

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ARTİMSAL NEGATİF OLMAYAN MATRİS
AYRIŞTIRMA İLE GÖZETLEME TÜRÜ
VİDEOLARDA ARKAPLAN MODELLEME**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Müh. Serhat Selçuk BUCAK**

Anabilim Dalı : ELEKTRONİK VE HABERLEŞME MÜHENDİSLİĞİ

Programı : TELEKOMÜNİKASYON MÜHENDİSLİĞİ

HAZİRAN 2008

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ARTİMSAL NEGATİF OLMAYAN MATRİS AYRIŞTIRMA
İLE GÖZETLEME TÜRÜ VİDEOLARDA ARKAPLAN
MODELLEME**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Müh. Serhat Selçuk BUCAK
(504061337)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 5 Mayıs 2008
Tezin Savunulduğu Tarih : 9 Haziran 2008**

**Tez Danışmanı: Prof.Dr. Bilge GÜNSEL
Diğer Jüri Üyeleri: Prof.Dr. Mehmet Ertuğrul ÇELEBİ
Prof.Dr. Bülent SANKUR**

HAZİRAN 2008

ÖNSÖZ

Bu çalışmayı gerçekleştirmemde değerli zaman ve bilgilerinden yararlandığım, hocam Prof. Dr. Bilge GÜNSEL'e teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmalarımın bir bölümünü birlikte yürüttüğüm Ozan GÜRSOY başta olmak üzere Örüntü Tanıma ve Çoğul Ortam İşaret İşleme Laboratuvarı'ndaki bütün arkadaşlarıma, ablam Ebru Sinem TOKER ile birlikte tüm Haberleşme Ana Bilim Dalı araştırma görevlilerine, dostluklarıyla İ.T.Ü günlerimi güzelleştiren Ar. Gör. Oğuz SEMERCİ ve Ar. Gör. Onur MUDANYALI'ya, tezin hazırlanmasındaki katkısından dolayı Serap KIRBİZ'a, yüksek lisans hayatım boyunca verdiği maddi destekten dolayı TÜBİTAK'a, son olarak da aileme teşekkür ederim.

Haziran 2008

Serhat Selçuk BUCAK

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR	iv
ŞEKİL LİSTESİ	v
SEMBOL LİSTESİ	vi
ÖZET	vii
SUMMARY	viii
1. GİRİŞ	1
2. NEGATİF OLMAYAN MATRİS AYRIŞTIRMA	7
2.1. Negatif Olmayan Matris Ayrıştırma için Matematiksel Tanımlar	9
2.2. Negatif Olmayan Matris Ayrıştırma ile Arkaplan Modelleme	12
2.3. Negatif Olmayan Matris Ayrıştırma ile Arkaplan Modellemedeki Kısıtlamalar	13
3. ARTIMSAL NEGATİF OLMAYAN MATRİS AYRIŞTIRMA	16
3.1. ANOMA için Maliyet Fonksiyonun Oluşturulması	16
3.2. ANOMA için Güncelleme Kurallarının Çıkarılması	19
3.3. Ağırlıklandırma Fonksiyonunun Seçimi	23
3.4. Artımsal Temel Bileşen Analizi	24
4. ANOMA ve TOPAKLANDIRMA	28
4.1. NOMA'nın Topaklandırma İşlevi	28
4.2. ANOMA'nın Topaklandırma İşlevi	32
4.3. Topaklandırma İşlevinin Arkaplan Modellemedeki Kullanımı	33
5. DENEYSEL SONUÇLAR	36
5.1. ANOMA'nın Arkaplan Gösterimleri Oluşturma Yetisi	37
5.2. ANOMA ile Arkaplan Modelinin Dinamik İçerik Değişimlerine Göre Modellenmesi	38
5.3. Işıklılık Değişimlerine Karşı Gürbüzlük	44
6. SONUÇLAR ve TARTIŞMA	47
KAYNAKLAR	50
EK-A	56
EK-B	60
ÖZGEÇMİŞ	65

KISALTMALAR

NOMA	: Negatif Olmayan Matris Ayırıştırma
ANOMA	: Artımsal Negatif Olmayan Matris Ayırıştırma
TBA	: Temel Bileşen Analizi
ATBA	: Artımsal Temel Bileşen Analizi
GMM	: Gaussian Mixture Model (Gauss Karışımı Modeli)
RGB	: Red-Green-Blue (Kırmızı-Yeşil-Mavi)
HSV	: Hue Saturation Value (Renk Tonu ve Doygunluğu Değeri)
YUV	: Luma (Y) and Chrominance (UV) (Işıklılık ve Renk İşareti)

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 3.1 : NOMA ve ANOMA yöntemleri için bir güncelleme döngüsünün gerçekleşme zamanının örnek sayısına bağlı olarak değişimi.....	22
Şekil 4.1 : Kullanılan 3 ayrı video sahnesinden üçer örnek video çerçevesi....	30
Şekil 4.2 : Elde edilen topak merkezleri.....	31
Şekil 4.3 : H matrisi elemanlarının 3 boyutlu uzayda çizdirilmesi.....	32
Şekil 4.4 : Orijinal ve geri çatılmış video çerçeveleri.....	33
Şekil 4.5 : Artımsal olarak elde edilen taban imgeleri.....	34
Şekil 4.6 : Orijinal video çerçeveleri ve elde edilen baz imgeleri.....	35
Şekil 5.1 : NOMA ve değişik ağırlıklandırmaların kullanıldığı ANOMA yöntemlerinin durağan arka plan modelleme performanslarının karşılaştırılması.....	38
Şekil 5.2(a) : 614 numaralı video çerçevesi.....	40
Şekil 5.2(b) : 837 numaralı video çerçevesi.....	40
Şekil 5.2(c) : 614. çerçeve için ANOMA ile elde edilmiş fark resmi.....	40
Şekil 5.2(d) : 837. çerçeve için ANOMA ile elde edilmiş fark resmi.....	40
Şekil 5.3(a) : 1050 numaralı video çerçevesi.....	41
Şekil 5.3(b) : 1120 numaralı video çerçevesi.....	41
Şekil 5.3(c) : 1140 numaralı video çerçevesi.....	41
Şekil 5.3(d) : 1433 numaralı video çerçevesi.....	41
Şekil 5.3(e) : 1050. çerçeve için ANOMA ile elde edilmiş fark resmi.....	41
Şekil 5.3(f) : 1120. çerçeve için ANOMA ile elde edilmiş fark resmi.....	41
Şekil 5.3(g) : 1140. çerçeve için ANOMA ile elde edilmiş fark resmi.....	41
Şekil 5.3(h) : 1433. çerçeve için ANOMA ile elde edilmiş fark resmi.....	41
Şekil 5.4 : NOMA, ANOMA ve ATBA yöntemlerinin dinamik arka plan modelleme performanslarının karşılaştırılması.....	42
Şekil 5.5(a) : 1050. çerçeve için ATBA ile elde edilmiş fark resmi.....	43
Şekil 5.5(b) : 1120. çerçeve için ATBA ile elde edilmiş fark resmi.....	43
Şekil 5.5(c) : 1140. çerçeve için ATBA ile elde edilmiş fark resmi.....	43
Şekil 5.5(d) : 1433. çerçeve için ATBA ile elde edilmiş fark resmi.....	43
Şekil 5.5(e) : 1050. çerçeve için NOMA ile elde edilmiş fark resmi.....	43
Şekil 5.5(f) : 1120. çerçeve için NOMA ile elde edilmiş fark resmi.....	43
Şekil 5.5(g) : 1140. çerçeve için NOMA ile elde edilmiş fark resmi.....	43
Şekil 5.5(h) : 1433. çerçeve için NOMA ile elde edilmiş fark resmi.....	43
Şekil 5.6 : Işıklılık değişimine karşı ANOMA ve ATBA yöntemlerinin gürbüzlüklerinin karşılaştırılması	44
Şekil 5.7(a) : 2635 numaralı video çerçevesi.....	44
Şekil 5.7(b) : 2874 numaralı video çerçevesi.....	44
Şekil 5.7(c) : 2874. çerçeve için ANOMA ile elde edilmiş fark resmi.....	44
Şekil 5.7(d) : 2874. çerçeve için ATBA ile elde edilmiş fark resmi.....	44

SEMBOL LİSTESİ

r	: NOMA yöntemi için rank
$\mathbf{X}$	: $\mathbf{X}$ matrisi veya 2 boyutlu dizisi
$\mathbf{X}_k$	: $\mathbf{X}$ matrisi veya 2 boyutlu dizisinin k . adımıdaki ifadesi
$\mathbf{x}$	: $\mathbf{x}$ vektörü veya 1 boyutlu dizisi
$\mathbf{x}_k$	: $\mathbf{x}$ vektörü veya 1 boyutlu dizisinin k . adımıdaki ifadesi
$(\mathbf{X})_{ij}$	: $\mathbf{X}$ matrisinin i . satır, j . sütundaki elemanı
$(\mathbf{X}_k)_{ij}$	: $\mathbf{X}_k$ matrisinin i . satır, j . sütundaki elemanı
$(\mathbf{x})_i$	: $\mathbf{x}$ vektörünün i . Elemanı
$(\mathbf{x}_k)_i$	: $\mathbf{x}_k$ vektörünün i . elemanı
$\ (\cdot)\ $	: Matrisin Frobenius normu veya vektörün Öklit normu
$(\cdot)^T$	: Evrik alma

ARTİMSAL NEGATİF OLMAYAN MATRİS AYRIŞTIRMA İLE GÖZETLEME TÜRÜ VİDEOLARDA ARKA PLAN MODELLEME

ÖZET

Gözetleme türü videoların kullanıldığı uygulamalarının hemen hepsinde video arka planın başarı ile modellenmesi bir gerekliliktir. Oluşturulacak arka plan modeli, video içeriğindeki değişimlere göre uyarlanabilmeli ve temsil başarımı her durumda yüksek olmalıdır. Bunun yanında başarılı bir arka plan modeli, video sahnelerinde var olabilecek yoğun ışıklılık değişimleri ya da yüksek frekans bileşenlerine sahip duruk olmayan arka plan gibi zor durumlara karşı gürbüz olmalıdır. Ancak bu özellikleri barındıran bir arka plan modeline sahip olduğu zaman videoda ön plan arka plan ayrıştırılması sağlıklı bir şekilde yapılabilir ve amaçlanan uygulamalar gerçekleştirilebilir.

Bu çalışmada, dinamik arka plan modelleme probleminde artımlı negatif olmayan matris ayrıştırma (ANOMA) metodunun kullanımı incelenmiştir. ANOMA'nın gözetleme videolarında yeni gelen çerçevelerin mevcut gösterime katılımını kontrol ederek arka planı başarıyla modelleyebildiği gösterilmiştir. Bunun yanı sıra ANOMA, çevrimiçi yapısı ile teknik yazında var olan negatif olmayan matris ayrıştırma (NOMA) tekniğinin toplu işleme yapısına alternatif, düşük işlemsel karmaşıklıkla bir içerik modelleme metodudur.

Performans değerlendirmesi için PETS2001 veri tabanından alınan gözetleme videolarıyla yapılan test sonuçları NOMA, ANOMA ve bu tür uygulamalar için önerilmiş bilinen bir teknik olan artımlı temel bileşen analizi (ATBA) için karşılaştırmalı olarak raporlanmıştır. ANOMA'nın bu uygulamada başarı ile kullanılabileceği görülmüş, özellikle ışıklılık değişimlerine karşı diğer iki yöntemle göre daha gürbüz olduğu gözlenmiştir.

BACKGROUND MODELING IN VIDEO SURVEILLANCE VIA INCREMENTAL NONNEGATIVE MATRIX FACTORIZATION

SUMMARY

Modeling the video background effectively is a necessity for most of the video surveillance applications. The background model should be adaptive to the dynamic content changes of the video sequences and should represent the video background successfully regardless the content of the video. Furthermore, a successful background model should be robust against intense illumination changes or non static backgrounds which contain high frequency components. Background-foreground separation and then the intended application can be achieved only if the obtained background model satisfies these conditions.

In this work, the use of incremental non-negative matrix factorization method in dynamic background modeling problem is examined. The proposed factorization method is derived from non-negative matrix factorization, and models the dynamic content of the video by controlling contribution of the subsequent observations to the existing model adaptively. Unlike the batch nature of non-negative matrix factorization, INMF is an on-line content representation scheme which is capable of extracting moving foreground objects.

Test results are reported in order to compare background modeling performances of INMF, NMF and Incremental Principal Components Analysis, which is a well-known technique. It is concluded that INMF outperforms both NMF and IPCA and its robustness to illumination changes makes it a powerful representation tool in video surveillance applications.

1. GİRİŞ

Videolarda arkaplan modelleme problemi, günümüzde birçok uygulama için önemli bir bileşen olarak ortaya çıkmaktadır [1-7]. Başarılı bir arkaplan modeli sayesinde sabit bir kamera ile çekilmiş video sahnelerindeki hareketli önplan nesnelerinin ayrıştırılması mümkün olmakta, bu sayede de sahnenin önemli bileşenleri daha detaylı ve verimli işlenebilmektedir.

Oluşturulacak arkaplan modelinin videonun değişken içeriğine göre güncellenebilir olması önemlidir. Örneğin bir park yeri gözetleme kamerasıyla kaydedilen videoda park halinde olduğu için arkaplana dahil olan bir taşıt harekete geçince kısa bir süre içinde arkaplan modelinden çıkarılabilmelidir. Buna ek olarak hareketli bir cisim durduğunda arkaplan modeline eklenebilmelidir. Arkaplan modelleri ayrıca nesnelerin sahneye giriş ve çıkışlarına göre de güncellenebilir olmalıdır.

Arkaplan modelleme tekniklerinin başarımlarındaki önemli bir etken işlemsel verimlilikleridir. Bu problemde kullanılacak tekniklerin hızlı ve verimli olması son derece önemlidir. Gerçek zamanlı ve çevrimiçi olarak gerçekleştirilecek arkaplan modelleme teknikleri birçok uygulama için önemli avantajlar getirir.

Arkaplan modelleme işleminde başa çıkılması gereken çeşitli problemler vardır. Bu problemlerin en önemlilerinden birisi ışıklılık değişimine karşı gürbüzlüğün sağlanmasıdır. Özellikle açık havada yapılan video çekimlerinde ışıklılık değişimleri önemli bir sorundur. Güneşin parlaklığına ya da bulutluluğa göre arkaplanın renk bileşiminde değişiklikler meydana gelmektedir. Bu değişimler, özellikle modellemede renk ya da gri düzey bilgisinin kullanıldığı yöntemlerde önemli sorunlar teşkil etmektedir [4-5]. Gri düzeylerindeki ışıklılık değişimlerinden kaynaklanan sapmalar oluşturulan arkaplan modelinin tutarlılığını etkiler. Bu yüzden kullanılacak yöntem arkaplan modelini içerik değişimlerini yansıtacak şekilde güncellerken, ışıklılık değişimlerine karşı dayanıklı olmalıdır. Işıklılık değişimleri arkaplan modeline doğrudan etki edebildiği gibi neden olduğu gölgeler aracılığı ile

de problemi güçleştirebilmektedir. Gölgeler de kaynaklandıkları nesnelerle birlikte hareket edecekleri için hatalı olarak önplan nesnesi olarak etiketlenebilirler. Böyle durumlarda gölgeleri yok etmek için çeşitli yöntemler kullanılmaktadır [3-5].

Arkaplan modellemede ortaya çıkabilecek bir başka sorun ise duruk (statik) olmayan yüksek frekans bileşenli arkaplandır. Buna örnek olarak rüzgar esintisiyle hareket eden yapraklar, akan ya da dalgalanan su ya da sahnede yer alan bir televizyonun değişen ekranı verilebilir. Bu tür durumlar da ışıklılık değişimlerinin yaptığı gibi piksel gri düzeyi değerlerinde oynamalara yol açıp arkaplan modelinde tutarsızlıklara neden olurlar.

Kamera hareketleri ve bu hareketlerden kaynaklanan bulanıklık ya da gürültüler de arkaplan modelleme işleminin problemleri arasındadır. Ayrıca önplan nesnelerinin değişen boyutları (örneğin kameraya yaklaşan cismin büyümesi), nesnelerin birbirleriyle örtüşmeleri, düzenli olmayan hızları veya arkaplan cisimlerinin yer değiştirmesi (bir çantanın bir yerden alınıp başka bir yere koyulması) gibi etkenler de üstesinden gelinmesi gereken problemler arasında sayılabilir.

Arkaplan modelleme ve önplan nesnelerinin ayrıştırılması için birçok yöntem önerilmiştir. Arkaplanı o an işlenen video çerçevesinden (*video frame*) önceki n tane çerçevenin ortalaması veya ortanca değeri olarak seçen yöntemler [6, 7] bu konudaki basit tekniklere örnek olarak verilebilirler. Bu yöntemler hızlı olmalarına rağmen, $n \times \text{çerçeveboyutu}$ olan bellek gereksinimleri yüksektir. Bu yöntemlerde arkaplan önplan ayrıştırılması için ise her bir çerçevenin arkaplan modelinden farkı bir eşik değeri ile karşılaştırılır ve eşik değerinden büyük bir farkın görüldüğü pikseller önplan bileşenleri olarak belirlenir. Bu yöntemlerde arkaplanın güncellenmesi n parametresine önemli derecede bağlıdır. Aynı zamanda son gelen örneklerle bir ağırlık verilmemesi gerek güncellenebilirlik açısından gerek ışıklılık gibi değişimlere dayanıklılık açısından sistemin güvenilirliğini zayıflatmaktadır. Bu nedenle arkaplan modellenmesinde (1.1) güncelleme denklemi ile ifade edilebilecek kayan ortalama hesaplamaya dayalı yöntemler de kullanılmaktadır [7].

$$B_{i+1} = (1 - \alpha)B_i + \alpha F_i \quad (1.1)$$

Denklem (1.1)'de B_i , i . video çerçevesi için bulunmuş arkaplanı gösterirken F_i ise i . video çerçevesini temsil etmektedir. α ağırlıklandırma sabiti olup genelde küçük bir değer alır. Bu güncelleme şekli ile bellek gereksinimi de azalmaktadır.

Bir başka arkaplan modelleme yöntemi ise imge piksel gri düzeylerinin bir Gauss dağılımı ile modellenmesidir [8]. Bu şekilde, önceki daha basit yöntemlerin aksine çok kipli (*multimodal*) arkaplan modellemesi yapılabilmektedir. Çok kipli arkaplanın daha iyi modellenebilmesi için her pikselin K Gauss dağılımının karışımı şeklinde modellenmesi de önerilmiştir (K genelde 3 ile 5 arasında küçük bir sayı olmak üzere) [9-13]. Piksellerin arkaplan modeline uyup uymama kontrolü dağılımların sürekli güncellenen değişinti (*variance*) değerlerine ve ağırlık katsayılarına göre yapılır. Bir piksel için her bir K Gauss dağılımına ait olma olasılığını gösteren K tane ağırlık katsayısı vardır. Bu ağırlık katsayılarından her birinin temsil ettiği dağılımın değişinti değerine oranının büyük olması söz konusu pikselin o dağılımla modellenen arkaplan modeline dahil olduğunu işaretler. Güncellenen Gauss dağılımları sayesinde bu yöntemle hızlı olmayan ışıklılık değişimlerine karşı dayanıklı ve çok kipli arkaplan modelleme yapılabilmektedir. Yine de arkaplan yüksek frekanslı hızlı değişimlere sahipse (hareketli yapraklar, bilgisayar monitörü, gölge değişimleri) söz konusu modelin başarımı düşmektedir [14]. Bunun temel nedeni piksel gri düzeyleri için yapılan Gauss dağılımı varsayımının bu durumlarda geçerli olmamasıdır.

Her bir pikselin son n video çerçevesinde aldığı değerlerin bir olasılık yoğunluk işlevine oturtulması (*kernel density estimation*) ile de arkaplan modellemesi yapılabilir [14]. Genelde Gauss kerneli uygulanmış son n çerçevedeki piksel değerlerinin oluşturduğu histogram ile elde edilen olasılık yoğunluk işlevine göre bir pikselin o an işlenen video çerçevesi için aldığı değer arkaplana dahil olma olasılığının önceden belirlenmiş bir eşik değerinden büyük olması durumunda söz konusu pikselin arkaplana dahil olduğu varsayılır. Bu yöntemin bir önceki paragrafta anlatılan Gauss karışımı modeli (GKM) kullanan yöntemlere göre avantajı parametrik olmamasıdır. Buna rağmen önceki n tane video çerçevesinin saklanması ve kullanılması bellek gereksinimi arttırmakta ve her adımda kernel değerlerinin hesaplanması da işlem yükünü arttırmaktadır. Yine de bu işlemsel yük, kodlama tablosu kullanımıyla (LUT, *lookup table*) azaltılabilir [14].

Arkaplanın modellenmesinde piksel değerlerinin oturtulduğu normal dağılımlarının uyarlamalı olarak güncellenmesi sahnede var olabilecek hızlı arkaplan değişimlerine yeterince çabuk yanıt veremeyebilir. Bu yüzden uyarlamalı bir model oluşturma aşamasında Gauss dağılımı kullanımının yanı sıra Kalman filtre kullanımı da söz konusudur [15-16].

Temel bileşen analizi (TBA) [17] ile elde edilen özvektörler yardımı ile de arkaplan modellenmesi gerçekleştirilebilir. [18] numaralı kaynakta raporlanan çalışmada, videodaki arkaplanı modellemek için video dizisinden N tane örnek çerçeve olarak oluşturulan rankı N olan matristen faydalanarak arkaplanın başarıyla modellenebileceği anlatılmaktadır. Buna göre öncelikle alınan N adet çerçeve ile oluşturulan matrisin ortak değışinti matrisi (*covariance matrix*) bulunur. Bu matristen elde edilen N tane özdeğerden en büyük $M < N$ özdeğere karşılık gelen M tane özvektör seçilir. Her bir video çerçevesinin bu özvektörlerin gerdiği uzaya iz düşürülmesi sonucunda söz konusu çerçeve için arkaplan bulunmuş olur. Orijinal çerçeve ile iz düşümünden geri çatılmış (*reconstructed*) imgenin farkının alınması ile önplan nesneleri arkaplandan ayrıştırılabilir. Bu yöntem, uzayın boyutunu önemli ölçüde küçültmeyi mümkün kılmaktadır. Bunun yanı sıra söz konusu tekniğin çalışmasındaki temel mantık, hareketli önplan nesnelerinin alınan N adet örnek çerçevede aynı yerde bulunmadığının kabul edilmesidir. Makalede bu yöntemin Gauss karışımı modeli (GKM) tekniklerine göre daha başarılı ve hızlı olduğu iddia edilmektedir. Bunun yanında bu teknikle ilgili olası bir sorun hareketli bir cismin durarak arkaplana eklendiği ya da bir arkaplan nesnesinin önplan nesnesine dönüştüğü durumlarda gözlenebilir.

