

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

Demet PARLAK SÖNMEZ

**SERBEST LİE CEBİRLERİNİN ENDOMORFİZMLERİNİN SABİT
NOKTALARI VE SABİT NOKTA ALT CEBİRLERİ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2010

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SERBEST LİE CEBİRLERİNİN ENDOMORFİZMLERİNİN SABİT
NOKTALARI VE SABİT NOKTA ALT CEBİRLERİ

Demet PARLAK SÖNMEZ
DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez/...../..... tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

.....
Prof.Dr. Naime EKİCİ
DANIŞMAN

.....
Prof.Dr. Bilal VATANSEVER
ÜYE

.....
Yrd.Doç.Dr. Ela AYDIN
ÜYE

.....
Yrd.Doç.Dr. Zerrin ESMERLİGİL
ÜYE

.....
Yrd.Doç.Dr. Perihan DİNÇ ARTUT
ÜYE

Bu tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof.Dr. İlhami YEĞİNGİL
Enstitü Müdürü

Bu Çalışma Tübitak-Bideb Tarafından Desteklenmiştir.

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

Sevgili Eşim Orhan'a

ÖZ

DOKTORA TEZİ

SERBEST LİE CEBİRLERİNİN ENDOMORFİZMLERİNİN SABİT NOKTALARI VE SABİT NOKTA ALT CEBİRLERİ

Demet PARLAK SÖNMEZ

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman: Prof.Dr. Naime EKİCİ

Yıl: 2010, Sayfa: 81

Jüri: Prof.Dr. Naime EKİCİ

Prof.Dr. Bilal VATANSEVER

Yrd.Doç.Dr. Ela AYDIN

Yrd.Doç.Dr. Zerrin ESMERLİGİL

Yrd.Doç.Dr. Perihan DİNÇ ARTUT

Bu çalışmada serbest metabelyen Lie cebiri L nin bir IA -endomorfizminin aşık ar olmayan sabit noktalarının olduğunu gösterdik ve aşık ar olmayan sabit noktaları belirlemek için bir algoritma geliştirdik. Ayrıca, serbest metabelyen Lie cebirlerinde bir Φ , IA -endomorfizminin sabit nokta alt cebiri $Fix\Phi$ nin sonlu üreteçli olmadığını gösterdik. Sonra, $rank$ 2 olan L serbest metabelyen Lie cebirinin IA -endomorfizminin belirlenen koşul altında aşık ar olmayan sabit noktaya sahip olmadığını gösterdik. Ayrıca, $rank(L) \geq 3$ olması durumunda bir IA -endomorfizm inşaa edip bu endomorfizmin otomorfizm olmadığını ve aşık ar olmayan sabit noktaya sahip olmadığını gösterdik. $rank(L) = 4$ ve $rank(L) \geq 5$ olması durumlarında IA -otomorfizmleri inşaa ederek bu otomorfizmlerin sıfır dışında sabit noktaya sahip olmadığını gösterdik. Daha sonra iki üreteçli serbest Lie cebirinin ve serbest metabelyen Lie cebirinin bazı otomorfizmlerinin sabit nokta alt cebirlerinin sonsuz ranklı olduğunu göstermek için bir teknik geliştirdik. Bu teknikle, belirli serbest Lie cebirlerinin bazı taşınabilir ve taşınamaz otomorfizmlerinin sabit nokta alt cebirlerinin rankının sonlu olup olmadığını belirledik. Daha sonra serbest nilpotent Lie cebirlerinin bazı otomorfizmlerinin aşık ar olmayan sabit noktalarının olması için gerekli koşulu belirledik ve bazı otomorfizmler için sabit nokta alt cebirinin rankının sonlu olduğunu gösterdik.

Anahtar Kelimeler: Serbest metabelyen ve serbest nilpotent Lie cebirleri, otomorfizmler, sabit noktalar.

ABSTRACT

PhD THESIS

FIXED POINTS OF ENDOMORPHISMS OF FREE LIE ALGEBRAS AND FIXED POINT SUBALGEBRAS

Demet PARLAK SÖNMEZ

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF ÇUKUROVA

Supervisor: Prof.Dr. Naime EKİCİ

Year: 2010, Pages: 81

Jury: Prof.Dr. Naime EKİCİ

Prof.Dr. Bilal VATANSEVER

Asst.Prof.Dr. Ela AYDIN

Asst.Prof.Dr. Zerrin ESMERLİGİL

Asst.Prof.Dr. Perihan DİNÇ ARTUT

In this thesis we show the existence of non-trivial fixed points of an IA -endomorphism of a free metabelian Lie algebra L and develop an algorithm detecting them. We also prove that the fixed point subalgebra $Fix\Phi$ of an IA -endomorphism Φ of L is not finitely generated. Then, we show that IA -endomorphisms of a free metabelian Lie algebra L of rank two has no non-trivial fixed points under certain conditions. Moreover, in situation $rank(L) \geq 3$, we construct an IA -endomorphism and we show that this IA -endomorphism is not an automorphism and has no non-trivial fixed points. Indeed, we show that there is an IA -automorphism without fixed points when $rank(L) = 4$ and $rank(L) \geq 5$. In addition, we improve a technics for showing that the fixed point subalgebra of some automorphisms of a free Lie algebra and a free metabelian Lie algebra of rank two is not finitely generated. By using this technics, we determined whether the rank of the fixed point subalgebra of some tame and non-tame automorphisms is finite or not. Besides, in a free nilpotent Lie algebra, we determined the necessary condition for some automorphisms to have non-trivial fixed points and we show that the rank of the fixed point subalgebras of some automorphisms are finitely generated.

Key Words: Free metabelian and free nilpotent Lie algebras, automorphisms, fixed points.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında bilgi ve tecrübeleriyle beni aydınlatan, yardımlarını esirgemeyen, bilgisi ve kişiliğiyle örnek aldığım saygı değer danışmanım Prof. Dr. Naime EKİCİ'ye sonsuz sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, değerli hocalarım Yrd. Doç. Dr. Zerrin ESMERLİGİL'e, Yrd. Doç. Dr. Ela AYDIN'a, Yrd. Doç. Dr. Perihan DİNÇ ARTUT'a, Prof. Dr. Bilal VATANSEVER'e ve arkadaşlarım Remziye Arzu ZABUN'a, Nazar Şahin ÖGÜŞLÜ'ye ve tüm Ç.Ü. matematik bölümü öğretim elemanlarına yardım ve teşviklerinden dolayı teşekkür ederim.

Manevi desteklerini esirgemeyen, her zaman yanımda yer alan eşime ve anneme, matematik öğretmenim Salim KARAKUŞ'a, biyoloji öğretmenim Serpil KARAKUŞ'a sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans ve doktora eğitimim süresince verdiği burstan dolayı TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığına teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER	SAYFA
ÖZ	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR	III
İÇİNDEKİLER	IV
1 GİRİŞ	1
2 TEMEL TANIM VE TEOREMLER	3
3 SERBEST METABELYEN LİE CEBİRLERİNİN OTOMORFİZMLERİNİN SABİT NOKTALARI İÇİN ALGORİTMA	11
3.1 Sabit Nokta Alt Cebirleri	21
4 SERBEST METABELYEN LİE CEBİRLERİNİN SIFIRDAN FARKLI SABİT NOKTASI OLMAYAN ENDOMORFİZMLERİ	24
4.1 Sıfırdan Farklı Sabit Noktası Olmayan Endomorfizmler ve Otomor- fizmler	27
5 SERBEST LİE CEBİRLERİNİN SABİT NOKTA ALT CEBİRLERİNİN RANKI	35
5.1 Serbest Metabelyen Lie Cebirlerinin Sabit Nokta Alt Cebirlerinin Rankı	38
5.2 İki Üreteçli Serbest Metabelyen Lie Cebirinin Taşınabilir Otomorfizm- lerinin Sabit Nokta Alt Cebirlerinin Rankı	42
5.3 Bazı Serbest Lie Cebirlerinin Taşınabilir Otomorfizmlerinin Sabit Nokta Alt Cebirlerinin Rankı	47
6 SERBEST NİLPOTENT LİE CEBİRLERİNİN OTOMORFİZMLERİNİN SABİT NOKTALARI	60
KAYNAKLAR	79
ÖZGEÇMİŞ	81

1. GİRİŞ

Lie cebirleri teorisinin önemli problemlerinden bir tanesi, bir serbest Lie cebirinin verilen bir endomorfizminin aşikar olmayan sabit noktalarını belirlemektir. Bir serbest cebir üzerine etki eden sonlu bir grubun sabit noktaları ile ilgili önemli sonuçlar Formanek (1985) tarafından elde edilmiştir. Serbest Lie cebirleri için benzer sonuçlar Bryant (1991) ve Drensky (1994) tarafından ispat edilmiştir. Bryant ve Drensky bazı koşullar altında F sonlu ranklı serbest Lie cebiri ve G, F nin otomorfizmlerinin aşikar olmayan sonlu bir grubu ise $F^G = \{u \in F : \text{her } g \in G \text{ için } ug = u\}$ sabit nokta alt cebirinin sonlu üreteçli olmadığını göstermiştir. Bryant ve Papistas (2000), bu sonuçları geliştirmişlerdir. Bir serbest cebirin otomorfizmlerinin sonlu bir grubunun sabit noktaları ile ilgili bazı sonuçlar bir endomorfizm için de elde edilebilir. Shpilrain (1998), bir serbest metabelyen grubun IA -endomorfizmlerinin sabit noktalarının matris karakterizasyonunu yapmıştır. Matris metodları bir çok yazar tarafından serbest ve serbest metabelyen Lie cebirlerinin endomorfizmleri için önemli sonuçlar elde etmek için kullanılmıştır.

Shpilrain (1998) de bir serbest metabelyen grubun bütün IA -otomorfizmlerinin aşikar olmayan sabit noktaya sahip olup olmadığını sormuştur. Kassabov (2004), bu soruyu, $\text{rank}(H) \geq 3$ olacak şekildeki H serbest abelyen grubunda sıfır dışında sabit noktaya sahip olmayan IA -otomorfizmi bularak cevaplamıştır. Kassabov, bu sonuca Bachmuth (1965) nun bulduğu sonuçları kullanarak elde etmiştir.

Tezin ikinci bölümünde çalışmamızda kullanmış olduğumuz bazı temel tanımları ve teoremleri verdik.

Üçüncü bölümde serbest metabelyen Lie cebirlerinin aşikar olmayan sabit noktaya sahip IA -endomorfizmlerinin matris karakterizasyonunu belirlemek için (Shpilrain, 1998) daki metodu kullandık. Bu sayede bir serbest metabelyen Lie cebirinin bir endomorfizminin bazı koşullar altında aşikar olmayan sabit noktasını belirleyen bir algoritma elde ettik. Ayrıca, Bryant ve Papistas (2000) ın geliştirdiği metodu kullanarak serbest metabelyen Lie cebirinin IA -endomorfizminin sabit nokta alt cebirinin sonlu üreteçli olmadığını gösterdik.

Dördüncü bölümde Kassabov (2004) un bulduğu sonucu serbest metabelyen Lie cebirleri için araştırdık. Bu bölümde geliştirdiğimiz teknik Shmel'kin ve Syrtsov (2007) nin ve Shmel'kin (1973) nin elde ettiği sonuçlara dayanmaktadır. Öncelikle, $rank\ 2$ olan F/F'' serbest metabelyen Lie cebirinin IA -endomorfizmlerinin belirlenen koşul altında aşık ar olmayan sabit noktaya sahip olmadığını gösterdik. Ayrıca, $rank(F/F'') \geq 3$ olması durumunda bir IA -endomorfizmi inşaa edip bu endomorfizmin otomorfizm olmadığını ve aşık ar olmayan sabit noktaya sahip olmadığını gösterdik. $rank(F/F'') = 4$ ve $rank(F/F'') \geq 5$ olması durumlarında IA -otomorfizmleri inşaa ederek bu otomorfizmlerin sıfır dışında sabit noktaya sahip olmadığını gösterdik.

Beşinci bölümde iki üreteçli serbest Lie cebirlerinin ve serbest metabelyen Lie cebirlerinin bazı otomorfizmlerinin sabit nokta alt cebirlerinin sonsuz ranklı olduğunu göstermek için bir teknik geliştirdik. Ayrıca, iki üreteçli serbest metabelyen Lie cebirlerinin taşınabilir otomorfizmleri grubunun üreteçlerinin sabit nokta alt cebirlerinin sonsuz ranklı olduğunu gösterdik. Burada kullanılan yöntemi, F $rank(F) \geq 2$ olacak şekildeki serbest Lie cebiri ve R , F nin bir ideali olmak üzere F/R serbest Lie cebirinin bazı taşınamaz otomorfizmlerinin sabit nokta alt cebirlerinin rankının sonsuz olduğunu göstermek için de kullandık. Ayrıca, özel olarak verilen bir taşınamaz otomorfizmin sabit nokta alt cebirinin sonlu olduğunu gösterdik.

Altıncı bölümde serbest nilpotent Lie cebirlerinin bazı otomorfizmlerinin sabit noktalarının olması için gerekli koşulu belirledik ve bazı otomorfizmler için sabit nokta alt cebirlerinin rankının sonlu olduğunu gösterdik.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu çalışmamızda bütün Lie cebirlerini karakteristiği sıfır olan cisim üzerindeki Lie cebiri olarak düşüneceğiz.

Tanım 2.1 Bir F Lie cebiri ve herhangi bir $X \neq \emptyset$ kümesi verildiğinde her B Lie cebiri için $\alpha : X \rightarrow B$ bir dönüşüm olmak üzere, $i : X \rightarrow F$ dönüşümü için

$$\alpha = \eta i$$

olacak şekilde bir tek

$$\eta : F \rightarrow B$$

Lie homomorfizmi varsa (F, i) çiftine X üzerinde serbest Lie cebiri, X kümesine F nin serbest üreteç kümesi ve X in kardinalitesine F nin rankı denir. F nin rankını $rank F$ ile göstereceğiz. $\alpha = \eta i$ olduğundan aşağıdaki diagram değişmelidir.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & F \\ \alpha \downarrow & \searrow \eta & \\ B & & \end{array}$$

Tanım 2.2 n pozitif tamsayıları için X_n kümelerini aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$\begin{aligned} X_1 &= X \\ X_n &= \bigcup_{p=1}^{n-1} (X_p \times X_{n-p}) \end{aligned}$$

olarak tanımlayalım.

$$M(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

olsun. Her $a, b \in M(X)$ için $a \in X_p$, $b \in X_q$ ve $(a, b) \in X_p \times X_q$ olacak şekilde p, q sayıları vardır. $n = p + q$ olsun. O zaman $(a, b) \in X_p \times X_{n-p}$ olur. (a, b) nin $X_p \times X_{n-p} \rightarrow X_n$ kanonik injeksiyonu altındaki görüntüsünü (ab) ile gösterelim. Böylece her $a, b \in M(X)$ için (ab) çarpımını tanımlarız. $a \in X_p$ olacak şekildeki p tamsayısına a nın uzunluğu denir ve $l(a)$ ile gösterilir.

$$l(ab) = l(a) + l(b)$$

dir. Uzunluğu l olan elemanlar X in elemanlarıdır. Uzunluğu ≥ 2 olan elemanlar için,

$$c = (ab)$$

yazarız öyle ki a ve b nin uzunluğu c nin uzunluğundan daha küçüktür.

$M^n(X)$, $M(X)$ de uzunluğu n olan elemanlar olmak üzere $M(X)$ kümesi, bu küme üzerindeki çarpma ve uzunluk fonksiyonları kullanılarak X üzerindeki Hall kümesi aşağıdaki gibi kurulur.

Tanım 2.3 Bir $H \subseteq M(X)$ Hall kümesi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

- i) $H_1 = X \subseteq H$ ve H_1 e keyfi bir sıralama verilmiştir.
- ii) $H_2 = H \cap M^2(X)$, $x, y \in X$ ve $x > y$ olacak şekildeki (xy) elemanlarını içerir.
- iii) $H_1, \dots, H_{n-1}$ tanımlanmış ve uzunlukları koruyan bir sıralama verilmiş olsun.

O zaman;

$$H \cap M^n(X) = \left\{ ((ab)c) : a, b, c, ab \in \bigcup_{k=1}^{n-1} (H \cap M^k(X)), 1 \leq k \leq n-1, a > b \leq c, ab > c \right\}$$

ve

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} (H \cap M^n(X))$$

olsun. Kısıklık olması bakımından $H_n = H \cap M^n(X)$ dersek,

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$$

olup H ye X üzerinde bir Hall kümesi denir.

İspatını (Bourbaki, 1975) de bulabileceğimiz aşağıdaki teorem serbest Lie cebirlerinin bazını belirler.

Teorem 2.4 F bir X kümesi üzerinde serbest Lie cebiri olsun. X kümesi üzerinde kurulan Hall kümesi F nin bir bazıdır. Bu baza Hall bazı denir.

Çalışmamızda $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ tarafından üretilen serbest Lie cebirini F ile göstereceğiz. X kümesi tarafından üretilen bir A birleşmeli cebirinin üzerindeki bilinen l uzunluk fonksiyonunu düşüneceğiz. Verilen bir X kümesi üzerinde farklı Hall kümeleri tanımlanabilir. Herbiri kendisine verilen sıralama ile belirlenmiştir. Buna göre Hall kümelerini daha açık bir şekilde yazalım.

$$H_1 = X,$$

$$H_2 = \{[ab] \mid b < a, a, b \in X \text{ ve } l([ab]) = 2\}$$

ve

$$H_m = \{[[ab]c] \mid b < a, b \leq c, c < [ab], a, b, c, ab \in \cup H_i \text{ ve } l([[ab]c]) = m\}$$

olsun. Buradaki H_m , m uzunluklu elemanların kümesidir ve H_m nin gerdiği uzaya m -yinci dereceden homojen elemanların uzayı denir.

Tanım 2.5 I bir indis kümesi ve $Z = \{f_i : i \in I\}$, F nin herhangi bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki Φ dönüşümüne Z -kümesinin bir t dönüşümü denir.

$$\begin{aligned} \Phi: f_{i_0} &\rightarrow af_{i_0} + g(f_{i_1}, \dots, f_{i_p}), i_0 \in I, \\ f_i &\rightarrow f_i, i \in I \setminus \{i_0\}. \end{aligned}$$

Burada $a \in K \setminus \{0\}$ ve $g(f_{i_1}, \dots, f_{i_p}) \in Z \setminus \{f_{i_0}\}$ kümesinin elemanlarının bir Lie polinomudur. Eğer $Z = \{f_i : i \in I\}$ kümesi F nin bir B alt cebirinin serbest üreteç kümesi ise Z nin t -dönüşümüne B cebirinin bir otomorfizmi karşılık gelir. Bu otomorfizme t -otomorfizm denir.

Şimdi f nin sonlu ranklı olması durumunda herhangi bir otomorfizmin sonlu adımda elde edilebileceğini gösteren teoremi ifade edelim.

Teorem 2.6 F sonlu bir X kümesi tarafından üretilen serbest Lie cebiri olsun. F nin her otomorfizmi, X kümesine ardışık t -dönüşümlerinin uygulanmasıyla elde edilir.

F nin tüm otomorfizmlerinin grubunu $\text{Aut} F$ ile göstereceğiz.

Teoremin ispatı (Cohn, 1964) de yer almaktadır.

F nin bir otomorfizminin bir serbest üreteç kümesini yine bir serbest üreteç kümesine dönüştürdüğü ve herhangi iki serbest üreteç kümesi arasında daima bir otomorfizmin varlığı yine Cohn tarafından gösterilmiştir (Cohn, 1964).

Tanım 2.7 L bir Lie cebiri olsun.

$$L^1 = L, L^2 = [L, L], \dots, L^{n+1} = [L^n, L]$$

olmak üzere

$$L \supseteq L^2 \supseteq \dots \supseteq L^n \supseteq \dots$$

şeklindeki seriye L nin alt merkezi serisi denir.

Tanım 2.8 L , bir X kümesi tarafından üretilen Lie cebiri olsun. Eğer bir n pozitif tamsayısı için $L \cong F/F^n$ olacak şekilde X üzerinde bir F serbest Lie cebiri varsa L ye serbest nilpotent Lie cebiri denir.

Tanım 2.9 F , X üzerinde serbest Lie cebiri ve $\{n_1, \dots, n_k\}$ pozitif tamsayıların bir dizisi olsun. F nin Polisentral serisi

$$F \supseteq F^{n_1} \supseteq F^{n_1, n_2} \supseteq \dots \supseteq F^{n_1, n_2, \dots, n_i, n_{i+1}} \supseteq \dots$$

şeklinde bir idealler zinciri olup aşağıdaki gibi tanımlanır:

F^{n_1} , F nin alt merkezi serisinin n_1 —inci terimidir.

$F^{n_1, n_2} = (F^{n_1})^{n_2}$, F^{n_1} nin alt merkezi serisinin n_2 -inci terimidir.

$\vdots$

$F^{n_1, n_2, \dots, n_i, n_{i+1}} = (F^{n_1, n_2, \dots, n_i})^{n_{i+1}}$, $F^{n_1, n_2, \dots, n_i}$ nin alt merkezi serisinin $n_i + 1$ -inci

terimidir.

Tanım 2.10 L , bir X kümesi tarafından üretilen Lie cebiri olsun. Eğer X üzerinde $L \cong F/F^{n_1, n_2, \dots, n_k}$ olacak şekilde bir F serbest Lie cebiri varsa L ye $\{n_1, \dots, n_k\}$ dizisine göre serbest polinilpotent Lie cebiri denir.

Eğer $F^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \{0\}$ ve n_i lerin hiçbiri bu eşitlik sağlanacak şekilde daha küçük pozitif tamsayılarla değiştirilemiyorsa F ye $\{n_1, \dots, n_k\}$ dizisine göre polinilpotent Lie cebiri denir. $L = F / F^{n_1, n_2, \dots, n_k}$ olacak şekilde X üzerinde bir serbest F Lie cebiri varsa L ye $\{n_1, \dots, n_k\}$ dizisine göre serbest polinilpotent Lie cebiri denir.

Eğer $L \cong F / F^{2,2}$ ise L ye serbest metabelyen Lie cebiri denir. Tezin bundan sonraki kısmında $F^2 = F'$ ve $F^{2,2} = F''$ ile gösterilecektir.

Şimdi de Fox türevlerini tanımlayalım.

Tanım 2.11 A, X kümesi tarafından üretilen serbest birleşmeli cebir olsun. $\varepsilon : A \rightarrow K$, $1 \leq i \leq n$ için $\varepsilon(x_i) = 0$ olacak şekilde tanımlanan homomorfizme genişletme homomorfizmi denir. Bu homomorfizmin çekirdeği, bazı X olan bir serbest sol A -modüldür. Bu modülü $\triangle$ ile gösterelim. Her $u \in \triangle$ elemanı $u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} x_i$ formunda tek bir şekilde yazılabilir. u nun $\{x_1, \dots, x_n\}$ bazına göre koordinatları olan $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ elemanları Fox türevleri olup bu türevler aşağıdaki gibi tanımlanır.

1. $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$ (Kronecker delta),
2. Her $u, v \in A$ ve $\alpha, \beta \in K$ için $\frac{\partial(\alpha u + \beta v)}{\partial x_i} = \alpha \frac{\partial u}{\partial x_i} + \beta \frac{\partial v}{\partial x_i}$,
3. Her $u, v \in A$ için $\frac{\partial(uv)}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} \varepsilon(v) + u \frac{\partial v}{\partial x_i}$,

koşullarını sağlayan $\frac{\partial}{\partial x_i} : A \rightarrow A$ ($1 \leq i \leq n$) dönüşümleri sol Fox türevleri olarak adlandırılır.

Aşağıdaki koşulları sağlayan $\frac{\partial}{\partial x_i} : A \rightarrow A$ ($1 \leq i \leq n$) dönüşümlerine de sağ fox türevleri denir.

1. $\frac{x_i \partial}{\partial x_j} = \delta_{ij}$ (Kronecker delta),
2. Her $u, v \in A$ ve $\alpha, \beta \in K$ için $\frac{(\alpha u + \beta v) \partial}{\partial x_i} = \alpha \frac{u \partial}{\partial x_i} + \beta \frac{v \partial}{\partial x_i}$,
3. Her $u, v \in A$ için $\frac{(uv) \partial}{\partial x_i} = \varepsilon(u) \frac{v \partial}{\partial x_i} + \frac{u \partial}{\partial x_i} v$.

Fox türevleri ile ilgili daha ayrıntılı bilgi (Fox, 1953) te bulunmaktadır.

Her $x, y \in A$ için $[x, y] = xy - yx$ olsun. A nın bu elemanına x ile y nin komütatörü denir. $A, [,]$ çarpımı ile bir Lie cebiri olup bu cebiri $[A]$ ile gösterelim.

Tanım 2.12 Aşağıdaki koşulların sağlanması durumunda birim elemanlı birleşmeli $U(F)$ cebirine F nin evrensel enveloping cebiri denir.

1. F den $[U(F)]$ ye kanonik homomorfizm denilen bir $\gamma : F \rightarrow [U(F)]$ homomorfizmi vardır.
2. K cismi üzerindeki birim elemanlı her B birleşmeli cebiri ve her $\phi : F \rightarrow [B]$ homomorfizmi için $\Psi\gamma = \phi$ olacak şekilde bir tek $\Psi : [U(F)] \rightarrow [B]$ homomorfizmi vardır.

Tanım 2.13 $S = \{s_1, \dots, s_n\}$, $U(F)$ nin bir alt kümesi olsun. Eğer $f(s_1, \dots, s_n) = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir bağıntı varsa S ye bağımlı küme aksi halde bağımsız küme denir. S nin bağımsız olması durumunda bunu $U(F)$ -bağımsız diyerek belirteceğiz.

R, F serbest Lie cebirinin bir ideali olsun. $U(F)$ de R tarafından üretilen sol ideali Δ_R ile göstereceğiz. Δ_R nin $\varepsilon_R : U(F) \rightarrow U(F/R)$ doğal homomorfizminin çekirdeği olduğu açıktır.

F, X kümesi tarafından üretilen serbest Lie cebiri olsun. Serbest Lie cebirleri ve serbest birleşmeli cebirlerin evrensel özelliği nedeniyle X tarafından üretilen serbest birleşmeli cebir ile F nin evrensel enveloping cebiri aynıdır.

Tanım 2.14 F, X kümesi tarafından üretilen serbest Lie cebiri ve $\Phi : F \rightarrow F$ bir endomorfizm ise Φ nin $U(F)$ üzerindeki Jacobian matrisi

$$J_\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi(x_1)}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi(x_1)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \Phi(x_1)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi(x_n)}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi(x_n)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \Phi(x_n)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanır.

