

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

SÜPERSİMETRİK WKB YAKLAŞIMI

H. Hale YILMAZ
Fizik Anabilim Dalı
Bilim Dalı Kodu : 404.06.01
Sunuş Tarihi : 25.11.2008

Tez Danışmanı : Prof. Dr. A. Doğan DEMİRHAN

Bornova - İZMİR

III

H. Hale YILMAZ tarafından Yüksek Lisans tezi olarak sunulan “Süpersimetrik WKB Yaklaşımı” başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi’nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 25.11.2008 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:

İmza

Jüri Başkanı : Prof. Dr. Fevzi BÜYÜKKILIÇ

.....

Raportör Üye: Prof. Dr. A. Doğan DEMİRHAN

.....

Üye : Doç. Dr. Özhan KAYACAN

.....

ÖZET

SÜPERSİMETRİK WKB YAKLAŞIMI

YILMAZ, H. Hale

Yüksek Lisans Tezi, Fizik Bölümü

Tez Yöneticisi: Prof. Dr. A. Doğan DEMİRHAN

Ekim 2008, 63 sayfa

Bu tezde, süpersimetrik kuantum mekaniği tanıtılarak, en düşük mertebeli süpersimetrik Wentzel-Kramers-Brillouin (SWKB) yaklaşım yöntemi detaylarıyla incelendi. Bu yöntemin birçok fiziksel uygulama için verdiği sonuçlar araştırıldı ve şekil invaryant potansiyeller için tam bağlı durum spektrumlarının elde edilebileceği gösterildi. Ayrıca seçilen bazı q deforme potansiyellerin ve $V(x) = C \tanh^2(\alpha x) - \frac{D}{\cosh^2(\alpha x)}$ potansiyelinin enerji özdeğerlerini elde etmek için denenen bu yöntemin, bu potansiyeller için doğruluğu kanıtlandı.

Anahtar sözcükler: Süpersimetri, SWKB kuantumlanma koşulu, şekil İnvaryant potansiyeller, q deforme potansiyeller.

VII

ABSTRACT

SUPERSYMMETRIC WKB APPROXIMATION

YILMAZ, H. Hale

MSc in Physics

Supervisor: Prof. Dr. A.Doğan DEMİRHAN

October, 2008, 63 pages

In this thesis, the lowest order supersymmetric Wentzel-Kramers-Brillouin (SWKB) approximation method is studied by using the supersymmetric quantum mechanics. The results obtained by SWKB approximation method are analysed for shape invariant potentials. It is shown that the SWKB approximation method gives the exact bound state spectra for these potentials. Additionally, we attempt to use this method to obtain the eigenvalues of Hamiltonians in the presence of some q deformed potentials and the potential of $V(x) = C \tanh^2(\alpha x) - \frac{D}{\cosh^2(\alpha x)}$. Eventually, we show that SWKB approximation method gives exact results for these potentials.

Keywords: Supersymmetry, SWKB quantization condition, shape invariant potentials, q deformed potentials.

*Aramızdan çok erken ayrılan değerli bilim adamı, ilk tez danışmanım
sevgili hocam **Doç. Dr. Harun EĞRİFES**'in anısına...*

TEŞEKKÜR

Çalışmam için bu konuyu belirleyen ve literatür taramasında bana yardımcı olan değerli hocam Doç. Dr. Harun EĞRİFES ile tezimin her aşamasında beni destekleyen ve önerileriyle beni yönlendiren danışman hocam Sayın Prof. Dr. A. Doğan DEMİRHAN'a, ayrıca tezimi titizlikle okuyan ve önemli tavsiyelerde bulunan Dr. Burhan BAKAR'a ve hedefime ulaşabilmek için beni koşulsuz destekleyen aileme sonsuz teşekkürlerimi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET.....	V
ABSTRACT	VII
TEŞEKKÜR.....	XI
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	XIII
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	XVII
ÇİZELGELER DİZİNİ	XIX
KISALTMALAR	XXI
 1.GİRİŞ	 1
 2.SÜPERSİMETRİK KUANTUM MEKANİĞİ.....	 4
2.1 Teori.....	4
2.2 Süpersimetrinin Basit Harmonik Osilatöre Uygulanması.....	16
2.3 Şekil İnvaryantlığı ve Çözülebilir Potansiyeller	20
 3. WKB (Wentzel, Kramers, Brillouin) YAKLAŞIMI.....	 27
 4. SÜPERSİMETRİK WKB (SWKB) YAKLAŞIMI	 32
4.1 En Düşük Mertebeli SWKB Kuantumlanma Koşulu	32
4.2 Şekil İnvaryant Potansiyeller İçin SWKB Koşulunun Doğrulanması.....	 36

İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
5. SWKB YÖNTEMİ İLE BAZI POTANSİYELLER İÇİN ÇÖZÜMLER	40
5.1 Bazı Şekil İnvaryant Potansiyellerin Çözümleri	40
5.1.1 Pöschl-Teller.....	40
5.1.2 Scarf I (trigonometrik)	41
5.1.3 Scarf II (hiperbolik)	42
5.1.4 Rosen Morse II (hiperbolik).....	43
5.2 q-Deforme Potansiyellerin Çözümleri.....	44
5.2.1 q Deforme Rosen Morse Potansiyeli	45
5.2.2 q Deforme Değiştirilmiş Rosen Morse Potansiyeli	48
5.2.3 q Deforme Pöschl Teller Potansiyeli	50
5.2.4 q Deforme Hiperbolik Kratzer Benzeri Potansiyel.....	52
5.3 $V(x) = C \tanh^2(\alpha x) - \frac{D}{\cosh^2(\alpha x)}$ Potansiyelinin Çözümü.....	54
6. SONUÇ.....	57
KAYNAKLAR	58

İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
EKLER.....	61
Ek 1 SWKB ile hesaplanan şekil invaryant potansiyeller için alınan referans değerler	61
Ek 2 İntegral Tablosu	62
Ek 3 q Deforme Hiperbolik Fonksiyonlar.....	63
ÖZGEÇMİŞ	64

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1 İki süpersimetrik partner potansiyelin enerji seviyeleri	9
2.2 SUSY'nin bozulmadığı durumda verilen alternatif seçim	14
2.3 Bozulmuş süpersimetri	15
2.4 Harmonik osilatörün süpersimetrik partner potansiyellere ait özdeğer spektrumu	19
3.1 Klasik bölge	29

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

Çizelge 4.1	Şekil-invaryant potansiyellere karşılık gelen süper potansiyel değerleri ve $\hbar = \sqrt{2m} = 1$ için hesaplanan süpersimetrik partner potansiyeller.....	38
Çizelge 4.2	Bu potansiyellerin seçilen parametre değerlerine göre SWKB ve WKB kuantumlanma koşulları ile hesaplanan taban durumu enerji özdeğerleri.....	39
Çizelge Ek.1	Şekil invaryant potansiyellere karşılık gelen süper potansiyel değerleri ile $\hbar = \sqrt{2m} = 1$ için hesaplanan enerji özdeğerleri ve bu potansiyellerin taban durumu dalga fonksiyonları.....	61

KISALTMALAR

SUSY	Süpersimetri
SUSY QM	Süpersimetrik Kuantum Mekaniği
WKB	Wentzel, Kramers, Brillouin
SWKB	Süpersimetrik WKB
ŞİP	Şekil İnvaryant Potansiyeller

1. GİRİŞ

Süpersimetri (SUSY), fermiyonlar ve bozonlar arasında dönüşüm oluşturmak için kullanılan bir simetri olup, bu teori; yüksek enerji fiziğinde doğadaki tüm temel etkileşimlerin birleştirilmiş tanımını elde etmek için, 1971 yılında Ramond tarafından öne sürülmüştür (Ramond, 1971). Süpersimetri cebiri, komütasyon ve antikomütasyon bağıntılarını içeren kapalı bir cebirdir. Fermiyonlar ve bozanların sahip olduğu farklı özellikler nedeniyle oldukça ilginç olan bu simetri, son yıllarda atom fiziği, molekül fiziği, nükleer fizik, istatistiksel fizik ve yoğun madde fiziği gibi fiziğin birçok dalında kullanılmaya başlandı.

1981 yılında Witten, bir boyutlu süpersimetrik bir sistemde bir fermiyon için, taban durumu hariç aynı spektrumlara sahip iki partner Hamiltonyenden oluşan bir Hamiltonyen tanımlamıştır ve fermiyonik bileşenin taban durumu bilindiğine göre, bozonik bileşenin birinci uyarılmış seviyesine ulaşılabilceğini göstermiştir (Witten, 1981). Böylece süpersimetri; kuantum mekaniğine de uygulanmış ve birçok potansiyel için enerji öz durumlarının tam olarak elde edilebileceği gösterilmiştir.

Fiziğin çeşitli dallarında ortaya çıkan birçok potansiyel için Schrödinger denkleminin tam analitik çözümü bazı durumlarda mümkün olmamaktadır. Bu durumda pertürbasyon, varyasyon veya Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB) gibi yaklaşım yöntemlerinden birine

başvurulur. Bunlardan en kullanışlısı, bir boyutlu Schrödinger denklemini çözmek için kullanılan WKB yaklaşımıdır. WKB teorisi ayrıca adi diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmek için de kullanılan çok yararlı bir yöntemdir. Ancak bu yaklaşım yöntemi sadece basit harmonik osilatör ve Morse potansiyeli için tam sonuçlar verilebilmekte, tam çözülebilir diğer potansiyeller için ise bazı düzeltmeler gerektirmektedir (Hrüska et al., 1996). Süpersimetrik kuantum mekaniği kavramından yola çıkarak, 1985 yılında Comtet ve çalışma arkadaşları WKB yöntemini süpersimetrik kuantum mekaniği (SUSY QM) kavramına uygulamış ve süpersimetrik WKB (SWKB) koşulu olarak bilinen yarı-klasik bir kuantumlanma koşulu önermişlerdir (Comtet, 1985). Bu koşul ile, WKB yönteminin çözemediği ya da çok uzun cebirsel işlemler sonrasında çözebildiği potansiyeller ve 1983 yılında Gendenshtein tarafından tanımlanan şekil invaryant potansiyeller (ŞİP) (Gendenshtein, 1983) için tam enerji özdeğer spektrumları elde edilmiştir.

Bu projenin amacı, en düşük mertebeli SWKB yaklaşım yöntemini tanımlamak ve bu yöntemle ilgili birçok fiziksel uygulama vermektir. Bunun için bazı şekil invaryant potansiyeller SWKB yaklaşımı ile analitik olarak çözüldü ve bulunan sonuçlar şekil invaryantlık koşulu kullanılarak hesaplanan sonuçlar ile karşılaştırılarak, SWKB yaklaşımının tüm ŞİP için doğruluğu incelendi. Ayrıca q deforme Rosen Morse, q deforme değiştirilmiş Rosen Morse, q deforme Pöschl Teller ve q deforme hiperbolik Kratzer benzeri potansiyelleri ile $V(x) = C \tanh^2(\alpha x) - \frac{D}{\cosh^2(\alpha x)}$ potansiyeli SWKB yöntemi ile analitik

olarak çözümlenerek, bu yaklaşım yöntemi ile bu potansiyeller için enerji özdeğer ve özfonksiyonlarının tam olarak elde edilip edilmediği araştırıldı.

2. SÜPERSİMETRİK KUANTUM MEKANİĞİ

2.1 Teori

Schrödinger denklemini çözmek için geliştirilen önemli yöntemlerden biri de yaratma ve yok etme operatörleri kullanılarak Hamiltonyeni çarpanlarına ayırmaktır. Buna benzer olarak süpersimetrik kuantum mekaniğinde yaratma ($A^\dagger$) ve yok etme (A) operatörleri;

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \quad , \quad A^\dagger = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu iki operatörden H_1 ve H_2 Hamiltonyen operatörleri aşağıdaki şekilde türetilir,

$$H_1 = A^\dagger A \quad , \quad H_2 = AA^\dagger . \quad (2.2)$$

Bunu gösterebilmek için, $A^\dagger A$ operatör çarpımı herhangi bir $g(x)$ deneme fonksiyonuna uygulanır:

$$(A^\dagger A)g(x) = H_1 g(x) = \left(-\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \right) \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \right) g(x)$$

$$= \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW(x)}{dx} + W^2(x) \right) g(x)$$

$$H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) \quad , \quad V_1(x) = W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) . \quad (2.3)$$

Sonuçta H_1 Hamiltonyenine ulaşılır. Aynı zamanda $V_1(x)$ potansiyeli, kendisini üreten süper potansiyel cinsinden elde edilir. Aynı işlemler H_2 Hamiltonyeni için tekrarlandığında;

$$H_2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_2(x) \quad , \quad V_2(x) = W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \quad (2.4)$$

bağıntılarına ulaşılır. SUSY QM' de $W(x)$ 'e süper potansiyel, $V_{1,2}(x)$ ' e de süpersimetrik partner potansiyeller adı verilir.