Temel bileşen analizinin kullanıldığı [18] numaralı kaynaktaki çalışmada arkaplan modelinin güncellenmesi olası bir sorun olarak göze çarpmaktadır. Temel bileşen analizi gibi yöntemlerde farklı örneklerin işlenmesinde tüm taban kümesinin (*basis set*) yeniden oluşturulması gerekebilir. Böyle bir işleme alternatif olarak [19,20] numaralı kaynaklarda raporlanan çalışmada temel bileşen analizinin artımsal olarak gerçekleşip arkaplanın bu şekilde güncellenebildiği bir yöntem sunulmaktadır. Bu yöntemde her gelen örnekten faydalanarak denklem (1.1)'dekine benzer bir ağırlıklandırma kullanımıyla ortalama değer, özdeğerler ve özvektörler güncellenir. Bu şekilde yeni gelen çerçevelerin etkisi arkaplan modeline yansıtılmış olur. TBA'nın artımsal uygulanmasının arkaplan modelleme konusunda ışıklılık

değişimleri gibi koşullara karşı dayanıklılığını arttırmak için gürbüz temel bileşen analizi yöntemi önerilmiştir [19,20].

Yukarıda bahsedilen istatistiksel çalışmaların yanı sıra çeşitli renk uzayı (RGB, HSV, YUV) bilgilerinden faydalanarak oluşturulan arkaplan modelleme ve arkaplan çıkarma teknikleri de mevcuttur [5,21-25]. [22] numaralı kaynak makalede HSV bileşenlerinden çıkarılacak renklilik (*chromaticity*) ve parlaklık (*brightness*) bileşenlerinin ışıklılık değişimlerine karşı dayanıklılığı arttırabileceği ve YUV ile RGB uzaylarına göre bu konuda daha avantajlı olduğu raporlanmaktadır. Buna karşılık önplan arkaplan ayırıştırması sonucunda elde edilen sonuçlarda gürültü olarak nitelendirilecek blokların ortaya çıktığı rapor edilmiştir [26]. Sonuç olarak her bir renk uzayının belli noktalarda avantajları ve bunlara karşılık bazı dezavantajları olduğu sonucuna varılabilir.

Bu tez çalışmasında negatif olmayan matris ayırıştırma yöntemi (NOMA) [27-41] ve bu yöntemden geliştirilen artımsal negatif olmayan matris ayırıştırma (ANOMA) [42-44] tekniği ile gizetleme videolarında arkaplan modelleme gerçekleştirilmiştir. Geliştirilen negatif olmayan matris ayırıştırma hem işlemsel yük bakımından avantaj sağlamakta, hem de arkaplan modelinin yeni gelen örneklere göre güncellenebilmesini mümkün kılmaktadır. ANOMA'nın arkaplan modellemesindeki kullanımında piksel değerleri ya da bunların dağılımları hakkında herhangi bir kabul yapılmamaktadır. ANOMA'daki tek kısıt işlenecek verinin negatif değerlere sahip olmamasıdır ve bu da video verisinin doğasına tamamiyle uygundur.

Bu çalışmada ayrıca NOMA'nın ve ANOMA'nın topaklandırma işlevleri ve bu işlevlerin ANOMA'nın arkaplan modelleme uygulamasındaki kullanımına nasıl bir katkı yapacağı irdelenmiştir. NOMA'nın bulanık k-ortalama (*k-means*) topaklandırmasına denk olduğunun gösterildiği [40] çalışmasından yola çıkarak ANOMA'nın da benzer bir özelliğinin olduğu gösterilebilir. ANOMA'nın arkaplanı tüm video çerçevelerinden edinilen ortak bilgi (içerik) ile modellediği düşünülürse, topaklandırma özelliğinin bu problemde etkin bir işlevi olduğu da söylenebilir. Hareketli önplan nesnelere ait pikseller video boyunca aynı yerde kalmadıkları için elde edilecek arkaplan modelinde kendilerine yer bulamayacaklardır. Buna karşın arkaplandaki piksel değerlerinin fazla değişmemesi, bir anlamda video çerçevelerden çıkarılan ortak bilgiyle oluşturulan arkaplan modelinin bu piksel değerlerine sahip

olmasını sağlar. Bu sebeple topaklandırma işlevine sahip ANOMA tekniği, başarılı bir arkaplan modeli oluşturma yetisine sahiptir.

ANOMA'nın performansını ölçmek amacıyla PETS veritabanından alınmış gözetleme türü videolarda testler gerçekleştirildi. Karşılaştırma amacıyla ANOMA'nın yanı sıra NOMA ve ATBA yöntemlerinin de kullanıldığı testler sonucunda söz konusu uygulama için ANOMA'nın etkin bir yöntem olduğu ve ışıklılık değışimlerine karşı diğer iki yöntemle göre daha gürbüz olduğu görüldü.

2. NEGATİF OLMAYAN MATRİS AYRIŞTIRMA

Çok boyutlu verilerdeki fazlalık bilgiden kurtularak önemli bileşenleri ortaya çıkarmak içerik analiz yöntemlerindeki temel adımlardan birisidir. Temel bileşen analizi (TBA) [17] başta olmak üzere birçok ayrışım (*decomposition*) yöntemi işlenen veri boyutunu küçülterek ve önemli bilgi bileşenlerini açığa çıkararak bu işlevi yerine getirmeyi amaçlar. Bu yöntemlere ek olarak, döngülü (*iterative*) bir şekilde matris çarpanlarına ayırma işlemi gerçekleştirilerek verinin öz niteliklerini (features) çıkarmayı amaçlayan negatif olmayan matris ayrıştırma (NOMA) [27-40] da çok boyutlu veriler üzerinde kullanılmak üzere önerilen yeni tekniklerden birisidir. Negatif olmayan matris ayrıştırma, orijinal veri matrisini iki tane çarpan matrisine ayırarak boyut azaltır ve yararlı gösterimler (*representation*) oluşturur. NOMA sonucunda elde edilen çarpan matrislerin orijinal veri içerisindeki gizli ve önemli bileşenleri barındırmaları beklenir. Diğer birçok yöntemin aksine, NOMA’da bu çarpan matrisler üzerinde negatif olmama koşulu vardır ve bu koşul neden olduğu toplanabilirlik ilkesi sebebiyle sezgisel ve parça tabanlı (*parts based*) gösterimlerin oluşturulmasına olanak sağlar.

Negatif olmayan matris ayrıştırma problemine çözüm getiren ilk çalışmalar [45,46] numaralı kaynaklarda mevcut olsa da, NOMA ününü daha çok Lee ve Seung’un 1999 yılında yayımladıkları çalışma ile kazanmıştır [27]. Söz konusu makalede NOMA için döngüsel ve çarpımsal güncelleme kuralları önerilmiş ve NOMA’nın başarılı bir makine öğrenmesi (*machine learning*) tekniği olduğu gösterilmiştir. Daha sonraları NOMA araştırmasındaki eğilim elde edilen çarpanların seyreklik (*sparseness*) özelliklerini arttırarak oluşturulacak gösterimlerin parça tabanlı olma olasılığını arttırmak olmuştur [29-33]. Bunun için NOMA’nın klasik maliyet fonksiyonuna ek terimler eklenerek eniyileme sürecindeki kısıtlamalar arttırılmış, bunun neticesinde seyrekliği daha yüksek çarpanlar oluşturulmaya çalışılmıştır.

NOMA için önerilen yöntemler genelde döngüseldir ve bu yüzden algoritma yakınsaklığı önemli bir konudur. Yakınsama hızının arttırılması için farklı izdüşürülmüş gradyan inişi (*projected gradient descent*) yöntemleri sunulmuştur

[36]. Döngüsel ve çarpımsal güncellemeli tekniklere alternatif olarak Newton türü sayısal yöntemler de önerilmiştir [35].

Boyut küçültme ve sezgisel gösterimler oluşturma yetileri nedeniyle NOMA çeşitli uygulama alanlarında kullanılmıştır. Bunlara örnek olarak yüz tanıma [36], çeşitli biyomedikal uygulamalar [30], nota tanıma [37], biyoinformatik [38], kaynak (ses) ayırıştırma [31] ve görüntü kıyımı (*image hashing*) [39] verilebilir. NOMA'nın bu alanlarda kullanımında tercih nedenlerinin en önemlilerinden birisi, kullanılan verilerin doğasına uyumlu olmasıdır. Bu tür uygulamalarda genelde negatif olmayan elemanlardan oluşan veriler söz konusudur, bu da NOMA'nın çalıştırılmasını son derece elverişli kılar. Toplanabilir ve sezgisel gösterimler oluşturma yetisinin yanında, seyreklik de NOMA'nın değişik uygulamalarda fayda sağlayabilecek özelliklerinden biridir. Buna ek olarak, NOMA'nın bulanık k-ortalama topaklandırma tekniğine denk olduğu ve topaklandırmada başarılı sonuçlar verdiği de gösterilmiştir [40].

Değişik uygulamaların ihtiyaçlarını karşılamak için NOMA'nın değişik versiyonları da önerilmiştir [40-41]. Bunlara örnek olarak negatif değerlere sahip verilerde (söz gelimi ses uygulamalarında) kullanılmak üzere veri ve karışım matrislerindeki negatif olmama koşulunu ortadan kaldıran yarı-NOMA (*semi-NMF*) [41] ve özellikle öbekleme uygulamalarında kullanılmak üzere ortaya atılmış olan ve karışım matrisi sütunlarının veri matrisi sütunları tarafından gerilen bir uzayda yer almasını sağlayan konveks-NOMA [41] verilebilir. Bunların yanında çekirdek-NOMA (*kernel-NMF*), üçlü çarpan ayırma (*tri-factorization*) ve simetrik NOMA gibi farklı türler de mevcuttur [40].

2.1. Negatif Olmayan Matris Ayırıştırma için Matematiksel Tanımlar

Kullanılacak veri n boyutlu m tane gözlemden oluşsun ve $n \times m$ boyutlu bir matriste tutulsun. V_{ij} , $\mathbf{V}$ matrisinin i . satır ($i=1, \dots, n$) ve j . sütundaki ($j=1, \dots, m$) elemanını göstermek üzere, veri matrisi $\mathbf{V}$, $n \times m$ boyutlu olarak tanımlanır. Denklem (2.1)'de gösterildiği gibi, negatif olmayan matris ayırıştırma (NOMA) ile $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ matrisi iki adet çarpan matrisine belli bir yaklaşıklık ile ayrıştırılır [28]. Bu matrislerden ilki $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ile gösterilen karıştırma matrisi (*mixing matrix*) iken diğer çarpan matrisi ise $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{r \times m}$ ile temsil edilen kodlama matrisidir (*encoding matrix*) [28]. r ise

NOMA algoritmasının değişkeni olup ayrıştırma rankı ya da kısaca rank olarak adlandırılır. Rank değerinin seçimi çarpan matrislerine ayırma işlemindeki boyut küçültme miktarını belirler. NOMA belli bir hata karşılığında belli bir yaklaşıklık ile ayrıştırma yaptığı için küçük rank seçimi ile artan boyut küçültme miktarı geri çatma hatasını (*reconstruction error*) artırır. Dolayısıyla rank küçüldükçe çarpanlara ayırma işlemi sırasındaki bilgi kaybı artar.

$$\mathbf{V} \approx \mathbf{W}\mathbf{H} \quad (2.1)$$

$\mathbf{V}$ matrisinin her bir sütunu farklı bir gözleme denk düşüp $\mathbf{H}$ matrisinde kendisini ifade eden bir tane gösterim vektörüne sahiptir. $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3 \dots \mathbf{v}_m]$ ve $\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2 \mathbf{h}_3 \dots \mathbf{h}_m]$ şeklinde ifade edilebilen bu matrisler için $\mathbf{v}_c$ ve $\mathbf{h}_c$ sırası ile $\mathbf{V}$ ve $\mathbf{H}$ matrislerinin c 'inci ($c=1, \dots, m$) sütunlarını göstermektedir. Aynı şekilde karıştırma matrisi ise $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 \dots \mathbf{w}_r]$ şeklinde gösterilebilir. Denklem (2.2) ile, $\mathbf{H}$ matrisinin bir sütunundaki katsayılarından faydalanarak, $\mathbf{V}$ 'de bulunan aynı indisli gözlemin $\mathbf{W}$ matrisinin sütunlarının kullanımıyla nasıl oluşturulduğu gösterilmiştir.

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{W}\mathbf{h}_c, \quad c = 1, 2, \dots, m \quad (2.2)$$

NOMA yönteminin uygulanmasında genelde denklem (2.3) ile verilen ortalama karesel geri çatma hatası maliyet fonksiyonu olarak seçilip enküçültülür. Literatürde değişik maliyet fonksiyonları tanımlanıp kullanılıyor olsa da [30,32] denklem (2.3) ile verilmiş olan karesel hata, basitliği ve etkinliği nedeniyle, birçok araştırmacı tarafından tercih edilmektedir [27-30].

$$F = \frac{1}{2} \|\mathbf{V} - \mathbf{W}\mathbf{H}\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left((\mathbf{V})_{ij} - (\mathbf{W}\mathbf{H})_{ij} \right)^2 \quad (2.3)$$

Denklem (2.3)'teki karesel hata fonksiyonu, $\mathbf{W}$ ve $\mathbf{H}$ matrislerine göre ayrı ayrı konvektir [28]. Bu nedenle, (2.3) maliyet fonksiyonunun gradyan inişi (*gradient descent*) yöntemi ile eniyilenmesi sonucunda, $\mathbf{H}$ ve $\mathbf{W}$ matrislerinin elemanları için dönüşümlü ve çarpımsal (*alternating multiplicative*) güncelleme kuralları bulunur [28].

$\mathbf{H}$ matrisinin elemanları için gradyan inişi yöntemi kullanılarak bulunan güncelleme bağıntısı (2.4)'te gösterildiği gibi formüle edilir. Burada $j=1, \dots, m$, $a=1, \dots, r$ olup η_{aj} eniyileme adım boyunu (*step size*) göstermektedir.

$$(\mathbf{H})_{aj} \leftarrow (\mathbf{H})_{aj} - \eta_{aj} \frac{\partial F}{\partial (\mathbf{H})_{aj}} \quad (2.4)$$

(2.4)'teki kısmi türev (2.5) eşitliğindeki gibi ayrıntılandırılabilir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial (\mathbf{H})_{aj}} &= \frac{\partial}{\partial (\mathbf{H})_{aj}} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m ((\mathbf{V})_{ik} - (\mathbf{WH})_{ik})^2 \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n 2((\mathbf{V})_{ij} - (\mathbf{WH})_{ij}) \frac{\partial}{\partial (\mathbf{H})_{aj}} \sum_{k=1}^m ((\mathbf{V})_{ik} - (\mathbf{WH})_{ik}) \right) \\ &= - \sum_{i=1}^n ((\mathbf{V})_{ij} - (\mathbf{WH})_{ij}) (\mathbf{W})_{ia} \\ &= -(\mathbf{W}^T \mathbf{V})_{aj} + (\mathbf{W}^T \mathbf{WH})_{aj} \end{aligned} \quad (2.5)$$

(2.5)'de verilen kısmi türev eşitliği, adım boyunun (2.6) eşitliğindeki gibi seçilmesi koşulu ile, (2.4)'te kullanıldığında, $\mathbf{H}$ matrisinin elemanları için (2.7)'de verilen güncelleme kuralı elde edilir.

$$\eta_{aj} = \frac{(\mathbf{H})_{aj}}{(\mathbf{W}^T \mathbf{WH})_{aj}} \quad (2.6)$$

$$(\mathbf{H})_{aj} \leftarrow (\mathbf{H})_{aj} \frac{(\mathbf{W}^T \mathbf{V})_{aj}}{(\mathbf{W}^T \mathbf{WH})_{aj}} \quad (2.7)$$

Benzer şekilde, $\mathbf{W}$ matrisinin elemanları için güncelleme kuralı elde etmek amacıyla gradyan inişi eniyileme yöntemi kullanılabilir. $i=1, \dots, n$, ve $a=1, \dots, r$ için λ_{ia} adım boyunu göstermek üzere, gradyan inişi tekniğine göre $\mathbf{W}$ matrisinin elemanları için (2.8)'de görülen güncelleme kuralı elde edilir.

$$(\mathbf{W})_{ia} \leftarrow (\mathbf{W})_{ia} - \lambda_{ia} \frac{\partial F}{\partial (\mathbf{W})_{ia}} \quad (2.8)$$

(2.8)'deki kısmi türevin sonucu şöyledir:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial (\mathbf{W})_{ia}} &= \frac{\partial}{\partial (\mathbf{W})_{ia}} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \left((\mathbf{V})_{kj} - (\mathbf{WH})_{kj} \right)^2 \right) \\
&= \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m 2 \left((\mathbf{V})_{ij} - (\mathbf{WH})_{ij} \right) \frac{\partial}{\partial (\mathbf{W})_{ia}} \sum_{k=1}^n \left((\mathbf{V})_{kj} - (\mathbf{WH})_{kj} \right) \right) \\
&= - \sum_{j=1}^m \left((\mathbf{V})_{ij} - (\mathbf{WH})_{ij} \right) (\mathbf{H})_{aj} \\
&= - \left(\mathbf{VH}^T \right)_{ia} + \left(\mathbf{WHH}^T \right)_{ia}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

(2.9)'da verilen türev eşitliği, adım boyu (2.10)'daki gibi seçilmek koşulu ile, denklem (2.8)'e yerleştirilirse, $\mathbf{W}$ matrisinin elemanları için de dönüşümlü ve çarpımsal güncelleme kuralları elde edilir. $i=1, \dots, n$, $a=1, \dots, r$ olmak üzere söz konusu güncelleme formülü (2.11)'de verilmektedir.

$$\lambda_{ia} = \frac{(\mathbf{W})_{ia}}{(\mathbf{WHH}^T)_{ia}} \tag{2.10}$$

$$(\mathbf{W})_{ia} \leftarrow (\mathbf{W})_{ia} \frac{(\mathbf{VH}^T)_{ia}}{(\mathbf{WHH}^T)_{ia}} \tag{2.11}$$

Genel olarak gradyan inişi yönteminde seçilecek adım boyutunun önemi büyüktür. Küçük seçilen adım boyu eniyilemede yakınsamayı yavaşlatırken, adım boyunun gereğinden büyük seçilmesi iraksamaya neden olabilir. Ancak, (2.6) ve (2.10)'da verilen adım boylarının seçilmesi durumunda maliyet fonksiyonunun döngüsel olarak güncelleme sırasında hiç artmayacağı, Lee ve Seung tarafından ispatlamıştır [28]. Adım boylarının bu şekilde seçilmesinin bir başka önemli noktası ise güncelleme döngüleri sırasında adım boylarının otomatik olarak değişmeleridir. Yani herhangi bir kontrol ya da atama yapmaya gerek kalmadan adaptif olarak belirlenen adım boyları NOMA algoritmasında kullanılmaktadır.

(2.7) ve (2.11)'deki güncelleme kuralları dönüşümlü olarak uygulanır. Burada dönüşümlülükten kasıt, güncelleme işleminin her bir döngüsünde önce $\mathbf{H}$ matrisinin

elemanlarının güncellenmesi, daha sonra da elde edilen $\mathbf{H}$ matrisinin kullanımıyla $\mathbf{W}$ matrisinin güncellenmesi ve her döngüde bu işlemin yinelenmesidir.

NOMA ile ilgili diğer bir nokta ise başlangıç koşullarının belirlenmesidir. NOMA algoritmalarında $\mathbf{W}$ ve $\mathbf{H}$ matrisinin güncellenmesinden önce başlangıç koşullarının belirlenmesi çok kritik olmamakla birlikte, eniyileme sürecinde mutlak minimuma erişmenin garanti olmaması nedeniyle, farklı ilk koşullar farklı sonuçlar verebilmektedir. Genelde ilk koşul olarak $\mathbf{W}$ ve $\mathbf{H}$ matris elemanlarına negatif olmayan rasgele sayılar atanır. Sonuçta ilk koşullar ne olursa olsun yakınsaklık durumunda KKT (Karush-Kuhn-Tucker) koşullarının incelenmesiyle yerel minimuma ulaşılabileceği görülebilir. Detaylar Ek-A'da verilmiştir.

2.2. Negatif Olmayan Matris Ayırıştırma ile Arkaplan Modelleme

Literatürde gözetleme türü videolarda arkaplan modelleme probleminde negatif olmayan matris ayırıştırma (NOMA) tekniğini kullanan bir çalışma (bu tez yazarının bildiği kadarıyla) yoktur. Sadece [42,43] çalışmalarında söz konusu problem için kullandığımız artımsal negatif olmayan matris ayırıştırma yöntemiyle karşılaştırma yapmak amacıyla NOMA tarafımızca kullanılmıştır. Aslında NOMA'nın bu uygulama için elverişli bir yöntem olduğunu tahmin etmek zor değildir. Keza NOMA ile kıyaslayabileceğimiz temel bileşen analizi (TBA) daha önce bu problemde başarı ile uygulanmıştır [18-20].

[18] çalışmasında gözetleme videolarında arkaplanın video çerçevelerinin kullanımıyla oluşturulacak veri matrisinin ortak değişimlilik (*covariance*) matrisinden elde edilecek birkaç özvektörle modellenebileceği anlatılmaktadır. Buna göre video dizisinden alınacak örnek çerçevelere TBA uygulanmasıyla elde edilecek özvektörler, işlenen videodaki statik kısımları kapsayan arkaplanı modellemeyi sağlayacak bilgi bileşenlerini içerir. Bu sayede, hem boyut küçültme gerçekleştirilmiş olurken, hem de TBA ile hesaplanan özvektörlerin kullanımıyla, geri çatılan her bir video çerçevesinin orijinalinden farkının bulunmasıyla arkaplan önplan ayırıştırılması yapılabilir.

NOMA da video arkaplan modellemesinde TBA'ya benzer şekilde kullanılabilir. Sözgelimi N adet çerçeve barındıran bir videodan seçilecek m tane örnek üzerine NOMA uygulanması ile (1)'e göre r sütunlu bir karıştırma matrisi elde edilir. Veri

matrisi V 'nin her bir sütununun bir örneğe denk seçildiği durumda, karıştırma matrisi W 'nin her bir sütunu işlevsel olarak TBA'daki bir öz vektöre denk düşer. Tabii bu sütun vektörleri için TBA'daki özvektörlerin aksine diklik (*orthogonality*) veya lineer bağımsızlık garantisi verilemeyeceği için düşük boyutlu bir uzay germe her zaman söz konusu değildir. Bu yüzden bir çalışmada bu karışım vektörleri 'verinin yapı blokları' (*building blocks*) olarak nitelendirilmiştir [29]. Buradaki amaç, veri kümesindeki her bir gözlemin bu karışım vektörlerinin lineer birleşimleri ile oluşturulabileceğinin altını çizmektir. Bunu mümkün kılan şey ise veri kümesindeki bilgilerin bu karışım vektörlerinde tutulmasıdır.