İspatlarımızın birçoğunda aşağıdaki teknik önermelerden yararlanacağız.

Önerme 2.15 $J, U(F)$ nin bir ideali ve $u \in \Delta$ olsun. O zaman $u \in J\Delta$ olması için gerek ve yeter koşul $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in J$, $(1 \leq i \leq n)$ olmasıdır.

İspat: $u \in J\Delta$ olsun. $v \in J$, $w \in \Delta$ olmak üzere $u = vw$ şeklindedir. Diğer taraftan $w \in \Delta$ olduğundan $w = \sum_{i=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_i} x_i$ şeklinde tek türlü yazılabilir. Böylece,

$$u = vw = \sum_i v \frac{\partial w}{\partial x_i} x_i = v \frac{\partial w}{\partial x_1} x_1 + \dots + v \frac{\partial w}{\partial x_n} x_n$$

şeklinde olup buradan,

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \sum \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \frac{\partial w}{\partial x_i} x_i \right) = v \frac{\partial w}{\partial x_i}$$

dir. Burada $v \in J$ olup J bir ideal olduğundan $v \frac{\partial w}{\partial x_i} \in J$ dir.

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = v \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = v \frac{\partial w}{\partial x_2}$$

olup buradan $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in J$ elde edilir. İspatın diğer yönü için $u \in \Delta$ olmak üzere $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in J$ olsun. $u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} x_i$ şeklinde yazıldığında $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in J$ ve $x_i \in \Delta$ olup buradan da $u \in J\Delta$ sonucu elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 2.16 R, F nin bir ideali ve $u \in F$ olsun. $u \in \Delta_R \Delta$ olması için gerek ve yeter koşul $u \in R'$ olmasıdır.

İspat: $u \in \Delta_R \Delta$ olsun. Bu durumda $u = vw$ olacak şekilde $v \in \Delta_R$ ve $w \in \Delta$ vardır. Diğer taraftan $w \in \Delta$ olduğundan $w = \sum_{i=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_i} x_i$ şeklinde tek türlü yazılabilir. Böylece,

$$u = vw = \sum_i v \frac{\partial w}{\partial x_i} x_i = v \frac{\partial w}{\partial x_1} x_1 + \dots + v \frac{\partial w}{\partial x_n} x_n$$

olup $\frac{\partial u}{\partial x_k} = v \frac{\partial w}{\partial x_k} \in \Delta_R$ elde edilir. Buradan $\frac{\partial u}{\partial x_k} x_k \in \Delta_R$ olduğu açıktır. $u = \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} x_k$ olarak yazılabileceğinden $u \in \Delta_R$ olduğu görülür. Şimdi Yunus (1984) tarafından ispatlanan

$$F \cap \Delta_R \Delta^{m-1} = \sum [\dots [R^{i_1}, R^{i_2}] \dots, R^{i_k}] , 1 \leq k \leq m, i_k > 1$$

eşitliğini $m = 1$ durumu için düzenlersek

$$F \cap \Delta_R = R^{i_1} \subset R'$$

olduğu görülür. $u \in F$ ve $u \in \Delta_R$ olduğundan $u \in R'$ elde edilir.

Şimdi tersine $u \in R'$ olduğunu kabul edelim. $u_1, u_2 \in R$ olmak üzere $u = [u_1, u_2]$ şeklindedir. $U(F)$ de $u = u_1u_2 - u_2u_1$ dir. $u_1 \in R$ ise $u_1 \in \Delta_R$ ve $u_2 \in R \subset \Delta$ olup $u_1u_2 \in \Delta_R \Delta$ dır. Benzer şekilde $u_2 \in R$ ise $u_2 \in \Delta_R$ ve $u_1 \in R \subset \Delta$ olup $u_2u_1 \in \Delta_R \Delta$ dır. O halde $u = u_1u_2 - u_2u_1 \in \Delta_R \Delta$ olduğu görülür.

Önerme 2.17 R, F nin bir ideali olmak üzere $r \in R/R', u \in U(F/R)$ olsun. O zaman

$$\frac{\partial(u.r)}{\partial x_i} = u \frac{\partial r}{\partial x_i} \pmod{\Delta_R}$$

dir.

İspat: $r \in R/R', u \in U(F/R)$ ise sol Fox türevinin tanımından

$$\frac{\partial(u.r)}{\partial x_i} = \frac{\partial(u)}{\partial x_i} \varepsilon(r) + u \cdot \frac{\partial(r)}{\partial x_i}$$

elde edilir. $r \in R/R'$ olduğu için $\varepsilon(r) = 0$ olup yukarıdaki eşitlikten

$$\frac{\partial(u.r)}{\partial x_i} \equiv u \cdot \frac{\partial(r)}{\partial x_i} \pmod{\Delta_R}$$

olur.

Şimdi ispatlarımızda kullandığımız bir modül yapısından bahsedeceğiz.

R, F nin bir ideali olmak üzere F/R' nin R/R' alt cebiri sol $U(F/R)$ –modül yapısıyla donatılmıştır. $U(F/R)$ nin bir $x_1 \dots x_m$ monomialinin bir $g \in R/R'$ elemanı üzerindeki etkisi

$$[x_1 [\dots [x_m, g]] \dots]$$

ile tanımlanır. $g \in R/R'$ ve $u \in U(F/R)$ için u nun g üzerindeki modül etkisini $u \cdot g$ ile göstereceğiz.

3. SERBEST METABELYEN LİE CEBİRLERİNİN OTOMORFİZMLERİNİN SABİT NOKTALARI İÇİN ALGORİTMA

Bu bölümde rankı en az iki olan sonlu üreteçli serbest metabelyen Lie cebirlerinin IA -endomorfizmlerinin bazı koşullar altında aşıkâr olmayan sabit noktalarının olduğunu gösterdik ve sabit noktaları bulmak için bir algoritma geliştirdik.

F ile K cismi üzerinde $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $n \geq 2$ tarafından üretilen serbest Lie cebirini ve $L = F/F''$ ile serbest metabelyen Lie cebirini göstereceğiz. F serbest Lie cebirinin ve L serbest metabelyen Lie cebirinin elemanlarını aynı notasyonla göstereceğiz. $u \in F$ ve $u \in U(F)$ iken $\bar{u}$ ile u elemanının sırasıyla F/F' serbest abelyen Lie cebirindeki ve $U(F/F')$ cebirindeki görüntüsünü göstereceğiz.

Tanım 3.1 Φ , F nin herhangi bir endomorfizmi olsun. Bir $u \in F$ için $\Phi(u) = u$ ise u elemanına Φ nin sabit noktası denir. Φ endomorfizmi için $\Phi(0) = 0$ olduğundan sıfır elemanına aşıkâr sabit nokta denir. $\{u \in F / \Phi(u) = u\}$ kümesine Φ nin bir sabit noktalar kümesi denir. Bu küme $Fix\Phi$ ile gösterilir. Yani;

$$Fix\Phi = \{u \in F / \Phi(u) = u\}$$

dir.

Tanım 3.2 F serbest Lie cebirinin

$$\Phi(x_i) = x_i + f_i, \quad f_i \in F', \quad 1 \leq i \leq n,$$

şeklinde tanımlanan endomorfizmine bir IA -endomorfizm denir.

Şimdi, Jacobian matrisinin aşağıdaki parçalanışını düşünelim.

φ , L nin aşağıdaki şekilde tanımlanmış olan bir IA -endomorfizmi olsun

$$\varphi : x_i \rightarrow x_i + u_i, \quad u_i \in F', \quad 1 \leq i \leq n.$$

φ nin Jacobian matrisi, I birim matris ve

$$D_\varphi(u_1, \dots, u_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$J_\varphi = I + D_\varphi(u_1, \dots, u_n),$$

olarak yazılabilir. $D_\varphi(u_1, \dots, u_n)$ matrisinin $U(F/F')$ abelyen cebiri üzerindeki görüntüsünü $\overline{D}_\varphi(u_1, \dots, u_n)$ ile göstereceğiz. $U(F/F')$, polinom cebirine izomorf olup değişmeli bir halkadır. Dolayısıyla, $U(F/F')$ üzerindeki bir A matrisinin rankı, A nın $U(F/F')$ üzerindeki maksimal bağımsız satırların sayısıdır.

Önerme 3.3 φ , L nin bir IA -endomorfizmi olmak üzere

$$\varphi : x_i \rightarrow x_i + u_i, \quad u_i \in F', \quad 1 \leq i \leq n,$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\overline{D}_\varphi(u_1, \dots, u_n)$ matrisinin kolonları $U(F/F')$ üzerinde cebirsel bağımlıdır.

İspat: $\varphi : L \rightarrow L$ endomorfizmi $\varphi : x_i \rightarrow x_i + u_i, \quad u_i \in F' \quad (1 \leq i \leq n)$ olarak tanımlansın. Şimdi, $D_\varphi(u_1, \dots, u_n)$ matrisinin $U(F/F')$ deki görüntüsü olan $\overline{D}_\varphi(u_1, \dots, u_n)$ matrisini düşünelim. Bu durumda aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} \overline{D}_\varphi(u_1, \dots, u_n) \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \overline{\frac{\partial u_1}{\partial x_1}} & \cdots & \overline{\frac{\partial u_1}{\partial x_n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\frac{\partial u_n}{\partial x_1}} & \cdots & \overline{\frac{\partial u_n}{\partial x_n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \overline{\frac{\partial u_1}{\partial x_i}} \cdot \overline{x_i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \overline{\frac{\partial u_n}{\partial x_i}} \cdot \overline{x_i} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\sum_{i=1}^n \overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_i}} \cdot \overline{x_i} = \overline{\sum_{i=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \cdot x_i} = \overline{u_j}$ olup $u_j \in F'$ olduğu için $U(F/F')$ de $\overline{u_j} = 0 \quad (1 \leq j \leq n)$ dır. Bu durumda $U(F/F')$ de aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\overline{D}_\varphi(u_1, \dots, u_n) \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dolayısıyla, $U(F/F')$ de $\overline{D}_\varphi(u_1, \dots, u_n)$ matrisinin kolonları bağımlıdır.

Teorem 3.4 L nin bir φ IA-endomorfizmi

$$\varphi : x_i \rightarrow x_i + u_i, \quad u_i \in L', \quad (1 \leq i \leq n)$$

olarak tanımlansın. Eğer $\text{rank} \bar{D}_\varphi(u_1, \dots, u_n) \leq n - 2$ ise φ nin L' de aşıkâr olmayan sabit noktası vardır.

İspat: $\bar{f}$ ile $f \in F$ elemanın F/F' deki görüntüsünü gösterelim. $\varphi : L \rightarrow L$,

$$\varphi : x_i \rightarrow x_i + u_i, \quad u_i \in L', \quad 1 \leq i \leq n,$$

olarak tanımlanan endomorfizm için $\text{rank} \bar{D}_\varphi(u_1, \dots, u_n) \leq n - 2$ ise $\bar{D}_\varphi(u_1, \dots, u_n)$ matrisinin satırları $U(F/F')$ enveloping cebiri üzerinde cebirsel bağımlıdır.

$$\bar{D}_\varphi(u_1, \dots, u_n) = \begin{pmatrix} \overline{\frac{\partial u_1}{\partial x_1}} & \dots & \overline{\frac{\partial u_1}{\partial x_n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\frac{\partial u_n}{\partial x_1}} & \dots & \overline{\frac{\partial u_n}{\partial x_n}} \end{pmatrix} \quad \text{olmak üzere satırlar cebirsel bağımlı}$$

olduğundan

$$\sum_{i=1}^n a_i \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.1)$$

hepsi sıfır olmayan $a_s \in U(F/F')$ vardır. Bu durumda (3.1) eşitliğinden

$$\overline{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^n a_i u_i \right)} = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.2)$$

elde edilir. Önerme 2.15 ve Önerme 2.16 yı kullanarak (3.2) nolu eşitlikten

$$\sum_{i=1}^n a_i u_i = 0$$

bağıntısı elde edilir. $\bar{D}_\varphi(u_1, \dots, u_n)$ matrisinin $U(F/F')$ de L nin $\varphi^* : x_i \rightarrow u_i$, $i = 1, \dots, n$ olarak tanımlanan endomorfizminin Jacobian matrisi olduğu açık, yani; $\overline{J_{\varphi^*}} = \bar{D}_\varphi(u_1, \dots, u_n)$ ve $\text{rank} \overline{J_{\varphi^*}} = k \leq n - 2$ olduğundan $U(F/F')$ de $\{u_1, \dots, u_n\}$ kümesinin maksimal bağımsız alt kümesinde k tane eleman vardır. Bu nedenle $u_1, \dots, u_k$ elemanları $U(F/F')$ –modül olarak L' nin bir serbest alt modülünü üretir. Bu sebeple $j \geq k + 1$ için aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz

$$a_j u_j = \sum_{i=1}^k b_{ji} u_i, \quad b_{ji} \in U(F/F'). \quad (3.3)$$

$f \in L'$ aşağıdaki formda bir eleman olsun.

$$f = v_1 [x_1, x_2] + v_2 [x_2, x_3] + \cdots + v_{n-1} [x_{n-1}, x_n]$$

burada $v_i \in U(F/F')$, $i = 1, \dots, n-1$. f elemanının belirli v_i elemanları için φ endomorfizminin sabit noktası olduğunu göstereceğiz.

$\varphi(f) = f$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$v_1 [x_1, x_2] + \cdots + v_{n-1} [x_{n-1}, x_n] = v_1 [x_1 + u_1, x_2 + u_2] + \cdots + v_{n-1} [x_{n-1} + u_{n-1}, x_n + u_n]$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten

$$v_1 ([x_1, u_2] + [u_1, x_2]) + \cdots + v_{n-1} ([x_{n-1}, u_n] + [u_{n-1}, x_n]) = 0 \quad (3.4)$$

elde edilir. $j \geq k+1$ için a_j , (3.3) deki gibi olmak üzere (3.4) eşitliğinin her iki tarafını a_j ile çarpalım. Elde edilen eşitlikteki $a_j u_j$ elemanlarının yerine $\sum_{i=1}^k b_{ji} u_i$ yazalım. Bu durumda aşağıdaki formda bir bağıntı elde edilir

$$w_1 u_1 + \cdots + w_k u_k = 0, \quad (3.5)$$

burada w_i ler $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ elemanlarının lineer kombinasyonudur. $u_1, \dots, u_k$ elemanları serbest bir $U(F/F')$ alt modül ürettiği için (3.5) bağıntısından bilinmeyenler $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ olmak üzere

$$w_j = 0, \quad 1 \leq j \leq k \quad (3.6)$$

denklem sistemi elde edilir. $k \leq n-2$ olduğu için bu denklem sisteminin $U(F/F')$ de aşık olmaya bir $(z_1, \dots, z_{n-1})$ çözümü vardır. Dolayısıyla,

$$f = z_1 [x_1, x_2] + z_2 [x_2, x_3] + \cdots + z_{n-1} [x_{n-1}, x_n]$$

elemanı φ endomorfizminin L' deki sabit noktasıdır.

Şimdi $\text{rank } \overline{D}_\varphi(u_1, \dots, u_n) = n-1$ olması durumunda bir IA -endomorfizminin sabit noktalarının olmayabileceğini göstereceğiz.

L' nin $a_k \in U(F/F')$, $(1 \leq k \leq n-1)$ olmak üzere

$$g = a_1 [x_1, x_2] + a_2 [x_2, x_3] + \cdots + a_{n-1} [x_{n-1}, x_n],$$

formundaki bir elemanını düşünelim.

Önerme 3.5 Her $h \in L'$ için $zh = g$ olacak şekilde bir $z \in U(F/F')$ elemanı vardır.

İspat: L' nün L nin ideali olarak $[x_i, x_j]$, $1 \leq i < j \leq n$, elemanları tarafından üretildiği ve L' nin serbest $U(F/F')$ -modül olduğu bilinmektedir. Ayrıca, $[x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ elemanları $U(F/F')$ -modül olarak L' nin rankı $n-1$ olan serbest $U(F/F')$ alt modülünü üretir. Diğer taraftan L' modülünün rankı n olan bir alt modülü yoktur ve $[x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ elemanları L' nin maksimal $U(F/F')$ bağımsız olduğu için $b_{k,l}, c_j \in U(F/F')$ olmak üzere herhangi bir k, l çifti için

$$b_{k,l} [x_k, x_l] = c_1 [x_1, x_2] + c_2 [x_2, x_3] + \dots + c_{n-1} [x_{n-1}, x_n] \quad (3.7)$$

elde edilir. Bu sebeple (3.7) formundaki elemanların herhangi bir k lineer kombinasyonu

$$a_1 [x_1, x_2] + a_2 [x_2, x_3] + \dots + a_{n-1} [x_{n-1}, x_n], \quad a_k \in U(F/F')$$

formundadır. Dolayısıyla ispat biter.

Aşağıdaki önerme L' de sıfırdan farklı sabit noktası olmayan bir endomorfizmin varlığını gösterir.

Önerme 3.6 $n \geq 3$ ve φ, L nin aşağıdaki şekilde tanımlanmış olan endomorfizmi olsun

$$\begin{aligned} \varphi: x_i &\rightarrow x_i + u_i, & 1 \leq i \leq n-2, \\ x_{n-1} &\rightarrow x_{n-1} + u, \\ x_n &\rightarrow x_n + u, \end{aligned}$$

öyle ki; $u_i, u \in L'$ ve u_i, u ($1 \leq i \leq n-2$) elemanları $U(F/F')$ -bağımsızdır. Bu durumda φ nin L' de aşıkâr olmayan sabit noktası yoktur.

İspat: Önerme 3.5 den herhangi bir $f \in L'$ elemanı için

$$zf = v_1 [x_1, x_2] + \dots + v_{n-1} [x_{n-1}, x_n], \quad v_i \in U(F/F')$$

olacak şekilde $z \in U(F/F')$ vardır. $\varphi(f) = f$ olduğunu varsayalım. Bu eşitliğin her iki tarafını z ile çarpalım. Bu durumda

$$v_1 (x_1 u_2 + u_1 x_2) + \dots + v_{n-2} (x_{n-2} u + u_{n-2} x_{n-1}) + v_{n-1} (x_{n-1} u + u x_n) = 0$$

elde ederiz. $u, u_1, \dots, u_{n-2}$ elemanları bağımsız olduğundan $U(F/F')$ de

$$\begin{aligned} -v_1 x_2 &= 0, \\ v_j x_j - v_{j+1} x_{j+2} &= 0, \quad j = 1, \dots, n-3, \\ v_{n-2} x_{n-2} + v_{n-1} (x_{n-1} - x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

denklem sistemi elde edilir. $U(F/F')$ tamlik bölgesi olduğundan $v_1, \dots, v_{n-1}$ elemanları sıfır olur. Dolayısıyla, (3.8) sisteminin sıfırdan farklı çözümü yoktur.

Şimdi yegane sabit noktası sıfır olan bir endomorfizmin varlığını gösterelim.

Önerme 3.7 M , serbest üreteç kümesi $\{x_1, x_2\}$ olan serbest metabelyen Lie cebiri ve φ, M nin

$$\begin{aligned} \varphi: \quad x_1 &\rightarrow x_1 + [x_1, u], \\ x_2 &\rightarrow x_2 + u, \quad u \in M' \end{aligned}$$

olarak tanımlanan bir endomorfizmi olsun. Bu durumda φ nin aşıkâr olmayan sabit noktası yoktur.

İspat: Önce φ nin M' de aşıkâr olmayan sabit noktasının olmadığını göstereceğiz. Bir $h \in M'$ için $\varphi(h) = h$ olduğunu varsayalım. Önerme 3.5 den $h = w[x_1, x_2]$ olacak şekilde $w \in U(F/F')$ vardır. Bu durumda

$$w[x_1, x_2] = w[x_1 + [x_1, u], x_2 + u]$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten

$$w(x_1 - x_2 x_1)u = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla, $U(F/F')$ de $w(x_1 - x_2 x_1) = 0$ olur. Bu durum ancak $w = 0$ iken mümkün olduğundan $h = 0$ olur.

Şimdi φ nin M' nin dışında da sabit noktaya sahip olmadığını göstereceğiz. m , M nin herhangi bir elemanı olsun. Bu durumda $m = ax_1 + bx_2 + w[x_1, x_2]$, $w \in U(F/F')$ ve $a, b \in K$. $\varphi(m) = m$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$ax_1 + bx_2 + w[x_1, x_2] = a(x_1 + [x_1, u]) + b(x_2 + u) + w[x_1 + [x_1, u], x_2 + u]$$

elde edilir. Bu eşitlikten

$$(ax_1 + b + w(x_1 - x_2x_1))u = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $U(F/F')$ de

$$ax_1 + b + w(x_1 - x_2x_1) = 0 \quad (3.9)$$

eşitliği elde edilir. Bu durum ancak $a = b = w = 0$ iken mümkün oldu için $m = 0$ olur. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Şimdi L nin IA endomorfizmlerinin bazı koşullar altında aşık ar olmayan sabit noktalarının olduğunu ispatlayacağız. Öncelikle kullanılacak olan bazı bilgileri vereceğiz. φ, L nin $\varphi(x_i) = y_i = x_i + u_i, u_i \in L', 1 \leq i \leq n$, şeklinde tanımlanan IA -endomorfizmi olsun. Eğer $\text{rank} \bar{D}_\varphi(u_1, \dots, u_n) = n - 1$ ise $\{u_1, \dots, u_n\}$ kümesinin maksimal $U(F/F')$ -bağımsız alt kümesinde $n - 1$ tane eleman vardır. $\{u_1, \dots, u_{n-1}\}$ alt kümesinin maksimal bağımsız olduğunu kabul edelim. Bu sebeple $u_1, \dots, u_{n-1}$ elemanları L' nin bir serbest $U(F/F')$ alt modulünü üretirler. Buradan

$$a_n u_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i u_i, a_j \in U(F/F') \quad (3.10)$$

bağıntısı elde edilir.

Önerme 3.8 φ, L nin bir IA -endomorfizmi olmak üzere

$$\varphi(x_i) = x_i + u_i = y_i, u_i \in L', 1 \leq i \leq n,$$

olarak tanımlanmış olsun. Eğer $\text{rank} \bar{D}_\varphi(u_1, \dots, u_n) = n - 1$ ise φ nin L' de aşık ar olmayan sabit noktalarının olması için gerek ve yeter koşul bilinmeyenleri $v_1, \dots, v_{n-1}$ olan

$$-v_1 x_2 a_n + v_{n-1} x_{n-1} a_1 = 0,$$

$$v_i x_i a_n - v_{i+1} x_{i+2} a_n + v_{n-1} x_{n-1} a_{i+1} = 0, 1 \leq i \leq n-2,$$

denkle m sisteminin $U(F/F')$ de aşık ar olmayan çözümünün olmasıdır.

İspat: Herhangi bir $h \in L'$ için $\varphi(h) = h$ olsun. Önerme 3.5 den bazı $v_j \in U(F/F')$ elemanları için

$$zh = v_1 [x_1, x_2] + v_2 [x_2, x_3] + \cdots + v_{n-1} [x_{n-1}, x_n]$$

olacak şekilde $z \in U(F/F')$ vardır. Bu eşitliğe φ uygulandığında

$$\varphi(zh) = v_1 [y_1, y_2] + v_2 [y_2, y_3] + \cdots + v_{n-1} [y_{n-1}, y_n] \quad (3.11)$$

elde edilir. $\varphi(h) = h$ eşitliği soldan z ile çarpıldığında

$$\varphi(zh) = zh = v_1 [x_1, x_2] + v_2 [x_2, x_3] + \cdots + v_{n-1} [x_{n-1}, x_n] \quad (3.12)$$

elde edilir. (3.11) ve (3.12) nolu eşitliklerden

$$v_1 [x_1, x_2] + \cdots + v_{n-1} [x_{n-1}, x_n] = v_1 [y_1, y_2] + \cdots + v_{n-1} [y_{n-1}, y_n] \quad (3.13)$$

elde edilir. (3.13) nolu eşitlikten

$$-v_1 x_2 u_1 + \sum_{i=1}^{n-2} (v_i x_i - v_{i+1} x_{i+2}) u_{i+1} + v_{n-1} x_{n-1} u_n = 0 \quad (3.14)$$

sonucu elde edilir. (3.14) nolu eşitliğin her iki tarafı a_n ile çarpılıp elde edilen eşitlikte $a_n u_n$ yerine $\sum_{i=1}^{n-1} a_i u_i$ yazıldığında bilinmeyenleri $v_1, \dots, v_{n-1}$ olan

$$-v_1 x_2 a_n + v_{n-1} x_{n-1} a_1 = 0, \quad (3.15)$$

$$v_i x_i a_n - v_{i+1} x_{i+2} a_n + v_{n-1} x_{n-1} a_{i+1} = 0, \quad 1 \leq i \leq n-2$$

$n-1$ tane denklem sistemi elde edilir. Dolayısıyla ispat biter. Diğer yönün ispatı açıktır.

Teorem 3.9 L serbest metabelyen Lie cebirinin herhangi bir IA -endomorfizminin aşikar olmayan sabit noktalarını belirleyen bir algoritma vardır.

İspat: φ, L nin $\varphi : x_i \rightarrow x_i + u_i, u_i \in F', 1 \leq i \leq n$, olarak tanımlanan IA -endomorfizmi olsun.

Önce $\overline{D}_\varphi(u_1, \dots, u_n)$ matrisinin *rankı* hesaplanır. Ayrıca, $\overline{D}_\varphi(u_1, \dots, u_n)$ matrisinin satırlarına elemanter dönüşümler uygulanarak serbest sol $U(F/F')$ -modül olan $(U(L))^n$ nin serbest sol $U(F/F')$ alt modülünün bazı elde edilir ve $\overline{D}_\varphi(u_1, \dots, u_n)$ matrisinin *rankı* hesaplanır.

$rank \overline{D}_\varphi(u_1, \dots, u_n)$ için iki durum söz konusudur.

1.Durum: Eğer $\text{rank} \bar{D}_\varphi(u_1, \dots, u_n) \leq n - 2$ ise Teorem 3.4 den aşikar olmayan sabit nokta bulunur.

