



**GENEL SINIR KOŞULLU MATRİS KATSAYILI STURM-LIOUVİLLE
OPERATÖRLERİ**

Çağlar SARIMAN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

HAZİRAN 2016

Çağlar SARIMAN tarafından hazırlanan “GENEL SINIR KOŞULLU MATRİS KATSAYILI STURM-LİOUVILLE OPERATÖRLERİ” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Ahmet Ali ÖÇAL

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Başkan : Prof. Dr. Elgiz BAYRAM

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Üye : Doç. Dr. Esra KIR ARPAT

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Tez Savunma Tarihi: 29/06/2016

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Metin GÜRÜ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Çağlar SARIMAN

29.06.2016

GENEL SINIR KOŞULLU MATRİS KATSAYILI STURM-LİOUVILLE
OPERATÖRLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Çağlar SARIMAN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2016

ÖZET

Bu tezde, genel sınır koşullu matris katsayılı Sturm-Liouville operatörünün spektral analizi incelenmiştir. Bu operatörün Jost çözümü, Jost fonksiyonu ve bunların analitik ve asimptotik özellikleri öğrenilmiştir. Ayrıca bu operatörün özdeğerlerinin ve spektral tekilliklerinin yapısı detaylı olarak incelenmiştir.

Bilim Kodu : 20404
Anahtar Kelimeler : Sturm-Liouville Operatörleri, Spektral Teori, Sınır Değer Problemi, Özdeğerler
Sayfa Adedi : 45
Danışman : Prof. Dr. Ahmet Ali ÖÇAL

MATRIX STURM-LIOUVILLE OPERATORS WITH GENERAL BOUNDARY
CONDITIONS

(M. Sc. Thesis)

Çağlar SARIMAN

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2016

ABSTRACT

In this thesis, the spectral analysis of matrix Sturm-Liouville operators with general boundary conditions was investigated. Jost solution and Jost function of this operator has been learned, analytic and asymptotic properties about this operator has been studied. Moreover, the structure of eigenvalues and spectral singularities was investigated in detail.

Science Code : 20404

Key Words : Sturm-Liouville Operators, Spectral Theory, Boundary Value Problem, Eigenvalues

Page Number : 45

Supervisor : Prof. Dr. Ahmet Ali ÖÇAL

TEŞEKKÜR

Bu tezi yazma süreci boyunca benden desteklerini esirgemeyen, bütün bilgilerini ve tecrübelerini benimle paylaşan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ahmet Ali ÖÇAL' a ve Sayın Prof. Dr. Elgiz BAYRAM'a, ayrıca her zaman yanımda olan sevgili aileme teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	3
3. GENEL SINIR KOŞULLU MATRİS KATSAYILI STURM-LİOUVILLE OPERATÖRLERİNİN SPEKTRAL ANALİZİ	7
4. ÖZDEĞERLER VE SPEKTRAL TEKİLLİKLER	25
4.1. Jost Fonksiyonunun Asimptotiği.....	25
4.2. L 'nin Diskret Spektrumu	28
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	41
KAYNAKLAR	43
ÖZGEÇMİŞ	45

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{C}_{\pm}$	$\{z \in \mathbb{C}: \pm \operatorname{Im} z > 0\}$
$\bar{\mathbb{C}}_{\pm}$	$\{z \in \mathbb{C}: \pm \operatorname{Im} z \geq 0\}$
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\sigma(L)$	L operatörünün spektrumu
$\sigma_d(L)$	L operatörünün diskret (nokta) spektrumu
$\sigma_{ss}(L)$	L operatörünün spektral tekilliklerinin kümesi
$R_{\lambda}(L)$	L operatörünün resolvent operatörü
$\mu(M, s)$	M kümesinin s komşuluğunun Lebesgue ölçüsü
$L_1(0, \infty; \mathbb{C}^n)$	$(0, \infty)$ 'da tanımlı integrallenebilir vektör değerli fonksiyonların Hilbert uzayı
$L_2(0, \infty; \mathbb{C}^n)$	$(0, \infty)$ 'da tanımlı karesi integrallenebilir vektör değerli fonksiyonların Hilbert uzayı

1.GİRİŞ

Fonksiyonel analiz ve teoritik fiziğin birçok problemi, diferensiyel operatörlerin özdeğer ve özfonksiyonlarının bulunması ve diferensiyel operatörün tanım kümesinde yer alan keyfi bir fonksiyonun, operatörün özfonksiyonları cinsinden bir seriye(veya integral) açılmasını gerekli kılmıştır. Bu nedenle diferensiyel operatörlerin spektral analizi birçok çalışmanın temel konusu olmuştur.

Kuantum fiziğinde, bir diferensiyel operatörün tanım kümesinde yer alan keyfi bir fonksiyonun, operatörün özfonksiyonları cinsinden açılımı önemli bir problem olmuştur. Bu konuda dikkat çekici ilk gelişme Naimark (1960) tarafından non-selfadjoint diferensiyel operatörlerin spektral analizinin incelenmesiyle elde edilmiştir.

q - kompleks değerli bir fonksiyon olmak üzere, $L_2(0, \infty)$ uzayında

$$l_0(y) = -y'' + q(x)y, x \in [0, \infty)$$

diferensiyel ifadesi ve $y(0) = 0$ sınır koşulu yardımıyla üretilen non-selfadjoint operatörü L_0 ile gösterelim. Naimark L_0 operatörünün spektrumunun sürekli spektrum, ayrık spektrum (özdeğerler) ve spektral tekilliklerden oluştuğunu göstermiştir. Ayrıca q fonksiyonunun

$$\int_0^{\infty} \exp(\varepsilon x) |q(x)| dx < \infty, \quad \varepsilon > 0$$

koşulunu gerçeklemesi durumunda, L_0 operatörünün özdeğer ve spektral tekilliklerinin sonlu sayıda olduğunu ispatlamıştır. Spektral tekilliklerin L_0 operatörünün spektral analizindeki rolü detaylı bir biçimde Lyance (1967) tarafından incelenmiştir.

Krall (1965), $l_0(y)$ diferensiyel ifadesi ve integral sınır koşulu yardımı ile $L_2(0, \infty)$ uzayında üretilen non-selfadjoint L_1 operatörünün spektral teorisini incelemiş, L_1 'in adjoint operatörünü elde etmiş ve L_1 operatörünün özfonksiyonları cinsinden spektral açılımını incelemiştir.

Bairamov (1997, 1999) çalışmalarında Naimark ve Krall'ın sonuçlarını Quadratik Schrödinger operatörleri demetine genelleştirmiştir. Ayrıca Bairamov (1999, 2001, 2005) çalışmalarında ise spektral tekilliği olan non-selfadjoint fark operatörlerinin spektral analizi detaylı bir biçimde incelenmiştir.

$Q(x)$ non-selfadjoint matris değerli bir fonksiyon olmak üzere

$$l_y := -Y'' + Q(x)Y$$

diferensiyel ifadesi göz önünde bulundurulsun. $L_2(0, \infty; \mathbb{C}^n)$ ile $(0, \infty)$ kümesinde tanımlı $n \times 1$ vektör değerli fonksiyonların Hilbert uzayı gösterilsin. $L_2(0, \infty; \mathbb{C}^n)$ uzayında l_y diferensiyel ifadesi ve

$$\alpha Y'(0) - \beta Y(0) + \int_0^\infty A(x)Y(x)dx = 0$$

sınır koşulu yardımıyla tanımlanan operatör L olsun. Bu tezde L operatörünün Jost fonksiyonunun asimptotiği, L 'nin özdeğerleri ve spektral tekillikleri incelenmiştir.



2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, spektral analizin bazı temel tanımları ve teoremleri verilecektir.

2.1. Tanım

$X \neq \{0\}$ kompleks normlu bir uzay $T: D(T) \subset X \rightarrow X$ lineer bir operatör olsun. $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere $R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}$ operatörüne T nin resolvent operatörü ya da kısaca resolventi denir [12].

2.2. Tanım

$R_\lambda(T)$ operatörü mevcut, sınırlı ve tanım cümlesi X uzayında yoğun ise, $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına T operatörünün regüler değeri denir. T operatörünün regüler değerlerinden oluşan kümeye ise T nin resolvent kümesi denir [12].

2.3. Tanım

$R_\lambda(T)$ mevcut olmayacak şekildeki λ kompleks sayısına T operatörünün özdeğeri ve bütün özdeğerlerin kümesine de T operatörünün diskret spektrumu ya da nokta spektrumu adı verilir [12].

2.4. Tanım

$R_\lambda(T)$ mevcut, sınırsız ve $R_\lambda(T)$ operatörünün tanım kümesi X uzayında yoğun olacak şekildeki λ kompleks sayılarının oluşturduğu kümeye T operatörünün sürekli spektrumu denir [12].

2.5. Tanım

Bir T operatörünün resolventinin çekirdeğinin kutup noktası olup, sürekli spektrumda bulunan ve T operatörünün özdeğeri olmayan λ kompleks sayısına T operatörünün spektral tekilliği adı verilir [13].

2.1. Teorem

Özdeş olarak sıfır olmayan bir analitik fonksiyonun, analitiklik bölgesinin içindeki sıfırları (eğer varsa) ayrıktır [10].

2.2. Teorem

Özdeş olarak sıfır olmayan bir analitik fonksiyonun, analitiklik bölgesinin içindeki sıfırlarının limit noktaları (eğer varsa) analitiklik bölgesinin sınırındadır [10].

2.3. Teorem

Özdeş olarak sıfır olmayan bir analitik fonksiyonun, sonsuz katlı sıfırları (eğer varsa) analitiklik bölgesinin sınırındadır [10].

2.4. Teorem

Açık üst düzlemde özdeş olarak sıfır olmayan, analitik bir fonksiyonun reel eksenindeki sıfırlarının Lebesgue ölçüsü sıfırdır [10].

2.5. Teorem

f fonksiyonu $\bar{\mathbb{C}}_+$ kümesinde her mertebeden türeve sahip bir fonksiyon ve $\mu(E = \{x \in \mathbb{R} : f^n(x) = 0, \forall n \in \mathbb{N}\}) = 0$

olsun.

$$|f(n)(z)| \leq A_n, z \in \bar{\mathbb{C}}_+, n = 0, 1, 2, \dots$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde A_n sayıları mevcut ve

$$T(s) = \inf_n \frac{A_n s^n}{n!}$$

olmak üzere

$$\int_0^h \log T(s) d\mu(E, s) = -\infty$$

olsun.

Ayrıca en az bir N pozitif reel sayısı için

$$\int_{-\infty}^{-N} \frac{\log|f(x)|}{1+x^2} dx < \infty, \quad \int_N^{\infty} \frac{\log|f(x)|}{1+x^2} dx < \infty$$

ise f fonksiyonu kapalı üst düzlemde özdeş olarak sıfırdır [9].



