

SİSTEMATİK ÖRNEKLEMEDE KİTLE ORTALAMASININ ORANSAL VE ÇARPIMSAL TAHMİN EDİCİLERİ

RATIO AND PRODUCT-TYPE ESTIMATORS OF POPULATION MEAN IN SYSTEMATIC SAMPLING

EDA GİZEM KOÇYİĞİT

PROF.DR. HÜLYA ÇINGİ

Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

İstatistik Anabilim Dalı için Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırlanmıştır.

2016

EDA GİZEM KOÇYİĞİT' in hazırladığı "**SistematiK Örneklemede Kitle Ortalamasının Oransal Ve Çarpımsal Tahmin Edicileri**" adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **İSTATİSTİK ANABİLİM DALI'** nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mehtap AKÇİL OK

Başkan

Prof. Dr. Hülya ÇINGİ

Danışman

Prof. Dr. Cem KADILAR

Üye

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Salih Bülent ALTEN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

27/06/2016

EDA GİZEM KOÇYİĞİT

ÖZET

SİSTEMATİK ÖRNEKLEMEDE KİTLE ORTALAMASI İÇİN ORANSAL VE ÇARPIMSAL TAHMİN EDİCİLERİ

Eda Gizem KOÇYİĞİT

Yüksek Lisans, İstatistik Bölümü

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hülya ÇINGİ

Haziran 2016, 121 sayfa

Bu tez çalışmasında sistematik örneklemede kitle ortalaması tahmini için literatürde önerilen oransal ve çarpımsal tahmin ediciler incelenmiştir. Yeni tahmin ediciler önerilmiş, bu tahmin edicilerin ve yan ve hata kareler ortalamaları elde edilmiş, diğer tahmin edicilerle karşılaştırılmıştır.

Çalışmanın son bölümünde sayısal örneklerden elde edilen sonuçlara bağlı olarak tahmin edicilerin hata kareler ortalamaları ile ilgili tartışma ve yorumlar yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Örneklem Kuramı, Sistematik Örneklem, Ortalama Tahmin Edicileri, Oran Tahmin Edicileri, Taylor Serisi Yöntemi.

ABSTRACT

RATIO AND PRODUCT-TYPE ESTIMATORS FOR POPULATION MEAN IN SYSTEMATIC SAMPLING

Eda Gizem KOÇYİĞİT

Master of Science , Department of Statistics

Supervisor: Prof. Dr. Hülya ÇINGİ

June 2016, 121 pages

In this study, ratio and product estimators suggested in the literature are analyzed for the population mean estimation in the systematic sampling. New estimators are suggested, their biases and mean square errors are obtained and they are compared with existing estimators.

Mean square error values of the estimators are discussed and interpreted depending on the results obtained from numerical studies in the conclusion part.

Keywords: Sampling Theory, Systematic Sampling, Mean Estimators, Ratio Estimators, Product Estimators, Taylor Series Method.

TEŞEKKÜR

Bu tezi hazırlarken ihtiyacım olduğu her anda bana yol gösteren değerli danışmanım Sayın Prof. Dr. Hülya ÇINGİ hocama, her türlü yardım ve desteğinden dolayı Dr. Nilgün ÖZGÜL'e, sevgilerini ve inançlarını benden eksik etmeyen ve bugünlere ulaşmamda en büyük pay sahibi olan aileme ve arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ÇİZELGELER DİZİNİ	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	1
2.1. Sistematik Örnekleme	4
2.2. Taylor ve MacLaurin Serileri	11
2.3. Taylor Serisi Yöntemi	11
2.4. Fark Yöntemi	13
3. TAHMİN EDİCİLER	15
3.1. Swain, A. K. P. C.'nin (1964) Oransal Tahmin Edicisi	15
3.2. Shukla N. D. 'nin (1971) Çarpımsal Tahmin Edicisi	19
3.3. R. Singh & H.P. Singh (1998) Oransal Tahmin Edicisi	23
3.4. R. Singh & H.P. Singh (1998) Çarpımsal Tahmin Edicisi	28
3.5. H.P. Singh, R.Tailor, N.K. Jatwa'nın (2011) Oransal Tahmin Edicisi	33
3.6. H.P. Singh, R.Tailor, N.K. Jatwa'nın (2011) Çarpımsal Tahmin Edicisi	37
3.7. R. Singh ve Diğerlerinin (2012) t ₄ Tahmin Edicisi	41
3.8. H. P. Singh ve diğerlerinin (2012) Üstel Tahmin Edicisi	45
3.9. R. Singh ve Diğerlerinin (2012) Genelleştirilmiş Oransal Tahmin Edici	54
3.10. R. Tailor, Narendra K. ve diğerlerinin (2013) Oransal-Çarpımsal Tahmin Edicisi	57
4. ÖNERİLEN TAHMİN EDİCİLER	63
4.1. Önerilen Üstel Tahmin Edici	63

4.2. Önerilen Oransal ve Çarpımsal Tahmin Edici	66
4.3. Önerilen Ağırlıklandırılmış Yansız Oransal Tahmin Edici	78
4.4. Önerilen Ağırlıklandırılmış Yansız Çarpımsal Tahmin Edici	85
4.5. Önerilen Ağırlıklandırılmış Yansız Oransal ve Çarpımsal Tahmin Edici Ailesi	92
5. SAYISAL ÖRNEK	108
6. TARTIŞMA VE SONUÇ	118
7. KAYNAKLAR	119
8. ÖZGEÇMİŞ	121



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1. Önerilen Oransal ve Çarpımsal Tahmin Edicinin Çeşitli α , a ve b Değerleri İçin Yanları Ve Hata Kareler Ortalamaları	75
Çizelge 4.2. Önerilen Ağırlıklandırılmış Oransal ve Çarpımsal Tahmin Edici Ailesi Tahmin Edici Ailesinden Elde Edilebilecek Çeşitli Yansız Tahminler	101
Çizelge 4.3. Sistematik Örnekleme İçin Önerilen Tahmin Ediciler Yanları Ve Hata Kareler Ortalamaları/ Varyansları	103
Çizelge 5.1. Kitle Parametreleri	109
Çizelge 5.2. Örneklem Bilgileri	110
Çizelge 5.3. Hesaplanan Tahmin Değerleri, Yanları Ve Hata Kareler Ortalamaları	110
Çizelge 5.4. Tahmin Edicilerin Hata Kareler Ortalamalarına Göre Küçükten Büyüğe Sıralanışı	117

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

N: Kitle büyüklüğü

n: Örneklem büyüklüğü

k: Sistematik örneklem sayısı

HKO: Hata Kareler Ortalaması

$\bar{Y}$: Y değişkeninin kitle ortalaması

$\bar{X}$: X değişkeninin kitle ortalaması

$\bar{y}_{sis}$: Y değişkeninin sistematik örnekleme ortalaması

$\bar{x}_{sis}$: X değişkeninin sistematik örneklem ortalaması

ρ_{xy} : X ile Y arasındaki kitle korelasyon katsayısıdır.

$\rho_{xx} = \rho_{x.ic}$: X değişkeni için aynı sistematik örneklem içi birim çiftleri arasındaki korelasyon katsayısıdır.

$\rho_{yy} = \rho_{y.ic}$: Y değişkeni için aynı sistematik örneklem içi birim çiftleri arasındaki korelasyon katsayısıdır.

$C_{xy} = S_{xy} / \bar{XY}$: X ile Y arasındaki kitle değişim katsayısıdır.

$C_x = S_x / \bar{X}$: X değişkeni için değişim katsayısıdır.

$C_y = S_y / \bar{Y}$: Y değişkeni için değişim katsayısıdır.

$C_z = S_z / \bar{Z}$: Z değişkeni için değişim katsayısıdır.

s_y^2 : Y değişkeni için varyans

s_x^2 : X değişkeni için varyans

$V(\bar{y}_{sis})$: Sistematik örnekleme yönteminde varyans

$\bar{y}_{r_{sis}}$: Swain, A. K. P. C.'nin (1964) Oransal Tahmin Edicisi

$\bar{y}_{p_{sis}}$: Shukla N. D. 'nin (1971) Çarpımsal Tahmin Edicisi

d_r : R. Singh & H.P. Singh (1998) Oransal Tahmin Edicisi

d_p : R. Singh & H.P. Singh (1998) Çarpımsal Tahmin Edicisi

$\bar{y}_{RE}^*$: H.P. Singh, R.Tailor, N.K. Jatwa'nın (2011) Oransal Tahmin Edicisi

$\bar{y}_{PE}^*$: H.P. Singh, R.Tailor, N.K. Jatwa'nın (2011) Çarpımsal Tahmin Edicisi

t_4 : R. Singh ve Diğerlerinin (2012) Üstel Tahmin Edicisi

d : H. P. Singh ve diğerlerinin (2012) Üstel Tahmin Edicisi

t_p^* : R. Singh ve Diğerlerinin (2012) Genelleştirilmiş Oransal Tahmin Edici Ailesi

$\bar{Y}_{RP}$: R. Tailor, Narendra K. ve diğerlerinin (2013) Oransal-Çarpımsal Tahmin Edicisi

t_{1p} : Önerilen Üstel Tahmin Edici

t_{2p} : Önerilen Oransal ve Çarpımsal Tahmin Edici

t_{3p} : Önerilen Ağırlıklandırılmış Yansız Oransal Tahmin Edici

t_{3p}^* : Önerilen Ağırlıklandırılmış Yansız Çarpımsal Tahmin Edici

t_G : Önerilen Ağırlıklandırılmış Yansız Oransal ve Çarpımsal Yansız Tahmin Edici Ailesi

1. GİRİŞ

Örneklem ile çalışmak, araştırmacılara zaman, enerji ve para tasarrufu sağlar. Kitle üzerinde çalışmanın bir güçlüğü de, araştırma için gerekli kontrollerin sağlanmasındaki engellerin artmasıdır. Örneklem üzerinde denetim kurmak daha kolaydır. Araştırmada amaç, çok veri toplamak değil, sağlam, geçerli, güvenilir veriler toplamaktır. Bu nedenlerle araştırmacı, kitle yerine, örneklem üzerinde çalışmak zorunda kalabilir.

Çoğu durumda, iyi belirlenmiş küçük bir örneklem üzerinde yapılan çalışma, geniş bir kitlede yapılandan daha iyi sonuçlar verebilir. Ancak, her çalışmanın mutlaka örneklem üzerinde yapılması zorunluluğu da yoktur. Hakkında bilgi edinilmek istenen kitle, yukarıda belirtilen nedenler açısından bir sakınca yoksa tümü ile de incelenebilir.

Bu tez çalışmasında amaç, sistematik örnekleme yönteminde, kitle ortalamasının tahmini için kullanılan çeşitli tahmin edicileri incelemek, bu tahmin edicilerin yan ve hata kareler ortalamalarını çıkarsamak, bu tahminleri birbirleriyle karşılaştırıp hangi koşullar altında hangi tahmin edicilerin etkin oldukları araştırmak ve sayısal örnekler vererek konunun daha iyi anlaşılmasını sağlamaktır.

2. GENEL BİLGİLER

Örneklem, kitleden belirli kurallara göre seçilmiş ve seçildiği kitleyi temsil edebilen bir alt gruptur. Çoğu zaman kitlenin tamamına ulaşabilmek zor ya da imkânsız olabilmektedir. Bu nedenle pek çok çalışma örneklem üzerinden yürütülür ve kitle parametreleri tahmin edilmeye çalışılır.

Örnekleme kuramı, sonlu N sayıda kitle birimi içeren kitlelerden, n büyüklüğünde örneklem seçme ve seçilen örneklemlerden tahminler yapma yöntemlerini inceler. Bir başka deyişle, örnekleme kuramının konusu, kitleden, kitlenin yapısına en uygun örnekleme yöntemiyle, örneklem seçme süreci ve örneklemden kitlenin özelliklerinin tahmin edilmesi sürecidir. Seçim sürecinde kullanılan yöntemlere göre kitle parametreleri tahmin edilir [5].

Kitleden seçilen örneklemden yararlanarak, kitlenin özelliklerini tahmin etmek amacıyla tanımlanan matematiksel eşitliklere tahmin edici adı verilir. Örneklemlerden elde edilen tahmin edicilerin tutarlılık (consistency), yansızlık (unbiased) ve etkinlik (efficiency) özelliklerini sağlamaları istenir.

Örneklem büyüklüğü, verilen bir sayıdan daha büyük alındığında tahmin ile parametre arasındaki farkın düşünülebilen en küçük pozitif bir sayıdan daha küçük kalma olasılığı 1 ise, o tahmine tutarlı tahmin denir. Matematiksel olarak θ tahmini için tutarlılık,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\theta - \theta| < \varepsilon) = 1 \quad (2.1)$$

şeklinde gösterilebilir. Sonlu kitle birimi içeren kitleden yapılacak tahminlerde, eğer, örneklem büyüklüğü kitle büyüklüğüne eşit olduğunda tahmin edicinin değeri parametre değerine eşitse, o tahmin tutarlıdır [5].

Yansızlık (unbiased), bir tahmin edicinin beklenen değerinin, kitle parametresine eşit olmasıdır. Tahmin edicinin beklenen değeri ile parametre değeri arasındaki farka yan adı verilir. Yan,

$$B(\theta) = E(\theta) - \theta \quad (2.2)$$

olarak gösterilebilir. Yanın küçük olması istenen bir özelliktir. Bir tahmin edici ile parametre değeri arasındaki farkın karesinin beklenen değeri ise hata kareler ortalaması olarak adlandırılır ve,

$$\begin{aligned} \text{HKO}(\theta) &= E(\theta - \theta)^2 \\ &= E[(\theta - E(\theta)) + (E(\theta) - \theta)]^2 \\ &= E[\theta - E(\theta)]^2 + [E(\theta) - \theta]^2 \\ &= V(\theta) + B(\theta)^2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

olarak gösterilir. Yansız tahmin ediciler için, hata kareler ortalaması ile varyans aynı anlama gelmektedir. Hata kareler ortalamasının küçük olması, yani etkinlik (efficiency), bir tahmin edici için istenen özelliklerdendir. Tahmin edicinin varyansının tersi ise duyarlılık (precision) olarak adlandırılır. Bu durumda, bir tahmin edici ne kadar küçük varyanslı, yani etkin ise, tahmin edici o derece duyarlıdır [5].

Örneklem araştırmalarında, sonlu kitleler için toplam, ortalama ve varyans tahminlerinde, tahmin edicilerin duyarlılıklarını, etkinliklerini artırmak için yardımcı bilginin kullanımı çok yaygındır. Yardımcı bilgi, oransal, çarpımsal, regresyon ve fark tahmin edicilerinde kolaylık ve duyarlılık nedeniyle kullanılmaktadır. Bu tahmin ediciler, yardımcı değişken ile ilgilenilen değişken arasındaki korelasyon açısından avantaj sağlamakta ve bazı koşullar altında, basit ortalamaya dayanan tahmin edicilere göre küçük varyansa sahip, yani daha duyarlı tahminler vermektedirler.

Oransal tahmin edici, iki değişken arasındaki ilişki başlangıç noktasından geçen bir doğru ile gösterilebiliyorken, korelasyon katsayısı pozitif olduğu zaman, yardımcı değişkenin yardımıyla sonlu kitlenin kitle toplamı, kitle ortalaması ve kitle varyansının tahmininde en yaygın olarak kullanılan tahmin edicilerdendir.

İki değişken arasındaki korelasyon katsayısı negatif olduğu zaman ise, çarpımsal tahmin edici kullanılır. Bu tahmin edicilerin, bazı koşullar altında sistematik örnekleme, örneklem ortalamasına dayanan klasik tahmin ediciden daha küçük varyanslara sahip oldukları bilinmektedir.

Yardımcı bilgiden yararlanan temel tahmin yöntemlerinden birisi olan oransal tahmin ediciler ile ilgili çalışmalar günümüze kadar devam etmiştir ve hala da devam etmektedir. Literatürde, klasik oransal tahmin geliştirilerek, kitle ortalaması, kitle toplamı ve kitle varyansı için yeni tahmin ediciler elde edilmiştir.

Yardımcı değişken tarafından sağlanan yardımcı bilginin kullanımı, kapsamlı olarak Cochran tarafından 1963 yılında ayrıntılı olarak incelenmiştir [4]

Quenouille tarafından 1956'da, örneklemin iki rastgele yarısından elde edilen oran tahminlerini kullanarak tahmin edicinin yanlılık miktarını azaltmaya çalışmıştır [14].

Sistematik örneklemede kitle ortalamasının tahmini için oransal tahmin edici ilk olarak Swain (1967) tarafından bulunmuştur [22].

1971 yılında tahmin edilecek değişken ile yardımcı değişken arasında negatif korelasyon olması durumunda Shukla tarafından çarpımsal tahmin edici önerilmiştir [15].

R. Singh ve H.P. Singh (1998) tarafından oransal ve çarpımsal tahmin ediciler ağırlıklandırılıp toplanarak yeni oransal ve çarpımsal tahmin ediciler yapılmıştır [21]

H. P. Singh ve diğerkleri (2011), Bahl ve Tuteja (1991) tarafından basit rastgele örnekleme yöntemi için bulunan üstel oransal ve çarpımsal tahmin edicileri sistematik örnekleme uyarlamışlardır [17],[2].

R. Singh (2012) , Shabbir ve Gupta (2008) tarafından basit rastgele örneklemede kitle ortalamasının tahmini için önerilen oransal tahmin ediciyi Bedi (1996)'nın önerdiği dönüştürme işlemini kullanarak sistematik örnekleme uyarlamıştır [19],[10],[3].

H. P. Singh ve R. S. Solanki (2012) yardımcı değişken bilgilerinin kullanıldığı yeni bir tahmin edici ailesi önermiştir [16].

R. Singh ve diğerkleri (2013), Shabbir ve Gupta (2010) tarafından basit rastgele örneklemede kitle ortalamasının tahmini için önerilen oransal tahmin ediciyi sistematik örnekleme uyarlamıştır [20],[9].

R. Tailor ve diğerkleri (2013), Singh (1967)'in çalışmasından yola çıkarak oransal-çarpımsal (ratio cum product) türü bir tahmin edici önermişlerdir [23], [18].

2.1.Sistematik Örnekleme

Sistematik örneklemede birimler rastgele bir sırada sıralandıktan sonra $k=N/n$ sayısı bulunur. Daha sonra n büyüklüğünde bir örneklem çekmek için ilk k birimden rastgele bir birim seçilir. Bundan sonra gelen her k 'ıncı birimin örnekleme alınmasıyla örneklem seçme yöntemine k -ıncı sistematik örnekleme adı verilir. Sistematik örneklemin başarısı birimlerin sıralanışına bağlıdır. Eğer birimler ile ilgili bir bilgi varsa ona göre sıralanmalıdır (Örneğin, birimlerin yaşları, boy uzunlukları vs biliniyorsa bu bilgilere göre en gençten en yaşlıya, en kısıdan en uzuna vb. gibi sıralanmalıdır). Böylece her gruptan birimler seçilmiş olur. Yöntemde ilk seçilen birim bütün örnekleme belirler. Bu birime başlangıç noktası denir. Başlangıç noktası belirlenen k sayısına göre, $[1,k]$ aralığından seçilmelidir.

Örnekleme kuramı sonlu kitleler üzerine kurulu olduğundan k sayısı, $k=N/n$ ile bulunabilir. Burada k tamsayı ya da kesirli sayı olabilir. Büyük kitlelerde k 'nın tam kısmı ya da tama tamamlanmış şeklinin alınması önemli değildir.

Sistematik örneklemede seçilen k sayısı kadar mümkün örneklem elde edilir. Bir diğerk deyişle örneklem uzayının boyutu k 'dır.

$N=nk$ olan bir kitlede, kitle birimlerini y_i , $i=1,2,\dots,nk$ ile gösterelim. Buna göre oluşturulabilecek k tane mümkün örneklem (örneklem uzayı) aşağıdaki gibidir.

1	2	...	k
y_1	y_2		y_k
y_{k+1}	y_{k+2}		y_{2k}
y_{2k+1}	y_{2k+2}		y_{3k}
.	.		.
.	.		.
.	.		.
$y_{(n-1)k+1}$	$y_{(n-1)k+2}$		y_{nk}

Şekil 2.1. Sistematiik örneklemede örneklem uzayı

Sistematiik örnekleme bir başka bakış açısı da $N=nk$ yazılabildiğine göre, kitlenin n büyüklüğünde kümelere ayrılmış olarak düşünülmesidir. Rastgele bir başlangıç noktası seçilip sistematiik örneklemin oluşturulması ile n büyüklüğünde k kümeden birinin seçilmesi aynıdır. O halde, bu sistematiik örnekleme k kümeden birinin basit rastgele örnekleme ile alındığı küme örnekleme ile aynı duyarlılığa sahiptir.

Sistematiik örnekleme, basit rastgele örneklemin örnekleme alınacak birimlerin seçimini kolaylaştıran özel bir halidir. Örnekleme kolayca, daha kısa zamanda ve daha az hata ile oluşturmak mümkündür. Bu, özellikle saha çalışmaları için önemli bir özelliktir. Sistematiik örnekleme basit rastgele örnekleme göre kitle üzerinde daha eşit dağılır. Yani, içsel tabakalama ile her tabakadan birimlerin sistematiik seçilmesi olasıdır.

y_{ij} ile i -inci sistematiik örneklemin j -inci birimin gösterelim ($i=1,2,\dots,k$ ve $j=1,2,\dots,n$). Sistematiik örnekleme basit rastgele örneklemin özel bir hali sayıldığından kitle toplamı ve ortalaması basit rastgele yöntemde verilen yollarla elde edilebilir.

i -inci sistematiik örneklemin ortalaması;

$$\bar{y}_{i.} = \bar{y}_{sis} = \frac{\sum_{j=1}^n y_{ij}}{n}$$

ile bulunabilir.

Kitle toplamı tahmini; $Y_{i.} = N\bar{y}_{i.}$ olacaktır.

Sistematik örneklemede ortalama ve toplam tahminlerinin *her zaman yansız olduğu söylenemez*. $N=nk$ yazılamadığı durumlarda yapılacak bu tahminler sistematik hata içerir.

Eğer $N= nk$ yazılabiliyor ise, sistematik örneklemede kitle toplamı ve ortalama tahminleri yansızdırlar [5].

Varyans için çeşitli çıkarsamalar geliştirilmiştir.

Teorem 1:

Sistematik örneklemede ortalamanın varyansı,

$$V(\bar{y}_{sis}) = \frac{N-1}{N} S_y^2 - \frac{k(n-1)}{N} S_{iç}^2$$

ile elde edilir. Burada,

$$S_{iç}^2 = \frac{1}{k(n-1)} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2$$

biçimindedir.

$S_{iç}^2$ sistematik örneklem içi birimler arası varyanstır. Bunu, varyans analizindeki grup içi kareler ortalaması olarak düşünmek mümkündür. Paydada bulunan $k(n-1)$ varyans analizi kuralları ile bulunmuştur. k mümkün örneklemin her biri paydaki kareler toplamına $(n-1)$ serbestlik derecesi getirmektedir.

Tanıt:

$$(N-1)S_y^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{Y})^2$$

ifadesinde $\pm \bar{y}_i$ yazılıp kare ve toplam işlemleri yapılırsa;

$$(N-1)S_y^2 = n \sum_{i=1}^k (\bar{y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 \quad (2.4)$$

olarak elde edilir.

Varyans tanımından;

$$V(\bar{y}_{sis}) = E(\bar{y}_i - \bar{Y})^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\bar{y}_i - \bar{Y})^2 \quad (2.5)$$

yazılabilir.

$$S_{iç}^2 = \frac{1}{k(n-1)} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$$

ile Eşitlik (2.5), Eşitlik (2.4)'te yerlerine yazılırsa;

$$(N-1)S_y^2 = nkV(\bar{y}_{sis}) + k(n-1)S_{iç}^2$$

olur. Buradan $V(\bar{y}_{sis})$ çekilirse (Ayrıca, $nk=N$);

$$V(\bar{y}_{sis}) = \frac{N-1}{N} S_y^2 - \frac{k(n-1)}{N} S_{iç}^2$$

elde edilir.

Teorem 2: Eğer, $S_{iç}^2 > S^2$ ise, sistematik örneklemede ortalama tahmini, basit rastgele örneklemede ortalama tahmininden daha duyarlıdır.

Tanıt: Basit rastgele örneklemede ortalama tahmininin varyansı, $V(\bar{y}) = \frac{N-n}{N} \frac{S_y^2}{n}$ ve

sistematik örneklemede bu varyans, $V(\bar{y}_{sis}) = \frac{N-1}{N} S_y^2 - \frac{k(n-1)}{N} S_{iç}^2$ olduğundan,

$V(\bar{y}_{sis}) < V(\bar{y})$ koşulu elde edilmelidir.

$$\frac{N-1}{N} S_y^2 - \frac{k(n-1)}{N} S_{iç}^2 < \frac{N-n}{N} \frac{S_y^2}{n}$$

$$k(n-1)S_{i\check{c}}^2 > \left(N-1 - \frac{N-n}{n} \right) S_y^2$$

$$S_{i\check{c}}^2 > S_y^2$$

Bu teoreme göre, eğer sistematik örneklem içi varyans tüm kitle varyansından daha büyükse, sistematik örnekleme basit rastgele örnekleme göre daha duyarlı sonuçlar verecektir. Yani sistematik örneklemede örneklem birimleri kendi içinde heterojense daha duyarlıdır. Bilgiye göre sıralanmış bir kitleden seçim, daha heterojen dolayısıyla daha duyarlı olacaktır. Kitleye göre, sistematik örneklem daha homojen ise örneklemdaki ardışık birimler yaklaşık olarak aynı bilgiyi içerirler.

Teorem 3: Sistematik örneklemede korelasyon cinsinden varyans;

$$V(\bar{y}_{sis}) = \frac{S_y^2}{n} \left(\frac{N-1}{N} \right) (1 + (n-1)\rho_{i\check{c}})$$

olarak bulunur. Burada $\rho_{i\check{c}}$ aynı sistematik örneklem içi birim çiftleri arasındaki korelasyondur, ve

$$\rho_{i\check{c}} = \frac{E(y_{ij} - \bar{Y})(y_{iu} - \bar{Y})}{E(y_{ij} - \bar{Y})^2}$$

$$\rho_{i\check{c}} = \frac{2 \sum_{i=1}^k \sum_{j < u} (y_{ij} - \bar{Y})(y_{iu} - \bar{Y})}{(n-1)(N-1)S_y^2}$$

‘dir.

Tanıt: Öncelikle $\rho_{i\check{c}}$ ’in nasıl elde edildiğini inceleyelim. X ve Y rastlantı değişkenlerinin x_i ve y_i ölçümleri için kitle korelasyon katsayısı;

$$\rho_{xy} = \frac{E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}}{\sqrt{E[X - E(X)]^2 E[Y - E(Y)]^2}}$$

biçimindedir. y_{ij} , i-inci sistematik örneklemin j-inci; y_{iu} , i-inci sistematik örneklemin u-uncu birim çiftleri için,

$$\rho_{I\bar{C}} = \rho_{yy} = \frac{E(y_{ij} - \bar{Y})(y_{iu} - \bar{Y})}{\sqrt{E(y_{ij} - \bar{Y})^2 E(y_{iu} - \bar{Y})^2}} = \frac{E(y_{ij} - \bar{Y})(y_{iu} - \bar{Y})}{E(y_{ij} - \bar{Y})^2}$$

olur. Beklenen değerler açıldığında, pay kısmında $k \binom{n}{2}$ tane çiftin ortalaması söz konusudur.

$$E(y_{ij} - \bar{Y})(y_{iu} - \bar{Y}) = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j < u} (y_{ij} - \bar{Y})(y_{iu} - \bar{Y})}{k \binom{n}{2}}$$

ve

$$k \binom{n}{2} = \frac{kn(n-1)}{2} = \frac{N(n-1)}{2}$$

yerine yazılırsa;

$$E(y_{ij} - \bar{Y})(y_{iu} - \bar{Y}) = \frac{2 \sum_{i=1}^k \sum_{j < u} (y_{ij} - \bar{Y})(y_{iu} - \bar{Y})}{N(n-1)}$$

yazılabilir.

Payda kısmında ise, $\sigma_y^2 = \frac{N-1}{N} S_y^2$ yerine yazılırsa,

$$\rho_{I\bar{C}} = \rho_{yy} = \frac{2 \sum_{i=1}^k \sum_{j < u} (y_{ij} - \bar{Y})(y_{iu} - \bar{Y})}{(n-1)(N-1)S_y^2}$$

olarak elde edilir.

Teoremin tanıtı için Teorem 1'deki (2.5) numaralı eşitlik

$$V(\bar{y}_{sis}) = E(\bar{y}_i - \bar{Y})^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\bar{y}_i - \bar{Y})^2$$

den yararlanılır. Bu eşitlikte k sol tarafa alınıp her iki taraf n^2 ile çarpılırsa,

$$n^2 k V(\bar{y}_{sis}) = n^2 \sum_{i=1}^k (\bar{y}_i - \bar{Y})^2$$

elde edilir ve

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^n y_{ij}}{n}$$

olduğu göz önüne alınarak,

$$n^2 k V(\bar{y}_{sis}) = \sum_{i=1}^k [(y_{i1} - \bar{Y}) + (y_{i2} - \bar{Y}) + \dots + (y_{in} - \bar{Y})]^2$$

yazılır. Kare ve toplama geçilirse,

$$n^2 k V(\bar{y}_{sis}) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{Y})^2 + 2 \sum_{i=1}^k \sum_{j < u} (y_{ij} - \bar{Y})(y_{iu} - \bar{Y})$$

bulunur. Burada ilk terim $(N-1)S_y^2$ 'dir, ikinci terimin ise $(n-1)(N-1)S_y^2 \rho_{I\bar{C}}$ olduğu teoremden önce ispat edilen $\rho_{I\bar{C}} = \rho_{yy}$ formülünden görülebilir. Buradan,

$$n^2 k V(\bar{y}_{sis}) = (N-1)S_y^2 + (n-1)(N-1)S_y^2 \rho_{yy}$$

$$V(\bar{y}_{sis}) = \frac{(N-1)S_y^2}{nN} [1 + (n-1)\rho_{yy}] \quad (2.6)$$

bulunarak teorem ispatlanmış olur.

Bu teoreme göre, aynı örneklem içindeki birim çiftleri arası pozitif korelasyon $V(\bar{y}_{sis})$ 'yi artırır [5].

X ve Y arasındaki korelasyon katsayısı ρ_{xy} ile gösterilir ve

$$\rho_{xy} = \frac{\text{cov}(\bar{x}, \bar{y})}{\sqrt{V(\bar{x})V(\bar{y})}}$$

olarak tanımlanır [12].

Burada σ_x ve σ_y yerine Eşitlik (2.6)'da verilen sistematik örnekleme korelasyon cinsinden varyansın standart sapması yazılırsa,

$$\rho_{xy} = \frac{\text{cov}(\bar{x}_{sis}^*, \bar{y}_{sis}^*)}{\sqrt{\frac{N-1}{nN} S_x^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] \frac{N-1}{nN} S_y^2 [1 + (n-1)\rho_{yy}]}}$$

$$\text{cov}(\bar{x}_{sis}^*, \bar{y}_{sis}^*) = \frac{N-1}{nN} \rho_{xy} S_x S_y \sqrt{[1 + (n-1)\rho_{xx}]} \sqrt{[1 + (n-1)\rho_{yy}]} \quad (2.7)$$

olarak bulunmuş olur.

2.2. Taylor ve MacLaurin Serileri

$f(x)$ fonksiyonu sürekli ve her dereceden türevlenebilir olsun. Bu durumda, $f(x)$ 'in $x=a$ noktasındaki Taylor serisi açılımı,

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

şeklindedir. Eğer, $a=0$ ise,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

olarak gösterilen bu seri, MacLaurin Serisi adını almaktadır [1].

2.3. Taylor Serisi Yöntemi

Doğrusal tahmin edici,

$$Y = \sum_{i=1}^k \alpha_i \theta_i$$

olarak tanımlansın. Bu tahmin edici için varyans,

$$V(Y) = \sum_{i=1}^k \alpha_i^2 V(\theta_i) + 2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=i+1}^k \alpha_i \alpha_j \text{cov}(\theta_i, \theta_j) \quad (2.8)$$

olur. Doğrusal olmayan ve doğrusal formda tanımlanamayan tahmin ediciler için hata kareler ortalaması eşitliği Taylor Serisi yöntemiyle,

$$h(Y_1, Y_1, \dots, Y_k) = h(Y_1, Y_1, \dots, Y_k) + \sum_{j=1}^k d_j (Y_j - Y_j) + R_k(Y_k, \alpha) \quad (2.9)$$

şeklinde elde edilir. Burada, $h(Y_1, Y_1, \dots, Y_k)$ doğrusal olmayan fonksiyonu, $h(Y_1, Y_1, \dots, Y_k)$ bu fonksiyonun tahminini,

$$d_j = \frac{\partial h(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)}{\partial \alpha_i} \Big|_{Y_1, Y_1, \dots, Y_k}$$

ve O_k Taylor Serisinin ikinci dereceden terimlerini göstermek üzere,

$$R_k(Y_k, \alpha) = \sum \sum \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 h(Y_1, Y_1, \dots, Y_k)}{\partial Y_j \partial Y_i} (Y_j - Y_j)(Y_i - Y_i) + O_k \quad (2.10)$$

şeklindedir.

$R_k(Y_k, \alpha)$ teriminin hata kareler ortalaması değerini önemli ölçüde değiştirmedeği ancak hesaplamasında önemli olduğu görülmüştür. Örneklem büyüklüğü yeterli olduğunda $R_k(Y_k, \alpha)$ terimi ihmal edilebilir ve Taylor Serisi yöntemiyle hata kareler ortalaması,

$$h(Y_1, Y_1, \dots, Y_k) \cong h(Y_1, Y_1, \dots, Y_k) + \sum_{j=1}^k d_j (Y_j - Y_j)$$

biçiminde tanımlanabilir. Hata kareler ortalaması matris formunda yazılacak olursa,

$$HKO[h(Y_1, Y_1, \dots, Y_k)] \cong \mathbf{d} \mathbf{\Sigma} \mathbf{d}'$$

şeklindedir. Burada $\mathbf{d}$ (1xk) boyutlu kısmı türevler vektörünü, Σ ise (kxk) boyutlu varyans kovaryans matrisini göstermektedir [6], [7].

2.4. Fark Yöntemi

Fark yöntemi, doğrusal olmayan tahmin edicilerin yan ve hata kareler ortalamasını bulmada kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntemle tahmin ediciler, örneklem değeri ve parametre değeri arasındaki farklardan yararlanılarak yeniden oluşturulur.

Basit rastgele örnekleme için, fark yönteminde,

$$e_0 = \frac{\bar{y} - \bar{Y}}{\bar{Y}} \rightarrow \bar{y} = \bar{Y}(1 + e_0)$$

$$e_1 = \frac{\bar{x} - \bar{X}}{\bar{X}} \rightarrow \bar{x} = \bar{X}(1 + e_1)$$

$$e_2 = \frac{\bar{z} - \bar{Z}}{\bar{Z}} \rightarrow \bar{z} = \bar{Z}(1 + e_2)$$

biçiminde tahmin edicideki değişken sayısı kadar fark terimi tanımlanır [7].

$\bar{y}_{sis}^*$, $\bar{x}_{sis}^*$ ve $\bar{z}_{sis}^*$ sistematik örnekleme ortalamalarını, $\bar{X}$, $\bar{Y}$ ve $\bar{Z}$ kitle ortalamalarını göstermek üzere, fark yönteminde,

$$e_0 = \frac{\bar{y}_{sis}^* - \bar{Y}}{\bar{Y}} \rightarrow \bar{y}_{sis}^* = \bar{Y}(1 + e_0) \quad (2.11)$$

$$e_1 = \frac{\bar{x}_{sis}^* - \bar{X}}{\bar{X}} \rightarrow \bar{x}_{sis}^* = \bar{X}(1 + e_1) \quad (2.12)$$

$$e_2 = \frac{\bar{z}_{sis}^* - \bar{Z}}{\bar{Z}} \rightarrow \bar{z}_{sis}^* = \bar{Z}(1 + e_2) \quad (2.13)$$

biçiminde tahmin edicideki değişken sayısı kadar fark terimi tanımlanır.

Bu değişkenlerin beklenen değerleri $E(e_i)$, karelerinin beklenen değerleri $E(e_i^2)$ ve kovaryansları $E(e_i e_j)$ sistematik örnekleme için aşağıdaki şekildedir:

$$E(e_0) = E(e_1) = E(e_2) = 0 \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} E(e_0^2) &= E\left(\frac{\bar{y}_{\text{sis}}^* - \bar{Y}}{\bar{Y}}\right)^2 = \frac{1}{\bar{Y}^2} E(\bar{y}_{\text{sis}}^* - \bar{Y})^2 \\ &= \frac{1}{\bar{Y}^2} \frac{N-1}{N} \frac{S_y^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{yy}] = \frac{N-1}{N} \frac{C_y^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{yy}] \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$E(e_1^2) = E\left(\frac{\bar{x}_{\text{sis}}^* - \bar{X}}{\bar{X}}\right)^2 = \frac{1}{\bar{X}^2} E(\bar{x}_{\text{sis}}^* - \bar{X})^2 = \frac{N-1}{N} \frac{C_x^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \quad (2.16)$$

$$E(e_2^2) = E\left(\frac{\bar{z}_{\text{sis}}^* - \bar{Z}}{\bar{Z}}\right)^2 = \frac{1}{\bar{Z}^2} E(\bar{z}_{\text{sis}}^* - \bar{Z})^2 = \frac{N-1}{N} \frac{C_z^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{zz}] \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} E(e_0 e_1) &= E\left[\left(\frac{\bar{x}_{\text{sis}}^* - \bar{X}}{\bar{X}}\right)\left(\frac{\bar{y}_{\text{sis}}^* - \bar{Y}}{\bar{Y}}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\bar{X}} \frac{1}{\bar{Y}} \text{cov}(\bar{x}, \bar{y}) \\ &= \frac{1}{\bar{X}} \frac{1}{\bar{Y}} \frac{N-1}{N} \rho_{xy} \frac{S_x S_y}{n} \sqrt{1 + (n-1)\rho_{yy}} \sqrt{1 + (n-1)\rho_{xx}} \\ &= \frac{N-1}{N} \rho_{xy} \frac{C_x C_y}{n} \sqrt{1 + (n-1)\rho_{yy}} \sqrt{1 + (n-1)\rho_{xx}} \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$E(e_0 e_2) = \frac{1}{\bar{Y}} \frac{1}{\bar{Z}} \text{cov}(\bar{y}_{\text{sis}}^*, \bar{z}_{\text{sis}}^*) = \frac{N-1}{N} \rho_{yz} \frac{C_y C_z}{n} \sqrt{1 + (n-1)\rho_{yy}} \sqrt{1 + (n-1)\rho_{zz}} \quad (2.19)$$

$$E(e_1 e_2) = \frac{1}{\bar{X}} \frac{1}{\bar{Z}} \text{cov}(\bar{x}_{\text{sis}}^*, \bar{z}_{\text{sis}}^*) = \frac{N-1}{N} \rho_{xz} \frac{C_x C_z}{n} \sqrt{1 + (n-1)\rho_{xx}} \sqrt{1 + (n-1)\rho_{zz}} \quad (2.20)$$

3. TAHMİN EDİCİLER

3.1. Swain, A. K. P. C.'nin (1964) Oransal Tahmin Edicisi

N büyüklüğündeki kitleden sistematik örnekleme yöntemi ile n büyüklüğünde bir örneklem seçilsin. Örneklem birimlerine ilişkin x_i ve y_i ölçümlerinin elde edilebildiği, x_i / y_i oran değişiminin küçük olduğu ve değişkenler arasındaki ilişkinin başlangıç noktasından geçen bir doğru ile gösterilebileceği varsayılınsın. Bu durumda y ilgilenilen ve x yardımcı değişkenin sistematik örneklemede ortalaması,

$$\bar{y}_{sis}^* = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$$

$$\bar{x}_{sis}^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

şeklinde gösterilebilirler. x ve y değişkenleri arasındaki doğrusal bağıntı,

$$\bar{y}_{sis}^* = b \bar{x}_{sis}^* , \quad \bar{Y} = b \bar{X}$$

şeklinde yazılabilir. Örneklem ortalaması ve kitle ortalaması birbirine oranlanarak,

$$\frac{\bar{Y}}{\bar{y}_{sis}^*} = \frac{\bar{X}}{\bar{x}_{sis}^*}$$

elde edilir. Bu eşitlikten, y_i ilgilenilen değişkeni ile x_i yardımcı değişkeni arasındaki ilişki pozitif olduğu zaman, y_i değişkenine ilişkin kitle ortalamasının sistematik örnekleme için oransal tahmin edicisi Swain tarafından 1960 yılında;

$$\bar{y}_{r_{sis}}^* = \frac{\bar{y}_{sis}^*}{\bar{x}_{sis}^*} \bar{X} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlamıştır. Bu tahmin edici için yan;

$$B(\bar{y}_{r_{sis}}^*) = \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}}{\bar{n}} C_x^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] (1 - \kappa p^*) \quad (3.2)$$

Hata kareler ortalaması;

$$HKO(\bar{y}_{r_{sis}}) = \frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 [1 + (n-1)\rho_C] [C_x^2(1-2\kappa) + C_y^2] \quad (3.3)$$

olarak verilmiştir. Burada, $\kappa = \rho_{xy} \frac{C_x}{C_y}$ ve $\rho^* = \frac{[1 + (n-1)\rho_{yy}]^{1/2}}{[1 + (n-1)\rho_{xx}]^{1/2}}$ 'dir.

