İÇ ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

Sevgi AYKAÇ

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz – 2016

İÇ ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

Sevgi AYKAÇ

Dumlupınar Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliği Uyarınca
Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Özgün GÜRMEN ALANSAL

Temmuz - 2016

KABUL VE ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Sevgi AYKAÇ'ın Yüksek Lisans Tezi olarak hazırladığı "İÇ ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER" başlıklı bu çalışma, jürimizce Dumlupınar Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

20/07/2016

Üye: Prof. Dr. Erdal ULUALAN

Üye: Yrd. Doç. Dr. Sedat PAK

Üye: Yrd. Doç. Dr. Özgün GÜRMEN ALANSAL (Danışman)

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun …./…../2016 tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hasan GÖÇMEZ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Bu tezin hazırlanmasında Akademik kurallara riayet ettiğimizi, özgün bir çalışma olduğunu ve yapılan tez çalışmasının bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olduğunu, çalışma kapsamında teze ait olmayan veriler için kaynak gösterildiğini ve kaynaklar dizininde belirtildiğini, Yüksek Öğretim Kurulu tarafından kullanılmak üzere önerilen ve Dumlupınar Üniversitesi tarafından kullanılan İntihal Programı ile tarandığını ve benzerlik oranının %17 çıktığını beyan ederiz. Aykırı bir durum ortaya çıktığı takdirde tüm hukuki sonuçlara razı olduğumuzu taahhüt ederiz.

Yrd. Doç. Dr. Özgün GÜRMEN ALANSAL	Sevgi AYKAÇ
İmza	İmza

İÇ ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

Sevgi AYKAÇ
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi, 2016
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Özgün GÜRMEN ALANSAL

ÖZET

Bu yüksek lisans tezi, üç bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde kategorilerin özelliklerine yer verilmiştir. İkinci bölümde ise iç kategori ve Mal'cev kategorisi verilmiştir. Son bölümde ise ön iç çaprazlanmış modüller ve iç çaprazlanmış modül kavramı verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: İç Çaprazlanmış Modüller, İç Kategori, Mal'cev Kategorisi.

ON INTERNAL CROSSED MODULES

Sevgi AYKAÇ
Mathematics, M.S.Thesis, 2016
Thesis Supervisor: Assistant Prof. Özgün GÜRMEN ALANSAL

SUMMARY

This master thesis consists of three chapters. In the first chapter,were call some basic notions about categories. In the second chapter internal categories and Mal'cev categories are presented. And in the last chapter notion of internal crossed modules and internal pre-crossed modules are discussed.

Keywords: Internal Category, Mal’cev Category, On Internal Crossed Modules.

İÇİNDEKİLER

<u>Sayfa</u>

1. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde iç kategoriler ve iç çaprazlanmış modülleri tanımlamak için gerekli kavramlar verilecektir (Karaca, 1993 ve Mac Lane, 1998).

Tanım 1.1. $\mathcal{C}$ ile göstereceğimiz kategori aşağıdaki özellikleri sağlayan bir sistemdir.

(i) $Ob(\mathcal{C})$, elemanları obje diyeceğimiz sınıfıdır.

(ii) $\mathcal{C}(X,Y)$ (veya $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y)$); elemanlarına morfizm (veya oklar) diyeceğimiz kümedir.

(iii) $Ob(\mathcal{C})$ deki her X,Y,Z objeleri için

$$\begin{array}{rcl} k_{X,Z}^{Y}:\mathcal{C}(X,Y)\times\mathcal{C}(Y,Z) & \longrightarrow & \mathcal{C}(X,Z) \\ (f,g) & \longmapsto & gf \end{array}$$

fonksiyonuna kompozisyon denir ve

$$k_{X,Z}^{Y}(f,g)=gf=g\circ f$$

ile gösterilir ve $Ob(\mathcal{C})$ deki her X objesi için

$$1_X\in\mathcal{C}(X,X)$$

morfizmine birim morfizm denir.

Yukarıda verdiğimiz üç ifadeyi

$$\mathcal{C}=\left(Ob,\mathcal{C}(-,-),k_{-,-}^{-}\right) \text{ veya } \mathcal{C}=\left(Ob,Mor_{\mathcal{C}}(-,-),k_{-,-}^{-}\right)$$

ile göstereceğiz. Bu durumda, $\mathcal{C}$ yapısına aşağıda vereceğimiz iki özelliği sağlıyor ise bir kategori denir.

(1) Birleşme Özelliği: $f\in\mathcal{C}(X,Y)$, $g\in\mathcal{C}(Y,Z)$ ve $h\in\mathcal{C}(Z,A)$ ise

$$h(gf)=(hg)f\;;$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h(gf)=(hg)f"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, dashed, "gf"] & A \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "hg"] & Z \end{tikzcd}$$

(1.1)

(2) Birimlilik: Her X objesi için aşağıdaki özelliği sağlayan $1_X : X \longrightarrow X$ birim morfizmi vardır. Herhangi $f : X \longrightarrow Y$ için

$$f1_X = f = 1_Y f$$

dir. Yani

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_X"'] \arrow[dr, dashed] & Y \arrow[d, "1_Y"] \\ X \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed] & Y \end{tikzcd}$$

(1.2)

Tanım 1.2. $\mathcal{C}$ bir kategori olsun. A, B, X ler $\mathcal{C}$ kategorisinin objeleri ve

$$\theta : A \longrightarrow X \text{ ve } \phi : B \longrightarrow X$$

morfizmleri olsun.

$$\alpha : Y \longrightarrow A \text{ ve } \beta : Y \longrightarrow B$$

morfizmler olmak üzere,

(i) $\theta\alpha = \phi\beta$

(ii) Herhangi $g : Z \longrightarrow B$ ve $f : Z \longrightarrow A$ morfizmleri için $\phi f = \theta g$ olmak üzere $\alpha\varepsilon = f$ ve $\beta\varepsilon = g$

olacak şekilde bir tek $\varepsilon : Z \longrightarrow Y$ morfizmi vardır.

Bu iki özellik sağlanıyorsa (α, β) ikilisine (θ, ϕ) ikilisinin geri çekmesi denir.

Bu tanımı

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "\theta"] \\ B \arrow[r, "\phi"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "\theta"] \\ B \arrow[r, "\phi"'] & X \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

değişmeli diyagramlarıyla üretebiliriz. Yani,

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, "\varepsilon"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\ & Y \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "\beta"] & A \arrow[d, "\theta"] \\ & B \arrow[r, "\phi"] & X \end{tikzcd} \tag{1.4}$$

Teorem 1.1. (α, β) ve (α', β'), (θ, ϕ) ikilisinin geri çekmesi olsun. Bu durumda $\varphi : Y \longrightarrow Y'$ biricik izomorfizmi vardır. Öyle ki

$$\alpha' \varphi = \alpha \text{ ve } \beta' \varphi = \beta$$

elde edilir.

Tanım 1.3. $\mathcal{C}$ bir kategori olsun. A, B, X, Y ler $\mathcal{C}$ kategorisinin objeleri ve

$$\theta : X \longrightarrow A \text{ ve } \phi : X \longrightarrow B$$

morfizmleri olsun.

$$\alpha : A \longrightarrow Y \text{ ve } \beta : B \longrightarrow Y$$

morfizmler olmak üzere,

(i) $\alpha\theta = \beta\phi$

(ii) Herhangi $g : B \longrightarrow Z$ ve $f : A \longrightarrow Z$ morfizmleri için $f\phi = g\theta$ olmak üzere

$$\varepsilon\alpha = f \text{ ve } \varepsilon\beta = g$$

olacak şekilde bir tek $\varepsilon : Y \longrightarrow Z$ morfizmi vardır.

Bu iki özellik sağlanıyorsa (α,β) ikilisine (θ,ϕ) ikilisinin ileri itmesi denir.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\phi"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\phi"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd} \tag{1.5}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\phi"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \arrow[ddr, bend left, "f"] & \\ B \arrow[r, "\beta"'] \arrow[drr, bend right, "g"'] & Y \arrow[dr, "\varepsilon"] & \\ & & Z \end{tikzcd} \tag{1.6}$$

Teorem 1.2. (α,β) ve (α',β'), (θ,ϕ) ikilisinin ileri itmesi olsun. Bu durumda $\varphi : Y \longrightarrow Y'$ biricik izomorfizmi vardır. Öyle ki

$$\varphi\alpha = \alpha' \text{ ve } \varphi\beta = \beta'$$

dır.

Yardımcı Teorem 1.1. A **d**an B ye fonksiyon çifti

$$A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

olsun.

$E = \{\alpha \in A \mid f(\alpha) = g(\alpha)\}$ kümesinin A ya gömülmesi olan e aşağıdaki özellikleri sağlar.

1. $e : E \longrightarrow A$ bir fonksiyondur,

2. $f \circ e = g \circ e$;

3. $f \circ e^{'} = g \circ e^{'}$ olacak şekildeki herhangi $e^{'} : E^{'} \longrightarrow A$ fonksiyonu vardır.

Tanım 1.4. $\mathcal{C}$ - morfizm çifti

$$A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan (E,e) çiftine f ve g nin eşitleyicisi (equalizer) denir.

1. $e : E \longrightarrow A$ bir $\mathcal{C}$ - morfizmdir,

2. $f \circ e = g \circ e$;

3. $f \circ e^{'} = g \circ e^{'}$ olacak şekildeki herhangi $e^{'} : E^{'} \longrightarrow A$ $\mathcal{C}$ - morfizmi için aşağıdaki üçgeni değişmeli yapan bir tek $\bar{e} : E^{'} \longrightarrow E$, $\mathcal{C}$ - morfizmi vardır.

$$\begin{tikzcd}
E^{'} \arrow[d, dashed, "\bar{e}"'] \arrow[dr, "e^{'}"] & \\
E \arrow[r, "e"'] & A
\end{tikzcd} \tag{1.7}$$

Önerme 1.1. A ve B birer küme olmak üzere $f, g : A \longrightarrow B$ iki fonksiyon olsun. O zaman $E = \{a \in A \mid f(a) = g(a)\}$ kümesinin görünmesi e, aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i) $e : E \longrightarrow A$ bir fonksiyon

ii) $f \circ e = g \circ e$

iii) $f \circ e^{'} = g \circ e^{'}$ olacak şekildeki $e^{'}$ fonksiyonu için aşağıdaki diyagramı değişmeli yapacak şekilde bir tek $\bar{e} : E^{'} \longrightarrow E$ fonksiyonu vardır:

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[d, dashed, "\bar{e}"'] \arrow[dr, "e'"] & \\ E \arrow[r, "e"'] & A \end{tikzcd}$$

(1.8)

Tanım 1.5. $f,g:A\longrightarrow B$ iki $\mathcal{C}$ -morfizm olsun. Eğer aşağıdaki özellikler mevcut ise (E,e) ikilisine f ve g morfizmlerinin **ekolizeri (eşitleyicisi)** denir:

i) $e:E\longrightarrow A$ bir $\mathcal{C}$ -morfizm

ii) $f\circ e=g\circ e$

iii) $f\circ e'=g\circ e'$ olacak şekildeki e' morfizmi için aşağıdaki diyagramı değişmeli yapacak şekilde bir tek $\bar{e}:E'\longrightarrow E$ $\mathcal{C}$ -morfizmi vardır:

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[d, dashed, "\bar{e}"'] \arrow[dr, "e'"] & \\ E \arrow[r, "e"'] & A \end{tikzcd}$$

(1.9)

Tanım 1.6. $f,g:A\longrightarrow B$ iki $\mathcal{C}$ -morfizm ve $c:B\longrightarrow C$, $\mathcal{C}$-morfizm olsun. Aşağıdaki özellikler mevcut ise (c,C) ikilisine f ve g morfizminin **eşekolizeri (eşeşitleyicisi)** denir:

i) $c:B\longrightarrow C$ bir $\mathcal{C}$ -morfizm

ii) $c\circ f=c\circ g$

iii) $c'\circ f=c'\circ g$ olacak şekilde c' morfizmi için aşağıdaki diyagramı değişmeli olacak şekilde bir tek $\bar{c}:C\longrightarrow C'$, $\mathcal{C}$ -morfizmi vardır:

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[d, dashed, "\overline{c}"'] & \\
C' & B \arrow[ul, "c"'] \arrow[l, "c'"]
\end{tikzcd}
$$

(1.10)

Önerme 1.2. (Eşitleyicinin tekliği) $f,g:A\longrightarrow B$ iki morfizm olsun. Bu morfizmlerin iki tane eşitleyicisi varsa, bu eşitleyiciler A nın izomorfik alt nesneleridir; yani $(E,e)\approx(\hat{E},\hat{e})$.