2.Durum: Eğer $\text{rank} \bar{D}_\varphi(u_1, \dots, u_n) = n - 1$ ise iki durum düşünülecektir.

a) Eğer L' de aşikar olmayan sabit nokta varsa bu eleman aşağıdaki yolla bulunur:

Önerme 3.8 nin ispatında olduğu gibi (3.15) nolu eşitliğine benzer bir denklem sistemi göz önüne alınır. Bu denklem sistemi bilinmeyenleri $v_1, \dots, v_{n-1}$ olan $n - 1$ tane homojen $U(F/F')$ -lineer denklemden oluşur. Denklem sisteminin katsayılar matrisinin satırlarının bağımlılığı kontrol edilir. Eğer satırlar bağımlı ise φ nin L' de aşikar olmayan sabit noktası vardır. Eğer bu satırlar bağımsız ise φ nin L' de aşikar olmayan sabit noktası yoktur. Bu durumda (b) deki adımlar uygulanır.

b) L' nin dışında φ nin aşikar olmayan sabit noktasının olup olmadığını belirlemek için Önerme 3.7 nin ispatındaki gibi bir yol izlenir. Bu durumda Önerme 3.7 nin ispatındaki gibi (3.9) formunda sadece bir tane değil $n - 1$ bilinmeyenli $n - 1$ tane $U(F/F')$ lineer denklemin oluşturduğu bir denklem sistemi elde edilir. $U(F/F')$, polinom cebirine izomorf olduğundan polinom cebirlerindeki algoritmalar kullanılarak bu denklem sistemi çözülebilir. Dolayısıyla ispat biter.

Örnek 3.10 L serbest metabelyen Lie cebiri için $\text{rank} L = 3$ ve Φ , L nin aşağıdaki şekilde tanımlanmış IA -endomorfizmi olsun:

$$\begin{aligned}\Phi: x_1 &\rightarrow x_1 + [x_1, x_2], \\ x_2 &\rightarrow x_2 - [x_1, x_2], \\ x_3 &\rightarrow x_3.\end{aligned}$$

Φ nin aşikar olmayan sabit noktalarını belirlemek için öncelikle $\text{rank} \bar{D}_\varphi([x_1, x_2], [x_1, x_2], 0)$ hesaplanır.

$$\bar{D}_\varphi([x_1, x_2], [x_1, x_2], 0) = \begin{pmatrix} -x_2 & x_1 & 0 \\ x_2 & -x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olup $\text{rank} \bar{D}_\Phi([x_1, x_2], [x_1, x_2], 0) = 1 = 3 - 2$ olup Teorem 3.4 e göre Φ nin L' de aşıkâr olmayan sabit noktası vardır. $\Phi(g) = g$ olacak şekilde

$$g = z_1 [x_1, x_2] + z_2 [x_2, x_3]$$

formundaki $g \in L'$ elemanını belirleyelim. Bunun için $\Phi(g) = g$ eşitliğinden $-z_1(x_1 + x_2) + z_2 x_3 = 0$ elde edilir. Bu eşitlikten faydalanılarak $z_1 = x_3$ ve $z_2 = x_1 + x_2$ seçilebilir. Dolayısıyla $g = x_3 [x_1, x_2] + (x_1 + x_2) [x_2, x_3]$ olarak bulunur.

$g \notin L'$ olması durumunda $\Phi(g) = g$ olacak şekilde $g \in L$ elemanını belirleyelim. Bu durumda g elemanı aşağıdaki formdadır.

$$g = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + z_1 [x_1, x_2] + z_2 [x_2, x_3], z_1, z_2 \in U(F/F') \text{ ve } m_1, m_2, m_3 \in K.$$

$\Phi(g) = g$ olduğunu varsayalım. Bu eşitlikten

$$\begin{aligned} m_1 - m_2 &= 0, \\ -z_1(x_1 + x_2) + z_2 x_3 &= 0 \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Bu durumda $m_1 = m_2$, $z_1 = x_3$ ve $z_2 = x_1 + x_2$ seçilebilir. Dolayısıyla,

$$g = m_1 x_1 + m_1 x_2 + m_3 x_3 + x_3 [x_1, x_2] + (x_1 + x_2) [x_2, x_3]$$

olarak bulunur.

Örnek 3.11 L serbest metabelyen Lie cebiri için $\text{rank} L = 2$ ve Φ , L nin aşağıdaki şekilde tanımlanmış IA —endomorfizmi olsun:

$$\begin{aligned} \Phi: x_1 &\rightarrow x_1 + [x_1, [x_1, x_2]] = y_1, \\ x_2 &\rightarrow x_2 + [x_2, [x_1, x_2]] = y_2. \end{aligned}$$

$\bar{D}_\Phi([x_1, [x_1, x_2]], [x_2, [x_1, x_2]]) = 1 = 2 - 1$ elde edilir. $[y_1, y_2] = [\Phi(x_1), \Phi(x_2)]$ olup bu eşitlikten $\Phi([x_1, x_2]) = [x_1, x_2]$ olup $[x_1, x_2]$, Φ nin bir sabit noktasıdır.

3.1. Sabit Nokta Alt Cebirleri

K bir cisim ve L, K üzerinde X tarafından üretilen serbest metabelyen Lie cebiri olsun. Bu bölümde (Bryant ve Papistas, 2000) daki bazı tanımları kullanacağız. L nin $[u_n, [\dots [u_2, u_1]] \dots]$ şeklindeki bir elemanını $[u_n, \dots, u_2, u_1]$ olarak göstereceğiz.

Tanım 3.12 X in elemanlarının sıfırdan farklı bir Lie çarpımına L nin bir Lie monomiali ve bu çarpımın uzunluğuna monomialin derecesi denir.

Tanım 3.13 L^m , L nin alt merkezi serisinin m -yinci dereceden terimi olmak üzere eğer $\bigcap_{m=1}^{\infty} L^m = \{0\}$ ise L ye residual nilpotent Lie cebiri denir.

$n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere derecesi n olan monomialler tarafından gerilen K -alt uzayını L_n ile göstereceğiz. Dolayısıyla $L = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots$ dir. Bir f elemanının derecesini $\deg f$ ile göstereceğiz. Yani; f elemanının derecesi $f \in L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_n$ olacak şekilde en küçük n değeridir.

Her $m \in \mathbb{Z}^+$ için

$$L^m = L_m \oplus L_{m+1} \oplus \dots$$

dir. Bu durumda L residual nilpotenttir. Bir $x \in X$ için $L_{i,n}$ ile x in içinde görünen ve derecesi i olan bütün Lie monomialleri tarafından gerilen K -alt uzayını göstereceğiz. Buradan, her $n \geq 0$ için

$$L_n = L_{0,n} \oplus L_{1,n} \oplus \dots \oplus L_{n,n}$$

olarak yazabiliriz. $L(x)$ ile $X \setminus \{x\}$ kümesinden en az bir tane eleman içeren bütün Lie monomiallerinin gerdiği alt uzayı gösterelim. Yani,

$$L(x) = L_{0,1} \oplus (L_{0,2} \oplus L_{1,2}) \oplus \dots \oplus (L_{0,n} \oplus \dots \oplus L_{n-1,n}) \oplus \dots$$

olsun. Açıkça görüldüğü gibi her $n \geq 2$ için $L_{n,n} = \{0\}$ ve $L(x) = L_{0,1} \oplus L'$ dir. $q \in \mathbb{R}$ ve $0 \leq q \leq 1$ olsun. $L(x, q)$ ile L nin bütün $L_{i,n}, n \geq 0, i \leq qn$, alt uzayları tarafından gerilen alt uzayı göstereceğiz. Bu durumda $L = L(x, 1)$ ve $L(x) = \bigcup_{0 \leq q < 1} L(x, q)$ olur.

Aşağıdaki Lemma Bryant ve Papistas tarafından ispatlanmış olup bir serbest Lie cebirinin sonlu üreteçli olması için gerekli koşulu vermektedir.

Önerme 3.14 (Bryant ve Papistas, 2000)

- i) Her $0 \leq q \leq 1$ için $L(x, q)$ ve $L(x)$, L nin alt cebiridir,
- ii) S , L nin $S \subseteq L(x)$ olacak şekildeki sonlu üreteçli alt cebiri olsun. Bu durumda bazı $0 \leq q < 1$ olacak şekildeki q lar için $S \subseteq L(x, q)$ olur.

Aşağıdaki sonuç residual nilpotent Lie cebirleri için Bryant ve Papistas (2000) de ispatlanmıştır.

Önerme 3.15 (Bryant ve Papistas, 2000) ϕ , residual nilpotent bir G Lie cebirinin aşikar olmayan IA -endomorfizmi olsun. Bu durumda $Fix\phi + G' \neq G$.

Önerme 3.16 (Bryant ve Papistas, 2000) u ve v sırasıyla L' ve $U(L/L')$ nün sıfırdan farklı elemanları ise $v.u \neq 0$ dır.

Şimdi serbest metabelyen Lie cebirlerinin IA -endomorfizmlerinin sabit nokta alt cebirlerinin sonlu üreteçli olmadığını göstereceğiz.

Teorem 3.17 ϕ , L nin aşikar olmayan IA -endomorfizmi olsun. Eğer $Fix\phi \cap L' \neq \{0\}$ ise $Fix\phi$ sonlu üreteçli değildir.

İspat: L residual nilpotent olduğundan Önerme 3.15 den $Fix\phi + L' \neq L$ ve $L = \langle X \rangle \oplus L'$. Dolayısıyla $Fix\phi \subseteq \langle X \setminus \{x\} \rangle \oplus L' = L(x)$ elde edilir. $Fix\phi$ nin sonlu üreteçli olduğunu varsayalım. Önerme 3.14, (ii) den $Fix\phi \subseteq L(x, q)$ olacak şekilde $0 \leq q \leq 1$ koşulunu sağlayan q gerçel sayısı vardır. $Fix\phi \cap L' \neq \{0\}$ olduğu için $0 \neq g \in Fix\phi \cap L'$ vardır. $deg g = n$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $g = g_2 + \dots + g_n$, $g_i \in L_i$ ($2 \leq i \leq n$) olarak yazılabilir. $j = 2, \dots, n$ için $\phi(g_j) \in L_j$ olduğundan $\phi(g) = g$ eşitliğinden $\phi(g_j) = g_j$ olur. Genelliği bozmaksızın g yerine g_n yazılabilir. $w_{i,n} \in L_{i,n}$ olmak üzere $i = 0, \dots, n$ için $g_n = \sum_{i=0}^n w_{i,n}$ yazalım.

Şimdi L de $h = \underbrace{[x, \dots, x, g_n]}_{m\text{-tane}}$ elemanını düşünelim. $h \notin L(x, q)$ olduğunu varsayalım. $\phi(g_n) = g_n$ olduğu için buradan

$$\phi(h) = [x, \dots, x, \phi(g_n)] = [x, \dots, x, g_n] = h$$

elde edilir. Dolayısıyla $h \in \text{Fix}\phi$ dir. $w_{i,n} \in L_{i,n}$ olmak üzere $i = 1, \dots, n$ için $h = \sum_{i=0}^n [x, \dots, x, w_{i,n}]$ elemanını düşünelim. Buradan $\deg([x, \dots, x, w_{i,n}]) = n + m$ elde edilir. $k \in \mathbb{Z}^+$ sayısını $w_{k,n} \neq 0$ olacak şekilde ve $m \in \mathbb{Z}^+$ sayısını $m > q(n + m)$ olacak şekilde seçelim. Bu durumda Önerme 3.16 dan $[x, \dots, x, w_{i,n}] \neq 0$ ve $h \neq 0$ elde edilir. $m > q(n + m)$ olduğu için $k + m > m > q(n + m)$ ve $h \in \bigoplus_{i > q(n+m)} L_{i,n+m}$ dir. Dolayısıyla $h \notin L(x, q)$ dır. Fakat $h \in \text{Fix}\phi \subseteq L(x, q)$ olup bu çelişki ispatı tamamlar.

Sonuç 3.18 ϕ, L nin aşikar olmayan IA -endomorfizmi olsun. Eğer $\text{Fix}\phi \cap L' \neq \{0\}$ ise $\text{Fix}\phi$ sonlu üreteçli değildir.

İspat: h ve q elemanları Teorem 3.17 daki gibi olsun.

$$\text{Fix}\phi \cap L' \subset \text{Fix}\phi \subseteq L(x) \subseteq L(x, q)$$

olduğu için sonuç açıktır.

4. SERBEST METABELYEN LİE CEBİRLERİNİN SIFIRDAN FARKLI SABİT NOKTASI OLMAYAN ENDOMORFİZMLERİ

Bu bölümde serbest metabelyen Lie cebirlerinin bazı belirli tipteki IA –endomorfizmlerinin aşikar olmayan sabit noktalarının olmadığını göstermek için özel bir yöntem geliştirdik. Bu yöntem Shmelkin'nin Lie cebirleri için ispatladığı gömme kriterine dayanmaktadır.

F , K cismi üzerinde, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ kümesi tarafından üretilen serbest Lie cebiri olsun.

Önerme 4.1 (Neumann, 1967) α , F/F'' nin bir endomorfizmi olmak üzere

$$\alpha : x_i \rightarrow x_i + r_i, \quad r_i \in F'/F'', \quad i = 1, \dots, n,$$

olarak tanımlansın. O zaman her $u \in F/F''$ için

$$\alpha(u) = u + \sum_{i=1}^n r_i \frac{\partial(u)}{\partial x_i}$$

dır.

Tanım 4.2 F nin bir elemanı eğer $j = 1, \dots, m$ için $x_{i_j} \in X$ olmak üzere $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m} - x_{i_2} \dots x_{i_m} x_{i_1}$ formundaki elemanlar tarafından gerilen vektör uzayına aitse bu elemana dengeli denir.

Teorem 4.3 (Bryant ve Drensky, 1993) $t \geq 2$ ve $i = 1, \dots, n$ için f_i ler t -yinci dereceden homojen elemanlar veya $f_i = 0$ olmak üzere F nin bir Ψ endomorfizmi

$$\Psi(x_i) \equiv x_i + f_i \text{ modulo } \Delta^{t+1}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda Ψ bir otomorfizm ise $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$ dengelidir.

Şimdi cebirlerin, geliştireceğimiz yöntem için önemli bir rol oynayan wreath çarpımının tanımını verelim. (Ayrıca (Bahturin, 1987), (Bahturin ve Nabiyevev 1992) ve (Shmelkin ve Syrtsov, 2007) kaynaklarına bakınız.)

Tanım 4.4 V , değişmeli, birleşmeli ve birimli k halkası üzerindeki Lie cebirlerinin sınıfı, A cebiri, V sınıfında serbest üreteç kümesi $\{a_i\}_{i \in I}$ olan serbest k -modül ve B , k üzerindeki herhangi bir Lie cebiri olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa W Lie cebirine A ve B cebirlerinin wreath çarpımı denir.

1. W , A ve B alt cebirleri tarafından üretilen k -Lie cebiridir.
2. W da A tarafından üretilen ideal V sınıfındandır.
3. C , $\varphi(A)$ ve $\psi(B)$ tarafından üretilen herhangi bir Lie cebiri olsun öyle ki C de $\varphi(A)$ tarafından üretilen ideal V sınıfında olmak üzere eğer

$$\varphi : A \rightarrow C$$

ve

$$\psi : B \rightarrow C$$

homomorfizmleri varsa $\varkappa|_A = \varphi$, $\varkappa|_B = \psi$ olacak şekilde bir tek $\varkappa : W \rightarrow C$ homomorfizmi vardır. Burada $\varkappa|_A$ ile X in A ya kısıtlanmış gösterilmiştir.

A nın B ile olan wreath çarpımını $A wr_V B$ ile göstereceğiz.

Tanım 4.5 L_1 ve L_2 iki Lie cebiri olsun. L_1 ile L_2 nin vektör uzayı olarak direkt toplamını düşünelim. Bu toplam üzerinde L_1 ve L_2 deki çarpımların bir genişlemesi olan ve $L_1 \oplus L_2$ yi bir Lie cebiri yapan bir çarpma tanımlayacağız.

$[\cdot, \cdot]_1$, L_1 deki çarpım, $[\cdot, \cdot]_2$, L_2 deki çarpım olsun. $\theta : L_1 \rightarrow Der L_2$ morfizmini düşünelim.

$x_1, y_1 \in L_1$ ve $x_2, y_2 \in L_2$ için

$$[x_1 + x_2, y_1 + y_2] = [x_1, y_1]_1 + \theta(x_1)y_2 - \theta(y_1)x_2 + [x_2, y_2]_2$$

çarpımını tanımlayalım. Bu çarpımla $L = L_1 \oplus L_2$ bir Lie cebiri olup L ye L_1 ile L_2 nin yarı direkt çarpımı denir. Eğer θ nin ne olduğu biliniyorsa yarı direkt çarpım $L_1 \ltimes L_2$ şeklinde gösterilir. Burada $Der L_2$, L_2 nin tüm derivasyonlarının kümesidir.

Önerme 4.6 (Bahturin, 1987) $W = Awr_V B$ ve T, W da A tarafından üretilen ideal olsun. Bu durumda W, B alt cebirinin T ile yarı direkt çarpımıdır.

Bu bölümde V nin değişmeli olması durumunu düşüneceğiz. Bu durumda $U(B)$, B nin evrensel enveloping cebiri olmak üzere W da A tarafından üretilen T ideali, serbest $U(B)$ –modül olur.

R, F nin $B = F/R$ serbest k –modül olacak şekilde bir ideali olsun. $\bar{x}_i = x_i + R^2$ ve $\overline{\bar{x}}_i = x_i + R \in B$ olmak üzere aşağıdaki gömme teoremi A.L.Shmel’kin (bkz. Shmelkin, (1973) ve Bahturin, (1987)) tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 4.7 $\tilde{\Phi} : F/R^2 \rightarrow AwrF/R$ fonksiyonu $\bar{x}_i \rightarrow \overline{\bar{x}}_i + a_i$ olarak tanımlanmış olsun. Bu durumda $\tilde{\Phi}$ bir monomorfizmdir.

Bu bölümde $\bar{x}_i$ ve $\overline{\bar{x}}_i$ yerine x_i yazacağız.

W, A ve B Lie cebirlerinin wreath çarpımı ve T, W da A tarafından üretilen ideal olsun.

$AutW$ grubunun T ve B yi invaryant bırakan elemanlarının oluşturduğu alt grubu $\overline{AutW}$ ile gösterelim. Dolayısıyla $\overline{AutW}$ nın B üzerinde birim etkiye sahip olan ve T nin her a_i elemanını invaryant bırakan $I\overline{AutW}$ normal alt grubu vardır.

Lie cebirleri ile wreath çarpım arasında bir izomorfizm olduğu bilinmektedir. Yani; N ,

$$\left\{ \begin{pmatrix} u & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix} : u \in U(B), t \in T \right\}$$

formundaki matrislerin birleşmeli cebiri ve M aşağıdaki formdaki matrislerin kümesi olsun:

$$\left\{ \begin{pmatrix} b & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix} : b \in B, t \in T \right\}$$

Bu durumda $M, [N]$ nin bir Lie alt cebiridir. Dolayısıyla, wreath çarpım M ye izomorf-tur.

Önerme 4.8 (Bahturin ve Nabiye, 1992) $\tilde{\Phi}$, Teorem 4.7 deki fonksiyon olmak üzere $v : \overline{AutF/R^2} \rightarrow \overline{Aut(AwrF/R)}$ gömme dönüşümü vardır öyle ki $\alpha \in \overline{AutF/R^2}$ için $\tilde{\alpha} = v(\alpha)$ ise $\tilde{\alpha}\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}\alpha$ dır.

Teorem 4.9 $\begin{pmatrix} u & 0 \\ \sum u_i a_i & 0 \end{pmatrix}$ matrisinin $\tilde{\Phi}$ nın görüntüsünde olması için gerek ve yeter koşul $\sum u_i x_i = u$ olmasıdır. Ayrıca, $h \in \text{Im}(\tilde{\Phi})$ ise $h, \begin{pmatrix} u & 0 \\ \sum u_i a_i & 0 \end{pmatrix}$ formundadır.

İspat: İspat, (Shmelkin, 2007) dekine benzer şekilde yapılır.

4.1. Sıfırdan Farklı Sabit Noktası Olmayan Endomorfizmler ve Otomorfizmler

Bu bölümde F/F'' serbest metabelyen Lie cebirindeki bazı IA —otomorfizmlerin sıfır dışında sabit noktalarının olmadığını göstereceğiz.

Teorem 4.10 F/F'' , $\{x_1, x_2\}$ tarafından üretilen serbest metabelyen Lie cebiri olsun. $\alpha : F/F'' \rightarrow F/F''$ endomorfizmi $p, q \in U(F/F')$ olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlanmış olsun

$$\begin{aligned} \alpha : x_1 &\rightarrow x_1 + p[x_1, x_2], \\ x_2 &\rightarrow x_2 + q[x_1, x_2]. \end{aligned}$$

Eğer $px_2 - qx_1 \neq 0$ ve $c \in K$ için $p \neq cq$ ise α nın aşikar olmayan sabit noktası yoktur.

İspat: İspatı wreath çarpımı kullanarak yapacağız. $\alpha(F'/F'') \subset F'/F''$ olduğundan $\tilde{\alpha}$ yı belirlemek için Önerme 4.8 i kullanabiliriz. F' nin ideal olarak $r_{1,2} = [x_1, x_2]$ tarafından üretildiğini biliyoruz. (Bahturin ve Nabiyeve, 1992) de $\tilde{\Phi}(r_{1,2})$ aşağıdaki şekilde belirlenmiştir. $a_1, a_2 \in T$ olmak üzere

$$\tilde{\Phi}(r_{1,2}) = [x_1 + a_1, x_2 + a_2] = x_1 a_2 - x_2 a_1$$

ve

$$\tilde{\Phi}(ur_{1,2}) = u\tilde{\Phi}(r_{1,2}), u \in U(F/F').$$

Buradan

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}\alpha(x_1) &= \tilde{\Phi}(x_1 + p[x_1, x_2]) = x_1 + a_1 + p(x_1 a_2 - x_2 a_1), \\ \tilde{\alpha}\tilde{\Phi}(x_1) &= \tilde{\alpha}(x_1 + a_1) = x_1 + \tilde{\alpha}(a_1) \end{aligned}$$

elde edilir. $\tilde{\alpha}\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}\alpha$ eşitliğinden, $\tilde{\alpha}(a_1) = (1 - px_2)a_1 + px_1a_2$ ve $\tilde{\alpha}(a_2) = -qx_2a_1 + (1 + qx_1)a_2$ olarak bulunur.

F/F'' de sıfırdan farklı bir g elemanı için $\alpha(g) = g$ olduğunu varsayalım. Dolayısıyla, $\tilde{\alpha}\tilde{\Phi}(g) = \tilde{\Phi}(g)$ olur. Bu eşitlikten

$$\begin{aligned} u_1(1 - px_2) + u_2(-qx_2) &= u_1, \\ u_1px_1 + u_2(1 + qx_1) &= u_2 \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Buradan da $u_1p + u_2q = 0$ olur. $l(p) = m, l(q) = n$ olsun. Bu durumda genelliği bozmaksızın ya $m > n$ dir ya da $m = n$ dir. $\bar{g}$, g nin doğal homomorfizm altında $U(F/F')$ deki görüntüsü olmak üzere $\bar{g} = u_1x_1 + u_2x_2$ olduğunu biliyoruz. Bu eşitliği q ile çarparak $q\bar{g} = qu_1x_1 + qu_2x_2$ eşitliği elde edilir. $U(F/F')$ nin polinom cebirine izomorf olması nedeniyle

$$q\bar{g} = u_1qx_1 + u_2qx_2$$

olur. $u_1p + u_2q = 0$ eşitliğinden faydalanarak

$$q\bar{g} = u_1(qx_1 - px_2)$$

elde edilir. Eğer $m > n$ ise $l(q\bar{g}) < l(u_1(qx_1 - px_2))$ olduğu için $\bar{g} = u_1 = 0$ olur. Ayrıca, $u_1x_1 + u_2x_2 = 0$ eşitliğinden $u_2 = 0$ olup $\tilde{\Phi}(g) = 0$ olur.

$\tilde{\Phi}(g) = 0$ olduğundan $\tilde{\alpha}\tilde{\Phi}(g) = \tilde{\Phi}(g) = \tilde{\Phi}\alpha(g) = 0$ olur. Buradan herhangi bir α otomorfizminin sabit noktasının $\tilde{\Phi}$ nın çekirdeğinde olduğunu söyleyebiliriz. $\tilde{\Phi}$ bire bir olduğundan $\alpha(g) = 0 = g$ olur.

Eğer $m = n$ ise $q\bar{g} = u_1(qx_1 - px_2)$ eşitliğinden $u_1 \in K$ elde ederiz. Benzer şekilde $p\bar{g} = u_2(-qx_1 + px_2)$ eşitliğinden $u_2 \in K$ elde ederiz.

$u_1 \neq 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $p = -u_1^{-1}u_2q$ elde edilir. $u_2 = 0$ ise $p = 0$ çelişkisi elde edilir. Eğer $u_2 \neq 0$ ise $p = cq$ çelişkisi elde edilir. Bu durumda $u_1 = 0$ olup $u_1p + u_2q = 0$ eşitliğinden $u_2 = 0$ elde edilir. Dolayısıyla, $\tilde{\Phi}(g) = 0$ olup $g = 0$ dır. Sonuç olarak, α nın aşık olmayan sabit noktası yoktur.

Geliştirdiğimiz bu teknik *rank*n 2 den büyük olması durumunda da uygulanabilir. Bunu aşağıdaki örneklerle inceleyelim.

Önerme 4.11 α , F/F'' serbest metabelyen Lie cebirinin aşağıdaki şekilde tanımlanmış olan endomorfizmi olsun:

$$\begin{aligned}\alpha : x_i &\rightarrow x_i + [x_i, x_n], \quad 1 \leq i \leq n-1, \\ x_n &\rightarrow x_n + [x_1, x_2].\end{aligned}$$

Bu durumda α nın F/F'' de aşıkâr olmayan sabit noktası yoktur.

İspat: Öncelikle, Teorem 4.3 den faydalanarak α nın otomorfizm olmadığını göstereceğiz. Teorem 4.3 de $t = 2$, $U(F/F'')$ ve Δ yerine sırasıyla A_m ve w alalım. Bu durumda

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = (n-1)x_n$$

elde edilir. $(n-1)x_n$ dengeli olmadığından α otomorfizm değildir.