Bulunan V_2 potansiyeli için H_2 Hamiltonyeninin sağlanması gerekmektedir. Bu durumda H_1 ile belirlenen orijinal sistem ve onun H_2 ile belirlenen süpersimetrik partneri arasında bir ilişki kurulabilir (Khare, 2004). Örneğin $E_n^{(1)}$ H_1 'in özdeğeri ise H_2 'nin de özdeğeri olmalıdır. H_1 Hamiltonyeni için Schrödinger denklemi şu şekilde yazılır:

$$H_1 \Psi_n^{(1)} = E_n^{(1)} \Psi_n^{(1)} . \quad (2.5)$$

Bu orijinal sistem için yazılmış özdeğer denklemidir ve $E_n^{(1)}$ de n. durum dalga fonksiyonu olan $\Psi_n^{(1)}$ 'e karşılık gelen enerji seviyesidir. H_1 Hamiltonyeni açıkça yazıldığında;

$$A^\dagger A \Psi_n^{(1)} = E_n^{(1)} \Psi_n^{(1)}$$

ifadesine ulaşılır. Denklemin her iki tarafı A operatörü ile soldan çarpıldığında;

$$A A^\dagger A \Psi_n^{(1)} = A E_n^{(1)} \Psi_n^{(1)} = E_n^{(1)} A \Psi_n^{(1)} ,$$

$$AA^\dagger(A\Psi_n^{(1)}) = E_n^{(1)}(A\Psi_n^{(1)}) \quad ,$$

bulunan $AA^\dagger$ çarpanı H_2 Hamiltonyenine eşit olduğundan;

$$H_2(A\Psi_n^{(1)}) = E_n^{(1)}(A\Psi_n^{(1)}) \quad (2.6)$$

sonucu elde edilir. Bu denkleme göre $(A\Psi_n^{(1)})$ 'in partner sistem için Schrödinger denkleminin $E_n^{(1)}$ enerjili bir çözümü olduğu sonucuna varılır.

Benzer işlemler partner sistemin H_2 Hamiltonyeni için de yapılırsa, $E_n^{(2)}$ n. durum dalga fonksiyonu olan $\Psi_n^{(2)}$ 'ye karşılık gelen enerji seviyesi olmak üzere;

$$H_1(A^\dagger\Psi_n^{(2)}) = E_n^{(2)}(A^\dagger\Psi_n^{(2)}) \quad (2.7)$$

özdeğer denklemi elde edilir ve $(A^\dagger\Psi_n^{(2)})$ 'nin, orijinal sistem için Schrödinger denkleminin $E_n^{(2)}$ enerjili bir çözümü olduğu sonucuna varılır.

Böylece H_1 ile belirlenen orijinal sistem ve H_2 ile belirlenen süpersimetrik partneri arasındaki ilişkinin varlığı gösterilmiş olur. Bunun yorumu şu şekilde yapılabilir: orijinal sistemin herhangi bir özfonksiyonuna A operatörü uygulandığında, partner sistemin aynı enerji özdeğerli öz fonksiyonu elde edilir. Benzer şekilde süpersimetrik partner sistemin herhangi bir özfonksiyonuna $A^\dagger$ operatörü uygulandığında orijinal sistemin aynı enerjili özfonksiyonu elde edilir. Buna göre

yaratma ve yok etme operatörleri ile aynı enerji seviyesinde geçişler yapılabilirdiğinden orijinal sistem ile süpersimetrik partneri özdeş sistemler olarak düşünülebilir. Ancak iki spektrum arasında bir fark vardır. Bu da A operatörü yok etme operatörü olduğundan orijinal sistemin taban durumu dalga fonksiyonuna uygulandığında, bu dalga fonksiyonunu yok etmesinden kaynaklanır. Böylece orijinal sistemin taban durumu dalga fonksiyonuna aynı enerjide karşılık gelen süpersimetrik partnerinin olmadığı ortaya çıkar. (bkz. Şekil 2.1) Öyleyse partner sistemin taban durumu enerji seviyesi orijinal sistemin birinci uyarılmış durumdaki enerji seviyesine karşılık gelir (Khare, 2004). Buna göre, iki sistemin enerji seviyeleri arasındaki ilişki:

$$E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)}, \quad E_0^{(1)} = 0 \quad (2.8)$$

bağıntılarıyla ifade edilebilir. Şimdi artık dalga fonksiyonları arasındaki ilişki de yazılabilir:

$$A\Psi_{n+1}^{(1)} = a\Psi_n^{(2)} \quad (2.9.a)$$

$$A^\dagger\Psi_m^{(2)} = b\Psi_{m+1}^{(1)}. \quad (2.9.b)$$

Burada a ve b normalizasyon sabiti olup normalizasyon koşulu ve A ile $A^\dagger$ operatörlerinin adjointlik özelliği kullanılarak bulunabilir. Operatörlerin adjointliği f ve g herhangi iki fonksiyon olmak üzere $\langle Af | g \rangle = \langle f | A^\dagger g \rangle$ eşitliği ile verilir. Normalizasyon koşulundan;

$$\langle \Psi_{n+1}^{(1)} | A^\dagger A | \Psi_{n+1}^{(1)} \rangle = \langle \Psi_{n+1}^{(1)} | H_1 | \Psi_{n+1}^{(1)} \rangle = E_{n+1}^{(1)} \langle \Psi_{n+1}^{(1)} | \Psi_{n+1}^{(1)} \rangle = E_{n+1}^{(1)} \quad (2.10)$$

enerji değeri elde edilir. Bu sonuç dalga fonksiyonunun normalize edilebilir olduğu gerçeğine dayanır. Adjoint olma özelliğinden;

$$\langle \Psi_{n+1}^{(1)} | A^\dagger A | \Psi_{n+1}^{(1)} \rangle = \left(A | \Psi_{n+1}^{(1)} \rangle \right)^\dagger \left(A | \Psi_{n+1}^{(1)} \rangle \right) = a | \Psi_n^{(2)} \rangle^\dagger a | \Psi_n^{(2)} \rangle = a^2 \quad (2.11)$$

bulunur. $| \Psi_n^{(2)} \rangle$ 'nin de normalize edilebilir olduğu kabul edilerek; (2.10)

ve (2.11) denklemlerinden a sabiti bulunabilir:

$$a = \pm \sqrt{E_{n+1}^{(1)}} \quad . \quad (2.12)$$

Aynı işlemler b sabiti için de yapılabilir ve sonuçta;

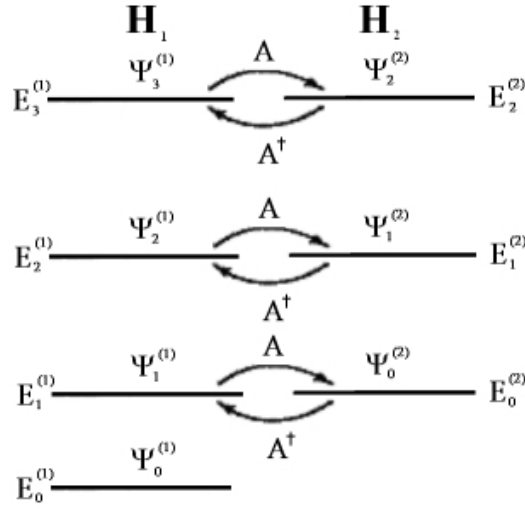
$$b = \pm \sqrt{E_m^{(2)}} \quad (2.13)$$

bulunur.

Sabitler yerine yazıldığında birbirinin süpersimetrik partneri olan iki sistemin dalga fonksiyonları arasındaki ilişki tam olarak elde edilir (Özer, 2003):

$$A \Psi_{n+1}^{(1)} = \pm \sqrt{E_{n+1}^{(1)}} \Psi_n^{(2)} \quad , \quad (2.14)$$

$$A^\dagger \Psi_m^{(2)} = \pm \sqrt{E_m^{(2)}} \Psi_{m+1}^{(1)} \quad m=n \text{ için} \quad A^\dagger \Psi_n^{(2)} = \pm \sqrt{E_n^{(2)}} \Psi_{n+1}^{(1)} \quad . \quad (2.15)$$



Şekil 2.1 İki süpersimetrik partner potansiyelin enerji seviyeleri

$W(x)$ süper potansiyeli; $V_1(x)$ potansiyelinin bilindiği durumlarda, daha önce verilen ve Riccati diferansiyel denklemi olarak adlandırılan denklem (2.3) çözülerek bulunabilir. Bu potansiyeli elde etmenin bir diğer yolu da; A yok etme operatörünün, orijinal sistemin taban durumu dalga fonksiyonunu yok ettiği gerçeğini kullanmaktır.

$$A\Psi_0^{(1)}(x) = 0 \quad ,$$

$$\left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \right) \Psi_0^{(1)}(x) = 0 \quad ,$$

$$W(x) = -\frac{1}{\Psi_0^{(1)}(x)} \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d\Psi_0^{(1)}(x)}{dx} = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\Psi_0'^{(1)}(x)}{\Psi_0^{(1)}(x)} \quad . \quad (2.16)$$

Bu formüle göre taban durumu dalga fonksiyonu biliniyorsa $W(x)$ bulunabilir.

Ayrıca bu ifade düzenlenip, integrali alındığında taban durumu dalga fonksiyonuna ulaşılabilir:

$$\Psi_0^{(1)}(x) = N \exp\left(-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int^x W(y) dy\right) . \quad (2.17)$$

Bu durumda da $W(x)$ süper potansiyeli biliniyorsa taban durumu dalga fonksiyonu bulunabilir. Problem çözümlerinde denklem (2.3) ve denklem (2.17) çıkış noktaları olarak alınır. Süper potansiyel, taban durumu dalga fonksiyonu bilinmiyorsa denklem (2.3), biliniyorsa denklem (2.17) çözülerek bulunabilir.

H_1 ve H_2 süpersimetrik partner Hamiltonyenlerinin spektrumlarının sahip olduğu dejenereliği anlamak için süpersimetri cebirinin özelliklerini incelemek gerekir. Süpersimetrik partner potansiyeller aynı özdeğerlere sahip iki ayrı sistem olarak görünse de aslında tek bir sistemdir (Lee, 1999). Hem H_1 hem de H_2 Hamiltonyenlerini kapsayan süpersimetrik matris Hamiltonyeni;

$$H = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

şeklinde tanımlanır. Bu matris hem bozonik hem de fermiyonik operatörler ile komütasyon ve antikomütasyon bağıntılarını içeren kapalı cebirin bir parçasıdır. Süperyükler olarak bilinen Q ve $Q^\dagger$ operatörleri:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{bmatrix} , \quad Q^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & A^\dagger \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

şeklinde tanımlanır. Matris Hamiltonyen ve süperyüklerin komütasyon ve antikomütasyon bağıntıları aşağıdaki ifadeleri sağlıyorsa kapalı bir cebir oluşturur (Khare, 2004):

$$\begin{aligned} [H, Q] &= [H, Q^\dagger] = 0 \quad , \\ \{Q, Q^\dagger\} &= H \quad , \\ \{Q, Q\} &= \{Q^\dagger, Q^\dagger\} = 0 \quad . \end{aligned} \tag{2.20}$$

Bu bağıntıların sağlandığı şu şekilde gösterilebilir:

$$[H, Q] = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ H_2 A - A H_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[H, Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A A^\dagger A - A A^\dagger A & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad ,$$

$$\{Q, Q^\dagger\} = Q Q^\dagger + Q^\dagger Q = \begin{bmatrix} A^\dagger A & 0 \\ 0 & A A^\dagger \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix} = H \quad ,$$

$$\{Q, Q\} = Q Q + Q Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad .$$

Süpersimetrik alan teorisine göre; H Hamiltonyeni içindeki H_1 fermiyonik kısmı H_2 ise bozonik kısmı temsil etmektedir. $Q, Q^\dagger$ süper yük operatörleri ise fermiyonik serbestlik derecesini bozonik serbestlik derecesine, bozonik serbestlik derecesini de fermiyonik serbestlik

derecesine (enerji seviyesinde değişiklik yapmadan) dönüştüren operatörlerdir (Wellman, 2004; Cooper et al., 1994).