Sonuç itibarıyla, m örnek üzerinde çalıştırılmış NOMA algoritması ile elde edilen r adet karışım vektörü boyut küçültme sağladığı kadar bir bilgi kaybına da neden olacaktır. Video sahnesindeki hareketli cisimler her bir çerçevede farklı konumlarda olacakları için düşük boyutlu bir karışım matrisinde yapacakları katkı/katılım az olacak, karışım vektörleri videodaki bu bileşenler ile ilgili bilgileri tutamayacaktır. Buna karşılık videoda arkaplan olarak niteleyebileceğimiz duruk (*static*) kısımların gösterime katılımı çok olacak ve karışım vektörleri bu bileşenleri betimleyebilecektir. Bu yüzden NOMA ile elde edilen karışım vektörlerinin, videonun arkaplanının olasılık dağılım fonksiyonunu için başarılı bir model oluşturabileceği sonucuna varılabilir. Aynı çıkarım önplan nesneleri için yapılamayacağı için NOMA sonrası geri çatılmış çerçevelerde önplan bileşenleri bulunmayacak, bu da arkaplan önplan ayrıştırmasını kolaylaştıracaktır.

2.3. Negatif Olmayan Matris Ayrıştırma ile Arkaplan Modellemedeki

Kısıtlamalar

Bölüm 2.2'de NOMA'nın arkaplan modelleme probleminde nasıl kullanılabileceği anlatıldı. NOMA doğası gereği bu problem için elverişli gözükse de NOMA'nın gözlem vektörlerinden oluşan veri üzerinde toplu halde (*batch mode*) uygulanması belli kısıtlamalar ve problemler doğurmaktadır. Bu kısıtlamalar NOMA'nın özellikle çevrimiçi uygulamalarda kullanılmasını zorlaştırmaktadır.

Öncelikle örneklerin toplu işlenmesi modelin video içeriğindeki değişimlere uyarlanabilir (*adaptive*) olma özelliğini kısıtlamaktadır. Bu iddianın daha iyi anlaşılması için iki durum örnek olarak verilebilir. Birinci durum, videonun büyük bir bölümünde hareketsiz halde duran bir nesnenin videonun nispeten daha kısa bir

bölümünde hareketlenip önplana dahil olmasıdır. Bu durumda örneklerin çoğunda sabit bir konumda bulunan cisim karışım vektörlerine ve dolayısıyla arkaplan modeline bu şekilde dahil olacaktır. Video çerçeveleri bu karışım matrisi ile geri çatıldığı zaman ise, cismin hareketli olduğu bölümlerde o cisim önplanda görünmesinin yanında arkaplandaki konumunda da görünecektir. NOMA'nın toplu işlemesinin neden olabileceği bu duruma verilebilecek bir diğer örnek ise, videonun ilk kısımlarında hareket halinde olan bir nesnenin sonraki kısımlarda sabitlenip arkaplana dahil olduğu durumdur. Sonuçta bahsi geçen nesne, videonun büyük bir bölümünde arkaplanın bir parçası olduğundan karışım matrisinde arkaplan modeline dahil olacak, bu da hareketli olduğu video bölümlerinde bile arkaplanda da gözükmesine yol açacaktır.

NOMA'nın veri kümesinden alınan örnekleri toplu şekilde işlemesi, özellikle içerik değişimlerinin yaşandığı uzun videolarda, çok avantajlı bir uygulama değildir. Videoların dinamik içeriği, üstteki paragrafta verilen örneklerden de anlaşılacağı şekilde, arkaplan modelinin videoda bulunan değişikliklere uyarlanabilmesi için NOMA'nın bir defadan çok uygulanması gerekliliğini doğurur. Özellikle çevrimiçi uygulamaları düşündüğümüzde, eğer yeni gelen örneklerle birlikte NOMA tekrarlanırsa işlemsel yük önemli bir sorun haline gelir. Çarpımsal güncelleme kurallarındaki matris çarpımları dolayısıyla NOMA'nın işlemsel karmaşıklığı $O(nmr)$ mertebesinde. Burada n bir örneğin boyutu, r rank, m ise örnek sayısıdır. Buradan her yeni gelen örnekle birlikte NOMA'nın getireceği işlemsel yükün artacağı görülür. Aynı zamanda sabit bir r değeri için NOMA algoritmasına giren örnek sayısı arttıkça geri çatma başarımı düşecektir. Bu şartlarda, duruma göre, işlemsel yükün daha da artması pahasına rankın artırılması da gerekebilir.

NOMA'nın bellek gereksinimi de özellikle çevrimiçi uygulamalarda bir başka problem olarak göze çarpmaktadır. (2.7) ve (2.11)'de görüldüğü gibi güncelleme işlemlerinde $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ ve $\mathbf{H}$ matrisleri kullanılmaktadır ve bu da tüm örneklerin saklanması gerekliliğini doğurur. Bu yüzden NOMA'nın tekrar gerçekleştirilmesi için tüm örneklerle karşılık gelen $\mathbf{V}$ ve $\mathbf{H}$ sütunlarının saklanması gereksinimi NOMA'yı bu tür büyük boyutlu uygulamalara oldukça elverişsiz yapar.

Hareketli bir içeriğe sahip uzun bir videoya NOMA'nın toplu (*batch*) halde uygulanması arkaplan modelleme problemi için çok etkin bir çözüm getiremeyeceğinden NOMA'nın bir şekilde çevrim içi uygulanması düşünülebilir.

Her gelen yeni örnekle birlikte NOMA tekrar gerçekleştirilebilir. Burada işlemsel yükün azaltılma gerekliliği ile birlikte üstesinden gelinmesi gereken bir diğer nokta ise en son gelen örneklerin etkilerini arkaplan modeline hızla katabilmektir. Teorik olarak her bir örneğin NOMA yönteminde yaptığı katkı denktir. Fakat dinamik arkaplan modelleme gibi problemlerde bir ölçüde belleksizlik özelliği aranmaktadır. Burada belleksizlikten kasıt, sistemin belli bir noktadan sonra eski örneklerin etkisini arkaplan modelinden çıkarabilmesidir. İdeal durumda, oluşturulacak arkaplan modelinin video içeriğindeki dinamik değişimlere anında yanıt verebilmesi istenir. Örneğin hareketli bir nesne hareketini sonlandırdığı anda arkaplan modeline yerleştirilebilmelidir. Benzer şekilde sabit bir arkaplan parçası harekete geçtiği anda arkaplan modelinden çıkarılıp önplan nesnesi olarak etiketlenebilmedir. Arkaplan modelinde yapılması gereken bu tür uyarlamalar, ancak yeni gözlemlerin etkilerinin var olan modele etkin bir biçimde eklenebilmesi ile yapılabilir. Klasik NOMA uygulamalarında ise her bir örneğin etkisi eşit olduğundan oluşturulan modelde bu tür uyarlamaların hızlı şekilde yapılması güçtür.

NOMA'nın çevrimiçi uygulamalarında eski örneklerin etkilerinin zamanla azaltılması için, her yeni gelen örnekte eski bir örneğin, üzerinde NOMA gerçekleştirilecek veri matrisinden çıkarılması akla gelen ilk çözüm önerilerinden birisidir. Ne var ki bu yöntemin, video içeriğinde yaşanan değişimin hızına göre performansı değişebilir. Aynı zamanda en güncel gözlemlere bir ağırlık verilmediği sürece modelin içerik değişimlerine göre hızlıca uyarlanma sorununun çözümü zordur.

Bu bölümde anlatılmış olan NOMA'nın dinamik içeriğe sahip büyük boyutlu veri kümelerine uygulanmasındaki zorluklar ve kısıtlamalar nedeniyle NOMA tekniğinin klasik uygulanış biçimiyle arkaplan modelleme problemine çok uygun olmadığı sonucuna varılabilir. Aynı zamanda arkaplan modelleme probleminde birçok avantajı olan çevrimiçi gerçekleştirme NOMA ile mümkün gözükmemektedir.

3. ARTIMSAL NEGATİF OLMAYAN MATRİS AYRIŞTIRMA

Bölüm 2.3'te bahsedilen kısıtlamaları aşmak için artımsal negatif olmayan matris ayırıştırma (ANOMA) tekniğini önerdik [42]. ANOMA, ağırlıklı maliyet fonksiyonu sayesinde içerik değişimlerini oluşturduğu çarpanlarına hızlı bir şekilde yansıtıran işlemsel yükü ve bellek gereksinimini önemli ölçüde azaltmaktadır. Bu nedenle arkaplan modelleme problemine doğası gereği çok uygun olup, bu uygulamaya çevrimiçi bir çözüm sunmaktadır [42-44].

ANOMA tekniğindeki amaç, işlemsel yükü fazla arttırmadan en güncel örneklerin etkisini de katarak $\mathbf{W}$ ve $\mathbf{H}$ çarpan matrislerini güncellemektir. Her yeni örnek gelişiyle birlikte $\mathbf{V}$ ve $\mathbf{H}$ matrislerine birer sütun eklenir ve karışım matrisi $\mathbf{W}$ bu örneklerle göre güncellenir.

3.1. ANOMA için Maliyet Fonksiyonunun Oluşturulması

k adet örneğin işlenmesi sonucu elde edilmiş çarpan matrisler $\mathbf{W}_k$ ve $\mathbf{H}_k$ ile gösterilsin. Buna göre, n bir video çerçevesindeki piksel sayısını vermek üzere, bu k örnek için ANOMA sonucu elde edilmiş maliyet fonksiyonu (3.1)'de verildiği gibidir.

$$F_k = \|\mathbf{V} - \mathbf{W}_k \mathbf{H}_k\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \left((\mathbf{V})_{ij} - (\mathbf{W}_k \mathbf{H}_k)_{ij} \right)^2 \quad (3.1)$$

$\mathbf{v}_{k+1}$ ile gösterilen $k+1$ 'inci örneğin işlenmesi için maliyet fonksiyonu (3.2) verildiği şekilde yazılır. Burada hata fonksiyonu $\mathbf{W}_{k+1}$ and $\mathbf{H}_{k+1}$ matrisleri cinsinden yazılır.

$$F_{k+1} = \|\mathbf{V} - \mathbf{W}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k+1} \left((\mathbf{V})_{ij} - (\mathbf{W}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1})_{ij} \right)^2 \quad (3.2)$$

Bu maliyet fonksiyonunun eniyilenme sürecinde (2.7) ve (2.11) ile verilen klasik ANOMA güncelleme kuralları da kullanılabilir. Fakat her yeni gelen örnek için böyle bir işlem getireceği işlemsel yük bakımından oldukça verimsiz olacaktır.

Bölüm 2.2’de $\mathbf{W}_{k+1}$ matrisinin sütunlarının NOMA uygulanan veriyi betimlemedeki önemi anlatılmıştı. (2.2)’de ifade edildiği gibi $\mathbf{h}_{k+1}$ kodlama vektöründeki katsayılar $\mathbf{v}_{k+1}$ örneğinin geri çatılmasında karışım vektörlerinin ($\mathbf{W}_{k+1}$ matrisinin sütunları) nasıl kullanılacağını veya bir başka deyişle her bir karışım vektörünün $k+1$ ’inci gözlem içindeki katılımını belirler. Sonuç olarak her bir gözlemin, dolayısıyla da tüm veri kümesinin ifade edilmesinde $\mathbf{W}_{k+1}$ matrisinin önemi büyüktür. Ayrıca, her yeni gelen örneğin veri kümesinin boyutunu arttırması ile birlikte örneklerin karışım matrisi üzerindeki bireysel etkileri azalmaktadır. Bu sebeple, özellikle video gibi örneklerin zamansal olarak ilişkisinin yüksek olduğu veriler için, yeni gelen örnekler $\mathbf{W}_{k+1}$ matrisinin önceki örnekleri temsil etmekteki başarımını çok etkilemeyecekleri için ANOMA yönteminde önceki örneklere karşılık gelen kodlama vektörlerinin güncellenmesine gerek yoktur. $\mathbf{H}_{k+1}$ matrisinin ilk k sütununun $\mathbf{H}_k$ matrisine yaklaşık olarak eşit olacağı kabulü altında, $\mathbf{W}$ matrisine ek olarak $\mathbf{H}_{k+1}$ matrisinin sadece son sütununu güncellemek yeterli olacaktır. Bu yüzden gözlem sayısı $k+1$ ’e çıktığında toplam geri çatma hatası F_{k+1} (3.3)’te ifade edildiği gibi olur. Burada $\mathbf{h}_{k+1}$ son örneğe karşılık gelen kodlama vektörü olup, toplam hata fonksiyonu görüldüğü üzere biri son örneğin geri çatma hatasını temsil eden iki tane bileşenin toplamı biçiminde gösterilmiştir.

$$\begin{aligned}
 F_{k+1} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k+1} \left((\mathbf{v})_{ij} - (\mathbf{W}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1})_{ij} \right)^2 \\
 &\cong \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \left((\mathbf{v})_{ij} - (\mathbf{W}_{k+1} \mathbf{H}_k)_{ij} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left((\mathbf{v}_{k+1})_i - (\mathbf{W}_{k+1} \mathbf{h}_{k+1})_i \right)^2
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

(3.3)’de verilen toplam hata, ilk k örneğe ait kodlama vektörlerinin güncellenmemesi sebebiyle (3.2) ile gösterilen NOMA sonucu elde edilecek geri çatma hatasına yapılan bir yaklaşıklıkla birlikte, toplam geri çatma hatası (3.4)’de yazıldığı şekilde birisi ilk k örneğe denk gelen, diğeri ise son örnekten kaynaklanan 2 tane hata bileşeninin toplamı halinde ifade edilir.

$$F_{k+1} \cong F_k + f_{k+1} \tag{3.4}$$

(3.4)’te verilen maliyet fonksiyonunda her bir örneğin katılımı ayrıdır. Teorik olarak örnekler bağımsız olursa bu durumda bir sorun yoktur. Fakat video işleme uygulamalarında olduğu gibi ardışık örneklerin ilintisinin ve benzerliğinin yüksek

olduğu durumlarda ayrıştırma sonucu elde edilen çarpanlar veya gösterimler üzerinde bazı örnek gruplarının etkisi daha büyük olabilir. Bu da özellikle önceden işlenen örnek sayısının fazla olduğu durumlarda yeni örneklerle birlikte gelen içerik değişimlerinin çarpan matrislerine veya oluşturulacak gösterimlere yansıtılmasını zorlaştırır. Bu engeli aşmak için her bir örneğin maliyet fonksiyonuna dolayısıyla da eniyileme sürecine yaptığı katılım kontrol edilebilir. Gerçekten de çevrimiçi çoğu uygulamada dinamik içerik değişimlerini sağlıklı bir şekilde modelleyebilmek için son gelen örneklerin katılımları arttırmak istenir. Örnek olarak bölüm 2.3'te anlatıldığı gibi, gözetleme türü videolarda oluşturulacak arkaplan modelinin dinamik içerik değişimlerine karşı uyarlanabilir olmasını arttırmak için son gelen video çerçevelerinin maliyet fonksiyonundaki ağırlıkları arttırılmalıdır [43,44].

Her bir örneğin elde edilecek gösterimlere yapacağı katkıyı kontrol edebilmek ve oluşturulacak ANOMA modeline istenilen seviyede belleksizlik özelliği kazandırmak için (3.5)'te gösterildiği gibi F_{k+1} maliyet fonksiyonuna $S_o(\alpha)$ ve $S_f(\alpha)$ ağırlıklandırma fonksiyonları eklenmiştir. Bunlar α sabitinin fonksiyonlarıdır ve α değeri yapılacak uygulamaya göre genellikle deneysel olarak seçilir. $S_o(\alpha)$ ile eski örneklerden gelen hatanın katılımı kontrol edilirken $S_f(\alpha)$ son gelen örneğin etkisini belirler.

$$F_{k+1} = S_o(\alpha)F_k + S_f(\alpha)\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\left((\mathbf{v}_{k+1})_i - (\mathbf{W}_{k+1}\mathbf{h}_{k+1})_i\right)^2 \quad (3.5)$$

(3.5)'te verilen ifadeye göre her yeni gelen ve işlenen örnek için eski örneklerden kaynaklanan hata terimleri sürekli $S_o(\alpha)$ ile çarpılırken yeni gelen gözlemin neden olduğu hata bileşeni ise $S_f(\alpha)$ ile ağırlıklandırılacaktır. Bu ağırlıklandırma düzeni sonucunda (3.5)'te verilen maliyet fonksiyonu (3.6)'da gösterilen şekilde de yazılabilir.

$$F_{k+1} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k+1}S_j(\alpha)\sum_{i=1}^n\left((\mathbf{v})_{ij} - (\mathbf{W}_{k+1}\mathbf{H}_{k+1})_{ij}\right)^2, \begin{cases} S_j(\alpha) = S_o^{k+1-2r}(\alpha), & j \leq 2r \\ S_j(\alpha) = S_o^{k+1-j}(\alpha)S_f(\alpha), & 2r < j \leq k+1 \end{cases} \quad (3.6)$$

(3.6)'da $S_j(\alpha)$ j indisli örneğin ağırlıklandırma katsayısını göstermektedir. Burada, her gelen örnekle birlikte eski terimlerin $S_o(\alpha)$ ile çarpılmasının ağırlıklandırma katsayılarında $S_o(\alpha)$ 'nin üstel serisini oluşturduğu gözden kaçırılmaması gereken bir noktadır.

$S_o(\alpha)$ fonksiyonunun 1'den küçük olması kabulü altında $S_o^{k+1-2 \times r}(\alpha)$ veya $S_o^{k+1-j}(\alpha)$ ile ağırlıklandırılan eski örneklerden kaynaklanan hata terimlerinin fonksiyondaki katılımlarının giderek düşeceği ve işlenen örnek sayısı k büyüdükçe sifıra yakınsayacağı görülür. Bu durum, önerilen artımsal çarpan matrislerine ayırma işleminin sisteme istenilen düzeyde belleksizlik özelliğini aşılayabileceği anlamına gelir. Bu ağırlıklandırma düzeninde $S_o(\alpha)$ eski örneklerin sönme miktarını belirler.

3.2 ANOMA için Güncelleme Kurallarının Çıkarılması

ANOMA için ağırlıklandırılmış hata fonksiyonu belirlendiğine göre, güncelleme kurallarının çıkarılması için bu (3.6)'daki maliyet fonksiyonunu eniyilemek için gradyan inişi (*gradient descent*) yöntemi kullanılabilir. İşlenecek her yeni gelen örnek için kodlama matrisine eklenecek yeni sütunla birlikte karışım matrisi güncellenecektir. $a=1, \dots, r$ olmak üzere $k+1$ 'inci örnek alındığı zaman, $\mathbf{h}_{k+1}$ vektörünün güncelleme kuralı gradyan inişi yöntemine göre (3.7)'deki gibi verilebilir.

$$(\mathbf{h}_{k+1})_a \leftarrow (\mathbf{h}_{k+1})_a - \mu_a \frac{\partial F_{k+1}}{\partial (\mathbf{h}_{k+1})_a} \quad (3.7)$$

(3.7) formülündeki kısmi türev şu şekilde alınır:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{k+1}}{\partial (\mathbf{h}_{k+1})_a} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k+1} S_j(\alpha) \frac{\partial}{\partial (\mathbf{h}_{k+1})_a} \left[\sum_{i=1}^n \left((\mathbf{v}_j)_i - \sum_{k=1}^r (\mathbf{W}_{k+1})_{ik} (\mathbf{h}_j)_k \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot S_{k+1}(\alpha) \sum_{i=1}^n \left((\mathbf{v}_{k+1})_i - (\mathbf{W}_{k+1} \mathbf{h}_{k+1})_i \right) (\mathbf{W}_{k+1})_{ia} \\ &= S_{k+1}(\alpha) \left[(\mathbf{W}_{k+1}^T \mathbf{v}_{k+1})_a - (\mathbf{W}_{k+1}^T \mathbf{W}_{k+1} \mathbf{h}_{k+1})_a \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

(3.8) ile verilen kısmi türevle birlikte (3.9)'daki adım boyunun (3.7)'ye yerleştirilmesiyle (3.10)'daki güncelleme kuralı elde edilir.

$$\mu_a = \frac{(\mathbf{h}_{k+1})_a}{S_j(\alpha)(\mathbf{W}_{k+1}^T \mathbf{W}_{k+1} \mathbf{h}_{k+1})_a} \quad (3.9)$$

$$(\mathbf{h}_{k+1})_a \leftarrow (\mathbf{h}_{k+1})_a \frac{(\mathbf{W}_{k+1}^T \mathbf{v}_{k+1})_a}{(\mathbf{W}_{k+1}^T \mathbf{W}_{k+1} \mathbf{h}_{k+1})_a} \quad (3.10)$$

Benzer şekilde, $i=1,2,\dots,n$ ve $a=1,2,\dots,r$ değerleri için gradyan inişi yöntemi ile $\mathbf{W}_{k+1}$ matrisinin ia indisli elemanının güncellenmesi şu (3.11) ile verilen çerçeve içinde yapılır.

$$(\mathbf{W}_{k+1})_{ia} \leftarrow (\mathbf{W}_{k+1})_{ia} - \lambda_{ia} \frac{\partial F_{k+1}}{\partial (\mathbf{W}_{k+1})_{ia}} \quad (3.11)$$

Öncelikle (3.11)'deki kısmi türevi şu şekilde hesaplayalım:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{k+1}}{\partial (\mathbf{W}_{k+1})_{ia}} &= \frac{\partial}{\partial (\mathbf{W}_{k+1})_{ia}} \left[\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k+1} S_j(\alpha) \sum_{i=1}^n \left((\mathbf{v})_{ij} - (\mathbf{W}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1})_{ij} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k+1} S_j(\alpha) \frac{\partial}{\partial (\mathbf{W}_{k+1})_{ia}} \left[\sum_{i=1}^n \left((\mathbf{v})_{ij} - (\mathbf{W}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1})_{ij} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} 2 \sum_{j=1}^{k+1} S_j(\alpha) \left((\mathbf{v})_{ij} - (\mathbf{W}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1})_{ij} \right) (\mathbf{H}_{k+1})_{aj} \\ &= \sum_{j=1}^{k+1} S_j(\alpha) \left(-(\mathbf{v})_{ij} (\mathbf{H}_{k+1})_{aj} + (\mathbf{H}_{k+1})_{aj} (\mathbf{W}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1})_{ij} \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

$\mathbf{W}_{k+1}$ matrisinin elemanlarının güncellenmesinde kullanılacak gradyan inişi eniyileme tekniğinde adım boyu olarak (3.13) ile verilen λ_{ia} değeri seçilebilir. Söz konusu adım boyunun seçilmesi durumunda maliyet fonksiyonunun döngüsel güncelleme adımları sırasında artmayacağını ispatı Lee ve Seung'un ispatına benzer şekilde Ek-B'de yapılmıştır.

$$\lambda_{ia} = \frac{(\mathbf{W}_{k+1})_{ia}}{\sum_{j=1}^{k+1} S_j(\alpha) (\mathbf{W}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1})_{ij} (\mathbf{H}_{k+1}^T)_{ja}} \quad (3.13)$$

(3.12) ve (3.13)'de verilen eşitliklerin (3.11)'de kullanılmasıyla $\mathbf{W}_{k+1}$ matrisinin elemanları için çarpımsal güncelleme kuralları elde edilmiş olur. Bu güncelleme formülünün verildiği (3.14)'te $\mathbf{h}_j$ vektörü $\mathbf{H}_{k+1}$ matrisinin j 'inci sütununu, $\mathbf{v}_j$ vektörü ise j 'inci örneği temsil ederken $i=1, \dots, n$, $a=1 \dots r$ değerleri geçerlidir. Video verisinin özelliği göz önüne alındığında bir önceki çerçevenin işlenmesi sonucunda elde edilen $\mathbf{W}_k$ matrisi $\mathbf{W}_{k+1}$ matrisinin güncelleme sürecinde ilk koşul olarak kullanılabilir. Ardışık çerçevelerin ilintisinin ve benzerliğinin yüksek olması bu şekilde yapılacak bir güncellemedeki yakınsama hızını arttıracaktır.

$$(\mathbf{W}_{k+1})_{ia} \leftarrow (\mathbf{W}_{k+1})_{ia} \frac{\sum_{j=1}^{k+1} S_j(\alpha) (\mathbf{v}_j \mathbf{h}_j^T)_{ia}}{\sum_{j=1}^{k+1} S_j(\alpha) (\mathbf{W}_{k+1} \mathbf{h}_{k+1} \mathbf{h}_{k+1}^T)_{ia}} \quad (3.14)$$

$k+1$ 'inci çerçeve için ANOMA'nın uygulanmasında $\mathbf{H}_{k+1}$ matrisinin ilk k sütunu güncellenmeyip değişmeyeceğinden (3.14)'teki ifade (3.15) ile verilen şekilde yazılabilir.