İspat: (E,e) ve $(\hat{E},\hat{e})$, f ve g morfizmlerinin iki eşitleyicisi olsun. Eşitleyici tanımından $e=\hat{e}\circ p$ ve $\hat{e}=e\circ q$ olacak şekilde bir tek p ve q morfizmleri vardır.

$(E,e)\leq(\hat{E},\hat{e})$ ve $(\hat{E},\hat{e})\leq(E,e)\Rightarrow(E,e)\approx(\hat{E},\hat{e})$.

Notasyon: $(E,e)\approx Equ(f,g)$.

Tanım 1.8.

1) $e:E\longrightarrow A$ bir $\mathcal{C}$ -morfizm ise (E,e) ikilisine bir **regüler alt nesne** denir.

2) $(E,e)\approx Equ(f,g)$ olacak şekilde f,g morfizmleri varsa e ye **regüler monomorfizm** denir.

3) $\mathcal{C}$ bir kategori olsun. Her $\mathcal{C}$ -nesnesinin regüler alt nesnesinin temsili kümesi varsa, bu kategori **regüler iyi-kuvvete sahiptir** denir.

Tanım 1.9. Regular Epimorfizm: $f:A\longrightarrow B$ regular epimorfizm olması için oklar çiftinin coequalizeri olması gerekir.

Tanım 1.10. Split Epimorfizm: $f:X\longrightarrow Y$ split epimorfizmdir öyle ki $i:Y\longrightarrow X$ için $f\circ i=1_Y$ dir. $\mathcal{C}$ kategorisi üzerinde split epimorfizmaların kategorisi **SplitEpi($\mathcal{C}$)** ile gösterilir.

Her split epimorfizm regular epimorfizmdir.

Tanım 1.11. $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{C}$ kategoriler ve $D:\mathcal{I}\longrightarrow\mathcal{C}$ bir funktor ise, her bir $i\in Ob(\mathcal{I}), l_i : L\longrightarrow D(i)$ ve $\mathcal{I}$ kategorisindeki tüm $m:i\longrightarrow j$ morfizmleri için aşağıdaki diyagramı değişmeli kılacak şekilde bir $\left(L,(l_i)_{i\in Ob(\mathcal{I})}\right)$ kaynağı D **için bir doğal kaynaktır.**

$$
\begin{tikzcd}
 & D(i) \arrow[dd, "D(m)"] \\
L \arrow[ur, "l_i"] \arrow[dr, "l_j"'] & \\
 & D(j)
\end{tikzcd}
\tag{1.11}
$$

Bir başka deyişle, her nesnesindeki değeri L ve her morfizmindeki değeri 1_L olan sabit funktor $L:\mathcal{I}\longrightarrow\mathcal{C}$ ve $\left(L,(l_i)_{i\in Ob(\mathcal{I})}\right)$ $\mathcal{I}$ kategorisinde bir kaynak ise, bu takdirde $\left(L,(l_i)_{i\in Ob(\mathcal{I})}\right)$ nin D için bir doğal kaynak olması için gerek ve yeter şart $(l_i)_{i\in Ob(\mathcal{I})}$ nın L den D ye bir doğal transformasyon olmasıdır.

Dual olarak, $(k_i)_{i\in Ob(\mathcal{I})}$ D den $K:\mathcal{I}\longrightarrow\mathcal{C}$ sabit funktoruna bir doğal transformasyon olmak üzere D için bir **doğal batırma** $\left((k_i)_{i\in Ob(\mathcal{I})},K\right)$ eşkaynağıdır.

Kolaylık olması açısından; $D(i)$ yerine D_i; $\left(L,(l_i)_{i\in Ob(\mathcal{I})}\right)$ yerine $\left(L,(l_i)_I\right)$ ya da (L,l_i) ifadelerini kullanacağız.

Tanım 1.12. $D:\mathcal{I}\longrightarrow\mathcal{C}$ bir funktor ise, $(\hat{L},\hat{l}_i)$ D için herhangi bir kaynak olmak üzere $\forall j\in Ob(\mathcal{I})$ için aşağıdaki diyagram değişmeli olacak şekilde bir tek $h:\hat{L}\longrightarrow L$ morfizminin var olması koşulu ile D için bir (L,l_i) doğal kaynağına D **nin bir limiti** denir.

$$\begin{tikzcd} \hat{L} \arrow[d, dashed, "h"'] \arrow[dr, "\hat{l}_j"] & \\ L \arrow[r, "l_j"'] & D_j \end{tikzcd}$$

(1.12)

Dual olarak, D nin her doğal batırma, onun tek türlü çarpımı olmak üzere (k_i, K) doğal batırmasına D **nin eş limiti** denir.

Tanım 1.13. 1) $\mathcal{I}$ bir kategori ise, her $D:\mathcal{I}\longrightarrow\mathcal{C}$ funktorunun bir limite sahip olması koşulu ile $\mathcal{C}$ kategorisine $\mathcal{I}$**-tam (ya da $\mathcal{I}$ limitlere sahip**) denir.

2) Her bir $\mathcal{I}$ küçük kategorisi için $\mathcal{C}$ $\mathcal{I}$-tam ise, $\mathcal{C}$ ye **tam** denir.

3) Her bir sonlu $\mathcal{I}$ kategorisi için $\mathcal{C}$ $\mathcal{I}$-tam ise, $\mathcal{C}$ kategorisine **sonlu tam (ya da sonlu limitlere sahip)** denir.

Dual Kavramlar:_ $\mathcal{I}^{op}$ -eş tam (ya da $\mathcal{I}^{op}$ -eş limitlere sahip) eştam; sonlu eş tam.

Tanım 1.14. Bir $\mathcal{C}$ kategorisi üzerinde bir $T=(T,\eta,\mu)$ monadı aşağıdaki diyagramlar değişmeli olacak şekildeki

$$\eta : 1_{\mathcal{C}} \longrightarrow T$$
$$\mu : TT \longrightarrow T$$

doğal transformasyonları ile birlikte bir

$$T:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}$$

endofunktorudur.

$$\begin{tikzcd} T^3 \arrow[r, "T_\mu"] \arrow[d, "\mu T"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\ T^2 \arrow[r, "\mu"'] & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T \arrow[r, "T_\eta"] \arrow[dr, "="'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "\eta T"'] \arrow[dl, "="] \\ & T & \end{tikzcd}$$

(1.13)

Bu diyagramlarda T^n, T nin n kere tekrarlanması anlamındadır. X objesinin μT deki görüntüsü TX in μ deki görüntüsüdür, benzer şekilde X objesinin $T\mu$ deki görüntüsü $T(\mu X)$ dir, benzer ifadeler η için de geçerlidir.

Monad, triad, standart yapı ve temel yapı ifadelerinin hepsi aynı şeyi ifade etmektedir.

Monadın bir diğer tanımını monaid yardımıyla yapabiliriz, bunun için de önce monaidin tanımını yapalım;

Tanım 1.15. Bir M monaidi aşağıdaki özellikleri sağlayan bir M kümesi ve iki fonksiyonla tanımlanabilir.

Fonksiyonlar

$$\mu : M \times M \longrightarrow M$$
$$\eta : 1 \longrightarrow M$$

olmak üzere aşağıdaki iki diyagram değişmelidir.

$$\begin{tikzcd}
M \times M \times M \arrow[r, "1\times\mu"] \arrow[d, "\mu\times 1"'] & M \times M \arrow[d, "\mu"] \\
M \times M \arrow[r, "\mu"'] & M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1 \times M \arrow[r, "T_f"] \arrow[d, "\lambda"] & M \times M \arrow[r, "T_f"] \arrow[d, "\mu"] & M \times 1 \arrow[d, "\theta"] \\
M \arrow[r, equal] & M \arrow[r, equal] & M
\end{tikzcd}
\tag{1.14}$$

Burada $1 \times \mu$ deki $M \longrightarrow M$ birim fonksiyonu ve $1 \times M$ deki 1, tek elemanlı $1 = \{0\}$ kümesidir. Ayrıca λ ve θ da

$$1 \times X \xrightarrow{\lambda} X \xleftarrow{\theta} X \times 1 \ni \lambda(0, x) = x$$

$\theta(x, 0) = x$ ile verilen birebir, örten fonksiyondur. Bu diyagramların değişmeli olması aşağıdaki bileşkelerin eşit olduğu anlamındadır.

$$\mu \circ (1 \times \mu) = \mu \circ (\mu \times 1), \mu \circ (\eta \times 1) = \lambda, \mu \circ (1 \times \eta) = \theta$$

μ fonksiyonunu $x,\ y \in M$ için $\mu(x, y) = x \cdot y$ çarpımı olarak, η fonksiyonunu da tek elemanlı $1 = \{0\}$ kümesini $\eta(0) = u \in M$ olacak şekildeki sabit fonksiyon olarak alalım. Böylece diyagramları elemanlar cinsinden şu şekilde ifade ederiz:

$$\begin{tikzcd}
(x,y,z) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (x,yz) \arrow[d, mapsto] \\
(xy,z) \arrow[r, mapsto] & (xy)z = x(yz)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(0,x) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (u,x) \arrow[d, mapsto] & (x,u) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (x,0) \arrow[d, mapsto] \\
x \arrow[r, equal] & u.x & x.u \arrow[r, equal] & x
\end{tikzcd}$$

(1.15)

Bunlar aslında tamamen monaiddeki çarpımın birleşmeli olması ve bir u , sağ ve sol birim elemanına sahip olması aksiyomlarına benzemektedir. Bu; cebirsel özelliklerinin değişmeli diyagramlarla nasıl ifade edilebileceğine karşılık gelmektedir. Aynı süreç diğer özelliklere de uygulanabilir. Mesela bir grubu bir M monaidine aşağıdaki diyagramlar değişmeli olacak şekilde bir

$$\psi : M \longrightarrow M$$
$$x \mapsto x^{-1}$$

fonksiyonunu ekleyerek tanımlayabiliriz.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] & M \times M \arrow[r, "1\times\psi"] & M \times M \arrow[d, "\mu"] \\
1 \arrow[rr, "\mu"'] & & M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (x,x) \arrow[r, mapsto] & (x,x^{-1}) \arrow[d, mapsto] \\
0 \arrow[r, mapsto] & u \arrow[r, equal] & x.x^{-1}
\end{tikzcd}$$

(1.16)

Burada $\sigma : M \longrightarrow M \times M$ her $x \in M$ için $x \mapsto (x,x)$ şeklinde tanımlı diagonal fonksiyondur. İsimlendirilmemiş düşey ok $M \longrightarrow 1 = \{0\}$, M den tek elemanlı kümeye giden aşikar (ve tek) fonksiyondur. Sağ tarafta belirtildiği gibi bu diyagram, ψ nin her bir $x \in M$ elemanını x in sağ tersi olan x^{-1} e götürdüğünü göstermektedir.