H Hamiltonyeninin özvektörleri aşığıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{bmatrix} \Psi_n^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi_m^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Burada $\Psi_n^{(1)}$ H_1 'in, $\Psi_m^{(2)}$ de H_2 'nin özfonksiyonudur. Bu özvektörlerin $Q, Q^\dagger$ süperyük operatörlerinin özvektörleri olup olmadığına bakılır ve sonuca göre Hamiltonyen spektrumlarının dejenereliği yorumlanabilir (Lee, 1999).

$$Q \begin{bmatrix} \Psi_n^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_n^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ A\Psi_n^{(1)} \end{bmatrix},$$

$$Q^\dagger \begin{bmatrix} \Psi_n^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A^\dagger \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_n^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

$$Q \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi_m^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi_m^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0,$$

$$Q^\dagger \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi_m^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A^\dagger \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi_m^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^\dagger \Psi_m^{(2)} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sonuçlara bakıldığında H Hamiltonyeni ile $Q, Q^\dagger$ süperyük operatörlerinin aynı özvektöre sahip olmadığı görülür. Kuantum mekaniğinde birbiriyle komüt, dejenere olmayan iki operatörden birinin özvektörü bir sabit farkıyla diğerinin de özvektörü olmalıdır. Buna göre;

H Hamiltonyeni, $Q, Q^\dagger$ süperyükleriyle komüt olmasına rağmen, aynı özvektörlere sahip olmadığından Hamiltonyen spektrumunun dejenere olduğu sonucuna varılır (Lee, 1999).

Artık orijinal sistemin taban durumu dalga fonksiyonuna aynı enerjide karşılık gelen süpersimetrik partnerinin olmadığı ve Hamiltonyen spektrumunun dejenere olduğu bilindiğine göre; tek olan bu sıfır enerjili öz durumun hangi spektrumda yer alacağı sorusu yanıtlanabilir. Bunun için $A, A^\dagger$ operatörleri ile yok edilen $\Psi_0^{(1)}, \Psi_0^{(2)}$ dalga fonksiyonlarının normalize edilebilirliği incelenmelidir. $A\Psi_0^{(1)} = 0$, $A^\dagger\Psi_0^{(2)} = 0$ koşulunu sağlayan dalga fonksiyonları;

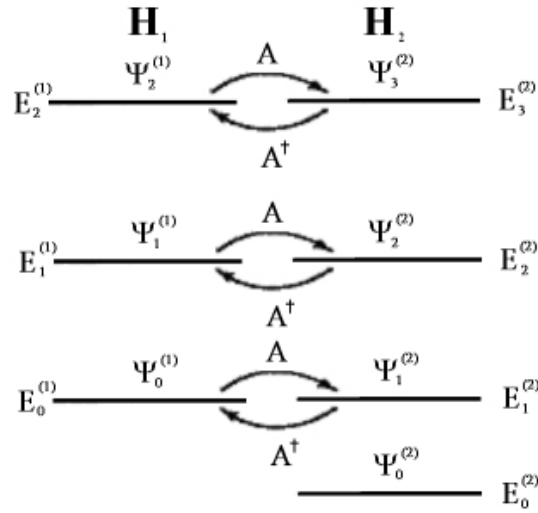
$$\Psi_0^{(1)}(x) = N^{(1)} \exp\left(-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int^x W(y) dy\right),$$

$$\Psi_0^{(2)}(x) = N^{(2)} \exp\left(\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int^x W(y) dy\right)$$

şeklinde daha önce bulunmuştu. $\Psi_0^{(1)}, \Psi_0^{(2)}$ dalga fonksiyonlarının normalize edilebilmesi için sonsuzda sıfır olmaları gerekir. Örneğin $\Psi_0^{(2)}$ 'nin sonsuzda sıfır olması için, üstel ifadenin $-\infty$ olması gerekmektedir. Bunun için süper potansiyel; $x \rightarrow -\infty$ 'da pozitif, $x \rightarrow +\infty$ 'da negatif olmalıdır. Bu durumda $\Psi_0^{(2)}$ normalize edilebilir ve sıfır enerjili öz durum H_2 'nin spektrumunda yer alır. Aynı incelemeler $\Psi_0^{(1)}$ için yapıldığında tam ters sonuçlar elde edilir. Böylece iki dalga

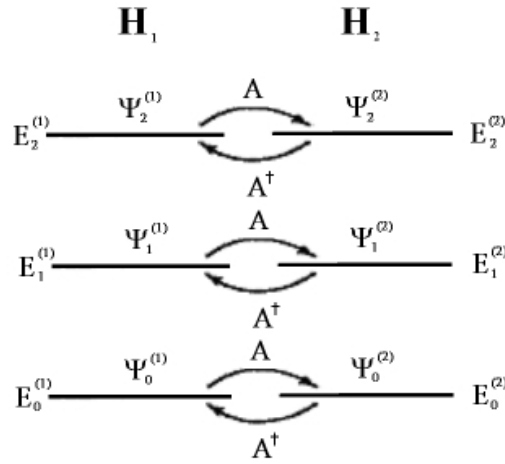
fonksiyonunun aynı anda normalize edilemeyeceği sonucuna varılır (Cooper et al., 1994; Lee, 1999).

Genel olarak $\Psi_0^{(1)}$ normalize edilebilir olarak seçilir. Yani sıfır enerjili öz durum H_1 'in spektrumunda yer alır (bkz. Şekil 2.1). Bu durumda W süper potansiyeli, H_1 Hamiltonyenine süpersimetrik partner H_2 Hamiltonyenini üretecek şekilde seçilir. Ancak bu potansiyel H_2 Hamiltonyenine süpersimetrik partner H_1 Hamiltonyenini üretecek şekilde de seçilebilir. Bu durumda $\Psi_0^{(1)}$ normalize edilemez olacağından, sıfır enerjili eşleşmemiş taban durumu H_2 Hamiltonyeninin spektrumunda yer alır (Şekil 2.2).



Şekil 2.2 SUSY'nin bozulmadığı durumda verilen alternatif seçim

Bir diğer seçim de W süper potansiyelinin H_1, H_2 partner sistemlerinin, hiçbirinin normalize edilebilir taban durumu dalga fonksiyonuna sahip olmayacak şekilde alınmasıdır. Bu seçimde $A, A^\dagger$ operatörlerinden hiçbirisi $\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}$ dalga fonksiyonlarını yok edemez. Dolayısıyla taban durumu dalga fonksiyonları açıkça elde edilemez. Bu durum bozulmuş süpersimetri olarak bilinir (Lee, 1999), (Şekil 2.3).



Şekil 2.3 Bozulmuş süpersimetri

Buraya kadar anlatılanlardan sonra şöyle bir değerlendirme yapılabilir. SUSY nin bozulmadığı durumda, n tane bağlı durumu olan ve taban durumu enerjisi E_0 olan çözülebilir bir $V(x)$ potansiyeli için, $V_1(x)$ potansiyeli;

$$V_1(x) = W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) = V(x) - E_0 \quad (2.22)$$

olarak alınır ve böylece sistemin taban durumu enerjisi sıfır yapılır (Khare, 2004; Dutt et al., 1988). H_1 , H_2 partner Hamiltonyenlerinin çözümü zor, dalga fonksiyonları elde edilebilir olduğu durumda A^+ operatörü H_2 nin taban durumuna uygulanarak H_1 in birinci uyarılmış durumu elde edilir. Diğer durumları bulmak için H_2 ye yeni bir süpersimetrik partner H_3 oluşturulur. Dolayısıyla yeni bir $W(x)$ süper potansiyeli ve yeni A, A^+ operatörleri oluşturulur (Cooper et al., 2001). Yeni A^+ operatörünün H_3 ün taban durumuna uygulanmasıyla, H_2 nin birinci uyarılmış seviyesi ve aynı anda H_1 in ikinci uyarılmış seviyesi hesaplanmış olur. Bu işlemler devam ettirilerek her seferinde yeni süper potansiyeller ve yeni basamak operatörleri oluşturularak daha üst mertebe uyarılmış seviyelere ulaşılabilir.

Bu bölümde elde edilen sonuçların bir uygulaması olarak; kuantum mekaniğinde iyi bilinen bir sistem olan basit harmonik osilatör modeli ele alınabilir.

2.2 Süpersimetrinin Basit Harmonik Osilatöre Uygulanması:

Bu sistem için potansiyel,

$$V(x) = \frac{1}{2}mw^2x^2$$

şeklinde verilir. Sistemin enerji öz durumlarını süpersimetri teorisi ile elde etmek için ilk önce süper potansiyel tanımlanmalıdır. Süper potansiyel;

$$W(x) = \sqrt{\frac{1}{2}mw^2}x$$

şeklinde seçilebilir. Denklem (2.22) kullanılarak;

$$V(x) - E_0 = W'^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}W''(x) = \frac{1}{2}mw^2x^2 - \frac{\hbar w}{2} \quad , \quad E_0 = \frac{\hbar w}{2}$$

değerine ulaşılır ve bu basit harmonik osilatörün taban durumu enerjisidir. Süper potansiyel bilindiğine göre taban durumu dalga fonksiyonu da denklem (2.17)'den kolayca elde edilebilir:

$$\Psi_0^{(1)}(x) = N \exp\left(-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int_0^x \sqrt{\frac{1}{2}mw^2} y dy\right) \quad .$$

N sabiti, normalizasyon koşulundan bulunur:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_0^{(1)}(x)|^2 dx \quad , \quad N = \left(\frac{mw}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \quad .$$

Bu durumda artık taban durumu dalga fonksiyonu tam olarak yazılabilir.

$$\Psi_0^{(1)}(x) = \left(\frac{mw}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{mw}{2\hbar}x^2\right) \quad .$$

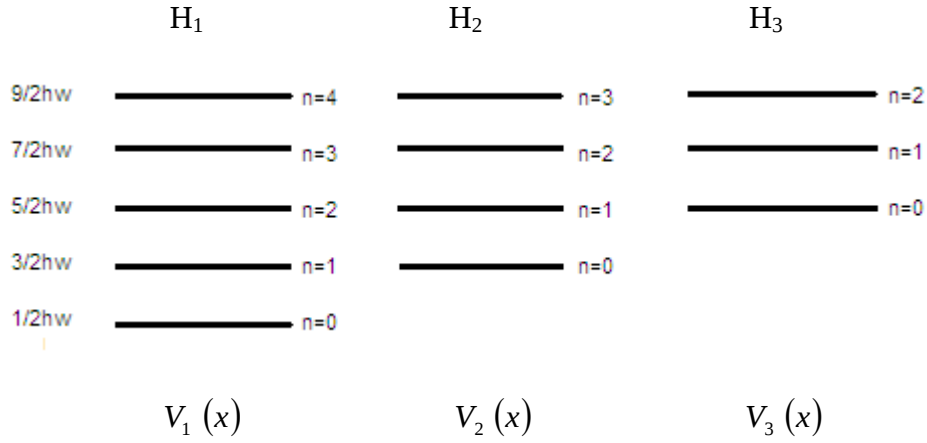
Tüm bağlı durumlara ait öz durumları bulabilmek için önce $V_2(x)$ partner potansiyeli hesaplanır:

$$V_2(x) = W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + \frac{\hbar \omega}{2} .$$

Bu oldukça önemli bir sonuçtur. Görüldüğü gibi harmonik osilatörün partneri yine bir harmonik osilatördür. Sadece $V_2(x) = V_1(x) + \hbar \omega$ olduğundan, potansiyeli $\hbar \omega$ kadar arttırılmıştır (Lee, 1999). Bu sabitin eklenmesi dalga fonksiyonlarını değiştirmez. Sadece bu potansiyele karşılık gelen özdeğerleri bu sabit kadar arttırır. Bu durumda $V_2(x)$ 'in taban durumu enerji özdeğeri kolayca elde edilebilir. $E_0^{(2)} = E_0^{(1)} + \hbar \omega = 3/2 \hbar \omega$ Bu değer aynı zamanda $E_0^{(2)} = E_1^{(1)}$ bağıntısından $V_1(x)$ 'in birinci uyarılmış durumuna ait enerji değeridir.