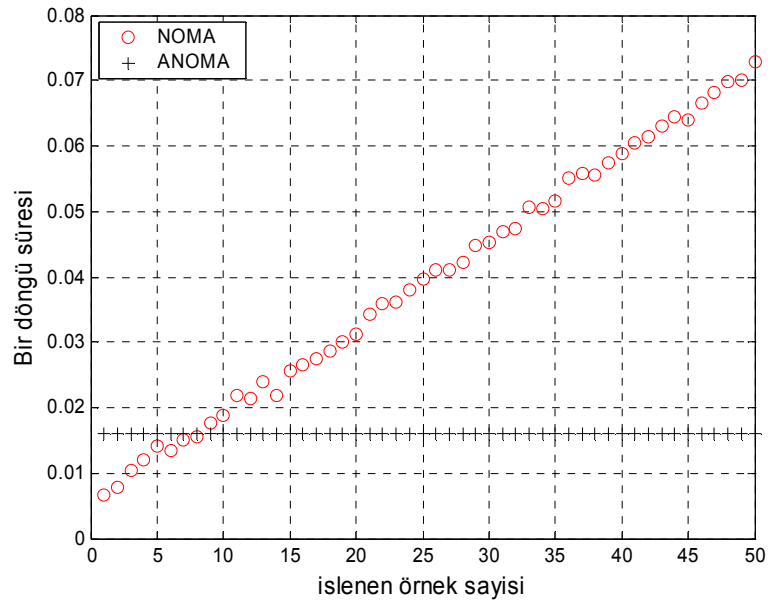
$$(\mathbf{W}_{k+1})_{ia} \leftarrow (\mathbf{W}_{k+1})_{ia} \frac{(S_o(\alpha) \mathbf{V}_k \mathbf{H}_k^T + S_f(\alpha) \mathbf{v}_{k+1} \mathbf{h}_{k+1}^T)_{ia}}{(S_o(\alpha) \mathbf{W}_{k+1} \mathbf{H}_k \mathbf{H}_k^T + S_f(\alpha) \mathbf{W}_{k+1} \mathbf{h}_{k+1} \mathbf{h}_{k+1}^T)_{ia}} \quad (3.15)$$

(3.14) ve (3.15) ile verilen ifadeler aynı işi yapıyor olsalar da $\mathbf{W}_{k+1}$ matrisinin güncelleme sürecinde (3.15)'in kullanılması işlemsel yük ve bellek kullanımı bakımından önemli avantajlar sağlar. $\mathbf{V}$ ve $\mathbf{H}_{k+1}$ matrislerinin ilk k sütunları değişmediğine göre (3.14)'teki gibi söz konusu sütun vektörlerinin ayrı ayrı çarpılıp teket teker ağırlıklandırılması yerine (3.15)'teki gibi toplu bir kullanımdan faydalanılabilir. Her çerçeve için sonlandırılan güncelleme işleminden sonra (3.16) ve (3.17)'de gösterilen şekilde hesaplanan matris çarpımları bu biçimleriyle saklanıp kullanılır.

$$\mathbf{V}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}^T = S_o(\alpha) \mathbf{V}_k \mathbf{H}_k^T + S_f(\alpha) \mathbf{v}_{k+1} \mathbf{h}_{k+1}^T \quad (3.16)$$

$$\mathbf{H}_{k+1}\mathbf{H}_{k+1}^T = S_o(\alpha)\mathbf{H}_k\mathbf{H}_k^T + S_f(\alpha)\mathbf{h}_{k+1}\mathbf{h}_{k+1}^T \quad (3.17)$$

Bu şekildeki gerçekleştirilecek güncelleme kuralları iki önemli avantajı beraberinde getirir. İlk kazanım bellek kullanımı ile ilgilidir. Her yeni gelen örnekle beraber boyutu artan $\mathbf{V}_k$ ve $\mathbf{H}_k$ matrislerinin kullanılması yerine bunların çarpımlarından elde edilen ve boyutu değişmeyen $\mathbf{V}_k\mathbf{H}_k^T$ ve $\mathbf{H}_k\mathbf{H}_k^T$ matrislerinin kullanılması gerekli bellek miktarının sabit kalmasını sağlar. NOMA'nın klasik uygulanmasında ise tüm örneklerin saklanma ihtiyacı, artan örnek sayısı ile beraber bellek kullanımını da arttırıp ilerleyen aşamalarda algoritmayı uygulanabilir olmaktan çıkarır. ANOMA'nın sahip olduğu ikinci önemli avantaj ise güncelleme kurallarındaki matris çarpımlarının neden olduğu işlemsel yükü azaltmasıdır. Her yeni gelen örnek için (3.14)'teki vektör çarpımlarını teker teker gerçeklemek yerine (3.16) ve (3.17)'deki çarpımlar tek seferde hesaplanabilir. Örneğin her adımda $\sum_{i=1}^{k+1} S_i(\alpha)\mathbf{v}_i\mathbf{h}_i^T$ vektörel toplamı yinelemek yerine aynı işleve sahip $S_o(\alpha)\mathbf{V}_k\mathbf{H}_k^T + S_f(\alpha)\mathbf{v}_{k+1}\mathbf{h}_{k+1}^T$ toplamı tek seferde yapılabilir. Her gelen örnek için $\mathbf{V}_k\mathbf{H}_k^T$ matris çarpımının $S_o(\alpha)$ ile ağırlıklandırılması (3.6)'daki hedeflene üstel ağırlıklandırma etkisini oluşturacaktır.



Şekil 3.1 : NOMA ve ANOMA yöntemleri için bir güncelleme döngüsünün gerçeklenme zamanının örnek sayısına bağlı olarak değişimi

(3.16) ve (3.17)'deki matris çarpımı hesapları, aynı işlevi $O(nmr)$ miktarında bir işlemsel karmaşıklıkla yerine getiren (3.14)'teki vektör çarpımlarına karmaşıklığı $O(nr)$ olan bir alternatiftir. Dolayısıyla (3.15)'teki güncelleme formülünün kullanılmasıyla ANOMA'nın işlemsel karmaşıklığı $O(nr^2)$ olur. Bir ANOMA döngüsünün işlemsel karmaşıklığının veri kümesindeki örnek sayısını gösteren m 'den bağımsız olması önemli bir noktadır.

Şekil 3.1'de, NOMA ve ANOMA yöntemleri arasında neden oldukları işlemsel yük bakımından bir karşılaştırma yapılmaktadır. İşlenen örnek sayısı arttıkça, NOMA sırasında gerçekleşen bir güncelleme döngüsünün süresi doğrusal olarak artarken ANOMA'da bu süre sabit kalmaktadır. Yani ANOMA güncelleme işlemlerinin örnek sayısından bağımsız olduğu bu sonuçla da görülmüş olur.

3.3. Ağırlıklandırma Fonksiyonunun Seçimi

Bu bölümde ANOMA maliyet fonksiyonunun ağırlıklandırma düzeni ve bu ağırlıklandırma modelinin belleksizlik (*memorylessness*) ve uyarlanabilirlik (*adaptability*) özellikleri üzerindeki etkileri incelenecektir. Bölüm 3.1'de sunulan $S_o(\alpha)$ ve $S_f(\alpha)$ ağırlıklandırma fonksiyonları $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ ve $\mathbf{H}$ matrislerinin elemanlarından bağımsız olmalıdır. Bu fonksiyonlar maliyet fonksiyonuna işlenecek örneklerin eniyileme sürecine katılımlarını kontrol etmek amacıyla eklenmiş olup, negatif olamam zorunlulukları dışında başka ek bir kısıtlamaya sahip değildir. Negatif olmama kısıtlaması ise ANOMA'nın doğasının bir parçası olan toplanabilirlik ilkesinin (*additivity*) korunumu için gereklidir.

Gözetleme türü videolarda arkaplan modelleme problemi göz önüne alındığında- $S_o(\alpha)$ ve $S_f(\alpha)$ ağırlıklandırma fonksiyonları, yeni örneklerin maliyet fonksiyonu üzerinde etkisini arttıracak bunun yanında eski örneklerin katılımını ise zamanla azaltacak şekilde seçilmelidir. α $[0,1]$ aralığında olmak üzere $S_o(\alpha)$ ve $S_f(\alpha)$ fonksiyon ikilisi için uygun bir seçim sırasıyla $(1-\alpha)$ ve α olacaktır. Başta [21] olmak üzere birçok benzer çalışmada aynı mantığa sahip ağırlıklandırma sistemi kullanılmıştır.

Bölüm 3.1'de anlatıldığı gibi, bu ağırlıklandırma işleminin yeni gelen ve işlenen örneklerle birlikte arka arkaya tekrarlanması (3.18)'de görüldüğü gibi

ağırlıklandırma katsayılarında $S_o(\alpha)=1-\alpha$ fonksiyonunun güç serisini oluşturacaktır. (3.18)'de f_{2r+k} ile $(2r+k)$ indisli örnekten kaynaklanan hata terimi ifade edilmektedir.

$$F_{2r+k} = (1-\alpha)^k F_{2r} + \alpha(1-\alpha)^{k-1} f_{2r+1} + \alpha(1-\alpha)^{k-2} f_{2r+2} + \dots + \alpha f_{2r+k} \quad (3.18)$$

$S_o(\alpha)$ 1'den küçük bir değer olarak seçildiği için maliyet fonksiyonunun içerisinde eski örneklerin ağırlıkları zamanla azalacaktır ve yeni örneklerin ağırlıkları daha fazla olacaktır.

(3.18)'de verilen ağırlıklandırılmış maliyet fonksiyonunun bir sonucu dinamik içerik değişimlerine karşı modelin uyarlanabilir olmasıdır. Ağırlıklandırma fonksiyonlarının $(1-\alpha)$ ve α olarak belirlenmesindeki asıl sebep bu olsa da, elde edilen tek kazanım bu değildir. NOMA yönteminin klasik uygulamasında rankın işlemsel yüke etkisi ile çarpanlara ayırma işleminin geri çatma performans başarımı üzerindeki etkisi arasında bir ödünleme (*tradeoff*) vardır. Rankın büyümesi geri çatma başarımını artırırken işlemsel verimliliğin azalmasına neden olur. Oysa ANOMA'nın ağırlıklandırılmış modeli ile rank nu çarpanlara ayırma işlemi için önemli bir değişken olmaktan çıkar. Bunun nedeni, önceki örneklerin katılımının giderek zayıflamasının bir pencereleme etkisi oluşturmasıdır. Bu yüzden o ana kadar kullanılmış örnek sayısı çok yüksek olsa bile, problemdeki gerçek veri boyutu belleksizlik özelliği sayesinde değişmeyecek, küçük rank seçimleri bile yüksek başarımı geri çatma performansı doğuracaktır.

α değerinin belirlenmesi uygulamadan uygulamaya geçişle birlikte, arkaplan modellemesi probleminde genelde küçük değerler almaktadır [42-44].

3.4. Artımsal Temel Bileşen Analizi

ANOMA'nın gözetleme videolarında arkaplan modelleme konusunda başarımını ölçerken karşılaştırmayı mümkün kılmak için benzer bir algoritma olan ve [19]'da önerilen artımsal temel bileşen analizi (ATBA) yöntemi de gerçekleştirilmiştir. ATBA'daki temel mantık, yeni gelen her bir örnek için mevcut özdeğer ve özvektörleri yeni örnek ile birlikte kullanarak işlem yükü bakımından verimli bir şekilde özdeğer ve özvektörleri güncellemektir.

n boyutlu yeni örnek $\mathbf{x}'$, ortalaması sıfıra çekilmiş hali ise $\mathbf{x}$ ile gösterilsin. Bu durumda, μ ile ortalama gösterilmek üzere ANOMA'daki ağırlıklandırma işlemine benzer bir şekilde önce veri kümesinin ortalaması (3.19)'deki gibi güncellenir [19].

$$\mu^{yeni} = \alpha\mu + (1-\alpha)\mathbf{x}' = \mu + (1-\alpha)\mathbf{x} \quad (3.19)$$

$\{\mathbf{u}_i\}$ ve $\{\lambda_i\}$ ile sırasıyla bir önceki adımdaki özvektör ve özdeğerler gösterilmek üzere, $r+1$ adet özvektör (3.20a) ve (3.20b) ile gösterilen biçimde oluşturulur. Buradaki r ATBA algoritmasında kullanılan rank değeridir.

$$\mathbf{y}_i = \sqrt{\alpha\lambda_i} \mathbf{u}_i, \quad i=1,2,\dots,r \quad (3.20a)$$

$$\mathbf{y}_{r+1} = \sqrt{(1-\alpha)}\mathbf{x} \quad (3.20b)$$

Yeni gelen örneğin işlenmesi ile birlikte bu süreç $r+1$ adet vektörün özdeğer problemi olarak düşünülebilir. Bu durumda $\mathbf{A}$ veri matrisi denklem (3.21)'de gösterildiği gibi tanımlanır.

$$\mathbf{A} = [\mathbf{y}_1 \mathbf{y}_2 \mathbf{y}_3 \dots \mathbf{y}_{r+1}] \quad (3.21)$$

Ortak değişinti matrisi en büyük r özdeğere karşılık gelen özvektörün kullanımıyla yaklaşık olarak ifade edilebilir. $\mathbf{U}_{nr}$, $\mathbf{C}$ matrisinin özvektörlerini sütunlarında barındıran matris, Λ_{rr} ise $\mathbf{C}$ matrisinin özdeğerlerini içeren bir köşegen matris olmak üzere, $\mathbf{C}$ ortak değişinti matrisi denklem (3.22) ile hesaplanabilir.

$$\mathbf{C} \approx \mathbf{U}_{nr} \Lambda_{rr} \mathbf{U}_{nr}^T \quad (3.22)$$

Yeni örneğin etkisinin katılmasıyla ortak değişinti matrisi şu şekilde güncellenir:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{yeni} &= \alpha\mathbf{C} + (1-\alpha)\mathbf{x}\mathbf{x}^T \\ &\approx \alpha\mathbf{U}_{nr} \Lambda_{rr} \mathbf{U}_{nr}^T + (1-\alpha)\mathbf{x}\mathbf{x}^T \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha\lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T + (1-\alpha)\mathbf{x}\mathbf{x}^T \end{aligned} \quad (3.23)$$

(3.20a), (3.20b) ve (3.21) denklemlerinin kullanımıyla denklem (3.23), denklem (3.24)'daki eşitlik ile ifade edilebilir.

$$\mathbf{C}^{yeni} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T \quad (3.24)$$

Bu noktada $n \times n$ 'lik $\mathbf{C}^{yeni}$ matrisi yerine boyutu $(r+1) \times (r+1)$ olan ve eşitlik (3.25) ile gösterilen $\mathbf{B}$ matris (3.26) denkleminde gösterilen biçimde özdeğer ve özvektörlerine ayrılır.

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{B}\mathbf{v}_i^{yeni} = \lambda_i^{yeni} \mathbf{v}_i^{yeni}, \quad i = 1, 2, \dots, r+1. \quad (3.26)$$

(3.26) denkleminin iki tarafı da $\mathbf{A}$ matrisi ile çarpılırsa, (3.25)'deki ifadenin de kullanımıyla eşitlik (3.27) elde edilir.

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{v}_i^{yeni} = \lambda_i^{yeni} \mathbf{A}\mathbf{v}_i^{yeni} \quad (3.27)$$

Denklem (3.28) ile tanımlanan vektör ile (3.27) denklemi kullanılarak (3.29)'daki ifade elde edilir.

$$\mathbf{u}_i^{yeni} = \mathbf{A}\mathbf{v}_i^{yeni} \quad (3.28)$$

$$\mathbf{C}^{yeni} \mathbf{u}_i^{yeni} = \lambda_i^{yeni} \mathbf{u}_i^{yeni} \quad (3.29)$$

Denklem (3.29) de görülen eşitlik, yeni örneğin gelişiyile elde edilen ortak değişinti matrisi için, özdeğer probleminin denkleminde başka bir şey değildir. Sonuçta yeni özvektörler eşitlik (3.28) ile hesaplanmış olur.

Bir önceki adımda güncellenen özvektörleri içeren $\mathbf{U}_{nr}$ matrisi kullanımıyla yeni gelen örnek olan $\mathbf{x}$ vektörü, (3.30) eşitliği kullanılarak düşük boyutlu uzaya izdüşürülür:

$$\mathbf{h} = \mathbf{U}_{nr}^T \mathbf{x} \quad (3.30)$$

Eğer işlenen örnekler gözetleme türü bir videodan alınan çerçeveler ise (3.30) ile elde edilen katsayı vektörü ile $\mathbf{U}_{nr}$ vektörünün çarpılması mevcut çerçeve için

arkaplanı oluşturur. İstenildiği takdirde buradan geri çatma hatası (3.31a) denkleminde faydalanarak hesaplanır. Önplan nesnelerinin ayrılması ile (3.31b)'de gösterilen biçimde basit bir çıkarma ile gerçekleştirilebilir.

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{U}_{nr}\mathbf{h}\| \quad (3.31a)$$

$$|\mathbf{x} - \mathbf{U}_{nr}\mathbf{h}| \quad (3.31b)$$

4. NOMA ve TOPAKLANDIRMA

Arkaplan modelleme ile arkaplan önplan ayrıştırma işlemi ikili bir sınıflandırma problemi olarak da düşünülebilir. Nihayetinde her bir piksel önplan ya da arkaplan pikseli olarak etiketlenecektir. Bu yüzden [40] çalışmasında NOMA ile topaklandırma arasında kurulan ilişki, NOMA'dan türetilmiş olan ANOMA tekniğinin bu problemdeki başarısını açıklamakta kullanılabilir. Bölüm 1'de TBA'nın bu uygulama için kullanımının açıklanmasına benzer bir mantıkla ANOMA'nın arkaplanı tüm video çerçevelerinden edinilen ortak bilgi (içerik) ile modellediği düşünülebilir. Bu noktada ANOMA'nın topaklandırma özelliğinin etkin bir işlevi olduğu söylenebilir. Hareketli önplan nesnelere ait pikseller video boyunca aynı yerde kalmadıkları için elde edilecek arkaplan modelinde kendilerine yer bulamayacaklardır. Buna karşın arkaplandaki piksel değerlerinin değişmemesi, bir anlamda video çerçevelerden çıkarılan ortak bilgiyle oluşturulan arkaplan modelinin bu piksel değerlerine sahip olmasını sağlar.