Bu tahmin edicinin yanını ve hata kareler ortalamasını bulabilmek için, Eşitlik (3.1)'de verilen tahmin edici fark yöntemiyle Eşitlik (2.11) ve (2.12) kullanılarak,

$$\bar{y}_{r_{sis}} = \frac{\bar{Y}(e_0 + 1)}{\bar{X}(e_1 + 1)} \bar{X} = \bar{Y}(e_0 + 1)(e_1 + 1)^{-1}$$

biçiminde doğrusal formda yazılabilir. Buradaki üslü terim Taylor serisiyle açık biçimde yazılırsa;

$$\bar{y}_{r_{sis}} = \bar{Y}(e_0 + 1)(e_1 + 1)^{-1} \cong \bar{Y}(e_0 + 1)(1 - e_1 + e_1^2 - e_1^3 + \dots)$$

olarak bulunur. Parantez içlerindeki terimler çarpılarak, formül daha açık biçimde yazılacak olursa;

$$\bar{y}_{r_{sis}} \cong \bar{Y}(1 - e_1 + e_1^2 - e_1^3 + \dots + e_0 - e_0 e_1 + e_0 e_1^2 - e_1^2 e_1^3 + \dots)$$

elde edilir. Burada ikinci dereceden sonraki terimler, $(\bar{y}_{r_{sis}}^* - \bar{Y})$ arasındaki fark küçüleceğinden, ihmal edilerek,

$$\bar{y}_{r_{sis}} \cong \bar{Y}(1 - e_1 + e_1^2 + e_0 - e_0 e_1)$$

biçiminde yaklaşık olarak yazılabilir. Bu eşitlikte her iki taraftan da $\bar{Y}$ terimi çıkartılırsa;

$$\bar{y}_{r_{sis}} - \bar{Y} \cong \bar{Y}(-e_1 + e_1^2 + e_0 - e_0 e_1) \quad (3.4)$$

olarak bulunur. Eşitlik (3.4)'te her iki tarafın beklenen değeri alınırsa,

$$E(\bar{y}_{r_{sis}} - \bar{Y}) \cong \bar{Y}[-E(e_1) + E(e_1^2) + E(e_0) - E(e_0 e_1)]$$

elde edilir. Bu ifadede (2.14), (2.16) ve (2.18)'de verilen fark terimleri yerlerine yazılırsa tahmin edicinin yanı,

$$E(\bar{y}_{r_{sls}} - \bar{Y}) \cong \bar{Y} \left[\frac{N-1}{N} \frac{C_x^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] - \frac{N-1}{N} \rho_{xy} \frac{C_x C_y}{n} [1 + (n-1)\rho_{yy}]^{1/2} [1 + (n-1)\rho_{xx}]^{1/2} \right]$$

$$= \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}}{n} C_x^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] \left\{ 1 - \rho_{xy} \frac{C_y}{C_x} \frac{[1 + (n-1)\rho_{yy}]^{1/2}}{[1 + (n-1)\rho_{xx}]^{1/2}} \right\}$$

$$\rho^* = \frac{[1 + (n-1)\rho_{yy}]^{1/2}}{[1 + (n-1)\rho_{xx}]^{1/2}} \text{ ve } \kappa = \rho_{xy} \frac{C_y}{C_x} \text{ olmak üzere}$$

$$E(\bar{y}_{r_{sls}} - \bar{Y}) = \frac{N-1}{Nn} \bar{Y} C_x^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] (1 - \kappa \rho^*)$$

olarak yan, Eşitlik (3.2)'deki gibi elde edilmiş olur.

Yanın bulunabilmesi için, Taylor Serisi yöntemindeki ikinci dereceden terimler kullanılırsa,

$$Y_{an} = \frac{1}{2!} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k d_{ij} E(\hat{Y}_j - Y_j)(\hat{Y}_i - Y_i)$$

$$Y_{an} = \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^2 d_{1j} E(\hat{Y}_j - Y_j)(\hat{Y}_1 - Y_1) + d_{2j} E(\hat{Y}_j - Y_j)(\hat{Y}_2 - Y_2) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[d_{11} E(\hat{Y}_1 - Y_1)(\hat{Y}_1 - Y_1) + 2d_{12} E(\hat{Y}_1 - Y_1)(\hat{Y}_2 - Y_2) + d_{22} E(\hat{Y}_2 - Y_2)(\hat{Y}_2 - Y_2) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[d_{11} E(\hat{Y}_1 - Y_1)^2 + 2d_{12} E(\hat{Y}_1 - Y_1)(\hat{Y}_2 - Y_2) + d_{22} E(\hat{Y}_2 - Y_2)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[d_{11} V(Y_1) + 2d_{12} \text{cov}(\bar{x}, \bar{y}) + d_{22} V(Y_2) \right]$$

Burada,

$$V(Y_1) = V(\bar{y}) = \frac{N-1}{N} \frac{S_y^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{yy}]$$

$$V(Y_2) = V(\bar{x}) = \frac{N-1}{N} \frac{S_x^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}]$$

$$\text{cov}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{N-1}{N} \rho_{xy} \frac{S_x S_y}{n} \sqrt{1+(n-1)\rho_{xx}} \sqrt{1+(n-1)\rho_{yy}}$$

ve türevler,

$$d_{11} = \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial y} = 0$$

$$d_{12} = d_{21} = \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} = -\frac{1}{X}$$

$$d_{22} = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial x} = 2 \frac{\bar{Y}}{X}$$

biçimindedir. Bu ifadeler yerlerine yazılıp düzenlenirse,

$$\begin{aligned} Y_{an} &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{X} 2 \text{cov}(\bar{x}, \bar{y}) + 2 \frac{\bar{Y}}{X} V(\bar{x}) \right] \\ &= -\frac{1}{X} \frac{N-1}{N} \rho_{xy} \frac{S_x S_y}{n} \sqrt{1+(n-1)\rho_{xx}} \sqrt{1+(n-1)\rho_{yy}} + \frac{\bar{Y}}{X^2} \frac{N-1}{N} \frac{S_x^2}{n} [1+(n-1)\rho_{xx}] \\ &= \frac{N-1}{Nn} [1+(n-1)\rho_{xx}] \left[-\rho_{xy} S_y \frac{\sqrt{1+(n-1)\rho_{yy}}}{\sqrt{1+(n-1)\rho_{xx}}} C_x + \bar{Y} C_x^2 \right] \\ &= \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}}{n} [1+(n-1)\rho_{xx}] \left[C_x^2 - \rho_{xy} C_y C_x \frac{\sqrt{1+(n-1)\rho_{yy}}}{\sqrt{1+(n-1)\rho_{xx}}} \right], \quad \rho^* = \frac{\sqrt{1+(n-1)\rho_{yy}}}{\sqrt{1+(n-1)\rho_{xx}}} \\ &= \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}}{n} [1+(n-1)\rho_{xx}] C_x^2 \left[1 - \rho_{xy} \frac{C_y}{C_x} \rho^* \right], \quad \kappa = \rho_{xy} \frac{C_y}{C_x} \\ E(\bar{y}_{r_{sis}} - \bar{Y}) &= \frac{N-1}{Nn} \bar{Y} C_x^2 [1+(n-1)\rho_{xx}] (1 - \kappa \rho^*) \end{aligned}$$

olarak yan elde edilir.

Hata kareler ortalamasını elde etmek için Eşitlik (3.4)'ün iki tarafının da karesi ve beklenen değeri alınır;

$$E(\bar{y}_{r_{sis}} - \bar{Y})^2 \cong \bar{Y}^2 E(-e_1 + e_1^2 + e_0 - e_0 e_1)^2$$

olur. Bu karesel terim açıldığında,

$$E(\bar{y}_{r_{sis}} - \bar{Y})^2 = \bar{Y}^2 E(e_1^2 + e_1^4 + e_0^2 - e_0^2 e_1^2 - 2e_1^3 - 2e_0 e_1 + 2e_0 e_1^2 + 2e_0 e_1^2 - 2e_0 e_1^3 - 2e_0^2 e_1)$$

formülünde ikinci dereceden sonraki terimler ihmal edildikten sonra, beklenen değer ifadesi parantez içine dağıtılsa,

$$E(\bar{y}_{r_{sis}} - \bar{Y})^2 \cong \bar{Y}^2 [E(e_1^2) + E(e_0^2) - 2E(e_0 e_1)]$$

olarak elde edilir. Burada Eşitlik (2.5), (2.6) ve (2.8) yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} HKO(\bar{y}_{r_{sis}}) &= \bar{Y}^2 \left\{ \frac{1}{\bar{X}^2} \frac{N-1}{N} \frac{S_x^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] + \frac{1}{\bar{Y}^2} \frac{N-1}{N} \frac{S_y^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{yy}] \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{1}{\bar{X}} \frac{1}{\bar{Y}} \frac{N-1}{N} \rho_{xy} \frac{S_x S_y}{n} \sqrt{[1 + (n-1)\rho_{xx}][1 + (n-1)\rho_{yy}]} \right\} \\ &= \bar{Y}^2 \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \left(C_x^2 + C_y^2 \frac{[1 + (n-1)\rho_{yy}]}{[1 + (n-1)\rho_{xx}]} - 2\rho_{xy} C_x C_y \frac{\sqrt{[1 + (n-1)\rho_{yy}]}}{\sqrt{[1 + (n-1)\rho_{xx}]}} \right) \\ HKO(\bar{y}_{r_{sis}}) &= \bar{Y}^2 \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] [C_y^2 \rho^{*2} + C_x^2 (1 - 2\kappa \rho^*)], \end{aligned}$$

$$\kappa = \rho_{xy} \frac{C_y}{C_x} \text{ ve } \rho^* = \frac{\sqrt{[1 + (n-1)\rho_{yy}]}}{\sqrt{[1 + (n-1)\rho_{xx}]}}$$

olarak Swain oransal tahmin edicisinin hata kareler ortalaması Eşitlik (3.3)'te verildiği gibi elde edilir.

3.2. Shukla N. D. 'nin (1971) Çarpımsal Tahmin Edicisi

y_i ilgilenilen değişkeni ile x_i yardımcı değişkeni arasındaki ilişki negatif olduğu zaman, y_i değişkenine ilişkin kitle ortalamasının sistematik örnekleme için çarpımsal tahmin edicisi, Shukla tarafından 1971 yılında;

$$\bar{y}_{p_{sis}} = \bar{y}_{sis}^* \frac{\bar{x}_{sis}^*}{\bar{X}} \quad (3.5)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu tahmin edici için yan;

$$B(\bar{y}_{p_{sis}}) = \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] C_x^2 \kappa \rho^* \quad (3.6)$$

hata kareler ortalaması;

$$HKO(\bar{y}_{p_{sis}}) = \frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] [C_y^2 \rho^{*2} + C_x^2 (1 + 2\kappa^* \rho^*)] \quad (3.7)$$

olarak verilmiştir.

$$\text{Burada, } \kappa = \rho_{xy} \frac{C_x}{C_y} \text{ ve } \rho^* = \frac{\sqrt{1 + (n-1)\rho_{yy}}}{\sqrt{1 + (n-1)\rho_{xx}}}$$

olmaktadır.

Yan, Taylor Serisi yönteminde

$$Yan = \frac{1}{2!} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k d_{ij} E(\hat{Y}_j - Y_j)(\hat{Y}_i - Y_i)$$

eşitliğinden;

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left[d_{11} E(\hat{Y}_1 - Y_1)(\hat{Y}_1 - Y_1) + 2d_{12} E(\hat{Y}_1 - Y_1)(\hat{Y}_2 - Y_2) + d_{22} E(\hat{Y}_2 - Y_2)(\hat{Y}_2 - Y_2) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[d_{11} V(\bar{y}) + 2d_{12} \text{cov}(\bar{x}, \bar{y}) + d_{22} V(\bar{x}) \right] \end{aligned}$$

olur. Burada türevler,

$$d_{11} = \frac{\partial^2 h}{\partial \bar{y} \partial \bar{y}} = 0$$

$$d_{12} = \frac{\partial^2 h}{\partial \bar{y} \partial \bar{x}} = \frac{1}{\bar{X}}$$

ve

$$d_{22} = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial x} = 0$$

şeklindedir. Bunlar yan ifadesinde yerlerine yazılırsa,

$$Y_{an} = \frac{1}{X} \text{cov}(\bar{x}, \bar{y})$$

Burada Eşitlik (2.7) yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} Y_{an} &= \frac{1}{X} \frac{N-1}{N} \rho_{xy} \frac{S_x S_y}{n} \sqrt{1+(n-1)\rho_{xx}} \sqrt{1+(n-1)\rho_{yy}} \\ &= \frac{N-1}{N} \rho_{xy} \frac{S_y}{n} C_x \sqrt{1+(n-1)\rho_{xx}} \sqrt{1+(n-1)\rho_{yy}} \frac{\sqrt{1+(n-1)\rho_{xx}}}{\sqrt{1+(n-1)\rho_{xx}}} \frac{\bar{Y}}{\bar{Y}} \\ &= \frac{N-1}{N} \rho_{xy} \frac{\bar{Y}}{n} C_x C_y [1+(n-1)\rho_{xx}] \frac{\sqrt{1+(n-1)\rho_{yy}}}{\sqrt{1+(n-1)\rho_{xx}}} \frac{C_x}{C_x}, \rho^* = \frac{\sqrt{1+(n-1)\rho_{yy}}}{\sqrt{1+(n-1)\rho_{xx}}} \\ &= \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}}{n} \rho_{xy} \frac{C_y}{C_x} C_x^2 [1+(n-1)\rho_{xx}] \rho^* \end{aligned}$$

$$Y_{an} = \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}}{n} \kappa^* \rho^* C_x^2 [1+(n-1)\rho_{xx}]$$

olarak Eşitlik (3.6)'daki gibi elde edilmiş olur.

Tahminin hata kareler ortalaması Taylor Serisi yaklaşımıyla Eşitlik (2.9) kullanılarak

$$HKO(\bar{y}_p) \cong E \left[d_1(\bar{x} - \bar{X}) + d_2(\bar{y} - \bar{Y}) \right]^2$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $\alpha_1 = x$ ve $\alpha_2 = y$ olmak üzere,

$$d_1 = \frac{\partial h(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_1} \bigg|_{\bar{x}, \bar{y}} = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}$$

$$d_2 = \frac{\partial h(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_2} \bigg|_{\bar{x}, \bar{y}} = 1$$

şeklindedir. Yerlerine yazılırsa,

$$E(\bar{y}_p - \bar{Y})^2 \cong E \left[\frac{\bar{Y}}{\bar{X}} (\bar{x} - \bar{X}) + (\bar{y} - \bar{Y}) \right]^2 = \frac{\bar{Y}^2}{\bar{X}^2} E(\bar{x} - \bar{X})^2 + 2 \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} E(\bar{x} - \bar{X})(\bar{y} - \bar{Y}) + E(\bar{y} - \bar{Y})^2$$

Burada,

$$E(\bar{x} - \bar{X})^2 = V(\bar{x}) = \frac{N-1}{N} \frac{S_x^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}]$$

$$E(\bar{y} - \bar{Y})^2 = V(\bar{y}) = \frac{N-1}{N} \frac{S_y^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{yy}]$$

$$E(\bar{x} - \bar{X})(\bar{y} - \bar{Y}) = \text{cov}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{N-1}{N} \rho_{xy} \frac{S_y S_x}{n} \sqrt{1 + (n-1)\rho_{xx}} \sqrt{1 + (n-1)\rho_{yy}}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \text{HKO}(\bar{y}_p) &= \frac{\bar{Y}^2}{\bar{X}^2} \frac{N-1}{N} \frac{S_x^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] + 2 \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \frac{N-1}{N} \rho_{xy} \frac{S_y S_x}{n} \sqrt{1 + (n-1)\rho_{xx}} \sqrt{1 + (n-1)\rho_{yy}} \\ &\quad + \frac{N-1}{N} \frac{S_y^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{yy}] \\ &= \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \left\{ \bar{Y}^2 C_x^2 + 2 \bar{Y} S_y C_x \rho_{xy} \frac{\sqrt{1 + (n-1)\rho_{yy}}}{\sqrt{1 + (n-1)\rho_{xx}}} + S_y^2 \frac{[1 + (n-1)\rho_{yy}]}{[1 + (n-1)\rho_{xx}]} \right\} \end{aligned}$$

olur. Burada, $\rho^* = \frac{\sqrt{1 + (n-1)\rho_{yy}}}{\sqrt{1 + (n-1)\rho_{xx}}}$ yazılıp düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \text{HKO}(\bar{y}_p) &= \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \{ C_x^2 + 2 C_y C_x \rho_{xy} \rho^* + C_y^2 \rho^{*2} \} \\ &= \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \left\{ C_y^2 \rho^{*2} + C_x^2 \left(1 + 2 \rho_{xy} \frac{C_y}{C_x} \rho^* \right) \right\}, \text{ burada } \kappa = \rho_{xy} \frac{C_y}{C_x} \end{aligned}$$

$$\text{HKO}(\bar{y}_p) = \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \{ C_y^2 \rho^{*2} + C_x^2 (1 + 2\kappa \rho^*) \}$$

olarak Eşitlik (3.7)'deki gibi bulunmuş olur.

3.3. R. Singh & H.P. Singh (1998) Oransal Tahmin Edicisi

X ile Y arasındaki korelasyon pozitif olduğunda,

$$d_1 = \bar{y}_{sis}, d_2 = \bar{y}_{sis} \frac{\bar{X}}{\bar{X}_{sis}}, d_3 = \bar{y}_{sis} \left(\frac{\bar{X}}{\bar{X}_{sis}} \right)^2$$

olarak tanımlanırsa, $\sum_{i=1}^3 \omega_i = 1$ olmak üzere; önerilen tahmin edici,

$$d_r = \sum_{i=1}^3 \omega_i d_i = \omega_1 d_1 + \omega_2 d_2 + \omega_3 d_3$$

$$d_r = \omega_1 \bar{y}_{sis} + \omega_2 \bar{y}_{sis} \frac{\bar{X}}{\bar{X}_{sis}} + \omega_3 \bar{y}_{sis} \left(\frac{\bar{X}}{\bar{X}_{sis}} \right)^2 \quad (3.8)$$

biçimindedir. Bu tahmin edici için hata kareler ortalaması;

$$HKO(d_r) = \frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] [\rho^{*2} C_y^2 + \omega(\omega - 2\rho^* \kappa) C_x^2] \quad (3.9)$$

olarak bulunmuştur.

Bu tahmin edicinin hata kareler ortalamasını bulabilmek için Eşitlik (3.8)'de, Eşitlik (2.11) ve (2.12) yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} d_r &= \omega_1 \bar{Y}(e_0 + 1) + \omega_2 \bar{Y}(e_0 + 1) \frac{\bar{X}}{\bar{X}(e_1 + 1)} + \omega_3 \bar{Y}(e_0 + 1) \frac{\bar{X}^2}{\bar{X}^2 (e_1 + 1)^2} \\ &= \omega_1 \bar{Y}(e_0 + 1) + \omega_2 \bar{Y}(e_0 + 1)(e_1 + 1)^{-1} + \omega_3 \bar{Y}(e_0 + 1)(e_1 + 1)^{-2} \\ &= \bar{Y}(e_0 + 1) [\omega_1 + \omega_2 (e_1 + 1)^{-1} + \omega_3 ((e_1 + 1)^{-1})^2] \\ &= \bar{Y}(e_0 + 1) [\omega_1 + \omega_2 (1 - e_1 + e_1^2 - \dots) + \omega_3 (1 - e_1 + e_1^2 - \dots)^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\cong \bar{Y}(e_0 + 1) \left[\omega_1 + \omega_2(1 - e_1) + \omega_3(1 - 2e_1 + e_1^2) \right] \\
&= \bar{Y}(e_0 + 1) \left[\omega_1 + \omega_2 - \omega_2 e_1 + \omega_3(1 - 2e_1) + O(e^2) \right] \\
&= \bar{Y}(e_0 + 1) \left[\omega_1 + \omega_2 - \omega_2 e_1 + \omega_3 - 2\omega_3 e_1 + O(e^2) \right] \\
&= \bar{Y}(e_0 + 1) \left[1 - e_1(\omega_2 + 2\omega_3) + O(e^2) \right] \\
&= (\bar{Y} + \bar{Y}e_0) \left[1 - e_1(\omega_2 + 2\omega_3) + O(e^2) \right] \\
&= \bar{Y} - \bar{Y}e_1(\omega_2 + 2\omega_3) + \bar{Y}O(e^2) + \bar{Y}e_0 - \bar{Y}e_0 e_1(\omega_2 + 2\omega_3) + \bar{Y}e_0 O(e^2) \\
&= \bar{Y} + \bar{Y} \left[e_0 - e_1(\omega_2 + 2\omega_3) + O(e^2) \right]
\end{aligned}$$

olarak bulunur. $\omega_2 + 2\omega_3 = \omega$ olarak alınıp, $d_r = \bar{Y} + \bar{Y} \left[e_0 - \omega e_1 + O(e^2) \right]$ ve $O(e^2)$ yani ikinci derece ve daha büyük terimler ihmal edilirse;

$$\begin{aligned}
\text{HKO}(d_r) &= E \left(d_r - \bar{Y} \right)^2 = E \left[\bar{Y} (e_0 - \omega e_1) \right]^2 \\
&= \bar{Y}^2 E (e_0 - \omega e_1)^2 \\
&= \bar{Y}^2 \left[E(e_0^2) - 2\omega E(e_0 e_1) + \omega^2 E(e_1^2) \right]
\end{aligned}$$

Bu ifadede (2.15), (2.6) ve (2.18)'de verilen fark terimleri yerlerine yazılırsa tahmin edicinin hata kareler ortalaması,

$$\begin{aligned}
\text{HKO}(d_r) &= \bar{Y}^2 \left\{ \frac{N-1}{Nn} C_y^2 \left[1 + (n-1)\rho_{yy} \right] - 2\omega \frac{N-1}{Nn} \rho_{xy} C_y C_x \sqrt{1 + (n-1)\rho_{xx}} \sqrt{1 + (n-1)\rho_{yy}} \right. \\
&\quad \left. + \omega^2 \frac{N-1}{Nn} C_x^2 \left[1 + (n-1)\rho_{xx} \right] \right\} \\
&= \frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 \left[1 + (n-1)\rho_{xx} \right] \left(C_y^2 \frac{\left[1 + (n-1)\rho_{yy} \right]}{\left[1 + (n-1)\rho_{xx} \right]} - 2\omega \rho_{xy} C_y C_x \frac{\sqrt{1 + (n-1)\rho_{yy}}}{\sqrt{1 + (n-1)\rho_{xx}}} + \omega^2 C_x^2 \right)
\end{aligned}$$

Burada, $\rho^* = \frac{\sqrt{1 + (n-1)\rho_{yy}}}{\sqrt{1 + (n-1)\rho_{xx}}}$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} \text{HKO}(d_r) &= \frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 [1+(n-1)\rho_{xx}] (C_y^2 \rho^{*2} - 2\omega \rho_{xy} C_y C_x \rho^* + \omega^2 C_x^2) \\ &= \frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 [1+(n-1)\rho_{xx}] \left(C_y^2 \rho^{*2} + \omega C_x^2 \left(\omega - 2\rho^* \rho_{xy} \frac{C_y}{C_x} \right) \right) \end{aligned}$$

Burada, $\kappa = \rho_{xy} \frac{C_y}{C_x}$ yazılırsa,

$$\text{HKO}(d_r) = \frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 [1+(n-1)\rho_{xx}] (C_y^2 \rho^{*2} + \omega C_x^2 (\omega - 2\rho^* \kappa))$$

olarak elde edilir. Bu hata kareler ortalaması teriminde ω 'ya göre türev alınıp sıfıra eşitlenirse,

$$\frac{\partial \text{HKO}(d_r)}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 [1+(n-1)\rho_{xx}] [C_y^2 \rho^{*2} + \omega C_x^2 (\omega - 2\rho^* \kappa)] \right\} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 [1+(n-1)\rho_{xx}] [C_y^2 \rho^{*2} - 2\omega \rho_{xy} C_y C_x \rho^* + \omega^2 C_x^2] \right\} = 0$$

$$\frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 [1+(n-1)\rho_{xx}] [-2\rho_{xy} C_y C_x \rho^* + 2\omega C_x^2] = 0$$

$$2\rho_{xy} C_y C_x \rho^* = 2\omega C_x^2$$

$$\omega = \rho_{xy} \frac{C_y}{C_x} \rho^*$$

$$\omega_{\text{OPT}} = \kappa \rho^*$$

biçiminde bulunur. Bulunan optimal değer $\text{HKO}(d_r)$ 'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \text{HKO}(d_r)_{\text{MIN}} &= \frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 [1+(n-1)\rho_{xx}] (C_y^2 \rho^{*2} + \kappa \rho^* C_x^2 (\kappa \rho^* - 2\rho^* \kappa)) \\ &= \frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 [1+(n-1)\rho_{xx}] (C_y^2 \rho^{*2} - \kappa^2 \rho^{*2} C_x^2) \quad (\kappa^2 \text{ terimi yerine yazılırsa}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] \left(C_y^2 \rho^{*2} - \rho_{xy}^2 \frac{C_y^2}{C_x^2} \rho^{*2} C_x^2 \right) \\
&= \frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] \left[C_y^2 \rho^{*2} (1 - \rho_{xy}^2) \right] \\
\text{HKO}(d_r)_{\min} &= \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \left[S_y^2 \rho^{*2} (1 - \rho_{xy}^2) \right] \tag{3.10}
\end{aligned}$$

olarak Eşitlik (3.9)'da verilen hata kareler ortalamasının minimumu elde edilmiş olur.

$$\omega_2 + 2\omega_3 = \kappa \rho^* \tag{3.11}$$

ve

$$\sum_{i=1}^3 \omega_i = 1 \tag{3.12}$$

eşitliklerinden ω_1, ω_2 ve ω_3 'ün değerlerini hesaplayabilmek mümkün değildir. Bu sabitlerin değerlerini bulabilmek için üçüncü bir eşitliğin daha yazılması gereklidir. $B(d_i)$, i. ortalama tahmininin yanını göstermek üzere

$$\sum_{i=1}^3 B(d_i) = 0 \tag{3.13}$$

eşitliği üçüncü eşitlik olarak alınıp; Eşitlik (3.11), (3.12) ve (3.13) matris formunda yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ B(d_1) & B(d_2) & B(d_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \rho^* \kappa \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

Burada, $B(d_1) = B(\bar{y})^* = 0$

$$B(d_2) = B(\bar{y}_R)^* = \frac{N-1}{Nn} \bar{Y} [1 + (n-1)\rho_{xx}] C_x^2 (1 - \kappa \rho^*)$$

$$B(d_3) = B \left[\bar{y}_{\text{sis}} \left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}_{\text{sis}}} \right)^2 \right] = \frac{N-1}{Nn} \bar{Y} C_x^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] (3 - 2\kappa \rho^*) \text{'dir.}$$

(3.14)'te verilen matris çözülürse;

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\kappa\rho^*)^2 \\ (3-2\kappa\rho^*)\kappa\rho^* \\ (\kappa\rho^*-1)\kappa\rho^* \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Bulunan değerler Eşitlik (3.8)'de verilen tahmin edicide ve Eşitlik (3.9)'da verilen varyansta yerine yazılırsa;

$$d_r = (1-\kappa\rho^*)^2 \bar{y}_{sis} + (3-2\kappa\rho^*)\kappa\rho^* \bar{y}_{sis} \frac{\bar{X}}{\bar{X}_{sis}} + (\kappa\rho^*-1)\kappa\rho^* \bar{y}_{sis} \left(\frac{\bar{X}}{\bar{X}_{sis}} \right)^2$$

$$V(d_r)_{\min} = \frac{N-1}{Nn} [1+(n-1)\rho_{xx}] [\rho^{*2} S_y^2 (1-\rho_{xy}^2)]$$

olan optimum ve yansız oran tahmin edici sınıfından bir oran tahmini elde edilmiş olur.

Bu tahmin edici ile sistematik örneklemenin basit tahmininin karşılaştırılması aşağıdaki gibi yapılabilir.

$$V(d_r)_{\min} < V(\bar{y}_{sis})$$

$$\frac{N-1}{Nn} [1+(n-1)\rho_{xx}] [\rho^{*2} S_y^2 (1-\rho_{xy}^2)] < \frac{N-1}{Nn} [1+(n-1)\rho_{yy}] S_y^2$$

$$\frac{N-1}{Nn} [1+(n-1)\rho_{xx}] \frac{[1+(n-1)\rho_{yy}]}{[1+(n-1)\rho_{xx}]} S_y^2 (1-\rho_{xy}^2) < \frac{N-1}{Nn} [1+(n-1)\rho_{yy}] S_y^2$$

$$\frac{N-1}{Nn} [1+(n-1)\rho_{yy}] S_y^2 - \frac{N-1}{Nn} [1+(n-1)\rho_{yy}] S_y^2 \rho_{xy}^2 < \frac{N-1}{Nn} [1+(n-1)\rho_{yy}] S_y^2$$

$$\frac{N-1}{Nn} [1+(n-1)\rho_{yy}] S_y^2 \rho_{xy}^2 > 0$$

$$[1+(n-1)\rho_{yy}] > 0$$

koşulu altında d_r tahmini sistematik örneklemenin basit ortalama tahmininden daha etkindir.

d_r tahmin edicisinin varyansı ile Swain A. K. P. C. 'nin oran tahmininin hata kareler ortalamasının karşılaştırılması aşağıdaki gibi yapılabilir.

$$V(d_r)_{\min} < HKO(\bar{y}_{\text{sis}})$$

$$\frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \bar{Y}^2 [\rho^{*2} C_y^2 (1 - \rho_{xy}^2)] < \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \bar{Y}^2 [\rho^{*2} C_y^2 + C_x^2 (1 - 2\kappa\rho^*)]$$

$$\rho^{*2} C_y^2 \rho_{xy}^2 + C_x^2 (1 - 2\kappa\rho^*) > 0$$

$$C_x^2 - 2C_x^2 \kappa\rho^* + \rho^{*2} C_y^2 \rho_{xy}^2 > 0$$

$$1 - 2\kappa\rho^* + \rho^{*2} \kappa^2 > 0$$

$$(\kappa\rho^* - 1)^2 > 0$$

ifadesi her zaman doğru olduğundan yalnızca $\kappa\rho^* = 1$ olması durumu dışında d_r tahmin edicisi A. K. P. C. 'nin oran tahmininden daha etkindir.

3.4. R. Singh & H.P. Singh (1998) Çarpımsal Tahmin Edicisi

X ile Y arasındaki korelasyon negatif olduğunda,

$$d_1^* = \bar{y}_{\text{sis}}, d_2^* = \bar{y}_{\text{sis}} \frac{\bar{X}_{\text{sis}}}{\bar{X}}, d_3^* = \bar{y}_{\text{sis}} \left(\frac{\bar{X}_{\text{sis}}}{\bar{X}} \right)^2$$

olarak tanımlanırsa, $\sum_{i=1}^3 \omega_i^* = 1$ olmak üzere; önerilen tahmin edici,

$$d_p = \sum_{i=1}^3 \omega_i^* d_i^*$$

$$d_p = \omega_1^* \bar{y}_{\text{sis}} + \omega_2^* \bar{y}_{\text{sis}} \frac{\bar{X}_{\text{sis}}}{\bar{X}} + \omega_3^* \bar{y}_{\text{sis}} \left(\frac{\bar{X}_{\text{sis}}}{\bar{X}} \right)^2 \quad (3.15)$$

biçimindedir. Bu tahmin edici için $\omega_1 = [1 + \kappa\rho^*(1 + \kappa\rho^*)]$, $\omega_2 = -\kappa\rho^*(1 + 2\kappa\rho^*)$ ve

$\omega_3 = \kappa^2 \rho^{*2}$ optimal değerler olmak üzere yansız olan tahmin edici,

$$d_p = \left\{ \left[1 + \kappa \rho^* (1 + \kappa \rho^*) \bar{y} \right] - \kappa \rho^* (1 + 2\kappa \rho^*) \bar{y} \frac{\bar{x}}{\bar{X}} + \kappa^2 \rho^{*2} \bar{y} \left(\frac{\bar{x}}{\bar{X}} \right)^2 \right\}$$

tahmin edicinin varyansı;

$$V(d_p) = \frac{N-1}{Nn} \left[1 + (n-1)\rho_{yy} \right] (1 - \rho_{xy}^2) S_y^2$$

olarak bulunmuştur ve Eşitlik (3.10)'da verilen oransal tahmin edicinin minimum varyansı ile aynıdır.

d_p tahmin edicisinin varyansını bulabilmek için Eşitlik (3.15)'te, Eşitlik (2.11) ve (2.12) yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} d_p &= \omega_1^* \bar{Y}(e_0 + 1) + \omega_2^* \bar{Y}(e_0 + 1) \frac{\bar{X}(e_1 + 1)}{\bar{X}} + \omega_3^* \bar{Y}(e_0 + 1) \frac{\bar{X}^2(e_1 + 1)^2}{\bar{X}^2} \\ &= \omega_1^* \bar{Y}(e_0 + 1) + \omega_2^* \bar{Y}(e_0 + 1)(e_1 + 1) + \omega_3^* \bar{Y}(e_0 + 1)(e_1 + 1)^2 \\ &= \bar{Y} \left[\omega_1^* (e_0 + 1) + \omega_2^* (1 + e_0 e_1 + e_0 + e_1) + \omega_3^* (1 + e_0 e_1^2 + 2e_0 e_1 + e_0 + e_1^2 + 2e_1) \right] \\ &\cong \bar{Y} \left[(\omega_1^* + \omega_2^* + \omega_3^*) + e_0 (\omega_1^* + \omega_2^* + \omega_3^*) + e_0 e_1 (\omega_2^* + 2\omega_3^*) + e_1 (\omega_2^* + 2\omega_3^*) + \omega_3^* e_1^2 \right] \\ &= \bar{Y} \left[1 + e_0 + e_0 e_1 (\omega_2^* + 2\omega_3^*) + e_1 (\omega_2^* + 2\omega_3^*) + \omega_3^* e_1^2 \right] \\ &= \bar{Y} \left[1 + e_0 + e_1 (\omega_2^* + 2\omega_3^*) + O(e^2) \right] \end{aligned}$$

$\omega_2^* + 2\omega_3^* = \omega^*$ olarak alınırsa,

$d_p = \bar{Y} + \bar{Y} [e_0 + \omega_3^* e_1 + O(e^2)]$ ve $O(e^2)$ yani ikinci derece ve daha büyük terimler ihmal edildiğinde;

$$\begin{aligned} HKO(d_p) &\cong E(d_p - \bar{Y})^2 = E[\bar{Y}(e_0 - \omega^* e_1)]^2 \\ &= \bar{Y}^2 E(e_0^2 + 2\omega^* e_0 e_1 + \omega^{*2} e_0^2) \end{aligned}$$

Burada, Eşitlik (2.15), (2.16) e (2.18) yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\text{HKO}(d_p) &= \bar{Y}^2 \left\{ \frac{N-1}{Nn} C_y^2 [1 + (n-1)\rho_{yy}] + 2\omega^* \frac{N-1}{Nn} \rho_{xy} C_y C_x \sqrt{1 + (n-1)\rho_{xx}} \sqrt{1 + (n-1)\rho_{yy}} \right. \\
&\quad \left. + \omega^{*2} \frac{N-1}{Nn} C_x^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] \right\} \\
&= \frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] \left(C_y^2 \frac{[1 + (n-1)\rho_{yy}]}{[1 + (n-1)\rho_{xx}]} + 2\omega^* \rho_{xy} C_y C_x \frac{\sqrt{1 + (n-1)\rho_{yy}}}{\sqrt{1 + (n-1)\rho_{xx}}} + \omega^{*2} C_x^2 \right) \\
&= \frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] (C_y^2 \rho^{*2} + 2\omega^* \rho_{xy} C_y C_x \rho^* + \omega^{*2} C_x^2) \\
&= \frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] \left(C_y^2 \rho^{*2} + \omega^* C_x^2 \left(\omega^* + 2\rho^* \rho_{xy} \frac{C_y}{C_x} \right) \right) \\
\text{HKO}(d_p) &= \frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] (C_y^2 \rho^{*2} + \omega^* C_x^2 (\omega^* + 2\rho^* \kappa)) \tag{3.16}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu hata kareler ortalaması teriminde ω^* 'a göre türev alınıp sıfıra eşitlenirse,

$$\frac{\partial \text{HKO}(d_p)}{\partial \omega^*} = \frac{\partial}{\partial \omega^*} \left\{ \frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] [C_y^2 \rho^{*2} + \omega C_x^2 (\omega - 2\rho^* \kappa)] \right\} = 0$$

$$\frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] [2\rho_{xy} C_y C_x \rho^* + 2\omega^* C_x^2] = 0$$

$$\omega^* = -\rho_{xy} \frac{C_y}{C_x} \rho^* \rightarrow \omega_{\text{OPT}}^* = -\kappa \rho^*$$

biçiminde bulunur. Bulunan optimal değer Eşitlik (3.16)'da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\text{HKO}(d_p)_{\text{MIN}} &= \frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] (C_y^2 \rho^{*2} - \kappa \rho^* C_x^2 (-\kappa \rho^* + 2\rho^* \kappa)) \\
&= \frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] (C_y^2 \rho^{*2} - \kappa^2 \rho^{*2} C_x^2)
\end{aligned}$$

(κ^2 terimi yerine yazılırsa)

$$\begin{aligned}
&= \frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] \left(C_y^2 \rho^{*2} - \rho_{xy}^2 \frac{C_y^2}{C_x^2} \rho^{*2} C_x^2 \right) \\
&= \frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] \left[C_y^2 \rho^{*2} (1 - \rho_{xy}^2) \right] \\
&= \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \left[S_y^2 \rho^{*2} (1 - \rho_{xy}^2) \right]
\end{aligned}$$

olarak Eşitlik (3.10)'da verilen minimum varyansla aynı şekilde elde edilmiş olur.

$$\omega_2^* + 2\omega_3^* = \kappa \rho^* \quad (3.17)$$

ve

$$\sum_{i=1}^3 \omega_i^* = 1 \quad (3.18)$$

eşitliklerinden ω_1^* , ω_2^* ve ω_3^* 'ın değerlerini hesaplayabilmek mümkün değildir. Bu sabitlerin değerlerini bulabilmek için üçüncü bir eşitliğin daha yazılması gereklidir. $B(d_i^*)$, i. ortalama tahmininin yanını göstermek üzere

$$\sum_{i=1}^3 B(d_i^*) = 0 \quad (3.19)$$

eşitliği üçüncü eşitlik olarak alınıp; Eşitlik (26), (27) ve (28) matris formunda yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ B(d_1^*) & B(d_2^*) & B(d_3^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^* \\ \omega_2^* \\ \omega_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\rho^* \kappa \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Burada,

$$B(d_1^*) = B(\bar{y}) = 0$$

$$B(d_2^*) = B(\bar{y}_p) = \frac{N-1}{Nn} \bar{Y} [1 + (n-1)\rho_{xx}] C_x^2 \kappa \rho^*$$

$$B(d_3^*) = B \left[\bar{y}_{\text{sis}} \left(\frac{\bar{x}_{\text{sis}}}{\bar{X}} \right)^2 \right] = \frac{N-1}{Nn} \bar{Y} C_x^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] (2\kappa \rho^* + 1) \text{'dir.}$$

(3.20)'de verilen matris çözülürse;

$$\begin{bmatrix} \omega_1^* \\ \omega_2^* \\ \omega_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \kappa \rho^* (1 + \kappa \rho^*) \\ -\kappa \rho^* (2\kappa \rho^* + 1) \\ \kappa^2 \rho^{*2} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Bulunan değerler Eşitlik (3.15)'te verilen tahmin edicide ve Eşitlik (3.16)'da verilen varyansta yerine yazılırsa;

$$d_p = \left[1 + \kappa \rho^* (1 + \kappa \rho^*) \right] \bar{y}_{\text{sis}} - \kappa \rho^* (2\kappa \rho^* + 1) \bar{y}_{\text{sis}} \frac{\bar{x}_{\text{sis}}}{\bar{X}} + \kappa^2 \rho^{*2} \bar{y}_{\text{sis}} \left(\frac{\bar{x}_{\text{sis}}}{\bar{X}} \right)^2$$

olan minimum varyanslı ve yansız tahmin edici sınıfından bir tahmin edici elde edilmiş olur. Bu tahmin edicinin minimum varyansı ise

$$V(d_p)_{\text{MIN}} = \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] [\rho^{*2} S_y^2 (1 - \rho_{xy}^2)]$$

biçimindedir.