Tanım 1.16. Bir X kategorisindeki bir $\mathrm{T} = (T, \eta, \mu)$ monadı bir $T : X \longrightarrow X$ funktoru ve aşağıdaki diyagramlar değişmeli olacak şekilde

1. $\eta : I_\infty \longrightarrow T$, $\mu : T^2 \longrightarrow T$ doğal transformasyonlarından oluşmaktadır.

2.
$$
\begin{tikzcd}
T^3 \arrow[r, "T\mu"] \arrow[d, "\mu T"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\
T^2 \arrow[r, "\mu"'] & T
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
IT \arrow[r, "\eta T"] \arrow[d, equal] & T^2 \arrow[d, "\mu"] & TI \arrow[l, "T\eta"'] \arrow[d, equal] \\
T \arrow[r, equal] & T \arrow[r, equal] & T
\end{tikzcd}
$$

(1.17)

Monad tanımı kümelerdeki bir M monoidinin tanımına benzemektedir. Tanımda monoidin elemanlarının kümesi M ile $T: X \longrightarrow X$ endofunktoru, iki kümenin kartezyen çarpımı "$\times$ " ile iki funktorun bileşkesi, $\mu: M \times M \longrightarrow M$ çarpımı ikili işlemi ile $\mu: T^2 \longrightarrow T$ transformasyonu ve $\eta: 1 \longrightarrow M$ birim elemanı ile de $\eta: I_\infty \longrightarrow T$ yer değiştirilir. Bu yüzden η ye T monadının birimi ve μ ye de T monadının çarpımı deriz. (2) deki birinci değişmeli diyagram monadın birleşme kuralını, ikinci ve üçüncü diyagramlar da sırasıyla sol ve sağ birim kuralını ifade etmektedir.

Tüm bunların ışığında X deki bir monad, endofunktorlar kategorisindeki "$\times$ " çarpımı ile endofunktorların bileşkesi ve birim küme ile birim funktor yer değiştirilerek elde edilen bir monoiddir.

Bu (X, T, η, μ) yapısına bir monad denir.

2. İÇ KATEGORİLER VE MAL'CEV KATEGORİLER

Bir kategori içinde, uygun obje ve morfizm sınıfları belirleyerek bir kategori oluşturulacaktır, bu kategori, kategori içinde bir kategori olup adına iç (internal) kategori denir. Bu bölümde iç kategoriler, regüler kategoriler, Mal'cev kategorilerine değineceğiz. Buradaki temel kavramlar ve detaylı bilgiler (Borceux ve Bourn, 2004-2007), (Janelidze, 1990), (Bourn, 1991-2000-2002-2004-2007) (Carboni vd., 1991-1992-1993) dedir.

$\mathcal{C}$ sonlu çarpımlara sahip bir kategori ve X ile O,$\mathcal{C}$ kategorisi içinde iki obje olsun ve

$$X \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} O \xrightarrow{e} X$$

morfizmleri $se = id_o = te$ olacak şekilde mevcut olsun. Burada $\mathcal{C}$ kategorisi geri çekmelere sahip olduğundan $X_t \times_s X = \{(f,g) \in X \times X : t(f) = s(g)\}$ olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} X_t \times_s X & \xrightarrow{p_2} & X \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s} \\ X & \xrightarrow[t]{} & O \end{array} \tag{2.1}$$

geri çekme diyagramı oluşturulabilir. Bu durumda

$$\begin{array}{ccc} (f,g) & \longrightarrow & g \\ \downarrow & & \downarrow \\ f & \longrightarrow & t(f) = s(g) \end{array}$$

olur.

Şimdi $\mathcal{C}$ kategorisi içinde objeleri O ve morfizmleri X olan bir kategori oluşturmak istiyoruz. Bunun için morfizmlerin bir bileşkesine ihtiyacımız var. Bu yüzden

$$m : X_t \times_s X \longrightarrow X$$

biçiminde birleşmeli olan ve birimi koruyan bir m bileşkesini tanımlayalım.

$f \in X$ morfizmleri için;

$$\begin{aligned} t: X &\longrightarrow O \\ f &\longmapsto t(f) \end{aligned}$$

morfizmi hedef morfizmi,

$$\begin{aligned} s: X &\longrightarrow O \\ f &\longmapsto s(f) \end{aligned}$$

morfizmi kaynak morfizm olarak bilinir yani

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] & y \end{tikzcd}$$

$f \in X$ ve $x, y \in O$ için

$$t(f) = y \text{ ve } s(f) = x$$

olur. Bundan dolayı X içindeki morfizmler için bileşke tanımlanabilmesi için

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, bend left, "f"] & {} \arrow[r, bend left, "g"] & {} \end{tikzcd}$$

f nin bittiği yer yani $t(f)$ ile g nin başladığı yer yani $s(g)$ eşit olmalıdır. Yani $t(f) = s(g)$ olmalıdır. Dolayısıyla X içinde bir bileşke, $t(f) = s(g)$ olacak şekilde ki $(f, g) \in X \times X$ ikilileri için tanımlanabilir, bu şekilde ikililer ise $X_t \times_s X$ ile temsil edilir.

$$\begin{aligned} m: X\, {}_t\!\times_s X &\longrightarrow X \\ (f, g) &\longrightarrow m(f, g) = g \circ f \end{aligned}$$

denirse

$$\begin{tikzcd} x = s(f) \arrow[r, bend left, "f"] & y = t(f) = s(g) \arrow[r, bend left, "g"] & z = t(g) \end{tikzcd}$$

$$t(m(f,g)) = t(g \circ f) = t(g)$$

$$s(m(f,g)) = s(g \circ f) = s(f)$$

olur.

$$\begin{array}{ccccc} X_t \times_s X & \xrightarrow{m} & X & \xrightarrow{t} & O \\ (f,g) & \longmapsto & g \circ f & \longmapsto & t(g \circ f) = t(g) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{s} & O \\ f & \longmapsto & s(f) \end{array}$$

morfizmlerini kullanarak $(X_t \times_s X)_t \times_s X$ geri çekme objesi oluşturulabilir, burada

$$(X_t \times_s X)_t \times_s X = \{(f,g,h) \in X \times X \times X = t(f) = s(g) \text{ ve } t(g \circ h) = s(h)\}$$

dir. Benzer şekilde $X_t \times_s (X_t \times_s X)$ geri çekme objesi de

$$X_t \times_s (X_t \times_s X) = \{(f,g,h) \in X \times X \times X = t(f) = s(h \circ g) \text{ ve } t(g) = s(h)\}$$

şeklinde oluşturulabilir. $s(h \circ g) = s(g)$ ve $t(g \circ f) = t(g)$ olduğundan dolayı bu iki geri çekme objesi eşittir. Dolayısıyla

$$\begin{tikzcd} X_t \times_s X_t \times_s X \arrow[r, "m \times id_X"] \arrow[d, "id_X \times m"'] & X_t \times_s X \arrow[d, "m"] \\ X_t \times_s X \arrow[r, "m"'] & O \end{tikzcd}$$

diagramı oluşturulabilir, buna göre

$$\begin{tikzcd} (f,g,h) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (m(f,g),h) = (g \circ f, h) \arrow[d, mapsto] \\ (f, h \circ g) = (f,(m(g,h))) \arrow[r, mapsto] & m(f, h \circ g) = m(g \circ f, h) \end{tikzcd}$$

olur ki bu diagramın değişmeliliği, m bileşkesinin birleşmeli olduğunu verir.

Son olarak bir kategori için bileşkenin birimi koruduğu gösterilmelidir. Yani her bir $f \in Mor\,(\mathcal{C})$ için

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & Y \arrow[d, "1_y"] \\ & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "1_x"'] & Y \\ & X \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

diagramlarının değişmeliliği

$$1_y \circ f = f$$

ve

$$f \circ 1_x = f$$

olduğu gösterilmelidir.

$e : O \longrightarrow X$ morfizmini, O içindeki her bir x objesi için id_x morfizmi olarak seçelim yani

$$\begin{aligned} e : O &\longrightarrow X \\ \mathrm{x} &\longmapsto e(x) \end{aligned}$$

için

$$e(x) = Id_x : x \longmapsto x$$

olsun. Eğer $f \in X$ için $s(f) = x,\ t(f) = y$ ise,

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] & y \end{tikzcd}$$

$id_y = f \circ id_x$ olduğu gösterilmelidir. Burada $te = id_O$ bileşkesi kullanılırsa

$$O_{id_O} \times_s X = \{(x, f) = x = s(f)\}$$

geri çekme objesi oluşturulabilir ve benzer şekilde $se = Id_0$ bileşkesi kullanılırsa da

$$X_t \times_{Id_0} O = \{(f, y) : t(f) = y\}$$

geri çekme objesi elde edilir. Bu geri çekme objesi,

$$\begin{aligned} p_2 : O_{id_O} \times_s X &\longrightarrow X \\ (x, f) &\longmapsto p_2(x, f) = f \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} p_1 : X_t \times_{Id_0} O &\longrightarrow X \\ (f, y) &\longmapsto p_1(f, y) = f \end{aligned}$$

biçiminde projeksiyonlara sahiptir. Bunlar kullanılarak

$$\begin{tikzcd} O_{id_O} \times_s X \arrow[r, "e \times id_X"] \arrow[dr, "p_2"'] & X \times X \arrow[d, "m"'] & X_t \times_{id_O} O \arrow[l, "id_X \times e"'] \arrow[dl, "p_1"] \\ & X & \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

diyagramının değişmeliliğinden birimler için istenilen elde edilir, yani

$$\begin{tikzcd} (x, f) \arrow[r] \arrow[dr] & (e(x), f) \arrow[d] \\ & f = f \circ e(x) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (f, e(y)) \arrow[dr] & (f, y) \arrow[l] \arrow[d] \\ & e(y) \circ f = f \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

elde edilir.

Buna göre bir $\mathcal{C}$ kategorisinde, X ile O objeler ve s, t, m, e yukarıdaki diagramları değişmeli yapan morfizmler olmak üzere $\mathcal{C} = \langle X, O, s, t, e, m \rangle$ sistemine iç (internal) kategori denir, X, $\mathcal{C}$ nin morfizmler ailesi ve O ise $\mathcal{C}$ nin objelerinin ailesi olur.

Bir $\mathcal{C}$ kategorisi içindeki $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}^{'}$ gibi iki internal kategorisi arasındaki bir integral funktor,

$$F_0 : O \longrightarrow O^{'} \qquad\qquad F_1 : X \longrightarrow X^{'}$$

morfizmlerinden oluşur, öyle ki (2) deki diagramlar değişmelidir.

$$F, F^{'} : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}^{'}$$

iç funktorları arasındaki $\mathcal{G}$ deki bir iç doğal dönüşüm (4) diagramlarını değişmeli yapacak şekildeki $\mathcal{G}$ içindeki bir

$$v : O \longrightarrow O^{'}$$

morfizmidir.