4.1. NOMA'nın Topaklandırma İşlevi

[40] çalışmasında NOMA'nın bulanık k-ortalımalı (*k-means*) topaklandırma yöntemine denk olduğu gösterilmiştir. Buradaki dayanak, her iki yöntemin de aynı maliyet fonksiyonunu eniyilemesidir. K-ortalımalı topaklandırma yönteminin maliyet fonksiyonu denklem (4.1)'deki gibi yazılabilir.

$$F_{K-means} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^K h_{ki} \|\mathbf{v}_i - \mathbf{w}_k\|^2 \quad (4.1)$$

Denklem (4.1)'de $\mathbf{v}_i$ vektörü ile i . örnek gösterilirken, $\mathbf{w}_k$ k . öbek merkezini gösteren vektördür ve h_{ki} da i . örneğin k . öbeğe ait olup olmadığını gösteren belirteçtir. Yani eğer i . örnek k . öbeğe aitse h_{ki} 1 değerini, aksi durumda ise 0 değerini alır. $\mathbf{H}$ matrisi bu belirteç değerlerinin temsil ettikleri öbekte bulunan eleman sayısına bölünmesiyle elde edilen değerlerden oluşan bir matris olursa, her bir örnek sadece bir tane öbeğe

dahil olabileceğinden $\mathbf{H}$ matrisinin her bir sütununda sadece bir tane sıfırdan farklı değer yer alır. Bu durumda denklem (4.2)'deki eşitlik geçerlidir.

$$\mathbf{H}\mathbf{H}^T = \mathbf{I} \quad (4.2)$$

K-ortalımalı topaklandırma algoritmasında her bir öbek merkezi, kendisine ait olduğu belirlenen örneklerin ortalamasının alınmasıyla bulunur. Bu durumda öbek merkezlerini içeren $\mathbf{W}$ matrisi denklem (4.3)'teki gibi hesaplanabilir.

$$\mathbf{W} = \mathbf{V}\mathbf{H}^T \quad (4.3)$$

Bu durumda (4.2) ve (4.3) eşitliklerinin kullanımıyla denklem (4.1) ile verilen maliyet fonksiyonu şu şekilde ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} F_{K-means} &= \|\mathbf{V} - \mathbf{V}\mathbf{H}^T\mathbf{H}\|^2, \mathbf{H}\mathbf{H}^T = \mathbf{I}. \\ &= Tr[\mathbf{V}^T\mathbf{V} - 2\mathbf{V}^T\mathbf{V}\mathbf{H}^T\mathbf{H} + \mathbf{H}^T\mathbf{H}\mathbf{V}^T\mathbf{V}\mathbf{H}^T\mathbf{H}] \\ &= Tr[\mathbf{V}^T\mathbf{V} - 2\mathbf{H}^T\mathbf{V}^T\mathbf{V}\mathbf{H} + \mathbf{H}\mathbf{H}^T\mathbf{H}\mathbf{V}^T\mathbf{V}\mathbf{H}^T] \\ &= Tr[\mathbf{V}^T\mathbf{V} - \mathbf{H}^T\mathbf{V}^T\mathbf{V}\mathbf{H}] \end{aligned} \quad (4.4)$$

[40] çalışmasında, dikgen (*orthogonal*) NOMA'nın maliyet fonksiyonunun denklem (4.4) ile aynı olmasından yola çıkarak NOMA ile k-ortalımalı topaklandırma yöntemlerinin birbirlerine denk oldukları öne sürülmektedir. Dikgen NOMA'nın maliyet fonksiyonu şu şekilde yazılabilir:

$$F = \min_{\mathbf{W} \geq 0, \mathbf{H} \geq 0} \|\mathbf{V} - \mathbf{W}\mathbf{H}\|^2, \mathbf{H}\mathbf{H}^T = \mathbf{I}. \quad (4.5)$$

(4.5) denklemini şu şekilde de yazılabilir:

$$F = \|\mathbf{V} - \mathbf{W}\mathbf{H}\|^2 = Tr[\mathbf{V}^T\mathbf{V} - 2\mathbf{W}^T\mathbf{V}\mathbf{H}^T + \mathbf{W}^T\mathbf{W}] \quad (4.6)$$

Denklem (4.6) ile verilen fonksiyonun $\mathbf{W}$ 'ya göre türevini alınıp 0'a eşitlenirse denklem (4.7) elde edilir.

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{W}} = -2\mathbf{V}\mathbf{H}^T + 2\mathbf{W} = 0 \quad (4.7)$$

Buradan çekilen $\mathbf{W} = \mathbf{V}\mathbf{H}^T$ ifadesi (4.6) denkleminde yerleştirilirse denklem (4.8)'e ulaşılır.

$$F = Tr[\mathbf{V}^T \mathbf{V} - \mathbf{H}^T \mathbf{V}^T \mathbf{V} \mathbf{H}] \quad (4.8)$$

(4.8) ile (4.4) denklemlerinin aynı olmasından yola çıkarak NOMA'nın k-ortalımalı topaklandırma yöntemine denk olduğu sonucuna varılır. Bunun yanında diklik koşulunun esnetildiği durum bulanık (*fuzzy*) k-ortalımalı topaklandırmasına denktir.



Şekil 4.1 : Kullanılan 3 ayrı video sahnesinden üçer örnek video çerçevesi

NOMA'nın topaklandırma işlevini görebilmek için 3 değişik video sahnesinden (sınıftan) alınmış 10'ar çerçeveden oluşan bir veri matrisine $r=3$ olmak üzere NOMA'yı uygulayalım. Alınan video çerçevelerinden bazı örnekler Şekil 4.1'de gösterilmektedir. NOMA sonucunda elde edilen $\mathbf{W}$ matrisinin her bir sütunu ise Şekil 4.2'de verilmiştir ve görülmüştür ki gerçekten de bu sütunlar (Şekil 4.2 için bu sütunlar önce 2 boyuta geri döndürülmüş sonra da söz konusu imgeler oluşturulmuştur) öbek merkezleri olarak nitelendirilebilir.

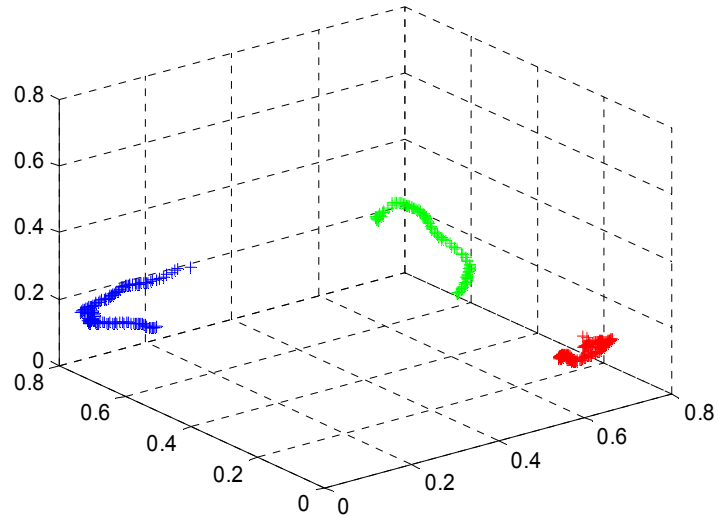


Şekil 4.2 : Elde edilen topak merkezleri

Hangi örneğin hangi sınıfa ait olduğu ise kodlama matrisi **H**'nin incelenmesiyle anlaşılır. Kodlama matrisinin Şekil 4.1'de verilen çerçevelere karşılık gelen sütunları sırasıyla şöyledir:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0.109 & 0.107 & 0.107 & 0.648 & 0.649 & 0.648 & 0.080 & 0.075 & 0.079 \\ 0.090 & 0.088 & 0.105 & 0.140 & 0.139 & 0.138 & 0.585 & 0.595 & 0.589 \\ 0.646 & 0.656 & 0.631 & 0.117 & 0.116 & 0.117 & 0.035 & 0.034 & 0.039 \end{bmatrix}$$

H matrisinin ilk 3 sütunundan, bu sütunlara karşılık gelen örneklerin (Şekil 4.1 ilk satır) 3 numaralı sınıfa ait oldukları sonucuna varılabilir. Gerçektende Şekil 4.2'nin 3. sütunu ile Şekil 4.1'in ilk satırındaki çerçeveler birbirlerine oldukça benzemektedir. Aynı mantıkla sonraki 3 örneğin ilk topağa, son 3 örneğin ise 2. sınıfa ait olduğu görülür.



Şekil 4.3: NOMA ($r=3$) sonucu elde edilen **H** matrisinin her bir sütunu 3 boyutlu uzayda bir noktaya denk gelir. Kırmızılar ilk sınıfa, yeşiller ikinci sınıfa, maviler üçüncü sınıfa denk gelen elemanlardır.

$\mathbf{H}$ matrisinin topaklandırma konusundaki işlevini daha iyi anlayabilmek için Şekil 4.3.'e de bakılabilir. 3 değişik video sahnesinden alınmış yaklaşık 600 video çerçevesine $r=3$ seçimi altında NOMA uygulandığında elde edilen $\mathbf{H}$ matrisinin 3 boyutlu uzayda çizdirilmesi sonucunda oluşturulan Şekil 4.3, $\mathbf{H}$ matrisi aracılığı ile topaklandırmanın nasıl yapıldığını göstermektedir. Gerçekten de NOMA aracılığı ile boyutu küçültülen video verisine ait örnekler net bir şekilde 3 sınıfa ayrılmaktadır.

4.2. ANOMA'nın Topaklandırma İşlevi

ANOMA'nın eniyileme süreci de NOMA'ninkinden farklı değildir; sonuçta ANOMA NOMA'da birkaç yaklaşıklık yapılmasıyla türetilmiştir. Ağırlıklandırılmamış ANOMA maliyet fonksiyonu denklem (4.9)'da verilmiştir.

$$F_k = F_{k-1} + f_k = \|\mathbf{V}_{k-1} - \mathbf{W}_k \mathbf{H}_{k-1}\|^2 + \|\mathbf{v}_k - \mathbf{W}_k \mathbf{h}_k\|^2 \quad (4.9)$$

Denklem (4.9), iz operatörü kullanımıyla aşağıdaki gibi de yazılabilir.

$$\begin{aligned} F_k = & Tr(\mathbf{V}_{k-1} \mathbf{V}_{k-1}^T - 2\mathbf{W}_k \mathbf{H}_{k-1} \mathbf{V}_{k-1}^T + \mathbf{W}_k \mathbf{H}_{k-1} \mathbf{H}_{k-1}^T \mathbf{W}_k^T) \\ & + Tr(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T - 2\mathbf{W}_k \mathbf{h}_k \mathbf{v}_k^T + \mathbf{W}_k \mathbf{h}_k \mathbf{h}_k^T \mathbf{W}_k^T) \end{aligned} \quad (4.10)$$

$\mathbf{H}$ matrisine diklik koşulu getirilirse yine, denklem (4.11) elde edilir.

$$F_k = Tr(\mathbf{V}_{k-1} \mathbf{V}_{k-1}^T - 2\mathbf{W}_k \mathbf{H}_{k-1} \mathbf{V}_{k-1}^T) + Tr(\mathbf{W}_k^T \mathbf{W}_k + \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T - 2\mathbf{W}_k \mathbf{h}_k \mathbf{v}_k^T) \quad (4.11)$$

Denklem (4.11)'in $\mathbf{W}_k$ 'ya göre türevi alınıp 0'a eşitlenirse denklem (4.12) denklemi yazılır.

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{W}_k} = -2\mathbf{V}_{k-1} \mathbf{H}_{k-1}^T + 2\mathbf{W}_k - 2\mathbf{v}_k \mathbf{h}_k^T = 0 \quad (4.12)$$

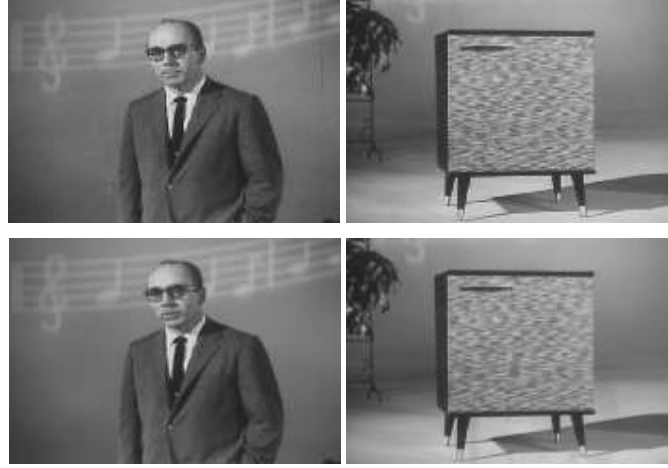
Buna göre $\mathbf{W}_k$ aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\mathbf{W}_k = \mathbf{V}_{k-1} \mathbf{H}_{k-1}^T + \mathbf{v}_k \mathbf{h}_k^T = \mathbf{V}_k \mathbf{H}_k^T \quad (4.13)$$

(4.13) eşitliğinin denklem (4.11)'in içinde kullanılmasıyla (4.14) denkleminde ulaşılır.

$$F = Tr[\mathbf{V}_k^T \mathbf{V}_k - \mathbf{H}_k^T \mathbf{V}_k^T \mathbf{V}_k \mathbf{H}_k] \quad (4.14)$$

Denklem (4.14)'ün NOMA'nın maliyet fonksiyonu olan denklem (4.8)'e ve k-ortalama topaklandırma tekniğindeki olan denklem (4.4)'e eş olmasından dolayı ANOMA'nın da aynı işleve sahip olduğu sonucuna varılabilir. Tabii diklik koşulu normalde uygulanmadığından bulanık bir topaklandırma söz konusudur.



Şekil 4.4: İlk satırda işlenen video dizisine ait iki sahneden birer örnek çerçeve verilmiştir. İkinci satırda ise ANOMA sonunda bu video çerçevelerinin geri çatılmış imgeleri verilmiştir.

ANOMA'nın topaklandırma işlevine bir örnek vermek amacıyla Şekil 4.4'te iki tane örnek çerçevesi verilen ve her biri 80'ar tane çerçeveye sahip 2 adet sahne içeren video dizisi ANOMA ile işlensin. Her adımda elde edilen taban imgesi çiftlerinden 4 tanesi Şekil 4.5'te gösterilmektedir. İlk 80 çerçeve sadece ilk sahneye ait olduğundan elde edilen taban imgeleri Şekil 4.5'in ilk iki sütunundan görüldüğü üzere sadece ilk sahneye ait bilgi içermektedir. Bunun yanında 81. çerçeve ile birlikte ikinci sahnenin sürece dahil olmasının etkisi taban imgelerine yansımıştır (sütun 3, Şekil 4.5). Sürecin sonunda ise taban imgeleri yaklaşık olarak iki sınıfın öbek merkezlerine yakınsamıştır (sütun 4, Şekil 4.5).

4.3. Topaklandırma İşlevinin Arkaplan Modellemedeki Kullanımı

Şekil 4.6'nın incelenmesiyle topaklandırma konusunu gözetleme türü videolarda arkaplan modelleme problemine bağlanabilir. Şekil 4.6'nın ilk iki satırında 50'şer çerçeve atlanarak alınmış 4 örnek verilmiştir. İlk çerçevede durma pozisyonunda olan 2 araba da diğer çerçevelerde geriye doğru hareket etmektedir. Son çerçevenin ANOMA'ya dahil edilmesiyle elde edilen taban (*basis*) imgeleri (karışım matrisi **W**'nun sütunları) Şekil 4.6'nın son satırında verilmiştir. İkinci çerçevede kırmızı kare

içine alınmış araba birinci, mavi kare içine alınmış olan ise ikinci araba olsun. İlk taban imgesinde (satır 3, sütun 1) kırmızı kare içine alınan bölgede birinci arabanın sabit hareketsiz duran hali, yani arkaplana dahil olduğu zamanki konumu görülmektedir. İkinci taban imgesinin (satır 3, sütun 2) aynı bölgesinde (yine kırmızı içine alınan alan) ise bu sefer beyaz bir gölge mevcuttur. Bu ise birinci arabanın hareket edip o bölgeden (denk olarak arkaplan modelinden) çıktığını temsil etmektedir. Sonuçta oluşturulan arkaplan modeli, bu 2 taban imgesinin değişik birleşimleri ile oluşturulur. Birinci arabanın sabit olduğu video çerçeveleri için ilk taban imgesinin ağırlığı fazlayken, aynı arabanın hareketli olduğu bölgelerde ikinci taban imgesinin katılımı daha büyük olacaktır. Aynı mantık mavi kare içine alınmış ikinci araba için de oluşturulabilir. Bu taşıtın son geldiği konum ikinci taban imgesinde mavi kare içine alınmıştır. İlk taban imgesinin aynı bölgesinde ise beyaz bir gölge vardır. Bu ise ikinci arabanın arkaplana dahilken bu bölgede bulunmadığına dair bir işarettir.



Fig. 4.5: Artımsal olarak elde edilmiş taban imgeleri. İlk satır birinci taban imgelerini ($\mathbf{W}_k$ 'nın ilk sütunu), ikinci satır ise ikinci taban imgelerini ($\mathbf{W}_k$ 'nın ikinci sütunu) göstermektedir. İlk sütun 12. örneğin, ikinci sütun 63. örneğin, üçüncü sütun 84. örneğin, son sütun ise 160. örneğin işlenmesinin sonunda elde edilmiştir.



Şekil 4. 6 : İlk 2 satırda video dizisinden alınmış orijinal video çerçeveleri, son satırda ise bu video dizisinin ANOMA ($r=2$) ile işlenmesi sonucu elde edilen taban imgeleri verilmiştir

5. DENEYSEL SONUÇLAR

Artımsal negatif olmayan matris ayrıştırmanın (ANOMA) arkaplan modelleme problemindeki performansını ölçmek için PETS denektaşı veritabanından [47] alınmış gözetleme türü videolar üzerinde testler yapılmıştır. Benzer yöntemlerle karşılaştırma yapmayı mümkün kılmak için aynı video dizileri üzerinde NOMA ve artımsal temel bileşen analizi (ATBA) [19,20] yöntemleri de kullanılmıştır.

Deneylerde kullanılan PETS videoları sabit bir kamera ile açık havada kaydedilmiş sahnelerden oluşmaktadır. Çeşitli yüksek frekanslı bileşenlere sahip duruk (*static*) olmayan arkaplana sahip ve zaman zaman şiddetli ışıklılık değişimlerinin yaşandığı bu video dizileri video arkaplan modelleme probleminde kullanılacak bir yöntemin gürbüzlüğünü (*robustness*) değerlendirmek için iyi bir deney seti oluşturmaktadır. Arkaplanın özelliklerinin yanında bu video örneklerindeki önplan nesnelerinin değişik boyutlarda olup farklı hareketler içinde bulunmaları da deneylerin kalitesini arttırıcı niteliklerdir. Bu da kullanacağımız yöntemin videonun dinamik içeriğini modellemede nasıl bir başarımla sağladığını görmemize yardımcı olacaktır.

ANOMA gerçekleşmesinde denklem (3.5) ile verilen maliyet fonksiyonu enküçültülmeye çalışıldığı için, faktörlere ayırma başarımını ölçmenin bir yolu her bir örnek için elde edilecek geri çatma hatasını incelemektir. Bu yüzden deneysel sonuçlar değerlendirilirken oluşturulacak modellerin veya gösterimlerin performansları, her video çerçevesi için hesaplanacak geri çatma hatası cinsinden karşılaştırılacaktır. Yani, aşağıda denklem (5.1) ile verilen geriçatma hata fonksiyonunun düşük çıkması, söz konusu örnek (k 'inci çerçeve) için faktörlere ayırma işleminin başarılı olduğunu gösterecektir. Eşitliğin sağ tarafındaki toplam n sayısına bölünerek her bir video çerçevesi için piksel başına düşen geri çatma hatası bulunmaktadır.

$$f_k = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left((\mathbf{v}_k)_i - (\mathbf{W}_k \mathbf{h}_k)_i \right)^2 \quad (5.1)$$

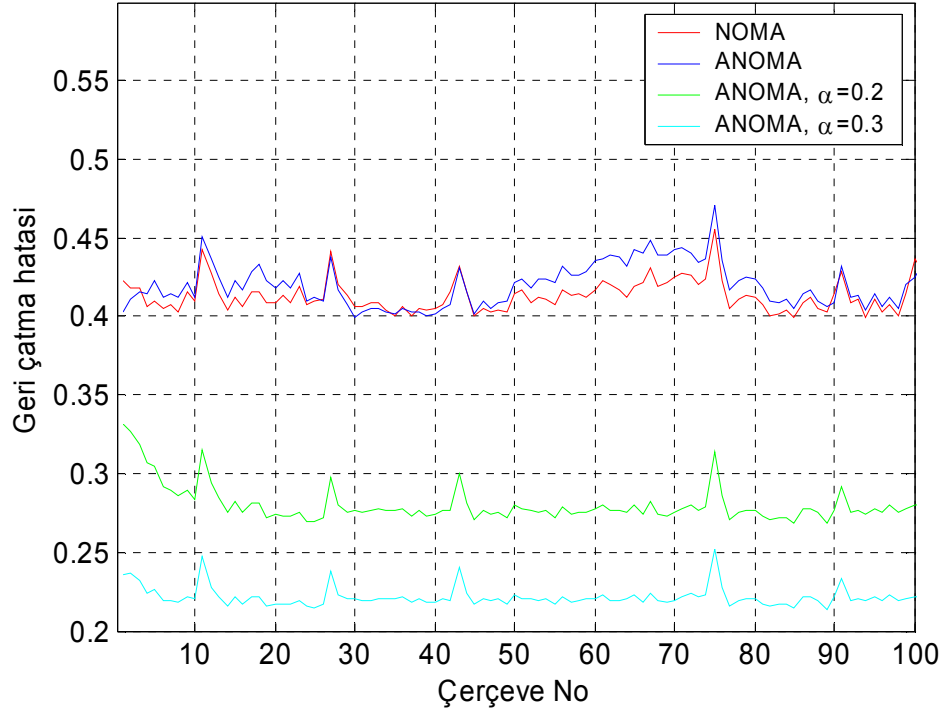
5.1. ANOMA'nın Arkaplan Gösterimleri Oluşturma Başarımı

Bu bölümde, ANOMA'nın durağan içerikli veriyi modelleme yeteneği sadece arkaplan içeren gözetleme türü video parçalarından alınmış çerçeveler üzerinde yapılan testlerle incelenmektedir. Bu yüzden PETS2001 veritabanındaki 'dataset1_cam1' isimli gözetleme türü video dizisinin ilk 100 çerçevesi kullanılarak $\mathbf{V}$ veri matrisi oluşturulmuştur. Her bir video çerçevesinden elde edilen (144x192) boyutundaki dc imgesi [48] bir gözlem olarak kabul edilmiş ve imge sütunları alt alta dizilerek tek boyutlu hale getirilmiş ve $\mathbf{V}$ matrisinin bir sütununda tutulmuştur. Bu yüzden veri matrisi $\mathbf{V}$ ((144x192)x100) boyutlu bir matris olmaktadır. Buradaki tüm video çerçeveleri arkaplan çerçeveleri olduğu için videonun bu bölümündeki içeriğin durağan olduğu kabul edilebilir.

Karşılaştırma amacı ile uygulayacağımız klasik NOMA uygulaması aynı 100 video çerçevesi üzerine toptan uygulanacaktır. Bu durumda k 'inci çerçeveye ait geri çatma hatası denklem (5.2) ile hesaplanır.

$$f_k = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left((\mathbf{V})_{ik} - (\mathbf{WH})_{ik} \right)^2 \quad (5.2)$$

Şekil 5.1 de her bir video çerçevesi için rankın $r = 2$ olarak alındığı durumda 4 değişik test ile elde edilmiş geri çatma hatalarının değişimi gösterilmektedir. İşlenen 100 arkaplan çerçevesinin tümü birbirlerine benzer olduğu için ağırlıklandırılmamış ANOMA ve klasik NOMA ile elde edilen geri çatma hataları oldukça küçüktür (Şekil 5.1'deki mavi ve kırmızı çizgiler). Gri düzey değerlerinin kullanılmasından dolayı bir piksel için geri çatma hatasının en büyük değerinin $255^2/2$ olduğu düşünüldüğünde, 0.5 civarındaki geri çatma hatalarının gerçekten de çok küçük kaldığı sonucu çıkarılabilir. Bu sonuçlar hem ANOMA'nın hem de NOMA'nın durağan sahneyi modelleyerek başarılı bir arkaplan ilklendirmesi (*initialization*) yapabildiğini göstermektedir. Bu testte faktörizasyon güncellemede belirlenen durma koşulları NOMA için döngünün 250 defa tekrarlanması sonucunda sağlanırken ANOMA için çerçeve başına 13 döngü ile sağlanmıştır.