Bu tahmin edicinin varyansı ile sistematik örnekleme basit tahmin edicisinin varyansının karşılaştırılması aşağıdaki gibi yapılabilir.

$$V(d_p)_{\text{MIN}} < V(\bar{y}_{\text{sis}})$$

$$\frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] [\rho^{*2} S_y^2 (1 - \rho_{xy}^2)] < \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{yy}] S_y^2$$

$$\frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \frac{[1 + (n-1)\rho_{yy}]}{[1 + (n-1)\rho_{xx}]} S_y^2 (1 - \rho_{xy}^2) < \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{yy}] S_y^2$$

$$\frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{yy}] S_y^2 - \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{yy}] S_y^2 \rho_{xy}^2 < \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{yy}] S_y^2$$

$$\frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{yy}] S_y^2 \rho_{xy}^2 > 0$$

$$[1 + (n-1)\rho_{yy}] > 0$$

koşulu altında d_p tahmin edicisi sistematik örneklemenin basit ortalama tahmin edicisinden her zaman daha etkindir.

d_p tahmin edicisinin varyansı ile Shukla N. D. çarpımsal tahmin edicisinin hata kareler ortalamasının karşılaştırılması aşağıdaki gibi yapılabilir.

$$V(d_p)_{\text{MIN}} < \text{HKO}(\bar{y}_{\text{p sis}})$$

$$\frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \bar{Y}^2 [\rho^{*2} C_y^2 (1 - \rho_{xy}^2)] < \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \bar{Y}^2 [\rho^{*2} C_y^2 + C_x^2 (1 + 2\kappa\rho^*)]$$

$$-\rho^{*2} C_y^2 \rho_{xy}^2 < C_x^2 (1 + 2\kappa\rho^*)$$

$$C_x^2 + 2C_x^2 \kappa\rho^* + \rho^{*2} C_y^2 \rho_{xy}^2 > 0$$

$$1 + 2\kappa\rho^* + \rho^{*2} \kappa^2 > 0$$

$$(\kappa\rho^* + 1)^2 > 0$$

ifadesi her zaman doğru olduğu için, sadece $\kappa\rho^* = -1$ olması durumu dışında d_p tahmin edicisi Shukla N. D. 'nin çarpımsal tahmin edicisinden daha etkindir.

3.5. H.P. Singh, R.Tailor, N.K. Jatwa'nın (2011) Oransal Tahmin Edicisi

H.P. Singh, R.Tailor, N.K. Jatwa, Bahl ve Tuteja tarafından 1991'de basit rastgele örnekleme yöntemi için bulunan oransal tahmin edicisini sistematik örnekleme uyarlamışlardır. $\bar{y}_{\text{sis}}$, y'nin sistematik örneklemedeki ortalama tahmini, $\bar{x}_{\text{sis}}$ x'in sistematik örneklemedeki ortalama tahmini ve $\bar{X}$ kitle ortalaması olmak üzere, sistematik örnekleme için önerilen $\bar{y}_{\text{RE}}^*$ tahmin edicisi,

$$\bar{y}_{\text{RE}}^* = \bar{y}_{\text{sis}} \exp\left(\frac{\bar{X} - \bar{x}_{\text{sis}}}{\bar{X} + \bar{x}_{\text{sis}}}\right) \quad (3.21)$$

şeklinde verilmiştir. Bu tahmin edici için hata kareler ortalaması,

$$\text{HKO}(\bar{y}_{\text{RE}}^*) = \frac{1}{n} [1 + (n-1)\rho] \left(S_y^2 + \frac{1}{4} R^2 S_x^2 - R\rho_{xy} S_x S_y \right) \quad (3.22)$$

olarak bulunmuştur. Burada, $[1+(n-1)\rho_{xx}] = [1+(n-1)\rho_{yy}] = [1+(n-1)\rho]$ olduğu varsayılmıştır.

Eşitlik (3.21)'da verilen tahmin edicide Eşitlik (2.11) ve (2.12) yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\bar{y}_{RE}^* &= \bar{Y}(e_0 + 1) \exp\left(\frac{\bar{X} - \bar{X}(e_1 + 1)}{\bar{X} + \bar{X}(e_1 + 1)}\right) = \bar{Y}(e_0 + 1) \exp\left(\frac{-e_1}{e_1 + 2}\right) \\
&= \bar{Y}(e_0 + 1) \exp\left[\frac{-e_1}{2} \left(\frac{e_1}{2} + 1\right)^{-1}\right] \\
&= \bar{Y}(e_0 + 1) \left[1 - \frac{e_1}{2} \left(\frac{e_1}{2} + 1\right)^{-1} + \frac{1}{2} \frac{e_1^2}{4} \left(\frac{e_1}{2} + 1\right)^{-2} - \dots\right] \\
&\cong \bar{Y}(e_0 + 1) \left[1 - \frac{e_1}{2} \left(\frac{e_1}{2} + 1\right)^{-1} + \frac{1}{2} \frac{e_1^2}{4} \left(\frac{e_1}{2} + 1\right)^{-2}\right] \\
&\cong \bar{Y}(e_0 + 1) \left[1 - \frac{e_1}{2} \left(1 - \frac{e_1}{2}\right) + \frac{1}{2} \frac{e_1^2}{4} \left(1 - \frac{e_1}{2}\right)^2\right] \\
&= \bar{Y}(e_0 + 1) \left[1 - \frac{e_1}{2} \left(1 - \frac{e_1}{2}\right) + \frac{e_1^2}{8} \left(1 - e_1 + \frac{e_1^2}{2}\right)\right] \\
&= \bar{Y}(e_0 + 1) \left[1 - \frac{e_1}{2} + \frac{e_1^2}{4} + \frac{e_1^2}{8} - \frac{e_1^3}{8} + \frac{e_1^4}{32}\right] \\
&\cong (\bar{Y}e_0 + \bar{Y}) \left(1 - \frac{e_1}{2} + \frac{3e_1^2}{8}\right) \\
&= \bar{Y}e_0 - \frac{\bar{Y}e_0e_1}{2} + \frac{3\bar{Y}e_0e_1^2}{8} + \bar{Y} - \frac{\bar{Y}e_1}{2} + \frac{3\bar{Y}e_1^2}{8} \\
\bar{y}_{RE}^* &\cong \bar{Y} + \bar{Y} \left(e_0 - \frac{e_1}{2} - \frac{e_0e_1}{2} + \frac{3e_1^2}{8}\right) \tag{3.23}
\end{aligned}$$

olarak e'li terimler cinsinden elde edilmiş olur. Eşitlik (3.23)'ün her iki tarafından da $\bar{Y}$ çıkartılıp beklenen değer alınır tahmin edicinin yanı,

$$\begin{aligned}
E\left(\bar{y}_{RE}^* - \bar{Y}\right) &\cong E\left[\bar{Y}\left(e_0 - \frac{e_1}{2} - \frac{e_0 e_1}{2} + \frac{3e_1^2}{8}\right)\right] \\
&= \bar{Y}\left[E(e_0) - \frac{E(e_1)}{2} - \frac{E(e_0 e_1)}{2} + \frac{3E(e_1^2)}{8}\right]
\end{aligned}$$

Eşitlik (2.14), (2.16) e (2.18) yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
E\left(\bar{y}_{RE}^* - \bar{Y}\right) &= \bar{Y}\left\{-\frac{1}{2} \frac{N-1}{Nn} \rho_{xy} C_x C_y \sqrt{1+(n-1)\rho_{yy}} \sqrt{1+(n-1)\rho_{xx}} + \frac{3}{8} \frac{N-1}{Nn} C_x^2 [1+(n-1)\rho_{xx}]\right\} \\
&= \frac{N-1}{Nn} \bar{Y} \frac{C_x^2}{8} \left\{3[1+(n-1)\rho_{xx}] - 4\rho_{xy} \frac{C_y}{C_x} \sqrt{1+(n-1)\rho_{yy}} \sqrt{1+(n-1)\rho_{xx}}\right\} \\
&= \frac{N-1}{Nn} \bar{Y} \frac{C_x^2}{8} [1+(n-1)\rho_{xx}] \left\{3 - 4\kappa \frac{\sqrt{1+(n-1)\rho_{yy}}}{\sqrt{1+(n-1)\rho_{xx}}}\right\} \\
E\left(\bar{y}_{RE}^* - \bar{Y}\right) &= \frac{N-1}{Nn} \bar{Y} \frac{C_x^2}{8} [1+(n-1)\rho_{xx}] (3 - 4\kappa\rho^*)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Eşitlik (3.23)'ün her iki tarafından da $\bar{Y}$ çıkartılıp kare ve beklenen değer alınır tahmin edicinin hata kareler ortalaması,

$$\begin{aligned}
HKO\left(\bar{y}_{RE}^*\right) &= E\left(\bar{y}_{RE}^* - \bar{Y}\right)^2 \cong E\left[\bar{Y}\left(e_0 - \frac{e_1}{2} - \frac{e_0 e_1}{2} + \frac{3e_1^2}{8}\right)\right]^2 \\
&\cong \bar{Y}^2 \left[E(e_0^2) + \frac{1}{4} E(e_1^2) + \frac{1}{4} E(e_0^2 e_1^2) + \frac{9}{64} E(e_1^4) - E(e_0 e_1)\right]
\end{aligned}$$

Eşitlik (2.5), (2.16) ve (2.18) yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
HKO\left(\bar{y}_{RE}^*\right) &= \bar{Y}^2 \left\{\frac{N-1}{Nn} C_y^2 [1+(n-1)\rho_{yy}] - \frac{1}{4} \frac{N-1}{Nn} C_x^2 [1+(n-1)\rho_{xx}] - \frac{N-1}{Nn} \rho_{xy} C_x C_y \sqrt{1+(n-1)\rho_{yy}} \sqrt{1+(n-1)\rho_{xx}}\right\} \\
&= \frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 [1+(n-1)\rho_{xx}] \left\{C_y^2 \frac{[1+(n-1)\rho_{yy}]}{[1+(n-1)\rho_{xx}]} - \frac{1}{4} C_x^2 - \rho_{xy} C_x C_y \frac{\sqrt{1+(n-1)\rho_{yy}}}{\sqrt{1+(n-1)\rho_{xx}}}\right\}
\end{aligned}$$

(Burada, $\rho^* = \frac{\sqrt{1+(n-1)\rho_{yy}}}{\sqrt{1+(n-1)\rho_{xx}}}$ yazılırsa)

$$\begin{aligned}
&= \frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] \left(C_y^2 \rho^{*2} - \frac{1}{4} C_x^2 - \rho_{xy} C_x C_y \rho^* \right) \\
&= \frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] \left[C_y^2 \rho^{*2} + C_x^2 \left(\frac{1}{4} - \rho_{xy} \frac{C_y}{C_x} \rho^* \right) \right]
\end{aligned}$$

($\kappa = \rho_{xy} \frac{C_y}{C_x}$ olarak alınırsa)

$$HKO(\bar{y}_{RE}^*) = \frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] \left[C_y^2 \rho^{*2} + C_x^2 \left(\frac{1}{4} - \kappa \rho^* \right) \right] \quad (3.24)$$

Eşitlik (3.24)'te $N-1 \cong N$ ve yaklaştırmaları ile birlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$HKO(\bar{y}_{RE}^*) = \frac{1}{n} \left[S_y^2 [1 + (n-1)\rho_{yy}] + \frac{1}{4} C_x^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] \bar{Y}^2 - \rho_{xy} C_y C_x [1 + (n-1)\rho_{yy}] \bar{Y}^2 \right]$$

($[1 + (n-1)\rho_{xx}] = [1 + (n-1)\rho_{yy}] = [1 + (n-1)\rho]$ olarak alınırsa,)

$$= \frac{1}{n} [1 + (n-1)\rho] \left[S_y^2 + \frac{1}{4} \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} \bar{Y}^2 - \rho_{xy} \frac{S_x}{\bar{X}} \frac{S_y}{\bar{X}} \bar{Y}^2 \right]$$

$$HKO(\bar{y}_{RE}^*) = \frac{1}{n} [1 + (n-1)\rho] \left(S_y^2 + \frac{1}{4} S_x^2 R^2 - \rho_{xy} R S_x S_y \right)$$

hata kareler ortalaması terimi Eşitlik (3.22)'de verildiği gibi bulunmuş olur.

Bu tahmin edicinin (3.24)'te verilen hata kareler ortalaması ile sistematik örneklemenin basit tahmin edicisinin varyansının karşılaştırılması aşağıdaki gibi yapılabilir.

$$HKO(\bar{y}_{RE}^*) < V(\bar{y}_{SIS})$$

$$\frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] \left[C_y^2 \rho^{*2} + C_x^2 \left(\frac{1}{4} - \kappa \rho^* \right) \right] < \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{yy}] S_y^2$$

$$\frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] \frac{S_y^2}{\bar{Y}^2} \frac{[1 + (n-1)\rho_{yy}]}{[1 + (n-1)\rho_{xx}]} + \frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] C_x^2 \left(\frac{1}{4} - \kappa \rho^* \right) < \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{yy}] S_y^2$$

$$\frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] C_x^2 \left(\frac{1}{4} - \kappa \rho^* \right) < 0$$

$$\left(\frac{1}{4} - \kappa\rho^*\right) < 0 \rightarrow \frac{1}{4} < \kappa\rho^*$$

koşulu altında $\bar{y}_{RE}^*$ tahmin edicisi sistematik örneklemenin basit ortalama tahmin edicisinden daha etkindir.

$\bar{y}_{RE}^*$ tahmin edicisi ile Swain A. K. P.C. 'nin oransal tahmin edicisinin karşılaştırılması aşağıdaki gibi yapılabilir.

$$HKO(\bar{y}_{RE}^*) < V(\bar{y}_{rsis})$$

$$\frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] \left[C_y^2 \rho^{*2} + C_x^2 \left(\frac{1}{4} - \kappa\rho^* \right) \right] < \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \bar{Y}^2 [\rho^{*2} C_y^2 + C_x^2 (1 - 2\kappa\rho^*)]$$

$$\frac{1}{4} - \kappa\rho^* < 1 - 2\kappa\rho^* \rightarrow \kappa\rho^* < \frac{3}{4}$$

koşulu altında $\bar{y}_{RE}^*$ tahmin edicisi Swain A. K. P.C. 'nin oransal tahmin edicisinden daha etkindir.

3.6. H.P. Singh, R.Tailor, N.K. Jatwa'nın (2011) Çarpımsal Tahmin Edicisi

Bahl ve Tuteja tarafından 1991'de basit rastgele örnekleme yöntemi için bulunan çarpımsal tahmin ediciyi sistematik örnekleme uyarlamışlardır. Sistematik örnekleme için tahmin edici,

$$\bar{y}_{PE}^* = \bar{y}_{sis} \exp\left(\frac{\bar{x}_{sis} - \bar{X}}{\bar{X} + \bar{x}_{sis}}\right) \quad (3.25)$$

şeklinde verilmiştir. Bu tahmin edici için hata kareler ortalaması,

$$HKO(\bar{y}_{PE}^*) = \frac{1}{n} [1 + (n-1)\rho] \left(S_y^2 + \frac{1}{4} R^2 S_x^2 + R\rho_{xy} S_x S_y \right) \quad (3.26)$$

biçiminde bulunmuştur.

Eşitlik (3.25)'te verilen tahmin edicide Eşitlik (2.11) ve (2.12) yerlerine yazılıp düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
\bar{y}_{PE}^* &= \bar{Y}(e_0 + 1) \exp\left(\frac{\bar{X}(e_1 + 1) - \bar{X}}{\bar{X}(e_1 + 1) + \bar{X}}\right) = \bar{Y}(e_0 + 1) \exp\left(\frac{e_1}{e_1 + 2}\right) = \bar{Y}(e_0 + 1) \exp\left[\frac{e_1}{2} \frac{1}{\left(\frac{e_1}{2} + 1\right)}\right] \\
&= \bar{Y}(e_0 + 1) \exp\left[\frac{e_1}{2} \left(\frac{e_1}{2} + 1\right)^{-1}\right] \\
&= \bar{Y}(e_0 + 1) \left[1 + \frac{e_1}{2} \left(\frac{e_1}{2} + 1\right)^{-1} + \frac{e_1^2}{8} \left(\frac{e_1}{2} + 1\right)^{-2} + \dots\right] \\
&\cong \bar{Y}(e_0 + 1) \left[1 + \frac{e_1}{2} \left(1 - \frac{e_1}{2} + \dots\right) + \frac{e_1^2}{8} (1 - e_1 + \dots)\right] \\
&\cong \bar{Y}(e_0 + 1) \left[1 + \frac{e_1}{2} - \frac{1}{8} e_1^2 + \dots\right] \\
\bar{y}_{PE}^* &= \bar{Y} \left[1 + e_0 + \frac{e_1}{2} + \frac{e_0 e_1}{2} - \frac{1}{8} e_1^2 + \dots\right] \tag{3.27}
\end{aligned}$$

olarak e terimleri cinsinden elde edilmiş olur. Eşitlik (3.27)'de her iki taraftan $\bar{Y}$ çıkartılıp beklenen değer alınırsa tahmin edicinin yanı,

$$\begin{aligned}
\bar{y}_{PE}^* - \bar{Y} &\cong \bar{Y} \left[e_0 + \frac{e_1}{2} + \frac{e_0 e_1}{2} - \frac{1}{8} e_1^2 \right] \\
E(\bar{y}_{PE}^* - \bar{Y}) &\cong \bar{Y} \left[E(e_0) + \frac{1}{2} E(e_1) + \frac{1}{2} E(e_0 e_1) - \frac{1}{8} E(e_1^2) \right]
\end{aligned}$$

Bu ifadede Eşitlik (2.14), (2.16) ve (2.18)'de verilen fark terimleri yerlerine yazılırsa tahmin edicinin yanı,

$$\begin{aligned}
E(\bar{y}_{PE}^* - \bar{Y}) &= \bar{Y} \left\{ \frac{1}{2} \rho_{xy} \frac{N-1}{Nn} C_x C_y \sqrt{1 + (n-1)\rho_{yy}} \sqrt{1 + (n-1)\rho_{xx}} - \frac{1}{8} \frac{N-1}{Nn} C_x^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] \right\} \\
&= \frac{N-1}{Nn} \frac{\bar{Y}}{8} C_x^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] \left(4\rho_{xy} \frac{C_y}{C_x} \frac{\sqrt{1 + (n-1)\rho_{yy}}}{\sqrt{1 + (n-1)\rho_{xx}}} - 1 \right)
\end{aligned}$$

$$E\left(\bar{y}_{PE}^* - \bar{Y}\right) = \frac{N-1}{Nn} \frac{\bar{Y}}{8} C_x^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] (4\kappa\rho^* - 1)$$

olarak elde edilir. Eşitlik (3.27)'nin her iki tarafından $\bar{Y}$ çıkartılıp kare ve beklenen değer alınır tahmin edicinin hata kareler ortalaması,

$$E\left(\bar{y}_{PE}^* - \bar{Y}\right)^2 \cong \bar{Y}^2 E\left[e_0 + \frac{e_1}{2} + \frac{e_0 e_1}{2} - \frac{1}{8} e_1^2\right]^2 \cong \bar{Y}^2 \left[E(e_0^2) + \frac{1}{4} E(e_1^2) + E(e_0 e_1)\right]$$

Bu ifadede Eşitlik (2.15), (2.16) ve (2.18)'de verilen fark terimleri yerlerine yazılırsa tahmin edicinin hata kareler ortalaması,

$$\begin{aligned} E\left(\bar{y}_{PE}^* - \bar{Y}\right)^2 &= \bar{Y}^2 \left\{ \frac{N-1}{Nn} C_y^2 [1 + (n-1)\rho_{yy}] + \frac{1}{4} \frac{N-1}{Nn} C_x^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] \right. \\ &\quad \left. + \frac{N-1}{Nn} \rho_{xy} C_x C_y \sqrt{1 + (n-1)\rho_{yy}} \sqrt{1 + (n-1)\rho_{xx}} \right\} \\ &= \frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 \left[C_y^2 [1 + (n-1)\rho_{yy}] + \frac{1}{4} C_x^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] \right. \\ &\quad \left. + \rho_{xy} C_x C_y \sqrt{1 + (n-1)\rho_{yy}} \sqrt{1 + (n-1)\rho_{xx}} \right] \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$HKO\left(\bar{y}_{PE}^*\right) = \frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] \left[C_y^2 \rho^{*2} + C_x^2 \left(\frac{1}{4} + \kappa\rho^* \right) \right]$$

olarak elde edilir. Eşitlik (3.28)'de $N-1 \cong N$ ve $\rho_{yy} = \rho_{xx} = \rho$ yaklaştırması ile birlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$HKO\left(\bar{y}_{PE}^*\right) = \frac{1}{n} [1 + (n-1)\rho] \left[S_y^2 + \frac{1}{4} \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} \bar{Y}^2 + \rho_{xy} \frac{S_x}{\bar{X}} \frac{S_y}{\bar{X}} \bar{Y}^2 \right]$$

$$HKO\left(\bar{y}_{PE}^* - \bar{Y}\right)^2 \cong \frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 [1 + (n-1)\rho] \left(C_y^2 + \frac{1}{4} C_x^2 + \rho_{xy} \right)$$

böylece hata kareler ortalaması Eşitlik (3.26)'da verildiği gibi bulunmuş olur.

Bu tahmin edicinin varyansı ile sistematik örnekleme basit tahmin edicinin varyansının karşılaştırılması aşağıdaki gibi yapılabilir.

$$HKO(\bar{y}_{PE}^*) < V(\bar{y}_{sis})$$

$$\frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 [1+(n-1)\rho_{xx}] \left[C_y^2 \rho^{*2} + C_x^2 \left(\frac{1}{4} + \kappa \rho^* \right) \right] < \frac{N-1}{Nn} [1+(n-1)\rho_{yy}] S_Y^2$$

$$\frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 [1+(n-1)\rho_{xx}] \frac{S_y^2}{\bar{Y}^2} \frac{[1+(n-1)\rho_{yy}]}{[1+(n-1)\rho_{xx}]} + \frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 [1+(n-1)\rho_{xx}] C_x^2 \left(\frac{1}{4} + \kappa \rho^* \right) < \frac{N-1}{Nn} [1+(n-1)\rho_{yy}] S_Y^2$$

$$\frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 [1+(n-1)\rho_{xx}] C_x^2 \left(\frac{1}{4} + \kappa \rho^* \right) < 0$$

$$\left(\frac{1}{4} + \kappa \rho^* \right) < 0 \rightarrow \kappa \rho^* < -\frac{1}{4}$$

koşulu altında $\bar{y}_{PE}^*$ tahmin edicisi sistematik örneklemenin basit ortalama tahmin edicisinden daha etkindir.

$\bar{y}_{PE}^*$ tahmin edicisi ile sistematik örneklemedeki basit oransal tahmin edicisinin karşılaştırılması aşağıdaki gibi yapılabilir.

$$HKO(\bar{y}_{PE}^*) < V(\bar{y}_{p_{sis}})$$

$$\frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 [1+(n-1)\rho_{xx}] \left[C_y^2 \rho^{*2} + C_x^2 \left(\frac{1}{4} + \kappa \rho^* \right) \right] < \frac{N-1}{Nn} [1+(n-1)\rho_{xx}] \bar{Y}^2 \left[\rho^{*2} C_y^2 + C_x^2 (1+2\kappa \rho^*) \right]$$

$$\frac{1}{4} + \kappa \rho^* < 1+2\kappa \rho^* \rightarrow -\frac{3}{4} < \kappa \rho^*$$

koşulu altında $\bar{y}_{PE}^*$ tahmin edicisi sistematik örneklemenin basit tahmin edicisinden daha etkindir.

3.7. R. Singh ve Diğerlerinin (2012) t₄ Tahmin Edicisi

Rajesh Singh ve diğerleri 2012'de Bahl ve Tuteja'nın 1991 yılında basit rastgele örnekleme için önerdiği tahmin ediciyi, Bedi'nin 1996 yılında önerdiği dönüştürme işlemini kullanarak aşağıdaki gibi önermiştir.

$$t_4 = \left[k_1 \bar{y}_{sis} + k_2 (\bar{X} - \bar{x}_{sis}) \right] \exp \left(\frac{\bar{A} - \bar{a}^*}{\bar{A} + \bar{a}^*} \right) \quad (3.29)$$

Burada $\bar{a}^* = \bar{x}_{sis} + N\bar{X}$, $\bar{A} = \bar{X} + N\bar{X}$ ve k_i ($i=1,2$) sabitler olarak tanımlanmıştır.

Eşitlik (3.29)'da gerekli düzenlemeler yapıp Eşitlik (2.11) ve (2.12) yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} t_4 &= \left[k_1 \bar{y}_{sis} + k_2 (\bar{X} - \bar{x}_{sis}) \right] \exp \left(\frac{\bar{X} - \bar{x}_{sis}}{\bar{X} + \bar{x}_{sis} + 2N\bar{X}} \right) \\ &= \left[k_1 \bar{Y}(e_0 + 1) - k_2 \bar{X}e_1 \right] \exp \left(\frac{\bar{X}(1 - e_1 - 1)}{\bar{X}(1 + e_1 + 1) + 2N\bar{X}} \right) \\ &= \left[k_1 \bar{Y}(e_0 + 1) - k_2 \bar{X}e_1 \right] \exp \left(\frac{-e_1}{e_1 + 2(N+1)} \right) \\ &= \left[k_1 \bar{Y}(e_0 + 1) - k_2 \bar{X}e_1 \right] \exp \left(\frac{\frac{-e_1}{2(N+1)}}{\frac{e_1}{2(N+1)} + 1} \right) \\ &= \left[k_1 \bar{Y} + k_1 \bar{Y}e_0 - k_2 \bar{X}e_1 \right] \exp \left[\frac{-e_1}{2(N+1)} \left(\frac{e_1}{2(N+1)} + 1 \right)^{-1} \right] \\ &= \left[k_1 \bar{Y} + k_1 \bar{Y}e_0 - k_2 \bar{X}e_1 \right] \left[1 - \frac{e_1}{2(N+1)} \left(\frac{e_1}{2(N+1)} + 1 \right)^{-1} + \frac{e_1^2}{8(N+1)^2} \left(\frac{e_1}{2(N+1)} + 1 \right)^{-2} - \dots \right] \\ &\cong \left[k_1 \bar{Y} + k_1 \bar{Y}e_0 - k_2 \bar{X}e_1 \right] \left[1 - \frac{e_1}{2(N+1)} \left(1 - \frac{e_1}{2(N+1)} + \dots \right) + \frac{e_1^2}{8(N+1)^2} \left(1 - \frac{e_1}{2(N+1)} + \dots \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\cong \left[k_1 \bar{Y} + k_1 \bar{Y} e_0 - k_2 \bar{X} e_1 \right] \left[1 - \frac{e_1}{2(N+1)} \left(1 - \frac{e_1}{2(N+1)} \right) + \frac{e_1^2}{8(N+1)^2} \left(1 - \frac{e_1}{(N+1)} + \frac{e_1^2}{4(N+1)^2} \right) \right] \\
&\cong \left[k_1 \bar{Y} + k_1 \bar{Y} e_0 - k_2 \bar{X} e_1 \right] \left[1 - \frac{e_1}{2(N+1)} + \frac{e_1^2}{4(N+1)^2} + \frac{e_1^2}{8(N+1)^2} \right] \\
&= \left[k_1 \bar{Y} + k_1 \bar{Y} e_0 - k_2 \bar{X} e_1 \right] \left[1 - \frac{e_1}{2(N+1)} + \frac{3e_1^2}{8(N+1)^2} \right] \\
&\cong k_1 \bar{Y} - \frac{k_1 \bar{Y} e_1}{2(N+1)} + \frac{3k_1 \bar{Y} e_1^2}{8(N+1)^2} + k_1 \bar{Y} e_0 - \frac{k_1 \bar{Y} e_0 e_1}{2(N+1)} - k_2 \bar{X} e_1 + \frac{k_2 \bar{X} e_1^2}{2(N+1)} \\
t_4 &= \bar{Y} \left\{ k_1 + k_1 \left[e_0 - \frac{e_1}{2(N+1)} + \frac{3e_1^2}{8(N+1)^2} - \frac{e_0 e_1}{2(N+1)} \right] \right\} - k_2 \bar{X} \left[e_1 - \frac{e_1^2}{2(N+1)} \right] \quad (3.30)
\end{aligned}$$

olarak e terimleri cinsinden elde edilmiş olur. Eşitlik (3.30)'da her iki taraftan $\bar{Y}$ çıkartılıp beklenen değer alınırsa tahmin edicinin yanı,

$$\begin{aligned}
E(t_4 - \bar{Y}) &= E \left\{ \bar{Y} \left[(k_1 - 1) + k_1 \left(e_0 - \frac{e_1}{2(N+1)} - \frac{e_0 e_1}{2(N+1)} + \frac{3e_1^2}{8(N+1)^2} \right) \right] - k_2 \bar{X} \left(e_1 - \frac{e_1^2}{2(N+1)} \right) \right\} \\
&= \bar{Y}(k_1 - 1) + \bar{Y} k_1 \left[E(e_0) - \frac{E(e_1)}{2(N+1)} - \frac{E(e_0 e_1)}{2(N+1)} + \frac{3E(e_1^2)}{8(N+1)^2} \right] - k_2 \bar{X} \left[E(e_1) - \frac{E(e_1^2)}{2(N+1)} \right]
\end{aligned}$$

Eşitlik (2.14)'deki terimler yerlerine yazılırsa,

$$E(t_4 - \bar{Y}) = \bar{Y}(k_1 - 1) - \bar{Y} k_1 \frac{E(e_0 e_1)}{2(N+1)} + \bar{Y} k_1 \frac{3E(e_1^2)}{8(N+1)^2} + k_2 \bar{X} \frac{E(e_1^2)}{2(N+1)}$$

Eşitlik (2.15), (2.16) ve (2.18) yerlerine yazılırken

$$C_0^2 = [1 + (n-1)\rho_{yy}] C_y^2 \quad (3.31)$$

$$C_1^2 = [1 + (n-1)\rho_{xx}] C_x^2 \quad (3.32)$$

$$C_0 C_1 = [1 + (n-1)\rho_{xx}]^{1/2} [1 + (n-1)\rho_{yy}]^{1/2} \rho_{xy} C_x C_y \quad (3.33)$$

$$\text{ve } \theta = \frac{N-1}{Nn}$$

olarak tanımlandığında,

$$E(t_4 - \bar{Y}) = \bar{Y}(k_1 - 1) - \bar{Y}k_1 \frac{\theta C_0 C_1}{2(N+1)} + \bar{Y}k_1 \frac{3\theta C_1^2}{8(N+1)^2} + k_2 \bar{X} \frac{\theta C_1^2}{2(N+1)}$$

$$= \bar{Y} \left[(k_1 - 1) - k_1 \frac{\theta C_0 C_1}{2(N+1)} + k_1 \frac{3\theta C_1^2}{8(N+1)^2} \right] + k_2 \bar{X} \frac{\theta C_1^2}{2(N+1)}$$

$$E(t_4 - \bar{Y}) = \bar{Y} \left[(k_1 - 1) + k_1 \theta \left(\frac{3C_1^2}{8(N+1)^2} - \frac{C_0 C_1}{2(N+1)} \right) \right] + k_2 \bar{X} \frac{\theta C_1^2}{2(N+1)}$$

biçiminde bulunur.

Eşitlik (3.30)'un her iki tarafından $\bar{Y}$ çıkartılıp kare ve beklenen değer alınırsa tahminin hata kareler ortalaması,

$$E(t_4 - \bar{Y})^2 = E \left\{ \bar{Y} \left[(k_1 - 1) + k_1 \left(e_0 - \frac{e_1}{2(N+1)} - \frac{e_0 e_1}{2(N+1)} + \frac{3e_1^2}{8(N+1)^2} \right) \right] - k_2 \bar{X} \left(e_1 - \frac{e_1^2}{2(N+1)} \right) \right\}^2$$

$$= E \left[\bar{Y}(k_1 - 1) + \bar{Y}k_1 e_0 - \bar{Y}k_1 \frac{e_1}{2(N+1)} - \bar{Y}k_1 \frac{e_0 e_1}{2(N+1)} + \bar{Y}k_1 \frac{3e_1^2}{8(N+1)^2} - k_2 \bar{X} e_1 + k_2 \bar{X} \frac{e_1^2}{2(N+1)} \right]^2$$

$$= E \left[\bar{Y}^2 (k_1 - 1)^2 + \bar{Y}^2 k_1^2 e_0^2 + \bar{Y}k_1^2 \frac{e_1^2}{4(N+1)^2} + k_2^2 \bar{X}^2 e_1^2 - 2\bar{Y}^2 k_1 (k_1 - 1) \frac{e_0 e_1}{2(N+1)} \right.$$

$$+ 2\bar{Y}^2 k_1 (k_1 - 1) \frac{3e_1^2}{8(N+1)^2} + 2\bar{X}\bar{Y}k_2 (k_1 - 1) \frac{e_1^2}{2(N+1)} - 2\bar{Y}^2 k_1^2 \frac{e_0 e_1}{2(N+1)}$$

$$\left. - 2\bar{X}\bar{Y}k_1 k_2 e_0 e_1 + 2\bar{X}\bar{Y}k_1 k_2 \frac{e_1^2}{2(N+1)} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{Y}^2 (k_1 - 1)^2 + \bar{Y}^2 k_1^2 \theta C_0^2 + \bar{Y} k_1^2 \frac{\theta C_1^2}{4(N+1)^2} + k_2^2 \bar{X}^2 \theta C_1^2 - 2\bar{Y}^2 k_1^2 \frac{\theta C_0 C_1}{2(N+1)} + 2\bar{Y}^2 k_1 \frac{\theta C_0 C_1}{2(N+1)} \\
&+ 2\bar{Y}^2 k_1^2 \frac{3\theta C_1^2}{8(N+1)^2} - 2\bar{Y}^2 k_1 \frac{3\theta C_1^2}{8(N+1)^2} + 2\bar{X}\bar{Y} k_1 k_2 \frac{\theta C_1^2}{2(N+1)} - 2\bar{X}\bar{Y} k_2 \frac{\theta C_1^2}{2(N+1)} \\
&- 2\bar{Y}^2 k_1^2 \frac{\theta C_0 C_1}{2(N+1)} - 2\bar{X}\bar{Y} k_1 k_2 \theta C_0 C_1 + 2\bar{X}\bar{Y} k_1 k_2 \frac{\theta C_1^2}{2(N+1)} \\
&= \bar{Y}^2 \left[(k_1 - 1)^2 + k_1^2 \theta C_0^2 + k_1^2 \frac{\theta C_1^2}{4(N+1)^2} - 2k_1^2 \frac{\theta C_0 C_1}{2(N+1)} \right. \\
&+ 2k_1 \frac{\theta C_0 C_1}{2(N+1)} + 2k_1^2 \frac{3\theta C_1^2}{8(N+1)^2} - 2k_1 \frac{3\theta C_1^2}{8(N+1)^2} - 2k_1^2 \frac{\theta C_0 C_1}{2(N+1)} \left. \right] \\
&+ k_2^2 \bar{X}^2 \theta C_1^2 + \bar{X}\bar{Y} k_1 k_2 \frac{\theta C_1^2}{(N+1)} - \bar{X}\bar{Y} k_2 \frac{\theta C_1^2}{(N+1)} - 2\bar{X}\bar{Y} k_1 k_2 \theta C_0 C_1 + \bar{X}\bar{Y} k_1 k_2 \frac{\theta C_1^2}{(N+1)} \left. \right] \\
&= \bar{Y}^2 \left\{ (k_1 - 1)^2 + k_1^2 \theta \left[C_0^2 + \frac{C_1^2}{4(N+1)^2} - \frac{C_0 C_1}{(N+1)} + 2 \frac{3C_1^2}{8(N+1)^2} - \frac{C_0 C_1}{(N+1)} \right] \right. \\
&- 2k_1 \theta \left[\frac{3C_1^2}{8(N+1)^2} - \frac{C_0 C_1}{2(N+1)} \right] \left. \right\} + k_2^2 \bar{X}^2 \theta C_1^2 - \bar{X}\bar{Y} k_2 \frac{\theta C_1^2}{(N+1)} \\
&+ \bar{X}\bar{Y} k_1 k_2 \theta \left[\frac{C_1^2}{(N+1)} - 2C_0 C_1 + \frac{C_1^2}{(N+1)} \right] \left. \right\} \\
&\text{HKO}(t_4) = \bar{Y}^2 \left\{ (k_1 - 1)^2 + k_1^2 \theta \left[C_0^2 + \frac{C_1^2}{(N+1)^2} - \frac{2C_0 C_1}{(N+1)} \right] - 2k_1 \theta \left[\frac{3C_1^2}{8(N+1)^2} - \frac{C_0 C_1}{2(N+1)} \right] \right\} \quad (3.34) \\
&+ k_2^2 \bar{X}^2 \theta C_1^2 - \bar{X}\bar{Y} k_2 \frac{\theta C_1^2}{(N+1)} + 2\bar{X}\bar{Y} k_1 k_2 \theta \left[\frac{C_1^2}{(N+1)} - C_0 C_1 \right]
\end{aligned}$$

biçiminde bulunmuş olur. Burada,

$$A_1 = \theta \left[C_0^2 + \frac{C_1^2}{(N+1)^2} - \frac{2C_0 C_1}{(N+1)} \right]$$

$$A_2 = \theta \left[\frac{3C_1^2}{8(N+1)^2} - \frac{C_0 C_1}{2(N+1)} \right]$$

$$A_3 = \bar{X}^2 \theta C_1^2$$

$$A_4 = \bar{X}\bar{Y} \frac{\theta C_1^2}{(N+1)}$$

$$A_5 = \bar{X}\bar{Y}\theta \left[\frac{C_1^2}{(N+1)} - C_0 C_1 \right]$$

olarak yazılırsa hata kareler ortalaması,

$$HKO(t_4) = \bar{Y}^2 \left[(k_1 - 1)^2 + k_1^2 A_1 - 2k_1 A_2 \right] + k_2^2 A_3 - k_2 A_4 + 2k_1 k_2 A_5 \quad (3.35)$$

olur.