Bu durumda bir sabit farkıyla orijinal potansiyeli tekrar üretmiş oluyoruz. Öyleyse $V_2(x)$ taban durumu enerjisi bilindiğinden ve aynı süper potansiyel için potansiyeli yine $\hbar \omega$ kadar arttırılmış olan yeni bir $V_3(x)$ partner potansiyelini tanımlayabiliriz. (bkz. Şekil 2.4) Bu potansiyel için taban durumu enerjisi $5/2 \hbar \omega$ olup, aynı zamanda $V_2(x)$ potansiyelinin birinci uyarılmış durumuna, dolayısıyla $V_1(x)$ in ikinci uyarılmış ait enerji değeridir. İşleme bu şekilde devam ederek harmonik osilatör için enerji özdeğer spektrumu elde edilir.

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega \quad (n=0,1,2,\dots) .$$



Şekil 2.4 Harmonik osilatörün süpersimetrik partner potansiyellere ait özdeğer spektrumu

Sistemin özfonksiyonlarını elde etmek için de benzer olarak bulunan partner sistemlerin yine bir harmonik osilatör olduğu göz önünde bulundurularak, süpersimetrik partner potansiyeller için taban durumu dalga fonksiyonlarının değişmediği gerçeği kullanılır. Yani süpersimetrik partner sistemin taban durumu dalga fonksiyonu, orijinal sistemin taban durumu dalga fonksiyonu ile aynı kalacaktır. Buna göre harmonik osilatörün herhangi bir uyarılmış duruma ait dalga fonksiyonunu elde etmek için A^+ operatörü taban durumu dalga fonksiyonuna istenilen sayıda uygulanır.

$$\Psi_n = N(A^+)^n \Psi_0, \quad (n=0,1,2,\dots)$$

Buradaki N sabiti; dalga fonksiyonları arasındaki ilişkiyi veren denklem (2.15) kullanılarak bulunabilir.

$$A^+ \Psi_n = \sqrt{(n+1)\hbar\omega} \Psi_{n+1}$$

2.3 Şekil İnvaryantlığı ve Çözülebilir Potansiyeller

Bu kavram ilk defa Gendenshtein (1983) tarafından tam olarak çözülebilen potansiyellerin (harmonik osilatör, Coulomb, Morse vb. potansiyeller) sahip olduğu ortak özelliğin ne olduğu sorusuna cevap olarak öne sürüldü ve şekil-invaryant potansiyeller (ŞİP) şu şekilde tanımlandı. Süpersimetrik partner potansiyeller şekil bakımından birbirinin aynı, sadece içerdikleri parametreler bakımından farklı ise bu potansiyellere şekil-invaryant potansiyeller denir (Gendenshtein, 1983). Bunu şu şekilde ifade etmek mümkündür. Eğer partner potansiyeller $V_{1,2}(x, a_1)$ aşağıdaki koşulu sağlıyorsa;

$$V_2(x, a_1) = V_1(x, a_2) + R(a_1) \quad (2.23)$$

$V_1(x, a_2)$ ve $V_2(x, a_1)$ potansiyellerinin şekil-invaryant olduğu söylenir. Burada a_1 ; parametrelerin bir serisi, a_2 ; a_1 'in bir fonksiyonu ($a_2 = f(a_1)$) ve $R(a_1)$; x ' den bağımsız bir sabittir (Dutt et al., 1988; Khare, 2004).

Şekil-invaryantlık koşulu ve Hamiltonyenlerin hiyerarşisini kullanarak herhangi bir şekil-invaryant potansiyelin enerji özdeğerleri ve özfonksiyonları süpersimetrimin bozulmadığı durumda kolaylıkla elde edilebilir. Bunun için özdeğer ve özfonksiyonları SUSY ile birbirine bağlı olan, H_1 ve H_2 süpersimetrik partner Hamiltonyenlerden başlanır. SUSY bozulmadığında; denklem (2.8) ve (2.17)'den;

$$E_0^{(1)}(a_1) = 0 \quad , \quad \Psi_0^{(1)}(x, a_1) = N \exp \left[- \int^x W_1(y, a_1) dy \right]$$

olduğu biliniyor. H_1 'in tam spektrumunun şekil-invaryant koşulunun kullanılmasıyla cebirsel olarak kolaylıkla elde edilebileceğini göstermek için ilk adım olarak; H_1 'in birinci uyarılmış durumuna ait özdeğer ve özfonksiyonu elde edilir. Denklem (2.23)'ün her iki tarafına kinetik enerji operatörü eklendiğinde, şekil-invaryantlık koşulu için;

$$H_2(x, a_1) = H_1(x, a_2) + R(a_1) = A^\dagger(x, a_2)A(x, a_2) + R(a_1) \quad (2.24)$$

yazılabilir. Bu iki Hamiltonyen birbirinden bir sabit kadar farklı olduğundan, bunların özdeğerleri de birbirinden bu sabit kadar farklı ve özfonksiyonları da birbirleriyle orantılı olacaktır. Bu şu şekilde ifade edilebilir:

$$E_0^{(2)}(a_1) = E_0^{(1)}(a_2) + R(a_1) \quad , \quad \Psi_0^{(2)}(x, a_1) \propto \Psi_0^{(1)}(x, a_2) \quad . \quad (2.25)$$

$E_0^{(1)}(a_1) = 0$ ve $a_2 = f(a_1)$ olduğundan $E_0^{(1)}(a_2) = 0$ olur ve bu durumda taban durumu dalga fonksiyonu;

$$\Psi_0^{(1)}(x, a_2) \propto \exp \left[- \int^x W(y, a_2) dy \right] \quad (2.26)$$

olarak yazılabilir. SUSY QM' nin teorisi anlatılırken bulunan denklem (2.8) ve denklem (2.25) kullanılarak, birinci uyarılmış duruma ait enerji özdeğeri;

$$E_1^{(1)}(a_1) = E_0^{(2)}(a_1) = R(a_1) \quad (2.27)$$

elde edilir. Dalga fonksiyonlarını elde etmek için de benzer olarak; daha önce elde edilen $A^\dagger \Psi_n^{(2)} = \pm \sqrt{E_n^{(2)}} \Psi_{n+1}^{(1)} \rightarrow A^\dagger \Psi_n^{(2)} \propto \Psi_{n+1}^{(1)}$ bağıntı ile denklem (2.25)'deki dalga fonksiyonları arasındaki ilişkiyi gösteren ifade kullanıldığında;

$$\Psi_1^{(1)}(x, a_1) \propto A^\dagger(x, a_1) \Psi_0^{(2)}(x, a_1) \propto A^\dagger(x, a_1) \Psi_0^{(1)}(x, a_2) \quad (2.28)$$

birinci uyarılmış duruma ait dalga fonksiyonu bulunur. Bu işlemlere devam edildiğinde H_1 in tam spektrumu ve özfonksiyonları elde edilebilir. Bunun için $s=1,2,3,\dots$ olmak üzere H_s Hamiltonyen serisi oluşturulur. Eğer H_1 n tane bağlı duruma sahipse bu durumda $H_2, H_3, \dots, H_{n+1}$ şeklinde n tane Hamiltonyen kurulabilir ve p. Hamiltonyen H_p 'de H_1 in ilk p-1 seviyesi yoktur. H_p 'nin spektrumu H_1 'in geriye kalan spektrumu ile aynıdır. Denklem (2.23)'de verilen şekil-invaryantlık koşulu ard arda kullanılarak, $\hbar = \sqrt{2m} = 1$ için aşağıdaki ifadeye ulaşılabilir:

$$H_s = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x, a_s) + \sum_{k=1}^{s-1} R(a_k) . \quad (2.29)$$

Burada $a_s = f^{s-1}(a_1)$ yani f fonksiyonu a_1 'e s-1 kez uygulanmıştır. Denklem (2.23) ve denklem (2.29) kullanılarak H_s ve H_{s+1} Hamiltonyenlerinin spektrumları karşılaştırılabilir:

$$H_{s+1} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x, a_{s+1}) + \sum_{k=1}^s R(a_k) = -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x, a_s) + \sum_{k=1}^{s-1} R(a_k) \quad .$$

H_s ve H_{s+1} Hamiltonyenlerine bakıldığında, bunların süpersimetrik partner Hamiltonyenler olduğu görülür ve H_s nin taban durumu enerjisi hariç, özdeş bağlı durum spektrumuna sahip oldukları sonucuna varılır. $E_0^{(1)} = 0$ olduğu göz önünde bulundurularak, H_s 'nin taban durumu enerjisi denklem (2.29)'dan;

$$E_0^{(s)} = \sum_{k=1}^{s-1} R(a_k) \quad (2.30)$$

olarak bulunur.

Bundan sonra, H_s den H_{s-1} 'e doğru gidilerek H_2 ve H_1 'e ulaşılır. H_1 'in taban durumu enerjisi sıfırdır ve n seviyesi de H_n Hamiltonyeninin taban durumu seviyesine karşılık gelir. Buna göre H_1 'in tam spektrumu şu şekilde verilebilir (Dutt et al., 1988):

$$E_n^{(1)}(a_1) = \sum_{k=1}^n R(a_k) \quad , \quad E_n^{(1)}(a_1) = 0 \quad . \quad (2.31)$$

Herhangi bir şekil-invaryant potansiyel için tüm bağlı durumlara ait $\Psi_n^{(1)}(x, a_1)$ dalga fonksiyonu, süper potansiyel cinsinden yazılabilen $\Psi_0^{(1)}(x, a_1)$ taban durumu dalga fonksiyonundan kolaylıkla elde edilebilir. Bunu göstermek için taban durumu dalga fonksiyonu $\Psi_0^{(1)}(x, a_s)$ olan,

denklem (2.25) ile verilen H_s Hamiltonyeni ele alınır. H_s 'den H_{s-1} 'e doğru gidilerek H_1 Hamiltonyenine ulaşılır ve denklem (2.15) kullanılarak $H_1(x, a_1)$ orijinal Hamiltonyeni için n. durum dalga fonksiyonu, taban durumu dalga fonksiyonu cinsinden elde edilir:

$$\Psi_n^{(1)}(x, a_1) \propto A^\dagger(x, a_1) A^\dagger(x, a_2) \dots A^\dagger(x, a_n) \Psi_0^{(1)}(x, a_{n+1}) \quad (2.32)$$

Dalga fonksiyonlarının tam olarak bilinmesi çoğu zaman daha kullanışlıdır. Bu durumda denklem (2.32)'yi kullanmak yerine;

$$\Psi_n^{(1)}(x, a_1) = A^\dagger(x, a_1) \Psi_{n-1}^{(1)}(x, a_2) \quad (2.33)$$

denklemini kullanmak daha kolaydır (Cooper et al., 1995).

Burada konuyu açıklayan somut bir örnek vermek ve enerji özdeğer ve özfonksiyonlarının analitik olarak nasıl elde edilebileceğini göstermek oldukça yararlı olacaktır. Bunun için;

$$W(x) = B \tanh x$$

süper potansiyelinin ürettiği;

$$V_1(x) = B^2 - B(B+1) \operatorname{sech}^2 x \quad , \quad (2.34)$$

$$V_2(x) = B^2 - B(B-1) \operatorname{sech}^2 x \quad (2.35)$$

partner potansiyeller incelenebilir. Bu iki potansiyelin şekil-invaryant olduğunu göstermek için, $V_1(x)$ potansiyeli (B-1) parametresi cinsinden tekrar yazılır.

$$V_1(x, B-1) = (B-1)^2 - (B-1)B \operatorname{sech}^2 x \quad . \quad (2.36)$$

Artık denklem (2.35) ve denklem (2.36) ile verilen iki potansiyel birbirinden bir sabit kadar farklı olduğundan şekil-invaryantlık koşulu yazılabilir.

$$V_2(x, B) = V_1(x, B-1) + B^2 - (B-1)^2 \quad .$$

Buna göre $a_1 = B$, $a_2 = B-1$ ve $R(a_1) = B^2 - (B-1)^2 = a_1^2 - a_2^2$ olur ve denklem (2.32)'den $V_1(x, B)$ 'nin tam bağlı durum spektrumu elde edilebilir.

$$E_n^{(1)}(B) = \sum_{k=1}^n R(a_k) = R(a_1) + \dots + R(a_n) = a_1^2 - a_{n+1}^2 = B^2 - (B-n)^2 \quad (n=0,1,2,\dots).$$

Taban durumu dalga fonksiyonu ise, denklem (2.17)' den;

$$\Psi_0^{(1)}(x, B) \propto \exp \left[- \int B \tanh x dx \right] = \operatorname{sech}^B x$$

olarak bulunur. Buradan artık birinci uyarılmış durum dalga fonksiyonu da elde edilebilir:

$$\Psi_1^{(1)}(x, a_1 = B) \propto A^\dagger(x, B) \Psi_0^{(1)}(x, a_2 = B-1) \quad .$$

$$\propto \left[-\frac{d}{dx} + B \tanh x \right] \operatorname{sech}^{B-1} x \propto \operatorname{sech}^{B-1} x \tanh x$$

İşlemlere bu şekilde devam ederek $V_1(x, B)$ 'nin tüm bağlı durumlara ait özfonsiyonları bulunabilir (Khare, 2004).