Set, küme kategorisi içindeki iç kategori small kategori dir.

Grp, grup kategorisi içindeki iç kategori ise objeler ve morfizmler ailesi birer grup ve s, t, e, m dönüşümleri birer grup homomorfizmi olan bir kategoridir. Bu kategori grupların çaprazlanmış modülüne denktir. Dolayısıyla, **Grp** içindeki iç kategori grupların çaprazlanmış modülünü verir.

Tanım 2.1. (Pointed Kategori) Başlangıç ve bitiş objesi izomorf olan kategoridir. $\mathcal{E}$ bir pointed kategori ise

i. Hem başlangıç hem bitiş objesi (sıfır obje) 1
ii. $T_X : X \longrightarrow 1$ tek morfizmi bitiş objeye
iii. $\alpha_Y : 1 \longrightarrow Y$ tek morfizmi başlangıç objeden
iv. $\omega_{X,Y} : X \longrightarrow Y$ sıfır morfizmidir öyle ki $\omega_{X,Y} = \alpha_Y \circ T_X$
v. $\Omega(X,Y) = \{\omega_{X,Y}\}$, $\varepsilon(X,Y)$ nin alt kümesi sıfır morfizme indirger.
vi. $\Omega(\varepsilon)$, ε un sıfır morfizmlerinin sınıfıdır.

Tanım 2.2. (Regular Kategori) $\mathcal{C}$ sonlu limitli bir kategori olsun.

i. $\mathcal{C}$ nin her X objesi için $R \to X \times X$ yansıyan bağıntısı denklik bağıntısıdır.

ii. Denklik bağıntısının kompozisyonu değişmelidir.

iii. İki denklik bağıntısının kompozisyonu da denklik bağıntısı şartlarını sağlayan $\mathcal{C}$ ye regüler kategori denir.

Abelyen kategorilerde kısa 5 lemma

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & G \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & L \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 1 \\
1 \arrow[r] & K' \arrow[r] & G' \arrow[r] & L' \arrow[r] & 1
\end{tikzcd} \tag{2.5}$$

değişmeli diyagramında g, g' regüler epimorfizm ve $f = Kerg,\ f' = Kerg'$ olmak üzere α ve γ izomorfizm ise β izomorfizmdir.

$\mathcal{C}$ pointed kategori olsun. Split kısa 5 lemma

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[l, shift right, "h"'] \arrow[d, "\gamma"] & 1 \\
1 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, shift left, "g'"] & C' \arrow[r] \arrow[l, shift left, "h'"] & 1
\end{tikzcd}, \tag{2.6}$$

$\beta \circ f = f' \circ \alpha$, $\gamma \circ g = g' \circ \beta$, $\beta \circ h = h' \circ \gamma$ değişmeli diyagramda g, g' split epimorfizm $g \circ h = \dot{I}d_C$, $g' \circ h' = \dot{I}d_{C'}$ ve $f = Kerg,\ f' = Kerg'$ olmak üzere α ve γ izomorfizm ise β izomorfizmdir.

Tanım 2.3. (Mal'cev Kategori) Sonlu limitli $\mathcal{E}$ kategorisinde her yansımalı bağıntı denklik bağıntısı ise $\mathcal{E}$ a Mal'cev kategorisi denir.

Teorem 2.1. $\mathcal{E}$ pointed kategori ve split epimorfizmlerinin geri çekmeleri olsun. Bu durumda;

i) $\mathcal{E}$, split kısa beş lemmayı sağlar.

ii) $\mathcal{E}$ un her Y objesi için $\alpha_Y : 1 \longrightarrow Y$ den sıfır objeye morfizmi, ters görüntü funktoru $\alpha_Y{}^* : Pt_Y(\varepsilon) \longrightarrow Pt_1(\varepsilon)$

Tanım 2.4. $\mathcal{E}$ kategorisi aşağıdakileri sağlarsa protomodulardır.

i) $\mathcal{E}$ her split epimorfizmler arasında geri çekmeye sahip

ii) Tüm fibrationların ters görüntü funktoru $\pi : Pt(\varepsilon) \longrightarrow \varepsilon$ izomorfizm noktalarıdır.

Önerme 2.1. $\mathcal{C}$ sonlu limit kategorisi olsun. Bu durumda

i) $\mathcal{C}$ de her X objesi için $R \to X \times X$ yansıyan bağıntı denklik bağıntısıdır.

ii) $\mathcal{C}$ de her X için X üzerindeki yansıyan bağıntı simetriktir.

iii) $\mathcal{C}$ de her X için X üzerindeki yansıyan bağıntı geçişlidir.

iv) $\mathcal{C}$ de her X ve Y için her $R \to X \times Y$ bağıntısı difonksiyoneldir.

Yani; $\forall a, c \in X$ ve $\forall b, d \in Y$ için aRb, cRb ve cRd ise aRd dir.

v) $\mathcal{C}$ de her X için X üzerindeki her bağıntı difonksiyoneldir.

ifadeleri denktirler.

İspat: $R \to X \times Y$ bağıntısı için $S \to R \times R$ yansıyan bağıntısı

$$(a,b) S (c,d) \Leftrightarrow aRd$$

olmak üzere

$i) \Rightarrow ii)$ Eğer aRb ise $(a,a) S (b,b)$ olup yansıyan olduğundan $(b,b) S (a,a)$ olup bRa olduğundan simetri özelliği sağlanır.

$ii) \Rightarrow iii)$ Eğer aRb ve bRc ise $(b,c) S (a,b)$ simetriden $(a,b) S (b,c)$ olup aRc olduğundan geçişmelidir.

$iii) \Rightarrow iv)$ Eğer aRb, cRb ve cRd ise bu durumda $(a,b)S(c,b)$ ve $(c,b)S(c,d)$ olup geçişmeden $(a,b)S(c,d)$ olur bu ise aRd olmasıdır.

$iv) \Rightarrow v)$ $iv)$ ten görülür.

$v) \Rightarrow i)$ Yansıyan olduğundan simetri ve geçişme özelliğini göstermek yeterlidir. aRb ise yansıyan olduğundan bRb ve aRa olup bRa olur. Yani simetriktir. aRb ve bRc ise aRb, bRb ve bRc den aRc olup geçişkendir. O halde denklik bağıntısıdır.

Mal'cev kategorileri ile ilgili bilgiler (Carboni vd.., 1992) den alınmıştır.

Tanım 2.5. ε sonlu limitli kategori ve internal yansıyan grafların kategorisi $RG(\varepsilon)$ için aşağıdaki diyagram

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left=2, "d"] \arrow[r, shift right=2, "c"'] & B \arrow[l, "i" description] \end{tikzcd}$$

$di = 1_0 = c_1$ şartını sağlar.

Tanım 2.6. $A * A \xrightarrow{m} A$ çarpımıyla internal kategori yansımalı graftır. Burada $A * A$ geri çekmedir ve

$$\begin{tikzcd} A * A \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "d"] \\ A \arrow[r, "c"] & B \end{tikzcd} \tag{2.7}$$

C1) $\forall \alpha \in A$ için $\alpha 1_{d(\alpha)} = \alpha = 1_{c(\alpha)} \alpha$

C2) $\forall (\alpha, \beta) \in A * A$ için $d(\beta, \alpha) = d(\alpha)$

$$c(\beta, \alpha) = c(\beta)$$

C3) $\forall (\alpha, \beta), (\beta, \gamma) \in A \times A$ için $\gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha$ ile $1_X := i(x)$ ve $\beta\alpha := m(\alpha, \beta)$

şartlarını sağlar.

Bir yansıyan graf C1) şartını sağlıyorsa yansıyan çarpımsal graf olarak adlandırılır.

ε un iç kategorilerin kategorisini $cat(\varepsilon)$ ve iç yansıyan çarpımsal grafla da $rmg(\varepsilon)$ ile göstereceğiz. Burada morfizmlerin her biri kanoniktir. Yani, ε daki okların (f_B, f_A) çifti için

$$\begin{tikzcd}
A_1 * A_1 \arrow[d, "m_1"'] & A_2 * A_2 \arrow[d, "m_2"] \\
A_1 \arrow[r, "f_A"] \arrow[d, shift right=2, "d_1"'] \arrow[d, shift left=2, "c_1"] & A_2 \arrow[d, shift right=2, "d_2"'] \arrow[d, shift left=2, "c_2"] \\
B_1 \arrow[u, "i_1" description] \arrow[r, "f_B"] & B_2 \arrow[u, "i_2" description]
\end{tikzcd} \tag{2.8}$$

M1) $\forall x \in B_1$ için $f_A(1_x) = 1_{f_B(x)}$

M2) $\forall \alpha \in A_1$ için $d_2 f_A(\alpha) = f_B d_1(\alpha)$

$$c_2 f_A(\alpha) = f_B c_1(\alpha)$$

M3) $\forall(\alpha, \beta) \in A_1 * A_2$ için $f_A(\beta\alpha) = f_A(\beta) f_A(\alpha)$

ε da iç grupoidlerin kategorisi $grpd(\varepsilon)$, terslenebilir iç kategoriler ile

$$A \xrightarrow{s} A$$

G1) $\forall \alpha \in A$ için $d(s(\alpha)) = c(\alpha)$

$$c(s(\alpha)) = d(\alpha)$$

G2) $\forall \alpha \in A$ için $s(\alpha)\alpha = 1_{d(\alpha)}$

$$\alpha s(\alpha) = 1_{c(\alpha)}$$

Not: $grpd(\varepsilon) \xrightarrow{u} cat(\varepsilon) \xrightarrow{v} rmg(\varepsilon) \longrightarrow rg(\varepsilon)$

forgetfull funktorlardır. Yalnızca W genellikle full değildir.

Önerme 2.2. Eğer $\mathcal{E}$ Mal’cev kategorisi ise W funktoru fulldur. (Carboni vd., 1992)

Teorem 2.2. $\mathcal{E}$ Mal’cev kategorisi ise

i) Her iç yansımalı graf en çok bir yansımalı çarpımsal graf içerir.

ii) $cat(\varepsilon) \xrightarrow{v} rmg(\varepsilon)$ ve $grpd(\varepsilon) \xrightarrow{u} cat(\varepsilon)$ forgetful funktorları izomorfizmlerdir.