$\alpha(F'/F'') \subset F'/F''$ olduğundan, $\tilde{\alpha}$ yı belirlemek için Önerme 4.8 i kullanabiliriz. Bu durumda, $i = 1, \dots, n$ için $a_i \in T$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}\alpha(x_i) &= \tilde{\Phi}(x_i + [x_i, x_n]) = x_i + a_i + x_i a_n - x_n a_i, \\ \tilde{\alpha}\tilde{\Phi}(x_i) &= \tilde{\alpha}(x_i + a_i) = x_i + \tilde{\alpha}(a_i)\end{aligned}$$

olur. $\tilde{\alpha}\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}\alpha$ eşitliğinden $\tilde{\alpha}(a_i) = a_i + x_i a_n - x_n a_i$, $1 \leq i \leq n-1$, elde edilir. Benzer şekilde $\tilde{\alpha}(a_n) = a_n + x_1 a_2 - x_2 a_1$ olur.

Sıfırdan farklı bir g elemanının α nın sabit noktası olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\tilde{\alpha}\tilde{\Phi}(g) = \tilde{\Phi}(g)$ elde edilir. Bu eşitlikten

$$\sum_{i=1}^{n-1} u_i (a_i + x_i a_n - x_n a_i) + u_n (a_n + x_1 a_2 - x_2 a_1) = \sum u_i a_i.$$

elde ederiz. Buradan aşağıdaki denklem sistemi elde edilir

$$\begin{aligned}u_1 x_n + u_n x_2 &= 0, \\ -u_2 x_n + u_n x_1 &= 0, \\ u_t x_n &= 0, \\ u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_{n-1} x_{n-1} &= 0,\end{aligned}$$

$3 \leq t \leq n-1$. $U(F/F')$ tamlik bölgesi olduğu için $u_3 = u_4 = \dots = u_{n-1} = 0$ olur. Böylece, aşağıdaki denklem sistemi elde edilir

$$\begin{aligned} u_1 x_n + u_n x_2 &= 0, \\ -u_2 x_n + u_n x_1 &= 0, \\ u_1 x_1 + u_2 x_2 &= 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Buradan $\bar{g} = u_n x_n$ elde ederiz. $\bar{g} \in F/F'$ olduğu için $u_n \in K$ dır. $g = \bar{g} + u$ olacak şekilde $u \in F'$ vardır. $g = \bar{g} + u$ eşitliğine α uygulanıp Önerme 4.1 kullanılarak aşağıdaki eşitlik elde edilir

$$u_n [x_1, x_2] + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \quad 1 \leq i \leq n-1 \text{ için } v_i = [x_i, x_n], \quad v_n = [x_1, x_2].$$

$v_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$ elemanın uzunluğu sıfır veya en az 3 olduğundan $u_n = 0$ olmalıdır. (4.1) eşitliğinden $u_1 = u_2 = 0$ olur. Teorem 4.9 dan $\sum u_i x_i = 0 = \bar{g}$ elde edilir. O halde $\tilde{\Phi}(g) = 0$ olup $g = 0$ dır. Dolayısıyla, α nın aşikar olmayan sabit noktası yoktur.

Önerme 4.12 F/F'' , $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ tarafından üretilen serbest metabelyen Lie cebiri olsun. F/F'' nin α endomorfizmi

$$\begin{aligned} \alpha : x_1 &\rightarrow x_1 + [x_2, x_4], \\ x_2 &\rightarrow x_2 + [x_1, x_3] - [x_3, [x_2, x_4]], \\ x_3 &\rightarrow x_3 + [x_1, [x_1, x_2]] - [x_1, x_2, [x_2, x_4]] + [x_1, x_1, [x_1, x_3]] - [x_1, x_1, x_3, [x_2, x_4]], \\ x_4 &\rightarrow x_4 + [x_1, x_2] - [x_2, [x_2, x_4]] + [x_1, [x_1, x_3]] - [x_1, x_3, [x_2, x_4]] \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda, α bir otomorfizmdir ve α nın aşikar olmayan sabit noktası yoktur.

İspat: Önce α nın otomorfizm olduğunu göstereceğiz. Bunun için aşağıdaki şekilde tanımlanmış $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ elemanter otomorfizmleri düşünelim

$$\begin{aligned} \alpha_1 : x_1 &\rightarrow x_1 + [x_2, x_4], & \alpha_2 : x_2 &\rightarrow x_2 + [x_1, x_3], \\ x_i &\rightarrow x_i, \quad i \neq 1, & x_i &\rightarrow x_i, \quad i \neq 2, \\ \alpha_3 : x_3 &\rightarrow x_3 + [x_1, [x_1, x_2]], & \alpha_4 : x_4 &\rightarrow x_4 + [x_1, x_2], \\ x_i &\rightarrow x_i, \quad i \neq 3, & x_i &\rightarrow x_i, \quad i \neq 4. \end{aligned}$$

$\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ olduğu için α bir otomorfizmdir.

Şimdi, Önerme 4.8 kullanılarak $\tilde{\alpha}$ endomorfizmi

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}(a_1) &= a_1 - x_4 a_2 + x_2 a_4, \\ \tilde{\alpha}(a_2) &= -x_3 a_1 + (1 + x_3 x_4) a_2 + x_1 a_3 - x_3 x_2 a_4, \\ \tilde{\alpha}(a_3) &= (-x_1 x_2 - x_1 x_1 x_3) a_1 + (x_1 x_1 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_1 x_3 x_4) a_2 \\ &\quad + (1 + x_1 x_1 x_1) a_3 + (-x_1 x_2 x_2 - x_1 x_1 x_3 x_2) a_4, \\ \tilde{\alpha}(a_4) &= (-x_2 - x_1 x_3) a_1 + (x_1 + x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4) a_2 + x_1 x_1 a_3 \\ &\quad + (1 - x_2 x_2 - x_1 x_3 x_2) a_4\end{aligned}$$

olarak bulunur. F/F'' nin sıfırdan farklı bir g elemanı için $\alpha(g) = g$ olduğunu varsayalım. Dolayısıyla $\tilde{\alpha}\tilde{\Phi}(g) = \tilde{\Phi}(g)$ olup bu eşitlikten aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned}0 &= -u_2 x_3 + u_3 (-x_1 x_2 - x_1 x_1 x_3) + u_4 (-x_2 - x_1 x_3), \\ 0 &= -u_1 x_4 + u_2 x_3 x_4 + u_3 (x_1 x_1 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_1 x_3 x_4) \\ &\quad + u_4 (x_1 + x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4), \\ 0 &= u_2 x_1 + u_3 x_1 x_1 x_1 + u_4 x_1 x_1, \\ 0 &= u_1 x_2 - u_2 x_3 x_2 + u_3 (-x_1 x_2 x_2 - x_1 x_1 x_3 x_2) \\ &\quad + u_4 (-x_2 x_2 - x_1 x_3 x_2).\end{aligned}$$

Üçüncü eşitlikten $u_2 + u_3 x_1 x_1 + u_4 x_1 = 0$ elde edilir. Bu eşitlik birinci denklemde yerine yazıldığında $u_3 (-x_1) - u_4 = 0$ elde edilir. Buradan, $u_3 x_1 x_1 + u_4 x_1 = 0$ olur. Bu eşitliği üç numaralı denklemde yerine yazdığımızda $u_2 = 0$ bulunur.

Dördüncü eşitlikten $u_1 = 0$ elde edilir. Dolayısıyla, $\bar{g} = u_3 (x_3 - x_1 x_4)$ olarak yazılabilir. Eğer $g \in F'/F''$ ise $\bar{g} = 0$ dır. $U(F/F')$ tamlık bölgesi olduğu için $u_3 = 0$ olmalıdır. $g \notin F'/F''$ ise $\bar{g} = u_3 (x_3 - x_1 x_4) \in F/F'$ olup bu durum ancak $u_3 = 0$ iken mümkündür. Dolayısıyla, $\tilde{\Phi}(g) = 0$ olup $g = 0$ olur. Sonuç olarak α nın aşikar olmayan sabit noktası yoktur.

Önerme 4.13 F/F'' rankı $n \geq 5$ olan serbest metabelyen Lie cebiri ve $\alpha : F/F'' \rightarrow$

F/F'' endomorfizmi aşağıdaki şekilde tanımlanmış olsun.

$$\begin{aligned}\alpha : x_1 &\rightarrow x_1 + [x_2, x_n], \\ x_t &\rightarrow x_t + [x_{t+1}, x_{n-1}] \quad , 2 \leq t \leq n-3, \\ x_{n-2} &\rightarrow x_{n-2} + [x_2, x_{n-1}] - [x_{n-1}, [x_3, x_{n-1}]], \\ x_{n-1} &\rightarrow x_{n-1} + \left[x_1^{k_1}, \dots, x_{n-2}^{k_{n-2}}, [x_1, x_2] \right] - \left[x_1^{k_1}, \dots, x_{n-2}^{k_{n-2}}, [x_2, [x_2, x_n]] \right] \\ &\quad + \left[x_1^{k_1}, \dots, x_{n-2}^{k_{n-2}}, [x_1, [x_3, x_{n-1}]] \right], \quad k_1 + \dots + k_{n-2} \geq 1, \\ x_n &\rightarrow x_n + [x_1, x_2] - [x_2, [x_2, x_n]] + [x_1, [x_3, x_{n-1}]].\end{aligned}$$

Bu durumda α , sıfırdan farklı sabit noktaya sahip olmayan bir otomorfizmdir.

İspat: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ elemanter otomorfizmlerini aşağıdaki şekilde tanımlayalım

$$\begin{aligned}\alpha_1 : x_1 &\rightarrow x_1 + [x_2, x_n], \\ x_i &\rightarrow x_i \quad , i \neq 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_t : x_t &\rightarrow x_t + [x_{t+1}, x_{n-1}], \\ x_i &\rightarrow x_i \quad , i \neq t, 2 \leq t \leq n-3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{n-2} : x_{n-2} &\rightarrow x_{n-2} + [x_2, x_{n-1}], \\ x_i &\rightarrow x_i \quad , i \neq n-2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{n-1} : x_{n-1} &\rightarrow x_{n-1} + \left[x_1^{k_1}, \dots, x_{n-2}^{k_{n-2}}, [x_1, x_2] \right], \\ x_i &\rightarrow x_i \quad , i \neq n-1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_n : x_n &\rightarrow x_n + [x_1, x_2], \\ x_i &\rightarrow x_i \quad , i \neq n.\end{aligned}$$

$\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla α bir otomorfizmdir. Şimdi, Önerme 4.8 i kullanarak $\tilde{\alpha}$ belirleyeceğiz. Dolayısıyla, $a_i \in T$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}(a_1) &= a_1 - x_n a_2 + x_2 a_n, \\ \tilde{\alpha}(a_t) &= a_t - x_{n-1} a_{t+1} + x_{t+1} a_{n-1}, \quad 2 \leq t \leq n-3, \\ \tilde{\alpha}(a_{n-2}) &= -x_{n-1} a_2 + x_{n-1} x_{n-1} a_3 + a_{n-2} + (x_2 - x_{n-1} x_3) a_{n-1}, \\ \tilde{\alpha}(a_{n-1}) &= -x_1^{k_1} \dots x_{n-2}^{k_{n-2}} x_2 a_1 + \left(x_1^{k_1} \dots x_{n-2}^{k_{n-2}} x_1 + x_1^{k_1} \dots x_{n-2}^{k_{n-2}} x_2 x_n \right) a_2 \\ &\quad + \left(-x_1^{k_1} \dots x_{n-2}^{k_{n-2}} x_1 x_{n-1} \right) a_3 + \left(1 + x_1^{k_1} \dots x_{n-2}^{k_{n-2}} x_1 x_3 \right) a_{n-1} \\ &\quad - x_1^{k_1} \dots x_{n-2}^{k_{n-2}} x_2 x_2 a_n, \\ \tilde{\alpha}(a_n) &= -x_2 a_1 + (x_1 + x_2 x_n) a_2 - x_1 x_{n-1} a_3 + x_1 x_3 a_{n-1} + (1 - x_2 x_2) a_n\end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan, bir önceki önermedeki benzer adımlar kullanılarak aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned}0 &= -u_{n-1} \left(x_1^{k_1} \dots x_{n-2}^{k_{n-2}} x_2 \right) + u_n (-x_2), \\ 0 &= -u_1 x_n - u_{n-2} x_{n-1} + u_{n-1} \left(x_1^{k_1} \dots x_{n-2}^{k_{n-2}} x_1 + x_1^{k_1} \dots x_{n-2}^{k_{n-2}} x_2 x_n \right) \\ &\quad + u_n (x_1 + x_2 x_n), \\ 0 &= -u_2 x_{n-1} + u_{n-2} x_{n-1} x_{n-1} + u_{n-1} \left(-x_1^{k_1} \dots x_{n-2}^{k_{n-2}} x_1 x_{n-1} \right) \\ &\quad + u_n (-x_1 x_{n-1}), \\ 0 &= -u_t x_{n-1}, \quad 2 \leq t \leq n-3, \\ 0 &= u_2 x_3 + \dots + u_{n-3} x_{n-2} + u_{n-2} (x_2 - x_{n-1} x_3) \\ &\quad + u_{n-1} \left(1 + x_1^{k_1} \dots x_{n-2}^{k_{n-2}} x_1 x_3 \right) + u_n x_1 x_3, \\ 0 &= u_1 x_2 - u_{n-1} \left(x_1^{k_1} \dots x_{n-2}^{k_{n-2}} x_2 x_2 \right) + u_n (1 - x_2 x_2).\end{aligned}$$

$-u_t x_{n-1} = 0$ eşitliğinden $u_t = 0$, $3 \leq t \leq n-3$, elde edilir. Birinci eşitlikten, $u_{n-1} \left(x_1^{k_1} \dots x_{n-2}^{k_{n-2}} \right) + u_n = 0$ olur. Bu eşitlik sonuncu denklemde yerine yazılırsa $u_1 = 0$

elde edilir. İkinci ve üçüncü eşitliklerden de

$$\begin{aligned} 0 &= -u_1x_n - u_{n-2}x_{n-1} + u_{n-1} \left(x_1^{k_1} \dots x_{n-2}^{k_{n-2}}x_1 + x_1^{k_1} \dots x_{n-2}^{k_{n-2}}x_2x_n \right) \\ &\quad + u_n(x_1 + x_2x_n), \\ 0 &= -u_2x_{n-1} + u_{n-2}x_{n-1}x_{n-1} + u_{n-1} \left(-x_1^{k_1} \dots x_{n-2}^{k_{n-2}}x_1x_{n-1} \right) \\ &\quad + u_n(-x_1x_{n-1}). \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda, $u_{n-2} = u_2 = 0$ olur. Dolayısıyla,

$$\bar{g} = u_{n-1} \left(x_{n-1} - x_1^{k_1} \dots x_{n-2}^{k_{n-2}}x_n \right)$$

olup $\bar{g} \in F/F'$ olduğundan bu durum ancak $u_{n-1} = 0$ iken mümkündür. Sonuç olarak $\tilde{\Phi}(g) = 0$ olup $g = 0$ olur. Dolayısıyla α nın aşıkâr olmayan sabit noktası yoktur.

5. SERBEST LİE CEBİRLERİNİN SABİT NOKTA ALT CEBİRLERİNİN RANKI

Bu bölümde iki üreteçli serbest Lie cebirlerinin ve serbest metabelyen Lie cebirlerinin ve üreteç kümesi ikiden büyük olan serbest Lie cebirlerinin bazı otomorfizmlerinin sabit nokta alt cebirlerinin sonsuz ranklı olduğunu göstereceğiz. K bir cisim olmak üzere A ile $\{x, y\}$ üzerindeki serbest birleşmeli K cebirini gösterelim. F , $\{x, y\}$ tarafından üretilen serbest Lie cebiri olsun. A nın bir baza sahip olduğu açıktır. Bu bazı B ile gösterelim. B bazı $b = z_1 \dots z_n$, $n \geq 0$ ve $z_1, \dots, z_n \in \{x, y\}$ şeklindeki elemanlardan oluşur ve $l(b) = n$ dir. $u \in F$ ise

$$u = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_m b_m, \quad b_1, \dots, b_m \in B \text{ ve } \alpha_1, \dots, \alpha_m \in K \setminus \{0\}$$

olarak yazılabilir. $\sup p(u)$ ile u nun yazılışındaki $\{b_1, \dots, b_m\}$ kümesini gösterelim. $S \subseteq F$ için

$$\sup p(S) = \bigcup_{u \in S} \sup p(u)$$

olarak tanımlayalım. $<$, B üzerindeki alfabetik sıralama olsun. $<$ bağıntısını aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$w_1, \dots, w_m, z_1, \dots, z_n \in \{x, y\}$ olsun. $m < n$ veya $m = n$ ve $w_r \neq x, z_r \neq y$ olmak üzere $i < r$ için $w_i = z_i$ olacak şekilde $r \in \{1, \dots, n\}$ varsa $w_1 \dots w_m < z_1 \dots z_n$ yazacağız. (Örneğin, $xyyxyx < xyyxyx$)

A nın herhangi bir C alt kümesi için $\text{alg}(C)$ ile C tarafından üretilen alt cebiri gösterelim.

Şimdi iki üreteçli serbest Lie cebirlerinde verilen bir otomorfizmin Jacobian matrisinin determinantının 1 olması durumunda bu otomorfizmin sabit bıraktığı cebirin sonsuz ranklı olduğunu göstereceğiz. Bunun için öncelikle aşağıdaki önermeyi vereceğiz.

Önerme 5.1 S, F nin bir Y alt kümesi tarafından üretilen alt cebiri olsun. Bu durumda $\text{supp}(S) \subseteq \text{alg}(\text{supp}Y)$ dir. Burada $\text{alg}(\text{supp}Y)$, F nin $\text{supp}Y$ tarafından üretilen alt cebiridir.

İspat: S, F nin Y tarafından üretilen alt cebiri ve H, S nin bir bazı olsun. $v \in \sup p(S)$ olsun. $\sup p(S) = \bigcup_{u \in S} \sup p(u)$ olduğu için bir $u \in S$ için $v \in \sup p(u)$ dır. $u \in F$ olup $u = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_m b_m, b_1, \dots, b_m \in H$ ve $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K \setminus \{0\}$ olsun. Bu durumda $v \in \{b_1, \dots, b_m\}$ elde edilir. $\{b_1, \dots, b_m\} \subseteq H$ ve $H \subseteq \text{alg}(\sup pY)$ olduğu için $v \in \text{alg}(\sup pY)$ dir.

Önerme 5.2 Birimden farklı $\theta : F \rightarrow F$ otomorfizmi

$$\begin{aligned} \theta : x &\rightarrow ax + by, \quad ad - bc = 1, \\ y &\rightarrow cx + dy \end{aligned}$$

ise $\text{Fix}\theta$ sonlu üreteçli değildir.

İspat: $\text{Fix}\theta$ nin sonlu üreteçli olduğunu varsayalım. $Y, \text{Fix}\theta$ nin sonlu üreteç kümesi ve $C = \sup p(Y)$ diyelim. C nin sonlu olduğu ve Önerme 5.1 den $\sup p(\text{Fix}\theta) \subseteq \text{alg}(C)$ olduğu açık. θ birim otomorfizmden farklı olduğundan $\theta(x) \neq x$ yada $\theta(y) \neq y$ dir. Genelliği bozmaksızın $\theta(x) \neq x$ olsun. Bu durumda $x \notin \text{Fix}\theta$ dır. Buradan

$$\sup p(\text{Fix}\theta) \cap \{1, x, x^2, \dots\} = \emptyset$$

olup

$$C \cap \{1, x, x^2, \dots\} = \emptyset \quad (5.1)$$

dır.

C sonlu olduğundan her $c \in C$ için $l(c) \leq q$ olacak şekilde $q \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Açıkça görüldüğü gibi $\text{alg}(C)$ cebiri $c_1, c_2, \dots, c_m \in C$ ve $m \geq 0$ olmak üzere $c_1 c_2 \dots c_m$ şeklindeki elemanlar tarafından üretilir. $f_1, f_2, \dots \in F$ elemanlarını aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$\begin{aligned} f_1 &= [x, y], \\ f_n &= [[f_{n-1}, x], [f_{n-1}, y]], \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

$f_1, f_2, \dots \in \text{Fix}\theta$ olduğu tümevarımla kolaylıkla gösterilebilir. d_n ile alfabetik sıralamaya göre $\sup p(f_n)$ deki elemanlar içinde en küçük olanını gösterelim. Açıkça

$d_1 = xy$ dir. $n \geq 2$ için $d_n = xd_{n-1}d_{n-1}y$ olduğunu ispatlayalım. Önce

$$\sup p([u, v]) = \{kl, lk : k \in \sup p(u), l \in \sup p(v), u, v \in L\}$$

olduğunu gösterelim.

$$u = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_m b_m, v = \beta_1 c_1 + \dots + \beta_k c_k \quad b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_k \in B \text{ olsun.}$$

Bu durumda $\sup p(u) = \{b_1, \dots, b_m\}$, $\sup p(v) = \{c_1, \dots, c_k\}$ dir.

$$\begin{aligned} [u, v] &= uv - vu \\ &= (\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_m b_m)(\beta_1 c_1 + \dots + \beta_k c_k) - (\beta_1 c_1 + \dots + \beta_k c_k)(\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_m b_m) \\ &= \alpha_1 \beta_1 b_1 c_1 + \dots + \alpha_1 \beta_k b_1 c_k + \dots + \alpha_m \beta_1 b_m c_1 + \dots + \alpha_m \beta_k b_m c_k \\ &\quad - \beta_1 \alpha_1 c_1 b_1 - \dots - \beta_1 \alpha_m c_1 b_m - \dots - \beta_k \alpha_1 c_k b_1 - \dots - \beta_k \alpha_m c_k b_m \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \sup p([u, v]) &= \{b_1 c_1, c_1 b_1, \dots, b_1 c_k, c_k b_1, \dots, b_m c_1, c_1 b_m, \dots, b_m c_k, c_k b_m\} \\ &= \{b_i c_j, c_j b_i : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k, b_i \in \sup p(u), c_j \in \sup p(v)\} \end{aligned}$$

dir.

$$f_n = [[f_{n-1}, x], [f_{n-1}, y]] \text{ olduğundan}$$

$$\sup p(f_n) = \{kl, lk : k \in \sup p([f_{n-1}, x]), l \in \sup p([f_{n-1}, y])\},$$

$$\begin{aligned} \sup p([f_{n-1}, x]) &= \{k_1 k_2, k_2 k_1 : k_1 \in \sup p(f_{n-1}), k_2 \in \sup p(x)\} \\ &= \{k_1 x, x k_1 : k_1 \in \sup p(f_{n-1})\}, \end{aligned}$$

$$\sup p([f_{n-1}, y]) = \{k_3 y, y k_3 : k_3 \in \sup p(f_{n-1})\}$$

olup

$$\begin{aligned} \sup p(f_n) &= \{k_1 x k_3 y, k_1 x y k_3, k_3 y k_1 x, y k_3 k_1 x, x k_1 k_3 y, \\ &\quad x k_1 y k_3, k_3 y x k_1, y k_3 x k_1 : k_1, k_3 \in \sup p(f_{n-1})\}. \end{aligned}$$

$d_{f_n} = x k_1 k_3 y$, $k_1, k_3 \in \sup p(f_{n-1})$ dir. $k_1 = k_3 = d_{f_{n-1}}$ olması gerektiği açık.

Dolayısıyla $d_{f_n} = x d_{f_{n-1}} d_{f_{n-1}} y$ elde edilir.

$\sup p(f_q) \subseteq \text{alg}(C)$ olduğu için

$$d_q = x^q y \dots = c_1 \dots c_m, \quad c_1, \dots, c_m \in C.$$

$l(c_1) = s$ olsun. Bu durumda $s \leq q$ olduğu için $c_1 = x^s$ elde edilir. Bu ise (5.1) ile çelişir. Dolayısıyla $\text{Fix}\theta$ sonlu üreteçli değildir.

5.1. Serbest Metabelyen Lie Cebirlerinin Sabit Nokta Alt Cebirlerinin Rankı

Bu bölümde iki üreteçli serbest metabelyen Lie cebirlerinde bazı elemanları sabit bırakan otomorfizmleri belirleyip bu otomorfizmlerin sabit nokta alt cebirlerinin sonsuz ranklı olduğunu göstereceğiz. $M = F/F''$ ile serbest üreteç kümesi $\{x, y\}$ olan serbest metabelyen Lie cebirini göstereceğiz.

Önerme 5.3 F/F'' serbest metabelyen Lie cebirinin $u = [[x, y], x^i]$ elemanını sabit bırakan lineer otomorfizmi

$$\begin{aligned} \phi_1 : x &\rightarrow ax, & a^{-i} &\neq 0 \\ y &\rightarrow cx + a^{-i-1}y \end{aligned}$$

formundadır.

İspat: M serbest metabelyen Lie cebirinin lineer otomorfizmleri

$$\begin{aligned} \phi : x &\rightarrow ax + by, & \alpha = ad - bc &\neq 0, \\ y &\rightarrow cx + dy \end{aligned}$$

formunda olup

$$\phi(u) = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \alpha a^{i-k} b^k [[x, y], x^{i-k}, y^k]$$

elde edilir. Dolayısıyla $\phi(u) = u$ olması için gerek ve yeter koşul $b = 0$ ve $a^{i+1}d = 1$ olmasıdır. Bulduğumuz otomorfizmi ϕ_1 ile gösterelim. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \phi_1 : x &\rightarrow ax, & \alpha = a^{-i} &\neq 0, \\ y &\rightarrow cx + a^{-i-1}y \end{aligned}$$

dir.

Önerme 5.4 F/F'' iki üreteçli serbest metabelyen Lie cebirinin $u = [[x, y], y^t]$ elemanını sabit bırakan lineer otomorfizmi

$$\begin{aligned}\phi_2: x &\rightarrow d^{-t-1}x + by, \quad d^{-t} \neq 0, \\ y &\rightarrow dy\end{aligned}$$

formundadır.

İspat: Bir önceki önermedeki ϕ için $\phi(u) = u$ olması için gerek ve yeter koşul $c = 0$ ve $a = d^{-t-1}$ olarak bulunur. Bulunan otomorfizmi ϕ_2 ile gösterecek olursak

$$\begin{aligned}\phi_2: x &\rightarrow d^{-t-1}x + by, \quad d^{-t} \neq 0, \\ y &\rightarrow dy\end{aligned}$$

olur.

Önerme 5.5 F/F'' serbest metabelyen Lie cebirinin $u = [[x, y], x^i, y^t]$ elemanını sabit bırakan lineer otomorfizmi

$$\begin{aligned}\phi_3: x &\rightarrow ax, \quad a^{i+1}d^{t+1} = 1, \\ y &\rightarrow dy\end{aligned}$$

formundadır.