Eşitlik (3.35)'te verilen hata kareler ortalamasının k_1 ve k_2 'ye göre türevleri alınıp sıfıra eşitlenir ve ortak çözümü yapılırsa optimum k_1 ve k_2 değerleri,

$$k_1 = \frac{A_4 A_5 - 2\bar{Y}^2 (1 + A_2) A_3}{2A_5^2 - 2A_3 \bar{Y}^2 (1 + A_1)}$$

$$k_2 = \frac{\bar{Y}^2 [2A_5 (1 + A_2) - A_4 (1 + A_1)]}{2A_5^2 - 2A_3 \bar{Y}^2 (1 + A_1)}$$

olarak bulunur [19].

3.8. H. P. Singh ve diğerlerinin (2012) Üstel Tahmin Edicisi

H.P. Singh ve diğerleri tahmin edici sınıfını,

$$d = m_1 \bar{y}_{\text{sis}} \left[\frac{\bar{X}^*}{\alpha \bar{x}_{\text{sis}} + (1 - \alpha) \bar{X}^*} \right]^g + m_2 \bar{y}_{\text{sis}} \exp \left[\frac{\delta (\bar{X}^* - \bar{x}_{\text{sis}})}{\bar{X}^* + \bar{x}_{\text{sis}}} \right] \quad (3.36)$$

şeklinde tanımlamıştır. Burada $\bar{X}^* = a\bar{X} + b$ ve $\bar{x}_{\text{sis}}^* = a\bar{x}_{\text{sis}} + b$ olarak verilmiştir. Bu tahmin edicinin yanı ve hata kareler ortalaması fark yöntemi kullanarak elde edebilmek için, Eşitlik (2.11) ve (2.12), Eşitlik (3.36)'da yerine yazılacak olursa,

$$d = m_1 \bar{Y}(1+e_0) \left[\frac{a\bar{X}+b}{\alpha[a\bar{X}(1+e_1)+b] + (1-\alpha)a\bar{X}+b} \right]^g$$

biçiminde elde edilir. Parantez içlerindeki terimler dağılıtırsa;

$$d = m_1 \bar{Y}(1+e_0) \left(\frac{a\bar{X}+b}{\alpha a\bar{X} + \alpha a\bar{X}e_1 + \alpha b + a\bar{X} + b - \alpha a\bar{X} - \alpha b} \right)^g$$

$$+ m_2 \bar{Y}(1+e_0) \exp \left[\frac{\delta(a\bar{X}+b - a\bar{X} - a\bar{X}e_1 - b)}{a\bar{X}+b + a\bar{X}(1+e_1) + b} \right]$$

Buradan gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$d = m_1 \bar{Y}(1+e_0) \left(\frac{a\bar{X}+b}{\alpha a\bar{X}e_1 + a\bar{X}+b} \right)^g + m_2 \bar{Y}(1+e_0) \exp \left[\frac{\delta(-a\bar{X}e_1)}{2(a\bar{X}+b) + a\bar{X}e_1} \right]$$

olarak elde edilir. Burada pay ve paydada yer alan tüm terimler $a\bar{X}+b$ 'ye bölünürse,

$$d = m_1 \bar{Y}(1+e_0) \left(\frac{1}{\frac{\alpha a\bar{X}e_1}{a\bar{X}+b} + 1} \right)^g + m_2 \bar{Y}(1+e_0) \exp \left[\frac{-\delta \left(\frac{a\bar{X}e_1}{a\bar{X}+b} \right)}{2 + \frac{a\bar{X}e_1}{a\bar{X}+b}} \right]$$

ve

$$v = \frac{a\bar{X}}{a\bar{X}+b}$$

şeklinde tanımlansın,

$$d = m_1 \bar{Y}(1+e_0) \left(\frac{1}{\alpha v e_1 + 1} \right)^g + m_2 \bar{Y}(1+e_0) \exp \left[\frac{-\delta v e_1}{2 + v e_1} \right]$$

olur. Üstel ifadeler yeniden düzenlenirse;

$$d = m_1 \bar{Y}(1+e_0) (\alpha v e_1 + 1)^{-g} + m_2 \bar{Y}(1+e_0) \exp \left[\frac{-\delta v e_1}{2} \left(1 + \frac{v e_1}{2} \right)^{-1} \right]$$

olur. $(\alpha v e_1 + 1)^{-g}$ terimi $\left((\alpha v e_1 + 1)^{-1}\right)^g$ şeklinde yazılarak iç kısım Mac Laurin serisine açılıp iki ve üzeri terimleri ihmal edilirse, $\left((\alpha v e_1 + 1)^{-1}\right)^g \cong (1 - \alpha v e_1)^g$ olarak yazılır. Bu terim binom açılımıyla yazılırsa,

$$(1 - \alpha v e_1)^g = \binom{g}{0} 1^g (-\alpha v e_1)^0 + \binom{g}{1} 1^{g-1} (-\alpha v e_1)^1 + \binom{g}{2} 1^{g-2} (-\alpha v e_1)^2 + \dots + \binom{g}{g} 1^0 (-\alpha v e_1)^g$$

İkinci dereceden sonraki terimler ihmal edilirse,

$$(1 - \alpha v e_1)^g \cong 1 - g(\alpha v e_1) + \frac{g(g-1)}{2} (\alpha v e_1)^2$$

olarak elde edilir. Bu durumda,

$$d \cong m_1 \bar{Y}(1 + e_0) \left[1 - g(\alpha v e_1) + \frac{g(g-1)}{2} (\alpha v e_1)^2 \right] + m_2 \bar{Y}(1 + e_0) \exp \left[\frac{-\delta v e_1}{2} \left(1 + \frac{v e_1}{2} \right)^{-1} \right]$$

$\left(1 + \frac{v e_1}{2} \right)^{-1}$ ifadesi Mac Laurin serisine açılıp ikinci dereceye kadar olan terimleri alınır,

$$d \cong m_1 \bar{Y}(1 + e_0) \left[1 - g(\alpha v e_1) + \frac{g(g-1)}{2} (\alpha v e_1)^2 \right] + m_2 \bar{Y}(1 + e_0) \exp \left[\frac{-\delta v e_1}{2} \left(1 - \frac{v e_1}{2} + \frac{v^2 e_1^2}{4} \right) \right]$$

olur. Bu formülde yer alan üstel ifade içindeki terimler düzenlenip seriye açılırsa,

$$\begin{aligned} \exp \left[\frac{-\delta v e_1}{2} \left(1 - \frac{v e_1}{2} + \frac{v^2 e_1^2}{4} \right) \right] &\cong \exp \left[\frac{-\delta v e_1}{2} + \frac{\delta v^2 e_1^2}{4} \right] \\ &= 1 - \frac{\left(\frac{\delta v e_1}{2} - \frac{\delta v^2 e_1^2}{4} \right)^1}{1!} + \frac{\left(\frac{-\delta v e_1}{2} + \frac{\delta v^2 e_1^2}{4} \right)^2}{2!} - \dots \end{aligned}$$

olarak elde edilir. İkinci dereceden sonraki ifadeler ihmal edilerek tekrar bir yaklaştırma yapılırsa,

$$\exp \left[\frac{-\delta v e_1}{2} \left(1 - \frac{v e_1}{2} + \frac{v^2 e_1^2}{4} \right) \right] \cong 1 - \frac{\delta v e_1}{2} + \frac{\delta v^2 e_1^2}{4} + \frac{\delta^2 v^2 e_1^2}{8} = 1 - \frac{\delta v e_1}{2} + v^2 e_1^2 \left(\frac{\delta^2 + 2\delta}{8} \right) \text{ olur.}$$

Böylece,

$$d \cong m_1 \bar{Y}(1+e_0) \left[1 - g(\alpha v e_1) + \frac{g(g-1)}{2} (\alpha v e_1)^2 \right] + m_2 \bar{Y}(1+e_0) \left[1 - \frac{\delta v e_1}{2} + v^2 e_1^2 \left(\frac{\delta^2 + 2\delta}{8} \right) \right]$$

olarak bulunur. Burada gerekli düzenlemeler yapıp, ikiden yüksek dereceli terimler ihmal edilirse,

$$d \cong \bar{Y} \left\{ m_1 \left[1 + e_0 - g(\alpha v e_1) + \frac{g(g-1)}{2} \alpha^2 v^2 e_1^2 - g \alpha v e_0 e_1 \right] \right.$$

$$\left. + m_2 \left[1 - \frac{\delta v e_1}{2} + v^2 e_1^2 \frac{\delta(\delta+2)}{8} + e_0 - \frac{\delta v e_0 e_1}{2} \right] \right\}$$

ve

$$d \cong \bar{Y} \left\{ m_1 \left[1 + e_0 - g \alpha v (e_1 + e_0 e_1) + \frac{g(g-1)}{2} \alpha^2 v^2 e_1^2 \right] \right.$$

$$\left. + m_2 \left[1 + e_0 - \frac{\delta v}{2} (e_1 + e_0 e_1) + v^2 e_1^2 \frac{\delta(\delta+2)}{8} \right] \right\} \quad (3.37)$$

olarak elde edilmiş olur.

Tahmin edicinin yanını bulabilmek için Eşitlik (3.37)'nin her iki tarafından da $\bar{Y}$ çıkartılıp beklenen değer alınır,

$$\begin{aligned} E(d - \bar{Y}) &= E \left\{ \bar{Y} \left[m_1 \left[1 + e_0 - g \alpha v (e_1 + e_0 e_1) + \frac{g(g-1)}{2} \alpha^2 v^2 e_1^2 \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + m_2 \left[1 + e_0 - \frac{\delta v}{2} (e_1 + e_0 e_1) + v^2 e_1^2 \frac{\delta(\delta+2)}{8} \right] - 1 \right] \right\} \\ &= \bar{Y} \left\{ m_1 \left[1 + E(e_0) - g \alpha v E(e_1) - g \alpha v E(e_0 e_1) + \frac{g(g-1)}{2} \alpha^2 v^2 E(e_1^2) \right] \right. \\ &\quad \left. + m_2 \left[1 + E(e_0) - \frac{\delta v}{2} E(e_1) - \frac{\delta v}{2} E(e_0 e_1) + v^2 \frac{\delta(\delta+2)}{8} E(e_1^2) \right] - 1 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{Y} \left\{ m_1 \left[1 - g \alpha v \lambda \theta_x \rho^* \kappa C_x^2 + \frac{g(g-1)}{2} \alpha^2 v^2 \lambda \theta_x C_x^2 \right] \right. \\
&\quad \left. + m_2 \left[1 - \frac{\delta v}{2} \lambda \theta_x \rho^* \kappa C_x^2 + v^2 \frac{\delta(\delta+2)}{8} \lambda \theta_x C_x^2 \right] - 1 \right\} \\
E(d - \bar{Y}) &= -\bar{Y} \left\{ 1 - m_1 \left[1 + \lambda \theta_x C_x^2 \left(\frac{g(g-1)}{2} \alpha^2 v^2 - g \alpha v \rho^* \kappa \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - m_2 \left[1 + \lambda \theta_x C_x^2 \left(\frac{\delta(\delta+2)}{8} v^2 - \frac{\delta v}{2} \rho^* \kappa \right) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

olarak elde edilir. Burada,

$$B = \left[1 + \lambda \theta_x C_x^2 \left(\frac{g(g-1)}{2} \alpha^2 v^2 - g \alpha v \rho^* \kappa \right) \right] \tag{3.39}$$

$$E = \left[1 + \lambda \theta_x C_x^2 \left(\frac{\delta(\delta+2)}{8} v^2 - \frac{\delta v}{2} \rho^* \kappa \right) \right] \tag{3.40}$$

biçiminde tanımlanırsa Eşitlik (3.38)'de verilen yan ifadesi,

$$E(d - \bar{Y}) = -\bar{Y} (1 - Bm_1 - Em_2) \tag{3.41}$$

olarak bulunur.

Tahmin edicinin hata kareler ortalamasını bulabilmek için, Eşitlik (3.37)'nin iki tarafından da $\bar{Y}$ çıkartılıp kare alındıktan sonra beklenen değere geçilirse,

$$\begin{aligned}
E(d - \bar{Y})^2 &\cong \bar{Y}^2 E \left\{ m_1 \left[1 + e_0 - g \alpha v (e_1 + e_0 e_1) + \frac{g(g-1)}{2} \alpha^2 v^2 e_1^2 \right] \right. \\
&\quad \left. + m_2 \left[1 + e_0 - \frac{\delta v}{2} (e_1 + e_0 e_1) + v^2 e_1^2 \frac{\delta(\delta+2)}{8} \right] - 1 \right\}^2
\end{aligned} \tag{3.42}$$

olarak elde edilir. Eşitlik (3.42)'de gerekli analitik işlemler yapılacak olursa,

$$\begin{aligned}
E(d - \bar{Y})^2 &= \bar{Y}^2 E \left\{ m_1^2 \left[1 + e_0 - g \alpha v (e_1 + e_0 e_1) + \frac{g(g-1)}{2} \alpha^2 v^2 e_1^2 \right]^2 \right. \\
&+ m_2^2 \left[1 + e_0 - \frac{\delta v}{2} (e_1 + e_0 e_1) + v^2 e_1^2 \frac{\delta(\delta+2)}{8} \right]^2 + 1 \\
&- 2m_1 \left[1 + e_0 - g \alpha v (e_1 + e_0 e_1) + \frac{g(g-1)}{2} \alpha^2 v^2 e_1^2 \right] - 2m_2 \left[1 + e_0 - \frac{\delta v}{2} (e_1 + e_0 e_1) + v^2 e_1^2 \frac{\delta(\delta+2)}{8} \right] \\
&+ 2m_1 m_2 \left[1 + e_0 - g \alpha v (e_1 + e_0 e_1) + \frac{g(g-1)}{2} \alpha^2 v^2 e_1^2 \right] \left[1 + e_0 - \frac{\delta v}{2} (e_1 + e_0 e_1) + v^2 e_1^2 \frac{\delta(\delta+2)}{8} \right] \Big\} \\
&= \bar{Y}^2 E \left\{ m_1^2 \left[1 + e_0^2 + g^2 \alpha^2 v^2 e_1^2 + 2e_0 - 2g v \alpha e_1 - 4g v \alpha e_0 e_1 + g(g-1) \alpha^2 v^2 e_1^2 \right] \right. \\
&+ m_2^2 \left[1 + e_0^2 + \frac{\delta^2 v^2}{4} e_1^2 + 2e_0 - \delta v e_1 - 2\delta v e_0 e_1 + v^2 e_1^2 \frac{\delta(\delta+2)}{4} \right] + 1 \\
&- 2m_1 \left[1 + e_0 - g \alpha v (e_1 + e_0 e_1) + \frac{g(g-1)}{2} \alpha^2 v^2 e_1^2 \right] - 2m_2 \left[1 + e_0 - \frac{\delta v}{2} (e_1 + e_0 e_1) + v^2 e_1^2 \frac{\delta(\delta+2)}{8} \right] \\
&+ 2m_1 m_2 \left[1 + e_0 - \frac{\delta v}{2} e_1 - \frac{\delta v}{2} e_0 + v^2 e_1^2 \frac{\delta(\delta+2)}{8} + e_0 + e_0^2 - \frac{\delta v}{2} e_0 e_1 - g \alpha v e_1 - 2g \alpha v e_0 e_1 \right. \\
&\left. + \frac{g v^2 \alpha \delta}{2} e_1^2 + \frac{g(g-1)}{2} \alpha^2 v^2 e_1^2 \right] \Big\} \\
&= \bar{Y}^2 E \left\{ 1 + m_1^2 \left[1 + 2e_0 - 2g v \alpha e_1 + e_0^2 - 4g v \alpha e_0 e_1 + e_1^2 \alpha^2 v^2 g (2g-1) \right] \right. \\
&+ m_2^2 \left[1 + 2e_0 - \delta v e_1 - 2\delta v e_0 e_1 + e_0^2 + \frac{v^2 \delta(\delta+1)}{2} e_1^2 \right] \\
&+ 2m_1 m_2 \left[1 + 2e_0 - v e_1 \left(\frac{\delta}{2} - g \alpha \right) - v e_0 e_1 (\delta + 2g \alpha) + e_0^2 + \frac{v^2 e_1^2}{8} \left[(\delta + 2g \alpha)^2 + 2(\delta - 2g \alpha^2) \right] \right] \\
&- 2m_1 \left[1 + e_0 - g \alpha v (e_1 + e_0 e_1) + \frac{g(g-1)}{2} \alpha^2 v^2 e_1^2 \right] \\
&- 2m_2 \left[1 + e_0 - \frac{\delta v}{2} (e_1 + e_0 e_1) + v^2 e_1^2 \frac{\delta(\delta+2)}{8} \right] \Big\}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada,

$$A^* = \left[(\delta + 2g\alpha)^2 + 2(\delta - 2g\alpha^2) \right]$$

biçiminde tanımlanıp beklenen değer ifadesi parantez içine dağıtılsa,

$$\begin{aligned}
&= \bar{Y}^2 \left\{ 1 + m_1^2 \left[1 + 2E(e_0) - 2g\upsilon\alpha E(e_1) + E(e_0^2) - 4g\upsilon\alpha E(e_0e_1) + \alpha^2\upsilon^2g(2g-1)E(e_1^2) \right] \right. \\
&+ m_2^2 \left[1 + 2E(e_0) - \delta\upsilon E(e_1) - 2\delta\upsilon E(e_0e_1) + E(e_0^2) + \frac{\upsilon^2\delta(\delta+1)}{2} E(e_1^2) \right] \\
&+ 2m_1m_2 \left[1 + 2E(e_0) - \upsilon \left(\frac{\delta}{2} - g\alpha \right) E(e_1) - \upsilon(\delta + 2g\alpha) E(e_0e_1) + E(e_0^2) + \frac{\upsilon^2A^*}{8} E(e_1^2) \right] \\
&- 2m_1 \left[1 + E(e_0) - g\alpha\upsilon E(e_1) - g\alpha\upsilon E(e_0e_1) + \frac{g(g-1)}{2} \alpha^2\upsilon^2 E(e_1^2) \right] \\
&\left. - 2m_2 \left[1 + E(e_0) - \frac{\delta\upsilon}{2} E(e_1) - \frac{\delta\upsilon}{2} E(e_0e_1) + \upsilon^2 \frac{\delta(\delta+2)}{8} E(e_1^2) \right] \right\}
\end{aligned}$$

Eşitlik (2.4)'ten $E(e_0) = E(e_1) = 0$ olduğu için;

$$\begin{aligned}
&= \bar{Y}^2 \left\{ 1 + m_1^2 \left[1 + E(e_0^2) - 4g\upsilon\alpha E(e_0e_1) + \alpha^2\upsilon^2g(2g-1)E(e_1^2) \right] \right. \\
&+ m_2^2 \left[1 + E(e_0^2) - 2\delta\upsilon E(e_0e_1) + \frac{\upsilon^2\delta(\delta+1)}{2} E(e_1^2) \right] \\
&+ 2m_1m_2 \left[1 - \upsilon(\delta + 2g\alpha) E(e_0e_1) + E(e_0^2) + \frac{\upsilon^2A^*}{8} E(e_1^2) \right] \\
&\left. - 2m_1 \left[1 - g\alpha\upsilon E(e_0e_1) + \frac{g(g-1)}{2} \alpha^2\upsilon^2 E(e_1^2) \right] - 2m_2 \left[1 - \frac{\delta\upsilon}{2} E(e_0e_1) + \upsilon^2 \frac{\delta(\delta+2)}{8} E(e_1^2) \right] \right\}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

$$\theta_x = [1 + (n-1)\rho_{xx}] \text{ ve } \theta_y = [1 + (n-1)\rho_{yy}]$$

olmak üzere Eşitlik (2.15), (2.16) ve (2.18)'deki beklenen değerler yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
&= \bar{Y}^2 \left\{ 1 + m_1^2 \left[1 + \lambda\theta_y C_y^2 - 4g\upsilon\alpha\lambda\theta_x\rho^* \kappa C_x^2 + \alpha^2\upsilon^2g(2g-1)\lambda\theta_x C_x^2 \right] \right. \\
&+ m_2^2 \left[1 + \lambda\theta_y C_y^2 - 2\delta\upsilon\lambda\theta_x\rho^* \kappa C_x^2 + \frac{\upsilon^2\delta(\delta+1)}{2} \lambda\theta_x C_x^2 \right] \\
&\left. + 2m_1m_2 \left[1 + \lambda\theta_y C_y^2 - \upsilon(\delta + 2g\alpha)\lambda\theta_x\rho^* \kappa C_x^2 + \frac{\upsilon^2A^*}{8} \lambda\theta_x C_x^2 \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2m_1 \left[1 - g\alpha v \lambda \theta_x \rho^* \kappa C_x^2 + \frac{g(g-1)}{2} \alpha^2 v^2 \lambda \theta_x C_x^2 \right] \\
& -2m_2 \left[1 - \frac{\delta v}{2} \lambda \theta_x \rho^* \kappa C_x^2 + v^2 \frac{\delta(\delta+2)}{8} \lambda \theta_x C_x^2 \right] \Big\} \\
\text{HKO (d)} &= \bar{Y}^2 \left\{ 1 + m_1^2 \left[1 + \lambda \left[\theta_y C_y^2 + \theta_x C_x^2 \left(\alpha^2 v^2 g(2g-1) - 4g v \alpha \rho^* \kappa \right) \right] \right] \right. \\
& + m_2^2 \left[1 + \lambda \left[\theta_y C_y^2 + \theta_x C_x^2 \left(\frac{v^2 \delta(\delta+1)}{2} - 2\delta v \rho^* \kappa \right) \right] \right] \\
& + 2m_1 m_2 \left[1 + \lambda \left[\theta_y C_y^2 + \theta_x C_x^2 \left(\frac{v^2 A^*}{8} - v(\delta + 2g\alpha) \rho^* \kappa \right) \right] \right] \\
& \left. - 2m_1 \left[1 + \lambda \theta_x C_x^2 \left(\frac{g(g-1)}{2} \alpha^2 v^2 - g\alpha v \rho^* \kappa \right) \right] - 2m_2 \left[1 + \lambda \theta_x C_x^2 \left(v^2 \frac{\delta(\delta+2)}{8} - \frac{\delta v}{2} \rho^* \kappa \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

Yukarıdaki hata kareler ortalaması ifadesini daha kısa biçimde ifade edebilmek için

$$A = \left[1 + \lambda \left[\theta_y C_y^2 + \theta_x C_x^2 \left(\alpha^2 v^2 g(2g-1) - 4g v \alpha \rho^* \kappa \right) \right] \right] \quad (3.43)$$

$$C = \left[1 + \lambda \left[\theta_y C_y^2 + \theta_x C_x^2 \left(\frac{v^2 \delta(\delta+1)}{2} - 2\delta v \rho^* \kappa \right) \right] \right] \quad (3.44)$$

$$D = \left[1 + \lambda \left[\theta_y C_y^2 + \theta_x C_x^2 \left(\frac{v^2 A^*}{8} - v(\delta + 2g\alpha) \rho^* \kappa \right) \right] \right] \quad (3.45)$$

olarak tanımlansın. Eşitlik (3.40) ve (3.41) ile (3.43), (3.44) ve (3.45) , (3.42)' de bulunan hata kareler ortalamasında yerlerine yazılırsa,

$$\text{HKO(d)} = \bar{Y}^2 \left(1 + A m_1^2 + C m_2^2 + 2D m_1 m_2 - 2B m_1 - 2E m_2 \right) \quad (3.46)$$

şeklinde elde edilmiş olur.

Eşitlik (3.46)'nın m_1 ve m_2 'ye göre türevleri alınıp sıfıra eşitlenirse,

$$\frac{\partial \text{HKO(d)}}{\partial m_1} = 0 \rightarrow \bar{Y}^2 (2A m_1 + 2D m_2 - 2B) = 0$$

ve

$$\frac{\partial \text{HKO}(d)}{\partial m_2} = 0 \rightarrow \bar{Y}^2 (2Cm_2 + 2Dm_1 - 2E) = 0$$

biçimindeki iki bilinmeyenli iki denklem elde edilir. Bu iki denklemin ortak çözümünden optimal m_1 ve m_2 ,

$$m_{1\text{OPT}} = \frac{BC - DE}{AC - D^2} \quad (3.47)$$

ve

$$m_{2\text{OPT}} = \frac{EA - DB}{AC - D^2} \quad (3.48)$$

olarak bulunur. Eşitlik (3.47) ve (3.48)'de elde edilen optimal değerler, Eşitlik (3.41) 'de verilen yan ve Eşitlik (3.46) 'da verilen hata kareler ortalaması terimlerine yerlerine yazılırsa,

$$B(d)_{\text{MIN}} = -\bar{Y} \left(\frac{B^2C - 2BDE + AE^2}{AC - D^2} \right)$$

$$\text{HKO}(d)_{\text{MIN}} = \bar{Y}^2 \left(1 - \frac{B^2C - 2BDE + AE^2}{AC - D^2} \right)$$

olarak elde edilir.

d tahmininin özel bir durumu olarak d^* tahmin edicisinde $m_1 + m_2 = 1$ olarak alınır,

$$d^* = m_1 \bar{y}_{\text{sis}} \left[\frac{\bar{X}^*}{\alpha \bar{x}_{\text{sis}} + (1 - \alpha) \bar{X}^*} \right]^g + (1 - m_1) \bar{y}_{\text{sis}} \exp \left[\frac{\delta (\bar{X}^* - \bar{x}_{\text{sis}})}{\bar{X}^* + \bar{x}_{\text{sis}}} \right]$$

olur. Bu tahmin edici için yan ve hata kareler ortalaması,

$$B(d^*) = -\bar{y}_{\text{sis}} [1 - E - m_1 (B - E)]$$

ve

$$\text{HKO}(d^*) = \bar{Y}^2 [1 + C - 2E - m_1^2 (A + C - 2D) - 2m_1 (C - D + B - E)]$$

olarak elde edilir. Burada hata kareler ortalamasını minimum yapan optimal m_1 değeri,

$$m_1 = m_{1OPT}^* = \frac{C - D + B - E}{A + C - 2D}$$

şeklindedir. Optimal m_1 değeri yan ve hata kareler ortalamasında yerine koyulursa,

$$B_0(d^*) = -\bar{y}_{sis} [1 - E - m_1(B - E)]$$

$$HKO(d^*)_{MIN} = \bar{Y}^2 \left[1 + C - 2E - \frac{(C - D + B - E)^2}{(A + C - 2D)} \right]$$

biçiminde bulunur.

3.9. R. Singh ve Diğerlerinin (2012) Genelleştirilmiş Oransal Tahmin Edici

R.Singh ve diğerleri Gupta ve Shabbir'in 2008 yılında önerdiği oransal tahmin edici ailesinden yola çıkarak aşağıdaki tahmin edici ailesini önermişlerdir;

$$t_p^* = \left[w_1 \bar{y}_{sis} + w_2 (\bar{X} - \bar{x}_{sis}) \right] \left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}_{sis}} \right) \quad (3.49)$$

Bu tahmin edicinin yanı ve hata kareler ortalaması fark yöntemi kullanarak elde edebilmek için, Eşitlik (2.11) ve (2.12), Eşitlik (3.4)'da yerine yazılacak olursa,

$$\begin{aligned} t_p^* &= \left[w_1 \bar{Y}(e_0 + 1) - w_2 \bar{X}e_1 \right] (1 - e_1 + e_1^2 - \dots) \\ &\equiv \left[w_1 \bar{Y}(e_0 + 1) - w_2 \bar{X}e_1 - w_1 \bar{Y}(e_0 e_1 + e_1) + w_2 \bar{X}e_1^2 + w_1 \bar{Y}e_1^2 \right] \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$= w_1 \bar{Y} + w_1 \bar{Y}e_0 - w_2 \bar{X}e_1 - w_1 \bar{Y}e_0 e_1 - w_1 \bar{Y}e_1 + w_2 \bar{X}e_1^2 + w_1 \bar{Y}e_1^2 \quad (3.51)$$

olarak yazılabilir. Tahmin edicinin yanını bulabilmek için Eşitlik (3.51)'in her iki tarafından da $\bar{Y}$ çıkartılıp beklenen değer alınır,

$$E(t_p^* - \bar{Y}) = E \left[(w_1 - 1) \bar{Y} + w_1 \bar{Y}e_0 - w_2 \bar{X}e_1 - w_1 \bar{Y}e_0 e_1 - w_1 \bar{Y}e_1 + w_2 \bar{X}e_1^2 + w_1 \bar{Y}e_1^2 \right]$$

şeklinde yazılabilir. Beklenen değer ifadesi parantez içlerine dağıtıldığında, Eşitlik (2.14)'ten dolayı,

$$E(t_p^* - \bar{Y}) = (w_1 - 1)\bar{Y} - w_1 \bar{Y}E(e_0 e_1) + w_2 \bar{X}E(e_1^2) + w_1 \bar{Y}E(e_1^2)$$

olur. Eşitlik (2.15), (2.16) ve (2.18) yerlerine yazılırken, Eşitlik (3.31), (3.32) ve (3.33)'teki tanımlamalar yapılır ve $\theta = \frac{N-1}{Nn}$ olarak yazılırsa yan ifadesi,

$$E(t_p^* - \bar{Y}) = (w_1 - 1)\bar{Y} - w_1 \bar{Y}\theta C_0 C_1 + w_2 \bar{X}\theta C_1^2 + w_1 \bar{Y}\theta C_1^2$$

şeklini alır. Gerekli düzenlemeler yapıldığında yan,

$$E(t_p^* - \bar{Y}) = \bar{Y}[(w_1 - 1) - w_1 \theta C_0 C_1] + \theta C_1^2 (w_2 \bar{X} + w_1 \bar{Y})$$

olarak bulunur. Tahminin hata kareler ortalamasını bulabilmek için, Eşitlik (3.50)'nin iki tarafından da $\bar{Y}$ çıkartılıp kare alındıktan sonra beklenen değere geçilirse,

$$\begin{aligned} E(t_p^* - \bar{Y})^2 &= E\left[w_1 \bar{Y}(e_0 + 1) - w_2 \bar{X}e_1 - w_1 \bar{Y}(e_0 e_1 + e_1) + w_2 \bar{X}e_1^2 + w_1 \bar{Y}e_1^2 - \bar{Y}\right]^2 \\ &= E\left[\bar{Y}^2 + w_1^2 \bar{Y}^2 (1 + 2e_0 - 2e_1 + e_0^2 + 3e_1^2 - 4e_0 e_1) + w_2^2 \bar{X}^2 e_1^2 \right. \\ &\quad \left. - 2w_1 w_2 \bar{X}\bar{Y}(e_0 e_1 + e_1 - 2e_1^2) - w_1 \bar{Y}(1 + e_0 - e_1 - e_0 e_1 + e_1^2) + 2w_2 \bar{X}\bar{Y}(e_1 - e_1^2)\right] \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Beklenen değer ifadesi parantez içlerine dağıtıldıktan sonra, Eşitlik (2.14), (2.15), (2.16) ve (2.18) yerlerine yazılırken, Eşitlik (3.31), (3.32) ve (3.33)'teki tanımlamalar yapılır ve $\theta = \frac{N-1}{Nn}$ olarak yazılırsa hata kareler ortalaması,

$$\begin{aligned} E(t_p^* - \bar{Y})^2 &= \bar{Y}^2 + w_1^2 \bar{Y}^2 [1 + \theta(C_0^2 + 3C_1^2 - 4C_0 C_1)] + w_2^2 \bar{X}^2 \theta C_1^2 \\ &\quad - 2w_1 w_2 \bar{X}\bar{Y}(\theta C_0 C_1 - 2\theta C_1^2) - w_1 \bar{Y}(1 - \theta C_0 C_1 + \theta C_1^2) - 2w_2 \bar{X}\bar{Y}\theta C_1^2 \end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Burada,

$$A_1 = [1 + \theta(C_0^2 + 3C_1^2 - 4C_0 C_1)]$$

$$A_2 = \theta C_1^2$$

$$A_3 = (\theta C_0 C_1 - 2\theta C_1^2)$$

$$A_4 = (1 - \theta C_0 C_1 + \theta C_1^2)$$

$$A_5 = \theta C_1^2$$

olarak alınırsa hata kareler ortalaması,

$$\text{HKO}(t_p^*) = \bar{Y}^2 + w_1^2 \bar{Y}^2 A_1 + w_2^2 \bar{X}^2 A_2 - 2w_1 w_2 \bar{X} \bar{Y} A_3 - w_1 \bar{Y} A_4 - 2w_2 \bar{X} \bar{Y} A_5 \quad (3.52)$$

şeklinde yazılabilir. Eşitlik (3.52)'in w_1 ve w_2 'ye göre türevleri alınıp sıfıra eşitlenirse,

$$\frac{\partial \text{HKO}(t_p^*)}{\partial w_1} = 0 \rightarrow w_1 \bar{Y}^2 A_1 - w_2 \bar{Y} \bar{X} A_3 - \bar{Y}^2 A_4 = 0$$

ve

$$\frac{\partial \text{HKO}(t_p^*)}{\partial w_2} = 0 \rightarrow w_2 \bar{X}^2 A_2 - w_1 \bar{Y} \bar{X} A_3 - 2\bar{Y} \bar{X} A_5 = 0$$

biçimindeki iki bilinmeyenli iki denklem elde edilir. Bu iki denklemin ortak çözümünden optimal w_1 ve w_2 ,

$$w_{1\text{OPT}} = \frac{A_2 A_4 + A_3 A_5}{A_1 A_2 - A_3^2} \quad (3.53)$$

ve

$$w_{2\text{OPT}} = \frac{\bar{Y}(A_1 A_5 + A_3 A_4)}{\bar{X}(A_1 A_2 - A_3^2)} \quad (3.54)$$

olarak bulunur. Eşitlik (3.53) ve (3.54)'de elde edilen optimal değerler, Eşitlik (3.52) 'de verilen hata kareler ortalamasında yerlerine yazılırsa,

$$\text{HKO}(t_p^*)_{\text{MIN}} = \bar{Y}^2 \left[1 - \frac{(A_1 A_4^2 + 2A_3 A_4 A_5 + A_1 A_5^2)}{A_1 A_2 - A_3^2} \right]$$

elde edilir.

3.10. R. Tailor, Narenda K. ve diğerlerinin (2013) Oransal-Çarpımsal Tahmin Edicisi

R. Tailor ve diğerleri Singh'ın 1967'de önerdiği tahmin ediciden yola çıkarak sistematik örnekleme için ,

$$\bar{Y}_{RP} = \bar{y}_{SIS} \left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}_{SIS}} \right) \left(\frac{\bar{z}_{SIS}}{\bar{Z}} \right) \quad (3.55)$$

oransal-çarpımsal tahmini önermişlerdir. Eşitlik (2.11), (2.12), ve (2.13), Eşitlik (3.55)'te yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{RP} &= \bar{Y}(1+e_0)(1+e_1)^{-1}(1+e_2) \\ \bar{Y}_{RP} &= \bar{Y}(1+e_0)(1-e_1+e_1^2-\dots)(1+e_2) \\ \bar{Y}_{RP} &\cong \bar{Y}(1+e_0)(1-e_1+e_1^2)(1+e_2) \\ \bar{Y}_{RP} &= \bar{Y}(1-e_1+e_1^2+e_0-e_0e_1)(1+e_2) \\ \bar{Y}_{RP} &= \bar{Y}(1+e_2-e_1-e_1e_2+e_1^2+e_0-e_0e_1+e_0e_2) \end{aligned} \quad (3.56)$$

olarak elde edilir. Tahmin edicinin yanını bulabilmek için Eşitlik (3.56)'nın her iki tarafından da $\bar{Y}$ çıkartılıp beklenen değer alınır,

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{RP} - \bar{Y} &= \bar{Y}(e_2 - e_1 - e_1e_2 + e_1^2 + e_0 - e_0e_1 + e_0e_2) \\ E(\bar{Y}_{RP} - \bar{Y}) &= \bar{Y}[E(e_2) - E(e_1) - E(e_1e_2) + E(e_1^2) + E(e_0) - E(e_0e_1) + E(e_0e_2)] \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Beklenen değer ifadesi parantez içlerine dağıtıldığında, Eşitlik (2.14)'ten dolayı,

$$E(\bar{Y}_{RP} - \bar{Y}) = \bar{Y}[-E(e_1e_2) + E(e_1^2) - E(e_0e_1) + E(e_0e_2)]$$

olur. Eşitlik (2.15), (2.16), (2.17) ve (2.18) yerlerine yazılırken,

$$\begin{aligned}
\rho_x^* &= [1 + (n-1)\rho_{xx}] \\
\rho_y^* &= [1 + (n-1)\rho_{yy}] \\
\rho_z^* &= [1 + (n-1)\rho_{zz}]
\end{aligned} \tag{3.57}$$

tanımlamaları yapılır ve Eşitlik (2.15), (2.16), (2.17), (2.18), (2.19) ve (2.20)'deki ifadeler,

$$\theta = \frac{N-1}{Nn} \text{ olmak üzere,}$$

$$\begin{aligned}
E(e_0^2) &= \theta C_y^2 \rho_y^* \\
E(e_1^2) &= \theta C_x^2 \rho_x^* \\
E(e_2^2) &= \theta C_z^2 \rho_z^* \\
E(e_0 e_1) &= \theta k C_x^2 \sqrt{\rho_y^* \rho_x^*}, \quad k = \rho_{xy} \left(\frac{C_y}{C_x} \right) \\
E(e_0 e_2) &= \theta k^* C_z^2 \sqrt{\rho_y^* \rho_z^*}, \quad k^* = \rho_{yz} \left(\frac{C_y}{C_z} \right) \\
E(e_1 e_2) &= \theta k^{**} C_z^2 \sqrt{\rho_z^* \rho_x^*}, \quad k^{**} = \rho_{xz} \left(\frac{C_x}{C_z} \right)
\end{aligned} \tag{3.58}$$

biçiminde yazılırsa yan ifadesi,

$$E(\bar{Y}_{RP} - \bar{Y}) = \bar{Y} \left[-\theta k^{**} C_z^2 \sqrt{\rho_z^* \rho_x^*} + \theta C_x^2 \rho_x^* - \theta k C_x^2 \sqrt{\rho_y^* \rho_x^*} + \theta k^* C_z^2 \sqrt{\rho_y^* \rho_z^*} \right]$$

şeklini alır. Gerekli düzenlemeler yapıldığında yan,

$$E(\bar{Y}_{RP} - \bar{Y}) = \frac{N-1}{Nn} \bar{Y} \left[C_x^2 \rho_x^* \left(1 - k \sqrt{\frac{\rho_y^*}{\rho_x^*}} \right) + C_z^2 \sqrt{\rho_z^*} \left(k^* \sqrt{\rho_y^*} - k^{**} \sqrt{\rho_x^*} \right) \right]$$

Burada $\rho^{**} = \frac{\rho_y^*}{\rho_x^*}$ olmak üzere,

$$E(\bar{Y}_{RP} - \bar{Y}) = \frac{N-1}{Nn} \bar{Y} \left[C_x^2 \rho_x^* \left(1 - k \sqrt{\rho^{**}} \right) + C_z^2 \sqrt{\rho_z^*} \left(k^* \sqrt{\rho_y^*} - k^{**} \sqrt{\rho_x^*} \right) \right]$$

biçiminde bulunur.

Tahmin edicinin hata kareler ortalamasını bulabilmek için, Eşitlik (3.56)'nın iki tarafından da $\bar{Y}$ çıkartılıp kare alındıktan sonra beklenen değere geçilirse,

$$E\left(\bar{Y}_{RP} - \bar{Y}\right)^2 = \bar{Y}^2 \left[E(e_0^2) + E(e_1^2) + E(e_2^2) - 2E(e_0 e_1) + 2E(e_0 e_2) - 2E(e_1 e_2) \right]$$

şeklinde yazılabilir.