3.GENEL SINIR KOŞULLU MATRİS KATSAYILI STURM-LIOUVILLE OPERATÖRLERİNİN SPEKTRAL ANALİZİ

Bu bölümde genel sınır koşullu matris katsayılı Sturm-Liouville denklem sistemi tanımlanacak ve bu sistemin bazı özel çözümleri incelenecektir.

λ spektral parametre, $0 \leq x < \infty$ aralığında tanımlı ve sürekli Q self-adjoint olmayan matris değerli potansiyel fonksiyonu

$$Q(x) = [q_{jk}(x)]_{j,k=1}^n$$

biçiminde olmak üzere,

$$y_j'' + \lambda^2 y_j = \sum_{k=1}^n q_{jk}(x) y_k \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (3.1)$$

diferensiyel denklem sistemi ele alınacaktır.

(3.1) denklem sisteminin çözümü

$$-Y'' + Q(x)Y = \lambda^2 Y \quad (3.2)$$

diferensiyel denklemini sağlayan $n \times n$ tipinde karesel bir $Y = Y(x, \lambda)$ matrisi ile gösterilebilir.

(3.2) ifadesinin her matris çözümünün sütunları (3.1) denklem sisteminin çözümleridir.

Dolayısıyla (3.1) denklem sistemi yerine (3.2) diferensiyel denklemi kullanılacak ve

$$\int_0^\infty x \|Q(x)\| dx < \infty \quad (3.3)$$

koşulunun sağlandığı kabul edilecektir.

Şimdi, matris katsayılı Sturm-Liouville denklem sisteminin bazı özel çözümleri incelenecektir.

3.1. Teorem

(3.2) denkleminin $S(0, \lambda) = 0$ ve $S'(0, \lambda) = I$ başlangıç değer koşullarını sağlayan çözümü

$$S(x, \lambda) = \frac{\sin \lambda x}{\lambda} I + \int_0^x Q(t) S(t, \lambda) \frac{\sin \lambda(x-t)}{\lambda} dt \quad (3.4)$$

integral denkleminin bir çözümü olup bu ifadenin tersi de doğrudur [1].

İspat

$S(0, \lambda) = 0$ ve $S'(0, \lambda) = I$ başlangıç değer koşullarının sağlandığı aşıkardır. (3.4) integral denkleminin sağlanması halinde (3.2) denklemi de sağlanır. Gerçekten

$$S'(x, \lambda) = \cos \lambda x I + \int_0^x Q(t) S(t, \lambda) \cos \lambda(x-t) dt$$

$$S''(x, \lambda) = -\lambda \sin \lambda x I - \int_0^x Q(t) S(t, \lambda) \lambda \sin \lambda(x-t) dt + Q(x) S(x, \lambda)$$

bulunur. Bu eşitlikler, (3.2) denkleminde göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} & -\lambda \sin \lambda x I - \int_0^x Q(t) S(t, \lambda) \lambda \sin \lambda(x-t) dt + \lambda^2 \frac{\sin \lambda x}{\lambda} I \\ & + \lambda^2 \int_0^x Q(t) S(t, \lambda) \frac{\sin \lambda(x-t)}{\lambda} dt + Q(x) S(x, \lambda) = Q(x) S(x, \lambda) \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi, (3.2) denkleminin $S(0, \lambda) = 0$ ve $S'(0, \lambda) = I$ başlangıç değer koşullarını sağlayan çözümünün (3.4) integral denklemini sağladığı gösterilecektir. Bunun için, (3.2) denklemine ait homojen denklem

$$-Y'' + \lambda^2 Y = 0$$

olmak üzere, bu denklemin temel çözümleri $\cos \lambda x I$ ve $\sin \lambda x I$ olduğu için çözüm

$$\tilde{S}(x, \lambda) = c_1 \cos \lambda x I + c_2 \sin \lambda x I$$

şeklinde yazılır. O halde (3.2) denkleminin genel çözümü

$$S(x, \lambda) = c_1(x) \cos \lambda x I + c_2(x) \sin \lambda x I \quad (3.5)$$

şeklinde olmalıdır. (3.5) denkleminin x değişkenine göre türevi alınırsa

$$S'(x, \lambda) = c_1'(x) \cos \lambda x I + c_2'(x) \sin \lambda x I - \lambda c_1(x) \sin \lambda x I + \lambda c_2(x) \cos \lambda x I$$

bulunur. Parametrelerin değişimi yöntemi gereğince

$$c_1'(x) \cos \lambda x I + c_2'(x) \sin \lambda x I = 0 \quad (3.6)$$

alınırsa

$$S'(x, \lambda) = -\lambda c_1(x) \sin \lambda x I + \lambda c_2(x) \cos \lambda x I$$

bulunur. Elde edilen bu denklemde tekrar x değişkenine göre türev alınırsa

$$S''(x, \lambda) = -\lambda c_1'(x) \sin \lambda x I + \lambda c_2'(x) \cos \lambda x I - \lambda^2 c_1(x) \cos \lambda x I - \lambda^2 c_2(x) \sin \lambda x I$$

bulunur. Bu eşitlik (3.2) denkleminde yerine yazılırsa

$$-\lambda c_1'(x) \sin \lambda x I + \lambda c_2'(x) \cos \lambda x I - \lambda^2 c_1(x) \cos \lambda x I - \lambda^2 c_2(x) \sin \lambda x I$$

$$+\lambda^2 c_1(x) \cos \lambda x I + \lambda^2 c_2(x) \sin \lambda x I = Q(x) S(x, \lambda)$$

elde edilir. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$-\lambda c_1'(x) \sin \lambda x I + \lambda c_2'(x) \cos \lambda x I = Q(x) S(x, \lambda) \quad (3.7)$$

olarak bulunur.

(3.6) denklemi $(-\sin \lambda x)$ ile (3.7) denklemi de $(\lambda \cos \lambda x)$ ile çarpılıp, bu iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa

$$\lambda c_1'(x) \sin^2 \lambda x I + \lambda c_1'(x) \cos^2 \lambda x I = Q(x) S(x, \lambda) \sin \lambda x$$

olup

$$c_1'(x) I = \frac{-Q(x) S(x, \lambda) \sin \lambda x}{\lambda}$$

olarak bulunur.

$$\beta_1 = c_1(0)$$

şeklinde tanımlanırsa son eşitlikten

$$\begin{aligned} \int_0^x c_1'(x) I dx &= [c_1(x) - \beta_1] I \\ &= \int_0^x \frac{-Q(t) S(t, \lambda) \sin \lambda t}{\lambda} dt \end{aligned}$$

olup

$$c_1(x) I = \beta_1 I - \int_0^x \frac{Q(t) S(t, \lambda) \sin \lambda t}{\lambda} dt \quad (3.8)$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde (3.6) denklemi $(\lambda \sin \lambda x)$ ile (3.7) denklemi de $(\cos \lambda x)$ ile çarpılıp bu iki eşitlik taraf tarafa toplanıp düzenlemeler yapıldığında

$$c_2(x) I = \alpha_2 I + \int_0^x \frac{Q(t) S(t, \lambda) \cos \lambda t}{\lambda} dt \quad (3.9)$$

olarak bulunur.

(3.8) ve (3.9) ifadeleri (3.5) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} S(x, \lambda) &= \beta_1 \cos \lambda x I + \beta_2 \sin \lambda x I - \cos \lambda x \int_0^x \frac{Q(t) S(t, \lambda) \sin \lambda t}{\lambda} dt \\ &\quad + \sin \lambda x \int_0^x \frac{Q(t) S(t, \lambda) \cos \lambda t}{\lambda} dt \end{aligned}$$

$$= \beta_1 \cos \lambda x I + \beta_2 \sin \lambda x I + \int_0^x \frac{Q(t)S(t, \lambda) \sin \lambda(x-t)}{\lambda} dt$$

olarak bulunur.

Elde edilen bu eşitlikte $S(0, \lambda) = 0$ başlangıç değeri koşulu göz önüne alınırsa

$$S(0, \lambda) = \beta_1 I = 0 \Rightarrow \beta_1 = 0$$

bulunur. Buradan β_1 yerine yazılırsa

$$S(x, \lambda) = \beta_2 \sin \lambda x I + \int_0^x \frac{Q(t)S(t, \lambda) \sin \lambda(x-t)}{\lambda} dt$$

şeklinde yazılır. Bu denklemin x değişkenine göre türev alınırsa

$$S'(x, \lambda) = \beta_2 \lambda \cos \lambda x I + \int_0^x Q(t)S(t, \lambda) \cos \lambda(x-t) dt$$

olarak bulunur.

Bu eşitlikte $S'(0, \lambda) = I$ başlangıç değeri koşulu göz önüne alınırsa

$$\beta_2 \lambda I = I \Rightarrow \beta_2 = \frac{1}{\lambda}$$

bulunur. Buradan β_2 yerine yazılırsa

$$S(x, \lambda) = \frac{\sin \lambda x}{\lambda} I + \int_0^x Q(t)S(t, \lambda) \frac{\sin \lambda(x-t)}{\lambda} dt$$

çözümü elde edilir [1].

3.2. Teorem

$\lambda \in \bar{\mathbb{C}}_+$ olmak üzere, (3.2) denkleminin (3.3) koşulu altında

$$\lim_{x \rightarrow \infty} Y(x, \lambda) e^{-i\lambda x} = I \quad (3.10)$$

eşitliğini sağlayan F sınırlı matris çözümü

$$F(x, \lambda) = e^{i\lambda x} I + \int_x^\infty Q(t)F(t, \lambda) \frac{\sin \lambda(x-t)}{\lambda} dt \quad (3.11)$$

şeklindedir [1].