İspat: Daha önceki önermelerdekine benzer olarak

$$\phi(u) = \sum_{k=0}^{i+t} \sum_{m=0}^t \binom{t}{m} \binom{i}{k-m} (ad - bc) a^{i-k+m} b^{k-m} c^{t-m} d^m [[x, y], x^{i-k+t}, y^k]$$

bulunur. $\phi(u) = u$ eşitliğinden $b = c = 0$ ve $a^{i+1}d^{t+1} = 1$ olur. Aranan otomorfizmi ϕ_3 ile gösterecek olursak

$$\begin{aligned}\phi_3: x &\rightarrow ax, \quad a^{i+1}d^{t+1} = 1, \\ y &\rightarrow dy\end{aligned}$$

olur.

Önerme 5.6 F/F'' serbest metabelyen Lie cebirinin $f_n = [[x, y]^n, x^{in}, y^{in}]$ elemanını sabit bırakan lineer otomorfizmi

$$\begin{aligned}\phi_4 : x &\rightarrow by, \\ y &\rightarrow cx\end{aligned}$$

dır. Burada n tek sayı iken $b^{i+1}c^{i+1} = -1$, n çift sayı iken $bc = +1$ dir.

İspat: İspat benzer şekilde yapılır.

Sonuç 5.7 M serbest metabelyen Lie cebirinin lineer bir otomorfizmi

$$\begin{aligned}\phi : x &\rightarrow ax + by, \quad \alpha = ad - bc \neq 0, \\ y &\rightarrow cx + dy\end{aligned}$$

formunda olup ϕ nin aşağıda belirlenen koşullar altında sabit noktası vardır.

1.DURUM : $a^{-i} \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\phi : x &\rightarrow ax, \\ y &\rightarrow cx + a^{-i-1}y\end{aligned}$$

ise

$$f_n = \left[[x, y]^{n-1}, [[x, y], x^{in}] \right] \in \text{Fix}\phi$$

dir.

2.DURUM : $d^{-t} \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\phi : x &\rightarrow d^{-t-1}x + by, \\ y &\rightarrow dy\end{aligned}$$

ise

$$f_n = \left[[x, y]^{n-1}, [[x, y], y^{tn}] \right] \in \text{Fix}\phi$$

dir.

3.DURUM : $a^{i+1}d^{t+1} = 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\phi : x &\rightarrow ax, \\ y &\rightarrow dy\end{aligned}$$

ise

$$f_n = \left[[x, y]^n, x^{ni}, y^{tn} \right] \in \text{Fix}\phi$$

dir.

4.DURUM: n tek sayı ve $b^{i+1}c^{i+1} = -1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\phi : x &\rightarrow by, \\ y &\rightarrow cx\end{aligned}$$

ise

$$f_n = [[x, y]^n, x^{in}, y^{in}] \in \text{Fix}\phi$$

dir.

5.DURUM: $b^{i+1}c^{i+1} = +1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\phi : x &\rightarrow by, \\ y &\rightarrow cx\end{aligned}$$

ise

$$f_{2n} = [[x, y]^{2n}, x^{i2n}, y^{i2n}] \in \text{Fix}\phi$$

dir.

İspat: Önerme 5.3, 5.4, 5.5, 5.6 dan sonuç elde edilir.

Teorem 5.8 Birim den farklı $\phi : M \rightarrow M$ otomorfizmi

$$\begin{aligned}\phi : x &\rightarrow ax + by, \quad \alpha = ad - bc \neq 0, \\ y &\rightarrow cx + dy\end{aligned}$$

olsun. Sonuç 5.7 deki 1.DURUM, 2.DURUM, 3.DURUM, 4.DURUM, 5.DURUM da belirlenen koşullar altında $\text{Fix}\phi$ sonsuz ranklıdır.

İspat: İspatı sadece 1.DURUM için yapacağız. Diğer durumlarda ispat benzer şekilde yapılır. $\text{Fix}\phi$ nin sonlu üreteçli olduğunu varsayalım. Y , $\text{Fix}\phi$ nin sonlu üreteç kümesi ve $C = \text{supp}(Y)$ olarak tanımlayalım. C nin sonlu olduğu ve Önerme 5.1 den $\text{supp}(\text{Fix}\phi) \subseteq \text{alg}(C)$ olduğu açık. $y \notin \text{Fix}\phi$ olduğu açıktır. Genelliği bozmaksızın $x > y$ olsun. Buradan

$$\text{supp}(\text{Fix}\phi) \cap \{1, y, y^2, \dots\} = \emptyset.$$

Buradan

$$C \cap \{1, y, y^2, \dots\} = \emptyset \quad (5.2)$$

elde edilir. C sonlu olduğundan her $c \in C$ için $l(c) \leq q-1$ olacak şekilde $q \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Açıkça $\text{alg}(C)$ cebiri $c_1, c_2, \dots, c_m \in C$ ve $m \geq 0$ olmak üzere $c_1 c_2 \dots c_m$ şeklindeki elemanlar tarafından üretilir.

$f_1, f_2, \dots \in M$ elemanlarını aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$f_n = \left[[x, y]^{n-1}, [x, y], x^{in} \right]$$

$f_1, f_2, \dots \in \text{Fix}\phi$ olduğu tümevarımla kolaylıkla gösterilebilir. d_n ile alfabetik sıralamaya göre $\text{supp}(f_n)$ deki elemanlar içinde en küçük olanını gösterelim.

$$f_n = \left[[x, y]^{n-1}, [x, y], x^{in} \right] \text{ olduğundan}$$

$$d_n = y^{n-1} x^{n-1} y x^{in+1}$$

ve

$$\text{supp}(f_q) \subseteq \text{alg}(C) \text{ olduğu için}$$

$$d_q = y^{q-1} x^{q-1} y x^{iq+1} \dots = c_1 \dots c_m, \quad c_1, \dots, c_m \in C$$

dir. $l(c_1) = s$ olsun. Bu durumda $s \leq q-1$ olduğu için $c_1 = y^s$ elde edilir. Bu ise (5.2) eşitliği ile çelişir. Dolayısıyla $\text{Fix}\phi$ nın sonlu üreteçli değildir.

5.2. İki Üreteçli Serbest Metabelyen Lie Cebirinin Taşınabilir Otomorfizmlerinin Sabit Nokta Alt Cebirlerinin Rankı

Bu bölümde iki üreteçli serbest metabelyen Lie cebirlerinin taşınabilir otomorfizmleri grubunun üreteçlerinin sabit nokta alt cebirlerinin sonsuz ranklı olduğunu göstereceğiz. $M = F/F''$, serbest üreteç kümesi $\{x, y\}$ olan serbest metabelyen Lie cebiri olsun.

Tanım 5.9 $M = F/F''$ iki üreteçli serbest metabelian Lie cebiri olsun. M nin bir otomorfizmi F nin bir otomorfizmi tarafından belirleniyorsa bu otomorfizme taşınabilir otomorfizm denir.

M nin tüm taşınabilir otomorfizmlerinin kümesini $T(M)$ ile gösterelim. $T(M)$

bileşke işlemiyle bir gruptur ve aşağıdaki otomorfizmler tarafından üretilir:

$$\begin{array}{lll} \phi: x_1 \rightarrow x_2, & \Psi: x_1 \rightarrow -x_1, & \delta: x_1 \rightarrow x_1 + x_2, \\ x_2 \rightarrow x_1, & x_2 \rightarrow x_2, & x_2 \rightarrow x_2, \end{array}$$

$M = F/F''$ nin tüm lineer otomorfizmlerinin taşınabilir olduğu açıktır. Ayrıca M nin rankı 2 olduğundan özel olarak M nin bütün taşınabilir otomorfizmleri lineerdir. M nin tüm iç otomorfizmlerinin grubunu $\text{Inn}M$ ile gösterelim. M nin tüm otomorfizmlerinin yapısını belirleyen aşağıdaki teorem Bahturin ve Nabiyev (1992) tarafından gösterilmiştir. Bu teorem bu bölümde elde ettiğimiz sonuçların ispatında önemli bir rol oynamaktadır.

Teorem 5.10 $\text{Aut}M \cong GL(2, K) \ltimes \text{Inn}M$ dir.

Teorem 5.11 M iki üreteçli serbest metabelyen Lie cebiri ise $IA(M) = \text{Inn}(M)$ dir.

O halde Teorem 5.10 rankı 2 olan serbest metabelyen Lie cebirlerinin taşınabilir otomorfizmleri grubunun $T(M) \cong \text{Aut}(M)/IA(M)$ olarak ifade edilmesinde önemli rol oynar. Gerçekte $\text{Aut}M \cong GL(2, K) \ltimes \text{Inn}M$ olup $\text{Aut}(M)/\text{Inn}(M) = T(M)$ dir.

Şimdi ϕ, Ψ, δ otomorfizmlerinin sabit noktalarını belirleyelim.

Teorem 5.12 İki üreteçli serbest metabelyen Lie cebiri M nin ϕ, Ψ, δ otomorfizmlerinin sabit noktaları aşağıdaki gibidir:

$$\begin{array}{l} 1) \phi: x_1 \rightarrow x_2, \\ x_2 \rightarrow x_1 \end{array}$$

otomorfizminin sabit noktaları $n \geq 1$ için

$$f_n = [[x_1, x_2], x_1^n] - [[x_1, x_2], x_2^n]$$

dir.

$$\begin{array}{l} 2) \Psi: x_1 \rightarrow -x_1 \\ x_2 \rightarrow x_2 \end{array}$$

otomorfizminin sabit noktaları $n \geq 1$ ve $k > 1$ için

$$g_n = [x_1^{2n}, x_2^k]$$

dir.

$$3) \delta : x_1 \rightarrow x_1 + x_2$$

$$x_2 \rightarrow x_2$$

otomorfizminin sabit noktaları

$$h_n = [[x_1, x_2], x_2^n]$$

dir.

İspat: $\phi(f_n) = f_n$, $\Psi(g_n) = g_n$, $\delta(h_n) = h_n$ olacak şekildeki f_n , g_n , h_n elemanları elemanter hesaplarla kolayca bulunabilir.

Teorem 5.13 $Fix(\phi)$, $Fix(\Psi)$, $Fix(\delta)$ sonsuz ranklıdır.

İspat: İspat iki üreteçli serbest Lie cebirindekine benzer şekilde yapılır.

Teorem 5.14 M iki üreteçli serbest metabelyen Lie cebirinde $[x_1, x_2]$ yi sabit bırakan otomorfizm $SL(2, K)$ ve $Inn(M)$ den gelen iki otomorfizmin bileşkesi olarak yazılabilir.

İspat: Bahturin ve Nabiyeve (1992) tarafından $Aut(M) \simeq GL(2, K) \ltimes Inn(M)$ olduğu gösterilmiştir. Bu sebeple $\phi \in Aut(M)$ ise $\phi = \alpha \circ \beta$, $\alpha \in GL(2, K)$, $\beta \in Inn(M)$ olarak yazabiliriz. α ya karşılık gelen otomorfizm

$$\alpha : x_1 \rightarrow ax_1 + bx_2, \quad ad - bc \neq 0,$$

$$x_2 \rightarrow cx_1 + dx_2$$

olup

$$\phi([x_1, x_2]) = [x_1, x_2],$$

$$\alpha \circ \beta([x_1, x_2]) = [x_1, x_2],$$

$$\alpha([x_1, x_2]) = [x_1, x_2],$$

$$(ad - bc)[x_1, x_2] = [x_1, x_2],$$

$$(ad - bc) = 1$$

olduğundan $\alpha \in SL(2, K)$ dır.

$v \in M'$ olmak üzere M nin bir iç otomorfizmi $e^{adv} = I + adv$ formundadır. Yani, her $w \in M$ için $e^{adv}(w) = w + [v, w]$ dir.

Teorem 5.15 M iki üreteçli serbest metabelyen Lie cebiri olsun.

1. $u_1 = [[x_1, x_2], x_1^i] \in M$ elemanını sabit bırakan otomorfizmler

$$\begin{aligned} \alpha_1 : x_1 &\rightarrow ax_1, & a^{-i} \neq 0, \\ x_2 &\rightarrow cx_1 + a^{-i-1}x_2 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\phi_1 = \alpha_1 \circ e^{adv}$$

şeklindedir.

2. $u_2 = [[x_1, x_2], x_2^t] \in M$ elemanını sabit bırakan otomorfizmler

$$\begin{aligned} \alpha_2 : x_1 &\rightarrow d^{-t-1}x_1, & d^{-t} \neq 0, \\ x_2 &\rightarrow dx_2 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\phi_2 = \alpha_2 \circ e^{adv}$$

şeklindedir.

3. $u = [[x, y], x^i, y^t] \in M_2$ elemanını sabit bırakan otomorfizmler

$$\begin{aligned} \alpha_3 : x_1 &\rightarrow ax_1, & a^{i+1}d^{t+1} = 1, \\ x_2 &\rightarrow dx_2 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\phi_2 = \alpha_2 \circ e^{adv}$$

şeklindedir.

İspat:

1. $\phi_1 \in \text{Aut}(M)$ ise Teorem 5.14 den $\phi_1 = \alpha_1 \circ e^{adv}$, $\alpha_1 \in GL(2, K)$, $v \in M'$, olarak yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \alpha_1 : x_1 &\rightarrow ax_1 + bx_2, \quad l = ad - bc \neq 0, \\ x_2 &\rightarrow cx_1 + dx_2 \end{aligned}$$

olmak üzere $u_1 = [[x_1, x_2], x_1^i] \in \text{Fixe}^{adv}$ dir. Bu nedenle

$$\phi_1(u_1) = \alpha_1 \circ e^{adv}(u_1) \Rightarrow \phi_1(u_1) = \alpha_1(u_1)$$

dır.

$$\alpha_1(u_1) = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} la^{i-k} b^k [[x_1, x_2], x_1^{i-k}, x_2^k]$$

dır. $\phi_1(u_1) = u_1$ olması için gerek ve yeter koşul $b = 0$ ve $a^{i+1}d = 1$ olmasıdır.

Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \alpha_1 : x_1 &\rightarrow ax_1, \quad l = ad - bc \neq 0, \\ x_2 &\rightarrow cx_1 + a^{-i-1}x_2 \end{aligned}$$

dır.

2. $\phi_2 \in \text{Aut}(M)$ ise Teorem 5.14 den $\alpha_2 \in GL(2, K)$ olmak üzere $\phi_2 = \alpha_2 \circ e^{adv}$ olarak yazabiliriz. 1.Durumdakine benzere şekilde devam edersek $c = 0$ ve $a = d^{-t-1}$ olması gerektiğini buluruz.

3. $\phi_3 \in \text{Aut}(M)$ ise Teorem 5.14 den $\alpha_3 \in GL(2, K)$ olmak üzere $\phi_3 = \alpha_3 \circ e^{adv}$ olarak yazabiliriz.

$$\phi_3(u_3) = \alpha_3 \circ e^{adv}(u_3) \Rightarrow \phi_3(u_3) = \alpha_3(u_3)$$

$$\alpha_3(u_3) = \sum_{k=0}^{i+t} \sum_{m=0}^t \binom{t}{m} \binom{i}{k-m} la^{i-k+m} b^{k-m} c^{t-m} d^m [[x_1, x_2], x_1^{i-k+t}, x_2^k]$$

dır. $\phi_3(u_3) = u_3$ olması için gerek ve yeter koşul $b = c = 0$ ve $a^{i+1}d^{i+1} = 1$ olmasıdır. Yani;

$$\begin{aligned} \alpha_3 : x_1 &\rightarrow ax_1, \quad a^{i+1}d^{i+1} = 1, \\ x_2 &\rightarrow dx_2 \end{aligned}$$

dır.

5.3. Bazı Serbest Lie Cebirlerinin Taşınabilir Otomorfizmlerinin Sabit Nokta Alt Cebirlerinin Rankı

$F, X = \{x_1, \dots, x_n\}$ kümesi tarafından üretilen serbest Lie cebiri olsun.

Bu bölümde R, F nin bir ideali olmak üzere belirli F/R serbest Lie cebirlerinin bazı taşınabilir olmayan otomorfizmlerinin sabit nokta alt cebirlerinin rankını inceleyeceğiz. F''' ile F nin $F^{2,2,2}$ alt cebirini göstereceğiz.

Teorem 5.16 (Özkurt, 2007) F/F''' Lie cebirinin $K = \{x_1 + [[x_3, x_2], x_1], x_2, \dots, x_n\}$ serbest üreteç kümesi F/F''' Lie cebirinin bir serbest üreteç kümesine taşınmaz.

Teorem 5.17 $\phi : F/F''' \rightarrow F/F'''$ otomorfizmi

$$\begin{aligned}\phi : x_1 &\rightarrow x_1 + [[x_3, x_2], x_1], \\ x_i &\rightarrow x_i, i \neq 1\end{aligned}$$

olarak tanımlansın. $g_m = \left[[x_1, [x_{j_1}, x_{j_2}]], [x_{j_3}, x_{j_4}], [x_{j_5}, x_{j_6}], x_{j_7}^m \right]$ $j_k \neq 1$ ($1 \leq k \leq 7$), $j_1 \neq j_2$, $j_3 \neq j_4$, $j_5 \neq j_6$ tipindeki elemanlar ve $f_1 = \left[[x_1, [x_{j_1}, x_{j_2}]], [x_{j_3}, x_{j_4}], [x_{j_5}, x_{j_6}]] \right]$ olmak üzere $f_m = \left[[x_1, [f_{m-1}, x_{l_1}]], [x_{l_2}, x_{l_3}], [x_{l_4}, x_{l_5}]] \right]$, $l_k \neq 1$, ($1 \leq k \leq 5$), $l_2 \neq l_3$, $l_4 \neq l_5$ tipindeki elemanlar ϕ nin sabit noktalarıdır.

İspat: $g_1 \in \text{Fix}\phi$ olduğu açıktır. $g_x = [x_1, [x_{j_1}, x_{j_2}]]$, $g_y = [x_{j_3}, x_{j_4}], [x_{j_5}, x_{j_6}], x_{j_7}^m]$ olsun. Bu durumda $g_m = [g_x, g_y]$ olup $\phi(g_m) = \phi([g_x, g_y]) = [\phi(g_x), \phi(g_y)]$ dir.

$$\phi(g_x) = [x_1, [x_{j_1}, x_{j_2}]] + [[x_3, x_2], x_1], [x_{j_1}, x_{j_2}]$$

dir. $x_{j_3}, x_{j_4}, x_{j_5}, x_{j_6}, x_{j_7} \in \text{Fix}\phi$ olduğundan her $m \in \mathbb{N}$ için $\phi(g_y) = g_y$ dir.

$$\begin{aligned}\phi(g_m) &= [\phi(g_x), \phi(g_y)], \\ &= \left[[x_1, [x_{j_1}, x_{j_2}]], [x_{j_3}, x_{j_4}], [x_{j_5}, x_{j_6}], x_{j_7}^m \right] \\ &\quad + \left[[[x_3, x_2], x_1], [x_{j_1}, x_{j_2}], [x_{j_3}, x_{j_4}], [x_{j_5}, x_{j_6}], x_{j_7}^m \right], \\ &= \left[[x_1, [x_{j_1}, x_{j_2}]], [x_{j_3}, x_{j_4}], [x_{j_5}, x_{j_6}], x_{j_7}^m \right], \\ &= g_m.\end{aligned}$$

Dolayısıyla $g_m \in \text{Fix}\phi$.

$f_m \in \text{Fix}\phi$ olduğunu göstermek için tümevarım yöntemini kullanacağız. $f_1 \in \text{Fix}\phi$ olduğu açık. $f_{m-1} \in \text{Fix}\phi$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\phi(f_m) &= \left[\phi([x_1, [f_{m-1}, x_{l_1}]]), \phi\left(\left[[x_{l_2}, x_{l_3}], [x_{l_4}, x_{l_5}]\right]\right) \right], \\ &= \left[x_1 + [[x_3, x_2], x_1], [f_{m-1}, x_{l_1}], \left[[x_{l_2}, x_{l_3}], [x_{l_4}, x_{l_5}]\right] \right], \\ &= \left[x_1, [f_{m-1}, x_{l_1}], \left[[x_{l_2}, x_{l_3}], [x_{l_4}, x_{l_5}]\right] \right] \\ &\quad + \left[[[x_3, x_2], x_1], [f_{m-1}, x_{l_1}], \left[[x_{l_2}, x_{l_3}], [x_{l_4}, x_{l_5}]\right] \right] \\ &= \left[x_1, [f_{m-1}, x_{l_1}], \left[[x_{l_2}, x_{l_3}], [x_{l_4}, x_{l_5}]\right] \right] \\ &= f_m.\end{aligned}$$

Sonuç olarak $f_m \in \text{Fix}\phi$ dir.

Teorem 5.18 $\phi : F/F''' \rightarrow F/F'''$ otomorfizmi

$$\begin{aligned}\phi : x_1 &\rightarrow x_1 + [[x_3, x_2], x_1], \\ x_i &\rightarrow x_i, i \neq 1\end{aligned}$$

olarak tanımlansın. $\text{Fix}\phi$ sonlu üreteçli değildir.

İspat: $\text{Fix}\phi$ nin sonlu üreteçli olduğunu varsayalım. Y , $\text{Fix}\phi$ nin sonlu üreteç kümesi ve $C = \sup p(Y)$, $L = F/F'''$ olarak tanımlayalım. C nin sonlu olduğu ve Önerme 5.1 den $\sup p(\text{Fix}\phi) \subseteq \text{alg}(C)$ olduğu açık. Buradan

$$\sup p(\text{Fix}\phi) \cap \{1, x_1, x_1^2, \dots\} = \emptyset$$

olup

$$C \cap \{1, x_1, x_1^2, \dots\} = \emptyset \quad (5.3)$$

dır. C sonlu olduğundan her $c \in C$ için $l(c) \leq q$ olacak şekilde $q \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Açıkça $\text{alg}(C)$ nin $c_1, c_2, \dots, c_m \in C$ ve $m \geq 0$ olmak üzere $c_1 c_2 \dots c_m$ şeklindeki elemanlar tarafından üretildiği görülmektedir..

$f_1, f_2, \dots \in L$ elemanlarını aşağıdaki şekilde tanımlayalım..

$$\begin{aligned}f_1 &= \left[[x_1, [x_{j_1}, x_{j_2}]], [[x_{j_3}, x_{j_4}], [x_{j_5}, x_{j_6}]] \right], \\ f_n &= \left[x_1, [f_{n-1}, x_{l_1}], \left[[x_{l_2}, x_{l_3}], [x_{l_4}, x_{l_5}]\right] \right], l_k \neq 1, (1 \leq k \leq 5), l_2 \neq l_3, l_4 \neq l_5.\end{aligned}$$

$f_1, f_2, \dots \in \text{Fix}\phi$ olduğunu biliyoruz. d_n ile alfabetik sıralamaya göre $\sup p(f_n)$ deki elemanlar içinde en küçük olanını gösterelim. Açıkça $d_1 = x_1 x_{j_k} \dots$ ($k \in \{1, 2\}$) dir. $n \geq 2$ için $d_n = x_1 d_{n-1} x_{l_1} \dots$ dir.

$\sup p(f_q) \subseteq \text{alg}(C)$ olduğu için

$$d_q = x_1^q x_{j_k} \dots = c_1 \dots c_m, \quad k \in \{1, 2\}, \quad c_1, \dots, c_m \in C.$$

$l(c_1) = s$ olsun. Bu durumda $s \leq q$ olduğu için $c_1 = x_1^s$ elde edilir. Bu ise (5.3) eşitliği ile çelişir. Dolayısıyla $\text{Fix}\phi$ sonlu üreteçli değildir.

Teorem 5.19 (Özkurt, 2007) $\phi : F / (F^c)' \rightarrow F / (F^c)'$ endomorfizmi

$$\phi : x_1 \rightarrow x_1 + [x_1, v],$$

$$x_i \rightarrow x_i, \quad i \neq 1,$$

$v = [[\dots [x_{j_1}, x_{j_2}], \dots], x_{j_c}]$ $j_k \neq 1, k = 1, \dots, c, c \geq 3$ olarak tanımlansın. $\phi, F / (F^c)'$ nin taşınabilir olmayan bir otomorfizmdir.

Teorem 5.20 $\phi : F / (F^c)' \rightarrow F / (F^c)'$ otomorfizmi

$$\phi : x_1 \rightarrow x_1 + [x_1, v],$$

$$x_i \rightarrow x_i, \quad i \neq 1$$

olarak tanımlansın. Burada $v = [[\dots [x_{j_1}, x_{j_2}], \dots], x_{j_c}]$ $j_k \neq 1, k = 1, \dots, c, c \geq 3$ dir. $g_n = [[x_1, x_{j_1}], [x_{j_2}, x_{j_3}], x_{j_4}^n, x_{j_5}^c]]$, $j_k \neq 1, (1 \leq k \leq 5), j_2 \neq j_3$ tipindeki elemanlar ve $f_1 = [[x_1, x_{j_1}], [x_{j_2}, x_{j_3}], x_{j_4}^{c-2}]]$, $j_k \neq 1, (1 \leq k \leq 4), j_2 \neq j_3$ olmak üzere $f_n = [[x_1, f_{n-1}], [x_{j_2}, x_{j_3}], x_{j_4}^{c-2}]]$ tipindeki elemanlar ϕ nin sabit noktalarıdır.