Beklenen değer ifadesi parantez içlerine dağıtıldıktan sonra, Eşitlik (2.15), (2.16), (2.17), (2.18), (2.19) ve (2.20) yerlerine yazılırken, Eşitlik (3.57) ve (3.58)'deki tanımlamalar yapılırsa,

$$E\left(\bar{Y}_{RP} - \bar{Y}\right)^2 = \bar{Y}^2 \left[\theta C_y^2 \rho_y^* + \theta C_x^2 \rho_x^* + \theta C_z^2 \rho_z^* - 2\theta k C_x^2 \sqrt{\rho_y^* \rho_x^*} + 2\theta k^* C_z^2 \sqrt{\rho_y^* \rho_z^*} - 2\theta k^{**} C_z^2 \sqrt{\rho_z^* \rho_x^*} \right]$$

olarak yazılabilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa hata kareler ortalaması,

$$E\left(\bar{Y}_{RP} - \bar{Y}\right)^2 = \frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 \left[C_y^2 \rho_y^* + C_x^2 \rho_x^* \left(1 - 2k \sqrt{\rho^{**}}\right) + C_z^2 \rho_z^* \left(1 - 2k^{**} \sqrt{\rho_1^{**}}\right) + 2k^* C_z^2 \sqrt{\rho_y^* \rho_z^*} \right],$$

$$\rho_1^{**} = \frac{\rho_x^*}{\rho_z^*}$$

biçiminde elde edilmiş olur.

Bu tahmin edicinin hata kareler ortalaması ile sistematik örnekleme basit tahmin edicisinin varyansının karşılaştırılması aşağıdaki gibi yapılabilir.

$$HKO(\bar{Y}_{RP}) < V(\bar{Y}_{SIS})$$

$$\frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 \left[C_y^2 \rho_y^* + C_x^2 \rho_x^* \left(1 - 2k \sqrt{\rho^{**}}\right) + C_z^2 \rho_z^* \left(1 - 2k^{**} \sqrt{\rho_1^{**}}\right) + 2k^* C_z^2 \sqrt{\rho_y^* \rho_z^*} \right] < \frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 \rho_y^* C_y^2$$

$$C_x^2 \rho_x^* \left(1 - 2k \sqrt{\rho^{**}}\right) + C_z^2 \rho_z^* \left(1 - 2k^{**} \sqrt{\rho_1^{**}}\right) + 2k^* C_z^2 \sqrt{\rho_y^* \rho_z^*} < 0$$

ifadesinin sağlandığı durumda $\bar{Y}_{RP}$ tahmini sistematik örneklemenin basit ortalama tahmin edicisinden daha etkindir.

$\bar{Y}_{RP}$ tahmin edicisinin hata kareler ortalaması ile Swain A. K. P. C. basit oransal tahmin edicisinin hata kareler ortalamasının karşılaştırılması aşağıdaki gibi yapılabilir.

$$HKO(\bar{Y}_{RP}) < HKO(\bar{y}_{r_{SIS}})$$

$$\frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 \left[C_y^2 \rho_y^* + C_x^2 \rho_x^* (1 - 2k \sqrt{\rho^{**}}) + C_z^2 \rho_z^* (1 - 2k^{**} \sqrt{\rho_1^{**}}) + 2k^* C_z^2 \sqrt{\rho_y^* \rho_z^*} \right] \\ < \frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 \left[\rho_y^* C_y^2 + \rho_x^* C_x^2 (1 - 2k \sqrt{\rho^{**}}) \right]$$

$$C_z^2 \rho_z^* (1 - 2k^{**} \sqrt{\rho_1^{**}}) + 2k^* C_z^2 \sqrt{\rho_y^* \rho_z^*} < 0$$

$$C_z^2 \rho_z^* - 2C_z^2 \rho_z^* k^{**} \sqrt{\rho_1^{**}} + 2k^* C_z^2 \sqrt{\rho_y^* \rho_z^*} < 0$$

$$\frac{1}{2} < k^{**} \sqrt{\rho_1^{**}} - k^* \sqrt{\frac{\rho_y^*}{\rho_z^*}}$$

ifadesinin sağlandığı durumda $\bar{Y}_{RP}$ tahmin edicisi, Swain A. K. P. C.'nin oransal tahmin edicisinden daha etkindir.

$\bar{Y}_{RP}$ tahmin edicisinin hata kareler ortalaması ile Shukla N. D. 'nin çarpımsal tahmin edicisinin hata kareler ortalamasının karşılaştırılması aşağıdaki gibi yapılabilir.

$$HKO(\bar{Y}_{RP}) < HKO(\bar{y}_{p_{sis}})$$

$$\frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 \left[C_y^2 \rho_y^* + C_x^2 \rho_x^* (1 - 2k \sqrt{\rho^{**}}) + C_z^2 \rho_z^* (1 - 2k^{**} \sqrt{\rho_1^{**}}) + 2k^* C_z^2 \sqrt{\rho_y^* \rho_z^*} \right] \\ < \frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 \left[\rho_y^* C_y^2 + \rho_z^* C_z^2 (1 + 2k^* \sqrt{\rho_2^{**}}) \right]$$

$$C_x^2 \rho_x^* (1 - 2k \sqrt{\rho^{**}}) + C_z^2 \rho_z^* (1 - 2k^{**} \sqrt{\rho_1^{**}}) + 2k^* C_z^2 \sqrt{\rho_y^* \rho_z^*} < C_z^2 \rho_z^* (1 + 2k^* \sqrt{\rho_2^{**}})$$

$$C_x^2 \rho_x^* (1 - 2k \sqrt{\rho^{**}}) + C_z^2 \rho_z^* (1 - 2k^{**} \sqrt{\rho_1^{**}}) - C_z^2 \rho_z^* (1 + 2k^* \sqrt{\rho_2^{**}}) + 2k^* C_z^2 \sqrt{\rho_y^* \rho_z^*} < 0$$

$$C_x^2 \rho_x^* - 2C_x^2 \rho_x^* k \sqrt{\rho^{**}} - 2C_z^2 \rho_z^* k^{**} \sqrt{\rho_1^{**}} - 2C_z^2 \rho_z^* k^* \sqrt{\rho_2^{**}} + 2k^* C_z^2 \sqrt{\rho_y^* \rho_z^*} < 0$$

$$C_x^2 \rho_x^* k \sqrt{\rho^{**}} + C_z^2 \rho_z^* k^{**} \sqrt{\rho_1^{**}} + C_z^2 \rho_z^* k^* \sqrt{\rho_2^{**}} - k^* C_z^2 \sqrt{\rho_y^* \rho_z^*} < \frac{1}{2} C_x^2 \rho_x^*$$

$$k \sqrt{\rho^{**}} + \frac{C_z^2 \rho_z^*}{C_x^2 \rho_x^*} k^{**} \sqrt{\rho_1^{**}} + \frac{C_z^2 \rho_z^*}{C_x^2 \rho_x^*} k^* \sqrt{\rho_2^{**}} - k^* \frac{C_z^2}{C_x^2 \rho_x^*} \sqrt{\rho_y^* \rho_z^*} < \frac{1}{2} \rightarrow k \sqrt{\rho^{**}} - k_1^* \sqrt{\frac{\rho_z^*}{\rho_x^*}} < \frac{1}{2}$$

ifadesinin sağlandığı durumda $\bar{Y}_{RP}$ tahmin edicisi, Shukla'nın çarpımsal tahmin edicisinden daha etkindir.

$\bar{Y}_{RP}$ tahmin edicisinin hata kareler ortalaması ile Bölüm (3.5)'te verilen H.P. Singh, R.Tailor, N.K. Jatwa (2011) oransal tahmin edicisinin hata kareler ortalamasının karşılaştırılması aşağıdaki gibi yapılabilir.

$$HKO(\bar{Y}_{RP}) < HKO(\bar{Y}_{RE}^*)$$

$$\begin{aligned} & \frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 \left[C_y^2 \rho_y^* + C_x^2 \rho_x^* (1 - 2k \sqrt{\rho^{**}}) + C_z^2 \rho_z^* (1 - 2k^{**} \sqrt{\rho_1^{**}}) + 2k^* C_z^2 \sqrt{\rho_y^* \rho_z^*} \right] \\ & < \frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 \left[\rho_y^* C_y^2 + \rho_x^* \frac{C_x^2}{4} (1 - 4k^* \sqrt{\rho^{**}}) \right] \end{aligned}$$

$$C_x^2 \rho_x^* - 2C_x^2 \rho_x^* k \sqrt{\rho^{**}} + C_z^2 \rho_z^* (1 - 2k^{**} \sqrt{\rho_1^{**}}) + 2k^* C_z^2 \sqrt{\rho_y^* \rho_z^*} < \rho_x^* \frac{C_x^2}{4} - \rho_x^* C_x^2 k^* \sqrt{\rho^{**}}$$

$$C_x^2 \rho_x^* \left(\frac{3}{4} - k \sqrt{\rho^{**}} \right) + C_z^2 \rho_z^* (1 - 2k^{**} \sqrt{\rho_1^{**}}) + 2k^* C_z^2 \sqrt{\rho_y^* \rho_z^*} < 0$$

ifadesinin sağlandığı durumda $\bar{Y}_{RP}$ tahmin edicisi H.P. Singh, R.Tailor, N.K. Jatwa (2011) oransal tahmin edicisinden daha etkindir.

$\bar{Y}_{RP}$ tahmin edicisinin hata kareler ortalaması ile (3.6)'da verilen H.P. Singh, R.Tailor, N.K. Jatwa (2011) çarpımsal tahmin edicisinin hata kareler ortalamasının karşılaştırılması aşağıdaki gibi yapılabilir.

$$HKO(\bar{Y}_{RP}) < HKO(\bar{Y}_{PE}^*)$$

$$\begin{aligned} & \frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 \left[C_y^2 \rho_y^* + C_x^2 \rho_x^* (1 - 2k \sqrt{\rho^{**}}) + C_z^2 \rho_z^* (1 - 2k^{**} \sqrt{\rho_1^{**}}) + 2k^* C_z^2 \sqrt{\rho_y^* \rho_z^*} \right] \\ & < \frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 \left[\rho_y^* C_y^2 + \rho_z^* \frac{C_z^2}{4} (1 + 4k^* \sqrt{\rho_2^{**}}) \right] \end{aligned}$$

$$C_x^2 \rho_x^* (1 - 2k \sqrt{\rho^{**}}) + C_z^2 \rho_z^* (1 - 2k^{**} \sqrt{\rho_1^{**}}) + 2k^* C_z^2 \sqrt{\rho_y^* \rho_z^*} < \rho_z^* C_z^2 \left(\frac{1}{4} + k^* \sqrt{\rho_2^{**}} \right)$$

$$C_x^2 \rho_x^* \left(1 - 2k \sqrt{\rho^{**}}\right) + C_z^2 \rho_z^* \left(1 - 2k^{**} \sqrt{\rho_1^{**}}\right) - C_z^2 \rho_z^* \left(\frac{1}{4} + k^* \sqrt{\rho_2^{**}}\right) + 2k^* C_z^2 \sqrt{\rho_y^* \rho_z^*} < 0$$

$$C_z^2 \rho_z^* \left(\frac{3}{4} + k \sqrt{\rho_2^{**}}\right) + C_x^2 \rho_x^* \left(1 - 2k^{**} \sqrt{\rho^{**}}\right) + 2k_1^* \sqrt{\frac{\rho_z^*}{\rho_x^*}} < 0$$

İfadesinin sağlandığı durumda $\bar{Y}_{RP}$ tahmin edicisi H.P. Singh, R.Tailor, N.K. Jatwa (2011) çarpımsal tahmin edicisinden daha etkindir.



4. ÖNERİLEN TAHMİN EDİCİLER

4.1. Önerilen Üstel Tahmin Edici

Grover, L. K., & Kaur, P. (2014) tahmin edicisinden yola çıkılarak ve R.Singh (2012)'ın Bölüm (3.7)'de önerdiği,

$$t_4 = \left[k_1 \bar{y}_{sis} + k_2 (\bar{X} - \bar{x}_{sis}) \right] \exp \left(\frac{\bar{A} - \bar{a}^*}{\bar{A} + \bar{a}^*} \right)$$

tahmin edicisine benzer olarak, sistematik örnekleme için önerilen tahmin edici,

$\eta, \lambda = C_X, \beta_2(x), \rho_{XY}$, $\eta \neq \lambda$ olmak üzere,

$$t_{1p} = \left[w_1 \bar{y}_{sis} + w_2 (\bar{X} - \bar{x}_{sis}) \right] \exp \left(\frac{\eta (\bar{X} - \bar{x}_{sis})}{\eta (\bar{X} + \bar{x}_{sis}) + 2\lambda} \right) \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Tahmin edicinin yan ve hata kareler ortalamasını formüle edebilmek için Eşitlik (4.1)'de, Eşitlik (2.11) ve (2.12) yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} t_{1p} &= \left[w_1 \bar{Y}(e_0 + 1) - w_2 \bar{X}e_1 \right] \exp \left(\frac{-\bar{X}e_1}{\eta (2\bar{X} + \bar{X}e_1) + 2\lambda} \right) \\ &= \left[w_1 \bar{Y}(e_0 + 1) - w_2 \bar{X}e_1 \right] \exp \left(\frac{-\bar{X}\eta e_1}{\bar{X}\eta e_1 + 2(\eta \bar{X} + \lambda)} \right) \\ &= \left[w_1 \bar{Y}(e_0 + 1) - w_2 \bar{X}e_1 \right] \exp \left(\frac{-\bar{X}\eta e_1 / 2(\eta \bar{X} + \lambda)}{\left[\bar{X}\eta e_1 + 2(\eta \bar{X} + \lambda) \right] / 2(\eta \bar{X} + \lambda)} \right) \end{aligned}$$

(Burada $\gamma = \frac{\eta \bar{X}}{2(\eta \bar{X} + \lambda)}$ olarak yazılırsa)

$$= \left[w_1 \bar{Y}(e_0 + 1) - w_2 \bar{X}e_1 \right] \exp \left(\frac{-\gamma e_1}{\gamma e_1 + 1} \right)$$

$$t_{1p} = \left[w_1 \bar{Y}(e_0 + 1) - w_2 \bar{X}e_1 \right] \exp(-\gamma e_1 (1 + \gamma e_1)^{-1})$$

olur. Tahminin içindeki üstel ifade Taylor serisine açılıp düzenlenirse,

$$\begin{aligned} t_{1p} &= \left[w_1 \bar{Y}(e_0 + 1) - w_2 \bar{X}e_1 \right] \left(1 - \gamma e_1 + \frac{3}{2} \gamma^2 e_1^2 + \dots \right) \\ &= \bar{Y} \left[w_1 + w_1 e_0 - w_1 \gamma (e_1 + e_0 e_1) + \frac{3}{2} w_1 \gamma^2 e_1^2 \right] + w_2 \bar{X} (-e_1 + \gamma e_1^2) \end{aligned} \quad (4.2)$$

olarak elde edilmiş olur.

Yanın bulunması için Eşitlik (4.2)'nin iki tarafından da $\bar{Y}$ çıkartılıp beklenen değer alınır,

$$E(t_{1p} - \bar{Y}) = \bar{Y} E \left[(w_1 - 1) + w_1 e_0 - w_1 \gamma (e_1 + e_0 e_1) + \frac{3}{2} w_1 \gamma^2 e_1^2 \right] + w_2 \bar{X} E(-e_1 + \gamma e_1^2)$$

olur. Beklenen değer parantez içerisine dağıtılsa,

$$E(t_{1p} - \bar{Y}) = \bar{Y} \left[(w_1 - 1) + w_1 E(e_0) - w_1 \gamma E(e_1 + e_0 e_1) + \frac{3}{2} w_1 \gamma^2 E(e_1^2) \right] + w_2 \bar{X} E(-e_1 + \gamma e_1^2)$$

olarak yazılabilir. Eşitlik (2.14)'den dolayı,

$$E(t_{1p} - \bar{Y}) = \bar{Y} \left[(w_1 - 1) - w_1 \gamma E(e_0 e_1) + \frac{3}{2} w_1 \gamma^2 E(e_1^2) \right] + w_2 \gamma \bar{X} E(e_1^2)$$

olacaktır. Eşitlik (2.16) ve (2.18) yerlerine yazılıp düzenlenirse yan,

$$E(t_{1p} - \bar{Y}) = \bar{Y} \left[(w_1 - 1) - w_1 \gamma \theta C_0 C_1 + \frac{3}{2} w_1 \gamma^2 \theta C_1^2 \right] + w_2 \bar{X} \gamma \theta C_1^2$$

$$E(t_{1p} - \bar{Y}) = \bar{Y} \left[(w_1 - 1) - w_1 \gamma \theta \left(\frac{3}{2} \gamma C_1^2 - C_0 C_1 \right) \right] + w_2 \bar{X} \gamma \theta C_1^2$$

şeklinde elde edilmiş olur.

Hata kareler ortalamasının bulunabilmesi için, Eşitlik (4.2)'nin iki tarafından da $\bar{Y}$ çıkartılıp karesi alındıktan sonra beklenen değere geçilecek olursa,

$$E(t_{1p} - \bar{Y})^2 = E \left\{ \bar{Y} \left[(w_1 - 1) + w_1 e_0 - w_1 \gamma (e_1 + e_0 e_1) + \frac{3}{2} w_1 \gamma^2 e_1^2 \right] + w_2 \bar{X} (-e_1 + \gamma e_1^2) \right\}^2$$

elde edilmiş olur. Burada karesel ifade açıldıktan sonra beklenen değer parantez içine dağıtılır ve Eşitlik (2.14), (2.15), (2.16) ve (2.18) yerlerine yazılırken Eşitlik (3.31), (3.32) ve (3.33)' de verilen dönüştürmeler uygulanırsa hata kareler ortalaması,

$$\begin{aligned} HKO(t_{1p}) &= \bar{Y}^2 + w_1^2 \bar{Y}^2 [1 + \theta C_0^2 + 4\gamma^2 \theta C_1^2 - 4\gamma \theta C_0 C_1] + w_1 \bar{Y}^2 [2\gamma \theta C_0 C_1 - 3\gamma^2 \theta C_1^2 - 2] \\ &+ w_2 \bar{X}^2 \theta C_1^2 - 2w_2 \gamma \bar{X} \bar{Y} \theta C_1^2 + 2w_1 w_2 \bar{X} \bar{Y} \theta (2\gamma C_1^2 - C_0 C_1) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada,

$$A = \bar{Y}^2 [1 + \theta C_0^2 + 4\gamma^2 \theta C_1^2 - 4\gamma \theta C_0 C_1]$$

$$B = \bar{Y}^2 [2\gamma \theta C_0 C_1 - 3\gamma^2 \theta C_1^2 - 2]$$

$$C = \bar{X}^2 \theta C_1^2$$

$$D = \gamma \bar{X} \bar{Y} \theta C_1^2$$

$$E = \bar{X} \bar{Y} \theta (C_0 C_1 - 2\gamma C_1^2)$$

olarak tanımlanırsa,

$$HKO(t_{1p}) = \bar{Y}^2 + w_1^2 A + w_1 B + w_2 C - 2w_2 D - 2w_1 w_2 E \quad (4.3)$$

olarak kısaltılabilir. Eşitlik (4.3)' ün w_1 ve w_2 'ye göre türevleri alınır,

$$\frac{\partial HKO(t_{1p})}{\partial w_1} = 0 \rightarrow 2w_1 A + w_1 - 2w_2 E = 0$$

$$\frac{\partial HKO(t_{1p})}{\partial w_2} = 0 \rightarrow 2w_2 C - 2D - 2w_1 E = 0$$

elde edilir. Buradan elde edilen iki denklemin ortak çözümü yapılırsa, hata kareler ortalamasını minimum yapan w_1 ve w_2 değerleri,

$$w_{1OPT} = \frac{2DE - BC}{2(AC - E^2)}$$

$$w_{2OPT} = \frac{2D(AC - E^2) + 2DE - BCE}{2C(AC - E^2)}$$

biçiminde bulunur. Bulunan optimum w_1 ve w_2 Eşitlik (4.3)'te yerine yazılırsa, minimum hata kareler ortalaması,

$$\begin{aligned} \text{HKO}(t_{1p})_{\text{MIN}} = & \bar{Y}^2 + \left(\frac{2DE - BC}{2(AC - E^2)} \right)^2 A + \frac{(2DE - BC)B}{2(AC - E^2)} + \left(\frac{2D(AC - E^2) + 2DE - BCE}{2(AC - E^2)} \right) \\ & - \left(\frac{2D^2(AC - E^2) + 2D^2E - BCED}{C(AC - E^2)} \right) - (2DE - BC) \left(\frac{2D(AC - E^2) + 2DE - BCE}{2C(AC - E^2)^2} \right) E \end{aligned}$$

olur.

4.2. Önerilen Oransal ve Çarpımsal Tahmin Edici

Swain A. K. P. C. (1964) 'nin Bölüm (3.1)'de verilen oransal tahmin edicisinden ve Shukla N. D. 'nin Bölüm (3.2)'de verilen çarpımsal tahmin edicisinden yola çıkılarak $a, b = C_X, \beta_2(x), \rho_{XY}$, $a \neq b$ olmak üzere önerilen tahmin edici,

$$t_{2p} = \bar{y}_{\text{sis}} \left(\frac{a\bar{X} + b}{a\bar{X}_{\text{sis}} + b} \right)^\alpha \quad (4.4)$$

biçimindedir. Yan ve hata kareler ortalamasını bulabilmek için Eşitlik (2.11) ve (2.12) yerlerine koyulursa,

$$t_{2p} = \bar{Y}(e_0 + 1) \left(\frac{a\bar{X} + b}{a\bar{X}(e_1 + 1) + b} \right)^\alpha$$

olarak yazılabilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa tahmin edici,

$$\begin{aligned} t_{2p} &= \bar{Y}(e_0 + 1) \left(\frac{a\bar{X} + b}{a\bar{X} + b + a\bar{X}e_1} \right)^\alpha \\ &= \bar{Y}(e_0 + 1) \left(\frac{1}{1 + \frac{a\bar{X}}{a\bar{X} + b} e_1} \right)^\alpha \end{aligned}$$

Burada $v = \frac{a\bar{X}}{a\bar{X} + b}$ olarak tanımlanmıştır. Parantez içindeki ifade düzenlenirse,

$$t_{2p} = \bar{Y}(e_0 + 1)(1 + ve_1)^{-\alpha}$$

olur. $(1 + ve_1)^{-\alpha} = \left((1 + ve_1)^{-1}\right)^\alpha$ şeklinde yazılırsa,

$$t_{2p} = \bar{Y}(e_0 + 1)(1 - ve_1 + v^2e_1^2 - \dots)^\alpha$$

$$\cong \bar{Y}(e_0 + 1)(1 - ve_1)^\alpha$$

Burada $(1 - ve_1)^\alpha$ binom açılımıyla yazılırsa,

$$t_{2p} = \bar{Y}(e_0 + 1) \left[\binom{\alpha}{0} 1^\alpha (-ve_1)^0 + \binom{\alpha}{1} 1^{\alpha-1} (-ve_1)^1 + \binom{\alpha}{2} 1^2 (-ve_1)^2 + \dots \right]$$

$$\cong \bar{Y}(e_0 + 1) \left[1 - \alpha ve_1 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} v^2 e_1^2 \right]$$

$$= \bar{Y} \left[1 - \alpha ve_1 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} v^2 e_1^2 + e_0 - \alpha ve_0 e_1 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} v^2 e_0 e_1^2 \right]$$

$$t_{2p} \cong \bar{Y} \left[1 + e_0 - \alpha ve_1 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} v^2 e_1^2 - \alpha ve_0 e_1 \right] \quad (4.5)$$

olarak yazılabilir. Yanı bulabilmek için Eşitlik (4.5)' in her iki tarafında $\bar{Y}$ çıkartılıp beklenen değer alınır,

$$E(t_{2p} - \bar{Y}) = \bar{Y} \left[E(e_0) - \alpha v E(e_1) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} v^2 E(e_1^2) - \alpha v E(e_0 e_1) \right]$$

elde edilir. Burada Eşitlik (2.14), (2.16) ve (2.18) yerlerine yazılırsa,

$$E(t_{2p} - \bar{Y}) = \bar{Y} \left[\frac{\alpha(\alpha-1)}{2} v^2 \frac{N-1}{Nn} C_x^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] - \alpha v \frac{N-1}{Nn} C_x C_y \rho_{xy} \sqrt{1 + (n-1)\rho_x} \sqrt{1 + (n-1)\rho_y} \right]$$

elde edilir ve gerekli işlemler yapılırsa tahminin yanı,

$$E(t_{2p} - \bar{Y}) = \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}}{n} C_x^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] \alpha v \left[\frac{(\alpha-1)}{2} v - \frac{C_y}{C_x} \rho_{xy} \frac{\sqrt{1+(n-1)\rho_{yy}}}{\sqrt{1+(n-1)\rho_{xx}}} \right]$$

$$E(t_{2p} - \bar{Y}) = \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}}{n} C_x^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] \alpha v \left[\frac{(\alpha-1)}{2} v - \kappa \rho^* \right] \quad (4.6)$$

olarak bulunur.

Tahmin edicinin hata kareler ortalamasını bulabilmek için, Eşitlik (4.5)' in iki tarafından da $\bar{Y}$ çıkartılıp karesi alındıktan sonra beklenen değere geçilirse,

$$E(t_{2p} - \bar{Y})^2 = \bar{Y}^2 E \left[e_0 - \alpha v e_1 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} v^2 e_1^2 - \alpha v e_0 e_1 \right]^2$$

$$= \bar{Y}^2 [E(e_0^2) + \alpha^2 v^2 E(e_1^2) - 2\alpha v E(e_0 e_1)]$$

şeklinde yazılabilir. Eşitlik (2.15), (2.16) ve (2.18) yerlerine yazılırsa,

$$E(t_{2p} - \bar{Y})^2 = \bar{Y}^2 \left[\frac{N-1}{Nn} C_y^2 [1 + (n-1)\rho_{yy}] + \alpha^2 v^2 \frac{N-1}{Nn} C_x^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] \right. \\ \left. - 2\alpha v \frac{N-1}{Nn} C_x C_y \rho_{xy} \sqrt{1+(n-1)\rho_{xx}} \sqrt{1+(n-1)\rho_{yy}} \right]$$

Burada, $\rho^* = \frac{\sqrt{1+(n-1)\rho_{yy}}}{\sqrt{1+(n-1)\rho_{xx}}}$ olarak alınırsa,

$$E(t_{2p} - \bar{Y})^2 = \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] [C_y^2 \rho^{*2} + \alpha^2 v^2 C_x^2 - 2\alpha v C_x C_y \rho_{xy} \rho^*]$$

olarak yazılabilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa hata kareler ortalaması,

$$HKO(t_{2p}) = \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] [C_y^2 \rho^{*2} + \alpha v C_x^2 (\alpha v - 2\kappa \rho^*)] \quad (4.7)$$

biçiminde elde edilmiş olur. Burada $\kappa = \rho_{xy} \frac{C_y}{C_x}$ şeklindedir.

Türev alınarak,

$$\frac{\partial \text{HKO}(t_{1p})}{\partial \alpha} = 0 \text{ yazılırsa,}$$

$$2\alpha v^2 C_x^2 = 2v C_x C_y \rho_{xy} \rho^*$$

$$\alpha = \frac{C_y \rho_{xy} \rho^*}{C_x v} \rightarrow \alpha_{\text{OPT}} = \frac{\kappa \rho^*}{v} \quad (4.8)$$

bulunur.

Eşitlik (4.8)' deki optimum α değeri, Eşitlik (4.6)'da yerine konulursa yan,

$$\begin{aligned} E(t_{2p} - \bar{Y})_{\text{MIN}} &= \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}}{n} C_x^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] \kappa \rho^* v \left[\frac{\left(\frac{\kappa \rho^*}{v} - 1 \right)}{2} v - \kappa \rho^* \right] \\ &= \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}}{n} C_x^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] \kappa \rho^* v \left(\frac{\kappa \rho^* - v}{2} - \kappa \rho^* \right) \\ &= \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}}{n} C_x^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] \kappa \rho^* v \left(\frac{-\kappa \rho^* - v}{2} \right) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilmiş olur.

Eşitlik (4.8)' deki α değeri, Eşitlik (4.7)'de yerine koyulursa minimum hata kareler ortalaması,

$$\begin{aligned} \text{HKO}(t_{2p})_{\text{MIN}} &= \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \left[C_y^2 \rho^{*2} + \kappa \rho^* C_x^2 (\kappa \rho^* - 2\kappa \rho^*) \right] \\ &= \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] (C_y^2 \rho^{*2} - \kappa^2 \rho^{*2} C_x^2) \\ &= \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] [\rho^{*2} (C_y^2 - \kappa^2 C_x^2)] \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada κ ifadesi açık biçimde yazılırsa,

$$\text{HKO}(t_{2p})_{\text{MIN}} = \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \left[\rho^{*2} \left(C_y^2 - \rho_{xy}^2 \frac{C_y^2}{C_x^2} \right) \right]$$

$$\text{HKO}(t_{2p})_{\text{MIN}} = \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] [\rho^{*2} C_y^2 (1 - \rho_{xy}^2)] \quad (4.9)$$

şeklinde elde edilmiş olur.

İkinci bir yol olarak, sonuçtan emin olmak amacıyla, Taylor serisi yöntemiyle hata kareler ortalaması uygulanmıştır.

$$\text{HKO}(t_{2p}) \cong E \left[d_1 \left(\bar{x}^* - \bar{X} \right) + d_2 \left(\bar{y}^* - \bar{Y} \right) \right]^2 \quad (4.10)$$

şeklinde yazılır. Burada,

$$d_1 = \frac{\partial h(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_1} \bigg|_{\bar{x}, \bar{y}} = -\alpha a \bar{y} \frac{(a\bar{X} + b)^\alpha}{(a\bar{x}^* + b)^{\alpha+1}} \bigg|_{\bar{x}, \bar{y}} = \frac{-\alpha a \bar{Y}}{a\bar{X} + b}$$

ve

$$d_2 = \frac{\partial h(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_2} \bigg|_{\bar{x}, \bar{y}} = 1$$

biçimindedir ve Eşitlik (4.10)' da yerine yazılırsa,

$$\text{HKO}(t_{2p}) \cong E \left[\frac{-\alpha a \bar{Y}}{a\bar{X} + b} \left(\bar{x}^* - \bar{X} \right) + \left(\bar{y}^* - \bar{Y} \right) \right]^2$$

olur. Burada gerekli işlemler ve düzenlemeler yapılırsa,

$$\text{HKO}(t_{2p}) = \frac{\alpha^2 a^2 \bar{Y}^2}{(a\bar{X} + b)^2} E \left(\bar{x}^* - \bar{X} \right)^2 - 2 \frac{\alpha a \bar{Y}}{a\bar{X} + b} E \left(\bar{x}^* - \bar{X} \right) \left(\bar{y}^* - \bar{Y} \right) + E \left(\bar{y}^* - \bar{Y} \right)^2$$

$$= \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \left\{ \frac{\alpha^2 a^2 \bar{X}^2}{(a\bar{X} + b)^2} C_x^2 - 2 \frac{\alpha a \bar{X}}{a\bar{X} + b} \rho_{xy} C_x C_y \frac{\sqrt{1 + (n-1)\rho_{yy}}}{\sqrt{1 + (n-1)\rho_{xx}}} + C_y^2 \frac{[1 + (n-1)\rho_{yy}]}{[1 + (n-1)\rho_{xx}]} \right\}$$

$$= \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] (\theta^2 C_x^2 - 2\theta \rho_{xy} C_x C_y \rho^* + C_y^2 \rho^{*2})$$

$$HKO(t_{2p}) = \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] [C_y^2 \rho^{*2} + \theta C_x^2 (\theta - 2\kappa \rho^*)]$$

olarak Eşitlik (4.7)' deki ile aynı sonuç elde edilir. Burada $\theta = \frac{\alpha a \bar{Y}}{a\bar{X} + b}$, $\rho^* = \frac{\sqrt{1 + (n-1)\rho_y}}{\sqrt{1 + (n-1)\rho_x}}$

ve $\kappa = \rho_{xy} \frac{C_y}{C_x}$ olarak tanımlanmıştır.

Hata kareler ortalamasını minimum yapan α değerini bulmak için,

$$\frac{\partial HKO(t_{2p})}{\partial \alpha} = 0$$

işlemi yapılırsa,

$$\frac{2\alpha a^2 \bar{Y}^2}{(a\bar{X} + b)^2} \frac{N-1}{Nn} S_x^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] - 2 \frac{a \bar{Y}}{a\bar{X} + b} \frac{N-1}{Nn} S_x S_y \rho_{xy} \sqrt{1 + (n-1)\rho_{xx}} \sqrt{1 + (n-1)\rho_{yy}} = 0$$

$$\frac{2\alpha a^2 \bar{Y}^2}{(a\bar{X} + b)^2} \frac{N-1}{Nn} S_x^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] = 2 \frac{a \bar{Y}}{a\bar{X} + b} \frac{N-1}{Nn} S_x S_y \rho_{xy} \sqrt{1 + (n-1)\rho_{xx}} \sqrt{1 + (n-1)\rho_{yy}}$$

$$\frac{\alpha a \bar{Y} \bar{X}}{(a\bar{X} + b)} C_x \sqrt{1 + (n-1)\rho_{xx}} = S_y \rho_{xy} \sqrt{1 + (n-1)\rho_{yy}}$$

$$\alpha_{OPT} = \rho_{xy} \frac{S_y}{\bar{Y}} \frac{\sqrt{1 + (n-1)\rho_{yy}}}{\sqrt{1 + (n-1)\rho_{xx}}} \frac{a\bar{X} + b}{a\bar{X}} \frac{1}{C_x}$$

$$\alpha_{OPT} = \rho_{xy} \frac{C_y}{C_x} \frac{\sqrt{1 + (n-1)\rho_{yy}}}{\sqrt{1 + (n-1)\rho_{xx}}} \frac{a\bar{X} + b}{a\bar{X}}, \quad \kappa = \rho_{xy} \frac{C_y}{C_x}, \quad \rho^* = \frac{\sqrt{1 + (n-1)\rho_{yy}}}{\sqrt{1 + (n-1)\rho_{xx}}}$$

$$\alpha_{\text{MIN}} = \kappa\rho^* \frac{a\bar{X} + b}{a\bar{X}}$$

olarak Eşitlik (4.8) ile aynı şekilde bulunur. Minimum $\text{HKO}(t_{2p})$ 'nin bulunabilmesi için verilen optimum α değeri hata kereler ortalaması içindeki yerine yazılırsa,

$$\theta = \alpha \frac{a\bar{X}}{a\bar{X} + b} = \kappa\rho^* \frac{a\bar{X} + b}{a\bar{X}} \frac{a\bar{X}}{a\bar{X} + b} = \kappa\rho^*$$

olur.

$$\begin{aligned} \text{HKO}(t_{2p})_{\text{MIN}} &= \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \left[C_y^2 \rho^{*2} + \kappa\rho^* C_x^2 (\kappa\rho^* - 2\kappa\rho^*) \right] \\ &= \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] (C_y^2 \rho^{*2} - \kappa^2 \rho^{*2} C_x^2) \\ &= \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] [\rho^{*2} (C_y^2 - \kappa^2 C_x^2)] \end{aligned}$$

κ ifadesi açık biçimde yazılırsa,

$$\text{HKO}(t_{2p})_{\text{MIN}} = \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \left[\rho^{*2} \left(C_y^2 - \rho_{xy}^2 \frac{C_y^2}{C_x^2} C_x^2 \right) \right]$$

$$\text{HKO}(t_{2p})_{\text{MIN}} = \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] [\rho^{*2} C_y^2 (1 - \rho_{xy}^2)]$$

olarak minimum hata kareler ortalaması fark yöntemi ile aynı biçimde, Eşitlik (4.9)'daki gibi elde edilmiş olur.

Bu oransal ve çarpımsal tahmin edicinin hata kareler ortalaması ile sistematik örneklemenin basit tahmin edicisinin varyansının karşılaştırılması aşağıdaki gibi yapılabilir.

$$\text{HKO}(t_{2p})_{\text{MIN}} < V(\bar{y}_{\text{SIS}})$$

$$\frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] [\rho^{*2} S_y^2 (1 - \rho_{xy}^2)] < \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{yy}] S_Y^2$$

$$\frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \left[\frac{1 + (n-1)\rho_{yy}}{1 + (n-1)\rho_{xx}} \right] S_y^2 (1 - \rho_{xy}^2) < \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{yy}] S_Y^2$$

$$\frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{yy}] S_y^2 - \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{yy}] S_y^2 \rho_{xy}^2 < \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{yy}] S_Y^2$$

$$\frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{yy}] S_y^2 \rho_{xy}^2 > 0$$

$$[1 + (n-1)\rho_{yy}] > 0$$

$$\rho_{yy} > -1/(n-1)$$

koşulu altında t_{2p} tahmin edicisi sistematik örneklemenin basit ortalama tahmin edicisinden daha etkindir.

t_{2p} oransal ve çarpımsal tahmin edicisinin hata kareler ortalaması ile Swain A. K. P. C.'nin oransal tahmin edicisinin hata kareler ortalamasının karşılaştırılması aşağıdaki gibi yapılabilir.

$$HKO(t_{2p})_{\text{Min}} < HKO(\bar{y}_{\text{r}_{\text{sis}}})$$

$$\frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \bar{Y}^2 [\rho^{*2} C_y^2 (1 - \rho_{xy}^2)] < \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \bar{Y}^2 [\rho^{*2} C_y^2 + C_x^2 (1 + 2\kappa\rho^*)]$$

$$-\rho^{*2} C_y^2 \rho_{xy}^2 < C_x^2 (1 + 2\kappa\rho^*)$$

$$C_x^2 + 2C_x^2 \kappa\rho^* + \rho^{*2} C_y^2 \rho_{xy}^2 > 0$$

$$1 + 2\kappa\rho^* + \rho^{*2} \kappa^2 > 0$$

$$(\kappa\rho^* + 1)^2 > 0$$

ifadesi her zaman doğru olduğu için, sadece $\kappa\rho^* = -1$ olması durumu dışında t_{2p} tahmin edicisi Swain A. K. P. C.'nin oransal tahmin edicisinden daha etkindir.

t_{2p} oransal ve çarpımsal tahmin edicisinin hata kareler ortalaması ile H.P. Singh, R.Tailor, N.K. Jatwa'nın (2011) oransal tahmin edicisinin hata kareler ortalamasının karşılaştırılması aşağıdaki gibi yapılabilir.

$$HKO(t_{2p})_{\text{Min}} < HKO(\bar{y}_{RE})$$

$$\frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \bar{Y}^2 [\rho^{*2} C_y^2 (1 - \rho_{xy}^2)] < \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \bar{Y}^2 \left[\rho^{*2} C_y^2 + C_x^2 \left(\frac{1}{4} - \kappa \rho^* \right) \right]$$

$$-\rho^{*2} C_y^2 \rho_{xy}^2 < C_x^2 \left(\frac{1}{4} - \kappa \rho^* \right)$$

$$\frac{1}{4} C_x^2 - \rho_{xy} \frac{C_y}{C_x} C_x^2 \rho^* + \rho^{*2} C_y^2 \rho_{xy}^2 > 0$$

$$\frac{1}{4} C_x^2 - \rho_{xy} C_y C_x \rho^* + \rho^{*2} C_y^2 \rho_{xy}^2 > 0$$

$$C_x^2 \left(\frac{1}{4} - \rho_{xy} \frac{C_y}{C_x} \rho^* + \rho^{*2} \frac{C_y^2}{C_x^2} \rho_{xy}^2 \right) > 0$$

Burada C_x^2 daima pozitif olduğundan,

$$\frac{1}{4} - \kappa \rho^* + \rho^{*2} \kappa^2 > 0$$

$$\frac{1}{4} > \kappa \rho^* (1 - \kappa \rho^*)$$

koşulunun sağlandığı durumda t_{2p} tahmin edicisi H.P. Singh, R.Tailor, N.K. Jatwa'nın (2011) oransal tahmin edicisinden daha etkindir.