İspat: i)

$$A * A \underset{m'}{\overset{m}{\rightrightarrows}} A \; \overset{d}{\underset{c}{\rightrightarrows}} \!\!\! \xleftarrow{\;i\;} B$$

İki yansıyan çarpımsal graflı yansıyan grafı ele alalım. $R \longrightarrow A \times A$

$$\beta R \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} d(\beta) = c(\alpha) \\ \beta\alpha = \beta \circ \alpha \end{cases}$$

bağıntısını $m'(\alpha, \beta)$ kompozisyonunu $\beta \circ \alpha$ ile göstererek tanımlayalım. Bu durumda $\forall(\alpha, \beta) \in A * A$ için $1 : 1_{d(\beta)} = 1_{c(\alpha)}$ ile

$$\beta R 1 : \ \beta 1 = \beta = \beta \circ 1$$
$$1 R 1 \ : \ 11 \ = 1 \ = 1 \circ 1$$
$$1 R \alpha : \ 1\alpha \ = \alpha = 1 \circ \alpha$$

olup difonksiyonellikten $\beta R \alpha$ olur. Yani $\beta\alpha = \beta \circ \alpha$ olur.

ii)

$$A * A \underset{m'}{\overset{m}{\rightrightarrows}} A \; \overset{d}{\underset{c}{\rightrightarrows}} \!\!\! \xleftarrow{\;i\;} B$$

Yansımalı çarpımsal grafın iç kategori olduğunu göstermemiz gerekir. C2 şartını göstermek için $R \longrightarrow A \times A$ bağıntısı

$$\beta R\alpha :\Leftrightarrow \begin{cases} d(\beta) = c(\alpha) \\ d(\beta\alpha) = d(\alpha) \end{cases}$$

$\forall(\alpha,\beta) \in A * A$ için

$$\begin{aligned} \beta R1 &: d(\beta 1) = d(\beta) \\ 1R1 &: d(11) \ = d(1) \\ 1R\alpha &: d(1\alpha) = d(\alpha) \end{aligned}$$

ise difonksiyonellikten $\beta R\alpha$ ve böylece $d(\beta\alpha) = d(\alpha)$ olur. Aynı şekilde $c(\beta\alpha) = c(\beta)$ dır.

C3 şartını göstermek için $R \longrightarrow A \times (A * A)$ bağıntısı $(\alpha,\beta),\ (\beta,\alpha) \in A * A$ ve $1_{d(\gamma)} = 1_{c(\beta)}$ olmak üzere

$$\gamma R(\beta,\alpha) :\Leftrightarrow \begin{cases} d(\gamma) = c(\beta) \\ \gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha \end{cases}$$

için

$$\begin{aligned} \gamma R(1,1) &: \gamma(11) \ = \ \gamma = (\gamma 1)1 \\ 1R(1,1) &: 1(11) \ = \ 1 \ = (11)1 \\ 1R(\beta,\alpha) &: 1(\beta\alpha) = \beta\alpha = (1\beta)\alpha \end{aligned}$$

olup

$$\gamma R(\beta,\alpha) \quad : \quad \text{difonksiyonellikten}$$

dolayısıyla $\gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha$ dır.

$S : A \longrightarrow A$ tersini tanımlamak için öncelikle m nin sol sadeleşme özelliğini sağladığını göstermeliyiz. Yani

$$\beta\gamma = \beta\alpha \Rightarrow \gamma = \alpha$$

$$R \hookrightarrow (A \times A) \times A$$

bağıntısı

$$(\gamma,\alpha)R\beta :\Leftrightarrow \begin{cases} d(\beta)=c(\gamma)=c(\alpha) \\ \beta\gamma=\beta\alpha \end{cases}$$

ve $\beta\gamma=\beta\alpha$ ve $1{:=}1_{d(\beta)}=1_{c(\gamma)}=1_{c(\alpha)}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &(\gamma,\alpha)R\beta \ : \ \beta\gamma=\beta\alpha \\ &(1,1)R\beta \quad : \ \beta 1 \ =\beta 1 \\ &(1,1)R1 \quad : \ 11 \ =11 \end{aligned}$$

olup difonksiyonellikten $(\gamma,\alpha)R1$ olup $\gamma{=}1_{\gamma}=1_{\alpha}=\alpha$ dır.

Benzer şekilde sol sadeleşme yani $\gamma\beta=\alpha\beta\Rightarrow\gamma=\alpha$ da gösterilebilir.

G1 ve G2 yi göstermek için

$$S \hookrightarrow A\times A$$

bağıntısı

$$\beta S\alpha :\Leftrightarrow \gamma\in A \text{ vardır öyle ki } \begin{cases} d(\gamma)=c(\beta) \\ \gamma\beta=\alpha \end{cases}$$

bu şekildeki γ tektir.

$\forall\alpha\in A$ için S denklik bağıntısı olduğundan

$$\forall\alpha\in A,\ \exists^{\bullet}\alpha \text{ vardır öyle ki } \begin{cases} d\left({}^{\bullet}\alpha\right)=c(\alpha) \\ {}^{\bullet}\alpha\alpha=1_{d(\alpha)} \end{cases}$$

ve benzer şekilde

$$\forall\alpha\in A,\ \exists\alpha^{\bullet} \text{ vardır öyle ki } \begin{cases} c\left(\alpha^{\bullet}\right)=d(\alpha) \\ \alpha\alpha^{\bullet}=1_{c(\alpha)} \end{cases}$$

olup kompozisyonun birleşme özelliğinden $\forall\alpha\in A$ için $\alpha^{\bullet}={}^{\bullet}\alpha$ olup $S(\alpha)=\alpha^{\bullet}$ tanımlayabiliriz.

Sonuç 2.1. Her $\mathcal{E}$ Mal’cev kategorisi için

i) Her iç yarı monoid abelyen gruptur.

ii) $\mathcal{E}$ nin 1 i koruyan her oku aynı zamanda $m : A \times A \longrightarrow A$ yı korur.

3. İÇ ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

Gruplar üzerinde çaprazlanmış modül Whitehead tarafından 1949 da relatif homotopi gruplarla ilgili çalışmasında tanımlanmıştır. Çaprazlanmış modül tanımının en önemli uygulamalarından biri Loday tarafından 1982 de verilmiştir. Loday cat^1-gruplar tanımını vermiş ve bu tanımlamadan oluşturduğu kategorinin çaprazlanmış modüller kategorisine denk olduğunu göstermiştir. Bu gösterimden sonra çaprazlanmış modül tanımının denk kategorisi olan cat^1-gruplar kategorileri oluşturulmuştur. Bu bölümde de iç çaprazlanmış modüller verilmiştir (Janelidze, 2003; Mantovani ve Metere, 2010). Ayrıca kaynaklarda denk kategorileri de verilmiştir.

Tanım 3.1. SplitEpi ($\mathcal{C}$) nin objeleri A ve B, $\mathcal{C}$ nin objeleri (A, B, α, β) olmak üzere ve $(A', B', \alpha', \beta')$ $\alpha\beta = 1_B$ ve $\alpha'\beta' = 1_{B'}$ olacak şekildedir. Morfizmleri ise öyle (f,g) çiftlerinden oluşur ki

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift right, "\alpha"'] & A' \arrow[d, shift right, "\alpha'"'] \\
B \arrow[r, "g"'] \arrow[u, shift right, "\beta"'] & B' \arrow[u, shift right, "\beta'"']
\end{tikzcd}
\tag{3.1}
$$

diyagramı değişmelidir yani,

$$g\alpha = \alpha' f \quad \text{ve} \quad f\beta = \beta' g$$

dir.

Tanım 3.2. $\mathcal{C}$ kategorisinde obje etkilerinin kategorisi **Act($\mathcal{C}$)** ile gösterilir. **Act($\mathcal{C}$)** nin objeleri (B, X, ξ) şeklindedir. Burada B ve X, $\mathcal{C}$ nin objeleri olmak üzere X üzerinde B nin etkisi

$$\xi : B\flat X \longrightarrow X$$

olarak tanımlıdır. Morfizmleri ise öyle (*f*,*g*) çiftlerinden oluşur ki (B, X, ξ) ve (B', X', ξ') objeler olmak üzere $f : B \longrightarrow B'$, $g : X \longrightarrow X'$ ile değişmeli bir diyagramdır. Yani $g\xi = \xi'(f\flat 1)$ dir.

$B\flat X$ objesi $\kappa_{B,X} : B\flat X \longrightarrow B + X$ morfizmiyle birlikte B nin birim morfizminden ve $X \longrightarrow B$ ye sıfır morfizminden $\pi_{B,X} : B + X \longrightarrow B$ morfizmin çekirdeği olarak tanımlanır. Yani, $Ker(\pi_{B,X} : B + X \longrightarrow B) = B\flat X$ dir.

$B\flat(-) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ funktoru kanonik monad yapıya sahiptir. (Bourceux vd., 2005; Bourn ve Janelidze, 1998)

$B\flat(-) = (B\flat(-), \eta^B, \mu^B)$ ve (X, ξ) monad üzerinde cebir olarak tanımlanır. Yani $\xi : B\flat X \longrightarrow B$ nin

$$\begin{tikzcd}
B\flat(B\flat X) \arrow[r, "\mu_X^B"] \arrow[d, "1\flat\xi"'] & B\flat X \arrow[d, "\xi"] & X \arrow[l, "\eta_X^B"'] \arrow[dl, equal] \\
B\flat X \arrow[r, "\xi"'] & X &
\end{tikzcd}$$

(3.2)

diyagramını değişmeli yapması gerekir.

η^β ve μ^β yı açıkça tanımlamak için

$$\begin{tikzcd}
B\flat(B\flat X) \arrow[r, "\kappa_{B,B\flat X}"'] \arrow[d, "\mu_X^B"'] & B + (B\flat X) \arrow[r, "\pi_{B,B\flat X}"'] \arrow[d, "{[\iota_1, \kappa_{B,X}]}"] & B \arrow[d, equal] \\
B\flat X \arrow[r, "\kappa_{B,X}"'] & B + X \arrow[r, "\pi_{B,X}"'] \arrow[d, equal] & B \\
X \arrow[u, "\eta_X^B"] \arrow[r, "\iota_2"'] & B + X &
\end{tikzcd}$$

(3.3)

değişmeli diyagramından yararlanırız. Burada ι_1 ve ι_2 birebir coproduct morfizmleri ve η_X^B ve μ_X^B tek olarak tanımlıdır.

SplitEpi($\mathcal{C}$) ve **Act($\mathcal{C}$)** kategorileri adjoint denktir. Sağ adjoint G : **SplitEpi($\mathcal{C}$)** $\longrightarrow$ **Act($\mathcal{C}$)**, $G(A,B,\alpha,\beta)=(B,\mathrm{Ker}(\alpha),\xi)$ dır.

$$\begin{tikzcd}
B\flat\mathrm{Ker}(\alpha) \arrow[r, "\kappa_{B,\mathrm{Ker}(\alpha)}"] \arrow[d, "\xi"'] & B+\mathrm{Ker}(\alpha) \arrow[d, "{[\beta,\kappa_\alpha]}"] \\
Ker(\alpha) \arrow[r, "\kappa_\alpha"'] & A
\end{tikzcd}$$

(3.4)

diyagramı değişmeli olacak şekilde biricik ξ morfizmi vardır ve burada k_α, α nın çekirdeğinden tanımlanan kanonikal morfizmdir.

Sol adjoint F : **Act($\mathcal{C}$)** $\longrightarrow$ **SplitEpi($\mathcal{C}$)**, $F(B,X,\xi)=(BK(X,\xi),B,\pi_\xi,\iota_\xi)$ dır. Burada $B\times(X,\xi)$ objesi $\sigma_\xi : B+X \longrightarrow B\times(X,\xi)$ morfizmi ile $1_\xi=\sigma_\xi\iota_1$ olacak şekilde

$$\begin{tikzcd}
B+(B\flat X) \arrow[r, shift left, "{[\iota,K_{B,X}]}"] \arrow[r, shift right] & B+X \arrow[r, "\sigma_\xi"] & B\times(X,\xi)
\end{tikzcd}$$

coequalizer diyagramı ile $\pi_\xi\sigma_\xi=\pi_{B,X}$ olup π_ξ biriciktir.