İspat: $g_1 \in \text{Fix}\phi$ olduğu açık. $g_x = [x_1, x_{j_1}], g_y = [[x_{j_2}, x_{j_3}], x_{j_4}^n, x_{j_5}^c]]$ olsun. $\phi(g_n) = \phi([g_x, g_y]) = [\phi(g_x), \phi(g_y)]$ dir.

$$\phi(g_x) = [x_1 + [x_1, v], x_{j_1}] = [x_1, x_{j_1}] + [[x_1, v], x_{j_1}]$$

dir. $x_{j_2}, x_{j_3}, x_{j_4}, x_{j_5} \in \text{Fix}\phi$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\phi(g_y) = g_y$ dir.

$$\begin{aligned} \phi([g_x, g_y]) &= [[x_1, x_{j_1}], [x_{j_2}, x_{j_3}], x_{j_4}^n, x_{j_5}^c]] + \underbrace{[[x_1, v], x_{j_1}], [x_{j_2}, x_{j_3}], x_{j_4}^n, x_{j_5}^c]]}_{\in (F^c)'} \\ &= [[x_1, x_{j_1}], [x_{j_2}, x_{j_3}], x_{j_4}^n, x_{j_5}^c]] \\ &= g_n \end{aligned}$$

Dolayısıyla $g_n \in \text{Fix}\phi$.

$$f_1 = \left[[x_1, x_{j_1}], [x_{j_2}, x_{j_3}], x_{j_4}^{c-2} \right] \in \text{Fix}\phi \text{ olduğu açık. } f_{n-1} \in \text{Fix}\phi \text{ olsun.}$$

$$\begin{aligned} \phi(f_n) &= \left[\phi([x_1, f_{n-1}]), \phi\left([x_{j_2}, x_{j_3}], x_{j_4}^{c-2}\right) \right] \\ &= \left[[x_1 + [x_1, v], f_{n-1}], [x_{j_2}, x_{j_3}], x_{j_4}^{c-2} \right] \\ &= \left[[x_1, f_{n-1}], [x_{j_2}, x_{j_3}], x_{j_4}^{c-2} \right] + \underbrace{\left[[x_1, v], f_{n-1}], [x_{j_2}, x_{j_3}], x_{j_4}^{c-2} \right]}_{\in (F^c)'} \\ &= \left[[x_1, f_{n-1}], [x_{j_2}, x_{j_3}], x_{j_4}^{c-2} \right] \\ &= f_n \end{aligned}$$

Teorem 5.21 $F/(F^c)'$ nin aşağıdaki şekilde tanımlanan otomorfizmi için $\text{Fix}\phi$ sonlu üreteçli değildir.

$$\begin{aligned} \phi : x_1 &\rightarrow x_1 + [x_1, v], \\ x_i &\rightarrow x_i, \quad i \neq 1, \end{aligned}$$

$$v = [\dots [x_{j_1}, x_{j_2}], \dots], x_{j_c}], \quad j_k \neq 1, \quad k = 1, \dots, c, \quad c \geq 3.$$

İspat: İspat Teorem 5.18 de ki gibi yapılır.

Teorem 5.22 (Özkurt, 2007) Her $c \geq 3$ için, F/F^{c+1} nin

$$\begin{aligned} \Phi : x_1 &\rightarrow x_1 + [x_1, x_2^{c-1}], \\ x_i &\rightarrow x_i, \quad 2 \leq i \leq m, \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan Φ otomorfizmi $F/(F^{c+1})'$ nin bir otomorfizmine taşınmaz.

Teorem 5.23 $\Phi, F/F^{c+1}$ nin aşağıdaki şekilde tanımlanan otomorfizmi olsun.

$$\begin{aligned} \Phi : x_1 &\rightarrow x_1 + [x_1, x_2^{c-1}], \quad c \geq 3, \\ x_i &\rightarrow x_i, \quad 2 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Bu durumda $\text{rank}(\text{Fix}\Phi) = c(n-1)$ dir.

İspat: $H = H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_c$ kümesi F/F^{c+1} nin bir bazıdır. İddia ediyoruz ki; $Fix\Phi = span(H - x_1)$ dir. Öncelikle $2 \leq i \leq c - 1$ için $\Phi(H_i) = H_i$ olduğunu gösterelim. Her $x_i \neq x_1$ için $x_i \in Fix\Phi$ olduğu ve $x_i = x_1, x_j \neq x_1$ için $[x_i, x_j] \in Fix\Phi$ olduğu açık. Yani; $\Phi(H_2) = H_2$ dir.

$$H_3 = \{((xy)z) / x, y, z \in H_1 \cup H_2, x > y, y \leq z\}$$

olduğunu biliyoruz. H_3 deki bir eleman $u \in H_2$ olmak üzere $[u, x_1]$ veya $[u, x_i], i \neq 1$, şeklindedir. Her iki durum için $[u, x_1] \in Fix\Phi$ ve $[u, x_i] \in Fix\Phi$ dir. Yani; $\Phi(H_3) = H_3$ dir. İddia her $t \leq c - 1$ için doğru olsun. Yani, $t \leq c - 1$ için $\Phi(H_t) = H_t$ olsun.

$$H_c = \{((xy)z) / x, y, z, (xy) \in H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_{c-1}, x > y, y \leq z\}.$$

Buradan $\Phi(H_c) = H_c$ olduğu açık. Dolayısıyla $Fix\Phi = span(H - x_1)$ dir. Burada $span(H - x_1), F/F^{c+1}$ in, $H - x_1$ tarafından gerilen alt uzayıdır.

Şimdi

$$S_K = \{x_2, \dots, x_n, [x_1, x_2], \dots, [x_1, x_n], [[x_1, x_2], x_1], \dots, [[x_1, x_n], x_1], \dots, [x_1, x_2], x_1^{K-2}, \dots, [x_1, x_n], x_1^{K-2}\}$$

kümesini tanımlayalım ve $Fix\Phi$ nin S_c kümesi tarafından üretildiğini yani, $Fix\Phi = \langle S_c \rangle$ olduğunu gösterelim.

$$H_2 = \{[x_1, x_2], \dots, [x_1, x_n], [x_2, x_3], \dots, [x_2, x_n], \dots, [x_{n-1}, x_n]\}$$

olup H_2 nin S_2 den gelen elemanların çarpımından oluştuğu açıktır. Yani, $H_2 \subseteq \langle S_2 \rangle$ dir. H_3 deki bir eleman H_1 ve H_2 deki elemanların çarpımından oluştuğu için $x \in H_2, y \in H_1$ olmak üzere $u = (xy) \in H_3$ formundadır.

Eğer u nun yazılışında x_1 yoksa $x = [x_i, x_j], y = x_k, 2 \leq i, j, k \leq n$ olup $u \in Fix\Phi$ olur.

Eğer $y = x_1$ ve $x = [x_i, x_j], 2 \leq i, j, k \leq n$ ise

$$u = [[x_i, x_j], x_1] = -[[x_j, x_1], x_i] - [[x_1, x_i], x_j]$$

olur. Görüldüğü gibi u elemanı $x_i, x_j, [x_1, x_i], [x_1, x_j]$ elemanları tarafından üretiliyor. Dolayısıyla $u \in \langle S_3 \rangle$ dir.

Eğer $y = x_1$, $x = [x_1, x_i]$ ve $y = x_j$, $j \neq 1$, $x = [x_1, x_i]$ olması durumlarında $u \in \langle S_3 \rangle$ olduğu açık.

Dolayısıyla $H_3 \subseteq \langle S_3 \rangle$ dir. İddia $c - 1$ için doğru olsun. Yani; $2 \leq K \leq c - 1$ için $H_K \subseteq \langle S_K \rangle$ olsun. Şimdi, iddianın c için doğru olduğunu göstereyim.

$$H_c = \{((xy)z) / x, y, z, (xy) \in H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_{c-1}, x > y, y \leq z\}$$

olup eğer $z \neq x_1$ ise $x, y, z, (xy) \in H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_{c-1}$ olup $((xy)z) \in \langle S_c \rangle$ elde edilir.

Eğer $z = x_1$ ise $(xy) \in H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_{c-1}$ olup kabulümüz gereği $xy \in \langle S_{c-1} \rangle$ dir. Bu durumda $((xy)z)$ elemanı

$$\{x_2, \dots, x_n, [x_1, x_2], \dots, [x_1, x_n], [[x_1, x_2], x_1], \\ \dots, [[x_1, x_n], x_1], \dots, [x_1, x_2], x_1^{c-2}, \dots, [x_1, x_n], x_1^{c-2}\}$$

elemanları tarafından üretilir. Dolayısıyla $H_K \subseteq \langle S_K \rangle$, $2 \leq K \leq c$ dir. Buradan $\bigcup_{i=2}^c H_i \subseteq \langle S_c \rangle$ olduğu görülür. Diğer taraftan $\langle S_c \rangle \subseteq \text{Span}(H - x_1)$ olduğu basit hesaplamalarla gösterilebilir. O halde

$$\text{Fix}\Phi = \langle x_2, \dots, x_n, [x_1, x_2], \dots, [x_1, x_n], [[x_1, x_2], x_1], \\ \dots, [[x_1, x_n], x_1], \dots, [x_1, x_2], x_1^{c-2}, \dots, [x_1, x_n], x_1^{c-2} \rangle$$

olup $\text{rankFix}\Phi = c(n - 1)$ dir.

Örnek 5.24 $\text{rank}(F/F^4) = 3$ olmak üzere $\Phi : F/F^4 \rightarrow F/F^4$ otomorfizmi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\Phi : \begin{aligned} x_1 &\rightarrow x_1 + [x_1, x_2^2], \\ x_i &\rightarrow x_i, \quad 2 \leq i \leq 3. \end{aligned}$$

Bu durumda $c = 3$ ve $n = 3$ dir. Öncelikle H_1 , H_2 , H_3 Hall bazının elemanlarını belirleyelim.

$$H_1 = \{x_1, x_2, x_3\},$$

$$H_2 = \{[x_1, x_2], [x_1, x_3], [x_2, x_3]\},$$

$$H_3 = \left\{ \begin{array}{l} [[x_1, x_2], x_1], [[x_1, x_2], x_2], [[x_1, x_3], x_3], [[x_1, x_3], x_2], \\ [[x_1, x_3], x_1], [[x_2, x_3], x_3], [[x_2, x_3], x_2], [[x_2, x_3], x_1] \end{array} \right\}$$

olmak üzere $H = H_1 \cup H_2 \cup H_3$, F/F^4 için bir bazdır. Açıkça görüldüğü gibi

$$\begin{aligned} \text{Fix}\Phi = \text{span}\{ & x_2, x_3, [x_1, x_2], [x_1, x_3], [x_2, x_3], [[x_1, x_2], x_1], [[x_1, x_2], x_2], [[x_1, x_3], x_3], \\ & [[x_1, x_3], x_2], [[x_1, x_3], x_1], [[x_2, x_3], x_3], [[x_2, x_3], x_2], [[x_2, x_3], x_1] \} \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $\text{Fix}\Phi$, $\{x_2, x_3, [x_1, x_2], [x_1, x_3], [[x_1, x_2], x_1], [[x_1, x_3], x_1]\}$ elemanları tarafından üretilir. Sonuç olarak $\text{rank}(\text{Fix}\Phi) = 6 = c(n-1)$ dir.

Örnek 5.25 $\text{rank}(F/F^4) = 4$ ve $\Phi : F/F^4 \rightarrow F/F^4$ otomorfizmi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\begin{aligned} \Phi : x_1 & \rightarrow x_1 + [x_1, x_2^2], \\ x_i & \rightarrow x_i \quad , 2 \leq i \leq 4, \end{aligned}$$

Bu durumda $c = 3$ ve $n = 4$ dir.

$$H_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\},$$

$$\begin{aligned} H_2 = \{ & [x_1, x_2], [x_1, x_3], [x_1, x_4], [x_2, x_3], [x_2, x_4], [x_3, x_4] \}, \\ H_3 = \left\{ \begin{array}{l} [[x_1, x_2], x_1], [[x_1, x_2], x_2], [[x_1, x_3], x_3], [[x_1, x_3], x_2], [[x_1, x_3], x_1], \\ [[x_1, x_4], x_1], [[x_1, x_4], x_2], [[x_1, x_4], x_3], [[x_1, x_4], x_4], [[x_2, x_3], x_3], \\ [[x_2, x_3], x_2], [[x_2, x_3], x_1], [[x_2, x_4], x_1], [[x_2, x_4], x_2], [[x_2, x_4], x_3], \\ [[x_2, x_4], x_4], [[x_3, x_4], x_1], [[x_3, x_4], x_2], [[x_3, x_4], x_3], [[x_3, x_4], x_4] \end{array} \right\} \end{aligned}$$

olmak üzere $H = H_1 \cup H_2 \cup H_3$, F/F^4 nin bazıdır.

$$\begin{aligned} \text{Fix}\Phi = \text{span}\{ & x_2, x_3, x_4, [x_1, x_2], [x_1, x_3], [x_1, x_4], [x_2, x_3], [x_2, x_4], [x_3, x_4], \\ & [[x_1, x_2], x_1], [[x_1, x_2], x_2], [[x_1, x_3], x_3], [[x_1, x_3], x_2], [[x_1, x_3], x_1], \\ & [[x_1, x_4], x_1], [[x_1, x_4], x_2], [[x_1, x_4], x_3], [[x_1, x_4], x_4], [[x_2, x_3], x_3], \\ & [[x_2, x_3], x_2], [[x_2, x_3], x_1], [[x_2, x_4], x_1], [[x_2, x_4], x_2], [[x_2, x_4], x_3], \\ & [[x_2, x_4], x_4], [[x_3, x_4], x_1], [[x_3, x_4], x_2], [[x_3, x_4], x_3], [[x_3, x_4], x_4] \} \end{aligned}$$

olup $\text{Fix}\Phi$, $\{x_2, x_3, x_4, [x_1, x_2], [x_1, x_3], [x_1, x_4], [[x_1, x_2], x_1], [[x_1, x_3], x_1], [[x_1, x_4], x_1]\}$ elemanları tarafından üretilir. Bu sebeple $\text{rank}(\text{Fix}\Phi) = 9 = c(n-1)$ dir.

Örnek 5.26 $\text{rank}(F/F^4) = 5$ ve $\Phi : F/F^4 \rightarrow F/F^4$ aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\begin{aligned}\Phi : x_1 &\rightarrow x_1 + [x_1, x_2^2], \\ x_i &\rightarrow x_i, \quad 2 \leq i \leq 5.\end{aligned}$$

Bu durumda $c = 3$ ve $n = 5$ dir.

$$\begin{aligned}H_1 &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, \\ H_2 &= \left\{ \begin{array}{l} [x_1, x_2], [x_1, x_3], [x_1, x_4], [x_1, x_5], \\ [x_2, x_3], [x_2, x_4], [x_2, x_5], [x_3, x_4], [x_3, x_5], [x_4, x_5] \end{array} \right\}, \\ H_3 &= \left\{ \begin{array}{l} [[x_1, x_2], x_1], [[x_1, x_2], x_2], [[x_1, x_3], x_3], [[x_1, x_3], x_2], [[x_1, x_3], x_1], \\ [[x_1, x_4], x_1], [[x_1, x_4], x_2], [[x_1, x_4], x_3], [[x_1, x_4], x_4], [[x_2, x_3], x_3], \\ [[x_2, x_3], x_2], [[x_2, x_3], x_1], [[x_2, x_4], x_1], [[x_2, x_4], x_2], [[x_2, x_4], x_3], \\ [[x_2, x_4], x_4], [[x_3, x_4], x_1], [[x_3, x_4], x_2], [[x_3, x_4], x_3], [[x_3, x_4], x_4], \\ [[x_1, x_5], x_1], [[x_1, x_5], x_2], [[x_1, x_5], x_3], [[x_1, x_5], x_4], [[x_1, x_5], x_5], \\ [[x_2, x_5], x_1], [[x_2, x_5], x_2], [[x_2, x_5], x_3], [[x_2, x_5], x_4], [[x_2, x_5], x_5], \\ [[x_3, x_5], x_1], [[x_3, x_5], x_2], [[x_3, x_5], x_3], [[x_3, x_5], x_4], [[x_3, x_5], x_5], \\ [[x_4, x_5], x_1], [[x_4, x_5], x_2], [[x_4, x_5], x_3], [[x_4, x_5], x_4], [[x_4, x_5], x_5] \end{array} \right\}\end{aligned}$$

olmak üzere $H = H_1 \cup H_2 \cup H_3$, F/F^4 nin bazıdır. Benzer şekilde

$$\text{rank}(\text{Fix}\Phi) = 12 = c(n-1)$$

dir.

Örnek 5.27 $\text{rank}(F/F^5) = 3$ ve $\Phi : F/F^5 \rightarrow F/F^5$ aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\begin{aligned}\Phi : x_1 &\rightarrow x_1 + [x_1, x_2^3], \\ x_i &\rightarrow x_i, \quad 2 \leq i \leq 3.\end{aligned}$$

Bu durumda $c = 4$, $n = 3$ dir.

$$\begin{aligned}H_1 &= \{x_1, x_2, x_3\}, \\ H_2 &= \{[x_1, x_2], [x_1, x_3], [x_2, x_3]\}, \\ H_3 &= \left\{ \begin{array}{l} [[x_1, x_2], x_1], [[x_1, x_2], x_2], [[x_1, x_3], x_3], [[x_1, x_3], x_2], \\ [[x_1, x_3], x_1], [[x_2, x_3], x_3], [[x_2, x_3], x_2], [[x_2, x_3], x_1] \end{array} \right\},\end{aligned}$$

$$H_4 = \left\{ \begin{array}{l} [[x_1, x_2], x_1], x_1], [[x_1, x_2], x_2], x_1], [[x_1, x_2], x_2], x_2], [[x_1, x_3], x_1], x_1], \\ [[x_1, x_3], x_2], x_1], [[x_1, x_3], x_2], x_2], [[x_1, x_3], x_3], x_1], [[x_1, x_3], x_3], x_2], \\ [[x_1, x_3], x_3], x_3], [[x_2, x_3], x_1], x_1], [[x_2, x_3], x_2], x_1], [[x_2, x_3], x_2], x_2], \\ [[x_2, x_3], x_3], x_1], [[x_2, x_3], x_3], x_2], [[x_2, x_3], x_3], x_3], [x_1, x_2], [x_1, x_3]], \\ [x_1, x_2], [x_2, x_3]], [x_1, x_3], [x_2, x_3]] \end{array} \right\}$$

olmak üzere $H = H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4$, F/F^5 nin bazıdır. Benzer şekilde

$$\text{rank}(\text{Fix}\Phi) = 8 = c(n-1)$$

dir.

Teorem 5.28 (Özkurt ve Ekici, 2008) $L = F/F''$ olsun. L nin aşağıdaki şekilde tanımlanan Φ endomorfizmi, F nin bir otomorfizmine taşınmaz.

$$\begin{aligned} \Phi : x_1 &\rightarrow x_1 + [[x_1, [x_{j_1}, x_{j_2}]], x_{j_3}] \quad , j_\alpha \neq j_\beta, 1 \leq \alpha, \beta \leq 3, j_\gamma \neq 1, \gamma = 1, 2, \\ x_i &\rightarrow x_i \quad , i \neq 1. \end{aligned}$$

Teorem 5.29 $L = F/F''$ serbest metabelyen Lie cebiri olsun. L nin aşağıdaki şekilde tanımlanan Φ endomorfizmi için $\text{Fix}\Phi$ sonlu üreteçli değildir.

$$\begin{aligned} \Phi : x_1 &\rightarrow x_1 + [[x_1, [x_{j_1}, x_{j_2}]], x_{j_3}] \quad , j_\alpha \neq j_\beta, 1 \leq \alpha, \beta \leq 3, j_\gamma \neq 1, \gamma = 1, 2, \\ x_i &\rightarrow x_i \quad , i \neq 1. \end{aligned}$$

İspat: $f_1 = [x_1, [x_{i_1}, x_{i_2}]]$, $i_1 \neq 1, i_2 \neq 1$ olmak üzere $n \geq 1$ için $f_n = [x_1, f_{n-1}]$ elemanları $\text{Fix}\Phi$ ye aittir. Benzer şekilde x_1 e bağlı olmayan $[F, F]$ nin herhangi bir u elemanı için $g_1 = [x_1, u]$ olmak üzere $n \geq 1$ için $g_n = [x_1, g_{n-1}]$ elemanları $\text{Fix}\Phi$ ye aittir. $\text{Fix}\Phi$ nin sonlu üreteçli olmayışı Teorem 5.18 deki gibi gösterilir.

Teorem 5.30 (Özkurt, 2007) $L = F/F''$ olsun. L nin aşağıdaki şekilde tanımlanan Φ otomorfizmi, $F/(F'')^2$ Lie cebirinin bir otomorfizmine taşınmaz.

$$\begin{aligned} \Phi : x_1 &\rightarrow x_1 + [[[x_3, x_2], x_1], x_1], \\ x_i &\rightarrow x_i \quad , i \neq 1. \end{aligned}$$

Teorem 5.31 $L = F/F''$ olsun. L nin aşağıdaki şekilde tanımlanan Φ otomorfizmi için $Fix\Phi$ sonlu üreteçli değildir.

$$\begin{aligned}\Phi: x_1 &\rightarrow x_1 + [[[x_3, x_2], x_1], x_1], \\ x_i &\rightarrow x_i, i \neq 1.\end{aligned}$$

İspat: $f_1 = [x_1, [x_i, x_j]]$, $i \neq 1, j \neq 1$ olmak üzere $n \geq 1$ için $f_n = [x_1, f_{n-1}]$ elemanları $Fix\Phi$ ye aittir. $Fix\Phi$ nin sonlu üreteçli olmayışı Teorem 5.18 deki gibi gösterilir.

Teorem 5.32 (Özkurt, 2007) $c \geq 3$ için $F/(F^c)'$ nin

$$\begin{aligned}\Phi: x_1 &\rightarrow x_1 + [\dots x_1, [x_{j_1}, x_{j_2}], \dots, x_{j_c}] , j_k \neq 1, k = 1, \dots, n, \\ x_i &\rightarrow x_i, i \neq 1.\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan Φ otomorfizmi, F nin bir otomorfizmine taşınamaz.

Teorem 5.33 $c \geq 3$ için $F/(F^c)'$ nin

$$\begin{aligned}\Phi: x_1 &\rightarrow x_1 + [\dots x_1, [x_{j_1}, x_{j_2}], \dots, x_{j_c}] , j_k \neq 1, k = 1, \dots, n, \\ x_i &\rightarrow x_i, i \neq 1.\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan Φ otomorfizmi için $Fix\Phi$ sonlu üreteçli değildir.

İspat: $f_1 = [x_1, [\dots [x_{i_1}, x_{i_2}], x_{i_3}], \dots, x_{i_c}]$, $i_k \neq 1, k = 1, \dots, c$ için $v = [\dots [x_{i_1}, x_{i_2}], x_{i_3}], \dots, x_{i_c}]$ olsun. $\Phi(v) = v$ olduğu açık.

$$\Phi(f_1) = [x_1, v] + \left[\underbrace{[\dots x_1, [x_{i_1}, x_{i_2}], \dots, x_{i_m}]}_{\in F^c}, \underbrace{v}_{\in F^c} \right] = [x_1, v] = f_1$$

olduğundan $f_1 \in Fix\Phi$ dir. $n \geq 1$ için $f_n = [x_1, f_{n-1}]$ elemanlarının $Fix\Phi$ ye ait olduğu tümevarımla kolayca gösterilebilir. $Fix\Phi$ nin sonlu üreteçli olmadığının ispatı Teorem 5.18 deki gibi yapılır.

Teorem 5.34 (Özkurt, 2007) R, F nin bir ideali $R \subseteq (F^c)$, $c \geq 3$, $R \subsetneq F^{c+1}$ olsun. $r \in R, r \notin F^{c+1}$ ve r, x_1 serbest üreteçine bağlı olmasın. Bu durumda F/R' nin

$$\begin{aligned}\Phi: x_1 &\rightarrow x_1 + [[x_1, r], x_1], \\ x_i &\rightarrow x_i, i \neq 1\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan Φ otomorfizmi F nin bir otomorfizmine taşınamaz.

Teorem 5.35 R, F nin bir ideali $R \subseteq F^c, c \geq 3, R \subsetneq F^{c+1}$ olsun. $r \in R, r \notin F^{c+1}$ ve r, x_1 serbest üreteciye bağlı olmasın. Bu durumda F/R' nin

$$\begin{aligned}\Phi: x_1 &\rightarrow x_1 + [[x_1, r], x_1], \\ x_i &\rightarrow x_i, i \neq 1,\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan Φ otomorfizmi için $\text{Fix}\Phi$ sonlu üreteçli değildir.

İspat: $f_1 = [x_1, r]$ olsun.

$$\Phi(f_1) = [x_1, r] + \underbrace{[[[x_1, r], x_1], r]}_{\in R'} = f_1$$

olduğundan $f_1 \in \text{Fix}\Phi$ dir. $f_n = [x_1, f_{n-1}]$, $n \geq 1$, elemanlarının $\text{Fix}\Phi$ ye ait olduğu tümevarımla kolayca gösterilebilir. $\text{Fix}\Phi$ nin sonlu üreteçli olmayışının ispat Teorem 5.18 deki gibi yapılır.

Teorem 5.36 (Özkurt, 2007) u homojen eleman, $l(u) = 2n_1 \dots n_k$ ve $u \in F^{n_1, \dots, n_{k-1}, 2}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\Phi: x_1 &\rightarrow x_1 + u, \\ x_i &\rightarrow x_i, i \neq 1,\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $F/F^{n_1, \dots, n_k}$ ($n_k > 2$) serbest polinilpotent Lie cebirinin Φ endomorfizmi F nin bir otomorfizmine taşınmaz.

Teorem 5.37 u homojen eleman, $l(u) = 2n_1 \dots n_k$ ve $u \in F^{n_1, \dots, n_{k-1}, 2}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\Phi: x_1 &\rightarrow x_1 + u, \\ x_i &\rightarrow x_i, i \neq 1,\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $F/F^{n_1, \dots, n_k}$ ($n_k > 2$) serbest polinilpotent Lie cebirinin Φ endomorfizmi için $\text{Fix}\Phi$ sonlu üreteçli değildir.

İspat: $v \in F^{n_1, \dots, n_{k-1}}$ ve v, x_1 e bağlı olmasın. Bu durumda $\Phi(v) = v$ olduğu açıktır. $f_1 = [x_1, v^{n_k-2}]$ olsun.

$$\Phi(f_1) = [x_1, v] + [u, v] = f_1$$

olduğundan $f_1 \in \text{Fix}\Phi$ dir. $n \geq 1$ için $f_n = [x_1, f_{n-1}]$ elemanlarının $\text{Fix}\Phi$ ye ait olduğu tümevarımla kolayca gösterilebilir. İspat Teorem 5.18 deki gibi yapılır.

Teorem 5.38 (Özkurt, 2007) $j = 2, \dots, n_k - 1$ için v_j, x_1 i içermeyen elemanlar ve $l(v_j) = n_1 n_2 \dots n_{k-1}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\Phi: x_1 &\rightarrow x_1 + [[x_1, v_1], \dots, v_{n_k-1}], \\ x_i &\rightarrow x_i, i \neq 1,\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $F/F^{n_1, \dots, n_k}$ serbest polinilpotent Lie cebirinin Φ endomorfizmi $F/F^{n_1, \dots, n_{k+1}}$ in bir otomorfizmine taşınamaz. Burada $v_i \in F^{n_1, \dots, n_{k-1}}$ dir.

Teorem 5.39 $j = 2, \dots, n_k - 1$ için v_j, x_1 i içermeyen elemanlar ve $l(v_j) = n_1 n_2 \dots n_{k-1}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\Phi: x_1 &\rightarrow x_1 + [[x_1, v_1], \dots, v_{n_k-1}], \\ x_i &\rightarrow x_i, i \neq 1,\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $F/F^{n_1, \dots, n_k}$ serbest polinilpotent Lie cebirinin Φ endomorfizmi için $Fix\Phi$ sonlu üreteçli değildir. Burada $v_i \in F^{n_1, \dots, n_{k-1}}$ dir.