Önerilen $t_{2p} = \bar{y}_{\text{sis}} \left(\frac{a\bar{X} + b}{a\bar{X}_{\text{sis}} + b} \right)^\alpha$ tahmininin çeşitli a, b ve α değerleri için yan ve hata kareler

ortalaması, $\psi = \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}]$ olmak üzere, Çizelge 4.1'de gösterildiği gibidir.

Çizelge 4.1. Önerilen Oransal Ve Çarpımsal Tahmin Edicisinin Çeşitli α , a ve b Değerleri İçin Yanları ve Hata Kareler Ortalamaları

Tahmin Ediciler	α	a	b	Yan	HKO
$t_{2p} = \bar{y}_{\text{sis}} \left(\frac{a\bar{X} + b}{a\bar{x}_{\text{sis}} + b} \right)^\alpha$	α	a	b	$\psi C_x^2 \alpha \nu \left(\frac{\alpha-1}{2} \nu - \kappa \rho^* \right)$	$\psi \left[\rho^{*2} C_y^2 + \alpha \nu C_x^2 (\alpha \nu - 2\kappa \rho^*) \right]$
$t_{2p_1} = \bar{y}_{\text{sis}} \left(\frac{a\bar{X} + b}{a\bar{x}_{\text{sis}} + b} \right)^{\alpha_{\text{MIN}}}$	$\alpha_{\text{MIN}} = \frac{\kappa \rho^*}{\nu}$	a	b	$\frac{1}{2} \psi C_x^2 \kappa \rho^* (-\kappa \rho^* - \nu)$	$\psi \left[\rho^{*2} C_y^2 + \alpha \nu C_x^2 (1 - \rho_{xy}^2) \right]$
$t_{2p_2} = \bar{y}_{\text{sis}} \left(\frac{a\bar{X} + b}{a\bar{x}_{\text{sis}} + b} \right)$	1	a	b	$\psi C_x^2 \nu (-\kappa \rho^*)$	$\psi \left[\rho^{*2} C_y^2 + \nu C_x^2 (\nu - 2\kappa \rho^*) \right]$
$t_{2p_3} = \frac{\bar{y}_{\text{sis}}}{\bar{x}_{\text{sis}}} \bar{X}$	1	C_x ρ_{xy} $\beta_2(x)$	0	$\psi C_x^2 (-\kappa \rho^*)$	$\psi \left[\rho^{*2} C_y^2 + C_x^2 (1 - 2\kappa \rho^*) \right]$
$t_{2p_4} = \bar{y}_{\text{sis}}$	$\alpha \in \mathbb{R}$	0	C_x ρ_{xy} $\beta_2(x)$	0	$\frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}}{n} C_y^2 [1 + (n-1)\rho_{yy}]$
$t_{2p_5} = \bar{y}_{\text{sis}} \left(\frac{\bar{X} + 1}{\bar{x}_{\text{sis}} + 1} \right)$	1	C_x ρ_{xy} $\beta_2(x)$	C_x ρ_{xy} $\beta_2(x)$	$\psi C_x^2 \frac{\bar{X}}{\bar{X} + 1} (-\kappa \rho^*)$	$\psi \left[\rho^{*2} C_y^2 + \frac{\bar{X}}{\bar{X} + 1} C_x^2 \left(\frac{\bar{X}}{\bar{X} + 1} - 2\kappa \rho^* \right) \right]$
$t_{2p_6} = \bar{y}_{\text{sis}} \left(\frac{C_x \bar{X} + \beta_2(x)}{C_x \bar{x}_{\text{sis}} + \beta_2(x)} \right)$	1	C_x	$\beta_2(x)$	$\psi C_x^2 \frac{C_x \bar{X}}{C_x \bar{X} + \beta_2(x)} (-\kappa \rho^*)$	$\psi \left[\rho^{*2} C_y^2 + \frac{C_x \bar{X}}{C_x \bar{X} + \beta_2(x)} C_x^2 \left(\frac{C_x \bar{X}}{C_x \bar{X} + \beta_2(x)} - 2\kappa \rho^* \right) \right]$

Çizelge 4.1. Önerilen Oransal Ve Çarpımsal Tahmin Edicisinin Çeşitli α , a ve b Değerleri İçin Yanları ve Hata Kareler Ortalamaları (devamı)

Tahmin Ediciler	α	a	b	Yan	HKO
$t_{2p_7} = \bar{y}_{sis} \left(\frac{C_x \bar{X} + \rho_{xy}}{C_x \bar{x}_{sis} + \rho_{xy}} \right)$	1	C_x	ρ_{xy}	$\psi C_x^2 \frac{C_x \bar{X}}{C_x \bar{X} + \rho_{xy}} (-\kappa \rho^*)$	$\psi \left[\rho^{*2} C_y^2 + \frac{C_x \bar{X}}{C_x \bar{X} + \rho_{xy}} C_x^2 \left(\frac{C_x \bar{X}}{C_x \bar{X} + \rho_{xy}} - 2\kappa \rho^* \right) \right]$
$t_{2p_8} = \bar{y}_{sis} \left(\frac{\beta_2(x) \bar{X} + C_x}{\beta_2(x) \bar{x}_{sis} + C_x} \right)$	1	$\beta_2(x)$	C_x	$\psi C_x^2 \frac{\beta_2(x) \bar{X}}{\beta_2(x) \bar{X} + C_x} (-\kappa \rho^*)$	$\psi \left[\rho^{*2} C_y^2 + \frac{\beta_2(x) \bar{X}}{\beta_2(x) \bar{X} + C_x} C_x^2 \left(\frac{\beta_2(x) \bar{X}}{\beta_2(x) \bar{X} + C_x} - 2\kappa \rho^* \right) \right]$
$t_{2p_9} = \bar{y}_{sis} \left(\frac{\beta_2(x) \bar{X} + \rho_{xy}}{\beta_2(x) \bar{x}_{sis} + \rho_{xy}} \right)$	1	$\beta_2(x)$	ρ_{xy}	$\psi C_x^2 \frac{\beta_2(x) \bar{X}}{\beta_2(x) \bar{X} + \rho_{xy}} (-\kappa \rho^*)$	$\psi \left[\rho^{*2} C_y^2 + \frac{\beta_2(x) \bar{X}}{\beta_2(x) \bar{X} + \rho_{xy}} C_x^2 \left(\frac{\beta_2(x) \bar{X}}{\beta_2(x) \bar{X} + \rho_{xy}} - 2\kappa \rho^* \right) \right]$
$t_{2p_{10}} = \bar{y}_{sis} \left(\frac{\rho_{xy} \bar{X} + C_x}{\rho_{xy} \bar{x}_{sis} + C_x} \right)$	1	ρ_{xy}	C_x	$\psi C_x^2 \frac{\rho_{xy} \bar{X}}{\rho_{xy} \bar{X} + C_x} (-\kappa \rho^*)$	$\psi \left[\rho^{*2} C_y^2 + \frac{\rho_{xy} \bar{X}}{\rho_{xy} \bar{X} + C_x} C_x^2 \left(\frac{\rho_{xy} \bar{X}}{\rho_{xy} \bar{X} + C_x} - 2\kappa \rho^* \right) \right]$
$t_{2p_{11}} = \bar{y}_{sis} \left(\frac{\rho_{xy} \bar{X} + \beta_2(x)}{\rho_{xy} \bar{x}_{sis} + \beta_2(x)} \right)$	1	ρ_{xy}	$\beta_2(x)$	$\psi C_x^2 \frac{\rho_{xy} \bar{X}}{\rho_{xy} \bar{X} + \beta_2(x)} (-\kappa \rho^*)$	$\psi \left[\rho^{*2} C_y^2 + \frac{\rho_{xy} \bar{X}}{\rho_{xy} \bar{X} + \beta_2(x)} C_x^2 \left(\frac{\rho_{xy} \bar{X}}{\rho_{xy} \bar{X} + \beta_2(x)} - 2\kappa \rho^* \right) \right]$
$t_{2p_{12}} = \bar{y}_{sis} \left(\frac{a \bar{x}_{sis} + b}{a \bar{X} + b} \right)$	-1	a	b	$\psi C_x^2 \frac{a \bar{X}}{a \bar{X} + b} \left(\frac{a \bar{X}}{a \bar{X} + b} - \kappa \rho^* \right)$	$\psi \left[\rho^{*2} C_y^2 + \frac{a \bar{X}}{a \bar{X} + b} C_x^2 \left(\frac{a \bar{X}}{a \bar{X} + b} + 2\kappa \rho^* \right) \right]$
$t_{2p_{13}} = \bar{y}_{sis} \frac{\bar{x}_{sis}}{\bar{X}}$	-1	C_x ρ_{xy} $\beta_2(x)$	0	$\psi C_x^2 (1 - \kappa \rho^*)$	$\psi \left[\rho^{*2} C_y^2 + C_x^2 (1 + 2\kappa \rho^*) \right]$

Çizelge 4.1. Önerilen Oransal Ve Çarpımsal Tahmin Edicisinin Çeşitli α , a ve b Değerleri İçin Yanları ve Hata Kareler Ortalamaları (devamı)

Tahmin Ediciler	α	a	b	Yan	HKO
$t_{2p_{14}} = \bar{y}_{\text{sis}} \left(\frac{\bar{x}_{\text{sis}} + 1}{\bar{X} + 1} \right)$	-1	C_x ρ_{xy} $\beta_2(x)$	C_x ρ_{xy} $\beta_2(x)$	$\psi C_x^2 \frac{\bar{X}}{\bar{X} + 1} \left(\frac{\bar{X}}{\bar{X} + 1} - \kappa \rho^* \right)$	$\psi \left[\rho^{*2} C_y^2 + \frac{\bar{X}}{\bar{X} + 1} C_x^2 \left(\frac{\bar{X}}{\bar{X} + 1} + 2\kappa \rho^* \right) \right]$
$t_{2p_{15}} = \bar{y}_{\text{sis}} \left(\frac{C_x \bar{x}_{\text{sis}} + \beta_2(x)}{C_x \bar{X} + \beta_2(x)} \right)$	-1	C_x	$\beta_2(x)$	$\psi C_x^2 \frac{C_x \bar{X}}{C_x \bar{X} + \beta_2(x)} \left(\frac{C_x \bar{X}}{C_x \bar{X} + \beta_2(x)} - \kappa \rho^* \right)$	$\psi \left[\rho^{*2} C_y^2 + \frac{C_x \bar{X}}{C_x \bar{X} + \beta_2(x)} C_x^2 \left(\frac{C_x \bar{X}}{C_x \bar{X} + \beta_2(x)} + 2\kappa \rho^* \right) \right]$
$t_{2p_{16}} = \bar{y}_{\text{sis}} \left(\frac{C_x \bar{x}_{\text{sis}} + \rho_{xy}}{C_x \bar{X} + \rho_{xy}} \right)$	-1	C_x	ρ_{xy}	$\psi C_x^2 \frac{C_x \bar{X}}{C_x \bar{X} + \rho_{xy}} \left(\frac{C_x \bar{X}}{C_x \bar{X} + \rho_{xy}} - \kappa \rho^* \right)$	$\psi \left[\rho^{*2} C_y^2 + \frac{C_x \bar{X}}{C_x \bar{X} + \rho_{xy}} C_x^2 \left(\frac{C_x \bar{X}}{C_x \bar{X} + \rho_{xy}} + 2\kappa \rho^* \right) \right]$
$t_{2p_{17}} = \bar{y}_{\text{sis}} \left(\frac{\beta_2(x) \bar{x}_{\text{sis}} + C_x}{\beta_2(x) \bar{X} + C_x} \right)$	-1	$\beta_2(x)$ C_x	C_x	$\psi C_x^2 \frac{\beta_2(x) \bar{X}}{\beta_2(x) \bar{X} + C_x} \left(\frac{\beta_2(x) \bar{X}}{\beta_2(x) \bar{X} + C_x} - \kappa \rho^* \right)$	$\psi \left[\rho^{*2} C_y^2 + \frac{\beta_2(x) \bar{X}}{\beta_2(x) \bar{X} + C_x} C_x^2 \left(\frac{\beta_2(x) \bar{X}}{\beta_2(x) \bar{X} + C_x} + 2\kappa \rho^* \right) \right]$
$t_{2p_{18}} = \bar{y}_{\text{sis}} \left(\frac{\beta_2(x) \bar{x}_{\text{sis}} + \rho_{xy}}{\beta_2(x) \bar{X} + \rho_{xy}} \right)$	-1	$\beta_2(x)$ ρ_{xy}	ρ_{xy}	$\psi C_x^2 \frac{\beta_2(x) \bar{X}}{\beta_2(x) \bar{X} + \rho_{xy}} \left(\frac{\beta_2(x) \bar{X}}{\beta_2(x) \bar{X} + \rho_{xy}} - \kappa \rho^* \right)$	$\psi \left[\rho^{*2} C_y^2 + \frac{\beta_2(x) \bar{X}}{\beta_2(x) \bar{X} + \rho_{xy}} C_x^2 \left(\frac{\beta_2(x) \bar{X}}{\beta_2(x) \bar{X} + \rho_{xy}} + 2\kappa \rho^* \right) \right]$
$t_{2p_{19}} = \bar{y}_{\text{sis}} \left(\frac{\rho_{xy} \bar{x}_{\text{sis}} + C_x}{\rho_{xy} \bar{X} + C_x} \right)$	-1	ρ_{xy} C_x	C_x	$\psi C_x^2 \frac{\rho_{xy} \bar{X}}{\rho_{xy} \bar{X} + C_x} \left(\frac{\rho_{xy} \bar{X}}{\rho_{xy} \bar{X} + C_x} - \kappa \rho^* \right)$	$\psi \left[\rho^{*2} C_y^2 + \frac{\rho_{xy} \bar{X}}{\rho_{xy} \bar{X} + C_x} C_x^2 \left(\frac{\rho_{xy} \bar{X}}{\rho_{xy} \bar{X} + C_x} + 2\kappa \rho^* \right) \right]$
$t_{2p_{20}} = \bar{y}_{\text{sis}} \left(\frac{\rho_{xy} \bar{x}_{\text{sis}} + \beta_2(x)}{\rho_{xy} \bar{X} + \beta_2(x)} \right)$	-1	ρ_{xy} $\beta_2(x)$	$\beta_2(x)$	$\psi C_x^2 \frac{\rho_{xy} \bar{X}}{\rho_{xy} \bar{X} + \beta_2(x)} \left(\frac{\rho_{xy} \bar{X}}{\rho_{xy} \bar{X} + \beta_2(x)} - \kappa \rho^* \right)$	$\psi \left[\rho^{*2} C_y^2 + \frac{\rho_{xy} \bar{X}}{\rho_{xy} \bar{X} + \beta_2(x)} C_x^2 \left(\frac{\rho_{xy} \bar{X}}{\rho_{xy} \bar{X} + \beta_2(x)} + 2\kappa \rho^* \right) \right]$

4.3.Önerilen Ağırlıklandırılmış Yansız Oransal Tahmin Edici

R. Singh & H.P. Singh (1998)'in d_r oransal tahmin edicisinden yola çıkılarak X ile Y arasındaki korelasyon pozitif olduğunda, $a, b = \rho_{xy}, \beta(x), C_x$ ve $a \neq b$ için,

$$d_1 = \bar{y}_{sis}, d_2 = \bar{y}_{sis} \frac{a\bar{X} + b}{a\bar{X}_{sis} + b}, d_3 = \bar{y}_{sis} \left(\frac{a\bar{X} + b}{a\bar{X}_{sis} + b} \right)^2$$

şeklinde tanımlanırsa ve $\sum_{i=1}^3 \omega_i = 1$ olmak üzere; önerilen tahmin edici,

$$t_{3p} = \sum_{i=1}^3 \omega_i d_i$$

$$t_{3p} = \omega_1 \bar{y}_{sis} + \omega_2 \bar{y}_{sis} \frac{a\bar{X} + b}{a\bar{X}_{sis} + b} + \omega_3 \bar{y}_{sis} \left(\frac{a\bar{X} + b}{a\bar{X}_{sis} + b} \right)^2 \quad (4.11)$$

biçimindedir.

Eşitlik (4.11) ile verilen tahmin edicide Eşitlik (2.11) ve (2.12) yerlerine yazılırsa,

$$t_{3p} = \omega_1 \bar{Y}(e_0 + 1) + \omega_2 \bar{Y}(e_0 + 1) \frac{a\bar{X} + b}{a\bar{X}(e_1 + 1) + b} + \omega_3 \bar{Y}(e_0 + 1) \left[\frac{a\bar{X} + b}{a\bar{X}(e_1 + 1) + b} \right]^2$$

$$= \bar{Y}(e_0 + 1) \left[\omega_1 + \omega_2 \frac{a\bar{X} + b}{a\bar{X} + b + a\bar{X}e_1} + \omega_3 \left(\frac{a\bar{X} + b}{a\bar{X} + b + a\bar{X}e_1} \right)^2 \right]$$

$$= \bar{Y}(e_0 + 1) \left[\omega_1 + \omega_2 \frac{1}{1 + \frac{a\bar{X}e_1}{a\bar{X} + b}} + \omega_3 \left(\frac{1}{1 + \frac{a\bar{X}e_1}{a\bar{X} + b}} \right)^2 \right]$$

biçimindedir. Burada $v = \frac{a\bar{X}}{a\bar{X} + b}$ yazılırsa,

$$t_{3p} = \bar{Y}(e_0 + 1) \left[\omega_1 + \omega_2 \frac{1}{1 + ve_1} + \omega_3 \frac{1}{(1 + ve_1)^2} \right]$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapıldığında tahmin edici,

$$\begin{aligned}
 t_{3p} &= \bar{Y}(e_0 + 1) \left[\omega_1 + \omega_2 (1 + v e_1)^{-1} + \omega_3 (1 + v e_1)^{-2} \right] \\
 &= \bar{Y}(e_0 + 1) \left[\omega_1 + \omega_2 (1 - v e_1 + \dots) + \omega_3 (1 - v e_1 + \dots)^2 \right] \\
 &\cong \bar{Y}(e_0 + 1) \left[\omega_1 + \omega_2 (1 - v e_1) + \omega_3 (1 - 2v e_1 + v^2 e_1^2) \right] \\
 &= \bar{Y}(e_0 + 1) (1 - \omega_2 v e_1 - 2\omega_3 v e_1 + \omega_3 v^2 e_1^2) \\
 &= (\bar{Y} + \bar{Y} e_0) [1 - v e_1 (\omega_2 + 2\omega_3) + \omega_3 v^2 e_1^2] \\
 &\cong \bar{Y} - \bar{Y} v e_1 (\omega_2 + 2\omega_3) + \bar{Y} \omega_3 v^2 e_1^2 - \bar{Y} v e_0 e_1 (\omega_2 + 2\omega_3) - \bar{Y} e_0 + \bar{Y} \omega_3 v^2 e_0 e_1^2 \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

$$= \bar{Y} + \bar{Y} [e_0 - v e_1 (\omega_2 + 2\omega_3) + O(e^2)] \quad (4.13)$$

olarak elde edilir.

Yanı bulabilmek için Eşitlik (4.12)' nin iki tarafından da $\bar{Y}$ çıkartılıp beklenen değer alınır,

$$E(t_{3p} - \bar{Y}) = E[-\bar{Y}v(\omega_2 + 2\omega_3)e_1 + \bar{Y}\omega_3v^2e_1^2 - \bar{Y}v(\omega_2 + 2\omega_3)e_0e_1 - \bar{Y}e_0]$$

elde edilir. Burada beklenen değer parantez içlerine dağıtılırsa,

$$E(t_{3p} - \bar{Y}) = -\bar{Y}v(\omega_2 + 2\omega_3)E(e_1) + \bar{Y}\omega_3v^2E(e_1^2) - \bar{Y}v(\omega_2 + 2\omega_3)E(e_0e_1) - \bar{Y}E(e_0)$$

olur. Eşitlik (2.14) yerlerine yazılırsa,

$$E(t_{3p} - \bar{Y}) = \bar{Y}\omega_3v^2E(e_1^2) - \bar{Y}v(\omega_2 + 2\omega_3)E(e_0e_1)$$

olarak bulunur. Eşitlik (2.16) ve (2.18) yerlerine yazılıp düzenlenirse yan,

$$E(t_{3p} - \bar{Y}) = \bar{Y}\omega_3v^2 \frac{N-1}{Nn} C_x^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] - \bar{Y}v(\omega_2 + 2\omega_3) \frac{N-1}{Nn} \rho_{xy} C_x C_y \frac{\sqrt{1+(n-1)\rho_{yy}}}{\sqrt{1+(n-1)\rho_{xx}}}$$

$$= \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}}{n} C_x^2 v [1 + (n-1)\rho_{xx}] \left[\omega_3 v - (\omega_2 + 2\omega_3) \rho_{xy} \frac{C_y}{C_x} \frac{\sqrt{1+(n-1)\rho_{yy}}}{\sqrt{1+(n-1)\rho_{xx}}} \right]$$

$$E(t_{3p} - \bar{Y}) = \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}}{n} C_x^2 v [1 + (n-1)\rho_{xx}] \left[\omega_3 v - (\omega_2 + 2\omega_3) \kappa \rho^* \right]$$

şeklinde bulunur.

Bu tahmin edicinin hata kareler ortalamasını bulabilmek için Eşitlik (4.13)' ün iki tarafından da $\bar{Y}$ çıkartıldıktan sonra karesi ve beklenen değeri alınır,

$$E(t_{3p} - \bar{Y})^2 = E \left\{ \bar{Y} \left[e_0 - v e_1 (\omega_2 + 2\omega_3) + O(e^2) \right] \right\}^2,$$

olarak yazılır. Burada $\omega = \omega_2 + 2\omega_3$ yazılırsa,

$$HKO(t_{3p}) \cong \bar{Y}^2 E(e_0 - v \omega e_1)^2$$

şeklinde elde edilir. Kare ifadesi açılıp, beklenen değer parantez içine dağıtılırsa,

$$HKO(t_{3p}) = \bar{Y}^2 \left[E(e_0^2) - v \omega E(e_1 e_0) + v^2 \omega^2 E(e_1^2) \right]$$

olur. Eşitlik (2.15), (2.16) ve (2.18) yerlerine yazılırsa,

$$HKO(t_{3p}) = \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \left(C_y^2 \frac{[1 + (n-1)\rho_{yy}]}{[1 + (n-1)\rho_{xx}]} - 2\omega v \rho_{xy} C_x C_y \frac{\sqrt{1+(n-1)\rho_{yy}}}{\sqrt{1+(n-1)\rho_{xx}}} + \omega^2 v^2 C_x^2 \right)$$

bulunur. Burada, $\frac{\sqrt{1+(n-1)\rho_{yy}}}{\sqrt{1+(n-1)\rho_{xx}}} = \rho^*$ ve $\kappa = \rho_{xy} \frac{C_y}{C_x}$ olarak yazılıp gerekli düzenlemeler

yapılırsa hata kareler ortalaması,

$$HKO(t_{3p}) = \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] (\rho^{*2} C_y^2 - 2\omega v \rho_{xy} C_x C_y \rho^* + 2\omega^2 v^2 C_x^2)$$

$$HKO(t_{3p}) = \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \left[C_y^2 \rho^{*2} + \omega v C_x^2 (\omega v - 2\kappa \rho^*) \right] \quad (4.14)$$

olarak elde edilir.

Hata kareler ortalamasını minimum yapacak ω değerini bulabilmek için Eşitlik (4.14)' ün ω 'ya göre türevi alınıp sıfıra eşitlenirse,

$$\frac{\partial \text{HKO}(t_{3p})}{\partial \omega} = 0$$

$$\frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] (-2v\rho_{xy}C_xC_y\rho^* + 2\omega v^2C_x^2) = 0$$

denklemini elde edilir. Bu eşitlik çözüldüğünde optimum ω değeri,

$$2\omega v^2C_x^2 = 2v\rho_{xy}C_xC_y\rho^*$$

$$\omega vC_x = \rho_{xy}C_y\rho^*$$

$$\omega = \rho_{xy} \frac{C_y}{C_x} = \frac{\kappa\rho^*}{\theta}$$

$$\omega_{\text{OPT}} = \frac{\kappa\rho^*}{v} = \frac{a\bar{X} + b}{a\bar{X}} \kappa\rho^*$$

olarak bulunur. Bulunan ω Eşitlik (4.14)' te yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \text{HKO}(t_{3p})_{\text{MIN}} &= \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \left[C_y^2\rho^{*2} + \frac{\kappa\rho^*}{v} vC_x^2 \left(\frac{\kappa\rho^*}{v} v - 2\kappa\rho^* \right) \right] \\ &= \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] [C_y^2\rho^{*2} + \kappa^2\rho^{*2}C_x^2 - 2\kappa^2\rho^*C_x^2] \\ &= \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] [C_y^2\rho^{*2} - \kappa^2\rho^*C_x^2] \end{aligned}$$

κ^2 terimi açık olarak yazılırsa,

$$= \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \left[C_y^2\rho^{*2} - \rho_{xy}^2 \frac{C_y^2}{C_x^2} \rho^*C_x^2 \right]$$

$$HKO(t_{3p})_{\text{MIN}} = \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_x] [C_y^2 \rho^{*2} (1 - \rho_{xy}^2)]$$

biçimindeki minimum hata kareler ortalaması bulunmuş olur.

$$\omega_{\text{MIN}} = \omega_2 + 2\omega_3 = \frac{\kappa \rho^*}{v} \quad (4.15)$$

olduğu gösterilmiştir ve tahmin edicinin tanımı gereği

$$\sum_{i=1}^3 \omega_i = 1 \quad (4.16)$$

olduğu bilinmektedir. Sadece Eşitlik (4.15) ve (4.16)' yı kullanarak ω_1, ω_2 ve ω_3 'ün değerlerini hesaplayabilmek mümkün değildir. Bu sabitlerin değerlerini bulabilmek için üçüncü bir eşitliğin daha yazılması gereklidir. $B(d_i)$, i. ortalama tahmininin yanını göstermek üzere,

$$\sum_{i=1}^3 B(d_i) = 0 \quad (4.17)$$

eşitliğini üçüncü eşitlik olarak alıp; Eşitlik (4.15), (4.16) ve (4.17)' yi matris formunda yazarsak,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ B(d_1) & B(d_2) & B(d_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \kappa \rho^* / v \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Burada,

$$B(d_1) = B(\bar{y}^*) = 0$$

$$B(d_2) = B(\bar{y}_{\text{sis}} \frac{a\bar{X} + b}{a\bar{X}_{\text{sis}} + b})$$

$$= -\frac{N-1}{Nn} \bar{Y} v C_x C_y \rho_{xy} \sqrt{1 + (n-1)\rho_{xx}} \sqrt{1 + (n-1)\rho_{yy}}$$

$$B(d_3) = B \left[\left(\bar{y}_{\text{sis}} \frac{a\bar{X} + b}{a\bar{X}_{\text{sis}} + b} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{N-1}{Nn} \bar{Y} C_x^2 v [1 + (n-1)\rho_{xx}] (v - 2\kappa\rho^*)$$

olmaktadır.

Eşitlik (4.18)' de verilen matris çözülürse;

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\kappa\rho^*}{v} + \frac{\kappa^2\rho^{*2}}{v^2} \\ \frac{\kappa\rho^*}{v} - \frac{2\kappa^2\rho^{*2}}{v^2} \\ \frac{\kappa^2\rho^{*2}}{v^2} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Bulunan değerler Eşitlik (4.11)' de verilen tahmin edicide ve Eşitlik (4.14)' de verilen hata kareler ortalamasında yerine yazılırsa;

$$t_{3p} = \left(1 - \frac{\kappa\rho^*}{v} + \frac{\kappa^2\rho^{*2}}{v^2} \right) \bar{y}_{\text{sis}} + \left(\frac{\kappa\rho^*}{v} - \frac{2\kappa^2\rho^{*2}}{v^2} \right) \bar{y}_{\text{sis}} \frac{a\bar{X} + b}{a\bar{X}_{\text{sis}} + b} + \frac{\kappa^2\rho^{*2}}{v^2} \bar{y}_{\text{sis}} \left(\frac{a\bar{X} + b}{a\bar{X}_{\text{sis}} + b} \right)^2$$

$$V(t_{3p})_{\text{MIN}} = \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_x] [C_y^2 \rho^{*2} (1 - \rho_{xy}^2)]$$

olan minimum varyanslı ve yansız oransal tahmin edici sınıfından bir oransal tahmin elde edilmiş olur.

Bu tahmin edicinin varyansı ile sistematik örneklemenin basit tahmin edicinin varyansının karşılaştırılması aşağıdaki gibi yapılabilir.

$$V(t_{3p})_{\text{MIN}} < V(\bar{y}_{\text{sis}})$$

$$\frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] [\rho^{*2} S_y^2 (1 - \rho_{xy}^2)] < \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{yy}] S_Y^2$$

$$\frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \frac{[1 + (n-1)\rho_{yy}]}{[1 + (n-1)\rho_{xx}]} S_y^2 (1 - \rho_{xy}^2) < \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{yy}] S_Y^2$$

$$\frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{yy}] S_y^2 - \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{yy}] S_y^2 \rho_{xy}^2 < \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{yy}] S_Y^2$$

$$\frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{yy}] S_y^2 \rho_{xy}^2 > 0$$

$$[1 + (n-1)\rho_{yy}] > 0$$

$$\rho_{yy} > -1/(n-1)$$

koşulu altında t_{3p} tahmin edicisi sistematik örneklemenin basit ortalama tahmin edicisinden daha etkindir.

Önerilen ağırlıklandırılmış yansız oransal tahmin edicinin varyansı ile Swain A. K. P. C.'nin oransal tahmin edicisinin hata kareler ortalamasının karşılaştırılması aşağıdaki gibi yapılabilir.

$$V(t_{3p})_{\text{MIN}} < \text{HKO}(\bar{y}_{\text{rSIS}})$$

$$\frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \bar{Y}^2 [\rho^{*2} C_y^2 (1 - \rho_{xy}^2)] < \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \bar{Y}^2 [\rho^{*2} C_y^2 + C_x^2 (1 + 2\kappa\rho^*)]$$

$$-\rho^{*2} C_y^2 \rho_{xy}^2 < C_x^2 (1 + 2\kappa\rho^*)$$

$$0 < C_x^2 + 2C_x^2 \kappa\rho^* + \rho^{*2} C_y^2 \rho_{xy}^2$$

$$0 < 1 + 2\kappa\rho^* + \rho^{*2} \kappa^2$$

$$0 < (\kappa\rho^* + 1)^2$$

ifadesi her zaman doğru olduğu için, sadece $\kappa\rho^* = -1$ olması durumu haricinde t_{3p} tahmin edicisi Swain'in oransal tahmin edicisinden daha etkindir.

t_{3p} tahmin edicisinin varyansı ile H.P. Singh, R.Tailor, N.K. Jatwa'nın (2011) oransal tahmininin hata kareler ortalamasının karşılaştırılması aşağıdaki gibi yapılabilir.

$$V(t_{3p})_{\text{MIN}} < \text{HKO}(\bar{y}_{\text{RE}})$$

$$\frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \bar{Y}^2 [\rho^{*2} C_y^2 (1 - \rho_{xy}^2)] < \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \bar{Y}^2 \left[\rho^{*2} C_y^2 + C_x^2 \left(\frac{1}{4} - \kappa \rho^* \right) \right]$$

$$-\rho^{*2} C_y^2 \rho_{xy}^2 < C_x^2 \left(\frac{1}{4} - \kappa \rho^* \right)$$

$$0 < \frac{1}{4} C_x^2 - \rho_{xy} \frac{C_y}{C_x} C_x^2 \rho^* + \rho^{*2} C_y^2 \rho_{xy}^2$$

$$0 < \frac{1}{4} C_x^2 - \rho_{xy} C_y C_x \rho^* + \rho^{*2} C_y^2 \rho_{xy}^2$$

$$0 < C_x^2 \left(\frac{1}{4} - \rho_{xy} \frac{C_y}{C_x} \rho^* + \rho^{*2} \frac{C_y^2}{C_x^2} \rho_{xy}^2 \right)$$

Burada C_x^2 daima pozitif olduğundan,

$$0 < \frac{1}{4} - \kappa \rho^* + \rho^{*2} \kappa^2$$

$$\frac{1}{4} > \kappa \rho^* (1 - \kappa \rho^*)$$

koşulunun sağlandığı durumda t_{3p} tahmin edicisi H.P. Singh, R.Tailor, N.K. Jatwa'nın (2011) oransal tahmin edicisinden daha etkindir.

4.4. Önerilen Ağırlıklandırılmış Yansız Çarpımsal Tahmin Edici

R. Singh & H.P. Singh (1998)'in d_p çarpımsal tahmininden yola çıkılarak X ile Y arasındaki korelasyon negatif olduğunda, $a, b = \rho_{xy}$, $\beta(x)$, C_x ve $a \neq b$ için,

$$d_1^* = \bar{y}_{sis}, d_2^* = \bar{y}_{sis} \frac{a \bar{x}_{sis} + b}{a \bar{X} + b} \text{ ve } d_3^* = \bar{y}_{sis} \left(\frac{a \bar{x}_{sis} + b}{a \bar{X} + b} \right)^2$$

şeklinde tanımlanırsa $\sum_{i=1}^3 \omega_i^* = 1$ için; önerilen tahmin edici,

$$\begin{aligned}
t_{3p}^* &= \sum_{i=1}^3 d_i^* \omega_i^* \\
&= \omega_1^* \bar{y}_{\text{sis}} + \omega_2^* \bar{y}_{\text{sis}} \frac{\bar{a}\bar{x}_{\text{sis}} + b}{\bar{a}\bar{X} + b} + \omega_3^* \bar{y}_{\text{sis}} \left(\frac{\bar{a}\bar{x}_{\text{sis}} + b}{\bar{a}\bar{X} + b} \right)^2
\end{aligned} \tag{4.19}$$

biçimindedir.

Eşitlik (4.19) ile verilen tahminde Eşitlik (2.11) ve (2.12) yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
t_{3p}^* &= \omega_1^* \bar{Y}(e_0 + 1) + \omega_2^* \bar{Y}(e_0 + 1) \frac{\bar{a}\bar{X}(e_1 + 1) + b}{\bar{a}\bar{X} + b} + \omega_3^* \bar{Y}(e_0 + 1) \left[\frac{\bar{a}\bar{X}(e_1 + 1) + b}{\bar{a}\bar{X} + b} \right]^2 \\
&= \bar{Y}(e_0 + 1) \left[\omega_1^* + \omega_2^* \left(1 + \frac{\bar{a}\bar{X}}{\bar{a}\bar{X} + b} e_1 \right) + \omega_3^* \left(1 + \frac{\bar{a}\bar{X}}{\bar{a}\bar{X} + b} e_1 \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

olur. Burada $v = \frac{\bar{a}\bar{X}}{\bar{a}\bar{X} + b}$ yazılırsa,

$$t_{3p}^* = \bar{Y}(e_0 + 1) \left[\omega_1^* + \omega_2^* (1 + v e_1) + \omega_3^* (1 + v e_1)^2 \right]$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapıldığında tahmin edici,

$$\begin{aligned}
t_{3p}^* &= \bar{Y} \left(\omega_1^* + \omega_1^* e_0 + \omega_2^* + \omega_2^* e_0 + \omega_2^* v e_1 + \omega_2^* v e_0 e_1 + \omega_3^* + \omega_3^* e_0 + 2\omega_3^* v e_0 e_1 + \omega_3^* v e_1 + \omega_3^* v^2 e_1^2 \right) \\
&= \bar{Y} \left[(\omega_1^* + \omega_2^* + \omega_3^*) + e_0 (\omega_1^* + \omega_2^* + \omega_3^*) + v e_1 (\omega_2^* + 2\omega_3^*) + v e_0 e_1 (\omega_2^* + 2\omega_3^*) + \omega_3^* v^2 e_1^2 \right] \\
&= \bar{Y} \left[1 + e_0 + \omega^* v e_1 + \omega^* v e_0 e_1 + \omega_3^* v^2 e_1^2 \right]
\end{aligned} \tag{4.20}$$

$$= \bar{Y} \left[1 + e_0 + \omega^* v e_1 + O(e^2) \right] \tag{4.21}$$

olarak elde edilir.

Yanı bulabilmek için Eşitlik (4.20)' nin iki tarafından da $\bar{Y}$ çıkartılıp beklenen değer alınır,

$$E(t_{3p}^* - \bar{Y}) = \bar{Y} \left[E(e_0) + \omega^* v E(e_1) + \omega^* v E(e_0 e_1) + \omega_3^* v^2 E(e_1^2) \right]$$

elde edilir. Burada Eşitlik (2.14) yerine yazılırsa,

$$E(t_{3p}^* - \bar{Y}) = \bar{Y} \left[\omega^* v E(e_0 e_1) + \omega_3^* v^2 E(e_1^2) \right]$$

olarak bulunur. Eşitlik (2.16) ve (2.18) yerlerine yazılıp düzenlenirse yan,

$$\begin{aligned} E(t_{3p}^* - \bar{Y}) &= \bar{Y} \omega_3^* v^2 \frac{N-1}{Nn} C_x^2 [1 + (n-1)\rho_x] + \bar{Y} v \omega^* \frac{N-1}{Nn} \rho_{xy} C_x C_y \frac{\sqrt{1+(n-1)\rho_y}}{\sqrt{1+(n-1)\rho_x}} \\ &= \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}}{n} C_x^2 v [1 + (n-1)\rho_x] [\omega_3^* v + \omega^* \kappa \rho^*] \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Bu tahmin edicinin hata kareler ortalamasını bulabilmek için Eşitlik (4.21)' in iki tarafından da $\bar{Y}$ çıkartıldıktan sonra karesi ve beklenen değeri alınır,

$$HKO(t_{3p}^*) = E(t_{3p}^* - \bar{Y})^2 = E \left\{ \bar{Y} [e_0 + \omega^* v e_1 + O(e^2)] \right\}^2$$

olarak yazılır. Burada $\omega^* = \omega_2^* + 2\omega_3^*$ yazılırsa,

$$HKO(t_{3p}^*) \cong \bar{Y}^2 E(e_0 + \omega^* v e_1)^2$$

olur. Kare ifadesi açılıp, beklenen değer parantez içine dağıtılırsa,

$$HKO(t_{3p}^*) = \bar{Y}^2 [E(e_0^2) + 2\omega^* v E(e_1 e_0) + v^2 \omega^{*2} E(e_1^2)]$$

biçiminde bulunur. Eşitlik (2.15), (2.16) ve (2.18) yerlerine yazılırsa,

$$HKO(t_{3p}^*) = \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \left(C_y^2 \frac{[1 + (n-1)\rho_{yy}]}{[1 + (n-1)\rho_{xx}]} + 2\omega^* v \rho_{xy} C_x C_y \frac{\sqrt{1+(n-1)\rho_{yy}}}{\sqrt{1+(n-1)\rho_{xx}}} + \omega^{*2} v^2 C_x^2 \right)$$

bulunur. Burada, $\frac{\sqrt{1+(n-1)\rho_{yy}}}{\sqrt{1+(n-1)\rho_{xx}}} = \rho^*$ ve $\kappa = \rho_{xy} \frac{C_y}{C_x}$ olarak yazılıp gerekli düzenlemeler

yapılırsa hata kareler ortalaması

$$\begin{aligned}
\text{HKO}(t_{3p}^*) &= \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] (\rho^{*2} C_y^2 + 2\omega^* v \rho_{xy} C_x C_y \rho^* + 2\omega^{*2} v^2 C_x^2) \\
&= \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] [C_y^2 \rho^{*2} + \omega^* v C_x^2 (\omega^* v + 2\kappa \rho^*)]
\end{aligned} \tag{4.22}$$

olarak elde edilir.