3. WKB (Wentzel, Kramers, Brillouin) YAKLAŞIMI

Kuantum mekaniğinde bazı problemlerin kesin analitik çözümleri bulunamadığından, gerekli koşullar sağlandığında olay klasik mekanik sınırına indirilerek yaklaşık çözümler aranır (Landau et al., 1977).

WKB yöntemi, kuantum mekaniği problemlerini çözmek için klasik ifadelerle düzeltmeler getiren yarı-klasik bir yaklaşım yöntemi olarak tanımlanır. Bu yöntemin kullanılabilmesi için gerekli koşul, parçacığın yavaş değişen bir potansiyel alanında, büyük bir momentuma sahip olmasıdır.

Enerjisi E olan bir parçacığın, potansiyelin sabit olduğu bir bölgede hareket ettiğini düşünelim. $E > V(x)$ ise dalga fonksiyonu;

$$\Psi(x) = Ae^{\pm ikx}, \quad k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)]} \quad (3.1)$$

şeklinde elde edilir. Burada (+) işareti sağa doğru giden parçacığın, (-) işareti ise sola doğru giden parçacığın hareketini tanımlar. Bu dalga fonksiyonu, dalga boyu $\lambda = 2\pi/k$ ve genliği A olan bir titreşim hareketini belirtir. $V(x)$ 'in sabit olmadığı ancak λ 'ya göre çok yavaş değiştiği durumda bölge birçok tam dalgaboyu içerdiğinden, potansiyel yine sabit gibi düşünülebilir. Ayrıca dalgaboyu ve genliğin x ile yavaş değişmesi ve Ψ 'nin sinüsoidal olarak kalması potansiyelin sabit olarak kabul edilebileceğini doğrular.

$E < V(x)$ olduğu durumda; $V = \text{sabit}$ için dalga fonksiyonu,

$$\Psi(x) = Ae^{\pm \kappa x}, \quad \kappa = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} [V(x) - E]} \quad (3.2)$$

şeklinde üstel bir fonksiyondur. Dolayısıyla $E < V(x)$ için normalize edilebilir dalga fonksiyonu bulunamaz.

$E = V$ için ise dalga boyu sonsuza gider. Bu durumu sağlayan noktalara dönüm noktaları adı verilir.

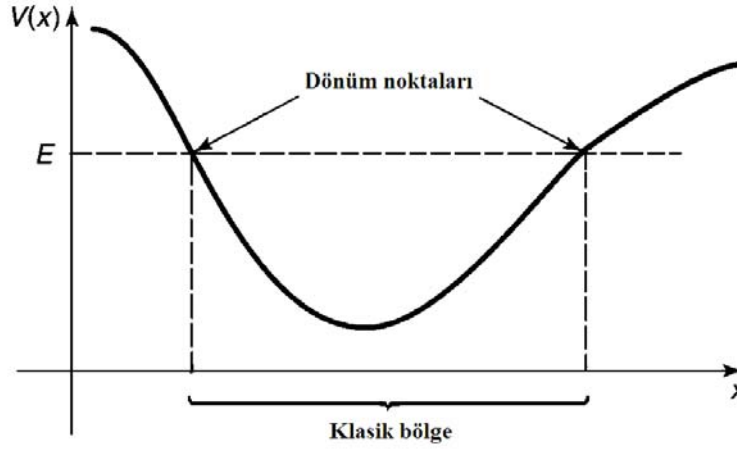
Klasik Bölge: Schrödinger denklemi;

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi}{dx^2} + V(x) \Psi = E \Psi, \quad ,$$

$$p(x) = \sqrt{2m[E - V(x)]} \quad \text{olmak üzere;}$$

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} = -\frac{p(x)^2}{\hbar^2} \Psi \quad (3.3)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $p(x)$, toplam enerjisi E ve potansiyel enerjisi $V(x)$ olan bir parçacığın momentumudur. $E > V(x)$ olduğunda momentum reel olur ve parçacığın hapsediği bu bölgeye klasik bölge adı verilir (bkz. Şekil 3.1).



Şekil 3.1 Klasik bölge

$A(x)$ genliği ve $\phi(x)$ fazı göstermek üzere; kompleks formdaki Ψ dalga fonksiyonu bu reel nicelikler cinsinden yazılabilir.

$$\Psi(x) = A(x)e^{i\phi(x)} \quad (3.4)$$

Bu dalga fonksiyonu denklem (3.3)' de yerine yazıldığında, genliği ve fazı veren iki denklem elde edilir:

$$A'' = A \left[(\phi')^2 - \frac{p^2}{\hbar^2} \right] \quad (3.5)$$

$$(A^2 \phi')' = 0 \quad (3.6)$$

Denklem (3.6)'nin çözümünden genliğin, faza bağlı olduğu sonucu çıkar:

$$A^2 \phi' = C^2 \quad , \quad A = \frac{C}{\sqrt{\phi'}} \quad ; \quad (C=\text{sabit}) \quad (3.7)$$

Doğrudan çözülemeyen denklem (3.7) için, A' nın x ile yavaş değiştiği kabul edilir ve bu yaklaşım ile A'', A' nın yanında ihmal edilebilir. Bu durumda denklem (3.7);

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \frac{p}{\hbar}$$

denklemine indirgenir ve artık $\phi(x)$ fazına ulaşılabilir:

$$\phi(x) = \pm \frac{1}{\hbar} \int p(x) dx . \quad (3.8)$$

Denklem (3.7) ve denklem (3.8)'da elde edilen sonuçlar denklem (3.4)'de yerine yazıldığında;

$$\Psi(x) \cong \frac{C}{\sqrt{p(x)}} e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int p(x) dx} \quad (3.9)$$

sonucu bulunur. Görüldüğü gibi, bu yaklaşım ile elde edilen dalga fonksiyonu sadece parçacığın momentumuna bağlıdır. Bu nedenle parçacığın hareketi klasik olarak düşünülebilir. Ayrıca WKB yönteminin, yarı-klasik yaklaşım yöntemi olarak adlandırılmasının nedeni de bundan kaynaklanır.

Parçacığın x noktasında bulunma olasılığı ise;

$$|\Psi(x)|^2 = \frac{C^2}{p(x)} \quad (3.10)$$

parçacığın bu noktadaki momentumu (dolayısıyla da hızı) ile ters orantılı olarak elde edilir (Griffiths, 1995).

Bu durumda, böyle bir bölgede hareket eden bir parçacığın enerji özdeğerlerini bulabilmek için;

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m[E - V(x)]} dx = (n + \frac{1}{2})\hbar\pi \quad , \quad n=0,1,2,\dots \quad (3.11)$$

şeklinde bir kuantumlanma koşulu yazılabilir (Landau, 1977). Bu kuantumlanma koşuluna WKB yaklaşım yöntemi ya da yarı-klasik yaklaşım yöntemi adı verilir.

4. SÜPERSİMETRİK WKB (SWKB) YAKLAŞIMI

4.1 En Düşük Mertebeli SWKB Kuantumlanma Koşulu

Yaklaşık 20 yıl önce, süpersimetri ile klasik WKB yaklaşım yönteminin birleştirilmesiyle en düşük mertebeli SWKB kuantumlanma koşulu elde edildi ve bu koşul ile enerji özdeğerlerinin sadece büyük n değerleri için değil aynı zamanda taban durumu için de bulunulabileceği gösterildi (Comtet et al, 1983). Bu bölümde; en düşük mertebeli SWKB kuantumlanma koşulu ayrıntılı bir şekilde incelenecektir.

$V_1(x)$ potansiyelinin $W(x)$ süper potansiyel cinsinden değeri denklem (2.3)'de verilmişti. Bu değer denklem (3.11) ile verilen WKB kuantumlanma koşulunda yerine yazıldığında;

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m \left[E_n^{(1)} - W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \right]} dx = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \pi \quad (4.1)$$

ifadesine ulaşılır. Burada potansiyel $\hbar$ 'ye açıkça bağlı olduğundan integral;

$$I = \int_{x_1(\hbar)}^{x_2(\hbar)} f(x, \hbar) dx = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \pi \quad (4.2)$$

$$f(x, \hbar) = \sqrt{2m \left[E_n^{(1)} - W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \right]}$$

şeklinde yazılabilir.

Çözümüne ulaşabilmek için I integrali $\hbar$ 'nin kuvvetleri cinsinden seriye açılır. $\hbar \rightarrow 0$ limitinde a ve b klasik dönüm noktaları $E_n^{(1)} = W^2(a) = W^2(b)$ tanımı ile verilir ve $\lim_{\hbar \rightarrow 0} x_{1,2} = a, b$ olur. I'nın $\hbar$ 'ye göre Taylor Serisi açılımı;

$$I_0 = \lim_{\hbar \rightarrow 0} I = \int_a^b \sqrt{2m[E_n^{(1)} - W^2(x)]} dx ,$$

$$I_1 = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{dI}{d\hbar} = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \left[\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \hbar} dx + f(x_2, \hbar) \frac{dx_2}{d\hbar} - f(x_1, \hbar) \frac{dx_1}{d\hbar} \right]$$

$$= \frac{\sqrt{2m}}{2} W'(x) \{2m[E_n^{(1)} - W^2(x)]\}^{-1/2}$$

olmak üzere;

$$I = I_0 + \hbar I_1 + O(\hbar^2) \quad (4.3)$$

şeklindedir. Klasik dönüm noktalarının tanımından $f(x_1, \hbar) = f(x_2, \hbar) = 0$ olduğu bulunur. Buna göre denklem (4.2);

$$\int_a^b \sqrt{2m[E_n^{(1)} - W^2(x)]} dx + \frac{\hbar}{2} \int_a^b \frac{W'(x) dx}{\sqrt{E_n^{(1)} - W^2(x)}} + O(\hbar^2) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \pi \quad (4.4)$$

olur. Bu denklemdeki ikinci integral kolayca hesaplanabilir:

$$\int_a^b \frac{W'(x)}{\sqrt{E_n^{(1)} - W^2(x)}} dx = \sin^{-1} \left[\frac{W(x)}{\sqrt{E_n^{(1)}}} \right]_a^b . \quad (4.5)$$

Süpersimetrisinin bozulmadığı durumda $W(x)$ süper potansiyeli dönüm noktalarında zıt işaretlidir:

$$-W(a) = W(b) = \sqrt{E_n^{(1)}} . \quad (4.6)$$

Bu tanıma göre;

$$\sin^{-1} \left[\frac{W(x)}{\sqrt{E_n^{(1)}}} \right]_a^b = \pi \quad (4.7)$$

olacağından, denklem (4.5)'de verilen integralin sonucu π olarak bulunur. Bu sonuç denklem (4.4)'de yerine yazıldığında;

$$\int_a^b \sqrt{2m[E_n^{(1)} - W^2(x)]} dx = n\hbar\pi \quad , \quad n=0,1,2,\dots \quad (4.8)$$

en düşük mertebeli süpersimetrik WKB kuantumlanma koşulu elde edilir (Dutt et al., 1991). Aynı işlemler $V_2(x)$ potansiyeli için yapıldığında;

$$\int_a^b \sqrt{2m[E_n^{(2)} - W^2(x)]} dx = (n+1)\hbar\pi \quad , \quad n=0,1,2,\dots \quad (4.9)$$

sonucu bulunur. Böylece süpersimetrik her iki partner potansiyel için SWKB kuantumlanma koşulu bulunmuş olur. Bu koşullarla ilgili şu yorumlar sıralanabilir:

a) Denklem (4.8) taban durumu ($n=0$) için incelendiğinde, a ve b dönüm noktaları çakışık olarak elde edilir ve $E_0^{(1)}=0$ olur. Buna göre SWKB kuantumlanma koşulu;

$$H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x)$$

Hamiltonyeninin taban durumu enerjisi için doğru değeri verir.

b) Denklem (4.8) ve denklem (4.9)'da bulunan sonuçlar karşılaştırıldığında; SWKB koşulunun, Bölüm.2'de anlatılan Hamiltonyen spektrumlarındaki dejenereliği koruduğu sonucuna varılır. Yani SWKB kuantumlanma koşulu ile hesaplanan yaklaşık enerji özdeğerleri $E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)}$ bağıntısını doğrular.

c) En düşük mertebeli SWKB kuantumlanma koşulu sadece büyük n değerleri için değil aynı zamanda taban durumu için de tam sonuçlar verdiğinden, klasik WKB yaklaşımının aksine SWKB yaklaşımı ile tüm n değerleri için enerji özdeğerleri hesaplanabilir (Khare, 2004). Buna göre SWKB' nin WKB'den daha iyi sonuçlar verdiği söylenebilir.