İspat: $v_j \in F^{n_1, \dots, n_{k-1}}$ ve v_j, x_1 e bağlı olmadığından $\Phi(v_j) = v_j$ olduğu açıktır. $f_1 = [x_1, [[v_1, v_2], \dots, v_{n_k-1}]]$ olsun.

$$\Phi(f_1) = [x_1, [[v_1, v_2], \dots, v_{n_k-1}]] + \left[\underbrace{[[x_1, v_1], \dots, v_{n_k-1}]}_{\in F^{n_1, \dots, n_{k-1}}}, \underbrace{[[v_1, v_2], \dots, v_{n_k-1}]}_{\in F^{n_1, \dots, n_{k-1}, n_k-1}} \right] = f_1$$

olduğundan $f_1 \in Fix\Phi$ dir. $f_n = [x_1, f_{n-1}]$, $n \geq 1$, elemanlarının $Fix\Phi$ ye ait olduğu tümevarımla kolayca gösterilebilir. İspat Teorem 5.18 deki gibi yapılır.

Teorem 5.40 (Özkurt, 2007) $c \geq 3$ olmak üzere v, F^{c-1} nin x_1 içermeyen bir elemanı ve $l(v) = 2^{c-1}$ olsun. O zaman F/F^c cebirinin $\{x_1 + [[v, x_1], x_1], x_2, \dots, x_n\}$ serbest üreteç kümesi F/F^{c+1} cebirinin bir serbest üreteç kümesine taşınamaz.

Teorem 5.41 $c \geq 3$ olmak üzere v, F^{c-1} nin x_1 içermeyen bir elemanı ve $l(v) = 2^{c-1}$ olsun. O zaman F/F^c cebirinin

$$\begin{aligned}\Phi: x_1 &\rightarrow x_1 + [[v, x_1], x_1], \\ x_i &\rightarrow x_i, i \neq 1, 2 \leq i \leq n\end{aligned}$$

otomorfizmi için $Fix\Phi$ sonlu üreteçli değildir.

İspat: $\Phi(v) = v$ olduğu açık. $f_1 = [x_1, v]$ olsun.

$$\Phi(f_1) = [x_1, v] + \left[\underbrace{[[v, x_1], x_1]}_{\in F^{c-1}}, \underbrace{v}_{\in F^{c-1}} \right] = f_1$$

olduğundan $f_1 \in \text{Fix}\Phi$ dir. $f_n = [x_1, f_{n-1}]$, $n \geq 1$, elemanlarının $\text{Fix}\Phi$ ye ait olduğu tümevarımla kolayca gösterilebilir. İspatın devamı Teorem 5.18 deki gibi yapılır.

6. SERBEST NİLPOTENT LİE CEBİRLERİNİN OTOMORFİZMLERİNİN SABİT NOKTALARI

Bu bölümde serbest nilpotent Lie cebirlerinin bazı otomorfizmlerinin sabit noktalarının olması için gerekli koşul belirlenecek ve bazı otomorfizmler için sabit nokta alt cebirlerinin rankının sonlu olduğu gösterilecektir.

$F, \{x_1, \dots, x_n\}$ kümesi tarafından üretilen serbest Lie cebiri olsun.

Teorem 6.1 $\phi : F/F^c \rightarrow F/F^c$ aşağıdaki şekilde tanımlanan bir otomorfizm olsun.

$$\phi : x_i \rightarrow \sum_j \alpha_{ij} x_j + \sum \alpha_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}} [x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n-1}}], \quad i = 1, \dots, n$$

J_ϕ^t ile ϕ nin lineer parçasının Jacobian matrisinin transpozunu gösterelim. Eğer $\text{rank}(J_\phi^t - I) < n$ ise $\text{Fix}\phi \neq \{0\}$ dir.

İspat: $H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_{c-1}$ kümesi F/F^c için bir baz olup F/F^c nin boyutu m olsun.

Bu durumda

$$J_\phi^t - I = \begin{pmatrix} \alpha_{11} - 1 & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} - 1 & \dots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} - 1 \end{pmatrix}$$

dir. $g \in F/F^c$ ise

$$g = \sum_{i=1}^n m_i x_i + \sum_{i,j} \beta_{i,j} [x_i, x_j] + \dots + \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}} \beta_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}} [x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n-1}}]$$

şeklinde m tane elemanın lineer toplamı olarak yazabiliriz. $\phi(g) = g$ den

$$\begin{aligned} m_1 (\alpha_{11} - 1) + m_2 \alpha_{21} + \dots + m_n \alpha_{n1} &= 0, \\ m_1 \alpha_{12} + m_2 (\alpha_{22} - 1) + \dots + m_n \alpha_{n2} &= 0, \\ &\vdots \\ m_1 \alpha_{1n} + m_2 \alpha_{2n} + \dots + m_n (\alpha_{nn} - 1) &= 0 \end{aligned}$$

denklem sistemi ve m bilinmeyenli m tane denklemden oluşan bir diğer denklem sis-

temi elde edilir. Bu sistemlerinin katsayılar matrisi

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} - 1 & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} & & \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} - 1 & \dots & \alpha_{n2} & 0_{n \times m-n} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} - 1 & & \\ & A_{m-n \times n} & & & B_{m-n \times m-n} & \end{pmatrix}$$

olup $\text{rank}(J_\phi^t - I) < n$ olduğundan katsayılar matrisinin determinanı sıfır olur. Burada $A_{m-n \times n}$ matrisi elde edilen denklem sistemindeki bir uzunluklu elemanların katsayılar matrisini, $B_{m-n \times m-n}$ matrisi uzunluğu iki ve ikiden büyük olan elemanların oluşturduğu katsayılar matrisini göstermektedir. Bu sebeple sıfırdan farklı çözümler var olup $\text{Fix}\phi$ de sıfırdan farklı eleman vardır.

Örnek 6.2 $\text{rank}(F/F^3) = 2$ ve $\phi : F/F^3 \rightarrow F/F^3$ otomorfizmi

$$\begin{aligned} \phi : x_1 &\rightarrow ax_1 + bx_2 + k_1[x_1, x_2], \\ x_2 &\rightarrow cx_1 + dx_2 + k_2[x_1, x_2], \end{aligned} \quad a, b, c, d, k_1, k_2 \in K,$$

olarak tanımlansın. J_ϕ^t , ϕ nin liner parçasının Jacobian matrisinin transpozunu olsun. Eğer $\text{rank}(J_\phi^t - I) < 2$ ise $\text{Fix}\phi$ de sıfırdan farklı eleman olduğunu gösterelim.

$H = \{x_1, x_2, [x_1, x_2]\}$ kümesi F/F^3 için baz olduğundan $g \in F/F^3$ elemanı

$$g = mx_1 + nx_2 + z[x_1, x_2]$$

şeklinde yazılabilir. $\phi(g) = g$ den

$$\begin{aligned} m(a-1) + nc &= 0, \\ mb + n(d-1) &= 0, \\ mk_1 + nk_2 + z(ad - bc - 1) &= 0, \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin katsayılar matrisi

$$\begin{pmatrix} a-1 & c & 0 \\ b & d-1 & 0 \\ k_1 & k_2 & ad - bc - 1 \end{pmatrix}$$

olup $\text{rank}(J_\phi^t - I) < 2$ olduğundan $\det(J_\phi^t - I) = 0$ olup yukarıdaki denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı sıfır olur. Bu nedenle denklem sisteminin sıfırdan farklı çözümleri yani; $0 \neq g \in \text{Fix}(\phi)$ vardır.

Örnek 6.3 $\text{rank}(F/F^3) = 3$ ve $\phi : F/F^3 \rightarrow F/F^3$ otomorfizmi $a_i, b_i, c_i, \alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_{ij} \in K$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \phi : x_1 &\rightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \alpha_{11}[x_1, x_2] + \alpha_{12}[x_2, x_3] + \alpha_{13}[x_3, x_1], \\ x_2 &\rightarrow b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + \beta_{11}[x_1, x_2] + \beta_{12}[x_2, x_3] + \beta_{13}[x_3, x_1], \\ x_3 &\rightarrow c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \gamma_{11}[x_1, x_2] + \gamma_{12}[x_2, x_3] + \gamma_{13}[x_3, x_1], \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. Eğer $\text{rank}(J_\phi^t - I) < 3$ ise $\text{Fix}\phi$ de sıfırdan farklı eleman olduğunu gösterelim. $H = \{x_1, x_2, x_3, [x_1, x_2], [x_2, x_3], [x_3, x_1]\}$, F/F^3 için bir baz olduğundan

$$g = m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + z_1[x_1, x_2] + z_2[x_2, x_3] + z_3[x_3, x_1] \in F/F^3$$

olup $\phi(g) = g$ den

$$m_1(a_1 - 1) + m_2b_1 + m_3c_1 = 0,$$

$$m_1a_2 + m_2(b_2 - 1) + m_3c_2 = 0,$$

$$m_1a_3 + m_2b_3 + m_3(c_3 - 1) = 0,$$

$$z_1(a_1b_2 - a_2b_1 - 1) + z_2(b_1c_2 - b_2c_1) + z_3(c_1a_2 - c_2a_1) + m_1\alpha_{11} + m_2\beta_{11} + m_3\gamma_{11} = 0,$$

$$z_1(a_2b_3 - a_3b_2) + z_2(b_2c_3 - b_3c_2 - 1) + z_3(c_2a_3 - c_3a_2) + m_1\alpha_{12} + m_2\beta_{12} + m_3\gamma_{12} = 0,$$

$$z_1(a_3b_1 - a_1b_3) + z_2(b_3c_1 - b_1c_3) + z_3(c_3a_1 - c_1a_3 - 1) + m_1\alpha_{13} + m_2\beta_{13} + m_3\gamma_{13} = 0,$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin katsayılar matrisi

$$\begin{pmatrix} a_1 - 1 & b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 - 1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 - 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{11} & \beta_{11} & \gamma_{11} & a_1b_2 - a_2b_1 - 1 & b_1c_2 - b_2c_1 & c_1a_2 - c_2a_1 \\ \alpha_{12} & \beta_{12} & \gamma_{12} & a_2b_3 - a_3b_2 & b_2c_3 - b_3c_2 - 1 & c_2a_3 - c_3a_2 \\ \alpha_{13} & \beta_{13} & \gamma_{13} & a_3b_1 - a_1b_3 & b_3c_1 - b_1c_3 & c_3a_1 - c_1a_3 - 1 \end{pmatrix}$$

olup $\text{rank}(J_\phi^t - I) < 3$ olduğundan $\det(J_\phi^t - I) = 0$ olur. Dolayısıyla yukarıdaki denklem sisteminin sıfırdan farklı bir çözümü vardır. Sonuç olarak $\text{Fix}\phi$ de sıfırdan farklı eleman vardır.

Örnek 6.4 $\text{rank}(F/F^3) = 4$ ve $\phi : F/F^3 \rightarrow F/F^3$ otomorfizmi

$$\begin{aligned} \phi : x_1 &\rightarrow \sum_{i=1}^4 a_i x_i + \sum_{i,j=1}^4 \alpha_{i,j} [x_i, x_j], \\ x_2 &\rightarrow \sum_{i=1}^4 b_i x_i + \sum_{i,j=1}^4 \beta_{i,j} [x_i, x_j], \\ x_3 &\rightarrow \sum_{i=1}^4 c_i x_i + \sum_{i,j=1}^4 \gamma_{i,j} [x_i, x_j], \\ x_4 &\rightarrow \sum_{i=1}^4 d_i x_i + \sum_{i,j=1}^4 k_{i,j} [x_i, x_j], \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. $H = \{x_1, x_2, x_3, x_4, [x_1, x_2], [x_1, x_3], [x_1, x_4], [x_2, x_3], [x_2, x_4], [x_3, x_4]\}$ F/F^3 için baz olduğundan bir $g \in F/F^3$ elemanı

$$g = \sum_{i=1}^4 m_i x_i + z_1 [x_1, x_2] + z_2 [x_1, x_3] + z_3 [x_1, x_4] + z_4 [x_2, x_3] + z_5 [x_2, x_4] + z_6 [x_3, x_4] \in F/F^3$$

olarak yazılabilir. $\phi(g) = g$ den elde edilen denklem sisteminin katsayılar matrisi

$$\begin{pmatrix} a_1 - 1 & b_1 & c_1 & d_1 & & \\ & a_2 & b_2 - 1 & c_2 & d_2 & 0_{4 \times 6} \\ & a_3 & b_3 & c_3 - 1 & d_3 & \\ & a_4 & b_4 & c_4 & d_4 - 1 & \\ & & A_{6 \times 4} & & & B_{6 \times 6} \end{pmatrix}$$

dir. Eğer $\text{rank}(J_\phi^t - I) < 4$ ise $\det(J_\phi^t - I) = 0$ olduğundan yukarıdaki denklem sisteminin sıfırdan farklı çözümü vardır. Dolayısıyla $\text{Fix}\phi$ de sıfırdan farklı eleman vardır.

Örnek 6.5 $\text{rank}(F/F^4) = 3$ ve

$$\begin{aligned} \phi : x_1 &\rightarrow \sum_{i=1}^3 a_i x_i + \sum_{i,j,k} \alpha_{ijk} [x_i, x_j, x_k], \quad a_i, b_i, c_i, \alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_{ij} \in K, \\ x_2 &\rightarrow \sum_{i=1}^3 b_i x_i + \sum_{i,j,k} \beta_{ijk} [x_i, x_j, x_k], \\ x_3 &\rightarrow \sum_{i=1}^3 c_i x_i + \sum_{i,j,k} \gamma_{ijk} [x_i, x_j, x_k], \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. F/F^4 , l boyutlu olsun. Eğer $\text{rank}(J_\phi^t - I) < 3$ ise $\text{Fix}\phi$ de sıfırdan farklı eleman olduğunu gösterelim. $g \in F/F^4$ ise

$$g = \sum_{i=1}^3 m_i x_i + \sum_{y,z} U_{y,z} [x_y, x_z] + \sum_{y,z,t} U_{y,z,t} [x_y, x_z, x_t] \in F/F^4$$

olup $\phi(g) = g$ den

$$m_1(a_1 - 1) + m_2 b_1 + m_3 c_1 = 0,$$

$$m_1 a_2 + m_2(b_2 - 1) + m_3 c_2 = 0,$$

$$m_1 a_3 + m_2 b_3 + m_3(c_3 - 1) = 0,$$

denklem sistemi ve $l - 3$ tane homojen denklem sistemi elde ederiz. Bu denklem sisteminin katsayılar matrisi

$$\begin{pmatrix} a_1 - 1 & b_1 & c_1 & & \\ & a_2 & b_2 - 1 & c_2 & 0_{3 \times l-3} \\ & a_3 & b_3 & c_3 - 1 & \\ & & A_{l-3 \times 3} & & B_{l-3 \times l-3} \end{pmatrix}$$

olup $\text{rank}(J_\phi^t - I) < 3$ olduğundan $\det(J_\phi^t - I) = 0$ olur. Dolayısıyla $\text{Fix}\phi$ de sıfırdan farklı eleman vardır.

Teorem 6.6 $c \geq 2$ olmak üzere F/F^c nin

$$\begin{aligned} \Phi: x_1 &\rightarrow x_1 + [x_1, x_2], \\ x_i &\rightarrow x_i, 1 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan otomorfizmi için $\text{rankFix}\Phi = (n - 1) + |H_{c-1}| - |H_{c-1}^{x_2, \dots, x_n}|$ dir. Burada $H_{c-1}^{x_2, \dots, x_n}$ kümesi H_{c-1} deki sadece $x_2, \dots, x_n$ üreteçlerine göre yazılabilen elemanların kümesidir.

İspat: Tümevarım yöntemiyle Φ nin $H_1, H_2, \dots, H_{c-2}$ deki x_1 i içeren elemanları sabit bırakmadığını gösterelim. İddianın H_1 ve H_2 için doğru olduğu açık. İddia $H_1, H_2, \dots, H_{c-3}$ için doğru olsun. $u \in H_{c-2}$ ve u nun yazılışında x_1 bulunsun. Bu durumda

$u \in H_{c-2}$ elemanı $k \in H_x$, $v \in H_y$, $l(k) \leq l(v)$, $x + y = c - 2$ olmak üzere $u = [k, v]$ olarak yazabiliriz. H_x ve H_y deki x_1 e bağlı olan elemanlar $Fix\phi$ ye ait olmadığından

$$\begin{aligned}\Phi(k) &= k + k', l(k') > x \text{ veya } l(k') = 0, \\ \Phi(v) &= v + v', l(v') > y \text{ veya } l(v') = 0\end{aligned}$$

dır. Burada u nun yazılışında x_1 bulunduğundan $l(k')$ ve $l(v')$ den en fazla birisi sıfır olabilir.

$$\Phi(u) = [k + k', v + v'] = [k, v] + [k, v'] + [k', v] + [k', v']$$

olup burada

$$\begin{aligned}l([k, v']) &= l(k) + l(v') > l(k) + l(v), \\ l([k', v]) &= l(k') + l(v) > l(k) + l(v), \\ l([k', v']) &= l(k') + l(v') > l(k) + l(v)\end{aligned}$$

olduğundan $l([k', v']) > l([k, v'])$ ve $l([k', v']) > l([k', v])$ dir. Ayrıca $[k, v']$ ve $[k', v]$ elemanlarından en az bir tanesi sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla $\Phi(u) \neq u$ dir.

Şimdi, $\Phi(H_{c-1}) = H_{c-1}$ olduğunu gösterelim. $u \in H_{c-1}$ ve u nun yazılışında x_1 yoksa $\Phi(u) = u$ olduğu açıktır. Eğer u nun yazılışında x_1 varsa $u = [k, v]$, $k \in H_x$, $v \in H_y$, $l(k) \leq l(v)$, $x + y = c - 1$ olarak yazabiliriz.

$$\Phi(u) = [k + k', v + v'] = [k, v] + [k, v'] + [k', v] + [k', v']$$

olup

$$\begin{aligned}l([k, v']) &= l(k) + l(v') > x + y = c - 1 \Rightarrow [k, v'] = 0, \\ l([k', v]) &= l(k') + l(v) > x + y = c - 1 \Rightarrow [k', v] = 0, \\ l([k', v']) &= l(k') + l(v') > x + y = c - 1 \Rightarrow [k', v'] = 0,\end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla, $\Phi(u) = u$, yani; $\Phi(H_{c-1}) = H_{c-1}$ dir. $H_{c-1}^{x_2, \dots, x_n}$ kümesi H_{c-1} de $\{x_2, \dots, x_n\}$ tarafından oluşturulan elemanların kümesi olmak üzere

$$rankFix\Phi = (n - 1) + |H_{c-1}| - |H_{c-1}^{x_2, \dots, x_n}|$$

dir. Burada

$$|H_{c-1}| = \frac{1}{c-1} \sum_{d \mid c-1} \mu(d) n^{c-1/d}$$

ve

$$|H_{c-1}^{x_2, \dots, x_m}| = \frac{1}{c-1} \sum_{d \mid c-1} \mu(d) (n-1)^{c-1/d}$$

dir.

Örnek 6.7 $\Phi : F/F^4 \rightarrow F/F^4$

$$\begin{aligned} \Phi : x_1 &\rightarrow x_1 + [x_1, x_2], \\ x_i &\rightarrow x_i, 2 \leq i \leq 3 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan otomorfizm için $\text{rankFix}\Phi = 8$ olduğunu gösterelim.

$H = H_1 \cup H_2 \cup H_3$ kümesi $F/\gamma_4(F)$ için bir bazdır.

$$H_2 = \{[x_1, x_2], [x_1, x_3], [x_2, x_3]\}$$

olup sadece $[x_2, x_3] \in \text{Fix}\Phi$ dir.

$$H_3 = \left\{ \begin{array}{l} [[x_1, x_2], x_1], [[x_1, x_2], x_2], [[x_1, x_3], x_3], [[x_1, x_3], x_2], \\ [[x_1, x_3], x_1], [[x_2, x_3], x_3], [[x_2, x_3], x_2], [[x_2, x_3], x_1] \end{array} \right\}$$

olup $\Phi(H_3) = H_3$ dir.

$$\{x_2, x_3, [[x_1, x_2], x_1], [[x_1, x_2], x_2], [[x_1, x_3], x_3], [[x_1, x_3], x_2], [[x_1, x_3], x_1], [[x_2, x_3], x_1]\}$$

kümesi $\text{Fix}\Phi$ nin üreteç kümesidir.

Örnek 6.8 $\Phi : F/F^5 \rightarrow F/F^5$

$$\begin{aligned} \Phi : x_1 &\rightarrow x_1 + [x_1, x_2], \\ x_i &\rightarrow x_i, 2 \leq i \leq 3 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan otomorfizm için $\text{rankFix}\Phi = 17$ olduğunu gösterelim.

$H = H_1 \cup H_2 \cup H_3, F/\gamma_4(F)$ için bir bazdır.

$$H_2 = \{[x_1, x_2], [x_1, x_3], [x_2, x_3]\}$$

olup sadece $[x_2, x_3] \in \text{Fix}\Phi$ dir.

$$H_3 = \left\{ \begin{array}{l} [[x_1, x_2], x_1], [[x_1, x_2], x_2], [[x_1, x_3], x_3], [[x_1, x_3], x_2], \\ [[x_1, x_3], x_1], [[x_2, x_3], x_3], [[x_2, x_3], x_2], [[x_2, x_3], x_1] \end{array} \right\}$$

olup sadece $[[x_2, x_3], x_3], [[x_2, x_3], x_2] \in \text{Fix}\Phi$ dir.

$$H_4 = \left\{ \begin{array}{l} [[[x_1, x_2], x_1], x_1], [[[x_1, x_2], x_2], x_1], [[[x_1, x_2], x_2], x_2], [[[x_1, x_3], x_1], x_1], \\ [[[x_1, x_3], x_2], x_1], [[[x_1, x_3], x_2], x_2], [[[x_1, x_3], x_3], x_1], [[[x_1, x_3], x_3], x_2], \\ [[[x_1, x_3], x_3], x_3], [[[x_2, x_3], x_1], x_1], [[[x_2, x_3], x_2], x_1], [[[x_2, x_3], x_2], x_2], \\ [[[x_2, x_3], x_3], x_1], [[[x_2, x_3], x_3], x_2], [[[x_2, x_3], x_3], x_3], [[x_1, x_2], [x_1, x_3]], \\ [x_1, x_2], [x_2, x_3], [[x_1, x_3], [x_2, x_3]] \end{array} \right\}$$

$\Phi(H_4) = H_4$ dir. Dolayısıyla,

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2, x_3, \\ [[[x_1, x_2], x_1], x_1], [[[x_1, x_2], x_2], x_1], [[[x_1, x_2], x_2], x_2], \\ [[[x_1, x_3], x_1], x_1], [[[x_1, x_3], x_2], x_1], [[[x_1, x_3], x_2], x_2], [[[x_1, x_3], x_3], x_1], \\ [[[x_1, x_3], x_3], x_2], [[[x_1, x_3], x_3], x_3], [[[x_2, x_3], x_1], x_1], [[[x_2, x_3], x_2], x_1], \\ [[[x_2, x_3], x_3], x_1], [[x_1, x_2], [x_1, x_3]], [[x_1, x_2], [x_2, x_3]], [[x_1, x_3], [x_2, x_3]] \end{array} \right\}$$

kümesi $\text{Fix}\Phi$ nin üreteç kümesidir.

Teorem 6.9 $c \geq 4$ olmak üzere F/F^c nin aşağıda şekilde tanımlanan

$$\begin{aligned} \Phi : x_1 &\rightarrow x_1 + [[x_1, x_2], x_2], \\ x_i &\rightarrow x_i, i \neq 1, 2 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

otomorfizmi için $\text{Fix}\Phi$ sonlu üreteçlidir.

İspat: İspat tümevarım yöntemiyle yapılacaktır. $c = 4$ için sonuç Teorem 5.23 den elde edilir. İddia $c - 1$ için doğru olsun. Yani; $\Phi : F/F^{c-1} \rightarrow F/F^{c-1}$

$$\begin{aligned} \Phi : x_1 &\rightarrow x_1 + [[x_1, x_2], x_2], \\ x_i &\rightarrow x_i, i \neq 1, 2 \leq i \leq n \end{aligned}$$

olarak tanımlanan endomorfizm için $Fix\Phi$ sonlu üreteçli olsun. Bu durumda, S_K kümesi Teorem 5.23 dekine benzer şekilde oluşturulmuş olmak üzere $Fix\Phi = \langle S_K \rangle$ dır. F/F^{c-1} için $H_1 \cup \dots \cup H_{c-2}$ kümesi bir bazdır. Şimdi F/F^c nin

$$\begin{aligned}\Phi : x_1 &\rightarrow x_1 + [[x_1, x_2], x_2], \\ x_i &\rightarrow x_i, i \neq 1, 2 \leq i \leq n\end{aligned}$$

otomorfizmini düşünelim. S'_K ile S_K daki H_{c-2} nin elemanlarının x_1 ile çarpılmasıyla elde edilen elemanların S_K kümesine eklenmesiyle oluşan küme olsun. Bu durumda $Fix\Phi = \langle S'_K \rangle$ dir. Dolayısıyla ispat biter.

Teorem 6.10 $c \geq 2$ olmak üzere F/F^c nin

$$\begin{aligned}\Phi : x_1 &\rightarrow x_1 + u, \text{ deg } u = c - k, \\ x_i &\rightarrow x_i, 1 < i \leq n\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan otomorfizmi için

$$\begin{aligned}rank Fix\Phi &= (n-1) + \sum_{i=k+1}^{c-1} (|H_i| - |H_i^{x_2, \dots, x_n}|) \\ &= (n-1) + \frac{1}{c-1} \sum_{i=k+1}^{c-1} \sum_{d \in d \setminus i} \mu(d) (n^{i/d} - (n-1)^{i/d})\end{aligned}$$

dir.