Ayrıca,

$$\begin{tikzcd}
B\flat X \arrow[r, "K_{B,X}"] \arrow[d, "\xi"'] & B+X \arrow[d, "{\sigma_\xi=[\iota_\xi,\sigma_\xi\iota_2]}"] \\
X \arrow[r, "\sigma_\xi\iota_2"'] & B\times(X,\xi)
\end{tikzcd}$$

(3.5)

ileri itme diyagramıdır. Aynı zamanda geri çekme diyagramıdır da çünkü dikey oklar izomorfik co-çek ile normal monomorfizmdir. α nın çekirdeği (X,k) ve $\alpha\beta=1_B$ olacak şekilde

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, shift left, "\alpha"] & B \arrow[l, shift left, "\beta"] \end{tikzcd}$$

(1)

diyagramını ele alalım. Bu durumda yukarıdaki ileri itme ve **SplitEpi($\mathcal{C}$)** ve **Act($\mathcal{C}$)** nin adjoint denkliğinden A da bu diyagram da ileri itmedir. Yani

$$\begin{tikzcd} B\flat X \arrow[r, "\kappa_{B,X}"] \arrow[d, "\xi"'] & B+X \arrow[d, "{[b,k]}"] \\ X \arrow[r, "k"'] & A \end{tikzcd}$$

(3.6)

değişmeli olacak şekilde biricik ξ morfizmi vardır.

Teorem 3.1. $A, B, X, \alpha, \beta, k, \xi$ ler (1) formunda ve C de $\mathcal{C}$ nin keyfi bir objesi olsun. Bu durumda $x : X \longrightarrow C$ ve $b : B \longrightarrow C$ morfizmleri için,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "k"] \arrow[dr, "x"'] & A \arrow[d, dotted, "a"] & B \arrow[l, "\beta"'] \arrow[dl, "b"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

(3.7)

Diyagramı değişmeli olacak şekilde en çok bir a:$A \longrightarrow C$ morfizmi vardır. Öyle ki bu şekildeki a morfizmi ancak ve ancak

$$\begin{tikzcd} B\flat X \arrow[r, "\kappa_{B,X}"] \arrow[d, "\xi"'] & B+X \arrow[d, "{[b,k]}"] \\ X \arrow[r, "k"'] & A \end{tikzcd}$$

(3.8)

diyagramı değişmeli olacak şekilde vardır, (Janelidze, 2003).

İspat: En çok bir $a : A \longrightarrow C$ ye varlığı (Bourn, 1991) da verilmiştir. (3.8) diyagramını değişmeli yapan a ‘nın varlığı ise (3.6) ileri itme diyagramından anlaşılır. O halde

$$
\begin{tikzcd}
B\flat X \arrow[r, "k_{B,X}"] \arrow[d, "\xi"'] & B+X \arrow[d, "{[b, x']}"] \\
X \arrow[r, "x"'] & C
\end{tikzcd}
$$

(3.9)

diyagramı değişmeli ise $x = x'$ olduğunu göstermeliyiz. Burada

$$
\begin{aligned}
x' &= \left[b, x'\right]\iota_2 \\
&= \left[b, x'\right]k_{B,X}\eta_X^B && (\because \eta_B \text{ tanımından}) \\
&= x\xi\eta_X^B && (\because \text{ diyagram değişmeli}) \\
&= x && (\because \text{ (1) değişmeli})
\end{aligned}
$$

olur.

$\mathcal{C}$ kategorisinde C objesi için, split genişlemeye uygun iç etki

$$C \xrightarrow{\langle 1,0 \rangle} C \times C \underset{\Delta}{\overset{\pi_1}{\rightleftarrows}} C \qquad ; \Delta = \langle 1,1 \rangle$$

ve

$$\chi_C : C\flat C \xrightarrow{\ \chi_{C,C}\ } C + C \xrightarrow{[1,1]} C$$

dir.

Teorem 3.2. (Öteleme Teoremi) i) $\mathcal{C}$, sonlu limitli ve eş çarpımlı noktalanmış kategori olsun. Teorem 3.1 deki ifade öteleme özelliği olarak adlandırılan aşağıdaki özelliğe denktir. İki bölünmüş split genişleme

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "k"] & Y \arrow[r, shift right, "p"'] & Z \arrow[l, shift right, "s"'] \\
X' \arrow[r, "k'"] & Y' \arrow[r, shift right, "p'"'] & Z' \arrow[l, shift right, "s'"']
\end{tikzcd}
$$

ve $x : X \longrightarrow X'$, $z : Z \longrightarrow Z'$ morfizmleriyle (x,z) çiftini, $ys = s'z$ ve $yk = k'x$ olacak şekilde tek anlamlı olarak $y : Y \longrightarrow Y'$ morfizmine genişletmek için gerek ve yeter şart (x,z) çiftinin ξ ve ξ' etkilerine indirgemeye göre denktir.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "k"] \arrow[d, "x"'] & Y \arrow[r, shift right, "p"'] \arrow[d, dashed, "\exists y"] & Z \arrow[l, shift right, "s"'] \arrow[d, "z"] \\
X' \arrow[r, "k'"] & Y' \arrow[r, shift right, "p'"'] & Z' \arrow[l, shift right, "s'"']
\end{tikzcd}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{tikzcd}
Z \flat X \arrow[r, "z\flat x"] \arrow[d, "\xi"'] & Z' \flat X' \arrow[d, "\xi'"] \\
X \arrow[r, "x"'] & X'
\end{tikzcd}
\tag{3.10}
$$

i) Eğer $\mathcal{C}$ aynı zamanda yarıdirekt çarpıma sahipse öteleme özelliği sağlanır. Ayrıca $y : Y \longrightarrow Y'$ biricik morfizmi (x,y,z) split genişlemenin morfizmine neden olur. Bu $x \times z$ den y nin oluşturulması demektir.

İspat: Öncelikle Teorem (3.1) in sağlandığını kabul edelim ve

$$
\begin{tikzcd}
Z \flat X \arrow[r, "z\flat x"] \arrow[d, "\xi"'] \arrow[dr, phantom, "(I)"] & Z' \flat X' \arrow[r, "X_{s,x}"] \arrow[d, "\xi'"] \arrow[dr, phantom, "(II)"] & Z' + X' \arrow[d, "{[s',k']}"] \\
X \arrow[r, "x"'] & X' \arrow[r, "k'"'] & Y'
\end{tikzcd}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{tikzcd}
Z \flat X \arrow[r, "K_{z,x}"] \arrow[dr, phantom, "(III)"] & Z + X \\
X \arrow[u, "\xi"] \arrow[r, "k'x"'] & Y' \arrow[u, "{[s'z,k'x]}"']
\end{tikzcd}
\tag{3.11}
$$

diyagramlarını ele alalım. (I) değişmeli diyagramdır. ξ' tanımından (II) diyagramı da değişmeli olduğundan III diyagramı da değişmelidir. Ayrıca $K_{Z',X'} \circ z\flat x = (z+x) \circ K_{Z,X}$ olup diyagramların eşitliği söz konusudur. Teorem 3.1 den da $yk = k'x$ ve $ys = s'z$ olacak şekilde y tek şekilde vardır.

Tersine, $ys = s'z$ ve $yk = k'x$ olacak şekilde y oku, Teorem 3.1 den değişmeli diyagramı ve tanımdan (II) değişmeli diyagramı olacak şekilde vardır. k' monomorfizm olduğundan (I) diyagramı da değişmelidir.

Kabul edelim ki öteleme özelliği sağlansın. Bu durumda Teorem 3.1 den

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "k"] \arrow[d, "x"'] & A \arrow[d, dashed, "y"] & B \arrow[l, "\beta"'] \arrow[d, "b"] \\ C \arrow[r, "\langle 1,0 \rangle"'] & C \times C & C \arrow[l, "\Delta"] \end{tikzcd} \Leftrightarrow \begin{tikzcd} B \flat X \arrow[r, "z \flat x"] \arrow[d, "\xi"'] & C \flat C \arrow[d, "\chi_C"] \\ X \arrow[r, "x"'] & C \end{tikzcd} \tag{3.12}$$

diyagramlarını oluşturabiliriz. χ_C tanımından, sağ diyagramın denkliğinden Teorem 3.1 in kare diyagramın değişmeliliğinden ve öteleme özelliğinden denktir. Bu denklikten sol diyagramı değişmeli yapan biricik y morfizmi vardır diyebiliriz. Bu durum Teorem 3.1 in diyagramındaki $a : A \longrightarrow C$ morfizminin varlığına denktir. Fakat bu sırasıyla $a : \pi_0(y)$ ve $y = (a, a)$ yı tanımlarsak açıkça görülür.

ii) Eğer $\mathcal{C}$ aynı zamanda yarıdirekt çarpımsa, split tam diziden kısıtlanan K denkliğine hala denktir. Bu yüzden tamamen doğrudur. (x, z) çiftinin split genişleme morfizmi için önemli olması için gerek ve yeter şart T monadı için cebirlerin morfizmini vermesidir. Gerçekten, $ys = s'z$ ve $yk = k'x$ ile aynı zamanda $zp = p'y$ olacak şekilde verilen herhangi y nin varlığı protomodularity den dolayı strong epimorfizm ile birlikte (k, s) çiftinin önbileşkesiyle kolaylıkla gösterilebilir.

3.1. İç Yansımalı Graflar Ve Ön Çaprazlanmış Modüller

Bir $\mathcal{C}$ kategorisinde X iç yansımalı grafı

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, shift left=2, "\alpha"] \arrow[r, "\beta"'] & X_0 \arrow[l, shift left=2, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

$\alpha\gamma = 1_{X_0} = \beta\gamma$ şartını sağlayan diyagramdır. $\mathcal{C}$ de iç yansımalı graflar kategorisi RG($\mathcal{C}$) de (f_0, f_1) oklarının çifti ile

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, shift left=2, "\alpha"] \arrow[r, "\beta"'] \arrow[d, "f_1"'] & X_0 \arrow[l, shift left=2, "\gamma"] \arrow[d, "f_0"] \\ Y_1 \arrow[r, shift left=2, "\alpha'"] \arrow[r, "\beta'"'] & Y_0 \arrow[l, shift left=2, "\gamma'"] \end{tikzcd} \tag{3.1.1}$$

diyagramı değişmelidir. Yani

$$\alpha' f_1 = f_0\alpha,\ \beta' f_1 = f_0\beta,\ f_1\gamma = \gamma' f_0$$

dır.

Burada da $\mathcal{C}$ nin iç yansımalı grafı $\gamma : A \longrightarrow B$ morfizmi $\gamma\beta=1$ şartı ile **SplitEpi($\mathcal{C}$)** kategorisinin (A, B, α, β) objesidir.

Önceki teorem ve (3.8) diyagramından böyle bir $\gamma, u : B \longrightarrow B$ ve $f : X \longrightarrow B$ olmak üzere değişmeli diyagramdan

$$f\xi = [u, f]k_{B,X} \text{ ve } [u, f]\iota_1 = 1$$

olduğundan $f\xi = [1, f]k_{B,X}$ ile vardır.

Tanım 3.1.1. $\mathcal{C}$ de iç önçaprazlanmış modül (B, X, ξ, f) ile gösterilir. Burada (B, X, ξ), **Act($\mathcal{C}$)** nin objesi ve $f : X \longrightarrow B$, $\mathcal{C}$ nin morfizmi olmak üzere

$$\begin{tikzcd} B\flat X \arrow[r, "k_{B,X}"] \arrow[d, "\xi"'] & B+X \arrow[d, "{[1,f]}"] \\ X \arrow[r, "x"'] & B \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. Yani, $x\xi = [1, f]k_{B,X}$ tir.