İspat

(3.2) denklemine ait homojen denklem

$$-Y'' + \lambda^2 Y = 0$$

olduğundan bu denklemin genel çözümü

$$\tilde{Y}(x, \lambda) = c_1 e^{i\lambda x} I + c_2 e^{-i\lambda x} I$$

biçimindedir. Buradan, (3.2) denkleminin genel çözümü

$$Y(x, \lambda) = c_1(x) e^{i\lambda x} I + c_2(x) e^{-i\lambda x} I \quad (3.12)$$

biçimindedir. Bu çözümü bulmak için (3.12) denkleminde x değişkenine göre türev alınırsa

$$Y'(x, \lambda) = c_1'(x) e^{i\lambda x} I + c_2'(x) e^{-i\lambda x} I + i\lambda c_1(x) e^{i\lambda x} I - i\lambda c_2(x) e^{-i\lambda x} I$$

bulunur. Parametrelerin değişimi yöntemi gereğince

$$c_1'(x) e^{i\lambda x} I + c_2'(x) e^{-i\lambda x} I = 0$$

olarak alınır

$$Y'(x, \lambda) = i\lambda c_1(x) e^{i\lambda x} I - i\lambda c_2(x) e^{-i\lambda x} I$$

olarak bulunur. Elde edilen bu denklemde tekrar x değişkenine göre türev alınırsa

$$Y''(x, \lambda) = i\lambda c_1'(x) e^{i\lambda x} I - i\lambda c_2'(x) e^{-i\lambda x} I - \lambda^2 c_1(x) e^{i\lambda x} I - \lambda^2 c_2(x) e^{-i\lambda x} I$$

olarak bulunur. Bulunan bu eşitlik (3.2) denkleminde yerine yazılırsa

$$i\lambda c_1'(x) e^{i\lambda x} I - i\lambda c_2'(x) e^{-i\lambda x} I - \lambda^2 c_1(x) e^{i\lambda x} I - \lambda^2 c_2(x) e^{-i\lambda x} I + \lambda^2 c_1(x) e^{i\lambda x} I - \lambda^2 c_2(x) e^{-i\lambda x} I = i\lambda c_1'(x) e^{i\lambda x} I - i\lambda c_2'(x) e^{-i\lambda x} I = Q(x)Y(x, \lambda)$$

bulunur. Ayrıca

$$c_1'(x) e^{i\lambda x} I + c_2'(x) e^{-i\lambda x} I = 0$$

olduğu dikkate alınır,

$$c_1'(x) I = \frac{Q(x)Y(x, \lambda)}{2i\lambda} e^{-i\lambda x}$$

$$c_2'(x) I = -\frac{Q(x)Y(x, \lambda)}{2i\lambda} e^{i\lambda x}$$

denklemleri elde edilir. c_1 ve c_2 fonksiyonlarını bulmak için $[x, \infty)$ aralığında integral alınır ve

$$\lim_{x \rightarrow \infty} c_1(x) = \beta_1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} c_2(x) = \beta_2$$

olarak ifade edilirse

$$c_1(x) I = \beta_1 I - \int_x^\infty \frac{Q(t)Y(t, \lambda)}{2i\lambda} e^{-i\lambda t} dt$$

$$c_2(x)I = \beta_2 I + \int_x^\infty \frac{Q(t)Y(t, \lambda)}{2i\lambda} e^{i\lambda t} dt$$

şeklinde bulunur. Elde edilen c_1 ve c_2 fonksiyonları (3.12) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} Y(x, \lambda) &= \beta_1 e^{i\lambda x} I + \beta_2 e^{-i\lambda x} I + \int_x^\infty \frac{Q(t)Y(t, \lambda)}{2i\lambda} e^{i\lambda(t-x)} dt - \int_x^\infty \frac{Q(t)Y(t, \lambda)}{2i\lambda} e^{-i\lambda(t-x)} dt \\ &= \beta_1 e^{i\lambda x} I + \beta_2 e^{-i\lambda x} I + \int_x^\infty Q(t)Y(t, \lambda) \frac{e^{i\lambda(t-x)} - e^{-i\lambda(t-x)}}{2i\lambda} dt \\ &= \beta_1 e^{i\lambda x} I + \beta_2 e^{-i\lambda x} I + \int_x^\infty Q(t)Y(t, \lambda) \frac{\sin \lambda(t-x)}{\lambda} dt \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bulunan bu eşitliğin her iki tarafı $e^{-i\lambda x}$ ile çarpılıp (3.10) koşulu göz önüne alınırsa

$\beta_1 = 1$ ve $\beta_2 = 0$ olarak bulunur. β_1 ve β_2 yerine yazılırsa

$$F(x, \lambda) = e^{i\lambda x} I + \int_x^\infty Q(t)F(t, \lambda) \frac{\sin \lambda(x-t)}{\lambda} dt \quad \text{Im} \lambda \geq 0$$

elde edilir [1].

3.3. Teorem

$$\alpha(x) = \int_x^\infty \|Q(s)\| ds, \alpha_1(x) = \int_x^\infty s \|Q(s)\| ds$$

olsun. Bu durumda (3.2) denkleminin

$$F(x, \lambda) = e^{i\lambda x} I + \int_x^\infty K(x, t) e^{i\lambda t} dt, \quad \text{Im} \lambda \geq 0$$

eşitliğini sağlayan $F(x, t)$ çözümü vardır. Ayrıca K matris değerli fonksiyonu

$$\begin{aligned} K(x, t) &= \frac{1}{2} \int_{\frac{x+t}{2}}^\infty Q(s) ds + \frac{1}{2} \int_x^{\frac{x+t}{2}} \int_{t+x-s}^{t+s-x} Q(s) K(s, a) da ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\frac{x+t}{2}}^\infty \int_s^{t+s-x} Q(s) K(s, a) da ds \quad (0 < x \leq t) \end{aligned}$$

integral denklemini sağlar ve

$$\|K(x, t)\| \leq \frac{1}{2} e^{\alpha_1(x)} \alpha\left(\frac{x+t}{2}\right) \quad (3.13)$$

eşitsizliği gerçekleşir [1].

İspat

$$F(s, \lambda) = e^{i\lambda s} I + \int_x^\infty K(s, u) e^{i\lambda u} du \quad (3.14)$$

şeklinde yazılıp (3.11) göz önünde bulundurularak

$$F(x, \lambda) = e^{i\lambda x} I + \int_x^\infty \frac{\sin\lambda(s-x)}{\lambda} Q(s) \{e^{i\lambda s} I + \int_x^\infty K(s, u) e^{i\lambda u} du\} ds$$

yani

$$\begin{aligned} \int_x^\infty K(x, t) e^{i\lambda t} dt &= \int_x^\infty \frac{\sin\lambda(s-x)}{\lambda} Q(s) e^{i\lambda s} ds \\ &\quad + \int_x^\infty Q(s) ds \int_s^\infty \frac{\sin\lambda(s-x)}{\lambda} K(s, u) e^{i\lambda u} du \\ &= J_1 + J_2 \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

$$\begin{aligned} \frac{\sin\lambda(s-x)}{\lambda} e^{i\lambda s} &= \frac{e^{i\lambda(s-x)} - e^{-i\lambda(s-x)}}{2i\lambda} e^{i\lambda s} \\ &= \frac{e^{i\lambda(2s-x)} - e^{i\lambda x}}{2i\lambda} \\ &= \frac{1}{2} \int_x^{2s-x} e^{i\lambda t} dt \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{\sin\lambda(s-x)}{\lambda} e^{i\lambda u} &= \frac{e^{i\lambda(s-x)} - e^{-i\lambda(s-x)}}{2i\lambda} e^{i\lambda u} \\ &= \frac{e^{i\lambda(s-x+u)} - e^{-i\lambda(x-s+u)}}{2i\lambda} \\ &= \frac{1}{2} \int_{x-s+u}^{s-x+u} e^{i\lambda t} dt \end{aligned}$$

eşitlikleri kullanılarak

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_x^\infty \int_x^{2s-x} Q(s) e^{i\lambda t} dt ds$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \int_x^\infty \int_s^\infty \int_{x-s+u}^{s-x+u} Q(s) K(s, u) e^{i\lambda t} dt du ds$$

bulunur. Bu integrallerin integrasyon sırası değiştirilirse

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_x^\infty \int_{\frac{x+t}{2}}^\infty Q(s) e^{i\lambda t} ds dt$$

ve

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2} \int_x^\infty \int_x^{2s-x} \int_s^{t+s-x} Q(s) K(s, u) e^{i\lambda t} du dt ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_x^\infty \int_{2s-x}^\infty \int_{t+x-s}^{t+s-x} Q(s) K(s, u) e^{i\lambda t} du dt ds \\ &= \frac{1}{2} \int_x^\infty \int_{\frac{x+t}{2}}^\infty \int_s^{t+s-x} Q(s) K(s, u) e^{i\lambda t} du ds dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_x^\infty \int_x^{\frac{x+t}{2}} \int_{t+x-s}^{t+s-x} Q(s) K(s, u) e^{i\lambda t} du ds dt \end{aligned}$$

olarak bulunur. J_1 ve J_2 (3.15) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \int_x^\infty K(x, t) e^{i\lambda t} dt &= \frac{1}{2} \int_x^\infty \left(\int_{\frac{x+t}{2}}^\infty Q(s) ds \right) e^{i\lambda t} dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_x^\infty \left(\int_{\frac{x+t}{2}}^\infty \int_s^{t+s-x} Q(s) K(s, u) du ds \right) e^{i\lambda t} dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_x^\infty \left(\int_x^{\frac{x+t}{2}} \int_{t+x-s}^{t+s-x} Q(s) K(s, u) du ds \right) e^{i\lambda t} dt \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlik için Fourier dönüşümü uygulanırsa

$$\int_x^\infty \left[K(x, t) - \frac{1}{2} \int_{\frac{x+t}{2}}^\infty Q(s) ds - \frac{1}{2} \int_x^{\frac{x+t}{2}} \int_{t+x-s}^{t+s-x} Q(s) K(s, u) duds \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int_{\frac{x+t}{2}}^\infty \int_s^{t+s-x} Q(s) K(s, u) duds \right] e^{i\lambda t} dt = 0$$

olur. Buradan

$$K(x, t) = \frac{1}{2} \int_{\frac{x+t}{2}}^\infty Q(s) ds + \frac{1}{2} \int_x^{\frac{x+t}{2}} \int_{t+x-s}^{t+s-x} Q(s) K(s, u) duds \\ + \frac{1}{2} \int_{\frac{x+t}{2}}^\infty \int_s^{t+s-x} Q(s) K(s, u) duds \quad (3.16)$$

olarak bulunur. (3.16) denkleminin çözümlenebilir olduğunu göstermek için ardışık yaklaşımlar yöntemi kullanılırsa, $x \geq 0$ için α_1 azalan olduğu için

$$\alpha_1(x) \leq \alpha_1(0) = \int_0^\infty t \|Q(t)\| dt < \infty$$

şeklinde yazılabilir.

$$K_0(x, t) = \frac{1}{2} \int_{\frac{x+t}{2}}^\infty Q(s) ds$$

$$K_m(x, t) = \frac{1}{2} \int_{\frac{x+t}{2}}^\infty \int_s^{t+s-x} Q(s) K_{m-1}(s, u) duds + \frac{1}{2} \int_x^{\frac{x+t}{2}} \int_{t+x-s}^{t+s-x} Q(s) K_{m-1}(s, u) duds$$

ve

$$Z(x, t) := \sum_{m=0}^\infty K_m(x, t)$$

olarak ifade edilsin.