İspat: Tümevarım yöntemiyle Φ nin $H_1, H_2, \dots, H_k$ daki x_1 i içeren elemanları sabit bırakmadığını gösterelim. İddianın H_1 ve H_2 için doğru olduğu açık. İddia $H_1, H_2, \dots, H_{k-1}$ için doğru olsun. $z \in H_k$ ve z nin yazılışında x_1 bulunsun.

$$z \in H_k \Rightarrow z = [\alpha, \beta], \alpha \in H_x, \beta \in H_y, l(\alpha) \leq l(\beta), x + y = k$$

H_x ve H_y de x_1 e bağlı olan elemanlar $Fix\Phi$ ye ait olmadığından

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha) &= \alpha + \alpha', l(\alpha') > x \text{ veya } l(\alpha') = 0, \\ \Phi(\beta) &= \beta + \beta', l(\beta') > y \text{ veya } l(\beta') = 0\end{aligned}$$

dır. Burada u nun yazılışında x_1 bulunduğundan $l(\alpha')$ ve $l(\beta')$ den en fazla birisi sıfır olabilir.

$$\Phi(z) = [\alpha + \alpha', \beta + \beta'] = [\alpha, \beta] + [\alpha, \beta'] + [\alpha', \beta] + [\alpha', \beta']$$

olup burada

$$\begin{aligned} l([a, \beta']) &= l(\alpha) + l(\beta') > l(a) + l(\beta) \text{ ve} \\ l([a', \beta]) &= l(\alpha') + l(\beta) > l(a) + l(\beta) \text{ ve} \\ l([a', \beta']) &= l(\alpha') + l(\beta') > l(a) + l(\beta) \end{aligned}$$

olduğundan $l([a', \beta']) > l([a, \beta'])$ ve $l([a', \beta']) > l([a', \beta])$ dir. Ayrıca $[a, \beta']$ ve $[a', \beta]$ elemanlarından en az bir tanesi sıfırdan farklı olduğundan $\Phi(z) \neq z$ dir.

Şimdi, $\Phi(H_{k+1}) = H_{k+1}$, $\Phi(H_{k+2}) = H_{k+2}, \dots$, $\Phi(H_{c-1}) = H_{c-1}$ olduğunu gösterelim. $z \in H_{k+1}$ ve z nin yazılışında x_1 yoksa $\Phi(z) = z$ olduğu açık. $z = z(x_1, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+1}})$ olsun.

$$\Phi(z) = z(x_1 + u, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+1}}) = z(x_1, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+1}}) + z(u, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+1}})$$

$l(u) = c - k$ olduğundan $z(u, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+1}}) \in F^c$ olup $z(u, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+1}}) = 0$ olur. Bu sebeple $\Phi(H_{k+1}) = H_{k+1}$ dir. Benzer şekilde $\Phi(H_{k+2}) = H_{k+2}, \dots$, $\Phi(H_{c-1}) = H_{c-1}$ dir. $H_{c-1}^{x_2, \dots, x_n}$ ile H_{c-1} deki $\{x_2, \dots, x_n\}$ tarafından oluşturulan Hall bazının $(c-1)$ inci Hall kümesini gösterelim. Bu sebeple $\text{rankFix}\Phi = (n-1) + \sum_{i=k+1}^{c-1} (|H_i| - |H_i^{x_2, \dots, x_n}|)$ dir. Burada

$$\begin{aligned} |H_i| &= \frac{1}{i} \sum_{\substack{d \\ d \mid i}} \mu(d) n^{i/d} \\ |H_i^{x_2, \dots, x_k}| &= \frac{1}{i} \sum_{\substack{d \\ d \mid i}} \mu(d) (n-1)^{i/d} \end{aligned}$$

dir.

Önerme 6.11 $\Phi : F/F^{c+1} \rightarrow F/F^{c+1}$ otomorfizmi aşağıdaki şekilde tanımlanmış olsun.

$$\begin{aligned} \Phi : x_1 &\rightarrow x_1 + u_1, & u_1, u_2 &\in F^c, \\ x_2 &\rightarrow x_2 + u_2, \\ x_i &\rightarrow x_i, & 3 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

$\text{rankFix}\Phi = (n-2) + \sum_{k=1}^{c-1} \sum_{i=1}^2 k(n-i)$ olduğunu gösterelim.

İspat: S_K kümesi Teorem 5.23 dekinde benzer şekilde oluşturulan küme olsun.

$$H_2 = \{[x_1, x_2], [x_1, x_3], \dots, [x_1, x_n], [x_2, x_3], \dots, [x_2, x_n], \dots, [x_{n-1}, x_n]\}$$

olup $|H_2| = \frac{n(n-1)}{2}$ dir. S_2 kümesi

$$S_2 = \{x_3, \dots, x_n, [x_1, x_2], \dots, [x_1, x_n], [x_2, x_3], \dots, [x_2, x_n]\}$$

olup $|S_2| = (n-2) + (n-1) + (n-2)$ dir. Benzer şekilde

$$S_3 = \left\{ \begin{array}{c} x_3, \dots, x_n, \\ [x_1, x_2], \dots, [x_1, x_n], [x_2, x_3], \dots, [x_2, x_n], \\ \underbrace{[[x_1, x_2], x_1], \dots, [[x_1, x_n], x_1], [[x_1, x_2], x_2], \dots, [[x_1, x_n], x_2],}_{n-1 \tan e} \\ \underbrace{[[x_2, x_3], x_1], \dots, [[x_2, x_n], x_1], [[x_2, x_3], x_2], \dots, [[x_2, x_n], x_2]}_{n-2 \tan e} \end{array} \right\}$$

olup $|S_3| = (n-2) + (n-1) + (n-2) + 2(n-1) + 2(n-2)$ elde edilir. Aşağıdaki grafikten faydalanarak genel olarak

$$\begin{aligned} |S_c| &= (n-2) + (n-1) + (n-2) + 2(n-1) + 2(n-2) + \dots + (c-1)(n-1) + (c-1)(n-2) \\ &= (n-2) + \sum_{k=1}^{c-1} \sum_{i=1}^2 k(n-i) \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Bu otomorfizmde sadece x_1, x_2 sabit kalmadığından grafik x_1 ve x_2 için yapılmıştır. L_c^{c-3} ile S_c deki c uzunluklu elemanların sayısını (yani; ağaç grafiğinde $c-3$ üncü sütündaki elemanların sayısı) gösterelim.

$$\begin{array}{cccc} \underbrace{[L_3^0]} & \underbrace{[L_4^1]} & \underbrace{[L_5^2]} & \dots \\ \text{0.Sütun} & \text{1.Sütun} & \text{2.Sütun} & \\ x_1 & \rightarrow x_1 & \rightarrow x_1 & \rightarrow \dots \end{array}$$

$$\begin{array}{c} x_2 \rightarrow x_1 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \\ \searrow \\ x_2 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \\ \searrow \\ x_2 \rightarrow \dots \\ \searrow \\ \dots \end{array}$$

$$\text{Dolayısıyla, } \text{rankFix}\Phi = |S_c| = (n-2) + \sum_{k=1}^{c-1} \sum_{i=1}^2 k(n-i) \text{ dir.}$$

Önerme 6.12 $\Phi : F/F^{c+1} \rightarrow F/F^{c+1}$ otomorfizmi $u_1, u_2, u_3 \in F^c$ olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlanmış olsun.

$$\begin{aligned}\Phi : x_1 &\rightarrow x_1 + u_1, \\ x_2 &\rightarrow x_2 + u_2, \\ x_3 &\rightarrow x_3 + u_3, \\ x_i &\rightarrow x_i, 4 \leq i \leq n.\end{aligned}$$

$\text{rankFix}\Phi = 13n - 27$ dir.

İspat: Önce, S_K kümelerini belirleyelim.

$$S_2 = \{x_4, \dots, x_n, [x_1, x_2], \dots, [x_1, x_n], [x_2, x_3], \dots, [x_2, x_n], [x_3, x_4], \dots, [x_3, x_n]\}$$

olup $|S_2| = (n-3) + (n-1) + (n-2) + (n-3)$ dir. Benzer şekilde

$$S_3 = \left\{ \begin{array}{c} x_4, \dots, x_n, \\ [x_1, x_2], \dots, [x_1, x_n], [x_2, x_3], \dots, [x_2, x_n], [x_3, x_4], \dots, [x_3, x_n], \\ \underbrace{[[x_1, x_2], x_1], \dots, [[x_1, x_n], x_1]}_{n-1 \tan e}, \underbrace{[[x_1, x_2], x_2], \dots, [[x_1, x_n], x_2]}_{n-1 \tan e}, \underbrace{[[x_1, x_2], x_3], \dots, [[x_1, x_n], x_3]}_{n-1 \tan e}, \\ \underbrace{[[x_2, x_3], x_1], \dots, [[x_2, x_n], x_1]}_{n-2 \tan e}, \underbrace{[[x_2, x_3], x_2], \dots, [[x_2, x_n], x_2]}_{n-2 \tan e}, \underbrace{[[x_2, x_3], x_3], \dots, [[x_2, x_n], x_3]}_{n-2 \tan e}, \\ \underbrace{[[x_3, x_4], x_1], \dots, [[x_3, x_n], x_1]}_{n-3 \tan e}, \underbrace{[[x_3, x_4], x_2], \dots, [[x_3, x_n], x_2]}_{n-3 \tan e}, \underbrace{[[x_3, x_4], x_3], \dots, [[x_3, x_n], x_3]}_{n-3 \tan e} \end{array} \right\}$$

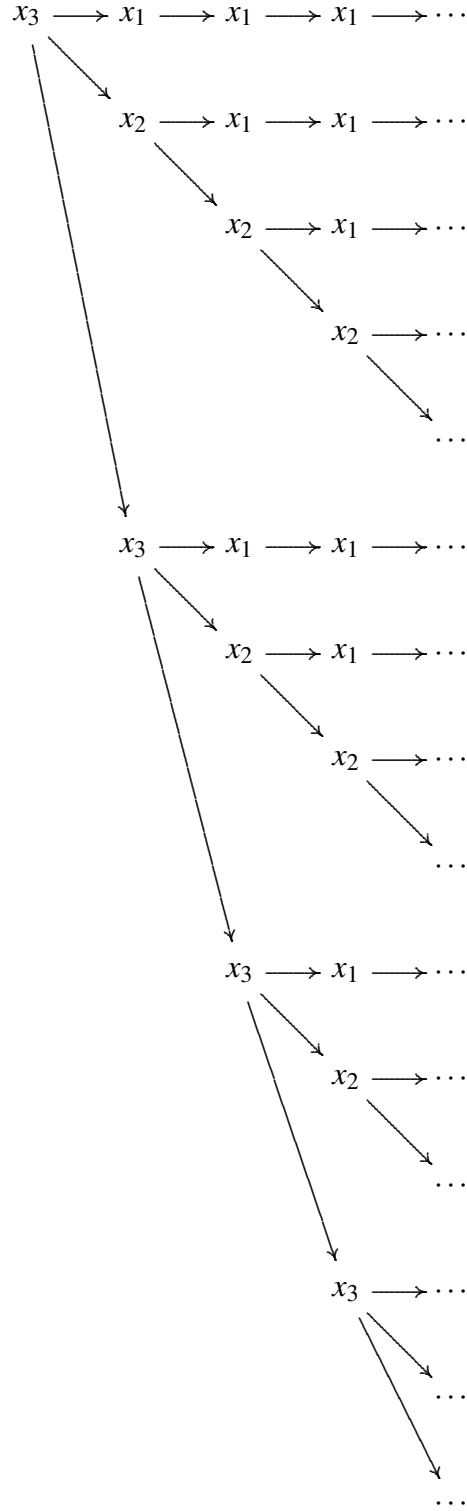
olup

$$|S_3| = (n-3) + (n-1) + (n-2) + (n-3) + 3(n-1) + 3(n-2) + 3(n-3)$$

elde edilir. Bu otomorfizmde sadece x_1, x_2, x_3 sabit kalmadığından aşağıdaki grafik x_1, x_2 ve x_3 için yapılmıştır.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \underbrace{[L_3^0]} & \underbrace{[L_4^1]} & \underbrace{[L_5^2]} & \dots & & & \\
 \text{0.Sütun} & \text{1.Sütun} & \text{2.Sütun} & & & & \\
 x_1 & \longrightarrow x_1 & \longrightarrow x_1 & \longrightarrow x_1 & \longrightarrow \dots & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 x_2 & \longrightarrow & x_1 & \longrightarrow & x_1 & \longrightarrow & x_1 & \longrightarrow & \dots \\
 & \searrow & & & & & & & \\
 & & x_2 & \longrightarrow & x_1 & \longrightarrow & x_1 & \longrightarrow & \dots \\
 & & & \searrow & & & & & \\
 & & & & x_2 & \longrightarrow & x_1 & \longrightarrow & \dots \\
 & & & & & \searrow & & & \\
 & & & & & & x_2 & \longrightarrow & \dots \\
 & & & & & & & \searrow & \\
 & & & & & & & & \dots
 \end{array}$$



$$\text{rankFix}\Phi = |S_3| = (n-3) + (n-1) + (n-2) + (n-3) + 3(n-1) + 3(n-2) + 3(n-3).$$

L_c^{c-3} ile S_c deki c uzunluklu elemanların sayısını (yani; ağaç grafiğinde $c-3$

üncü sütündaki elemanların sayısı) gösterelim.

Buna göre aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 6.13 $\Phi : F/F^{c+1} \rightarrow F/F^{c+1}$ otomorfizmi aşağıdaki şekilde tanımlanmış olsun.

$$\begin{aligned}\Phi : x_i &\rightarrow x_i + u_i, u_i \in F^c, 1 \leq i \leq k, \\ x_j &\rightarrow x_j,\end{aligned}$$

Bu durumda $\text{rankFix}\Phi = |S_c| = (n-k) + (1 + L_3^0 + L_4^1 + \dots + L_c^{c-3}) \sum_{i=1}^k (n-i)$ dir. Burada

$$L_{y+3}^y = \frac{1}{(y+1)!} \prod_{i=0}^y (k+i).$$

İspat: İspat bir önceki önermedekine benzer şekilde yapılır.

Şimdi, $H(k, y) = \frac{1}{(y+1)!} \prod_{i=0}^y (k+i)$ olmak üzere $H(k, y) = \binom{k+y}{k-1}$ olduğunu ispatlamadan önce bazı hesaplamalar yapalım.

$$H(k, 0) = 1 + 1 + \dots + 1 = k,$$

$$\begin{aligned}H(k, 1) &= 1 + 2 + \dots + k, \\ &= \sum_{i=1}^k i.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H(k, 2) &= 1 + (1+2) + (1+2+3) + \dots + (1+2+\dots+k) \\ &= \sum_{i=1}^1 i + \sum_{i=1}^2 i + \sum_{i=1}^3 i + \dots + \sum_{i=1}^k i \\ &= \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^j i \\ &= \frac{1}{6} k(k+1)(k+2).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H(k, 3) &= 1 + (1 + (1+2)) + (1 + (1+2) + (1+2+3)) + \dots \\ &\vdots \\ &\quad + (1 + (1 + (1+2)) + \dots + (1 + (1+2) + \dots + (1+2+\dots+k))) \\ &= \sum_{t=1}^k \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^j i\end{aligned}$$

Dolayısıyla, $k, y \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$, $y \geq 1$ için

$$H(k, y) = \underbrace{\sum_{x_y=1}^k \sum_{x_{y-1}=1}^{x_y} \dots \sum_{x_2=1}^{x_3} \sum_{x_1=1}^{x_2}}_{y \text{ tane toplam}} x_1$$

ve

$$H(k, 0) = k$$

olduğu açıktır.

Önerme 6.14 $k, y \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$, $y \geq 0$ için

$$H(k, y) = \binom{k+y}{k-1}$$

dir.

İspat: Öncelikle $y = 0$ için $H(k, 0) = \binom{k}{k-1}$ olduğu açıktır.

O halde $y \geq 1$ kabul edip k ve y üzerinden çift tümevarım uygulayalım.

1. Önermenin $k = 1$ ve $y = 1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$H(1, 1) = \sum_{i=1}^1 i = 1 = \binom{1+1}{1-1} \text{ olduğundan } k = 1 \text{ ve } y = 1 \text{ için önerme doğrudur.}$$

2. Önermenin $y = 1$ ve k için doğru olduğunu varsayalım. Şimdi önermenin $y = 1$ ve $k + 1$ için de doğru olduğunu gösterelim. O halde

$$H(k, 1) = \sum_{i=1}^k i = \binom{k+1}{k-1}$$

dir. O zaman

$$\begin{aligned} H(k+1, 1) &= \sum_{i=1}^{k+1} i = (k+1) + \sum_{i=1}^k i \\ &= (k+1) + \binom{k+1}{k-1} \\ &= \binom{k+2}{k} \end{aligned}$$

olduğundan önerme $y = 1$ ve $k + 1$ için de doğrudur.

3. Önermenin y ve her k için önermenin doğru olduğunu varsayalım (Yani; k sabit olsun). Şimdi $y + 1$ ve her k için de doğru olduğunu gösterelim. O halde

$$H(k, y) = \underbrace{\sum_{x_y=1}^k \sum_{x_{y-1}=1}^{x_y} \dots \sum_{x_2=1}^{x_3} \sum_{x_1=1}^{x_2}}_{y \text{ tane toplam}} x_1 = \binom{k+y}{k-1}$$

olsun. O zaman

$$\begin{aligned} H(k, y+1) &= \underbrace{\sum_{x_{y+1}=1}^k \sum_{x_y=1}^{x_{y+1}} \dots \sum_{x_2=1}^{x_3} \sum_{x_1=1}^{x_2}}_{y+1 \text{ tane toplam}} x_1 \\ &= \underbrace{\sum_{x_y=1}^1 \dots \sum_{x_2=1}^{x_3} \sum_{x_1=1}^{x_2}}_{y \text{ tane toplam}} x_1 + \underbrace{\sum_{x_y=1}^2 \dots \sum_{x_2=1}^{x_3} \sum_{x_1=1}^{x_2}}_{y \text{ tane toplam}} x_1 + \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \underbrace{\sum_{x_y=1}^{k-1} \dots \sum_{x_2=1}^{x_3} \sum_{x_1=1}^{x_2}}_{y \text{ tane toplam}} x_1 + \underbrace{\sum_{x_y=1}^k \dots \sum_{x_2=1}^{x_3} \sum_{x_1=1}^{x_2}}_{y \text{ tane toplam}} x_1 \\ &= \binom{1+y}{1-1} + \binom{2+y}{2-1} + \dots + \binom{k+y}{k-1} \\ &= \binom{1+y}{0} + \binom{2+y}{1} + \dots + \binom{k+y}{k-1} \\ &= \binom{2+y}{0} + \binom{2+y}{1} + \dots + \binom{k+y}{k-1} \\ &= \binom{k+y+1}{k-1} \end{aligned}$$

olduğundan önerme $y + 1$ ve her k için de doğrudur.

Örnek 6.15 $\text{rank}(F/F^3) = 3$ ve $\Phi : F/F^3 \rightarrow F/F^3$ otomorfizmi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\begin{aligned} \Phi : x_1 &\rightarrow x_1 + [x_1, x_2], \\ x_2 &\rightarrow x_2, \\ x_3 &\rightarrow x_3. \end{aligned}$$

$H_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$, $H_2 = \{[x_1, x_2], [x_1, x_3], [x_2, x_3]\}$ olmak üzere $H = H_1 \cup H_2$, F/F^3 nin bazıdır.

$$\text{Fix}\Phi = \text{span}\{x_2, x_3, [x_1, x_2], [x_1, x_3], [x_2, x_3]\}$$

olup $\text{Fix}\Phi$, $\{x_2, x_3, [x_1, x_2], [x_1, x_3]\}$ elemanları tarafından üretilir. Bu sebeple $\text{rank}(\text{Fix}\Phi) = 4 = c(n-1)$ dir.

Örnek 6.16 $\text{rank}(F/F^3) = 4$ ve $\Phi : F/F^3 \rightarrow F/F^3$ otomorfizmi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\begin{aligned}\Phi : x_1 &\rightarrow x_1 + [x_1, x_2], \\ x_i &\rightarrow x_i \quad , 2 \leq i \leq 4.\end{aligned}$$

Burada $c = 2, n = 4$ olup

$$H_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\},$$

$$H_2 = \{[x_1, x_2], [x_1, x_3], [x_1, x_4], [x_2, x_3], [x_2, x_4]\},$$

olmak üzere $H = H_1 \cup H_2$, F/F^3 nin bazıdır.

$$\text{Fix}\Phi = \text{span}\{x_2, x_3, x_4, [x_1, x_2], [x_1, x_3], [x_1, x_4], [x_2, x_3], [x_2, x_4]\}$$

olup $\text{Fix}\Phi$, $\{x_2, x_3, x_4, [x_1, x_2], [x_1, x_3], [x_1, x_4]\}$ elemanları tarafından üretilir. Bu sebeple $\text{rank}(\text{Fix}\Phi) = 6 = c(n-1)$ dir.

Örnek 6.17 $\text{rank}(F/F^4) = 3$ olmak üzere $\Phi : F/F^4 \rightarrow F/F^4$ otomorfizmi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\begin{aligned}\Phi : x_1 &\rightarrow x_1 + [x_1, x_2^2], \\ x_2 &\rightarrow x_2 + [[x_2, x_3], x_2], \\ x_3 &\rightarrow x_3\end{aligned}$$

$\text{rank}(\text{Fix}\Phi) = 10$ olduğunu gösterelim. Bu durumda $c = 3$ ve $n = 3$ dir. Öncelikle H_1 , H_2 , H_3 Hall bazının elemanlarını belirleyelim.

$$H_1 = \{x_1, x_2, x_3\},$$

$$H_2 = \{[x_1, x_2], [x_1, x_3], [x_2, x_3]\},$$

$$H_3 = \left\{ \begin{aligned} &[[x_1, x_2], x_1], [[x_1, x_2], x_2], [[x_1, x_3], x_3], [[x_1, x_3], x_2], \\ &[[x_1, x_3], x_1], [[x_2, x_3], x_3], [[x_2, x_3], x_2], [[x_2, x_3], x_1] \end{aligned} \right\}$$

olmak üzere $H = H_1 \cup H_2 \cup H_3$, F/F^4 için bir bazdır. Açıkça görüldüğü gibi

$$\begin{aligned}\text{Fix}\Phi = \text{span}\{ &x_3, [x_1, x_2], [x_1, x_3], [x_2, x_3], [[x_1, x_2], x_1], [[x_1, x_2], x_2], \\ &[[x_1, x_3], x_2], [[x_1, x_3], x_1], [[x_2, x_3], x_2], [[x_2, x_3], x_1]\}\end{aligned}$$

olup $\text{rank}(\text{Fix}\Phi) = 10$ olur.

Şimdi elde ettiğimiz

$$\text{rankFix}\Phi = |S_c| = (n - k) + (1 + L_3^0 + L_4^1 + \dots + L_c^{c-3}) \sum_{i=1}^k (n - i)$$

formülünde $c = 3$, $n = 3$ ve $k = 2$ değerlerini yerine yazalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \text{rankFix}\Phi &= (3 - 2) + (1 + L_3^0) \sum_{i=1}^2 (3 - i) \\ &= (3 - 2) + (1 + 2) ((3 - 1) + (3 - 2)) \\ &= 10 \end{aligned}$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

- BACHMUTH, S., 1965. Automorphisms of free metabelian groups. Trans. Am. Math. Soc., 118, 93-1104. MR 31 #4831.
- BAHTURİN, Y.A., 1987. Identical Relations in Lie Algebras, VNU Sciences Press, Utrecht.
- BAHTURİN, Y., A., NABIYEV, S. 1992. Automorphisms and derivations of abelian extensions of some Lie algebras. Abh. Math. Sem. Univ., Hamburg, 62, 43–57.
- BOURBAKİ, N., 1975. Lie Groups and Lie Algebras. Addison-Wesley, France, 450s.
- BRYANT, R. M., 1991. On the fixed points of a finite group acting on a free Lie algebra. J. London Math. Soc. , 2, 43, 215–224.
- BRYANT, R. M., DRENSKY, V., 1993. Obstructions to Lifting Automorphisms of Free Algebras. Commun. Algebra. 21, 12, 4361-4389.
- BRYANT, R. M., PAPISTAS, A. I., 2000. On the fixed points of a finite group acting on a relatively free Lie algebra. Glasg. Math. J., 42, 167–181.
- COHN, P.M., 1964. Subalgebras of free associative algebras. Proc. London Math. Soc., 618-63.
- DRENSKY, V., 1994. Fixed algebras of residually nilpotent Lie algebras. Proc. Amer. Math. Soc. 120, 1021–1028.
- FORMANEK, E., 1985. Noncommutative invariant theory in group actions on rings. Contemp. Math. 43, (Amer. Math. Soc., Providence, 87-119.
- FOX, R. H., 1953. Free differential calculus. I. Derivation in the free group ring. Ann. of Math., 57, 547–560.
- KASSABOV, M., 2004. An automorphism of a free metabelian group without fixed points. Comm. Algebra, 32, 9, 3297–3303.
- NEUMANN, H., 1967. Varieties of Groups. Springer-Verlag, New York.
- ÖZKURT, Z., 2007. Serbest Lie Cebirlerinde Taşınabilen ve Taşınamayan Otomorfizmler ve Primitif Elemanlar. Çukurova Üniv. Fen Bilimleri Ens., Adana, Doktora Tezi.

- ÖZKURT, Z., EKİCİ, N., 2008. An Application of the Dieudonne Determinant: Detecting Non-tame Automorphisms. *Journal of Lie Theory*, 18, 205-214.
- SHMELKĪN, A.L., 1973. Wreath Product of Lie Algebras and Their Applications in the Theory of Groups. *Trudy Mosk. Mat. Obshch.*, 29, 247-260.
- SHMELKĪN, A.L., SYRTSOV, A. V., 2004. On embeddings of some quotient algebras of the free sum of Lie algebras. (Russian) *Fundam. Prikl. Mat.*, 10, 4, 235–241. Translation in *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2007. 140, 2, 340–344.
- SHPIĬLRAĪN, V., 1998. Fixed points of endomorphisms of a free metabelian group. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 123, 1, 75–83.
- YUNUS, I.A., 1984. On the Fox Problem for Lie Algebras. *Uspekhi Math. Nauk*, 39, 251-252, English translation: 1984, *Russian Math. Surveys*, 39, 221-222.

ÖZGEÇMİŞ

1981 yılında Kahramanmaraş'ın Göksun ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Göksun'da tamamladı. 1998 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne girdi. 1998-1999 yılları arasında ingilizce hazırlık sınıfını bitirdikten sonra bölümde öğrenimine devam etti. 2003 yılında lisans öğrenimini tamamladı. 2003-2005 yılları arasında yüksek lisans eğitimini bitirdi. 2005 yılında doktora başladı. Aynı yıl bölümde araştırma görevliliğine atandı ve halen görevine devam etmektedir.