} \tau \quad (5.44)$$

$$(ii) \int_a^t cf(\tau) \diamond_{\alpha} \tau = c \int_a^t f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau \quad (5.45)$$

$$(iii) \int_a^t f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau = - \int_t^a f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau \quad (5.46)$$

$$(iv) \int_a^t f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau = \int_a^b f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau + \int_b^t f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau \quad (5.47)$$

$$(v) \int_a^a f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau = 0 \quad (5.48)$$

dır [4].

İspat

(i) Teorem 3.2.2 (i) ve Teorem 4.2.2 (i) kullanılarak

$$\begin{aligned} & \int_a^t (f(\tau) + g(\tau)) \diamond_{\alpha} \tau \\ &= \alpha \int_a^t (f(\tau) + g(\tau)) \Delta \tau + (1 - \alpha) \int_a^t (f(\tau) + g(\tau)) \nabla \tau \\ &= \alpha \int_a^t f(\tau) \Delta \tau + (1 - \alpha) \int_a^t f(\tau) \nabla \tau \\ & \quad + \alpha \int_a^t g(\tau) \Delta \tau + (1 - \alpha) \int_a^t g(\tau) \nabla \tau \end{aligned}$$

$$= \int_a^t f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau + \int_a^t g(\tau) \diamond_{\alpha} \tau$$

bulunur.

(ii) Teorem 3.2.2 (ii) ve Teorem 4.2.2 (ii) kullanılarak

$$\begin{aligned} \int_a^t cf(\tau) \diamond_{\alpha} \tau &= \int_a^t \alpha cf(\tau) \Delta \tau + \int_a^t (1 - \alpha) cf(\tau) \nabla \tau \\ &= c \left(\int_a^t \alpha f(\tau) \Delta \tau + \int_a^t (1 - \alpha) f(\tau) \nabla \tau \right) = c \int_a^t f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau \end{aligned}$$

bulunur.

(iii) Teorem 3.2.2 (iii) ve Teorem 4.2.2 (iii) kullanılarak

$$\begin{aligned} \int_a^t f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau &= \alpha \int_a^t f(\tau) \Delta \tau + (1 - \alpha) \int_a^t f(\tau) \nabla \tau = -\alpha \int_t^a f(\tau) \Delta \tau - (1 - \alpha) \int_t^a f(\tau) \nabla \tau \\ &= - \left(\alpha \int_t^a f(\tau) \Delta \tau + (1 - \alpha) \int_t^a f(\tau) \nabla \tau \right) = - \int_t^a f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau \end{aligned}$$

bulunur.

(iv) Teorem 3.2.2 (iv) ve Teorem 4.2.2 (iv) kullanılarak

$$\begin{aligned} \int_a^t f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau &= \alpha \int_a^t f(\tau) \Delta \tau + (1 - \alpha) \int_a^t f(\tau) \nabla \tau \\ &= \alpha \int_a^b f(\tau) \Delta \tau + \alpha \int_b^t f(\tau) \Delta \tau + (1 - \alpha) \int_a^b f(\tau) \nabla \tau + (1 - \alpha) \int_b^t f(\tau) \nabla \tau \end{aligned}$$

$$= \int_a^b f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau + \int_b^t f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau$$

bulunur.

(v) Teorem 4.2.2 (vii) ve Teorem 4.2.2 (vii) kullanılarak

$$\int_a^a f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau = \alpha \int_a^a f(\tau) \Delta \tau + (1 - \alpha) \int_a^a f(\tau) \nabla \tau = 0$$

bulunur.

5.2.1. Lemma

f ve g , $[a, b]$ üzerinde sürekli fonksiyonlar olsun. Bu durumda

(i) Her $t \in [a, b]$ için $f(t) \geq 0$ ise

$$\int_a^b f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau \geq 0 \quad (5.49)$$

dır.