Z ile tanımlanan seri mutlak ve düzgün yakınsaktır. Gerçekten,

$$\|K_0(x, t)\| \leq \frac{1}{2} \int_{\frac{x+t}{2}}^\infty \|Q(s)\| ds = \frac{1}{2} \alpha\left(\frac{x+t}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
\|K_1(x, t)\| &\leq \frac{1}{4} \int_x^{\frac{x+t}{2}} \int_{t+x-s}^{t+s-x} \|Q(s)\| \alpha\left(\frac{s+u}{2}\right) duds \\
&\quad + \frac{1}{4} \int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} \int_s^{t+s-x} \|Q(s)\| \alpha\left(\frac{s+u}{2}\right) duds \\
&= A_1 + A_2
\end{aligned}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $0 \leq x \leq t < \infty$ için

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{4} \int_x^{\frac{x+t}{2}} \int_{t+x-s}^{t+s-x} \|Q(s)\| \alpha\left(\frac{s+u}{2}\right) duds \\
&\leq \frac{1}{4} \int_x^{\frac{x+t}{2}} \alpha\left(\frac{s+t+x-s}{2}\right) \int_{t+x-s}^{t+s-x} \|Q(s)\| duds \\
&= \frac{1}{4} \alpha\left(\frac{t+x}{2}\right) \int_x^{\frac{x+t}{2}} \int_{t+x-s}^{t+s-x} \|Q(s)\| duds \\
&= \frac{1}{4} \alpha\left(\frac{t+x}{2}\right) \int_x^{\frac{x+t}{2}} (2s - 2x) \|Q(s)\| ds \\
&= \frac{1}{2} \alpha\left(\frac{t+x}{2}\right) \int_x^{\frac{x+t}{2}} s \|Q(s)\| ds
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
A_2 &= \frac{1}{4} \int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} \int_s^{t+s-x} \|Q(s)\| \alpha\left(\frac{s+u}{2}\right) duds \\
&\leq \frac{1}{4} \int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} \alpha\left(\frac{s+s}{2}\right) \int_s^{t+s-x} \|Q(s)\| duds \\
&= \frac{1}{4} \int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} \alpha(s) \|Q(s)\| (t-x) ds \\
&\leq \frac{1}{4} \alpha\left(\frac{x+t}{2}\right) \int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} \left(\frac{x+t}{2} - x\right) \|Q(s)\| ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{x+t}{2} \right) \int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} (s-x) \|Q(s)\| ds \\
&\leq \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{x+t}{2} \right) \int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} s \|Q(s)\| ds
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\|K_1(x, t)\| &\leq A_1 + A_2 \\
&\leq \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{x+t}{2} \right) \int_x^{\frac{x+t}{2}} s \|Q(s)\| ds + \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{x+t}{2} \right) \int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} s \|Q(s)\| ds \\
&\leq \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{x+t}{2} \right) \int_x^{\frac{x+t}{2}} s \|Q(s)\| ds \\
&= \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{x+t}{2} \right) \frac{\alpha_1(x)}{1!}
\end{aligned}$$

bulunur.

$m \geq 1$ için

$$\|K_m(x, t)\| \leq \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{x+t}{2} \right) \frac{\alpha_1^m(x)}{(m)!} \quad (3.17)$$

olduğu kabul edilirse

$$\alpha_1(x) = \int_x^{\infty} s \|Q(s)\| ds \Rightarrow d\alpha_1(x) = -x \|Q(x)\| dx$$

olacağı için

$$\begin{aligned}
K_{m+1}(x, t) &= \frac{1}{2} \int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} \int_s^{t+s-x} Q(s) K_m(s, u) du ds + \frac{1}{2} \int_x^{\frac{x+t}{2}} \int_{t+x-s}^{t+s-x} Q(s) K_m(s, u) du ds \\
\|K_{m+1}(x, t)\| &\leq \frac{1}{2} \int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} \int_s^{t+s-x} \|Q(s) K_m(s, u)\| du ds + \frac{1}{2} \int_x^{\frac{x+t}{2}} \int_{t+x-s}^{t+s-x} \|Q(s) K_m(s, u)\| du ds \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} \int_s^{t+s-x} \|Q(s)\| \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{s+u}{2} \right) \frac{\alpha_1^m(s)}{(m)!} du ds
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \int_x^{\frac{x+t}{2}} \int_{t+x-s}^{t+s-x} \|Q(s)\| \frac{1}{2} \alpha\left(\frac{s+u}{2}\right) \frac{\alpha_1^m(s)}{(m)!} du ds$$

olup eşitsizliğin sağ tarafındaki terimler sırasıyla N_1 ve N_2 olarak ifade edilirse

$$\begin{aligned} N_1 &\leq \frac{1}{4} \int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} \int_s^{t+s-x} \|Q(s)\| \alpha\left(\frac{s+s}{2}\right) \frac{\alpha_1^m(s)}{(m)!} du ds \\ &= \frac{1}{4} \int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} \|Q(s)\| \alpha(s) \frac{\alpha_1^m(s)}{(m)!} (t-s) ds \\ &\leq \frac{1}{2} \alpha\left(\frac{x+t}{2}\right) \int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} \|Q(s)\| \left(\frac{x+t}{2} - x\right) \frac{\alpha_1^m(s)}{(m)!} ds \\ &\leq \frac{1}{2} \alpha\left(\frac{x+t}{2}\right) \int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} \|Q(s)\| (s-x) \frac{\alpha_1^m(s)}{(m)!} ds \\ &\leq \frac{1}{2} \alpha\left(\frac{x+t}{2}\right) \int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} \|Q(s)\| s \frac{\alpha_1^m(s)}{(m)!} ds \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} N_2 &\leq \frac{1}{4} \int_x^{\frac{x+t}{2}} \int_{t+x-s}^{t+s-x} \|Q(s)\| \alpha\left(\frac{s+t+x-s}{2}\right) \frac{\alpha_1^m(s)}{(m)!} du ds \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_x^{\frac{x+t}{2}} \|Q(s)\| \alpha\left(\frac{x+t}{2}\right) (2s-2x) \frac{\alpha_1^m(s)}{(m)!} ds \\ &\leq \frac{1}{2} \alpha\left(\frac{x+t}{2}\right) \int_x^{\frac{x+t}{2}} \|Q(s)\| (s-x) \frac{\alpha_1^m(s)}{(m)!} ds \\ &\leq \frac{1}{2} \alpha\left(\frac{x+t}{2}\right) \int_x^{\frac{x+t}{2}} \|Q(s)\| s \frac{\alpha_1^m(s)}{(m)!} ds \end{aligned}$$

olarak bulunur. O halde

$$\|K_{m+1}(x, t)\| \leq \frac{1}{2m!} \alpha\left(\frac{x+t}{2}\right) \int_x^{\infty} \|Q(s)\| \alpha_1^m(s) s ds$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2m!} \alpha\left(\frac{x+t}{2}\right) \left[\lim_{a \rightarrow \infty} \int_x^a \alpha_1^m(s) s \|Q(s)\| ds \right] \\
&= \frac{1}{2m!} \alpha\left(\frac{x+t}{2}\right) \frac{\alpha_1^{m+1}(x)}{(m+1)!}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan, tümevarım yöntemi gereğince her $m \in \mathbb{N}$ için (3.17) eşitsizliği sağlanır. Ayrıca α azalan olduğu için

$$\|K_m(x, t)\| \leq \frac{1}{2} \alpha(0) \frac{\alpha_1^m(0)}{(m)!} \quad (3.18)$$

gerçeklenir. Ayrıca

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha_1^m(0)}{(m)!} = e^{\alpha_1(0)}$$

olduğu için ve (3.18) gerçekleştiği için karşılaştırma testi gereğince

$$\sum_{m=0}^{\infty} K_m(x, t)$$

serisi mutlak yakınsaktır. Ayrıca (3.18) eşitsizliği her $x \geq 0$ için sağlandığından aynı seri Weierstrass M- testi gereğince düzgün yakınsaktır.

Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{m=0}^{\infty} K_m(x, t) \right\| &\leq \sum_{m=0}^{\infty} \|K_m(x, t)\| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2} \alpha\left(\frac{x+t}{2}\right) \frac{\alpha_1^m(x)}{m!} \\
&= \frac{1}{2} \alpha\left(\frac{x+t}{2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha_1^m(x)}{m!} \leq \frac{1}{2} \alpha\left(\frac{x+t}{2}\right) e^{\alpha_1(x)} \\
&\leq \frac{1}{2} \alpha(0) e^{\alpha_1(0)}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

$$K(x, t) := \sum_{m=0}^{\infty} K_m(x, t)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\|K(x, t)\| &\leq \frac{1}{2} \alpha\left(\frac{x+t}{2}\right) e^{\alpha_1(x)} \leq \frac{1}{2} \alpha\left(\frac{x+t}{2}\right) e^{\alpha_1(0)} \\
&= C \alpha\left(\frac{x+t}{2}\right) = C \int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} \|Q(s)\| ds
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır [1].

3.4. Teorem

K fonksiyonunun x ve t değişkenine göre kısmi türevleri mevcut olup $c > 0$ olmak üzere

$$\|K_x(x, t)\| \leq \frac{1}{4} \left\| Q\left(\frac{x+t}{2}\right) \right\| + c\alpha\left(\frac{x+t}{2}\right)$$

ve

$$\|K_t(x, t)\| \leq \frac{1}{4} \left\| Q\left(\frac{x+t}{2}\right) \right\| + c\alpha\left(\frac{x+t}{2}\right)$$

eşitsizlikleri gerçekleşir [1].

İspat

$$A(s, x, t) := \int_{t+x-s}^{t+s-x} K(s, u) du$$

$$B(s, x, t) := \int_s^{t+s-x} K(s, u) du$$

olarak tanımlansın. (3.16) göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned} K(x, t) &= \frac{1}{2} \int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} Q(s) ds + \frac{1}{2} \int_x^{\frac{x+t}{2}} Q(s) A(s, x, t) ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} Q(s) B(s, x, t) ds \quad (0 < x \leq t) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} K_x(x, t) &= -\frac{1}{4} Q\left(\frac{x+t}{2}\right) + \frac{1}{4} Q\left(\frac{x+t}{2}\right) A\left(\frac{x+t}{2}, x, t\right) - \frac{1}{2} Q(x) A(x, x, t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_x^{\frac{x+t}{2}} Q(s) A_x(s, x, t) ds - \frac{1}{4} Q\left(\frac{x+t}{2}\right) B\left(\frac{x+t}{2}, x, t\right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} Q(s) B_x(s, x, t) ds \end{aligned} \tag{3.19}$$

olarak bulunur.