Hata kareler ortalamasını minimum yapacak ω^* değerini bulabilmek için, Eşitlik (4.22)'nin ω^* 'a göre türevi alınıp sıfıra eşitlenirse,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \text{HKO}(t_{3p})}{\partial \omega^*} &= 0 \\
\frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] (2v \rho_{xy} C_x C_y \rho^* + 2\omega^* v^2 C_x^2) &= 0
\end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Bu eşitlik çözüldüğünde optimum ω^* değeri,

$$\begin{aligned}
2\omega^* v^2 C_x^2 &= -2v \rho_{xy} C_x C_y \rho^* \\
\omega_{\text{OPT}}^* &= -\frac{\kappa \rho^*}{v} = -\frac{a\bar{X} + b}{a\bar{X}} \kappa \rho^*
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bulunan ω Eşitlik (4.22)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\text{HKO}(t_{3p}^*)_{\text{MIN}} &= \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \left[C_y^2 \rho^{*2} - \frac{\kappa \rho^*}{v} v C_x^2 \left(-\frac{\kappa \rho^*}{v} v + 2\kappa \rho^* \right) \right] \\
&= \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] (C_y^2 \rho^{*2} - \kappa^2 \rho^{*2} C_x^2)
\end{aligned}$$

(κ^2 terimi açık olarak yazılırsa)

$$= \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \left[C_y^2 \rho^{*2} - \rho_{xy}^2 \frac{C_y^2}{C_x^2} \rho^* C_x^2 \right]$$

$$HKO(t_{3p}^*)_{\min} = \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] [C_y^2 \rho^{*2} (1 - \rho_{xy}^2)]$$

biçimindeki minimum hata kareler ortalaması bulunmuş olur.

$$\omega_2^* + 2\omega_3^* = -\frac{\kappa \rho^*}{v} \quad (4.23)$$

olduğu gösterilmiştir ve tahmin edicinin tanımı gereği,

$$\sum_{i=1}^3 \omega_i^* = 1 \quad (4.24)$$

olduğu bilinmektedir. Sadece Eşitlik (4.23) ve (4.24) kullanılarak ω_1^* , ω_2^* ve ω_3^* 'ın değerlerini hesaplayabilmek mümkün değildir. Bu sabitlerin değerlerini bulabilmek için üçüncü bir eşitliğin daha yazılması gereklidir. $B(d_i^*)$, i. ortalama tahmininin yanını göstermek üzere,

$$\sum_{i=1}^3 B(d_i^*) = 0 \quad (4.25)$$

eşitliğini üçüncü eşitlik olarak alıp; Eşitlik (4.23), (4.24) ve (4.25)' i matris formunda yazarsak,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ B(d_1^*) & B(d_2^*) & B(d_3^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^* \\ \omega_2^* \\ \omega_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\kappa \rho^*}{v} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Burada,

$$B(d_1^*) = B(\bar{y}_{\text{sis}}) = 0$$

$$B(d_2^*) = B(\bar{y}_{\text{sis}} \frac{a\bar{x}_{\text{sis}} + b}{a\bar{X} + b}) = \frac{N-1}{Nn} \bar{Y} v C_x C_y \rho_{xy} \sqrt{1 + (n-1)\rho_{xx}} \sqrt{1 + (n-1)\rho_{yy}}$$

$$B(d_3^*) = B\left[\left(\bar{y}_{\text{sis}} \frac{a\bar{x}_{\text{sis}} + b}{a\bar{X} + b}\right)^2\right] = \frac{N-1}{Nn} \bar{Y} C_x^2 v [1 + (n-1)\rho_{xx}] (v + 2\kappa \rho^*)$$

olur.

Eşitlik (4.26)' da verilen matris çözülürse;

$$\begin{bmatrix} \omega_1^* \\ \omega_2^* \\ \omega_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\kappa \rho^*}{\upsilon} + \frac{\kappa^2 \rho^{*2}}{\upsilon^2} \\ -\kappa \rho^* (2\kappa \rho^* + \upsilon) \\ \frac{\kappa^2 \rho^{*2}}{\upsilon^2} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Bulunan değerler Eşitlik (4.19)' da verilen tahmin edicide ve Eşitlik (4.22)' de verilen hata kareler ortalamasında yerine yazılırsa;

$$t_{3p}^* = \left(1 + \frac{\kappa \rho^*}{\upsilon} + \frac{\kappa^2 \rho^{*2}}{\upsilon^2} \right) \bar{y}_{\text{sis}} - \left[\frac{\kappa \rho^* (2\kappa \rho^* + \upsilon)}{\upsilon^2} \right] \bar{y}_{\text{sis}} \frac{a\bar{X} + b}{a\bar{x}_{\text{sis}} + b} + \frac{\kappa^2 \rho^{*2}}{\upsilon^2} \bar{y}_{\text{sis}} \left(\frac{a\bar{X} + b}{a\bar{x}_{\text{sis}} + b} \right)^2$$

$$V(t_{3p}^*)_{\text{min}} = \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] [C_y^2 \rho^{*2} (1 - \rho_{xy}^2)]$$

olan minimum varyanslı ve yansız çarpımsal tahmin edici sınıfından bir çarpımsal tahmin edici elde edilmiş olur.

Bu tahmin edicinin varyansı ile sistematik örneklemenin basit tahmin edicisinin varyansının karşılaştırılması aşağıdaki gibi yapılabilir.

$$V(t_{3p}^*)_{\text{min}} < V(\bar{y}_{\text{sis}})$$

$$\frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] [\rho^{*2} S_y^2 (1 - \rho_{xy}^2)] < \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{yy}] S_Y^2$$

$$\frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \left[\frac{1 + (n-1)\rho_{yy}}{1 + (n-1)\rho_{xx}} \right] S_y^2 (1 - \rho_{xy}^2) < \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{yy}] S_Y^2$$

$$\frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{yy}] S_y^2 - \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{yy}] S_y^2 \rho_{xy}^2 < \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{yy}] S_Y^2$$

$$\frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{yy}] S_y^2 \rho_{xy}^2 > 0$$

$$[1 + (n-1)\rho_{yy}] > 0$$

$$\rho_{yy} > -1/(n-1)$$

koşulu altında t_{3p}^* tahmini sistematik örneklemenin basit ortalama tahmininden daha etkindir.

t_{3p}^* tahmin edicisinin varyans ile Shukla N. D.' nin çarpımsal tahmin edicisinin hata kareler ortalamasının karşılaştırılması aşağıdaki gibi yapılabilir.

$$V(t_{3p}^*)_{\text{MIN}} < \text{HKO}(\bar{y}_{\text{p sis}})$$

$$\frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \bar{Y}^2 [\rho^{*2} C_y^2 (1 - \rho_{xy}^2)] < \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \bar{Y}^2 [\rho^{*2} C_y^2 + C_x^2 (1 + 2\kappa\rho^*)]$$

$$-\rho^{*2} C_y^2 \rho_{xy}^2 < C_x^2 (1 + 2\kappa\rho^*)$$

$$0 < C_x^2 + 2C_x^2 \kappa\rho^* + \rho^{*2} C_y^2 \rho_{xy}^2$$

$$0 < 1 + 2\kappa\rho^* + \rho^{*2} \kappa^2$$

$$0 < (\kappa\rho^* + 1)^2$$

ifadesi her zaman doğru olduğu için, sadece $\kappa\rho^* = -1$ olması durumu haricinde t_{3p}^* tahmin edicisi Shukla'nın çarpımsal tahmin edicisinden daha etkindir.

t_{3p} tahmin edicisinin varyansı ile H.P. Singh, R.Tailor, N.K. Jatwa'nın (2011) çarpımsal tahmin edicisinin hata kareler ortalamasının karşılaştırılması aşağıdaki gibi yapılabilir.

$$V(t_{3p})_{\text{MIN}} < \text{HKO}(\bar{y}_{\text{PE}})$$

$$\frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \bar{Y}^2 [\rho^{*2} C_y^2 (1 - \rho_{xy}^2)] < \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \bar{Y}^2 \left[\rho^{*2} C_y^2 + C_x^2 \left(\frac{1}{4} + \kappa\rho^* \right) \right]$$

$$-\rho^{*2} C_y^2 \rho_{xy}^2 < C_x^2 \left(\frac{1}{4} + \kappa\rho^* \right)$$

$$0 < \frac{1}{4} C_x^2 + \rho_{xy} \frac{C_y}{C_x} C_x^2 \rho^* + \rho^{*2} C_y^2 \rho_{xy}^2$$

$$0 < \frac{1}{4}C_x^2 + \rho_{xy}C_yC_x\rho^* + \rho^{*2}C_y^2\rho_{xy}^2$$

$$0 < C_x^2 \left(\frac{1}{4} + \rho_{xy} \frac{C_y}{C_x} \rho^* + \rho^{*2} \frac{C_y^2}{C_x^2} \rho_{xy}^2 \right)$$

Burada C_x^2 daima pozitif olduğundan,

$$0 < \frac{1}{4} + \kappa\rho^* + \rho^{*2}\kappa^2$$

$$-\frac{1}{4} < \kappa\rho^* (1 + \kappa\rho^*)$$

koşulunun sağlandığı durumda t_{3p} tahmin edicisi H.P. Singh, R.Tailor, N.K. Jatwa'nın (2011) çarpımsal tahmin edicisinden daha etkindir.

4.5. Önerilen Ağırlıklandırılmış Yansız Oransal ve Çarpımsal Tahmin Edici Ailesi

Bölüm (3.3) ve (3.4)'de verilen, R. Singh & H.P. Singh (1998)'in d_r , d_p oransal ve çarpımsal tahmin edicileri ile Bölüm (4.3) ve (4.4)'te önerilen olan t_{3p} ve t_{3p}^* tahmin edicileri incelendiğinde, tüm tahmin edicilerin minimum hata kareler ortalaması terimlerinin aynı olduğu görülmüştür ve tüm bu tahminleri içeren, genelleştirilmiş, yansız tahmin edici sınıfı aşağıdaki gibi önerilmiştir:

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1 \text{ için;}$$

$$d_1 = \bar{y}_{sis}, d_2 = \bar{y}_{sis} \left(\frac{a\bar{x}_{sis} + b}{a\bar{X} + b} \right)^\alpha, d_3 = \bar{y}_{sis} \left(\frac{a\bar{x}_{sis} + b}{a\bar{X} + b} \right)^\beta$$

ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$t_G = \sum_{i=1}^3 \lambda_i d_i = \lambda_1 \bar{y}_{sis} + \lambda_2 \bar{y}_{sis} \left(\frac{a\bar{x}_{sis} + b}{a\bar{X} + b} \right)^\alpha + \lambda_3 \bar{y}_{sis} \left(\frac{a\bar{x}_{sis} + b}{a\bar{X} + b} \right)^\beta \quad (4.27)$$

biçimindedir.

Eşitlik (4.27) ile verilen tahminde Eşitlik (2.11) ve (2.12) yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} t_G &= \lambda_1^* \bar{Y}(e_0+1) + \lambda_2^* \bar{Y}(e_0+1) \left[\frac{a\bar{X}(e_1+1)+b}{a\bar{X}+b} \right]^\alpha + \lambda_3^* \bar{Y}(e_0+1) \left[\frac{a\bar{X}(e_1+1)+b}{a\bar{X}+b} \right]^\beta \\ &= \bar{Y}(e_0+1) \left[\lambda_1 + \lambda_2 \left(1 + \frac{a\bar{X}}{a\bar{X}+b} e_1 \right)^\alpha + \lambda_3 \left(1 + \frac{a\bar{X}}{a\bar{X}+b} e_1 \right)^\beta \right] \end{aligned}$$

biçimindedir. Burada $v = \frac{a\bar{X}}{a\bar{X}+b}$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} t_G &= \bar{Y}(e_0+1) \left[\lambda_1 + \lambda_2 (1+ve_1)^\alpha + \lambda_3 (1+ve_1)^\beta \right] \\ (1+ve_1)^\alpha &= \binom{\alpha}{0} (ve_1)^0 + \binom{\alpha}{1} (ve_1) + \binom{\alpha}{2} (ve_1)^2 + \dots \\ (1+ve_1)^\beta &= \binom{\beta}{0} (ve_1)^0 + \binom{\beta}{1} (ve_1) + \binom{\beta}{2} (ve_1)^2 + \dots \\ &\cong \bar{Y}(e_0+1) \left[\lambda_1 + \lambda_2 \left(1 + \alpha ve_1 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} v^2 e_1^2 \right) + \lambda_3 \left(1 + \beta ve_1 + \frac{\beta(\beta-1)}{2} v^2 e_1^2 \right) \right] \\ &= \bar{Y}(e_0+1) \left\{ (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + ve_1 (\lambda_2 \alpha + \lambda_3 \beta) + v^2 e_1^2 \left[\lambda_2 \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} + \lambda_3 \frac{\beta(\beta-1)}{2} \right] \right\} \\ &= \bar{Y} \left\{ 1 + ve_1 (\lambda_2 \alpha + \lambda_3 \beta) + v^2 e_1^2 \left[\lambda_2 \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} + \lambda_3 \frac{\beta(\beta-1)}{2} \right] + e_0 + ve_0 e_1 (\lambda_2 \alpha + \lambda_3 \beta) \right\} \end{aligned}$$

Burada $\lambda_G = \lambda_2 \alpha + \lambda_3 \beta$ olarak tanımlanırsa,

$$t_G \cong \bar{Y} \left\{ 1 + ve_1 \lambda_G + v^2 e_1^2 \left[\lambda_2 \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} + \lambda_3 \frac{\beta(\beta-1)}{2} \right] + e_0 + ve_0 e_1 \lambda_G \right\} \quad (4.28)$$

$$t_G = \bar{Y} [1 + e_0 + \lambda_G ve_1 + O(e^2)] \quad (4.29)$$

olarak elde edilir.

Yanı bulabilmek için Eşitlik (4.29)' un iki tarafından da $\bar{Y}$ çıkartılıp beklenen değer alınırsa,

$$E(t_G - \bar{Y}) = \bar{Y} \left\{ \upsilon \lambda_G E(e_1) + \upsilon^2 E(e_1^2) \left[\lambda_2 \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} + \lambda_3 \frac{\beta(\beta-1)}{2} \right] + E(e_0) + \upsilon \lambda_G E(e_0 e_1) \right\}$$

elde edilir. Burada Eşitlik (2.14) yerine yazılırsa,

$$E(t_G - \bar{Y}) = \bar{Y} \left\{ \upsilon^2 E(e_1^2) \left[\lambda_2 \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} + \lambda_3 \frac{\beta(\beta-1)}{2} \right] + \upsilon \lambda_G E(e_0 e_1) \right\}$$

olarak bulunur. Eşitlik (2.16) ve (2.18) yerlerine yazılıp düzenlenirse yan,

$$E(t_G - \bar{Y}) = \bar{Y} \frac{N-1}{Nn} C_x^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] \upsilon \left\{ \frac{\upsilon}{2} [\lambda_2 \alpha(\alpha-1) + \lambda_3 \beta(\beta-1)] + \lambda_G \kappa \rho^* \right\}$$

şeklinde bulunur.

Bu tahmin edicinin hata kareler ortalamasını bulabilmek için Eşitlik (4.29)' un iki tarafından da $\bar{Y}$ çıkartıldıktan sonra karesi ve beklenen değeri alınırsa,

$$HKO(t_G) = E(t_G - \bar{Y})^2 = E \left\{ \bar{Y} [\upsilon e_1 \lambda_G + e_0 + O(e^2)] \right\}^2$$

olarak yazılır. Kare ifadesi açılıp, beklenen değer parantez içine dağıtılırsa,

$$HKO(t_G) \cong \bar{Y}^2 [\upsilon^2 \lambda_G^2 E(e_1^2) + 2\upsilon \lambda_G E(e_0 e_1) + E(e_0^2)]$$

biçiminde bulunur. Eşitlik (2.15), (2.16) ve (2.18) yerlerine yazılırken

$$\frac{\sqrt{1 + (n-1)\rho_{yy}}}{\sqrt{1 + (n-1)\rho_{xx}}} = \rho^* \text{ ve } \kappa = \rho_{xy} \frac{C_y}{C_x}$$

olarak alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa hata kareler ortalaması,

$$HKO(t_G) = \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] (C_y^2 \rho^{*2} + 2\lambda_G \upsilon \rho_{xy} C_x C_y \rho^* + \lambda_G^2 \upsilon^2 C_x^2)$$

$$HKO(t_G) = \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] [C_y^2 \rho^{*2} + \lambda_G \upsilon C_x^2 (\lambda_G \upsilon + 2\kappa \rho^*)] \quad (4.30)$$

olarak elde edilir.

Hata kareler ortalamasını minimum yapacak λ değerini bulabilmek için, Eşitlik (4.30)' un λ_G 'e göre türevi alınıp sıfıra eşitlenirse,

$$\frac{\partial \text{HKO}(t_{3p})}{\partial \lambda_G} = 0$$

$$\frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] (2\nu\rho_{xy}C_xC_y\rho^* + 2\lambda_G\nu^2C_x^2) = 0$$

denklemini elde edilir. Bu eşitlik çözüldüğünde optimum λ_G değeri,

$$2\lambda_G\nu^2C_x^2 = -2\nu\rho_{xy}C_xC_y\rho^*$$

$$\lambda_{G_{OPT}} = -\frac{\kappa\rho^*}{\nu} = -\frac{a\bar{X} + b}{a\bar{X}} \kappa\rho^*$$

olarak bulunur. Bulunan $\lambda_{G_{OPT}}$, Eşitlik (4.30)' da yerine yazılırsa,

$$\text{HKO}(t_G)_{MIN} = \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \left[C_y^2\rho^{*2} - \frac{\kappa\rho^*}{\nu} \nu C_x^2 \left(-\frac{\kappa\rho^*}{\nu} \nu + 2\kappa\rho^* \right) \right]$$

olur. Verilen ifade düzenlenirse,

$$\text{HKO}(t_G)_{MIN} = \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] (C_y^2\rho^{*2} - \kappa^2\rho^{*2}C_x^2)$$

(κ^2 terimi açık olarak yazılırsa)

$$= \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \left[C_y^2\rho^{*2} - \rho_{xy}^2 \frac{C_y^2}{C_x^2} \rho^* C_x^2 \right]$$

$$\text{HKO}(t_G)_{MIN} = \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] [C_y^2\rho^{*2} (1 - \rho_{xy}^2)]$$

biçimindeki minimum hata kareler ortalaması bulunmuş olur.

$$\lambda_G = \lambda_2 \alpha + \lambda_3 \beta = -\frac{\kappa \rho^*}{\upsilon} \quad (4.31)$$

olduğu gösterilmiştir ve tahmin edicinin tanımı gereği

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1 \quad (4.32)$$

eşitliklerinden λ_1, λ_2 ve λ_3 'ün değerlerini hesaplayabilmek mümkün değildir. Bu sabitlerin değerlerini bulabilmek için üçüncü bir eşitliğin daha yazılması gereklidir. $B(d_1^*)$, i. ortalama tahmininin yanını göstermek üzere,

$$\sum_{i=1}^3 B(d_i) = 0 \quad (4.33)$$

eşitliğini üçüncü eşitlik olarak alıp; Eşitlik (4.31), (4.32) ve (4.33) matris formunda yazarsak,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & \beta \\ B(d_1) & B(d_2) & B(d_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\kappa \rho^* / \upsilon \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Burada,

$$B(d_1) = B(\bar{y}_{sis}) = 0$$

$$B(d_2) = B \left[\bar{y}_{sis} \left(\frac{a \bar{x}_{sis} + b}{a \bar{X} + b} \right)^\alpha \right] = \frac{N-1}{Nn} \bar{Y} C_x^2 [1 + (n-1) \rho_{xx}] \upsilon \alpha \left[\upsilon \frac{(\alpha-1)}{2} + \rho^* \kappa \right]$$

$$B(d_3) = B \left[\bar{y}_{sis} \left(\frac{a \bar{x}_{sis} + b}{a \bar{X} + b} \right)^\beta \right] = \frac{N-1}{Nn} \bar{Y} C_x^2 [1 + (n-1) \rho_{xx}] \upsilon \beta \left[\upsilon \frac{(\beta-1)}{2} + \rho^* \kappa \right]$$

olmaktadır. Eşitlik (4.34)' te verilen matris çözülürse;

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\kappa \rho^*}{v^2} \frac{1}{\alpha \beta (\alpha - \beta)} \left\{ \beta [v(\beta - 1) + 2\rho^* \kappa] - \alpha [v(\alpha - 1) + 2\rho^* \kappa] \right\} \\ \frac{\kappa \rho^*}{v^2} [v(\beta - 1) + 2\rho^* \kappa] \\ \frac{-\kappa^2 \rho^{*2}}{v^2} \frac{[v(\alpha - 1) + 2\rho^* \kappa]}{\beta (\alpha - \beta)} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

olarak bulunur. Bulunan değerler Eşitlik (4.27)' de verilen tahmin edicide ve Eşitlik (4.30)' da verilen hata kareler ortalamasında yerine yazılırsa;

$$t_G = 1 - \frac{\kappa \rho^*}{v^2} \frac{1}{\alpha \beta (\alpha - \beta)} \left\{ \beta [v(\beta - 1) + 2\rho^* \kappa] - \alpha [v(\alpha - 1) + 2\rho^* \kappa] \right\} \bar{y}_{\text{sis}} \\ - \frac{\kappa \rho^*}{v^2} [v(\beta - 1) + 2\rho^* \kappa] \bar{y}_{\text{sis}} \left(\frac{a \bar{x}_{\text{sis}} + b}{a \bar{X} + b} \right)^\alpha - \frac{\kappa^2 \rho^{*2}}{v^2} \frac{[v(\alpha - 1) + 2\rho^* \kappa]}{\beta (\alpha - \beta)} \bar{y}_{\text{sis}} \left(\frac{a \bar{x}_{\text{sis}} + b}{a \bar{X} + b} \right)^\beta$$

$$V(t_G)_{\text{MIN}} = \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] [C_y^2 \rho^{*2} (1 - \rho_{xy}^2)]$$

olan minimum varyanslı ve yansız oransal ve çarpımsal tahmin edici sınıfı elde edilmiş olur.

Bu tahmin edicinin varyansı ile sistematik örneklemenin basit tahmin edicisinin varyansının karşılaştırılması aşağıdaki gibi yapılabilir.

$$V(t_G)_{\text{MIN}} < V(\bar{y}_{\text{sis}})$$

$$\frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] [\rho^{*2} S_y^2 (1 - \rho_{xy}^2)] < \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{yy}] S_Y^2$$

$$\frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \frac{[1 + (n-1)\rho_{yy}]}{[1 + (n-1)\rho_{xx}]} S_y^2 (1 - \rho_{xy}^2) < \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{yy}] S_Y^2$$

$$\frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{yy}] S_y^2 - \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{yy}] S_y^2 \rho_{xy}^2 < \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{yy}] S_Y^2$$

$$\frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{yy}] S_y^2 \rho_{xy}^2 > 0$$

$$[1 + (n-1)\rho_{yy}] > 0$$

$$\rho_{yy} > -1/(n-1)$$

koşulu altında t_G tahmini sistematik örneklemenin basit ortalama tahmininden daha etkindir.

t_G tahmin edicisinin varyansı ile Swain A. K. P. C.' nin oransal tahmin edicisinin hata kareler ortalamasının karşılaştırılması aşağıdaki gibi yapılabilir.

$$V(t_G)_{\text{MIN}} < \text{HKO}(\bar{y}_{\text{r sis}})$$

$$\frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \bar{Y}^2 [\rho^{*2} C_y^2 (1 - \rho_{xy}^2)] < \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \bar{Y}^2 [\rho^{*2} C_y^2 + C_x^2 (1 - 2\kappa\rho^*)]$$

$$-\rho^{*2} C_y^2 \rho_{xy}^2 < C_x^2 (1 - 2\kappa\rho^*)$$

$$0 < C_x^2 - 2C_x^2 \kappa\rho^* + \rho^{*2} C_y^2 \rho_{xy}^2$$

$$0 < 1 - 2\kappa\rho^* + \rho^{*2} \kappa^2$$

$$0 < (\kappa\rho^* - 1)^2$$

ifadesi her zaman doğru olduğu için, sadece $\kappa\rho^* = 1$ olması durumu haricinde t_G tahmin edicisi Swain'in oransal tahmin edicisinden daha etkindir.

t_G tahmin edicisinin varyansı ile Shukla'nın çarpımsal tahmin edicisinin hata kareler ortalamasının karşılaştırılması aşağıdaki gibi yapılabilir.

$$V(t_G)_{\text{MIN}} < \text{HKO}(\bar{y}_{\text{p sis}})$$

$$\frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \bar{Y}^2 [\rho^{*2} C_y^2 (1 - \rho_{xy}^2)] < \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \bar{Y}^2 [\rho^{*2} C_y^2 + C_x^2 (1 + 2\kappa\rho^*)]$$

$$-\rho^{*2} C_y^2 \rho_{xy}^2 < C_x^2 (1 + 2\kappa\rho^*)$$

$$0 < C_x^2 + 2C_x^2 \kappa\rho^* + \rho^{*2} C_y^2 \rho_{xy}^2$$

$$0 < 1 + 2\kappa\rho^* + \rho^{*2} \kappa^2$$

$$0 < (\kappa\rho^* + 1)^2$$

ifadesi her zaman doğru olduğu için, sadece $\kappa\rho^* = -1$ olması durumu haricinde t_G tahmin edicisi Shukla'nın çarpımsal tahmin edicisinden daha etkindir.

t_G tahmin edicisinin varyansı ile H.P. Singh, R.Tailor, N.K. Jatwa'nın (2011) oransal tahmin edicisinin hata kareler ortalamasının karşılaştırılması aşağıdaki gibi yapılabilir.

$$V(t_G)_{\text{MIN}} < \text{HKO}(\bar{y}_{\text{RE}})$$

$$\frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \bar{Y}^2 [\rho^{*2} C_y^2 (1 - \rho_{xy}^2)] < \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \bar{Y}^2 \left[\rho^{*2} C_y^2 + C_x^2 \left(\frac{1}{4} - \kappa\rho^* \right) \right]$$

$$-\rho^{*2} C_y^2 \rho_{xy}^2 < C_x^2 \left(\frac{1}{4} - \kappa\rho^* \right)$$

$$\frac{1}{4} C_x^2 - \rho_{xy} \frac{C_y}{C_x} C_x^2 \rho^* + \rho^{*2} C_y^2 \rho_{xy}^2 > 0$$

$$\frac{1}{4} C_x^2 - \rho_{xy} C_y C_x \rho^* + \rho^{*2} C_y^2 \rho_{xy}^2 > 0$$

$$C_x^2 \left(\frac{1}{4} - \rho_{xy} \frac{C_y}{C_x} \rho^* + \rho^{*2} \frac{C_y^2}{C_x^2} \rho_{xy}^2 \right) > 0$$

(Burada C_x^2 daima pozitif olduğundan)

$$0 < \frac{1}{4} - \kappa\rho^* + \rho^{*2} \kappa^2$$

$$\frac{1}{4} > \kappa\rho^* (1 - \kappa\rho^*)$$

koşulunun sağlandığı durumda t_G tahmin edicisi H.P. Singh, R.Tailor, N.K. Jatwa'nın (2011) oransal tahmin edicisinden daha etkindir.

t_G tahmin edicisinin varyansı ile H.P. Singh, R.Tailor, N.K. Jatwa'nın (2011) çarpımsal tahmin edicisinin hata kareler ortalamasının karşılaştırılması aşağıdaki gibi yapılabilir.

$$V(t_G)_{\min} < HKO(\bar{y}_{PE})$$

$$\frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \bar{Y}^2 [\rho^{*2} C_y^2 (1 - \rho_{xy}^2)] < \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \bar{Y}^2 \left[\rho^{*2} C_y^2 + C_x^2 \left(\frac{1}{4} + \kappa \rho^* \right) \right]$$

$$-\rho^{*2} C_y^2 \rho_{xy}^2 < C_x^2 \left(\frac{1}{4} + \kappa \rho^* \right)$$

$$\frac{1}{4} C_x^2 + \rho_{xy} \frac{C_y}{C_x} C_x^2 \rho^* + \rho^{*2} C_y^2 \rho_{xy}^2 > 0$$

$$\frac{1}{4} C_x^2 + \rho_{xy} C_y C_x \rho^* + \rho^{*2} C_y^2 \rho_{xy}^2 > 0$$

$$C_x^2 \left(\frac{1}{4} + \rho_{xy} \frac{C_y}{C_x} \rho^* + \rho^{*2} \frac{C_y^2}{C_x^2} \rho_{xy}^2 \right) > 0$$

(Burada C_x^2 daima pozitif olduğundan)

$$\frac{1}{4} + \kappa \rho^* + \rho^{*2} \kappa^2 > 0$$

$$-\frac{1}{4} < \kappa \rho^* (1 + \kappa \rho^*)$$

koşulunun sağlandığı durumda t_G tahmin edicisi H.P. Singh, R.Tailor, N.K. Jatwa'nın (2011) çarpımsal tahmin edicisinden daha etkindir.

Bu aileden elde edilebilecek çeşitli tahmin ediciler, $\psi = \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}]$ olmak üzere,

Çizelge 4.2' de verilmiştir.

Literatürde yer alan ve önerilen tahmin edicilerle, yanları ve hata kareler ortalamaları, Çizelge 4.3' te verilmiştir.

Çizelge 4.2. Önerilen Ağırlıklandırılmış Oransal ve Çarpımsal Yansız Tahmin Edici Ailesinden Elde Edilebilecek Çeşitli Yansız ve Minimum Varyanslı Tahminler

Tahmin Ediciler	α	β	a	b
$t_G = \lambda_1 \bar{y}_{\text{sis}} + \lambda_2 \bar{y}_{\text{sis}} \left(\frac{a \bar{x}_{\text{sis}} + b}{a \bar{X} + b} \right)^\alpha + \lambda_3 \bar{y}_{\text{sis}} \left(\frac{a \bar{x}_{\text{sis}} + b}{a \bar{X} + b} \right)^\beta$	α	β	a	b
$t_{G_1} = \lambda_1 \bar{y}_{\text{sis}} + (1 - \lambda_1) \bar{y}_{\text{sis}} \left(\frac{a \bar{x}_{\text{sis}} + b}{a \bar{X} + b} \right)^\alpha$	$\alpha = \beta$		a	b
$t_{G_2} = \bar{y}_{\text{sis}}$	0	0	a	b
	α	β	0	1
$t_{G_3} = \lambda_1 \bar{y}_{\text{sis}} + \lambda_2 \bar{y}_{\text{sis}} \left(\frac{a \bar{x}_{\text{sis}} + b}{a \bar{X} + b} \right) + \lambda_3 \bar{y}_{\text{sis}} \left(\frac{a \bar{x}_{\text{sis}} + b}{a \bar{X} + b} \right)^2$	1	2	a	b
$t_{G_4} = \lambda_1 \bar{y}_{\text{sis}} + \lambda_2 \bar{y}_{\text{sis}} \left(\frac{\bar{x}_{\text{sis}}}{\bar{X}} \right)^\alpha + \lambda_3 \bar{y}_{\text{sis}} \left(\frac{\bar{x}_{\text{sis}}}{\bar{X}} \right)^\beta$	> 0	> 0	1	0
	α	β	C_x ρ_{xy} $\beta_2(x)$	0
	< 0	< 0	1	0
$t_{G_5} = \lambda_1 \bar{y}_{\text{sis}} + \lambda_2 \bar{y}_{\text{sis}} \left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}_{\text{sis}}} \right)^\alpha + \lambda_3 \bar{y}_{\text{sis}} \left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}_{\text{sis}}} \right)^\beta$	< 0	< 0	1	0

Çizelge 4.2. Önerilen Ağırlıklandırılmış Oransal ve Çarpımsal Yansız Tahmin Edici Ailesinden Elde Edilebilecek Çeşitli Yansız ve Minimum Varyanslı Tahminler (devamı)

Tahmin Ediciler	α	β	a	b
$t_{G_6} = \lambda_1 \bar{y}_{sis} + \lambda_2 \bar{y}_{sis} \left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}_{sis}} \right)^\alpha + \lambda_3 \bar{y}_{sis} \left(\frac{\bar{x}_{sis}}{\bar{X}} \right)^\beta$	< 0	> 0	1	0
$t_{G_7} = \lambda_1 \bar{y}_{sis} + \lambda_2 \bar{y}_{sis} \left(\frac{\bar{x}_{sis} + C_x}{\bar{X} + C_x} \right)^\alpha + \lambda_3 \bar{y}_{sis} \left(\frac{\bar{x}_{sis} + C_x}{\bar{X} + C_x} \right)^\beta$	> 0	> 0	1	C_x
$t_{G_8} = \lambda_1 \bar{y}_{sis} + \lambda_2 \bar{y}_{sis} \left(\frac{\bar{x}_{sis} + \rho_{xy}}{\bar{X} + \rho_{xy}} \right)^\alpha + \lambda_3 \bar{y}_{sis} \left(\frac{\bar{x}_{sis} + \rho_{xy}}{\bar{X} + \rho_{xy}} \right)^\beta$	> 0	> 0	1	ρ_{xy}
$t_{G_9} = \lambda_1 \bar{y}_{sis} + \lambda_2 \bar{y}_{sis} \left(\frac{\bar{x}_{sis} + \beta_2(x)}{\bar{X} + \beta_2(x)} \right)^\alpha + \lambda_3 \bar{y}_{sis} \left(\frac{\bar{x}_{sis} + \beta_2(x)}{\bar{X} + \beta_2(x)} \right)^\beta$	> 0	> 0	1	$\beta_2(x)$
$t_{G_{10}} = \lambda_1 \bar{y}_{sis} + \lambda_2 \bar{y}_{sis} \left(\frac{\bar{X} + C_x}{\bar{x}_{sis} + C_x} \right)^\alpha + \lambda_3 \bar{y}_{sis} \left(\frac{\bar{X} + C_x}{\bar{x}_{sis} + C_x} \right)^\beta$	< 0	< 0	1	C_x
$t_{G_{11}} = \lambda_1 \bar{y}_{sis} + \lambda_2 \bar{y}_{sis} \left(\frac{\bar{X} + \rho_{xy}}{\bar{x}_{sis} + \rho_{xy}} \right)^\alpha + \lambda_3 \bar{y}_{sis} \left(\frac{\bar{X} + \rho_{xy}}{\bar{x}_{sis} + \rho_{xy}} \right)^\beta$	< 0	< 0	1	ρ_{xy}
$t_{G_{12}} = \lambda_1 \bar{y}_{sis} + \lambda_2 \bar{y}_{sis} \left(\frac{\bar{X} + \beta_2(x)}{\bar{x}_{sis} + \beta_2(x)} \right)^\alpha + \lambda_3 \bar{y}_{sis} \left(\frac{\bar{X} + \beta_2(x)}{\bar{x}_{sis} + \beta_2(x)} \right)^\beta$	< 0	< 0	1	$\beta_2(x)$

Çizelge 4.3. Sistematik Örnekleme İçin Önerilen Tahmin Ediciler Yanları ve Hata Kareler Ortalamaları/ Varyansları

<i>Tahmin Ediciler</i>	<i>Yan & HKO / Varyans</i>
Swain A. K. P. C. (1964) $\bar{y}_{r\text{sis}}^* = \frac{\bar{y}_{\text{sis}}}{\bar{x}_{\text{sis}}} \bar{X}$	$\text{Yan: } \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}}{n} C_x^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] (1 - \kappa\rho^*)$ $\text{HKO: } \frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] [C_y^2 \rho^{*2} + C_x^2 (1 - 2\kappa\rho^*)]$
Shukla N.D. (1971) $\bar{y}_{p\text{sis}}^* = \frac{\bar{x}_{\text{sis}}}{\bar{y}_{\text{sis}}} \bar{X}$	$\text{Yan: } \frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] C_x^2 \kappa\rho^*$ $\text{HKO: } \frac{N-1}{Nn} \bar{Y}^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] [C_y^2 \rho^{*2} + C_x^2 (1 + 2\kappa\rho^*)]$
R. Singh & H. P. Singh (1998) $d_r = \omega_1 \bar{y}_{\text{sis}} + \omega_2 \bar{y}_{\text{sis}} \frac{\bar{X}}{\bar{x}_{\text{sis}}} + \omega_3 \bar{y}_{\text{sis}} \left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}_{\text{sis}}} \right)^2$	Yansız $\text{Varyans: } \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{yy}] (1 - \rho^2) S_y^2$
R. Singh & H. P. Singh (1998) $d_p = \omega_1 \bar{y}_{\text{sis}} + \omega_2 \bar{y}_{\text{sis}} \frac{\bar{x}_{\text{sis}}}{\bar{X}} + \omega_3 \bar{y}_{\text{sis}} \left(\frac{\bar{x}_{\text{sis}}}{\bar{X}} \right)^2$	Yansız $\text{Varyans: } \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{yy}] (1 - \rho^2) S_y^2$
H. P. Singh, R. Tailor, N. K. Jatwa (2011) $\bar{y}_{\text{RE}}^* = \bar{y}_{\text{sis}} \exp \left(\frac{\bar{X} - \bar{x}_{\text{sis}}}{\bar{X} + \bar{x}_{\text{sis}}} \right)$	$\text{Yan: } \frac{N-1}{Nn} \bar{Y} \frac{C_x^2}{8} [1 + (n-1)\rho_{xx}] (3 - 4\kappa\rho^*)$ $\text{HKO: } \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \left[C_y^2 \rho^{*2} + C_x^2 \left(\frac{1}{4} - \kappa\rho^* \right) \right]$

Çizelge 4.3. Sistematik Örneklemeye İçin Önerilen Tahmin Ediciler Yanları ve Hata Kareler Ortalamaları/ Varyansları (devamı)

Tahmin Ediciler	Yan & HKO / Varyans
H. P. Singh, R. Tailor, N. K. Jatwa (2011) $\bar{y}_{PE} = \bar{y}_{sis} \exp\left(\frac{\bar{x}_{sis} - \bar{X}}{\bar{X} + \bar{x}_{sis}}\right)$	$\underline{\text{Yan:}} \frac{N-1}{Nn} \frac{\bar{Y}}{8} C_x^2 [1 + (n-1)\rho_x] (4\kappa\rho^* - 1)$ $\underline{\text{HKO:}} \frac{N-1}{Nn} [1 + (n-1)\rho_{xx}] \left[C_y^2 \rho^{*2} + C_x^2 \left(\frac{1}{4} + \kappa\rho^* \right) \right]$
R. Singh ve diğerleri (2012) $t_p^* = \left[w_1 \bar{y}_{sis} + w_2 (\bar{X} - \bar{x}_{sis}) \right] \left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}_{sis}} \right)$	$\underline{\text{Yan:}} \bar{Y} [(w_1 - 1) - w_1 \theta C_0 C_1] + \theta C_1^2 (w_2 \bar{X} + w_1 \bar{Y})$ $\underline{\text{HKO:}} \bar{Y}^2 \left[1 - \frac{(A_1 A_4^2 + 2A_3 A_4 A_5 + A_1 A_5^2)}{A_1 A_2 - A_3^2} \right]$ $A_1 = [1 + \theta(C_0^2 + 3C_1^2 - 4C_0 C_1)], A_2 = \theta C_1^2, A_3 = (\theta C_0 C_1 - 2\theta C_1^2)$ $A_4 = (1 - \theta C_0 C_1 + \theta C_1^2), A_5 = \theta C_1^2$
R. Singh ve diğerleri (2012) $t_4 = \left[k_1 \bar{y}_{sis} + k_2 (\bar{X} - \bar{x}_{sis}) \right] \exp\left(\frac{\bar{A} - \bar{a}^*}{\bar{A} + \bar{a}^*}\right)$	$\underline{\text{Yan:}} \bar{Y} \left[(k_1 - 1) + k_1 \theta \left(\frac{3C_1^2}{8(N+1)^2} - \frac{C_0 C_1}{2(N+1)} \right) \right] + k_2 \bar{X} \frac{\theta C_1^2}{2(N+1)}$ $\underline{\text{HKO:}} \bar{Y}^2 \left[(k_1 - 1)^2 + k_1^2 A_1 - 2k_1 A_2 \right] + k_2^2 A_3 - k_2 A_4 + 2k_1 k_2 A_5$ $A_1 = \theta \left[C_0^2 + \frac{C_1^2}{(N+1)^2} - \frac{2C_0 C_1}{(N+1)} \right], A_2 = \theta \left[\frac{3C_1^2}{8(N+1)^2} - \frac{C_0 C_1}{2(N+1)} \right]$ $A_3 = \bar{X}^2 \theta C_1^2, A_4 = \bar{X} \bar{Y} \frac{\theta C_1^2}{(N+1)}, A_5 = \bar{X} \bar{Y} \theta \left[\frac{C_1^2}{(N+1)} - C_0 C_1 \right]$