Şekil 5.1 : Her bir çerçeve için elde edilen geri çatma hatasının değişimi.

Şekil 5.1 de aynı zamanda çerçeve ağırlıklandırma katsayılarının geri çatma başarımı üzerindeki etkisi de gözlenebilmektedir. Bölüm 3.3'te arkaplan modelleme problemi için denklem (3.5)'te sunulan $S_o(\alpha)$ ve $S_f(\alpha)$ fonksiyonlarının uygun bir seçiminin $(1-\alpha)$ ve α ikilisi olduğu belirtilmişti. Ağırlıklandırma için böyle bir tercih yapıldığında, her ne kadar iki durum için de yeterli ve makul sonuçlar elde ediliyor olsa da, $\alpha=0.3$ koşulunda elde edilen geri çatma hatası beklendiği üzere $\alpha=0.2$ durumununkine göre daha küçüktür. Bunun nedeni ise α değerinin büyümesi ile son gözlenen çerçevenin, matris faktörlerine ayırma işlemine yapacağı etkinin artmasıdır. Burada vurgulanması gereken nokta, NOMA'nın aksine ANOMA'nın her bir yeni gözlemin katılımını kontrol ederek daha başarılı bir eniyileme gerçekleştirebildiğidir.

5.2. ANOMA ile Arkaplan Modelinin Dinamik İçerik Değişimlerine Göre Güncellenmesi

Gözetleme türü video uygulamalarında ilk adım öncelikle bir arkaplan modeli oluşturmaktır. Eğer sahnede hareketli bir önplan nesnesi varsa, örneğin bir nesne sahneye girerse ya da başta arkaplanda hareketsiz duran bir nesne hareket etmeye

başlarsa video çerçevelerinde arkaplan modelinden sapmalar gözlenir. Öte yandan hareketli bir nesne durarak arkaplanın bir parçası haline gelebilir. Böyle bir durumda ise duran cisim arkaplana dahil edilebilmelidir. Arkaplan modelleme probleminde kullanılacak güçlü bir çevrimiçi yöntem, oluşturduğu modeli dinamik içerik değişimleri olarak adlandırılan bu tür değişikliklere karşı güncelleyebilmelidir. Önplan nesneleri ile ilgili bu tür değişimler mevcut modele göre yerel (*local*) sapmalar olarak nitelendirilebilir. Bunun nedeni bu tür bir değişimin bir video çerçevesinin tüm imgeciklerinde değil, sadece belli bir bölümünde yaşanmasıdır. Bu yüzden dinamik içerik gösterim (*dynamic content representation*) başarımı, önplan nesneleri içeren gözlemlerin arkaplan modeline iz düşürülmesi ve daha sonra elde edilen sapmaların ölçülmesi ile değerlendirilebilir. Burada bir anlamda $\mathbf{W}_k$ matrisinin dikgen uzayının kullanılması ile yapılan izdüşüm sonucu ile önplan ayrıştırılması yapılmaktadır. Yani belli bir yaklaşıklıkla k . video çerçevesi ($\mathbf{v}_k$) için önplan nesnelerinin şöyle elde edildiği söylenebilir:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{W}_k \mathbf{W}_k^T) \mathbf{v}_k \quad (5.3)$$

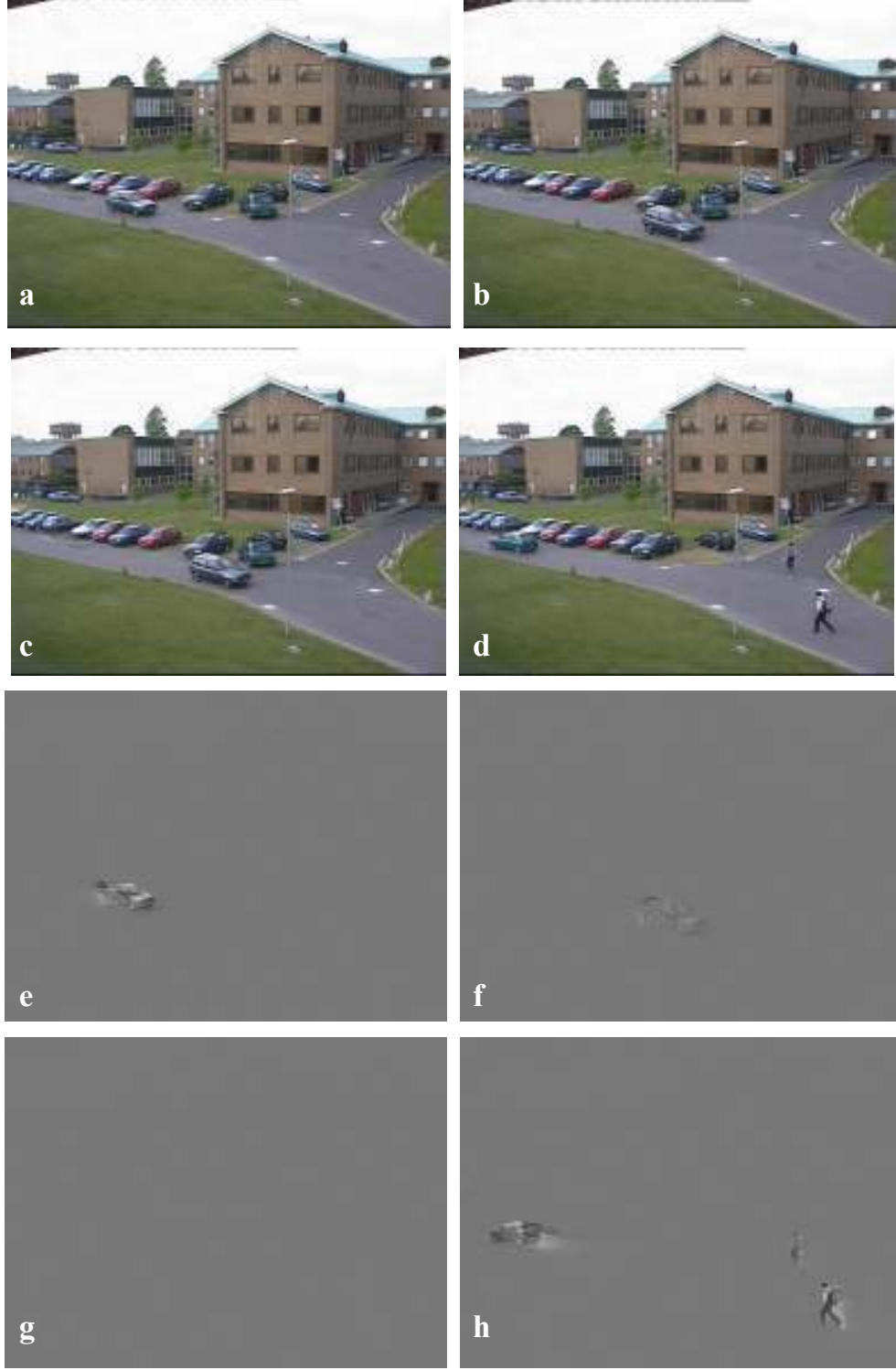
Şekil 5.2(a) ve 5.2(b), PETS2000 veri tabanından ANOMA'nın çevrimiçi arkaplan modelleme performansını incelemek için seçilmiş bir video test dizisinden alınmış iki video çerçevesini göstermektedir. İlk çerçevede (Şekil 5.2(a)) iki tane hareketli nesne mevcuttur: bir araba park ederken bir adam yürümektedir. İkinci video çerçevesinde (Şekil 5.2(b)) ise ilk çerçevede park etmeye çalışan araba hareketsizdir. Bunun yanında birisi o arabadan çıkan adam diğeri de sahneye yeni giren bir araba olmak üzere iki yeni önplan nesnesi yer almaktadır. Şekil 5.2(c) ve 5.2(d), Şekil 5.2(a) ve 5.2(b) deki video çerçeveler için, gözlenen video çerçevesi ile geri çatılmış arkaplan arasındaki farkın alınmasıyla oluşturulmuş fark imgelerini (*difference image, residue image*) göstermektedir. Fark imgelerinden de görülebileceği gibi, ANOMA dinamik arkaplanı başarı ile modelleyebildiği için önplan nesneleri fark imgelerinde kolaylıkla fark edilebilmektedir. Aynı zamanda Şekil 5.2(a)'daki hareketli arabanın durduğu zaman arkaplan modeline eklenmiş olması, dolayısıyla Şekil 5.2(d) de görünmemesi de ANOMA'nın dinamik arkaplan modelleme başarısını göstermektedir. Yapılan test için ağırlıklandırma fonksiyonları $S_o(\alpha)=0.8$ ve $S_f(\alpha)=0.2$ olarak seçilmiş olup, duran arabanın arkaplana eklenebilmesi 7 çerçevelik bir zaman diliminde (24 çerçeve/sn örnekleme hızında) gerçekleşmiştir.



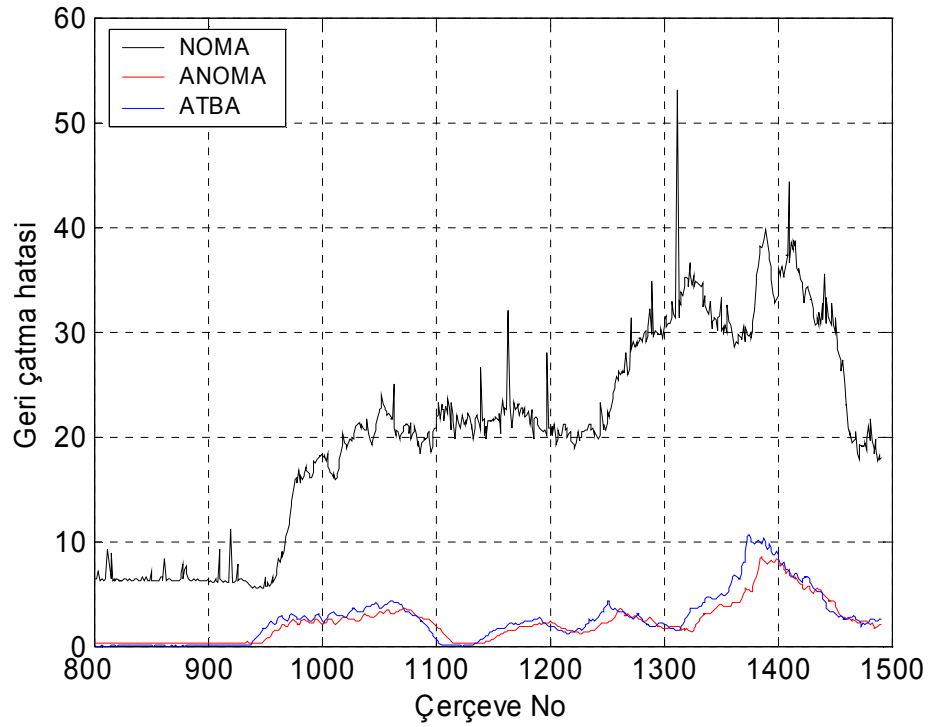
Şekil 5.2 : (a) 614. çerçeve. (b) 837. çerçeve. (c) 614 nolu çerçeve için oluşturulan fark resmi, ve (d) 837 numaralı çerçeve için oluşturulan fark resmi

Değişik yöntemlerin başarımını incelemek amacıyla, bir önceki teste ek olarak PETS2001 veritabanından alınan bir başka video dizisi üzerinde de aynı deney gerçekleştirilmiştir. Şekil 5.3 (a)-(d)'de test videosundan bazı örnek çerçeveler gösterilirken, Şekil 5.4'te bu videodan alınan 700 çerçevelik bölüm için geri çatma hatasının değişimi verilmektedir. Bu testle üç farklı ayırıştırma yöntemi karşılaştırılmıştır. Bunlar: artımsal negatif olmayan matris ayırıştırma (ANOMA), negatif olmayan matris ayırıştırma (NOMA) ve [19,20] çalışmalarında sunulmuş olan artımsal temel bileşen analizi (ATBA) yöntemleridir.

Test videosunda 800 ve 980 numaralı video çerçeveler arasındaki bölümde herhangi bir önplan nesnesi bulunmadığından bu bölgelerdeki geri çatma hatasının küçük olduğu Şekil 5.4'te görülmektedir. Bölüm 5.1'deki testten farklı olarak, bu durağan kısımlarda NOMA ile elde edilen geri çatma hatasının diğer iki yöneme göre büyük kalmasıdır. Bu durum NOMA'nın tüm çerçeveleri toplu işlemesinden kaynaklanmaktadır. Daha ayrıntılı açıklarsak, Bölüm 2.2'de anlatıldığı şekilde, video dizisinden alınacak az sayıda (bu test için örneğin 50) örnek çerçevelerden oluşturulan veri matrisi üzerinde NOMA uygulanır ve bu şekilde arkaplan modeli oluşturulur. Ancak, alınan bu örnekler tüm videoyu betimleyeceği için videonun ilerleyen kısımlarında yer alacak olası arkaplan değişimleri ilk kısımlardaki geri çatma hatasının artmasına neden olmaktadır.

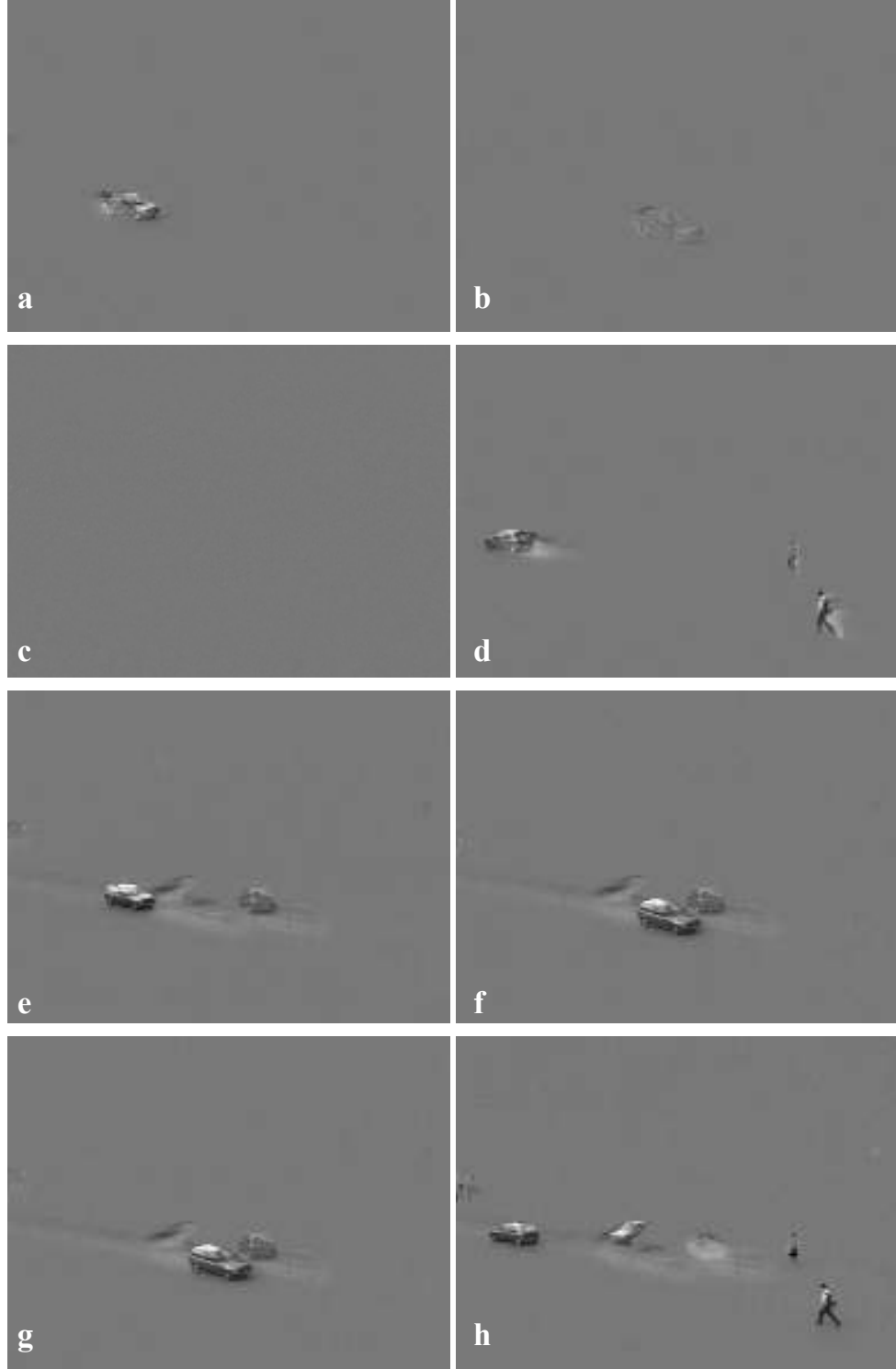


Şekil 5.3 : İşlenen video dizisinden seçilmiş 4 adet örnek çerçeve: sırasıyla (a) 1050, (b) 1120, (c) 1140 ve (d) 1433 numaralı çerçeveler. (e) 1050, (f) 1120, (g) 1140, (h) 1433 numaralı çerçeveler için ANOMA işlemi sonunda ayrıştırılmış önplan nesnelerinin görüldüğü fark imgeleri.



Şekil 5. 4 : Üç değişik yöntem ile elde edilen geri çatma hatalarının çerçeve numarasına bağlı değişimi: $S_o=0.8$ and $S_f=0.2$ katsayılı ANOMA, NOMA, ve ATBA.

Aynı test videosunda 980 numaralı çerçeveden itibaren sahneye bir arabanın girdiği ve 1120 numaralı çerçeveye kadar hareket ettiği Şekil 5.4'teki geri çatma hatasının değişiminden anlaşılabılır. Bu arabanın bir önplan nesnesi olarak başarı ile saptandığı Şekil 5.3 (e)'de de görülmektedir. Bir önplan nesnesinin varlığı arkaplan modelinden sapmaları arttıracak için bu aralıktaki çerçevelerde hata artmaktadır. Burada bir başka önemli nokta ise 1120 numaralı çerçeveden sonra hareketli arabanın durmasıyla birlikte arkaplana dahil edilmesi ve dolayısıyla geri çatma hatasının düşmesidir. Şekil 5.3 (f)'ye dikkat edilirse araba 1120. çerçeve için elde edilen fark imgesinde 5.3 (e)'deki 1050. çerçevenin fark imgesindeki halinden daha az belirgindir. Bu durum arabanın arkaplan modeline eklenmeye başladığına dair bir göstergedir. Nitekim yine Şekil 5.3(g)'de görüleceği üzere, durduktan bir süre sonra araba tamamıyla arkaplana dahil olur. Bu süreç Şekil 5.4'te hatanın sıfıra inmesiyle de anlaşılabılır. Bu da duran nesnenin arkaplana dahil edilmesiyle birlikte arkaplandan sapmaların azalıp zamanla yok olduğunun işaretidir.



Şekil 5. 5 : Sırasıyla (a) 1050, (b) 1120, (c) 1140, (d) 1433 numaralı çerçeveler için ATBA işlemi sonunda ayrıştırılmış önplan nesnelerinin görüldüğü fark imgeleri verilirken, aynı video dizisi için klasik NOMA uygulanması sonucu (e) 1050, (f) 1120, (g) 1140, (h) 1433 numaralı çerçeveler için fark imgeleri NOMA için de verilmiştir.

Daha sonra ortaya çıkan önplan nesneleri (bkz Şekil 5.3(h)) hatanın tekrar artmasına neden olur. Bu süreç boyunca videonun içeriğine göre ANOMA sonucu elde edilen geri çatma hatası sürekli değişir. Fakat ANOMA'nın aksine arkaplanı değişen içeriğe göre güncelleyebilme bakımından NOMA'nın çok başarılı sonuçlar ürettiğini söyleyemeyiz (Şekil 5.4'teki siyah eğri ve Şekil 5.5 (e)-(h)).

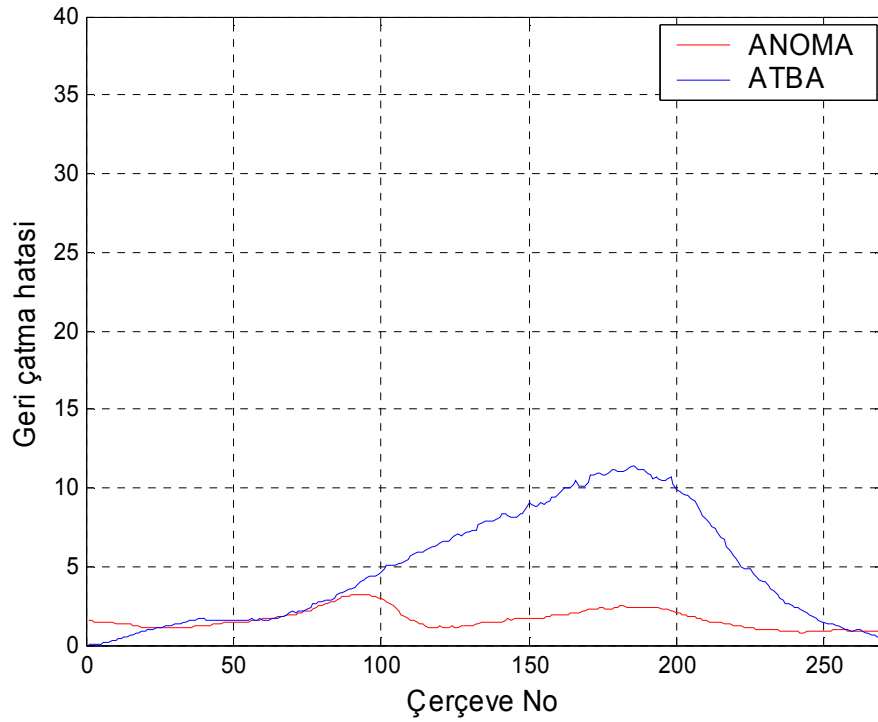
Şekil 5.4'ün elde edildiği test sonucunda ANOMA'nın, NOMA'nın aksine, matris faktörleri değişen içeriğe göre güncelleyebildiği ve oluşturduğu modele belleksizlik özelliği katabildiği söylenebilir. Ayrıca ANOMA'nın ve ATBA'nın bu konudaki performanslarının oldukça yakın olduğu gözden kaçırılmaması gereken bir sonuçtur. Gerçekten de iki yöntem sonucunda dört farklı çerçeve için elde edilen fark imgeleri birbirlerine çok benzemektedir (Şekil 5.3 (e)-(h) ve Şekil 5.4 (a)-(d)). Her iki yöntem için de $S_o(\alpha)$ ve $S_f(\alpha)$ ağırlıklandırma katsayıları sırasıyla 0.8 ve 0.2 olarak belirlenmiştir. Bölüm 3.3'te anlatıldığı gibi, $S_o(\alpha)=0.8$ seçimi eski örneklerin etkisinin üstel olarak azalmasını sağlayarak modele belleksizlik özelliği kazandırır.