$$A\left(\frac{x+t}{2}, x, t\right) = \int_{\frac{x+t}{2}}^{\frac{3t-x}{2}} K\left(\frac{x+t}{2}, u\right) du$$

$$B\left(\frac{x+t}{2}, x, t\right) = \int_{\frac{x+t}{2}}^{\frac{3t-x}{2}} K\left(\frac{x+t}{2}, u\right) du$$

ve

$$A_x(s, x, t) = -K(s, t + s - x) - K(s, t + x - s)$$

$$A_x(s, x, t) = -K(s, t + s - x)$$

$$A(x, x, t) = 0$$

olduğundan (3.19) göz önüne alınarak

$$\begin{aligned} K_x(x, t) &= -\frac{1}{4}Q\left(\frac{x+t}{2}\right) + \frac{1}{4}Q\left(\frac{x+t}{2}\right) \int_{\frac{x+t}{2}}^{\frac{3t-x}{2}} K\left(\frac{x+t}{2}, u\right) du \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_x^{\frac{x+t}{2}} Q(s)K(s, t + s - x)ds - \frac{1}{2} \int_x^{\frac{x+t}{2}} Q(s)K(s, t + x - s)ds \\ &\quad - \frac{1}{4}Q\left(\frac{x+t}{2}\right) \int_{\frac{x+t}{2}}^{\frac{3t-x}{2}} K\left(\frac{x+t}{2}, u\right) du - \frac{1}{2} \int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} Q(s)K(s, t + s - x)ds \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} K_x(x, t) &= -\frac{1}{4}Q\left(\frac{x+t}{2}\right) - \frac{1}{2} \int_x^{\frac{x+t}{2}} Q(s)K(s, t + x - s)ds \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_x^{\infty} Q(s)K(s, t + s - x)ds \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Benzer işlemlerle

$$\begin{aligned} K_t(x, t) &= -\frac{1}{4}Q\left(\frac{x+t}{2}\right) + \frac{1}{4}Q\left(\frac{x+t}{2}\right) \int_{\frac{x+t}{2}}^{\frac{3t-x}{2}} K\left(\frac{x+t}{2}, u\right) du \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_x^{\frac{x+t}{2}} Q(s)K(s, t + s - x)ds - \frac{1}{2} \int_x^{\frac{x+t}{2}} Q(s)K(s, t + x - s)ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4}Q\left(\frac{x+t}{2}\right)\int_{\frac{x+t}{2}}^{\frac{3t-x}{2}}K\left(\frac{x+t}{2},u\right)du+\frac{1}{2}\int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty}Q(s)K(s,t+s-x)ds \\
& =-\frac{1}{4}Q\left(\frac{x+t}{2}\right)+\frac{1}{2}\int_x^{\infty}Q(s)K(s,t+s-x)ds \\
& \quad -\frac{1}{2}\int_x^{\frac{x+t}{2}}Q(s)K(s,t+x-s)ds
\end{aligned}$$

olarak bulunur. (3.13) eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
\|K_x(x,t)\| & = \left\| -\frac{1}{4}Q\left(\frac{x+t}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_x^{\frac{x+t}{2}}Q(s)K(s,t+x-s)ds \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2}\int_x^{\infty}Q(s)K(s,t+s-x)ds \right\| \\
& \leq \frac{1}{4}\left\|Q\left(\frac{x+t}{2}\right)\right\| + \frac{1}{2}\int_x^{\frac{x+t}{2}}\|Q(s)K(s,t+x-s)\|ds \\
& \quad + \frac{1}{2}\int_x^{\infty}\|Q(s)K(s,t+s-x)\|ds \\
\|K_x(x,t)\| & \leq \frac{1}{4}\left\|Q\left(\frac{x+t}{2}\right)\right\| + \frac{1}{2}\int_x^{\frac{x+t}{2}}\|Q(s)\|e^{\alpha_1(x)}\alpha\left(\frac{x+t}{2}\right)ds \\
& \quad + \frac{1}{4}e^{\alpha_1(x)}\int_x^{\infty}\|Q(s)\|\alpha\left(\frac{2s+t-x}{2}\right)ds \\
& \leq \frac{1}{4}\left\|Q\left(\frac{x+t}{2}\right)\right\| + \frac{C_1}{2}\int_x^{\frac{x+t}{2}}\|Q(s)\|\alpha\left(\frac{x+t}{2}\right)ds \\
& \quad + \frac{C_1}{2}\int_x^{\infty}\|Q(s)\|\alpha\left(\frac{2s+t-x}{2}\right)ds \\
& \leq \frac{1}{4}\left\|Q\left(\frac{x+t}{2}\right)\right\| + \frac{C_1}{2}\alpha\left(\frac{x+t}{2}\right)\int_0^{\infty}\|Q(s)\|ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{C_1}{2} \alpha\left(\frac{x+t}{2}\right) \int_0^\infty \|Q(s)\| ds \\
& = \frac{1}{4} \left\| Q\left(\frac{x+t}{2}\right) \right\| + C \alpha\left(\frac{x+t}{2}\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\|K_t(x, t)\| \leq \frac{1}{4} \left\| Q\left(\frac{x+t}{2}\right) \right\| + C \alpha\left(\frac{x+t}{2}\right) \int_0^\infty \|Q(s)\| ds$$

buunur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\int_x^\infty \|K(x, t)\| dt & \leq c \int_x^\infty \alpha\left(\frac{x+t}{2}\right) dt \leq C \int_x^\infty \alpha\left(\frac{t}{2}\right) dt \\
& = 2C \int_0^\infty \alpha(s) ds < \infty
\end{aligned} \tag{3.20}$$

ve

$$\begin{aligned}
\int_x^\infty \|K_x(x, t)\| dt & \leq \frac{1}{4} \int_x^\infty \left\| Q\left(\frac{x+t}{2}\right) \right\| dt + c \int_x^\infty \alpha\left(\frac{x+t}{2}\right) dt \\
& \leq \frac{1}{2} \int_0^\infty \|Q(u)\| du + 2c \int_0^\infty \alpha(u) du < \infty
\end{aligned}$$

olduğundan $x \geq 0$ için

$$K(x, \cdot) \in L_1(x, \infty) \Leftrightarrow \int_x^\infty \|K(x, t)\| dt < \infty$$

$$K_x(x, \cdot) \in L_1(x, \infty) \Leftrightarrow \int_x^\infty \|K_x(x, t)\| dt < \infty$$

olarak yazılabilir. Böylece ispat tamamlanmış olur [1].

$\mathbb{C}_+$ üzerinde $|e^{i\lambda t}|, |\lambda|$ ya göre azalan olduğu için

$$\|K(x, t)e^{i\lambda t}\| \leq \|K(x, t)\|$$

eşitsizliği gerçekleşir. O halde (3.20) gereğince

$$\left| \int_x^\infty K(x, t)e^{i\lambda t} dt \right| \leq \int_x^\infty \|K(x, t)\| dt < \infty$$

olur.

Ayrıca

$$\int_x^\infty K(x, t) e^{i\lambda t} dt$$

fonksiyonu λ ya göre $\mathbb{C}_+$ üzerinde analitiktir.

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\int_x^\infty K(x, t) e^{i\lambda t} dt \right) = \int_x^\infty it K(x, t) e^{i\lambda t} dt$$

eşitliğini göstermek için,

$Im\lambda > 0$ iken $te^{-tIm\lambda} < 1$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\left| \int_x^\infty it K(x, t) e^{i\lambda t} dt \right| \leq \int_x^\infty t \|K(x, t)\| e^{-tIm\lambda} dt \leq \int_x^\infty \|K(x, t)\| dt < \infty$$

bulunur. Böylelikle F çözümü λ ya göre $\mathbb{C}_+$ üzerinde analitik bir fonksiyon olur. Ayrıca F çözümü $\mathbb{R}$ üzerinde λ ya göre süreklidir. $e^{i\lambda t}$, $\mathbb{C}$ üzerinde λ ya göre sürekli olduğu için aynı zamanda $\mathbb{R}$ üzerinde de sürekli. F çözümünün sürekliliğini göstermek için

$$\int_x^\infty K(x, t) e^{i\lambda t} dt$$

integralinin sürekliliğini göstermek yeterli olacaktır.

$$\int_x^\infty K(x, t) e^{i\lambda t} dt$$

integrali $\mathbb{C}_+$ üzerinde düzgün yakınsak olduğu için $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ keyfi olmak üzere

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \int_x^\infty K(x, t) e^{i\lambda t} dt = \int_x^\infty K(x, t) \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} (e^{i\lambda t}) dt = \int_x^\infty K(x, t) e^{i\lambda_0 t} dt$$

bulunur [1].

4. ÖZDEĞERLER VE SPEKTRAL TEKİLLİKLER

4.1. Jost Fonksiyonunun Asimptotiği

Bu bölümde L operatörüne karşılık gelen Jost fonksiyonunun asimptotiği incelenecektir. L operatörü ile ilgili olarak

$$-Y'' + Q(X)Y = \lambda^2 Y \quad (4.1)$$

$$\alpha Y'(0) - \beta Y(0) + \int_0^\infty A(x)Y(x)dx = 0 \quad (4.2)$$

sınır değer problemi göz önünde bulundursun. Burada A - kompleks değerli $n \times n$ şeklinde bir matris, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha| + |\beta| \neq 0$ ve $A \in L_1(0, \infty; \mathbb{C}^n) \cap L_2(0, \infty; \mathbb{C}^n)$ koşulu sağlanır. Ayrıca,

$$\int_0^\infty x \|Q(x)\| dx < \infty \quad (4.3)$$

koşulunun gerçekleştiği varsayalım.

$$F(x, \lambda) = e^{i\lambda x I} + \int_x^\infty K(x, t) e^{i\lambda t} dt$$

Jost çözümünün (4.2)'de dikkate alınması ile elde edilen

$$N(\lambda) = \alpha F'(0, \lambda) - \beta F(0, \lambda) + \int_0^\infty A(x)F(x, \lambda)dx \quad (4.4)$$

fonksiyonuna L operatörünün Jost fonksiyonu denir.

4.1.1. Teorem

(4.3) koşulu altında

$$N(\lambda) = \alpha i \lambda I + O(1), \lambda \in \bar{\mathbb{C}}_+, |\lambda| \rightarrow \infty$$

asimptotik eşitliği sağlanır.

İspat

Jost fonksiyonunun asimptotiğini elde etmek için

$$F(x, \lambda) = e^{i\lambda x} I + \int_x^\infty K(x, t) e^{i\lambda t} dt$$

Jost fonksiyonunu,

$$\alpha Y'(0) - \beta Y(0) + \int_0^\infty A(x) Y(x) dx = 0$$

sınır koşulunda yerine yazmak gerekmektedir.

$$F'(x, \lambda) = i\lambda e^{i\lambda x} I - K(x, x) e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K_x(x, t) e^{i\lambda t} dt$$

elde edilir. Buradan

$$F'(0, \lambda) = i\lambda I - K(0, 0) + \int_0^\infty K_x(0, t) e^{i\lambda t} dt$$

elde edilir.

$$\alpha F'(0, \lambda) = \alpha i\lambda I - \alpha K(0, 0) + \alpha \int_0^\infty K_x(0, t) e^{i\lambda t} dt$$

$$\beta F(0) = \beta I + \beta \int_0^\infty K(0, t) e^{i\lambda t} dt$$

olarak bulunur. Jost fonksiyonu sınır koşulunda yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} & \alpha i\lambda I - \alpha K(0, 0) + \alpha \int_0^\infty K_x(0, t) e^{i\lambda t} dt - \beta I - \beta \int_0^\infty K(0, t) e^{i\lambda t} dt \\ & + \int_0^\infty A(x) e^{i\lambda x} dx + \int_0^\infty \int_x^\infty K(x, t) e^{i\lambda t} dt dx = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned} & \alpha F'(0) - \beta F(0) + \int_0^\infty A(x) F(x) dx = \alpha i\lambda I - \alpha K(0, 0) + \alpha \int_0^\infty K_x(0, t) e^{i\lambda t} dt \\ & - \beta I - \beta \int_0^\infty K(0, t) e^{i\lambda t} dt + \int_0^\infty A(x) e^{i\lambda x} dx + \int_0^\infty \int_x^\infty K(x, t) e^{i\lambda t} dt dx = 0 \end{aligned}$$

bulunur.