4.2 Şekil-İnvariant Potansiyeller İçin SWKB Koşulunun Doğrulanması

SWKB yönteminin üstünlüklerinden biri, kuantum mekaniğinde tam olarak çözülebilen potansiyellerin şekil-invariantlığı özelliğinin kullanılmasıdır. Bunun sayesinde klasik WKB yaklaşımının çözemediği ya da uzun cebirsel işlemler sonunda çözebildiği potansiyeller SWKB yaklaşımı ile kolayca çözülebilir ve tam değerlere ulaşılır. Yani tüm şekil-invariant potansiyellerin kesin analitik çözümleri SWKB yaklaşımı ile bulunabilir. Bunu gösterebilmek için denklem (2.23) ile verilen partner potansiyellerin şekil invariantlığı koşulu ve denklem (2.29) ile verilen s . Hamiltonyen kullanılır. H_s Hamiltonyeni için SWKB kuantumlanma koşulu;

$$\int_a^b \sqrt{2m \left[E_n^{(s)} - \sum_{k=1}^{s-1} R(a_k) - W^2(a_s, x) \right]} dx = n\hbar\pi$$

şeklinde ifade edilir. SWKB kuantumlanma koşulu taban durumu enerjisi için de doğru olduğundan;

$$E_0^{(s)} = \sum_{k=1}^{s-1} R(a_k)$$

değeri H_s Hamiltonyeni için doğrudur. H_s 'den H_{s-1} 'e doğru gidildiğinde H_2 ve H_1 Hamiltonyenlerine ulaşılır ve SWKB koşulunun $E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)}$ dejenereliğini koruduğu kullanılırsa SWKB kuantumlanma

koşulu ile tüm şekil-invaryant potansiyeller için tam enerji özdeğerleri bulunur (Khare, 2004).

Bu, tüm ŞİP için tam doğru değerler vermeyen klasik WKB yaklaşımına yapılan önemli bir düzeltmedir. Klasik WKB yaklaşımı sadece harmonik osilatör ve Morse potansiyeli için tam değerler verirken, SWKB yaklaşımı ile tüm ŞİP için tam özdeğer spektrumları elde edilebilir (Hrüska et al., 1996).

Bilinen tüm şekil-invaryant potansiyellerin (basit harmonik osilatör, üç boyutlu harmonik osilatör, Coulomb, Morse, Rosen Morse II, Eckart, Rosen Morse I, Scarf II, Genelleştirilmiş Pöschl Teller, Scarf I) taban durumu enerjileri WKB ve SWKB yaklaşım yöntemleri ile hesaplanmış ve bu potansiyellerin bağlı olduğu parametrelere (A, B, α, w, l) değerler verilerek sayısal sonuçlar elde edilmiştir. (Hrüska et al., 1996) Çizelge 4.1’de $A, B, \alpha, w, l \geq 0$ ve $-\infty \leq x \leq \infty, 0 \leq r \leq \infty$ olmak üzere; bu potansiyellerden bazıları için, süper potansiyeller ve orijinal sistem için süpersimetrik partner potansiyeller, Çizelge 4.2 ‘de de seçilen parametre değerleri ve sayısal olarak elde edilen taban durumu enerji özdeğerleri görülmektedir. Çizelge 4.2 incelendiğinde, SWKB kuantumlanma koşulu ile bulunan değerlerin gerçek değerlerle aynı olduğu sonucuna varılır. Buna göre tüm ŞİP’ler için tam değerler veren SWKB yaklaşımının, WKB yaklaşımına göre tercih edilebilir olduğu söylenir.

Potansiyelin Adı	W(x) Süper Potansiyel	V ₁ (x) Potansiyeli
Basit Harmonik Osilatör	$\sqrt{\frac{1}{2}} w^2 x$	$\frac{1}{2} w^2 x^2$
Coulomb	$\frac{e^2}{2(l+1)} - \frac{(l+1)}{r}$	$-\frac{e^2}{r} + \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{e^4}{4(l^2+1)}$
Rosen Morse (hiperbolik)	$A \tanh \alpha x + \frac{B}{A},$ $B < A^2$	$\frac{B^2}{(A^2 + A\alpha)} + A(A + \alpha) \tanh^2 \alpha x$ $+ 2B \tanh \alpha x$
Eckart	$-A \coth \alpha x + \frac{B}{A}$ $B > A^2$	$\frac{B^2}{(A^2 - A\alpha)} + A(A - \alpha) \coth^2 \alpha x$ $- 2B \coth \alpha x$
Rosen Morse (trigonometrik)	$-A \cot \alpha x - \frac{B}{A}$	$\frac{B^2}{(A^2 - A\alpha)} + A(A - \alpha) \cot^2 \alpha x$ $+ 2B \cot \alpha x$

Çizelge 4.1. Şekil-invaryant potansiyellere karşılık gelen süper potansiyel değerleri ve $\hbar = \sqrt{2m} = 1$ için hesaplanan süpersimetrik partner potansiyeller (Hrüska et al., 1996)

Potansiyelin Adı	Parametre Seçimi	E_0^{SWKB} [eV]	E_0^{WKB} [eV]	E_0 (gerçek) [eV]
Basit Harmonik Osilatör	-	0,5w	0,5w	0,5w
Coulomb	$e = 1$ $l = 1$	0,0625	0,5677	0,0625
Rosen Morse (hiperbolik)	$\alpha = 1$ $A = 2$ $B = 1$	1,9167	2,1030	1,9167
Eckart	$\alpha = 1$ $A = 2$ $B = 6$	7,00	6,51	7,00
Rosen Morse (trigonometrik)	$\alpha = 1$ $A = 2$ $B = 2$	3,00	2,5727	3,00

Çizelge 4.2. Bu potansiyellerin seçilen parametre değerlerine göre SWKB ve WKB kuantumlanma koşulları ile hesaplanan taban durumu enerji özdeğerleri (Hrüska et al., 1996)

5. SWKB YÖNTEMİ İLE BAZI POTANSİYELLER İÇİN ÇÖZÜMLER

5.1 Bazı Şekil İnvaryant Potansiyellerin Çözümleri

En düşük mertebeli SWKB kuantumlanma koşulunun tüm ŞİP için doğru olduğunu göstermek için, bu potansiyellerin şekil invaryantlık koşulu ile hesaplanan enerji özdeğerleri referans değerler (bkz. Ek.1) olarak kabul edilerek, SWKB yaklaşımı ile aynı değerlerin elde edilip edilmeyeceği araştırılabilir. Bunun için bazı ŞİP, SWKB yöntemi ile çözüldü ve sonuçlar bu referans değerlerle karşılaştırıldı.

5.1.1 Pöschl-Teller

Bu potansiyel için süper potansiyel $W(x) = A \coth(ax) - B \operatorname{cosech}(ax)$, $A < B$ şeklinde seçilebilir (Khare,2004). Bu potansiyel denklem (4.8)'de verilen I^{SWKB} integralinde yerine yazılır.

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m[E_n^{(1)} - A^2 \coth^2(ax) + 2AB \coth(ax) \operatorname{cosech}(ax) - B^2 \operatorname{cosech}^2(ax)]} dx = n\hbar\pi$$

Bu integrali çözebilmek için $y = \cosh(ax)$ değişken dönüşümü yapılır.

Bu dönüşüm altında a ve b ($a < b$) dönüm noktaları;

$$\frac{Ay - B}{\sqrt{y^2 - 1}} = \pm \sqrt{E_n^{(1)}}$$

denkleminin köklerine eşit olur. İntegral tablosunda verilen (bkz. Ek.2) $I_5(a,b)$ tablo integrali kullanılarak bu potansiyel için enerji özdeğer spektrumu elde edilir:

$$\frac{\sqrt{2m}\sqrt{A^2 - E_n^{(1)}}}{\alpha} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{y^2 - 1} \sqrt{-y^2 + \frac{2AB}{(A^2 - E_n^{(1)})}y - \frac{E_n^{(1)} + B^2}{(A^2 - E_n^{(1)})}} = n\hbar ,$$

$$\frac{\sqrt{2m}\sqrt{A^2 - E_n^{(1)}}}{\alpha} I_5(a,b) = n\hbar\pi ,$$

$$E_n^{(1)} = A^2 - \left(A - \frac{n\hbar\alpha}{\sqrt{2m}} \right)^2 . \quad (5.1)$$

Taban durumuna ait özfonksiyon ise; özfonksiyonu süper potansiyel cinsinden veren denklem (2.17) kullanılarak bulunur. İşlemlerde kolaylık sağlaması açısından normalizasyon sabiti burada 1 olarak alındı. N=1 için taban durumu dalga fonksiyonu;

$$\Psi_0^{(1)}(x) = \frac{[\sinh(\alpha x)]^{\frac{\sqrt{2m}}{\hbar\alpha}(B-A)}}{[1 + \cosh(\alpha x)]^{\frac{\sqrt{2m}}{\hbar\alpha}B}} \quad (5.2)$$

şeklinde bulunur.

5.1.2 Scarf I (trigonometrik) $W(x) = A \tan(\alpha x) - B \sec(\alpha x)$

Bu potansiyel I^{SWKB} integralinde yerine yazılır ve $y = \sin(\alpha x)$ değişken dönüşümü yapılır. Bu durumda a ve b dönüm noktaları

$$\frac{Ay - B}{\sqrt{1 - y^2}} = \pm \sqrt{E_n^{(1)}}$$

denkleminin köklerine eşit olur. $I_4(a, b)$ tablo integrali (bkz. Ek.2) kullanılarak, bu potansiyel için enerji özdeğer spektrumu elde edilir:

$$\frac{\sqrt{2m}\sqrt{A^2 + E_n^{(1)}}}{\alpha} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{1 - y^2} \sqrt{-y^2 + \frac{2AB}{(A^2 + E_n^{(1)})}y + \frac{E_n^{(1)} - B^2}{(A^2 + E_n^{(1)})}} := n\hbar\pi, \quad ,$$

$$\frac{\sqrt{2m}\sqrt{A^2 + E_n^{(1)}}}{\alpha} I_4 = n\hbar\pi, \quad ,$$

$$E_n^{(1)} = \left(A + \frac{\alpha n \hbar}{\sqrt{2m}} \right)^2 - A^2. \quad (5.3)$$

Scarf I potansiyel için taban durumu dalga fonksiyonu N=1 için

$$\Psi_0^{(1)}(x) = [\cos(\alpha x)]^{\frac{\sqrt{2m}}{\hbar\alpha}(B-A)} [1 + \sin(\alpha x)]^{\frac{\sqrt{2m}}{\hbar\alpha}B} \quad (5.4)$$

olarak bulunur.

5.1.3 Scarf II (hiperbolik) $W(x) = A \tanh(\alpha x) + B \operatorname{sech}(\alpha x)$

Bu potansiyel I^{SWKB} integralinde yerine yazılır ve $y = \sinh(\alpha x)$ değişken dönüşümü yapılır. Bu durumda a ve b dönüm noktaları;

$$\frac{Ay + B}{\sqrt{1 + y^2}} = \pm \sqrt{E_n^{(1)}}$$

denkleminin köklerine eşit olur. $I_3(a,b)$ tablo integrali (bkz. Ek.2) kullanılarak, bu potansiyel için enerji özdeğer spektrumu elde edilir:

$$\frac{\sqrt{2m}\sqrt{A^2 - E_n^{(1)}}}{\alpha} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{1+y^2} \sqrt{-y^2 - \frac{2AB}{(A^2 - E_n^{(1)})}y + \frac{E_n^{(1)} - B^2}{(A^2 - E_n^{(1)})}} = n\hbar\pi ,$$

$$\frac{\sqrt{2m}\sqrt{A^2 - E_n^{(1)}}}{\alpha} I_3(a,b) = n\hbar\pi ,$$

$$E_n^{(1)} = A^2 - \left(A - \frac{\alpha n \hbar}{\sqrt{2m}} \right)^2 . \quad (5.5)$$

Scarf II potansiyeli için taban durumu dalga fonksiyonu N=1 için

$$\Psi_0^{(1)}(x) = [\operatorname{sech}(\alpha x)]^{\frac{\sqrt{2m}}{\hbar\alpha}A} \exp \left[-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar\alpha} B \tan^{-1}(\sinh(\alpha x)) \right] \quad (5.6)$$

olarak bulunur.