(ii) Eğer her $t \in [a, b]$ için $f(t) \leq g(t)$ oluyor ise

$$\int_a^b f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau \leq \int_a^b g(\tau) \diamond_{\alpha} \tau \quad (5.50)$$

şeklindedir.

(iii) f fonksiyonu $[a, b]$ de tanımlı olsun. $\int_a^b f^2(\tau) \diamond_{\alpha} \tau = 0$ olması için gerek ve yeter koşul her $t \in [a, b]$ için $f(t) = 0$ olmasıdır [7].

5.2.2. Teorem

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $t \in \mathbb{T}$ olsun.

(i) f, t den $\sigma(t)$ ye integrallenebilir ve

$$\int_t^{\sigma(t)} f(s) \diamond_{\alpha} s = \mu(t)(\alpha f(t) + (1 - \alpha)f^{\sigma}(t)) \quad (5.51)$$

(ii) $f, \rho(t)$ den t ye integrallenebilir ve

$$\int_{\rho(t)}^t f(s) \diamond_{\alpha} s = \eta(t)(\alpha f^{\rho}(t) + (1 - \alpha)f(t)) \quad (5.52)$$

dır [8].

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında ilk olarak bir zaman skalası üzerinde delta ve nabla türevleri ve bunların sahip olduğu özellikler incelenmiştir. Daha sonra zaman skalası üzerinde delta ve nabla türevler yardımıyla zaman skalası üzerinde delta ve nabla integraller tanıtılmış ve bunlara ait özellikler incelenmiştir. Son olarak bu türev ve integraller yardımıyla zaman skalası üzerinde diamond alfa türevi ve integrali tanıtılıp sahip olduğu bazı özellikler incelenmiştir.

Bu konuya hevesli olan okuyucular bundan sonra diamond alfa türev ve integralini kullanarak her hangi bir zaman skalası üzerinde tanımlı dinamik denklemlerin nicel ve nitel incelemelerini yapabilirler. Yapılacak bu incelemeler bugüne kadar yapılmış olan klasik çalışmaların bir genişletmesi olacağından bilim dünyası tarafından oldukça ilgi görecektir.



KAYNAKLAR

1. Bohner M., Peterson A. (2001). *Dynamic equations on time scales: An introduction with applications*. Boston: Birkhauser.
2. Agarwal R. P., Bohner M. (1999). Basic Calculus on time scales and some of its applications. *Results Math*, 35 (1-2), 3-22.
3. Martins N., Torres D. F. M. (2009). Calculus of variations on time scales with nabla derivatives. *Nonlinear Analysis* 71, 763-773.
4. Rogers, J. W., Sheng, Q. (2007). Notes on the diamond- α dynamic derivative on time scales. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 326(1), 228-241.
5. Davis, J. M., Fadag M., Henderson, J. and Sheng, Q. (2006). An explonation of combined dynamic derivatives on time scales and their applications. *Nonlinear Analysis Real World Applications*, 7(3), 395-413.
6. Özkan, U. M., Kaymakçalan, B. (2009). Basics of diamond- α partial dynamic calculus on time scales. *Mathematical and Computer Modelling*, 50(9), 1253-1261.
7. Ferreira, R. A., Ammi, M.R.S. and Torres, D. F. (2008). Diamond-alpha integral inequalities on time scales. *arXiv preprint arXiv:0805.0242*.
8. Agnieszka, B. Malinowska, Delfim, F. and Torres, M. (2009). The diamond-alpha Riemann integral and mean value theorems on time scales. *Dynamic Systems and Applications*, 18, 469-482.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : DOĞRUÖZ, Tuğba
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 25. 01. 1991, Ankara
e-mail : tugba.dgrz@gmail.com



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi	Devam Ediyor
Lisans	Gazi Üniversitesi	2014
Lise	Süleyman Demirel Anadolu Lisesi	2009

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
.....		

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

-

Hobiler

-



GAZİ GELECEKTİR..