Burada

$$\int_0^\infty \int_x^\infty K(x, t) e^{i\lambda t} dt dx$$

integralinin integrasyon sırası değiştirilirse

$$\int_0^{\infty} \int_x^{\infty} K(x, t) e^{i\lambda t} dt dx = \int_0^{\infty} \int_0^t K(x, t) e^{i\lambda t} dx dt$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$F(t) = \alpha K_x(0, t) - \beta K(0, t) + A(t) + \int_0^t K(x, t) dx$$

şeklinde tanımlanırsa

$$N(\lambda) = \alpha i \lambda I - \alpha K(0, 0) - \beta I + \int_0^{\infty} F(t) e^{i\lambda t} dt$$

elde edilir.

$$\int_0^{\infty} A(x) e^{i\lambda x} dx$$

Fourier dönüşümünün yakınsak olması için $A(x) \in L_1(0, \infty; \mathbb{C}^n)$ olması gerekir.

Dolayısıyla $A(x)$ için $A(x) \in L_1(0, \infty; \mathbb{C}^n) \cap L_2(0, \infty; \mathbb{C}^n)$ koşulunu koymak gerekir.

$F(t)$ fonksiyonunun tüm terimleri $L_1(0, \infty; \mathbb{C}^n)$ uzayının elemanı olduğundan

$$N(\lambda) = \alpha i \lambda I - \alpha K(0, 0) - \beta I + O(1), \quad \lambda \in \bar{\mathbb{C}}_+, \quad |\lambda| \rightarrow \infty$$

yazılabilir. Hatta α, β ve $K(0, 0)$ sabit olduğundan

$$N(\lambda) = \alpha i \lambda I + O(1), \quad |\alpha| + |\beta| \neq 0, \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (4.5)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

(4.5) eşitliğinden

$$\det N(\lambda) = (\alpha i \lambda)^n + O(1)$$

olarak yazılır. Sonuç olarak

Burada $|\lambda| \rightarrow \infty$ için $\det N(\lambda) = 0$ olamaz. O halde $|\lambda| \rightarrow \infty$ için $\det N(\lambda)$ nın tersi yoktur. Sadece reel eksenin sınırlı bir alt aralığında $\det N(\lambda) = 0$ olur.

4.2. L'nin Diskret Spektrumu

L operatörünün özdeğerlerinin ve spektral tekilliklerinin kümesi sırasıyla

$$\sigma_d(L) = \{ \mu : \mu = \lambda^2, \lambda \in \mathbb{C}_+, \det N(\lambda) = 0 \} \quad (4.6)$$

ve

$$\sigma_{ss}(L) = \{ \mu : \mu = \lambda^2, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \det N(\lambda) = 0 \} \quad (4.7)$$

şeklinde tanımlanır.

4.2.1. Tanım

$\bar{\mathbb{C}}_+$ üzerinde tanımlı $\det N(\lambda)$ fonksiyonunun bir sıfırının katına, L operatörünün bu sifıra karşılık gelen özdeğerinin veya spektral tekilliğinin katı denir.

L operatörünün özdeğerlerini ve spektral tekilliklerini inceleyebilmek için $\det N(\lambda)$ fonksiyonunun $\bar{\mathbb{C}}_+$ daki sıfırlarını belirlemek gerekir.

$$M_1 = \{ \lambda : \lambda \in \mathbb{C}_+, \det N(\lambda) = 0 \}$$

ve

$$M_2 = \{ \lambda : \lambda \in \mathbb{R}, \det N(\lambda) = 0 \}$$

şeklinde tanımlanırsa, (4.6) ve (4.7) yardımıyla

$$\sigma_d(L) = \{ \mu : \mu = \lambda^2, \lambda \in M_1 \} \quad (4.8)$$

ve

$$\sigma_{ss}(L) = \{ \mu : \mu = \lambda^2, \lambda \in M_2 \} \setminus \{0\} \quad (4.9)$$

yazılır.

4.2.1. Teorem

M_1 kümesi sınırlı olup en çok sayılabilir sayıda elemana sahiptir. Ayrıca bu kümenin limit noktaları (eğer varsa) reel eksenin sınırlı bir alt aralığındadır.

İspat

$N(\lambda)$, $\mathbb{C}_+$ da analitik ve reel ekseninde sürekli olduğundan $\det N(\lambda)$ da $\mathbb{C}_+$ da analitik ve reel ekseninde sürekli. Teorem 4.1.1 de gösterildiği gibi $|\lambda| \rightarrow \infty$ için

$$\det N(\lambda) = (\alpha i \lambda)^n + O(1) \quad (4.10)$$

yazılır. Buradan, $\lambda \in \bar{\mathbb{C}}_+$ için $|\lambda|$ yeterince büyük seçilmesi halinde $\det N(\lambda) \neq 0$ olur. O halde M_1 ve M_2 kümeleri sınırlıdır. Teorem 2.1 gereğince $\det N(\lambda)$ fonksiyonunun $\mathbb{C}_+$ daki sıfırlarının kümesi ayrıktır. O halde M_1 kümesi en çok sayılabilir sayıda eleman içerir. Ayrıca Teorem 2.2 ifadesi gereğince M_1 kümesinin (eğer varsa) limit noktaları reel eksenin sınırlı bir alt aralığındadır.

4.2.2. Teorem

M_2 kümesi kompaktır ve μ Lebesgue ölçüsü olmak üzere $\mu(M_2) = 0$ dır.

İspat

Teorem 4.2.1 in ispatında M_2 kümesinin sınırlı olduğu gösterilmişti. O halde M_2 kümesinin kompakt bir küme olduğunu göstermek için M_2 kümesinin kapalı olduğunu göstermek yeterlidir.

$\lambda_0 \in \bar{M}_2$ olsun. O halde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n \in M_2$ ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda_0$$

olacak şekilde bir (λ_n) dizisi vardır.

Bu durumda $\det N(\lambda)$, $\bar{\mathbb{C}}_+$ üzerinde sürekli olduğu için

$$\det N(\lambda_0) = \det N\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \det N(\lambda_n) = 0$$

yani $\lambda_0 \in M_2$ elde edilir. O halde M_2 kümesi kapalıdır. Böylece M_2 kümesi kapalı ve sınırlı olduğu için kompakt bir kümedir.

Ayrıca

$\det N(\lambda)$, $\mathbb{C}_+$ üzerinde analitik ve $\det N(\lambda) \neq 0$ olduğundan Teorem 2.4 gereğince $\mu(M_2) = 0$ elde edilir.

Teorem 4.2.1 ve Teorem 4.2.2' den hemen aşağıdaki teoremler elde edilir.

4.2.3. Teorem

$\sigma_d(L)$, sınırlıdır. Tüm özdeğerlerin katı sonludur ve özdeğerlerin limit noktaları (Eğer varsa) $[0, \infty)$ kümesinin sınırlı bir alt aralığındadır.

4.2.4. Teorem

$\sigma_{ss}(L)$ sınırlıdır. $\mu(\sigma_{ss}(L)) = 0$ dır. (Eğer varsa) limit noktaları $(0, \infty)$ un sınırlı bir alt aralığındadır.

4.2.5. Teorem

$\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$\int_0^{\infty} \exp(\varepsilon t) [\|Q(t)\| + \|A(t)\|] dt < \infty \quad (4.11)$$

koşulu altında L operatörünün sonlu sayıda özdeğer ve spektral tekillikleri vardır ve bunların katı da sonludur.

İspat

Teorem 3.4'e göre

$$\|K(x, t)\| \leq C \int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} \|Q(s)\| ds$$

sağlanır. Bu eşitsizlik göz önüne alınıp,

$$N(\lambda) = \alpha i \lambda I - \alpha K(0, 0) - \beta I + \int_0^{\infty} F(t) e^{i\lambda t} dt$$

ve

$$F(t) = \alpha K_x(0, t) - \beta K(0, t) + A(t) + \int_0^t A(x) K(x, t)$$

eşitlikleri kullanılarak $N(\lambda)$ fonksiyonunun analitiklik bölgesi genişletilecektir.

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^{\infty} \alpha K_x(0, t) e^{i\lambda t} dt \right\| &\leq \alpha \int_0^{\infty} \|K_x(0, t)\| \|e^{i\lambda t}\| dt \\ &\leq \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \left\| Q\left(\frac{t}{2}\right) \right\| e^{-Im\lambda t} dt + c \int_0^{\infty} \left\| \sigma\left(\frac{t}{2}\right) \right\| e^{-Im\lambda t} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{4} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon t}{4}} e^{\frac{\varepsilon t}{4}} \left\| Q\left(\frac{t}{2}\right) \right\| e^{-Im\lambda t} dt + c \int_0^{\infty} \int_{\frac{t}{2}}^{\infty} \|Q(s)\| e^{-Im\lambda t} ds dt \\
&\leq \frac{1}{4} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon t}{4}} e^{\frac{\varepsilon t}{4}} \left\| Q\left(\frac{t}{2}\right) \right\| e^{-Im\lambda t} dt \\
&\quad + c \int_0^{\infty} \int_{\frac{t}{2}}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon s}{2}} e^{\frac{\varepsilon s}{2}} \|Q(s)\| e^{-Im\lambda t} ds dt \\
&\leq \frac{1}{4} \int_0^{\infty} e^{-t(\frac{\varepsilon}{4} + Im\lambda)} dt + c \int_0^{\infty} \int_{\frac{t}{2}}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon s}{2} - Im\lambda t} ds dt \\
&\leq \frac{1}{4} \int_0^{\infty} e^{-t(\frac{\varepsilon}{4} + Im\lambda)} dt + c \int_0^{\infty} e^{-t(\frac{\varepsilon}{4} + Im\lambda)} dt
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^{\infty} \beta K(0, t) e^{i\lambda t} dt \right\| &\leq \beta \int_0^{\infty} \|K(0, t)\| \|e^{i\lambda t}\| dt \\
&\leq c \int_0^{\infty} \left\| \sigma\left(\frac{t}{2}\right) \right\| e^{-Im\lambda t} dt \\
&\leq c \int_0^{\infty} \int_{\frac{t}{2}}^{\infty} \|Q(s)\| e^{-Im\lambda t} ds dt \\
&\leq c \int_0^{\infty} \int_{\frac{t}{2}}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon s}{2}} e^{\frac{\varepsilon s}{2}} \|Q(s)\| e^{-Im\lambda t} ds dt \\
&\leq c \int_0^{\infty} \int_{\frac{t}{2}}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon s}{2} - Im\lambda t} ds dt \\
&\leq c \int_0^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon t}{4}} e^{-Im\lambda t} dt \\
&\leq c \int_0^{\infty} e^{-t(\frac{\varepsilon}{4} + Im\lambda)} dt
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\|K(x, t)\| \leq c e^{\left(-\varepsilon \frac{x+t}{4}\right)}$$

eşitsizliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}
 \left\| \int_0^\infty \int_x^\infty A(x)K(x,t)e^{i\lambda t} dt dx \right\| &\leq \int_0^\infty \int_x^\infty \|A(x)\| \|K(x,t)\| \|e^{i\lambda t}\| dt dx \\
 &\leq c \int_0^\infty \int_x^\infty A(x) e^{-\left(\frac{x+t}{4}\right)} e^{-Im\lambda t} dt dx \\
 &\leq c \int_0^\infty A(x) e^{-\frac{\varepsilon x}{4}} \left\{ \int_x^\infty e^{-t\left(\frac{\varepsilon}{4} + Im\lambda\right)} dt \right\} dx
 \end{aligned}$$

bulunur.