5.1.4 Rosen Morse II (hiperbolik) $W(x) = A \tanh(\alpha x) + B/A$

Bu potansiyel I^{SWKB} integralinde yerine yazılır ve $y = \tanh(\alpha x)$ değişken dönüşümü yapılır. Bu durumda a ve b dönüm noktaları

$$Ay + \frac{B}{A} = \pm \sqrt{E_n^{(1)}}$$

denkleminin köklerine eşit olur.

$I_4(a, b)$ tablo integrali (bkz. Ek.2) kullanılarak, bu potansiyel için enerji özdeğer spektrumu elde edilir (Hrüska et al., 1996):

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2mA}}{\alpha} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{1-y^2} \sqrt{-y^2 - \frac{2B}{A^2}y + \frac{E_n^{(1)}}{A^2} - \frac{B^2}{A^4}} &= n\hbar\pi, \\ \frac{\sqrt{2mA}}{\alpha} I_4 &= n\hbar\pi, \\ E_n^{(1)} &= A^2 - \left(A - \frac{\alpha n \hbar}{\sqrt{2m}} \right)^2 + \frac{B^2}{A^2} - \frac{B^2}{\left(A - \frac{\alpha n \hbar}{\sqrt{2m}} \right)^2}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Rosen Morse II potansiyel için taban durumu dalga fonksiyonu $N=1$ için

$$\Psi_0^{(1)}(x) = [\sec h(\alpha x)]^{\frac{\sqrt{2m}A}{\hbar\alpha}} \exp \left[-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \frac{B}{A} x \right] \quad (5.8)$$

olarak bulunur.

5.2 q-Deforme Potansiyellerin Çözümleri

Burada SWKB yaklaşım yöntemi başka bir potansiyel sınıfı olan q deforme potansiyeller (bkz. Ek.3) için incelendi. Bunun için seçilen bazı q deforme potansiyellerin enerji özdeğerleri SWKB yöntemi ile hesaplandı ve sonuçlar bu potansiyeller için gerçek enerji özdeğerleri ile karşılaştırıldı. Ayrıca bu potansiyeller için taban durumu özfonksiyonları süper potansiyel kullanılarak bulundu.

5.2.1 q deforme Rosen Morse potansiyeli

q deforme Rosen Morse potansiyeli;

$$V_q(x) = B_0 \tanh_q(\alpha x) - \frac{U_0}{\cosh_q^2(\alpha x)} = B_0 \frac{1 - qe^{-2\alpha x}}{1 + qe^{-2\alpha x}} - 4U_0 \frac{e^{-2\alpha x}}{(1 + qe^{-2\alpha x})^2} \quad (5.9)$$

eşitliği ile verilir (Eğrifes vd., 1999a) ve bu potansiyel için süper potansiyel;

$$W(x) = A \tanh_q(\alpha x) + \frac{B}{A} \quad (5.10)$$

şeklinde seçilebilir. Taban durumu enerji özdeğerini elde etmek için denklem (2.22) bu süper potansiyel için çözülür.

$$\begin{aligned} & B_0 \tanh_q(\alpha x) - U_0 \sec h_q^2(\alpha x) - E_{0q}^{(1)} \\ & = 2B \tanh_q(\alpha x) - \left(A^2 + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} A \alpha \right) q \sec h_q^2(\alpha x) + A^2 + \frac{B^2}{A^2} \end{aligned}$$

Burada, aynı değişkenlerin katsayıları ve sabitler birbirine eşitlenerek süper potansiyelin bağlı olduğu parametreler, $V_q(x)$ potansiyelinin bağlı olduğu parametreler cinsinden elde edilir:

$$A = \frac{\hbar \alpha}{\sqrt{8m}} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8mU_0}{q\hbar^2 \alpha^2}} \right) \quad , \quad B = B_0/2$$

$$-E_{0q}^{(1)} = A^2 + \frac{B^2}{A^2} \quad .$$

A ve B sabitleri yerine yazılırsa; bu potansiyel için taban durumu enerji özdeğeri:

$$-E_{0q}^{(1)} = A^2 + \frac{B^2}{A^2} = \frac{\hbar^2 \alpha^2}{8m} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8mU_0}{q\hbar^2 \alpha^2}} \right)^2 + \frac{\frac{2mB_0^2}{\hbar^2 \alpha^2}}{\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8mU_0}{q\hbar^2 \alpha^2}} \right)^2} \quad (5.11)$$

şeklinde elde edilir.

Tüm bağlı durumlara ait enerji özdeğerlerini bulabilmek için, süper potansiyel denklem (4.8) ile verilen en düşük mertebeli SWKB kuantumlanma koşulunda yazılır:

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m \left[E_{nq}^{(1)} - A^2 \tanh_q^2(\alpha x) - 2B \tanh_q(\alpha x) - \frac{B^2}{A^2} \right]} dx = n\hbar\pi \quad .$$

Bu integrali çözebilmek için $y = \tanh_q(\alpha x)$ değişken dönüşümü yapılır.

Bu durumda integral sınırları, klasik dönüm noktalarının tanımından;

$$y_1 = a = -\frac{\sqrt{E_{nq}^{(1)}}}{A} - \frac{B}{A^2} \quad , \quad y_2 = b = \frac{\sqrt{E_{nq}^{(1)}}}{A} - \frac{B}{A^2}$$

şeklinde elde edilir. $I_4(a,b)$ tablo integrali kullanılarak, (bkz. Ek.2)

orijinal sistem için enerji özdeğer spektrumu şu şekilde elde edilir.

$$\frac{\sqrt{2mA}}{\alpha} \int_a^b \frac{dy}{1-y^2} \sqrt{-y^2 - \frac{2B}{A^2}y + \frac{E_{nq}^{(1)}}{A^2} - \frac{B^2}{A^4}} = n\hbar\pi \quad ,$$

$$\frac{\sqrt{2mA}}{\alpha} I_4(a,b) = n\hbar\pi \quad ,$$

$$E_{nq}^{(1)} = A^2 - \left(A - \frac{\alpha n \hbar}{\sqrt{2m}} \right)^2 + \frac{B^2}{A^2} - \frac{B^2}{\left(A - \frac{\alpha n \hbar}{\sqrt{2m}} \right)^2} \quad . \quad (5.12)$$

Bu değere denklem (5.11)'deki taban durumu enerji özdeğeri eklendiğinde;

$$E_{nq} = E_{nq}^{(1)} + E_{0q}^{(1)} = - \left(A - \frac{\alpha n \hbar}{\sqrt{2m}} \right)^2 - \frac{B^2}{\left(A - \frac{\alpha n \hbar}{\sqrt{2m}} \right)^2} \quad (5.13)$$

ifadesine ulaşılır. Son olarak A ve B sabitleri yerine yazılır ve q deforme Rosen Morse potansiyeli için tüm bağlı durumlara ait enerji özdeğer spektrumu aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$-E_{nq} = \frac{2\hbar^2 \alpha^2}{m} \left\{ \frac{1}{16} \left[- (2n+1) + \sqrt{1 + \frac{8mU_0}{q\hbar^2 \alpha^2}} \right]^2 + \frac{m^2 B_0^2}{\hbar^4 \alpha^4} \frac{1}{\left[- (2n+1) + \sqrt{1 + \frac{8mU_0}{q\hbar^2 \alpha^2}} \right]^2} \right\} \quad (5.14)$$

Taban durumuna karşılık gelen özfonksiyon ise N=1 için denklem (2.17) kullanılarak;

$$\Psi_{0q}^{(1)}(x) = \left[\sec h_q(\alpha x) \right]^{\frac{\sqrt{2m}}{\hbar \alpha} A} \exp \left[-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \frac{B}{A} x \right],$$

$$\Psi_{0q}^{(1)}(x) = \left[\sec h_q(\alpha x) \right]^{\frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8mU_0}{qh^2\alpha^2}} \right)} \exp \left[-\frac{2m}{\hbar^2 \alpha} \frac{B_0}{\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8mU_0}{qh^2\alpha^2}} \right)} x \right] \quad (5.15)$$

şeklinde bulunur.

5.2.2 q deforme değiştirilmiş Rosen Morse potansiyeli

q deforme değiştirilmiş Rosen Morse potansiyeli;

$$V_q(x) = \frac{V_1}{2} [1 + \tanh_q(\alpha x)] - \frac{V_2}{4} [1 - \tanh_q^2(\alpha x)] \quad (5.16)$$

şeklinde ifade edilir (Eğrifes vd., 1999a) ve bu potansiyel için süper potansiyel $W(x) = A \tanh_q(\alpha x) + \frac{B}{A}$ olarak seçilebilir. Taban durumu enerji özdeğerini bulabilmek için denklem (2.22)'den başlanır. Elde edilen denklemde, aynı değişkenlerin katsayılarının birbirine eşitlenmesiyle A,B sabitleri, ve bu sabitlere bağlı olan taban durumu enerji özdeğeri elde edilebilir:

$$A = \frac{\hbar \alpha}{\sqrt{8m}} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2mV_2}{\hbar^2 \alpha^2}} \right), \quad B = \frac{V_1}{4}, \quad E_0^{(1)} = \frac{V_1}{2} - \frac{V_2}{4} - \frac{B^2}{A^2} + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} A \alpha.$$

Bulunan A,B sabitleri $E_0^{(1)}$ ifadesinde yerine yazılırsa;

$$E_0^{(1)} = \frac{V_1}{2} - \frac{\hbar^2 \alpha^2}{8m} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2mV_2}{\hbar^2 \alpha^2}} \right)^2 - \frac{V_1^2 / 16}{\frac{\hbar^2 \alpha^2}{8m} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2mV_2}{\hbar^2 \alpha^2}} \right)^2} \quad (5.17)$$

sonucuna ulaşılır.

Tüm bağlı durumlara ait enerji özdeğerlerini bulabilmek için seçilen süper potansiyel I^{SWKB} integralinde yerine yazılır ve $y = \tanh_q(\alpha x)$ değişken dönüşümü yapılır. Bu durumda a ve b dönüm noktaları;

$$Ay + \frac{B}{A} = \pm \sqrt{E_{nq}^{(1)}}$$

denkleminin köklerine eşit olur. $I_4(a,b)$ tablo integrali (bkz. Ek.2) kullanılarak, orijinal sistem için enerji özdeğer spektrumu;

$$\frac{\sqrt{2mA}}{\alpha} \int_a^b \frac{dy}{1-y^2} \sqrt{-y^2 - \frac{2B}{A^2}y + \frac{E_{nq}^{(1)}}{A^2} - \frac{B^2}{A^4}} = n\hbar\pi$$

$$\frac{\sqrt{2mA}}{\alpha} I_4(a,b) = n\hbar\pi$$

$$E_n^{(1)} = A^2 - \left(A - \frac{\alpha n \hbar}{\sqrt{2m}} \right)^2 + \frac{B^2}{A^2} - \frac{B^2}{\left(A - \frac{\alpha n \hbar}{\sqrt{2m}} \right)^2} \quad (5.18)$$

olarak bulunur. Bu değere denklem (5.17)'deki taban durumu enerji özdeğeri de eklenir ve A, B sabitleri yerine yazılırsa; q deforme değiştirilmiş Rosen Morse potansiyeli için tüm bağlı durumlara ait enerji özdeğer spektrumu elde edilir:

$$E_n = \frac{V_1}{2} - \frac{\hbar^2 \alpha^2}{8m} \left(-(2n+1) + \sqrt{1 + \frac{2mV_2}{\hbar^2 \alpha^2}} \right)^2 - \frac{V_1^2/16}{\frac{\hbar^2 \alpha^2}{8m} \left(-(2n+1) + \sqrt{1 + \frac{2mV_2}{\hbar^2 \alpha^2}} \right)^2} . \quad (5.19)$$

Taban durumuna karşılık gelen özfonksiyon ise N=1 için denklem (2.17) kullanılarak;

$$\Psi_{0q}^{(1)}(x) = \left[\text{sech}_q(\alpha x) \right]^{\frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8mU_0}{q\hbar^2 \alpha^2}} \right)} \exp \left[- \frac{2m}{\hbar^2 \alpha} \frac{B_0}{\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8mU_0}{q\hbar^2 \alpha^2}} \right)} x \right] \quad (5.20)$$

şeklinde bulunur.