5.3. Işıklılık Değişimlerine Karşı Gürbüzlük

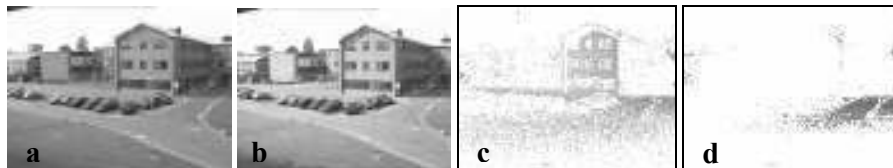
Arkaplan modelleme başarımını daha iyi analiz edebilmek için ANOMA'nın başarımı yoğun ışıklılık değişimlerinin yaşandığı video dizileri üzerinde de teste dildi. Işıklılığın yoğun bir biçimde değiştiği video bölümlerinde piksellerin çoğunun değerleri önemli miktarda artar, bu da ortalama şiddeti (*intensity*) değiştirir. Bu tür etkilere sahip ışıklılık değişimleri, orijinal veri üzerinde neden oldukları önemli sapmalar nedeniyle zor problemlerdir.

Bu bölümdeki test için PETS2001 veri setinden ışıklılık değişiminin yoğun olarak yaşandığı bir bölge seçilmiştir. $\alpha=0.05$ olmak üzere $(1-\alpha)$ ve α olarak seçilmiş ağırlıklandırma katsayıları için ANOMA ve ATBA arasında bir karşılaştırma yapılmıştır. İçeriğinde yoğun ışıklılık değişiminden başka bir şey olmayan durağan bir sahne üzerinde bu iki yöntemin uygulanması sonucu elde edilen geri çatma hatalarının değişimi Şekil 5.6'te çizdirilmiştir. Şekil 5.6'ten bu tür genel (global) sapmalara karşı ANOMA'nın ATBA'ya göre daha gürbüz olduğu söylenebilir. Bu yargı, aynı diziden alınmış Şekil 5.7(a) ve 5.7(b)'da verilen orijinal çerçeveler için elde edilen ve Şekil 5.7(c) ve 5.7(d) ile gösterilen fark imgeleri tarafından da desteklenmektedir. Sahnede herhangi bir önplan nesnesi olmadığı için fark

imgelerinin boş olması gerekmektedir. Fakat video süresince gözlenen ışıklılık değişimleri piksel değerlerini önemli miktarda değiştirdiği için sahnenin parlak kısımlarında bulunan pikseller fark imgelerinde fark edilmektedirler. Her ne kadar iki yöntem için de elde edilen imgeler ışıklılık kaynaklı bozulmalara maruz kalmış olsalar da, bu bozulmaların miktarı ATBA'ya göre ANOMA'da daha azdır (bkz Şekil 5.7(d)). Bunun nedeni, ATBA'da yapılan örneklerin Gauss dağılımlı olma kabulünün ANOMA modelinde bulunmamasıdır. Bu yüzden ANOMA gözlemlerin ortalama miktarını önemli ölçüde değiştiren ışıklılık değişimlerine karşı ATBA'ya göre nispeten daha gürbüzdür.



Şekil 5.6 : ATBA ve ANOMA ile elde edilen geri çatma hatalarının çerçeve numarasında göre değişimi.



Şekil 5.7 : (a) Orijinal çerçeve 2635. (b) Orijinal çerçeve 2874. 2874 numaralı çerçeve için elde edilen sapmalar: (c) ATBA ile elde edilen (d) ANOMA ile elde edilen.

Bu bölümde gösterilen sonuçlara ek olarak daha uzun video dizilerinde yapılan deneylerde de benzer sonuçlar elde edilmiştir. Farklı koşullarda değişik hızlarda ve büyüklüklerde önplan nesnelere sahip videolarda hareketli cisimlerin bu tür özelliklerinden bağımsız olarak arkaplanda başarılı bir şekilde ayrıştırıldıkları gözlenmiştir. Sonuçta bu bölümde yapılan testlerle ANOMA'nın bu uygulamada kullanılmasının başarılı sonuçlar vereceği görülmüştür.

6. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada büyük boyutlu veri kümelerinin çevrimiçi işlenmesi için önerdiğimiz artımsal negatif olmayan matris ayrıştırma (ANOMA) yöntemi gözetleme türü videolarda arkaplan modelleme problemine uygulanmıştır [42-44]. Geliştirilen çevrimiçi ve artımsal negatif olmayan matris ayrıştırma hem işlemsel yük bakımından avantaj sağlamakta, hem de arkaplan modelinin yeni işlenen örneklerle göre güncellenebilmesini mümkün kılmaktadır. ANOMA'nın arkaplan modellemesindeki kullanımında piksel değerleri ya da bunların dağılımları hakkında herhangi bir kabul yapılmamaktadır. ANOMA'daki tek kısıt işlenecek verinin negatif değerlere sahip olmamasıdır ve bu da video verisinin doğasına tamamıyla uygundur.

NOMA yönteminin matematiksel altyapısı Bölüm 2'de anlatıldıktan sonra [42] çalışmada önerdiğimiz ANOMA yönteminin maliyet fonksiyonunun ve güncelleme kurallarının çıkarımları Bölüm 3'te verilmiştir. ANOMA yöntemi için öne sürdüğümüz güncelleme kurallarının yakınsaklığını göstermek için yaptığımız ispat ise Ek-B'dedir. Ek-A'da [41] çalışmada verilmiş olan ve NOMA işlemi sırasında kullanılan maliyet fonksiyonunun eniyilemesinde yerel minimuma ulaşıldığını KKT koşullarının kontrol edilmesiyle gösteren ispat detaylandırılmıştır.

Artımsal negatif olmayan matris ayrıştırma tekniği ağırlıklandırılmalı maliyet fonksiyonu sayesinde veri kümesi içindeki dinamik içerik değişimlerini, oluşturduğu düşük boyutlu gösterimlere küçük bir işlemsel yük karşılığında başarılı bir şekilde yansıtabilmektedir. Bu da ANOMA'yı arkaplan modelleme problemi için elverişli bir teknik yapmaktadır.

ANOMA, NOMA ve bu problem için teknik yazında kullanılan diğer bir yöntem olan ATBA ile PETS2001 veritabanında kayıtlı videolar üzerinde yapılan test sonuçları, ANOMA'nın arkaplan modellemede başarıyla kullanılabilecek bir ayrıştırma metodu olduğunu göstermektedir. Ayrıca ANOMA'nın ışıklılık değişimlerinde video içeriğini doğrulukla modelleyebildiği de görülmüştür. ANOMA için veri üzerinde herhangi bir kabulün (Gauss dağılımına sahip olması gibi) yapılmaması ışıklılık değişimlerine karşı gürbüzlüğün ATBA'ya oranla daha yüksek

olmasını açıklayabilir. Bu çalışmada yapılan deneylerde herhangi bir önışleme ya da art işleme işlemleri yapılmamıştır. Performansın artırılması için bu tür işlemlerin (maskeleme, gölge kaldırılması, videoda nesne hareket analizi kullanımı vb.) gerçekleştirilmesi de denenebilir.

Bu problem için geliştirdiğimiz algoritma Bölüm 5'teki deneylerde 2.40 GHz Intel Core 2 Quad. CPU özellikli bilgisayarda gerçek zamanlı olarak çalışmaktadır. Artımsal ve çevrimiçi yapısı ise bellek gereksinimi konusunda önemli bir fayda sağlamaktadır. Gözetleme türü video uygulamalarında hızın ve belleğin önemi düşünüldüğünde, ANOMA'nın bu problem için etkin bir çözüm sunduğu görülmüştür.

[41] numaralı referansta NOMA'nın k-ortalımalı topaklandırma yöntemine denk olduğu ispatlanmış ve deneysel olarak gösterilmiştir. NOMA, k-ortalımalı topaklandırma yöntemi ile aynı maliyet fonksiyonunu eniyileyerek altuzay topaklandırması (*subspace clustering*) yapmaktadır. Karışım matrisi ($\mathbf{W}$) öbekler için gösterim oluştururken kodlama matrisinin ($\mathbf{H}$) sütunları da her bir örneğin hangi öbeğe ait olduğunu belirler. Önerdiğimiz ANOMA yöntemi de $\mathbf{W}$ ve $\mathbf{H}$ matrislerini aynı maliyet fonksiyonunu temel alarak yeni gelen örneğin etkisinin katılmasıyla güncellediği için topaklandırma işlevine sahiptir. Burada Bölüm 4'te incelenen NOMA'nın, dolayısıyla da ANOMA'nın topaklandırma işlevi, önerdiğimiz yöntemin arkaplan modelleme problemindeki başarısının nedenlerinden biridir. Elde ettiğimiz arkaplan modeli, bir anlamda işlenen tüm video çerçevelerindeki ortak bilginin çıkarılmasıyla oluşturulur ve bu bilginin kullanılmasıyla her bir piksel için önplan ve arkaplan öbekleri ile ikili bir sınıflandırma yapılmasına olanak sağlar. [41] çalışmasında gösterilen NOMA ve topaklandırma ilişkisi de bu sebepten dolayı NOMA kullanılarak etkin bir arkaplan modeli oluşturulmasını sağlar.

ANOMA yöntemini gözetleme türü videolarda arkaplan modelleme probleminde kullanırken video çerçevelerindeki piksellerin gri düzey değerleri üzerinde işlem yapılmaktadır. Bunun nedeni gri düzey kullanımının getirdiği basitliğin yanında gri düzey kullanımının renk bilgilerinin kullanımına göre ışıklılık değişimleri gibi etkilere karşı gürbüzlüğü arttıracaklarını düşünmemizdir. Yine de çeşitli renk uzaylarının kullanımı ileriki çalışmalarda düşünülebilir.

[39] çalışmasındakine benzer bir şekilde NOMA'nın veya ANOMA'nın her bir video çerçevesine blok blok uygulanması da gelecek çalışmalar için düşünülebilir. Bu

sayede sahnedeki değişik bölgelerin daha detaylı bir şekilde işlenmesi, dolayısıyla da sahnedeki nesnelerin daha ayrıntılı analizini ve yöntemin gürbüzlülüğünün arttırılması mümkün olabilir.

Bu çalışmada diğer NOMA tabanlı çalışmalarının aksine NOMA'nın video arka plan modelleme konusunda uygulanması incelenmiş, artımsal ve çevrimiçi bir yöntem olan ANOMA önerilerek bu problemde kullanılmıştır. Hızı, basitliği ve gürbüzlüğü nedeniyle ANOMA kullanımıyla oluşturduğumuz arkaplan modelleme aracı birçok video uygulamasında bir bileşen olarak etkin olarak kullanılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Franke, U. and Heinrich, S.**, 2002. Fast obstacle detection for urban traffic situations, intelligent transportation systems, *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, **3**, 173- 181.
- [2] **Koller, D., Weber J., Huang, T., Malik, J., Ogasawara, G., Rao, B. ve Russel, S.**, 1994. Towards robust automatic traffic scene analysis in real-time, *International Conference on Pattern Recognition*, Groningen, Netherlands, 1994, 126-131.
- [3] **Trivedi, M.M., Prati, A., Mikic, I. ve Cucchiara, R.**, 2003. Detecting moving Shadows: Algorithms and Evaluation, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **25**, 918- 923.
- [4] **Cucchiara, R., Grana, C., Piccardi, M. ve Prati, A.**, 2003. Detecting moving objects, ghosts and shadows in video streams, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **25**, 1337- 1342.
- [5] **Harwood, D., Horprasert, T., ve Davis, L.S.**, 1999. A statistical approach for real-time robust background subtraction and shadow detection., *Proceedings of the 7th IEEE International Conference on Computer Vision Frame Rate Workshop (ICCV '99)*, Kerkyra, Greece, 1999, 1-19.
- [6] **Lo, B.P.L. ve Velastin, S.A.**, 2000. Automatic congestion detection system for underground platforms, *Proceedings of 2001 International Symposium on Intell. Multimedia, Video and speech Processing*, 158-161.
- [7] **Heikkila, J. ve Silven, O.**, 1999. A real-time system for monitoring of cyclists and pedestrians, *Second IEEE Workshop on Visual Surveillance*, Fort Collins, Colorado, 1999, 74-81.

- [8] **Wren, C., Azarbayejani, A., Darrell, T. ve Pentland, A.**, 1997. "Pfindex: real-time tracking of the human body," IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, **19**, 780-785.
- [9] **Stauffer, C. ve Grimson, W.E.L.**, 1999. Adaptive background mixture models for real-time tracking, Proceedings of IEEE International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), Ft. Collins, CO, ABD, 1999, 246-252.
- [10] **Stauffer, C. ve Grimson, W.E.L.**, 2000. Learning patterns of activity using real-Time tracking", IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, **22(8)**, 747-757.
- [11] **Pavlidis, I., Morellas, V., Tsiamyrtzis, P., ve Harp, S.**, 2001. Urban surveillance systems: from the laboratory to the commercial world, *Proceedings of the IEEE*, **89(10)**, 1478 -1497.
- [12] **Grimson, W.E.L., Stauffer, C., Romano, R. ve Lee, L.**, 1998. Using adaptive tracking to classify and monitor activities in a site, IEEE International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Santa Barbara, CA, ABD, 1998, 1-8.
- [13] **Ivanov, Y., Stauffer, C., Bobick, A. ve Grimson, W.E.L.**, Video surveillance of interactions in, Second IEEE Workshop on Visual Surveillance, Fort Collins, CO, ABD, 1999, 82-90.
- [14] **Elgammal, A., Harwood, D., ve Davis, L.S.**, 1999. Non-parametric model for background subtraction, *Proceedings of ICCV '99 Frame-Rate Workshop*, Kerkyra, Greece, 1999.
- [15] **Karmann, K.-P. ve von Brandt, A.**, 1990. Moving object recognition using an adaptive background memory, *Time-Varying Image Processing and Moving Object Recognition*, Elsevier Science Publishers B.V., 1990.
- [16] **Koller, D., Weber, J., Huang, T., Malik, J., Ogasawara, G., Rao, B., ve Russell, S.**, 1994. Towards robust automatic traffic scene analysis in real-time, *International Conference on Pattern Recognition (ICPR)*, Groningen, Netherlands, 1994.

- [17] **Jolliffe, I.**, 2000. Principle Component Analysis, Springer, 2nd ed. edition, New York.
- [18] **Oliver, N.M., Rosario, B., ve Pentland, A. P.**, 2000. A bayesian computer vision system for modeling human interactions, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **22(8)**, 831-843.
- [19] **Li, Y.**, 2004. On incremental and robust subspace learning, *Pattern Recognition*, **37**, 1509-1518.
- [20] **Y. Li, Xu, L.Q., Morphett, J., ve Jacobs, R.**, 2003. An integrated algorithm of incremental and robust PCA, *Proceedings of IEEE International Conference on Image Processing*, Barcelona, Spain, 2003.
- [21] **Javed, O., Shafique, K. ve Shah., M.**, 2002. A hierarchical approach to robust background subtraction using color and gradient information, *Proceedings of Motion and Video Computing 2002*, 22–27.
- [22] **Bu, J., Zhao, M., ve Chen, C.**, 2002. Robust background subtraction in HSV color space, *Proceedings of SPIE Multimedia Systems and Applications*, **(4861)**, 325–332, 2002.
- [23] **Leonardis, A., Bischof, H., ve Pinz, A.**, 2006. Computer Vision, *Proceedings of Lecture Notes in Computer Science - 9th European Conference on Computer Vision (ECCV)*, Graz, Austria, 2006.
- [24] **Blauensteiner, P., Wildenauer, H., Hanbury, A. ve Kampel, M.**, 2006. On colour spaces for change detection and shadow suppression, *Proceedings of the 11th Computer Winter Vision Workshop*, Telc, Czech Republic, 2006, 117–123.
- [25] **Grest, D., Frahm, J.M. ve Koch, R.**, 2003. A color similarity measure for robust shadow removal in real time, *Vision Modeling and Visualization*, Munich, Germany, 2003, 253–260.
- [26] **Deane, S.**, 2006. A Comparison of Background Subtraction Techniques, Proje Raporu, University of Southampton, England.
- [27] **Lee, D.D. ve Seung, H.S.**, 1999. Learning the parts of objects by nonnegative matrix factorization, *Nature*, **401**, 788-791.

- [28] **Lee, D.D. ve Seung, H.S.**, 2000. Algorithms for nonnegative matrix factorization, *Proceedings of Neural Information Systems*, 942-948.
- [29] **Hoyer, P.O.**, 2004. Non-negative matrix factorization with sparseness constraints, *Journal of Machine Learning Research*, 1457-1469.
- [30] **Pascual-Montano, A., Carazo, J.M., Kochi, K., Lehmann, D. ve Pascual-Marqui, R.D.**, 2006. Nonsmooth nonnegative matrix factorization, *IEEE Transactions and Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **42**, 403-415.
- [31] **Cichocki, A., Zdunek, R., Amari, S.**, 2006. New algorithms for non-negative matrix factorization in applications to blind source separation, *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Toulouse, France, 2006, 621-624.
- [32] **P.O. Hoyer**, 2002. Nonnegative Sparse Coding, *IEEE Workshop on Neural Networks for Signal Processing*, Martigny, Switzerland, 2002, 557-565.
- [33] **Li, S.Z., Hou, X., Zhang, H. ve Cheng, Q.**, 2001. Learning spatially localized parts-based representations, *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Hawaii, USA, 2001, 207-212.
- [34] **Lin, C.-J.**, 2007. Projected gradient methods for non-negative matrix factorization, *Neural Computation*, **19**, 2756-2779.
- [35] **Kim, S. ve Dhillon, I.S.**, 2007. Fast Newton-type methods for the least squares nonnegative matrix approximation problems, *Sixth SIAM Conference on Data Mining*, Minnesota, USA, 2007, 343-354.
- [36] **Guillamet, D., Vitria, J.**, 2002. Nonnegative matrix factorization for face recognition, *Fifth Catalanian Conference on Artificial Intelligence*, Castellon, Spain, 2002, 336-344.
- [37] **Smaragdis, P., Brown, J.C.**, 2003. Nonnegative matrix factorization for polyphonic music transcription, *IEEE Workshop Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics*, New York, USA, 2003, 177-180.

- [38] **Fogel, P., Young, S.S., Hawkins, D.M. ve Ledirac, N.**, 2007. Inferential robust non-negative matrix factorization analysis of microarray data, *Bioinformatics*, **23**, 44–49.
- [39] **Monga, V., Mihcak, M.K.**, 2006. Robust image hashing via non-negative matrix factorizations, *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Toulouse, France*, 2006, 225-228.
- [40] **Li, T. ve Ding, C.**, 2006. The relationships among various nonnegative matrix factorization methods for clustering, *Sixth IEEE International Conference on Data Mining, Hong Kong*, 2006, 362-371.
- [41] **Ding, C., Li, T. ve Jordan, M.I.**, 2006. Convex and semi nonnegative matrix factorizations, Teknik Rapor 60428, Lawrence Berkeley National Laboratory.
- [42] **Bucak, S.S. ve Günsel, B.**, 2007. Video content representation by incremental non-negative matrix factorization, *IEEE International Conference on Image Processing*, San Antonio, TX, USA, 2007, 113-116.
- [43] **Bucak, S.S., Günsel, B. ve Gursoy, O.**, 2007. Incremental non-negative matrix factorization for dynamic background modeling, *ICEIS International Workshop on Pattern Recognition in Information Systems*, Funchal, Portugal, 2007, 107-116.
- [44] **Bucak, S.S., Günsel, B. ve Gursoy, O.**, 2007. Gözetleme videolarında artımlı negatif olmayan matris ayrıştırma ile arka plan modelleme, *IEEE 15. İşaret İşleme ve İletişim Uygulamaları Kurultayı (SIU)*, Eskisehir, Turkey, 2007.
- [45] **Shen, J., Israel, G.W.**, 1989. A receptor model using a specific non-negative transformation technique for ambient aerosol, *Atmospheric Environment*, **23(10)**, 2289-2298.
- [46] **Paatero, P. ve Tapper, U.**, 1994, Positive matrix factorization-a nonnegative factor model with optimal utilization of error estimates of data values, *Environmetrics*, **5**, 111-126.
- [47] PETS Video Database, <http://ftp.pets.rdg.ac.uk/>.

- [48] **Yeo, B. ve Liu, B.**, 1885. Rapid scene analysis on compressed videos, *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, **5**, 533-544.
- [49] **Berkowitz, L.D.**, 2001. Convexity and Optimization in R^n , Wiley-Interscience, New York.

EK-A

Lineer olmayan eniyileme probleminde amaç $x \in R^n$ üzerinde $f(x)$ maliyet fonksiyonunu $h(x) = 0$ (eşitlik koşulu) ve $g(x) \leq 0$ (eşitsizlik koşulu) koşullarına bağlı olarak enküçültmektir.

Negatif olmayan matris ayrıştırma işlemi bir eniyileme süreci olarak incelediğinde maliyet fonksiyonu şu şekilde yazılır:

$$f\left((\mathbf{H})_{ij}\right) = tr\left[\mathbf{V}^T \mathbf{V} - 2\mathbf{V}^T \mathbf{W} \mathbf{H} + \mathbf{H}^T \mathbf{W}^T \mathbf{W} \mathbf{H}\right] \quad (\text{A.1})$$

Kısıtlamalardan ise sadece eşitsizlik koşulu mevcuttur ve o da denklem (A.2)'deki gibi ifade edilir:

$$g\left((\mathbf{H})_{ij}\right) = -(\mathbf{H})_{ij} \leq 0 \quad (\text{A.2})$$

Bu şekildeki bir tekil eşitsizlik kısıtlamalı eniyileme sürecinde, yakınsaklık noktasının yerel minimum olup olmadığını anlamak için tamamlayıcı KKT koşulu (*complementary condition*) incelenelir.