$$\int_0^\infty A(t) e^{i\lambda t} dt$$

integrali Fourier dönüşümü olup, $A(t)$ fonksiyonu $L_1(0, \infty; \mathbb{C}^n)$ uzayındandır. O halde bu integrallerin yakınsak olması için $\frac{\varepsilon}{4} + Im\lambda t > 0$ gerekir. Dolayısıyla $Im\lambda > -\frac{\varepsilon}{4}$ için $detN(\lambda)$ fonksiyonu analitik olacağından reel eksen analitiklik bölgesinin içerisinde yer alır. Dolayısıyla Teorem 2.2 gereğince $detN(\lambda)$ fonksiyonunun $\mathbb{C}_+$ daki sıfırlarının limit noktaları reel eksen üzerinde bulunamaz. Ayrıca Teorem 4.2.1 ve Teorem 4.2.2 gereğince M_1 ve M_2 kümeleri sınırlıdır. $detN(\lambda) \neq 0$ olup M_1 ve M_2 kümelerinin limit noktaları analitiklik bölgesinin içerisinde olduğundan M_1 ve M_2 kümeleri sonludurlar. $detN(\lambda)$ fonksiyonu $Im\lambda > -\frac{\varepsilon}{4}$ için analitik devama sahip olup Teorem 2.3 gereğince $detN(\lambda)$ fonksiyonunun $\bar{\mathbb{C}}_+$ daki sıfırlarının katı sonludur. O halde $\sigma_d(L)$ ve $\sigma_{ss}(L)$ kümeleri sonlu sayıda elemana sahip olup elemanlarının katları da sonludur.

4.2.6. Teorem

$\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$\sup_{x \in (0, \infty)} \{ \exp(\varepsilon \sqrt{t}) [\|Q(t)\| + \|A(t)\|] \} < \infty \quad (4.12)$$

koşulu altında $detN(\lambda)$ fonksiyonunun $\bar{\mathbb{C}}_+$ da analitik olup reel eksen her mertebeden türeve sahiptir. Fakat $detN(\lambda)$ fonksiyonu reel eksenden alt yarı düzleme analitik devama sahip değildir.

İspat

Teorem 3.4'e göre

$$\|K(x, t)\| \leq C \int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} \|Q(s)\| ds$$

sağlanır. Bu eşitsizlik göz önüne alınıp,

$$N(\lambda) = \alpha i \lambda I - \alpha K(0, 0) - \beta I + \int_0^{\infty} F(t) e^{i\lambda t} dt$$

ve

$$F(t) = \alpha K_x(0, t) - \beta K(0, t) + A(t) + \int_0^t A(x) K(x, t)$$

eşitlikleri kullanılarak $N(\lambda)$ fonksiyonunun analitiklik bölgesi incelenecektir.

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^{\infty} \alpha K_x(0, t) e^{i\lambda t} dt \right\| &\leq \alpha \int_0^{\infty} \|K_x(0, t)\| \|e^{i\lambda t}\| dt \\ &\leq \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \left\| Q\left(\frac{t}{2}\right) \right\| e^{-Im\lambda t} dt + c \int_0^{\infty} \left\| \sigma\left(\frac{t}{2}\right) \right\| e^{-Im\lambda t} dt \\ &\leq \frac{1}{4} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon\sqrt{t}} e^{\varepsilon\sqrt{t}} \left\| Q\left(\frac{t}{2}\right) \right\| e^{-Im\lambda t} dt + c \int_0^{\infty} \int_{\frac{t}{2}}^{\infty} \|Q(s)\| e^{-Im\lambda t} ds dt \\ &\leq \frac{1}{4} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon\sqrt{t}} e^{\varepsilon\sqrt{t}} \left\| Q\left(\frac{t}{2}\right) \right\| e^{-Im\lambda t} dt \\ &\quad + c \int_0^{\infty} \int_{\frac{t}{2}}^{\infty} e^{-\varepsilon\sqrt{s}} e^{\varepsilon\sqrt{s}} \|Q(s)\| e^{-Im\lambda t} ds dt \\ &\leq \frac{1}{4} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon\sqrt{t}} dt + c \int_0^{\infty} e^{-Im\lambda t} \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{s}} ds dt \end{aligned}$$

bulunur.

Benzer şekilde,

$$\left\| \int_0^{\infty} \beta K(0, t) e^{i\lambda t} dt \right\| \leq \beta \int_0^{\infty} \|K(0, t)\| \|e^{i\lambda t}\| dt$$

$$\begin{aligned}
&\leq c \int_0^{\infty} \left\| \sigma\left(\frac{t}{2}\right) \right\| e^{-Im\lambda t} dt \\
&\leq c \int_0^{\infty} \int_{\frac{t}{2}}^{\infty} \|Q(s)\| e^{-Im\lambda t} ds dt \\
&\leq c \int_0^{\infty} \int_{\frac{t}{2}}^{\infty} e^{-\varepsilon\sqrt{t}} e^{\varepsilon\sqrt{t}} \|Q(s)\| e^{-Im\lambda t} ds dt \\
&\leq c \int_0^{\infty} \int_{\frac{t}{2}}^{\infty} e^{-\varepsilon\sqrt{t}-Im\lambda t} ds dt \\
&\leq c \int_0^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon t}{4}} e^{-Im\lambda t} dt \\
&= c \int_0^{\infty} e^{-Im\lambda t} \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{s}} ds dt
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\int_0^{\infty} A(t) e^{i\lambda t} dt$$

integrali Fourier dönüşümü olup $L_1(0, \infty; \mathbb{C}^n)$ uzayındandır. Dolayısıyla bu integral üst yarı düzlemde yakınsaktır. Son olarak

$$\int_0^{\infty} \int_x^{\infty} A(x) K(x, t) e^{i\lambda t} dt dx \leq \int_0^{\infty} A(x) \int_x^{\infty} K(x, t) e^{i\lambda t} dt dx$$

olup $A(x)$ ve $K(x, t)$, $L_2(0, \infty; \mathbb{C}^n)$ uzayından olup $L_2(0, \infty; \mathbb{C}^n)$ uzayından olan iki fonksiyonun çarpımı $L_1(0, \infty; \mathbb{C}^n)$ uzayından olduğu için

$$\int_0^{\infty} \int_x^{\infty} A(x) K(x, t) e^{i\lambda t} dt dx$$

Fourier dönüşümü olup $L_1(0, \infty; \mathbb{C}^n)$ uzayındandır.

Bu integraller üst yarı düzlemde analitiktir. Fakat $Im\lambda t = 0$ olduğu zaman

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{s}} ds dt$$

integrali yakınsak değildir. Dolayısıyla reel ekseninde analitiklik yoktur.

Sonuç olarak, $\det N(\lambda)$ fonksiyonunun $\bar{\mathbb{C}}_+$ da analitik olup reel ekseninde her mertebeden türeve sahiptir. Fakat $\det N(\lambda)$ fonksiyonu reel ekseninden alt yarı düzleme analitik devama sahip değildir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi $M_3 = M_1'$

ve

$$M_4 = \left\{ \lambda: \lambda \in \bar{\mathbb{C}}_+, \frac{d^n}{d\lambda^n} \det N(\lambda) = 0, \forall n \in \mathbb{N} \right\}$$

şeklinde M_3 ve M_4 kümeleri tanımlansın. Burada M_3 kümesi M_1 kümesinin yığılma noktalarından oluşan kümedir. M_4 kümesi de $\det N(\lambda)$ nın sonsuz katlı sıfırlarından oluşan kümedir.

4.2.7. Teorem

M_1, M_2, M_3 ve M_4 kümeleri için aşağıda verilen bağıntılar sağlanır.

- i) $M_1 \cap M_4 = \emptyset, M_3 \subset M_2, M_4 \subset M_2, M_3 \subset M_4$
- ii) $\mu(M_3) = \mu(M_4) = 0$

İspat

i) $\mathbb{C}_+$ üzerinde $\det N(\lambda)$ analitik olduğundan bu bölgede sonsuz katlı sıfıra sahip olamaz.

Dolayısıyla $M_1 \cap M_4 = \emptyset$

$\det N(\lambda), \bar{\mathbb{C}}_+$ üzerinde sürekli olduğu için $M_3 \subset M_2$ sağlanır.

M_2 ve M_4 kümelerinin tanımından analitik fonksiyonların sonsuz katlı sıfırları, reel ekseninde olduğu için $M_4 \subset M_2$ dir. Ayrıca $M_3 \subset M_4$ dir. Yani analitik fonksiyonların sıfır noktalarının limit noktaları, sonsuz katlı sıfırlarının alt kümesidir.

ii) $M_3 \subset M_2$ ve $M_4 \subset M_2$ ve Teorem 4.2.2 den $\mu(M_2) = 0$ olduğu dikkate alınırsa $\mu(M_3) = \mu(M_4) = 0$ bulunur.

4.2.8. Teorem

$$|\det N^{(n)}(\lambda)| \leq A_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \operatorname{Im} \lambda \geq 0$$

eşitsizliğini sağlayan

$$A_n = c \int_0^{\infty} t^n e^{-\frac{\varepsilon\sqrt{t}}{4}} dt \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.13)$$

sabitleri vardır.

İspat

$$\left| \frac{d^n}{d\lambda^n} \det N(\lambda) \right| = \left| \int_0^{\infty} (it)^n F(t) e^{i\lambda t} dt \right| \leq \int_0^{\infty} t^n \|F(t)\| dt$$

olup

$$\|F(t)\| \leq c e^{-\frac{\varepsilon\sqrt{t}}{4}}$$

eşitsizliği kullanılarak

$$\left| \frac{d^n}{d\lambda^n} \det N(\lambda) \right| \leq c \int_0^{\infty} t^n e^{-\frac{\varepsilon\sqrt{t}}{4}} dt = A_n$$

elde edilir.