3.2. İç Çaprazlanmış Modüller

Tanım 3.2.1. Çarpımsal graf, $A\times_B A \xrightarrow{m} A$ birim çarpımı ile

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left=2, "\alpha"] \arrow[r, shift right=2, "\gamma"'] & B \arrow[l, "\beta"' description] \end{tikzcd}$$

yansımalı graftır. Öyle ki;

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\langle 1,\beta\alpha\rangle"] \arrow[dr, "1"'] & A\times_B A \arrow[d, dashed, "m"] & A \arrow[l, "\langle \beta\gamma,1\rangle"'] \arrow[dl, "1"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

(3.2.1)

diyagramı değişmelidir.

Teorem 3.1 den yararlanarak (α,β,γ) yansımalı (refleksif) grafına uygun ön çaprazlanmış modüle çevirebiliriz. Yani yarıabelyen kategoride çarpımsal graf altında bunların önçaprazlanmış modülleri tanımlanabilir.

Tanım 3.2.2. $\mathcal{C}$ kategorisinde (B,X,ξ,γ) iç ön çaprazlanmış modülü, $[1,\iota_0]^{\#}$, $[1,\iota_0]:(B+X)+X \longrightarrow B+X$ in çekirdeğinin kısıtlanışı ve $[1,0]:B+X \longrightarrow B$ ye morfizm olmak üzere

$$\begin{tikzcd} (B+X)\flat X \arrow[r, "{[1,\partial]\flat 1}"] \arrow[d, "{[1,\iota_0]^{\#}}"'] & B\flat X \arrow[d, "\xi"] \\ B\flat X \arrow[r, "\xi"'] & X \end{tikzcd}$$

(3.2.2)

diyagramı değişmeli oluyorsa iç çaprazlanmış modüldür.

Tanım 3.2.3. (B, X, ξ, γ) ön çaprazlanmış modülü için

$$\begin{tikzcd}
X\flat X \arrow[r, "\chi_X"] \arrow[d, "\partial\flat 1"'] & X \arrow[d, "1"] \\
B\flat X \arrow[r, "\xi"'] & X
\end{tikzcd}$$

(3.2.3)

diyagramının değişmeli olmasına yani $\xi \circ (\partial\flat 1) = \chi_X$ olursa Peiffer şartı denir.

Önerme 3.2.1. $\mathcal{C}$ yarı abelyen kategoride (B, X, ξ, γ) çaprazlanmış modülse Peiffer şartını sağlar.

İspat: $\iota_1\flat_1 : X\flat X \longrightarrow (B+X)\flat X$ morfizmi ile

$$\begin{tikzcd}
(B+X)\flat X \arrow[r] \arrow[d] & B\flat X \arrow[d, "\xi"] \\
B\flat X \arrow[r, "\xi"'] & X
\end{tikzcd}$$

(3.2.4)

diyagramını oluşturmak yeterlidir. $(-)\flat X$ funktorilezeliğiyle

$$\begin{aligned}
\xi \circ [1_B, \partial]\flat 1_X \circ \iota_1\flat 1_X &= \xi \circ ([1_B, \partial] \circ \iota_1)\flat 1_X \\
&= \xi \circ (\partial\flat 1_X)
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$
\begin{tikzcd}
X \flat X \arrow[r, "\kappa_{X,X}"] \arrow[d, "\iota_1 \flat \iota_1"'] \arrow[dr, phantom, "(I)"] & X + X \arrow[d, "\iota_1 + 1"] \arrow[dr, "{[1,1]}"] & \\
(B+X) \flat X \arrow[r, "\kappa_{B+X,X}"] \arrow[d, "{[1,\iota_1]^{\#}}"'] \arrow[dr, phantom, "(II)"] & (B+X)+X \arrow[d, "{[1,\iota_1]}"] & X \arrow[dl, "\iota_1"] \\
B \flat X \arrow[r, "\kappa_{B,X}"] \arrow[d, "\xi"'] \arrow[dr, phantom, "(III)"] & B + X \arrow[d, "\sigma_\xi"] & \\
X \arrow[r, "\sigma_\xi \iota_1"'] & X \times_\xi B &
\end{tikzcd}
$$

(3.2.5)

diyagramını ele alalım. Tanımdan (I), (II) ve (III) diyagramları değişmelidir. (IV) diyagramında

$$
\begin{aligned}
[1,\iota_1] \circ (\iota_1 + 1) &= [\iota_1, \iota_1] \\
&= \iota_1 \circ [1,1]
\end{aligned}
$$

olduğundan değişmelidir. Diyagramın dış çevresi için

$$
\begin{aligned}
\sigma_\xi \circ \iota_1 \circ \xi \circ [1,\iota_1]^{\#} \circ (\iota_1 \flat 1) &= \sigma_\xi \circ \iota_1 \circ [1,1] \circ \chi_{X,X} \\
&= \sigma_\xi \circ \iota_1 \circ \chi_X
\end{aligned}
$$

eşitliğinden her iki tarafı $\sigma_\xi \circ \iota_1$ monomorfizmiyle sadeleştirirsek

$$
\xi \circ [1,\iota_1]^{\#} \circ (\iota_1 \flat 1) = \chi_X
$$

elde ederiz. Bu ise Peiffer şartıdır.

Bu kavramı daha da açarak $\mathcal{C}$' de iç kategorilerin kategorisi ve iç çaprazlanmış modüllerin kategorisi arasındaki denkliği ifade edebiliriz. (Janelidze, 2003).

A. Mal'cev'in kaynak çeşitlerinde (Janelidze, 1990) da görüldüğü gibi ve A. Carboni, M. C. Pedicchio ve N. Pirovana (1992) tarafından Mal'cev kategorilerine genişletildiği gibi $\mathcal{C}$ de bir iç kategori

$$
\begin{tikzcd}
A \times_B A \arrow[r, "m"] & A \arrow[r, shift left=2, "\alpha"] \arrow[r, shift right=2, "\gamma"'] & B \arrow[l, "\beta"']
\end{tikzcd}
\qquad (1)
$$

şeklindeki $\mathcal{C}$ de bir diyagram ile tanımlanabilir, burada;

- Aralarında üç ok bulunan A ve B nesneleri iç yansımalı graf şeklindedirler;
- $A \times_B A = A \times_{(\alpha,\beta)} A$ nesnesi α ve β nın geri çekmesi olarak tanımlanır.
- m dönüşümü aşağıdaki diyagramı değişmeli yapar:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\langle 1,\beta\alpha\rangle"] \arrow[dr, equal] & A \times_B A \arrow[d, "m"] & A \arrow[l, "\langle \beta\gamma,1\rangle"'] \arrow[dl, equal] \\ & A & \end{tikzcd} \tag{2}$$

Ayrıca, verilen bir iç yansımalı graf $(A, B, \alpha, \beta, \gamma)$ için böyle m mevcut olduğunda tektir; ve eğer bu böyleyse, graf $(A, B, \alpha, \beta, \gamma)$ ye çarpımsaldır denilir.

B. $(A, B, \alpha, \beta, \gamma)$ iç yansımalı graf ve $k: X \to A$, α nın (sabit) çekirdeği olsun.

$$X \xrightarrow{\langle k,0\rangle} A \times_B A \underset{\langle \beta\gamma,1\rangle}{\overset{proj_2}{\rightleftarrows}} A \tag{3}$$

olur.

Yardımcı Teorem 3.2.1. Yukarıdaki gösterimde, $\xi': A\flat X \to X$, (3.3) e uygun X üzerinde A etkisi olsun, yani, birim dönüşüm

$$\begin{tikzcd} A\flat X \arrow[r, "K_{A,X}"] \arrow[d, "\xi"'] & A + X \arrow[d, "{[\langle \beta\gamma, 1\rangle, \langle k, 0\rangle]}"] \\ X \arrow[r, "\langle k,0\rangle"'] & A \times_B A \end{tikzcd} \tag{4}$$

diyagramını değişmeli yapar. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) $m: A \times_B A \to A$ bir (birim) dönüşüm aşağıdaki diyagramı değişmeli yapar;

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\langle k,0\rangle"] \arrow[dr] & A \times_B A \arrow[d, "m"] & A \arrow[l, "\langle \beta\gamma,1\rangle"'] \arrow[dl, equal] \\ & A & \end{tikzcd} \tag{5}$$

(b)

$$\begin{tikzcd} A\flat X \arrow[r, "\kappa_{A,X}"] \arrow[d, "\xi'"'] & A+X \arrow[d, "{[1,k]}"] \\ X \arrow[r, "{\langle k,0\rangle}"'] & A \end{tikzcd} \tag{6}$$

diyagramı değişmelidir.

C. (4) ve (6) diyagramlarını karşılaştıralım. (4) ün değişme özelliği $k\xi' = [\beta_{\gamma}, k]K_{A,X}$ ifadesini belirttiğinden Yardımcı Teorem 3.2.5. gösterir ki;

Sonuç 3.2.1. Yukarıdaki notasyonda, aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) (5) diyagramını değişmeli yapan bir $m: A \times_B A \to A$ (birim) dönüşüm mevcuttur.

(b)

$$\begin{tikzcd} A\flat X \arrow[r, "K_{A,X}"] \arrow[d, "K_{A,x}"'] & A+X \arrow[d, "{[1,k]}"] \\ A+X \arrow[r, "{[\beta\gamma,k]}"'] & A \end{tikzcd} \tag{7}$$

diyagramı değişmelidir.

D. $\mathcal{C}$ de iç yansımalı bir graf $(A, B, \alpha, \beta, \gamma)$ Tanım ve Teorem 2.1 deki gibi (B, X, ξ, F) olarak denklikle tanımlanır. Ve $\mathcal{C}$ de bir iç kategori hiçbir şey değildir ancak $\mathcal{C}$ de bir iç yansımalı graf $(A, B, \alpha, \beta, \gamma)$, (2) diyagramını değişmeli yapan $m: A \times_B A \to A$ dönüşümüne (mevcut ise tektir) sahiptir. Diğer taraftan, Sonuç C, (5) diyagramını değişmeli yapan $m: A \times_B A \to A$ bir (birim) dönüşümünün varlığı için gerekli ve yeterli şartı verir.

E. Aşağıdaki eşitlikleri karşılaştıralım:

i. $m\langle 1, \beta\alpha\rangle = 1$;

ii. $m\langle 1, \beta\alpha\rangle\beta = \beta$;

iii. $m\langle 1, \beta\alpha\rangle k = k$;

iv. $m\langle \beta\gamma, 1\rangle = 1$;

v. $m\langle k, 0\rangle = k$.

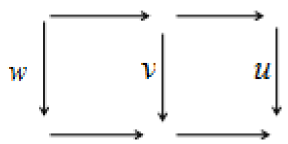
- (2) nin değişme özelliği (i) ve (iv) ile aynı;
- (5) nin değişme özelliği (iv) ve (v) ile aynı;

- (i) $\Leftrightarrow$ (ii) ve (iii) çünkü β ve k kesin örten ($\mathcal{C}$ nin protomodularlığından anlaşılacağı gibi);
- (iii) $\Leftrightarrow$ (v) çünkü $\alpha k = 0$;
- (iv) $\Leftrightarrow$ (ii) çünkü

$$m\langle 1, \beta\alpha\rangle\beta = m\langle \beta, \beta\alpha\beta\rangle = m\langle \beta, \beta\rangle = m\langle \beta\gamma\beta, \beta\rangle = m\langle \beta\gamma, 1\rangle\beta.$$

Böylece (2) nin değişmeli olması için gerek ve yeter şart (3.5) in değişmeli olmasıdır.