Öncelikle x noktasının yerel minimum olması için $\mu > 0$ olmak üzere (A.3) ile verilen eşitlik geçerli olmalıdır [49]:

$$\nabla f(x) = -\mu \nabla g(x) \quad (\text{A.3})$$

NOMA için bu koşulu uygulayarak μ değerini bulabiliriz. Maliyet fonksiyonunun $\mathbf{H}$ matrisinin bir elemanına göre türevinin denklem (A.4)'teki ifadeye eşit olduğu Bölüm 2.1'de gösterilmişti.

$$\nabla_H f = \left(-\mathbf{W}^T \mathbf{V} + \mathbf{W}^T \mathbf{W} \mathbf{H}\right)_{ij} \quad (\text{A.4})$$

Kısıtlayıcı fonksiyonun ($g(\cdot)$) türevi ise denklem (A.5)'te verilmiştir:

$$\frac{\partial g\left((\mathbf{H})_{ij}\right)}{\partial (\mathbf{H})_{ij}} = \frac{\partial \left((\mathbf{H})_{ij}\right)}{\partial (\mathbf{H})_{ij}} = -1 \quad (\text{A.5})$$

(A.3) denkleminde (A.4) ve (A.5) eşitlikleri ile verilen ifadeleri kullanarak denklem (A.6)'daki μ ifadesini elde ederiz:

$$-\left(\mathbf{W}^T \mathbf{V} + \mathbf{W}^T \mathbf{W} \mathbf{H}\right)_{ij} = -\mu_{ij} \quad (-1) \Rightarrow \mu_{ij} = -\left(\mathbf{W}^T \mathbf{V} + \mathbf{W}^T \mathbf{W} \mathbf{H}\right)_{ij} \quad (\text{A.6})$$

Tamamlayıcı KKT koşulu ise x^* yerel minimum noktası olmak üzere şu şekilde verilir:

$$\mu^* g\left(x^*\right) = 0 \quad (\text{A.7})$$

Bu koşulu NOMA için denklem (A.8) ile gösterildiği biçimde yazabiliriz

$$\mu^* g\left((\mathbf{H})_{ij}^*\right) = 0 \Rightarrow \left(-\mathbf{W}^T \mathbf{V} + \mathbf{W}^T \mathbf{W} \mathbf{H}\right)_{ij} g\left((\mathbf{H})_{ij}^*\right) = \left(\mathbf{W}^T \mathbf{V} - \mathbf{W}^T \mathbf{W} \mathbf{H}\right)_{ij} (\mathbf{H})_{ij}^* = 0 \quad (\text{A.8})$$

Yakınsaklık durumunda $\mathbf{H}$ matrisi elemanları denklem (A.9) ile verilen güncelleme kuralından yola çıkılarak (A.10)'deki eşitliğe varılır.

$$(\mathbf{H}^*)_{ij} = (\mathbf{H}^*)_{ij} \frac{\left(\mathbf{W}^T \mathbf{V}\right)_{ij}}{\left(\mathbf{W}^T \mathbf{W} \mathbf{H}^*\right)_{ij}} \quad (\text{A.9})$$

$$\left(\mathbf{H}^*\right)_{ij} \left(\mathbf{W}^T \mathbf{W}^* \mathbf{H}^*\right)_{ij} = \left(\mathbf{H}^*\right)_{ij} \left(\mathbf{W}^T \mathbf{V}\right)_{ij} \Rightarrow \left(\mathbf{H}^*\right)_{ij} \left(\mathbf{W}^T \mathbf{V} - \mathbf{W}^T \mathbf{W} \mathbf{H}^*\right)_{ij} = 0 \quad (\text{A.10})$$

(A.2) ve (A.6) denklemlerindeki ifadelerden faydalanarak (A.11) denkleminin NOMA'da $\mathbf{H}$ matrisinin güncelleme kuralı için tamamlayıcı KKT koşulunu verdiği görülür.

$$H_{ij}^* \left(\mathbf{W}^T \mathbf{V} - \mathbf{W}^T \mathbf{W} \mathbf{H}^*\right)_{ij} = \mu^* g\left(H^*\right) = 0 \quad (\text{A.11})$$

Benzer şekilde $\mathbf{W}$ matrisinin güncelleme kuralı için de KKT koşullarının sağlandığını kontrol edelim. Maliyet fonksiyonu denklem (A.12)'de yazılmıştır.

$$f\left((\mathbf{W})_{ij}\right)=tr\left[\mathbf{V}^T\mathbf{V}-2\mathbf{V}^T\mathbf{W}\mathbf{H}+\mathbf{H}^T\mathbf{W}^T\mathbf{W}\mathbf{H}\right] \quad (\text{A.12})$$

(A.12) eşitliğindeki maliyet fonksiyonunun $(\mathbf{W})_{ij}$ 'ye göre türevinin denklem (A.13) ile verilen ifadeye eşit olduğu Bölüm 2'de gösterilmişti.

$$\nabla_{\mathbf{W}}f=\left(-\mathbf{V}\mathbf{H}^T+\mathbf{W}\mathbf{H}\mathbf{H}^T\right)_{ij} \quad (\text{A.13})$$

$g\left((\mathbf{W})_{ij}\right)=-\left(\mathbf{W}\right)_{ij}\leq 0$ olan kısıtlayıcı fonksiyonun $(\mathbf{W})_{ij}$ 'ye göre türevi ise denklem (A.14)'te verilmiştir.

$$\frac{\partial g\left((\mathbf{W})_{ij}\right)}{\partial (\mathbf{W})_{ij}}=\frac{\partial \left((\mathbf{W})_{ij}\right)}{\partial (\mathbf{W})_{ij}}=-1 \quad (\text{A.14})$$

(A.3) eşitliği ile verilen KKT koşulunu kullanarak $(\mathbf{W})_{ij}$ için μ değerini bulalım:

$$-\left(-\mathbf{V}\mathbf{H}^T+\mathbf{W}\mathbf{H}\mathbf{H}^T\right)_{ij}=-\mu_{ij}(-1)\Rightarrow \mu_{ij}=-\left(-\mathbf{V}\mathbf{H}^T+\mathbf{W}\mathbf{H}\mathbf{H}^T\right)_{ij} \quad (\text{A.15})$$

Denklem (A.7)'deki tamamlayıcı KKT koşulu $(\mathbf{W})_{ij}$ için denklem (A.16)'da yeniden yazılmıştır.

$$\mu^*g\left((\mathbf{W}^*)_{ij}\right)=0\Rightarrow \left(-\mathbf{V}\mathbf{H}^T+\mathbf{W}\mathbf{H}\mathbf{H}^T\right)_{ij}g\left((\mathbf{W}^*)_{ij}\right)=\left(\mathbf{V}\mathbf{H}^T-\mathbf{W}\mathbf{H}\mathbf{H}^T\right)_{ij}\left(\mathbf{W}^*\right)_{ij}=0 \quad (\text{A.16})$$

$\mathbf{W}$ matrisi elemanlarının güncelleme kuralına göre yakınsaklık anında denklem (A.17)'de verilen eşitlik söz konusudur.

$$\left(\mathbf{W}^*\right)_{ij}=\left(\mathbf{W}^*\right)_{ij}\frac{\left(\mathbf{V}\mathbf{H}^T\right)_{ij}}{\left(\mathbf{W}^*\mathbf{H}\mathbf{H}^T\right)_{ij}} \quad (\text{A.17})$$

Buradan, sırasıyla içler dışlar çarpımı ve taraf tarafa toplama yaparak (A.18) eşitliğine ulaşılır.

$$\left(\mathbf{W}^*\right)_{ij} \left(\mathbf{W}^* \mathbf{H} \mathbf{H}^T\right)_{ij} = \left(\mathbf{W}^*\right)_{ij} \left(\mathbf{V} \mathbf{H}^T\right)_{ij}$$

$$\left(\mathbf{W}^*\right)_{ij} \left(\mathbf{V} \mathbf{H}^T\right)_{ij} - \left(\mathbf{W}^*\right)_{ij} \left(\mathbf{W}^* \mathbf{H} \mathbf{H}^T\right)_{ij} = 0 \quad (\text{A.18})$$

(A.18) ile verilen eşitlik (A.16) denklemindeki KKT koşulunu eşit olduğundan bu güncelleme kuralı ile yakınsanan noktanın yerel minimum olduğu sonucuna varılır.

EK-B

Buradaki amaç, gradyan iniş algoritmasında (B.1) eşitliği ile verilen adım boyunun seçilmesi durumunda denklem (B.2)'de gösterilen maliyet fonksiyonunun her bir güncelleme ANOMA döngüsü için artmayan bir fonksiyon olduğunu ispatlamaktır. ANOMA güncelleme kuralları söz konusu adım boyunun seçimi ile çıkarıldığından, güncelleme sürecinde maliyet fonksiyonunun artmayacağını göstermek, yakınsaklık ispatına denk düşer. Zaten KKT koşullarının incelenmesiyle yapılan yerel minimumluk testi ANOMA için Ek-A'da verilmişti.

$$\lambda_{ia} = \frac{(\mathbf{W}_{k+1})_{ia}}{\sum_{j=1}^{k+1} S_j(\alpha) (\mathbf{W}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1})_{ij} (\mathbf{H}_{k+1}^T)_{ja}} \quad (\text{B.1})$$

Denklem (B.1)'de görülen $S_j(\alpha)$, her bir $k+1$ örnek için kullanılan ağırlıklandırma fonksiyonudur. $i=1,2,\dots,n$ ve $a=1,2,\dots,r$ olmak üzere $\mathbf{W}_{k+1}$ karışım matrisinin $n.r$ tane elemanının her biri için farklı bir adım boyu seçilir.

Denklem (B.2)'deki maliyet fonksiyonunda ise $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$ sırasıyla $\mathbf{V}$ ve $\mathbf{W}_{k+1}$ matrislerinin içersinde bulunan n 'er tane satır vektöründen birer tanesini temsil etmektedirler.

$$F(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m S_i(\alpha) \left((\mathbf{v})_i - (\mathbf{w} \mathbf{H})_i \right)^2 \quad (\text{B.2})$$

Tanım 1: $G(\mathbf{w}, \mathbf{w}^t)$ (B.3a) ve (B.3b) denklemleri ile verilen koşulları sağlarsa $F(\mathbf{w})$ maliyet fonksiyonu için yardımcı fonksiyon olarak seçilebilir. $\mathbf{w}^t$ burada t anındaki $\mathbf{w}$ vektörünü ifade etmektedir.

$$G(\mathbf{w}, \mathbf{w}^t) \geq F(\mathbf{w}) \quad (\text{B.3a})$$

$$G(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = F(\mathbf{w}) \quad (\text{B.3b})$$

Önerme 1: Eğer $G(\mathbf{w}, \mathbf{w}^t)$ $F(\mathbf{w})$ fonksiyonu için yardımcı fonksiyon olarak seçilirse, (B.4) denklemi ile verilen güncelleme kuralı altında $F(\mathbf{w})$ artmayan bir fonksiyon olacaktır.

$$\mathbf{w}^{t+1} = \arg \min_{\mathbf{w}} G(\mathbf{w}, \mathbf{w}^t) \quad (\text{B.4})$$

İspat: Denklem (B.3a)'ya göre $G(\mathbf{w}^{t+1}, \mathbf{w}^t) \geq F(\mathbf{w}^{t+1})$ eşitsizliği geçerlidir. Denklem (B.4) ile verilen güncelleme kuralına göre ise $G(\mathbf{w}^{t+1}, \mathbf{w}^t) \leq G(\mathbf{w}^t, \mathbf{w}^t)$ olmak durumundadır. Bunun sebebi $\mathbf{w}^{t+1}$ 'in $G(\mathbf{w}, \mathbf{w}^t)$ fonksiyonunu enküçülten $\mathbf{w}$ değeri olarak seçilmesidir. Son olarak (B.3b) eşitliğine göre $G(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = F(\mathbf{w})$ olduğu için denklem (B.5) yazılır ve buradan $F(\mathbf{w}^{t+1}) \leq F(\mathbf{w}^t)$ olduğu, bir başka ifade şekli ile $F(\mathbf{w})$ 'nin bir artmayan fonksiyon olduğu görülür.

$$F(\mathbf{w}^{t+1}) \leq G(\mathbf{w}^{t+1}, \mathbf{w}^t) \leq G(\mathbf{w}^t, \mathbf{w}^t) = F(\mathbf{w}^t) \quad (\text{B.5})$$

Önerme 2: $\mathbf{K}$ köşegen matrisi denklem (B.6)'deki gibi tanımlansın. Bu durumda (B.7) eşitliği ile gösterilen $G(\mathbf{w}, \mathbf{w}^t)$ fonksiyonu denklem (B.2)'de verilen maliyet fonksiyonu için yardımcı fonksiyon olarak seçilebilir. $\mathbf{T}$ matrisi (B.8) denkleminde tanımlanmıştır.

$$K(\mathbf{w}^t)_{aa} = \frac{(\mathbf{w}^t \mathbf{H} \mathbf{T}^T)_a}{w_a^t}, \quad a=1,2,\dots,r \quad (\text{B.6})$$

$$G(\mathbf{w}, \mathbf{w}^t) = F(\mathbf{w}^t) + (\mathbf{w} - \mathbf{w}^t) \nabla F(\mathbf{w}^t) + \frac{1}{2} (\mathbf{w} - \mathbf{w}^t) \mathbf{K}(\mathbf{w}^t) (\mathbf{w} - \mathbf{w}^t)^T \quad (\text{B.7})$$

$$(\mathbf{T})_{ij} = S_j(\alpha)(\mathbf{H}_{k+1})_{ij} \quad (\text{B.8})$$

İspat: (B.4a) ve (B.4b) denklemleri ile verilen koşulların geçerli olduğunu göstermek (B.8) eşitliği ile verilen $G(\mathbf{w}, \mathbf{w}^t)$ 'nin denklem (B.2)'de gösterilmiş olan $F(\mathbf{w})$ için yardımcı fonksiyon olarak seçilebileceğini kanıtlamak için yeterlidir.

Öncelikle (B.7) eşitliğindeki $\mathbf{w}^t$ ifadelerini $\mathbf{w}$ ile değiştirelim. Bu şekilde (B.9) eşitliğinden Tanım-1'in ikinci koşulunun sağlandığı görülür.

$$\begin{aligned} G(\mathbf{w}, \mathbf{w}) &= F(\mathbf{w}) + (\mathbf{w} - \mathbf{w}) \nabla F(\mathbf{w}) + \frac{1}{2} (\mathbf{w} - \mathbf{w}) K(\mathbf{w}) (\mathbf{w} - \mathbf{w})^T \\ &= F(\mathbf{w}) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Diğer koşulun sağlandığını görmek için ise $G(\mathbf{w}, \mathbf{w}^t) \geq F(\mathbf{w})$ koşulu kontrol edilmeli. Bu yüzden karşılaştırma işleminde $F(\mathbf{w})$ 'nin Taylor Teoremi ile elde edilen ve (B.10) denkleminde verilen ifadesi kullanılacaktır.

$$F(\mathbf{w}) = F(\mathbf{w}^t) + (\mathbf{w} - \mathbf{w}^t) \nabla F(\mathbf{w}^t) + \frac{1}{2} (\mathbf{w} - \mathbf{w}^t) (\mathbf{H} \mathbf{T}^T) (\mathbf{w} - \mathbf{w}^t)^T \quad (\text{B.10})$$

(B.7) ve (B.10) denklemlerini kullanarak (B.3a) koşulu şu şekilde düzenlenebilir:

$$G(\mathbf{w}, \mathbf{w}^t) - F(\mathbf{w}) \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} (\mathbf{w} - \mathbf{w}^t) (K(\mathbf{w}) - \mathbf{H} \mathbf{T}^T) (\mathbf{w} - \mathbf{w}^t)^T \geq 0 \quad (\text{B.11})$$

(B.11) denklemindeki ifade $(K(\mathbf{w}) - \mathbf{H} \mathbf{T}^T)$ matrisi için pozitif yarı tanımlı olma koşuludur. Bu sebeple denklem (B.11)'deki koşulun sağlandığını ispatlamak, denklem (B.12)'de gösterilen matrisin pozitif yarı tanımlı olduğunu göstermeye denktir. Sonuçta

¹ $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a) + \frac{1}{2} \int_a^x (x-t)^2 f'''(t) dt$

$\mathbf{w}$ vektörünün elemanları negatif olmamak durumundadır ve bu yüzden $\mathbf{M}$ matrisi $(K(\mathbf{w}) - \mathbf{HT}^T)$ 'in ölçeklenmiş halidir.

$$\mathbf{M}_{ab}(\mathbf{w}^t) = (\mathbf{w}^t)_a (K(\mathbf{w}^t) - \mathbf{HT}^T)_{ab} (\mathbf{w}^t)_b, \quad a=1,2,\dots,r; \quad b=1,2,\dots,r \quad (\text{B.12})$$

$\mathbf{p}$, r elemanlı bir vektör olmak üzere (B.13) eşitliği ile verilen matrisin pozitif yarı tanımlı olup olmadığı kontrol edilmelidir.

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^T \mathbf{M} \mathbf{p} &= \sum_{a,b} (\mathbf{p})_a (\mathbf{M})_{ab} (\mathbf{p})_b \\ &= \sum_{a,b} (\mathbf{p})_a (\mathbf{w}^t)_a K(\mathbf{w}^t)_{ab} (\mathbf{w}^t)_b (\mathbf{p})_b - \sum_{a,b} (\mathbf{p})_a (\mathbf{w}^t)_a (\mathbf{HT}^T)_{ab} (\mathbf{w}^t)_b (\mathbf{p})_b \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$\mathbf{K}$ bir köşegen matris olduğu için (B.14)'teki denklem aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\mathbf{p}^T \mathbf{M} \mathbf{p} = \sum_b (\mathbf{p})_b^2 (\mathbf{w}^t)_b K(\mathbf{w}^t)_{bb} (\mathbf{w}^t)_b - \sum_{a,b} (\mathbf{p})_a (\mathbf{w}^t)_a (\mathbf{HT}^T)_{ab} (\mathbf{w}^t)_b (\mathbf{p})_b \quad (\text{B.14})$$

$\mathbf{K}$ matrisi için (B.6) denklemi ile verilen ifade kullanılırsa (B.15) eşitliği şu şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^T \mathbf{M} \mathbf{p} &= \sum_b (\mathbf{p})_b^2 (\mathbf{w}^t)_b \left(\sum_a (\mathbf{w}^t)_a (\mathbf{HT}^T)_{ab} \right) - \sum_{ab} (\mathbf{p})_a (\mathbf{w}^t)_a (\mathbf{HT}^T)_{ab} (\mathbf{w}^t)_b (\mathbf{p})_b \\ &= \sum_{a,b} (\mathbf{p})_b^2 (\mathbf{w}^t)_b (\mathbf{w}^t)_a (\mathbf{HT}^T)_{ab} - \sum_{ab} (\mathbf{p})_a (\mathbf{w}^t)_a (\mathbf{HT}^T)_{ab} (\mathbf{w}^t)_b (\mathbf{p})_b \\ &= \sum_{a,b} (\mathbf{w}^t)_b (\mathbf{w}^t)_a (\mathbf{HT}^T)_{ab} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{p})_b^2 + \frac{1}{2} (\mathbf{p})_a^2 - (\mathbf{p})_a (\mathbf{p})_b \right] \\ &= \sum_{a,b} (\mathbf{w}^t)_b (\mathbf{w}^t)_a (\mathbf{HT}^T)_{ab} ((\mathbf{p})_a - (\mathbf{p})_b)^2 \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

ANOMA'da $\mathbf{W}$ ve $\mathbf{H}$ matrisleri negatif olmayan matrislerden oluştuğu için (B.15) eşitliği ile verilmiş ifadenin 0'dan büyük olduğu sonucuna varılır. Sonuç olarak denklem (B.16)'daki koşul $\mathbf{M}$ matrisinin pozitif yarı tanımlı olduğunu gösterir. Böylece (B.11)

koşulu, yani $G(\mathbf{w}, \mathbf{w}^t)$ 'nin yardımcı fonksiyon seçilebilmesi için gerekli olan son koşul sağlanmış olur.

$$\mathbf{p}^T \mathbf{M} \mathbf{p} \geq 0 \quad (\text{B.16})$$

Şimdi sıra (B.4) denklemi ile verilen güncelleme kuralını gerçeklemektir. Önce $G(\mathbf{w}, \mathbf{w}^t)$ 'nin türevini hesaplayıp 0'a eşitleyelim.

$$\frac{\partial}{\partial (\mathbf{w})_a} G(\mathbf{w}, \mathbf{w}^t) = \nabla F(\mathbf{w}^t) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left((\mathbf{w})_a - (\mathbf{w}^t)_a \right) \mathbf{K}(\mathbf{w}^t)_{aa} = 0 \quad (\text{B.17})$$

Denklem (B.17)'den çekilen ve denklem (B.18)'de gösterilen $(\mathbf{w})_a$ bir sonraki adımda kullanılacak olan elemandır.

$$(\mathbf{w}^{t+1})_a = (\mathbf{w}^t)_a - \mathbf{K}(\mathbf{w}^t)_{aa}^{-1} \left(\frac{\partial F(\mathbf{w}^t)}{\partial (\mathbf{w}^t)_a} \right) \quad (\text{B.18})$$

Denklem (B.18)'deki güncelleme kuralı gradyan inişi eniyileme algoritmasının formüle dökülmüş biçimidir. Yakınsaklık garantisi veren adım boyu (B.19) eşitliğinde verilmiştir.

$$K(\mathbf{w}^t)_{aa}^{-1} = \frac{(\mathbf{w}^t)_a}{(\mathbf{w}^t \mathbf{H} \mathbf{T}^T)_a} \quad (\text{B.19})$$

(B.8) denklemi kullanılırsa $\mathbf{w}$ satır vektörlerinin bileşiminden oluşan $\mathbf{W}_{k+1}$ matrisi için (B.19) eşitliğindeki ifade denklem (B.20)'de görüldüğü şekilde yazılır. Bu ifadenin denklem (B.1)'e eşit olması ispatı tamamlar.

$$\lambda_{ia} = \frac{(\mathbf{W}_{k+1})_{ia}}{\sum_{j=1}^{k+1} S_j(\alpha) (\mathbf{W}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1})_{ij} (\mathbf{H}_{k+1}^T)_{ja}} \quad (\text{B.20})$$

ÖZGEÇMİŞ

Serhat Selçuk BUCAK, 27/07/1984 tarihinde İstanbul/Beyoğlu’da doğmuştur. Orta öğretimini TEV İnanç Türkeş Özel Lisesi’nde tamamlamıştır. İstanbul Teknik Üniversitesi Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümü Telekomünikasyon Programı lisans derecesini aldıktan sonra aynı üniversitede Telekomünikasyon Mühendisliği Programı’nda yüksek lisans eğitimine başlamıştır. Aralık 2006’dan beri Telekomünikasyon Mühendisliği Bölümü’nde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.