4.2.9. Teorem

(4.13) ile tanımlanan A_n sabitleri, B ve b birer sabit olmak üzere

$$A_n \leq B b^n n! n^n$$

eşitsizliğini gerçekler.

İspat

$$A_n = c \int_0^{\infty} t^n e^{-\frac{\varepsilon\sqrt{t}}{4}} dt \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\frac{\varepsilon\sqrt{t}}{4} = u$$

değişken değiştirmesi yapılırsa

$$t = \frac{16u^2}{\varepsilon^2}, dt = \frac{32u}{\varepsilon^2} du$$

olur. Bu ifadeler (4.13) de yerine yazılırsa

$$A_n = c \int_0^{\infty} t^n e^{-\frac{\varepsilon \sqrt{t}}{4}} dt = c \frac{2^{4n+5}}{\varepsilon^{2n+2}} \int_0^{\infty} u^{2n+1} e^{-u} du = c \frac{2^{4n+5}}{\varepsilon^{2n+2}} \Gamma(2n+2)$$

eşitliği elde edilir.

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

olduğu dikkate alınırsa

$$b_0^n = \frac{2^{6n+7}}{\varepsilon^{2n+2}}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} A_n &= c \frac{2^{4n+5}}{\varepsilon^{2n+2}} (2n+1)(2n)(2n-1) \dots 3.2.\Gamma(1) \\ &= c \frac{2^{4n+5}}{\varepsilon^{2n+2}} (2n+1)! \\ &\leq c \frac{2^{4n+5}}{\varepsilon^{2n+2}} (2n+1)(2n+1) \dots (2n+1) \\ &\leq c \frac{2^{4n+5}}{\varepsilon^{2n+2}} (2n+1)^{(2n+1)} \\ &\leq c \frac{2^{4n+5}}{\varepsilon^{2n+2}} (2n+2)^{(2n+2)} \\ &= c \frac{2^{6n+7}}{\varepsilon^{2n+2}} (n+1)^{(2n+2)} \\ &= cb_0^n (n+1)^{(2n+2)} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ için } \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq e, \quad e^n \geq 1+n, \quad n^n \leq e^n n!$$

eşitsizlikleri sağlandığı için

$$\begin{aligned} A_n &\leq cb_0^n (n+1)^{(2n+2)} \\ &\leq cb_0^n e^{2n} (n+1)^{2n} \\ &= cb_1^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} n^{2n} \\ &= cb_1^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} n^{2n} \\ &\leq cb_1^n e^{2n} n^{2n} \\ &= cb_2^n n^n n^{2n} \\ &\leq cb_2^n e^n n! n^n \\ &= Bb^n n! n^n \end{aligned}$$

elde edilir.

4.2.10. Teorem

$$\sup_{x \in (0, \infty)} \{ \exp(\varepsilon \sqrt{t}) [\|Q(t)\| + \|A(t)\|] \} < \infty$$

koşulu altında M_4 boştur.

İspat

Yeterince büyük $T > 0$ için $| \ln | \det N(\lambda) | | < \infty$ olup

$$\int_{-\infty}^{-T} \frac{\ln | \det N(\lambda) |}{1 + \lambda^2} d\lambda$$

ve

$$\int_T^{\infty} \frac{\ln | \det N(\lambda) |}{1 + \lambda^2} d\lambda \quad (4.14)$$

integralleri mutlak yakınsaktır.

$$\sup_{x \in (0, \infty)} \{ \exp(\varepsilon \sqrt{t}) [\|Q(t)\| + \|A(t)\|] \} < \infty$$

koşulu altında

$$A_n = c \int_0^{\infty} t^n e^{-\frac{\varepsilon \sqrt{t}}{4}} dt \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

olmak üzere

$$G(s) = \inf_n \frac{A_n s^n}{n!} \leq B e^{(-e^{-1} b^{-1} s^{-1})}$$

ifadesini elde etmek için,

$$A_n \leq B b^n n! n^n$$

eşitsizliği kullanılarak

$$G(s) = \inf_n \frac{A_n s^n}{n!} \leq \inf_n \left(\frac{B b^n n! n^n s^n}{n!} \right) = \inf_n (B b^n n^n s^n) \quad (4.15)$$

bulunur.

$f(x) = b^x s^x x^x$ ile tanımlı fonksiyon $(-\infty, \infty)$ üzerinde minimum değerini

$x_0 = b^{-1} s^{-1} e^{-1}$ noktasında alır. Bu x_0 değeri (4.15) eşitsizliğinde yazılırsa

$$\begin{aligned} G(s) &= \inf_n \frac{A_n s^n}{n!} \leq B b^{b^{-1} s^{-1} e^{-1}} (b^{-1} s^{-1} e^{-1})^{(b^{-1} s^{-1} e^{-1})} s^{(b^{-1} s^{-1} e^{-1})} \\ &= B b^{b^{-1} s^{-1} e^{-1}} (b^{-1} s^{-1} e^{-1})^{(b^{-1} s^{-1} e^{-1})} s^{(b^{-1} s^{-1} e^{-1})} \end{aligned}$$

$$= Be^{(-e^{-1}b^{-1}s^{-1})}$$

elde edilir. Teorem 4.2.8 den

$$|detN^{(n)}(\lambda)| \leq A_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad Im\lambda \geq 0, |\lambda| < T \quad (4.16)$$

elde edilmişti.

$\mu(M_4, s)$, M_4 kümesinin s komşuluğunun Lebesgue ölçüsü olmak üzere (4.14), (4.16) ve $detN(\lambda)$ fonksiyonu üst düzlemde özdeş olarak sıfır olmadığı için Teorem 2.5 kullanılırsa $t > 0$ olmak üzere M_4 kümesi

$$\int_0^t InG(s) d\mu(M_4, s) > -\infty$$

bulunur.

$$In(G(s)) \leq Ine^{(-b^{-1}s^{-1}e^{-1})} = -b^{-1}s^{-1}e^{-1}$$

olduğu için

$$\int_0^t \frac{1}{bes} d\mu(M_4, s) \leq - \int_0^t InG(s) d\mu(M_4, s) < \infty$$

olur.

$$\int_0^t \frac{1}{s} ds$$

integrali ıraksak olduğu için

$$\int_0^t \frac{1}{s} d\mu(M_4, s) < \infty$$

olması için $\mu(M_4, s) = 0$ olması gerekir. $\mu(M_4, s) = 0$ eşitliği de $M_4 = \emptyset$ olması durumunda sağlanır.

4.2.11. Teorem

$$\sup_{x \in (0, \infty)} \{ \exp(\varepsilon \sqrt{t}) [\|Q(t)\| + \|A(t)\|] \} < \infty$$

koşulu altında L operatörünün sonlu sayıda özdeğer ve spektral tekiliği olup özdeğer ve spektral tekilliklerinin katı da sonludur.

İspat

Teorem 4.2.7 de $M_3 \subset M_4$ olduğu gösterilmişti. Ayrıca Teorem 4.2.10 da $M_4 = \emptyset$ olduğu gösterildi. Dolayısıyla M_3 kümesi boştur. O halde sınırlı olan M_1 kümesi yığılma noktasına sahip olmadığı için sonludur. Dolayısıyla $\det N(\lambda)$ fonksiyonu kapalı üst yarı düzlemde sonlu sayıda sifira sahiptir. $M_4 = \emptyset$ olduğundan dolayı bu sıfırlarının katları da sonludur.



6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde genel sınır koşullu matris katsayılı Sturm-Liouville operatörünün diskret spektrumunun sonluluğu detaylı bir biçimde öğrenilmiştir. Fakat potansiyel matris fonksiyonu ve sınır koşulundaki matris fonksiyonunun azalma hızına bağlı olarak özdeğerlerin ve spektral tekilliklerin yapısı incelenmemiştir. Savunmadan sonra bu problemin öğrenilmesi önem arz etmektedir.





KAYNAKLAR

1. Agranovich, Z. S., Marchenko, V. A. (1963). *The Inverse Problem of Scattering Theory*. New York: Gordon and Breach, Science Publishers.
2. Bairamov, E., Cakar, O., Celebi, A. O. (1997). Quadratic Pencil of Schrödinger Operators with Spectral Singularities: Discrete Spectrum and Principal Functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 216, 303-320.
3. Bairamov, E., Cakar, O., Krall, A. M. (1999). An Eigenfunction Expansion for a Quadratic Pencil of a Schrödinger Operator with Spectral Singularities. *Journal of Differential Equations*, 151, 268-289.
4. Bairamov, E., Cakar, O., Krall, A. M. (2001). Non-Selfadjoint Difference Operators and Jacobi Matrices with Spectral Singularities. *Mathematische Nachrichten*, 229, 5-14.
5. Bairamov, E., Celebi, A. O. (1999). Spectrum and Spectral Expansion for the Non-Selfadjoint Discrete Dirac Operators. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 50(2), 371-384.
6. Bairamov, E., Coskun, C. (2005). The Structure of the Spectrum a System of Difference Equations. *Applied Mathematics Letters*, 18, 384-394.
7. Krall, A. M. (1965). The Adjoint of a Differential Operator with Integral Boundary Conditions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 16, 738-742.
8. Krall, A. M. (1965). A Nonhomogeneous Eigenfunction Expansion. *Transactions of the American Mathematical Society*, 117, 352-361.
9. Krall, A. M., Bairamov, E., Cakar, O. (1999). Spectrum and Spectral Singularities of a Quadratic Pencil of a Schrödinger Operator with a General Boundary Condition. *Journal of Differential Equations*, 151, 252-267.
10. Dolzhenko, E. P. (1979). Boundary Value Uniqueness Theorems for Analytic Functions. *Mathematical Notes*, 25 (6), 437-442.
11. Lyance, V. E. (1967). A Differential Operator with Spectral Singularities I, II. *American Mathematical Society Translations*, 2, 185-225, 227-283.
12. Lusternik, L. A., Sobolev, V. J. (1974). *Elements of Functional Analysis*. New York: John Wiley and Sons, Inc.
13. Naimark, M. A. (1960). Investigation of the Spectrum and the Expansion in Eigenfunctions of a Non-Selfadjoint Operators of Second Order on a Semi-Axis. *American Mathematical Society Translations*, 2 (16), 103-193.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı :SARIMAN, Çağlar
Uyruğu :T.C.
Doğum tarihi ve yeri :21.10.1991, Milas
Medeni hali :Bekar
Telefon :0544 961 26 48
e-mail :caglarsrmn@gmail.com



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik	Devam Ediyor
Lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik	2013
Lise	Milas Anadolu Lisesi	2009

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Tenis, basketbol, sinema



GAZİ GELECEKTİR..