F.



Satırları kısa ve tam diziler olan değişmeli bir diyagram olsun. Sağ taraftaki kare bir ileri itmedir. Eğer *u* ve *v* düzgün epimorfizmler ise bu durumda w da düzgün epimorfizmdir. Bu da herhangi bir noktalı tam Mal'cev kategorisi olarak bilinir.

G. **Sonuç 3.2.2.** $\mathcal{C}$ de her bir X objesi için, $(-)\flat X : C \longrightarrow C$ funktoru düzgün epimorfizmleri korur.

İspat. $u: U \to V$ düzgün bir epimorfizm verilsin. Diyagrama F deki diyagramı uygulayalım.

$$\begin{tikzcd}
U\flat X \arrow[r, "\kappa_{U,X}"] \arrow[d, "u\flat 1"'] & U+X \arrow[r, "\pi_{U,X}"] \arrow[d, "u+1"] & U \arrow[d, "u"] \\
U\flat X \arrow[r, "\kappa_{V,X}"] & V+X \arrow[r, "\pi_{V,X}"] & V
\end{tikzcd}$$

H. $\mathcal{C}$ de iç ön çaprazlanmış modülü (B, X, ξ, F) verilsin, aşağıdaki diyagramı düşünelim,

$$
\begin{tikzcd}
(B+X)\flat X \arrow[rrr, "\kappa_{B+X,X}"] \arrow[dr, "\sigma_\xi \flat 1"] \arrow[ddd, "\kappa_{B+X,X}"'] & & & (B+X)+X \arrow[dl, "\sigma_\xi+1"'] \arrow[ddd, "\sigma_\xi{[1,\iota_2]}"] \\
& B\times(X,\xi)\flat X \arrow[r, "\kappa_{B\times(X,\xi),X}"] \arrow[d, "\kappa_{B\times(X,\xi),X}"] \arrow[dr, phantom, "(III)"] & (B\times(X,\xi))+X \arrow[d, "{[1,\sigma_\xi\iota_2]}"] & \\
& (B\times(X,\xi))+X \arrow[r, "{[\iota_1\gamma,\sigma_\xi\iota_2]}"'] & B\times(X,\xi) \arrow[dr, equal] & \\
(B+X)+X \arrow[ur, "\sigma_\xi+1"] \arrow[rrr, "{[\iota_1\gamma\sigma_\xi\iota_2]=\sigma_\xi[\iota_1\gamma\sigma_\xi,\iota_2]=\sigma_\xi[\iota_1[1,f],\iota_2]=\sigma_\xi([1,f]+1)}"'] & & & B\times(X,\xi)
\end{tikzcd}
$$

(I) (II) (IV) (V)

(8)

burada

- (I),(II),(IV) kısımlarının değişmeli olduğu açıktır;
- Aynı şey (V) için doğrudur, burada f cinsinden γ yı tanımlayan $\gamma\sigma_\xi = [1,f]$ eşitliği kullanılır.
- (III) hiçbir şey değildir ancak (7), $\gamma\sigma_\xi = [1,f]$ ile tanımlı γ ile (B,X,ξ,F)'e göre ötelenir.

Sonuç 3.2.3. $\sigma_\xi \flat 1$ 'in düzgün bir epimorfizma olduğunu ifade ettiğinden (III) ün değişme özelliği bütün karenin değişme özelliğine denktir, yani,

$$\sigma_\xi([1,f]+1)K_{B+X,X} = \sigma_\xi[1,\iota_2]K_{B+X,X}$$

denktir, bu aşağıdaki iki bileşiğin eşitliğiyle de açıklanabilir.

$$(B+X)\flat X \xrightarrow{K_{B+X,X}} (B+X)+X \xrightarrow{[1,\iota_2]} B+X \xrightarrow{\sigma_\xi} B \ltimes (X,\xi) \qquad (9)$$

Böylece, aşağıdaki teorem elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.2.2. Yansımalı grafların kategorisin önçaprazlanmış modüller kategorisine denkliği altında (B,X,ξ,F) iç ön çaprazlanmış modüle uygun iç yansımalı graf çarpımsal (ya da, denk olarak, bir iç kategori yapısına sahiptir) olması için gerek ve yeter şart iki bileşiğin (9) çakışık olmasıdır.

İ. Yarı-direkt çarpım $B \ltimes (X,\xi)$ bir eşekolizer olarak tanımlanır (ya da bir ileri itme), burada $B \ltimes (X,\xi)$ değer kümeli iki dönüşümün eşit olup olmadığının ispat metodu kolay değildir. Daha basitleştirmek için aşağıdaki gibi yapacağız:

(a) Değişmeli diyagram

$$\begin{tikzcd}
(B+X)\flat X \arrow[r, "{[1,\imath_2]^{\#}}"] \arrow[d, "K_{B+X,X}"'] \arrow[dr, phantom, "(I)"] & B\flat X \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "K_{B,X}"] \arrow[dr, phantom, "(II)"] & X \arrow[d, "\sigma_\xi \imath_2"] \\
(B+X)+X \arrow[r, "{[1,\imath_2]}"'] \arrow[d, "\pi_{B+X,X}"'] \arrow[dr, phantom, "(III)"] & B+X \arrow[r, "\sigma_\xi"'] \arrow[d, "\pi_{B,X}"] & B\times(X,\xi) \\
B+X \arrow[r, "\pi_{B,X}"'] & B &
\end{tikzcd} \tag{10}$$

burada $[1,\imath_2]^{\#}$, (I) ile tanımlıdır ((III) değişmeli olduğundan bu mümkün) ve (II), (6) "disk" ile aynı, (10) da üstteki bileşik

$$\sigma_\xi[1,\imath_2]K_{B+X,X} = \sigma_\xi \imath_2 \xi[1,\imath_2]^{\#}; \tag{11}$$

olarak verilir.

$$\begin{tikzcd}
(B+X)\flat X \arrow[r, "{[1,\imath_2]^{\#}}"] \arrow[d, "K_{B+X,X}"'] & B\flat X \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "K_{B,X}"] \arrow[dr, phantom, "KB"] & X \arrow[d, "\sigma_\xi \imath_2"] \\
(B+X)+X \arrow[r, "{[1,f]+1}"'] & B+X \arrow[r, "\sigma_\xi"'] & B\times(X,\xi)
\end{tikzcd} \tag{12}$$

(b) Değişmeli diyagramı (10) da alttaki bileşik

$$\sigma_\xi([1,f]+1)K_{B+X,X} = \sigma_\xi \imath_2([1,f]\flat 1); \tag{13}$$

olarak verilir.

(c) (11) ve (13) den anlaşılacağı gibi, $\sigma_\xi \imath_2$ bir monomorfizmdir, (9) da iki bileşiğin eşitliği $\xi[1,\imath_2]^{\#} = \xi([1,f]\flat 1)$ 'e denkliği verir.

Teorem 3.2.1. $\mathcal{C}$ de bir iç çaprazlanmış modül $\mathcal{C}$ de (B, X, ξ, F) iç önçaprazlanmış bir modüldür, burada

$$\begin{tikzcd}
(B+X)\flat X \arrow[r, "{[1,f]\flat 1}"] \arrow[d, "{[1,\xi]'}"'] & B\flat X \arrow[d, "\xi"] \\
B\flat X \arrow[r, "\xi"'] & X
\end{tikzcd} \tag{14}$$

diyagramı değişmelidir.

$$\mathbf{Cat}\,(\mathcal{C}) \cong \mathbf{CM}\,(\mathcal{C}) \tag{15}$$

$\mathcal{C}$ de iç kategorilerin kategorisi ve iç çaprazlanmış modüllerin kategorisi arasında bir denkliğe neden olur.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Borceux, F., Bourn, D., (2004), Mal'cev, Protomodular, Homological and Semi- Abelian Categories, 566 of Math. Appl. Kluwer Academic.

Borceux, F., Bourn, D., (2007), Split extension classifier and centrality. In Categories in algebra, geometry and mathematical physics, 431, s.85-104.

Borceux, F., Janelidze G., Kelly, G. M., (2005), Internal object actions. Comment. Math. Univ. Carolin., 46(2), s.235-255.

Bourn, D., Janelidze, G., (1998), Protomodularity, descent, and semidirect products. Theory Appl. Categ., 4(2), s.37–46.

Bourn, D., (1991), Normalization equivalence, kernel equivalence, and affine categories. Category theory (Como, 1990), Lecture Notes in Math., 1488, Springer, Berlin, s.43–62.

Bourn, D., (2000), Normal functors and strong protomodularity. Theory Appl. Categ.,7(9), s.206-218.

Bourn, D., (2002), Intrinsic centrality and associated classifying properties. J. Algebra, 256(1), s.126-145.

Bourn, D., (2004), Commutator theory in strongly protomodular categories. Theory Appl. Categ., 13(2), s.27-40.

Bourn, D., (2007), Moore normalization and Dold-Kan theorem for semi-abelian cate- gories. In Categories in algebra, geometry and mathematical physics, 431, s.105-124.

Bourn, D., Janelidze, G., (2007), Centralizers in action accessible categories. Technical report, L.M.P.A., September.

Carboni, A., Kelly, G. M., Pedicchio, M. C., (1993), Some remarks on Maltsev and Goursat categories. Appl. Categ. Structures 1, s.385–421.

Carboni, A., Lambek, J., Pedicchio, M. C., (1991), Diagram chasing in Maltsev categories. J. Pure Appl. Algebra 69, s.271–284.

Carboni, A., Pedicchio, M. C., Pirovano, N., (1992), Internal graphs and internal groupoids in Mal'cev categories. In Category theory 1991 (Montreal, PQ, 1991), 13, s.97-109.

Gran, M., (2002), Commutators and central extensions in universal algebra. J. Pure Appl. Algebra, 174(3), s. 249-261.

Janelidze, G., Pedicchio, M. C., (1997), Internal categories and groupoids in congruence modular varieties. J. Algebra 193, s. 552–570.

Janelidze, G., (1990), Internal categories in Mal’cev varieties. Preprint. York University, Toronto.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Janelidze, G., (2003), Internal crossed modules. Georgian Math. J., 10(1), s.99-114.

Janelidze, G., Marki, L., Tholen, W., (2002), Semiabelian categories. J. Pure Appl. Algebra 168(2-3), s. 367–386.

Karaca, İ. (2010), Kategori teorisi, Yüksek Lisans Ders notları.

Loday, J. L. (1982), Spaces with Finitely many non-trivial homotopy groups. J. Pure Appl. Algebra, 24, s. 179-202.

Mac Lane, S., (1998), Categories for the working mathematician. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 5. Springer-Verlag, New York.

Mantovani, S., Metere, G., (2010), Internal Crossed Modules and Peiffer Condition, Theory and Applications of Categories, 23(6), s.113-135.

Pedicchio, M. C., (1995), A categorical approach to commutator theory. J. Algebra, 177(3), s.647-657.

Whitehead, J. H. C., (1949), Combinatorial homotopy ii. Bull. Amer. Math. Soc., 55, s.453-496.