Çizelge 4.3. Sistematik Örneklemeye İçin Önerilen Tahmin Ediciler Yanları ve Hata Kareler Ortalamaları/ Varyansları (devamı)

<i>Tahmin Ediciler</i>	<i>Yan & HKO / Varyans</i>
	<u>Yan:</u> $-\bar{Y}(1-Bm_1-Em_2)$ <u>HKO:</u> $\bar{Y}^2 \left(1 - \frac{B^2C - 2BDE + AE^2}{AC - D^2} \right),$ $A = \left[1 + \lambda \left[\theta_y C_y^2 + \theta_x C_x^2 \left(\alpha^2 v^2 g(2g-1) - 4g\alpha \rho^* \kappa \right) \right] \right]$ $B = \left[1 + \lambda \theta_x C_x^2 \left(\frac{g(g-1)}{2} \alpha^2 v^2 - g\alpha \rho^* \kappa \right) \right]$ $C = \left[1 + \lambda \left[\theta_y C_y^2 + \theta_x C_x^2 \left(\frac{v^2 \delta(\delta+1)}{2} - 2\delta \rho^* \kappa \right) \right] \right]$ $D = \left[1 + \lambda \left[\theta_y C_y^2 + \theta_x C_x^2 \left(\frac{v^2 A^*}{8} - v(\delta + 2g\alpha) \rho^* \kappa \right) \right] \right]$ $E = \left[1 + \lambda \theta_x C_x^2 \left(\frac{\delta(\delta+2)}{8} v^2 - \frac{\delta v}{2} \rho^* \kappa \right) \right]$
H. P. Singh ve diğerleri (2012)	
$d = m_1 \bar{y}_{sis} \left[\frac{\bar{X}^*}{\alpha \bar{x}_{sis} + (1-\alpha) \bar{X}} \right]^g + m_2 \bar{y}_{sis} \exp \left[\frac{\delta(\bar{X}^* - \bar{x}_{sis})}{\bar{X}^* + \bar{x}_{sis}} \right]$ $m_{1MIN} = \frac{BC - DE}{AC - D^2}, \quad m_{2MIN} = \frac{EA - DB}{AC - D^2}$	

Çizelge 4.3. Sistematik Örneklemeye İçin Önerilen Tahmin Ediciler Yanları ve Hata Kareler Ortalamaları/ Varyansları (devamı)

Önerilen Tahmin Ediciler	Yan & HKO / Varyans
$t_{1p} = \left[w_1 \bar{y}_{sis} + w_2 (\bar{X} - \bar{x}_{sis}) \right] \exp \left(\frac{\eta(\bar{X} - \bar{x}_{sis})}{\eta(\bar{X} + \bar{x}_{sis}) + 2\lambda} \right)$	<u>Yan:</u> $\bar{Y} \left[(w_1 - 1) - w_1 \gamma \theta \left(\frac{3}{2} \gamma C_1^2 - C_0 C_1 \right) \right] + w_2 \bar{X} \gamma \theta C_1^2$ <u>HKO:</u> $\bar{Y}^2 + \left(\frac{2DE - BC}{2(AC - E^2)} \right)^2 A + \frac{(2DE - BC)B}{2(AC - E^2)} + \left(\frac{2D(AC - E^2) + 2DE - BCE}{2(AC - E^2)} \right)$ $- \left(\frac{2D^2(AC - E^2) + 2D^2E - BCED}{C(AC - E^2)} \right) - E(2DE - BC) \left(\frac{2D(AC - E^2) + 2DE - BCE}{2C(AC - E^2)^2} \right)$ $A = \bar{Y}^2 [1 + \theta C_0^2 + 4\gamma^2 \theta C_1^2 - 4\gamma \theta C_0 C_1], B = \bar{Y}^2 [2\gamma \theta C_0 C_1 - 3\gamma^2 \theta C_1^2 - 2]$ $C = \bar{X}^2 \theta C_1^2, D = \gamma \bar{X} \bar{Y} \theta C_1^2, E = \bar{X} \bar{Y} \theta (C_0 C_1 - 2\gamma C_1^2)$
$t_{2p} = \bar{y}_{sis} \left(\frac{a\bar{X} + b}{a\bar{x}_{sis} + b} \right)^\alpha, \alpha_{min} = \frac{\kappa \rho^*}{v}$	<u>Yan:</u> $\frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}}{n} C_x^2 [1 + (n-1)\rho_{xx}] \alpha v \left[\frac{(\alpha-1)}{2} v - \kappa \rho^* \right]$ <u>HKO:</u> $\frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] [\rho^{*2} C_y^2 (1 - \rho_{xy}^2)]$
$t_{3p} = \omega_1 \bar{y}_{sis} + \omega_2 \bar{y}_{sis} \frac{a\bar{X} + b}{a\bar{x}_{sis} + b} + \omega_3 \bar{y}_{sis} \left(\frac{a\bar{X} + b}{a\bar{x}_{sis} + b} \right)^2$ $\omega_1 = 1 - \frac{\kappa \rho^*}{v} + \frac{\kappa^2 \rho^{*2}}{v^2}, \omega_2 = \frac{\kappa \rho^*}{v} - \frac{2\kappa^2 \rho^{*2}}{v^2}, \omega_3 = \frac{\kappa^2 \rho^{*2}}{v^2}$	<u>Yansız</u> <u>Varyans:</u> $\frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] [C_y^2 \rho^{*2} (1 - \rho_{xy}^2)]$

Çizelge 4.3. Sistematik Örnekleme İçin Önerilen Tahmin Ediciler Yanları ve Hata Kareler Ortalamaları/ Varyansları (devamı)

Önerilen Tahmin Ediciler	Yan & HKO / Varyans
$t_{3p}^* = \omega_1^* \bar{y}_{sis} + \omega_2^* \bar{y}_{sis} \frac{\bar{a}\bar{x}_{sis} + b}{a\bar{X} + b} + \omega_3^* \bar{y}_{sis} \left(\frac{\bar{a}\bar{x}_{sis} + b}{a\bar{X} + b} \right)^2$ $\omega_1^* = 1 + \frac{\kappa\rho^*}{v} + \frac{\kappa^2\rho^{*2}}{v^2}, \quad \omega_2^* = \frac{-\kappa\rho^* (2\kappa\rho^* + v)}{v^2}, \quad \omega_3^* = \frac{\kappa^2\rho^{*2}}{v^2}$	<u>Yansız</u> <u>Varyans:</u> $\frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] [C_y^2 \rho^{*2} (1 - \rho_{xy}^2)]$
$t_G = \lambda_1 \bar{y}_{sis} + \lambda_2 \bar{y}_{sis} \left(\frac{\bar{a}\bar{x}_{sis} + b}{a\bar{X} + b} \right)^\alpha + \lambda_3 \bar{y}_{sis} \left(\frac{\bar{a}\bar{x}_{sis} + b}{a\bar{X} + b} \right)^\beta$ $\lambda_1 = 1 - \frac{\kappa\rho^*}{v^2} \frac{1}{\alpha\beta(\alpha-\beta)} \left\{ \beta[v(\beta-1) + 2\rho^*\kappa] - \alpha[v(\alpha-1) + 2\rho^*\kappa] \right\}$ $\lambda_2 = \frac{\kappa\rho^*}{v^2} [v(\beta-1) + 2\rho^*\kappa], \quad \lambda_3 = \frac{-\kappa^2\rho^{*2}}{v^2} \frac{[v(\alpha-1) + 2\rho^*\kappa]}{\beta(\alpha-\beta)}$	<u>Yansız</u> <u>Varyans:</u> $\frac{N-1}{N} \frac{\bar{Y}^2}{n} [1 + (n-1)\rho_{xx}] [C_y^2 \rho^{*2} (1 - \rho_{xy}^2)]$

5. SAYISAL ÖRNEK

Bu bölümde sayısal gösterimlerde bulunabilmek amacıyla 2013 yılında, İstanbul'un Kadıköy ilçesindeki hava kalitesi izleme istasyonunda kaydedilmiş olan partikül madde miktarı (PM10) ve azotoksit (NO) ölçümleri kullanılmıştır.

Hava yaşamsal özellikteki bir çevresel ögedir. Yaşamın sürdürülmesi için zorunluluk olan bu çevresel öge, fiziksel bir etken olarak insan yaşamının olmazsa olmazlarından. Günde kişi başına 10 bin ile 20 bin litre arasında hava solumaktayız. Bu yüksek miktar soluduğumuz havanın içinde bulunan maddelerin etkilerini çok küçük konsantrasyonlarda da olsa önemli kılmaktadır [13]. Hava kirliliği, canlıların sağlığını olumsuz yönde etkileyen veya maddi zararlar meydana getiren havadaki yabancı maddelerin, normalin üzerinde miktar ve yoğunluğa ulaşmasıdır. İnsanların çeşitli faaliyetleri sonucu meydana gelen üretim ve tüketim aktiviteleri sırasında ortaya çıkan atıklarla hava tabakası kirlenerek, yeryüzündeki canlı hayatını olumsuz yönde etkilemektedir. En önemli hava kirleticileri Partikül Madde (PM), Kükürt dioksit (SO₂), Karbon monoksit (CO), Karbondioksit (CO₂), Ozon (O₃), Azotoksitler (NO_x) ve Hidrokarbonlar (HC)'dir.

Partikül Madde, atmosferdeki ağırlıkları nedeniyle hızla çökebilen büyük partiküllerin dışında, atmosferde yayılan çok küçük tanecikli katı veya sıvı partiküllerdir. Kütle ve bileşimi yönünden; aerodinamik çapı 2,5 µm den büyük kaba partiküller, aerodinamik çapı 2,5 µm den küçük ince partiküller olarak iki gruba ayrılır. İnce partiküller; ikincil olarak oluşan aerosoller (gaz-partikül dönüşümü), yanma sonucunda oluşan partikülleri, yoğunlaşan organik ve metal buharlarını içerir. Büyük partiküller; genelde yer kabuğu materyalleri yol ve endüstrilerden atmosfere verilen tozları içerir. Partiküler madde, yakıtların yanması, dizel motorlar, inşaat ve endüstriyel faaliyetler, ikincil aerosoller (amonyak, sülfür ve azot oksitlerinin havada reaksiyonu) bitki polenleri ve yerden kalkan tozlar gibi birçok doğal kaynaktan oluşabilir. Partiküler madde, nitelik ve niceliği bakımından; tanecik boyutları, yoğunluğu, kimyasal bileşimi ve sağlık etkileri potansiyeline bağlı olarak geniş çapta değişim gösterir [13].

NO, memeli vücudundaki yararlı veya zararlı birçok fizyolojik ve patolojik süreçte rol oynayan önemli bir sinyal molekülüdür [11]. Uygun dozlarda NO üretimi, birçok organın zarar görmesinin engellenmesinde (karaciğerin iskemik hasardan korunması gibi) önemlidir.

Ancak yüksek dozlarda NO, doğrudan doku zehirlenmesine yol açtığı gibi, septik şokla tetiklenen dolaşım sistemi çöküşüne de katkıda bulunur. Ayrıca kronik NO salınımı, Tip I juvenil diyabet, multiple skleroz, artrit, ülseratif kolit gibi birçok iltihabi hastalık ve kanser türüyle ilişkilendirilmiştir [24].

Havadaki partikül miktarı (y) ilgilenilen değişken, azotoksit miktarı ise (x) yardımcı değişken olarak kabul edilmiştir. Havadaki partikül madde miktarı ile azotoksit miktarı arasındaki ilişki Çizelge 5.1' de de görüldüğü gibi $\rho_{xy} = 0,833$ olarak bulunmuştur. Bu iki değişken arasındaki pozitif yüksek ilişkiden dolayı kitle ortalaması tahmininde kullanılan oransal tahminlerin tahmin değerleri, yanları ve hata kareler ortalamaları hesaplanmıştır.

Kitle bilgileri Çizelge 5.1' de verilmiştir.

Çizelge 5.1. Kitle parametreleri

	<i>N</i>	<i>Ortalama</i>	<i>Varyans</i>	<i>Std. Sapma</i>	<i>Korelasyon</i>
PM10 (Y)	351	51,57	1069,988	32,71	0,833
NO (X)	351	36,11	2781,546	52,74	

Örneklem büyüklüğünün tahmininde,

$$n_0 = \frac{t^2 s^2}{d^2}, \quad n = \frac{n_0}{1 + \frac{n_0}{N}}$$

eşitliği kullanılabilir [5]. Bu eşitlikten yararlanarak, $1-\alpha=0,95$ güvenilirlikle, partikül madde miktarı tahmin için hoş görülebilen hata payı (d) yaklaşık olarak 4,93 alındığında örneklemin büyüklüğü $n=117$ olarak tahmin edilmiştir. Bu durumda, $k=N/n$ olduğundan, $k=3$ olarak alınmıştır. Oluşturulan üç farklı örneklem içinden ikinci sıradaki örneklem seçilmiş ve bilgileri Çizelge 5.2' deki gibi elde edilmiştir. Çizelge 5.3' de tahmin ediciler, yanları ve hata kareler ortalamaları kitle bilgisinden yararlanılarak hesaplanmıştır. Kullanılan değişkenler arasındaki ilişki pozitif olduğundan çarpımsal tahmin ediciler için bu hesaplamalar yapılamamıştır.

Çizelge 5.2. Örneklem bilgileri

	<i>n</i>	<i>Ortalama</i>	<i>Std. Sapma</i>
PM10 (Y)	117	52,9316	31,4252
NO (X)	117	38,0171	49,5815

$\rho_{xx} = -0,0071$, $\rho_{yy} = -0,0009$, $C_x^2 = 2,1331$, $C_y^2 = 0,4023$, $\rho^* = 2,2532$ ve $\kappa = 0,3617$ olarak hesaplanmıştır.

Çizelge 5.3. Hesaplanan tahmin değerleri, yanları ve hata kareler ortalamaları

<i>Tahmin Edici</i>	<i>Tahmin</i>	<i>Yan</i>	<i>HKO / Varyans</i>
$\bar{y}_{sis}$	52,9316	-	8,1453
$\bar{y}_{r_{sis}} = \frac{\bar{y}_{sis}}{\bar{x}_{sis}} \bar{X}$	50,2763	0,1344	2,7909
$d_r = \omega_1 \bar{y}_{sis} + \omega_2 \bar{y}_{sis} \frac{\bar{X}}{\bar{x}_{sis}} + \omega_3 \bar{y}_{sis} \left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}_{sis}} \right)^2$	50,7472	-	2,4931
$\bar{y}_{re}^* = \bar{y}_{sis} \exp \left(\frac{\bar{X} - \bar{x}_{sis}}{\bar{X} + \bar{x}_{sis}} \right)$	51,5872	-0,0054	3,3389
$t_p^* = \left[w_1 \bar{y}_{sis} + w_2 (\bar{X} - \bar{x}_{sis}) \right] \left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}_{sis}} \right)$	50,7041	-0,0483	2,2126
$t_4 = \left[k_1 \bar{y}_{sis} + k_2 (\bar{X} - \bar{x}_{sis}) \right] \exp \left(\frac{\bar{A} - \bar{a}}{\bar{A} + \bar{a}} \right)$	50,7363	-0,0483	2,4922
$d = m_1 \bar{y}_{sis} \left[\frac{\bar{X}^*}{\alpha \bar{x}_{sis} + (1 - \alpha) \bar{X}} \right]^b + m_2 \bar{y}_{sis} \exp \left[\frac{\delta (\bar{X}^* - \bar{x}_{sis})}{\bar{X}^* + \bar{x}_{sis}} \right]$	71,4791	-0,0641	2,4934
$t_{1p} = \left[w_1 \bar{y}_{sis} + w_2 (\bar{X} - \bar{x}_{sis}) \right] \exp \left(\frac{\eta (\bar{X} - \bar{x}_{sis})}{\eta (\bar{X} + \bar{x}_{sis}) + 2\lambda} \right)$	49,3556	-0,0359	2,4899
$t_{2p} = \bar{y}_{sis} \left(\frac{a \bar{X} + b}{a \bar{x}_{sis} + b} \right)^\alpha$	50,7565	-0,1209	2,4931

Çizelge 5.3. Hesaplanan tahmin değerleri, yanları ve hata kareler ortalamaları (devamı)

<i>Tahmin Edici</i>	<i>Tahmin</i>	<i>Yan</i>	<i>HKO / Varyans</i>
$t_{3p} = \omega_1 \bar{y}_{sis} + \omega_2 \bar{y}_{sis} \frac{a\bar{X} + b}{a\bar{x}_{sis} + b} + \omega_3 \bar{y}_{sis} \left(\frac{a\bar{X} + b}{a\bar{x}_{sis} + b} \right)^2$	50,8552	-	2,4931
$t_G = \lambda_1 \bar{y}_{sis} + \lambda_2 \bar{y}_{sis} \left(\frac{a\bar{x}_{sis} + b}{a\bar{X} + b} \right)^\alpha + \lambda_3 \bar{y}_{sis} \left(\frac{a\bar{x}_{sis} + b}{a\bar{X} + b} \right)^\beta$	50,7514	-	2,4931

Çizelge 5.3' te verilen hata kareler ortalaması sıralaması incelendiğinde aşağıdaki koşulların sağlandığı görülmektedir.

R. Singh & H.P. Singh (1998) oransal tahmin edicisi ile sistematik örneklemenin basit ortalama tahmin edicisi karşılaştırıldığında,

$$V(d_r)_{MIN} < V(\bar{y}_{sis})$$

eşitsizliğinin sağlanabilmesi için,

$$[1 + (n-1)\rho_{yy}] > 0$$

koşulunun sağlanması gerekir. $\rho_{yy} = -0,0009$ ve $n=117$ için $[1 + (n-1)\rho_{yy}] = 0,8956 > 0$ olduğundan koşul sağlanır. Bu nedenle, $V(d_r) = 2,4931 < V(\bar{y}_{sis}) = 8,1453$ olduğu görülmektedir. Dolayısıyla R. Singh & H.P. Singh (1998) oran tahmin edicisi sistematik örneklemenin basit ortalama tahmin edicisinden daha etkindir.

R. Singh & H.P. Singh (1998) oransal tahmin edicisi ile Swain A.K.P.C.'nin oransal tahmin edicisi karşılaştırıldığında,

$$V(d_r)_{MIN} < HKO(\bar{y}_{r_{sis}})$$

eşitsizliğinin sağlanabilmesi için,

$$(\kappa\rho^* - 1)^2 > 0$$

ifadesi her zaman doğru olduğundan yalnızca $\kappa\rho^* = 1$ olması durumu dışında d_r tahmin edicisi Swain'in oransal tahmin edicisinden daha etkin olduğu söylenir.

$\kappa = 0,3616$ ve $\rho^* = 2,2532$ için $\kappa\rho^* = 0,8147 \neq 1$ olduğundan koşul sağlanır. Bu nedenle, $V(d_r) = 2,4931 < HKO(\bar{y}_{r_{sis}}) = 2,7909$ olduğu görülmektedir. Dolayısıyla R. Singh & H.P. Singh (1998) oransal tahmin edicisi Swain'in oransal tahmin edicisinden daha etkindir.

Singh H.P. ve diğerlerinin oransal tahmin edicisi ile sistematik örneklemenin basit ortalama tahmin edicisi karşılaştırıldığında,

$$V(\bar{y}_{RE}) < V(\bar{y}_{sis})$$

eşitsizliğinin sağlanabilmesi için,

$$\frac{1}{4} < \kappa\rho^*$$

koşulunun sağlanması gerekir. $\kappa = 0,3616$ ve $\rho^* = 2,2532$ için $\kappa\rho^* = 0,8147 > 0,25$ olduğundan koşul sağlanır. Bu nedenle, $V(\bar{y}_{RE}) = 3,3389 < V(\bar{y}_{sis}) = 8,1453$ olduğu görülmektedir. Dolayısıyla Singh H.P. ve diğerlerinin oransal tahmin edicisi sistematik örneklemenin basit ortalama tahmin edicisinden daha etkindir.

Singh H.P. ve diğerlerinin oransal tahmini ile Swain A.K.P.C.'nin oransal tahmini karşılaştırıldığında,

$$V(\bar{y}_{RE}) < V(\bar{y}_{r_{sis}})$$

eşitsizliğinin sağlanabilmesi için,

$$\kappa\rho^* < \frac{3}{4}$$

koşulunun sağlanması gerekir. $\kappa = 0,3616$ ve $\rho^* = 2,2532$ için $\kappa\rho^* = 0,8147 > 0,75$ olduğundan koşul sağlanmaz. Bu nedenle, $V(\bar{y}_{RE}) = 3,3389 > V(\bar{y}_{r_{sis}}) = 2,7909$ olduğu görülmektedir. Dolayısıyla Singh H.P. ve diğerlerinin oransal tahmini Swain A.K.P.C.'nin oransal tahmininden daha etkin olduğu söylenemez.

Önerilen t_{2p} oransal ve çarpımsal tahmini ile sistematik örneklemenin basit ortalama tahmini karşılaştırıldığında,

$$V(t_{2p})_{\text{MIN}} < V(\bar{y}_{\text{sis}})$$

eşitsizliğin sağlanabilmesi için,

$$[1 + (n-1)\rho_{yy}] > 0$$

koşulunun sağlanması gerekir. $\rho_{yy} = -0,0009$ ve $n=117$ için $[1 + (n-1)\rho_{yy}] = 0,8956 > 0$ olduğundan koşul sağlanır. Bu nedenle, $V(t_{2p}) = 2,4931 < V(\bar{y}_{\text{sis}}) = 8,1453$ olduğu görülmektedir. Dolayısıyla t_{2p} oransal ve çarpımsal tahmin edicisi sistematik örneklemenin basit ortalama tahmin edicisinden daha etkindir.

t_{2p} oransal ve çarpımsal tahmin edicisi ile Swain A.K.P.C.'nin oransal tahmin edicisi karşılaştırıldığında,

$$V(t_{2p})_{\text{MIN}} < \text{HKO}(\bar{y}_{\text{rsis}})$$

eşitsizliğin sağlanabilmesi için,

$$(\kappa\rho^* - 1)^2 > 0$$

ifadesi her zaman doğru olduğundan yalnızca $\kappa\rho^* = 1$ olması durumu dışında t_{2p} oransal ve çarpımsal tahmin edicisinin Swain'in oransal tahmin edicisinden daha etkin olduğu söylenir.

$\kappa = 0,3616$ ve $\rho^* = 2,2532$ için $\kappa\rho^* = 0,8147 \neq 1$ olduğundan koşul sağlanır. Bu nedenle, $V(t_{2p}) = 2,4931 < \text{HKO}(\bar{y}_{\text{rsis}}) = 2,7909$ olduğu görülmektedir. Dolayısıyla önerilen oransal çarpımsal tahmin edici Swain'in oransal tahmin edicisinden daha etkindir.

t_{2p} oransal çarpımsal tahmin edicisi ile H.P. Singh, R.Tailor, N.K. Jatwa'nın (2011) oransal tahmin edicisi karşılaştırıldığında,

$$V(t_{2p})_{\text{MIN}} < \text{HKO}(\bar{y}_{\text{RE}})$$

eşitsizliğin sağlanabilmesi için,

$$\frac{1}{4} > \kappa\rho^*(1 - \kappa\rho^*)$$

koşulunun sağlanması gerekir. $\kappa = 0,3616$ ve $\rho^* = 2,2532$ için $\kappa\rho^*(1 - \kappa\rho^*) = 0,1509 < 0,25$ olduğundan koşul sağlanır. Bu nedenle, $V(t_{2p}) = 2,4931 < HKO(\bar{y}_{RE}) = 3,3389$ olduğu görülmektedir. Dolayısıyla t_{2p} oransal çarpımsal tahmin edicisi H.P. Singh, R.Tailor, N.K. Jatwa'nın (2011) oransal tahmin edicisinden daha etkindir.

t_{3p} ağırlıklandırılmış oransal tahmin edicisi ile sistematik örneklemenin basit ortalama tahmin edicisi karşılaştırıldığında,

$$V(t_{3p})_{\text{MIN}} < V(\bar{y}_{\text{SIS}})$$

eşitsizliğinin sağlanabilmesi için,

$$[1 + (n-1)\rho_{yy}] > 0$$

koşulunun sağlanması gerekir. $\rho_{yy} = -0,0009$ ve $n=117$ için $[1 + (n-1)\rho_{yy}] = 0,8956 > 0$ olduğundan koşul sağlanır. Bu nedenle, $V(t_{3p}) = 2,4931 < V(\bar{y}_{\text{SIS}}) = 8,1453$ olduğu görülmektedir. Dolayısıyla önerilen t_{3p} ağırlıklandırılmış oransal tahmin edici sistematik örneklemenin basit ortalama tahmin edicisinden daha etkindir.

t_{3p} ağırlıklandırılmış oransal tahmini ile Swain A.K.P.C.'nin oransal tahmini karşılaştırıldığında,

$$V(t_{3p})_{\text{MIN}} < HKO(\bar{y}_{r_{\text{SIS}}})$$

eşitsizliğinin sağlanabilmesi için,

$$(\kappa\rho^* - 1)^2 > 0$$

ifadesi her zaman doğru olduğundan yalnızca $\kappa\rho^* = 1$ olması durumu dışında t_{3p} tahmin edicisinin Swain'in oran tahmin edicisinden daha etkin olduğu söylenir.

$\kappa = 0,3616$ ve $\rho^* = 2,2532$ için $\kappa\rho^* = 0,8147 \neq 1$ olduğundan koşul sağlanır. Bu nedenle, $V(t_{3p}) = 2,4931 < HKO(\bar{y}_{r_{\text{SIS}}}) = 2,7909$ olduğu görülmektedir. Dolayısıyla t_{3p} ağırlıklandırılmış oransal tahmin edicisi Swain'in oransal tahmin edicisinden daha etkindir.

t_{3p} ağırlıklandırılmış oransal ve çarpımsal tahmin edicisi ile H.P. Singh, R.Tailor, N.K. Jatwa'nın (2011) oransal tahmin edicisi karşılaştırıldığında,

$$V(t_{3p})_{\text{MİN}} < \text{HKO}(\bar{y}_{\text{RE}})$$

eşitsizliğinin sağlanabilmesi için,

$$\frac{1}{4} > \kappa \rho^* (1 - \kappa \rho^*)$$

koşulunun sağlanması gerekir. $\kappa = 0,3616$ ve $\rho^* = 2,2532$ için $\kappa \rho^* (1 - \kappa \rho^*) = 0,1509 < 0,25$ olduğundan koşul sağlanır. Bu nedenle, $V(t_{3p}) = 2,4931 < \text{HKO}(\bar{y}_{\text{RE}}) = 3,3389$ olduğu görülmektedir. Dolayısıyla t_{3p} ağırlıklandırılmış oransal ve çarpımsal tahmin edicisi H.P. Singh, R.Tailor, N.K. Jatwa'nın (2011) oransal tahmin edicisinden daha etkindir.

t_G ağırlıklandırılmış oransal ve çarpımsal tahmin edici ailesi ile sistematik örneklemenin basit ortalama tahmin edicisi karşılaştırıldığında,

$$V(t_G)_{\text{MİN}} < V(\bar{y}_{\text{SIS}})$$

eşitsizliğinin sağlanabilmesi için,

$$[1 + (n-1)\rho_{yy}] > 0$$

koşulunun sağlanması gerekir. $\rho_{yy} = -0,0009$ ve $n=117$ için $[1 + (n-1)\rho_{yy}] = 0,8956 > 0$ olduğundan koşul sağlanır. Bu nedenle, $V(t_G) = 2,4931 < V(\bar{y}_{\text{SIS}}) = 8,1453$ olduğu görülmektedir. Dolayısıyla önerilen t_G ağırlıklandırılmış oransal ve çarpımsal tahmin edici ailesi sistematik örneklemenin basit ortalama tahmin edicisinden daha etkindir.

t_G ağırlıklandırılmış oransal ve çarpımsal tahmin edici ailesi ile Swain A.K.P.C.'nin oransal tahmin edicisi karşılaştırıldığında,

$$V(t_G)_{\text{MİN}} < \text{HKO}(\bar{y}_{\text{rSIS}})$$

eşitsizliğinin sağlanabilmesi için,

$$(\kappa \rho^* - 1)^2 > 0$$

ifadesi her zaman doğru olduğundan yalnızca $\kappa\rho^*=1$ olması durumu t_G ağırlıklandırılmış oransal ve çarpımsal tahmin edici ailesinin Swain'in oransal tahmin edicisinden daha etkin olduğu söylenir.

$\kappa = 0,3616$ ve $\rho^* = 2,2532$ için $\kappa\rho^* = 0,8147 \neq 1$ olduğundan koşul sağlanır. Bu nedenle, $V(t_G) = 2,4931 < HKO(\bar{y}_{r_{sis}}) = 2,7909$ olduğu görülmektedir. Dolayısıyla t_G ağırlıklandırılmış oransal ve çarpımsal tahmin edici ailesi Swain'in oransal tahmin edicisinden daha etkindir.

t_G ağırlıklandırılmış oransal ve çarpımsal tahmin edici ailesi ile H.P. Singh, R.Tailor, N.K. Jatwa'nın (2011) oransal tahmin edicisi karşılaştırıldığında,

$$V(t_G)_{\min} < HKO(\bar{y}_{RE})$$

eşitsizliğinin sağlanabilmesi için,

$$\frac{1}{4} > \kappa\rho^*(1 - \kappa\rho^*)$$

koşulunun sağlanması gerekir. $\kappa = 0,3616$ ve $\rho^* = 2,2532$ için $\kappa\rho^*(1 - \kappa\rho^*) = 0,1509 < 0,25$ olduğundan koşul sağlanır. Bu nedenle, $V(t_G) = 2,4931 < HKO(\bar{y}_{RE}) = 3,3389$ olduğu görülmektedir. Dolayısıyla t_G ağırlıklandırılmış oransal ve çarpımsal tahmin edici ailesi H.P. Singh, R.Tailor, N.K. Jatwa'nın (2011) oransal tahmin edicisinden daha etkindir.

Çizelge 5.3. ve teorik karşılaştırmalar incelendiğinde Çizelge 5.4.'deki hata kareler ortalaması sıralaması elde edilmiştir.

Çizelge 5.4. Tahmin edicilerin hata kareler ortalamalarına göre küçükten büyüğe sıralanışı

<i>Tahmin Edici</i>	<i>Tahmin</i>	<i>Yan</i>	<i>HKO / Varyans</i>
$t_p^* = \left[w_1 \bar{y}_{sis} + w_2 (\bar{X} - \bar{x}_{sis}) \right] \left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}_{sis}} \right)$	50,7041	- 0,0483	2,2126
$t_{1p} = \left[w_1 \bar{y}_{sis} + w_2 (\bar{X} - \bar{x}_{sis}) \right] \exp \left(\frac{\eta (\bar{X} - \bar{x}_{sis})}{\eta (\bar{X} + \bar{x}_{sis}) + 2\lambda} \right)$	49,3556	- 0,0359	2,4899
$t_4 = \left[k_1 \bar{y}_{sis} + k_2 (\bar{X} - \bar{x}_{sis}) \right] \exp \left(\frac{\bar{A} - \bar{a}}{\bar{A} + \bar{a}} \right)$	50,7363	- 0,0483	2,4922
$t_G = \lambda_1 \bar{y}_{sis} + \lambda_2 \bar{y}_{sis} \left(\frac{a \bar{x}_{sis} + b}{a \bar{X} + b} \right)^\alpha + \lambda_3 \bar{y}_{sis} \left(\frac{a \bar{x}_{sis} + b}{a \bar{X} + b} \right)^\beta$	50,7514	-	2,4931
$t_{3p} = \omega_1 \bar{y}_{sis} + \omega_2 \bar{y}_{sis} \frac{a \bar{X} + b}{a \bar{x}_{sis} + b} + \omega_3 \bar{y}_{sis} \left(\frac{a \bar{X} + b}{a \bar{x}_{sis} + b} \right)^2$	50,8552	-	2,4931
$d_r = \omega_1 \bar{y}_{sis} + \omega_2 \bar{y}_{sis} \frac{\bar{X}}{\bar{x}_{sis}} + \omega_3 \bar{y}_{sis} \left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}_{sis}} \right)^2$	50,7472	-	2,4931
$t_{2p} = \bar{y}_{sis} \left(\frac{a \bar{X} + b}{a \bar{x}_{sis} + b} \right)^\alpha$	50,7565	- 0,1209	2,4931
$d = m_1 \bar{y}_{sis} \left[\frac{\bar{X}^*}{\alpha \bar{x}_{sis} + (1-\alpha) \bar{X}} \right]^g + m_2 \bar{y}_{sis} \exp \left[\frac{\delta (\bar{X}^* - \bar{x}_{sis})}{\bar{X}^* + \bar{x}_{sis}} \right]$	51,4791	- 0,0641	2,4934
$\bar{y}_{r_{sis}} = \frac{\bar{y}_{sis}^*}{\bar{x}_{sis}^*} \bar{X}$	50,2763	0,1344	2,7909
$\bar{y}_{re} = \bar{y}_{sis} \exp \left(\frac{\bar{X} - \bar{x}_{sis}}{\bar{X} + \bar{x}_{sis}} \right)$	51,5872	- 0,0054	3,3389
$\bar{y}_{sis}$	52,9316	-	8,1453

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Günümüze kadar yapılmış olan sistematik örnekleme tahmin edicileri incelenmiş ve literatürde var olan tahmin edicilerden belli koşullar altında daha iyi olan ve yansız yeni tahmin ediciler önerilmiştir.

Bu tezde üstel, oransal ve çarpımsal, ağırlıklandırılmış yansız oransal, ağırlıklandırılmış yansız çarpımsal ve ağırlıklandırılmış yansız oransal ve çarpımsal tahmin edici ailesi olmak üzere beş yeni tahmin edici önerilmiştir. Önerilen tahmin ediciler, Swain A. K. P. C.'nin (1967) oransal tahmin edicisi, Shukla N. D.'nin (1971) çarpımsal tahmin edicisi ve H.P. Singh, R.Tailor, N.K. Jatwa'nın (2011) oransal ve çarpımsal tahmin edicileri ile karşılaştırılmış, bazı koşullar altında önerilen tahmin edicilerin daha etkin oldukları teorik olarak saptanmıştır. Ağırlıklandırılmış oransal çarpımsal tahmin edici ailesinden on iki tane yansız ve minimum hata kareler ortalamalı tahmin edici elde edilmiştir. Sayısal bir örnek verilmiştir ve koşulların sağlandığı durumlarda varyansın/ hata kareler ortalamasının daha küçük olduğu ve bulunan teorik sonuçların doğruluğu görülmüştür.

Gelecekte ağırlıklandırılarak önerilen tahmin ediciler verilen yöntemle yansız hale getirilebilecektir. Bu yöntem diğer örnekleme yöntemlerinde de uygulanabilecektir.

7. KAYNAKLAR

- [1] Adams, R.A., *Calculus: A Complete Course*, Addison Wesley Longman Ltd., Canada, **1999**.
- [2] Bahl, S. and Tuteja, R. K., Ratio and product type exponential estimator. *Infrm. and Optim. Sci.*, XII, I, pp. 159-163, **1991**.
- [3] Bedi, P. K., Efficient utilization of auxiliary information at estimation stage. *Biom. Jour.* 38: pp. 973-976, **1996**.
- [4] Cochran, W. G., *Sampling techniques*. 2nd, **1963**.
- [5] Çıngı, H., *Örnekleme Kuramı*, H.Ü. Fen Fakültesi Basımevi, Beytepe, **2009**.
- [6] Çıngı, H., Hacettepe Üniversitesi İstatistik Bölümü Lisansüstü Eğitimi Örnekleme Ders Notları, **2015**.
- [7] Cingi, H., & Kadilar, C., *Advances in Sampling Theory-Ratio Method Of Estimation*. Bentham Science Publishers, **2009**.
- [8] Grover, L. K., & Kaur, P., A generalized class of ratio type exponential estimators of population mean under linear transformation of auxiliary variable. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 43(7), 1552-1574, **2014**.
- [9] Gupta, S. and Shabbir, J., On estimating the finite population mean in simple and stratified random sampling, *Communication in Statistics Theory and Methods*, 40(2), 199-212, **2010**.
- [10] Gupta, S., & Shabbir, J., On improvement in estimating the population mean in simple random sampling. *Journal of Applied Statistics*, 35(5), 559-566, **2008**.
- [11] Hou, Y. C., Janczuk, A., & Wang, P. G., Current trends in the development of nitric oxide donors. *Current Pharmaceutical Design*, 5(6), 417-442, **1999**.
- [12] İnal, C., Günay, S., *Olasılık ve Matematiksel İstatistik*, Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, **2009**.
- [13] Özdemir, F., Türkiye Geneline Kükürt Dioksit Ve Partiküler Madde Kirlilik Dağılımlarının Analizi, Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, **2008**.
- [14] Quenouille, M. H., Notes on bias in estimation. *Biometrika*, 43(3/4), 353-360, **1956**.

- [15] Shukla, N. D., Systematic sampling and product method of estimation. In Proceedings of all India Seminar on Demography and Statistics. B.H.U. Varanasi: India, **1971**.
- [16] Singh, H. P., & Solanki, R. S., An efficient class of estimators for the population mean using auxiliary information in systematic sampling. *Journal of Statistical Theory and Practice*, 6(2), 274-285, **2012**.
- [17] Singh, H. P., Tailor, R., & Jatwa, N. K., Modified ratio and product estimators for population mean in systematic sampling. *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, 10(2), 4, **2011**.
- [18] Singh, M. P., Ratio-cum-product method of estimation. *Metrika*, 12, 34–42, **1967**.
- [19] Singh, R., Malik, S., Chaudhary, M. K., Verma, H. K., & Adewara, A. A., A general family of ratio-type estimators in systematic sampling. *Journal of Reliability and Statistical Studies*, 5(1), 73-82, **2012**.
- [20] Singh, R., Malik, S., & Singh, V. K., An improved estimator in systematic sampling. arXiv preprint arXiv:1307.5145, **2013**.
- [21] Singh, R., Singh, H. P., Almost unbiased ratio and product-type estimators in systematic sampling, *Questiio*, Vol. 22, 3, 403-416, **1998**.
- [22] Swain, A. K. P. C., The use of systematic sampling ratio estimate. *J. Ind. Statist. Assoc.*, 2, 160–164, **1964**.
- [23] Tailor, R., Jatwa, N. K., & Singh, H. P., A ratio-cum-product estimator of finite population mean in systematic sampling. *Statistics*, 391, **2013**.
- [24] Taylor, B. S., Kim, Y. M., Wang, Q. I., Shapiro, R. A., Billiar, T. R., & Geller, D. A., Nitric oxide down-regulates hepatocyte-inducible nitric oxide synthase gene expression. *Archives of Surgery*, 132(11), 1177-1183, **1997**.

8. ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı: Eda Gizem KOÇYİĞİT

Doğum Yeri: Ankara

Doğum Yılı: 16/06/1991

Medeni Hali: Bekar

E-posta: eda.kocyigit@hacettepe.edu.tr

Adresi: Çiçekli Mahallesi, Boztepe Sokak, 21/ 5, Ankara, Türkiye.

Eğitim

Lise: 2005-2009 Fatih Sultan Mehmet Lisesi

Lisans: 2009-2013 Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü

Yüksek Lisans:

Doktora:

Yabancı Dil: İngilizce

İş Deneyimi:

2015 - ... : Hacettepe Üniversitesi, İstatistik Bölümü- Araştırma Görevlisi.

Deneyim Alanları:

-

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi:

-

Tezden Üretilmiş Yayınlar:

-

Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar:

Koçyiğit, E., Çıngı, H., “A New Class of Unbiased Linear Estimator in Systematic Sampling”, Second International Researchers, Statisticians and Young Statisticians Congress (2nd IRSYSC), Ankara, Türkiye, 2016.