5.2.3 q deforme Pöschl Teller potansiyeli

q deforme Pöschl Teller potansiyeli;

$$V_q(x) = - \frac{V_0}{\cosh_q^2(\alpha x)} \quad (5.21)$$

olarak verilir (Eğrifes vd., 1999b).

Bu potansiyel için süper potansiyel $W(x) = A \tanh_q(\alpha x)$ olarak seçilebilir. Denklem (2.22)'nin bu süper potansiyel için çözülmesiyle;

$$A = \frac{\hbar \alpha}{\sqrt{8m}} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8mV_0}{q\hbar^2 \alpha^2}} \right) , \quad E_{0q}^{(1)} = -A^2$$

taban durumu enerji özdeğeri A sabitine bağlı olarak elde edilir. Bu sabit yerine yazılırsa;

$$E_{0q}^{(1)} = -\frac{\hbar^2 \alpha^2}{8m} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8mV_0}{q\hbar^2 \alpha^2}} \right) \quad (5.22)$$

ifadesine ulaşılır.

Tüm bağlı durumlara ait enerji özdeğerlerini bulabilmek için seçilen süper potansiyel I^{SWKB} integralinde yerine yazılır. İntegrali çözebilmek için $y = \tanh_q(\alpha x)$ değişken dönüşümü yapılır. Bu durumda a ve b dönüm noktaları;

$$Ay = \pm \sqrt{E_{nq}^{(1)}}$$

denkleminin köklerine eşit olur. $I_4(a,b)$ tablo integrali (bkz. Ek.2) kullanılarak, orijinal sistem için enerji özdeğer spektrumu elde edilir:

$$\frac{\sqrt{2mA}}{\alpha} I_4(a,b) = n\hbar\pi ,$$

$$E_{nq}^{(1)} = \frac{2\alpha n\hbar}{\sqrt{2m}} A - \frac{\alpha^2 n^2 \hbar^2}{2m} . \quad (5.23)$$

Bu değere denklem (5.22)'deki taban durumu enerji özdeğeri de eklenir ve A sabiti yerine yazılırsa; q deforme Pöschl Teller potansiyeli için tüm bağlı durumlara ait enerji özdeğer spektrumu elde edilir:

$$E_{nq} = -\frac{\hbar^2 \alpha^2}{8m} \left[-(2n+1) + \sqrt{1 + \frac{8mV_0}{q\hbar^2 \alpha^2}} \right]^2. \quad (5.24)$$

Taban durumuna karşılık gelen özfonksiyon ise normalizasyon sabiti N=1 için denklem (2.17) kullanılarak;

$$\Psi_{0q}^{(1)}(x) = \left[\sec h_q(\alpha x) \right]^{\frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8mV_0}{q\hbar^2 \alpha^2}} \right)} \quad (5.25)$$

şeklinde bulunur.

5.2.4 q deforme hiperbolik Kratzer Benzeri potansiyel

Bu potansiyel;

$$V_q(x) = \frac{V_1}{2} [1 - \coth_q(\alpha x)] + \frac{V_2}{4} [\coth_q^2(\alpha x) - 1] \quad (5.26)$$

şeklinde verilir (Eğrifes vd., 1999b) ve süper potansiyel

$W(x) = A \coth_q(\alpha x) + \frac{B}{A}$ olarak seçilebilir. Denklem (2.22)'nin seçilen

süper potansiyel için çözülmesiyle, A ve B sabitleri ile bu sabitlere bağlı olan taban durumu enerji özdeğeri elde edilebilir.

$$A = \frac{\hbar\alpha}{\sqrt{8m}} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2mV_2}{\hbar^2\alpha^2}} \right) , \quad B = -\frac{V_1}{4} ,$$

$$E_0^{(1)} = \frac{V_1}{2} - \frac{V_2}{4} - \frac{B^2}{A^2} + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} A\alpha .$$

Sabitler yerine yazılırsa; n=0 için enerji özdeğeri,

$$E_0^{(1)} := \frac{V_1}{2} - \frac{\hbar^2\alpha^2}{8m} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2mV_2}{\hbar^2\alpha^2}} \right)^2 - \frac{V_1^2/16}{\frac{\hbar^2\alpha^2}{8m} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2mV_2}{\hbar^2\alpha^2}} \right)^2} \quad (5.27)$$

olarak bulunur.

Tüm bağılı durumlara ait enerji özdeğerlerini bulabilmek için seçilen süper potansiyel I^{SWKB} integralinde yerine yazılır ve $y = \coth_q(\alpha x)$ değişken dönüşümü yapılır. Bu durumda a ve b dönüm noktaları;

$$Ay + \frac{B}{A} = \pm \sqrt{E_{nq}^{(1)}}$$

denkleminin köklerine eşit olur. $I_4(a,b)$ tablo integrali (bkz. Ek.2) kullanılarak, orijinal sistem için enerji özdeğer spektrumu;

$$E_{nq}^{(1)} = A^2 - \left(A - \frac{\alpha\hbar}{\sqrt{2m}} \right)^2 + \frac{B^2}{A^2} - \frac{B^2}{\left(A - \frac{\alpha\hbar}{\sqrt{2m}} \right)^2} \quad (5.28)$$

olarak bulunur. Bu değere denklem (5.27) ile verilen taban durumu enerji özdeğeri de eklenir ve sabitler yerine yazılırsa; q deforme hiperbolik

Kratzer Benzeri potansiyel için tüm bağlı durumlara ait enerji özdeğer spektrumu elde edilir.

$$E_n = \frac{V_1}{2} - \frac{\hbar^2 \alpha^2}{8m} \left(-(2n+1) + \sqrt{1 + \frac{2mV_2}{\hbar^2 \alpha^2}} \right)^2 - \frac{V_1^2/16}{\frac{\hbar^2 \alpha^2}{8m} \left(-(2n+1) + \sqrt{1 + \frac{2mV_2}{\hbar^2 \alpha^2}} \right)^2} . \quad (5.29)$$

Taban durumuna karşılık gelen özfonksiyon ise N=1 için denklem (2.17) kullanılarak;

$$\Psi_{0q}^{(1)}(x) = \left[\operatorname{cosech}_q(\alpha x) \right]^{\frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2mV_2}{q\hbar^2 \alpha^2}} \right)} \exp \left[\frac{m}{2\hbar^2 \alpha} \frac{V_1}{\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2mV_2}{q\hbar^2 \alpha^2}} \right)} x \right] \quad (5.30)$$

şeklinde bulunur.

5.3 $V(x) = C \tanh^2(\alpha x) - \frac{D}{\cosh^2(\alpha x)}$ Potansiyelinin Çözümü

Bu potansiyel (Büyükkılıç vd., 1997) için süper potansiyel $W(x) = A \tanh(\alpha x)$ olarak seçilebilir. Taban durumu enerji özdeğeri denklem (2.22)'den

$$E_0^{(1)} = -\frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{8m(C+D)}{\hbar^2 \alpha^2}} \right)^2 + \frac{2mD}{\hbar^2 \alpha^2} \right] \quad (5.31)$$

olarak bulunur.

Tüm bağılı durumlara ait enerji özdeğerlerini bulabilmek için seçilen süper potansiyel I^{SWKB} integralinde yerine yazılır ve $y = \tanh(\alpha x)$ değişken dönüşümü yapılır. Bu durumda a ve b dönüm noktaları;

$$Ay = \pm \sqrt{E_n^{(1)}}$$

denkleminin köklerine eşit olur. $I_4(a,b)$ tablo integrali (bkz. Ek.2) kullanılarak, orijinal sistem için enerji özdeğer spektrumu şu şekilde elde edilir.

$$\frac{\sqrt{2mA}}{\alpha} \int_a^b \frac{dy}{1-y^2} \sqrt{-y^2 + \frac{E_n^{(1)}}{A^2}} := n\hbar\pi$$

$$\frac{\sqrt{2mA}}{\alpha} I_4(a,b) = n\hbar\pi$$

$$E_n^{(1)} = \frac{2\alpha n\hbar}{\sqrt{2m}} A - \frac{\alpha^2 n^2 \hbar^2}{2m} \quad . \quad (5.32)$$

Bu değere denklem (5.31)'deki taban durumu enerji özdeğeri de eklenir ve A sabiti yerine yazılırsa; bu potansiyel için tüm bağılı durumlara ait enerji özdeğer spektrumu elde edilir.

$$E_n = -\frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m} \left[n^2 + \left(1 - \sqrt{1 + \frac{8m(C+D)}{\hbar^2 \alpha^2}} \right) n + \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{8m(C+D)}{\hbar^2 \alpha^2}} \right) + \frac{2mD}{\hbar^2 \alpha^2} \right] . \quad (5.33)$$

Taban durumuna karşılık gelen özfonksiyon ise N=1 olmak üzere denklem (2.17)'den;

$$\Psi_{0q}^{(1)}(x) = [\sec h(\alpha x)]^{\frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8m(C+D)}{\hbar^2 \alpha^2}} \right)} \quad (5.34)$$

olarak bulunur.

6. SONUÇ

Süpersimetri, fiziğin birçok alanına uygulanan ve doğada bilinen her parçacığın, süpersimetrik bir partneri olduğunu savunan oldukça ilgi çekici bir konudur.

Daha önce, en düşük mertebeli SWKB kuantumlanma koşulunun WKB yaklaşımına göre tercih edilebilir olduğu ve bu koşul ile tüm şekil invaryant potansiyellerin tam özdeğer spektrumlarına ulaşılacağı öne sürülmüştü (Khare, 2004). Bu tezde, bazı şekil invaryant potansiyellerin özdeğerleri SWKB yaklaşım yöntemi ile hesaplandı. Referans değerler ile yapılan karşılaştırmalar sonucunda, SWKB yöntemi ile elde edilen sonuçların doğruluğu gösterildi. Ayrıca SWKB yaklaşım yöntemi seçilen bazı q deforme potansiyeller için denendi ve elde edilen sonuçların gerçek değerlerle birebir uyduğu görüldü. Diğer yöntemlerle oldukça uzun işlemler sonunda çözülebilen bu potansiyeller için SWKB yaklaşım yönteminin doğru olduğu sonucuna varıldı.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Cooper, F., Khare, A. And Sukhatme, U.P., 1995, Supersymmetry and Quantum Mechanics, *Physics Reports* 251 267-385, p 291.

Griffiths, J.D., 1995, Introduction to Quantum Mechanics, *Prentice-Hall*, pp 274-277.

Landau, L.D. and Lifshitz, E.M., 1977, Quantum Mechanics, Non Relativistic Theory, *Pergamon Oxford*, pp 164-171.

Arai, A., 1991, Exactly Solvable Supersymmetric Quantum Mechanics, *J. Math. Anal. Appl.* 158, 63

Büyükkılıç, F., Eğrifes, H. and Demirhan, D., 1997, Solution of the Schrödinger Equation for Two Different Molecular Potentials by Nikiforov-Uvarov Method, *Theor. Chem. Acc.* 98:192–196.

Comtet, A., Bandrauk, A. and Campbell, D. K., 1985, Exactness of Semiclassical Bound State Energies for Supersymmetric Quantum Mechanics, *Phys. Lett.* B150, 159.

Cooper, F., Khare, A. And Sukhatme, U.P., 1994, Supersymmetry and Quantum Mechanics, *arXiv:hep-th/9405029v2*, pp 15-16, p 19.

Cooper, F., Khare, A. And Sukhatme, U.P., 2001, Supersymmetry in Quantum Mechanics, *World Scientific*, Singapore.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Dutt, R., Khare, A. And Sukhatme, U.P.**, 1988, Supersymmetry, Shape Invariance and Exactly Solvable Potentials, *Am. J. Phys.* 56(2), pp 163–168.
- Dutt, R., Khare, A. And Sukhatme, U.P.**, 1991, Supersymmetry-inspired WKB Approximation in Quantum Mechanics, *Am. J. Phys.* 59(8).
- Eğrifes, H., Demirhan, D. and Büyükkılıç, F.**, 1999a, Exact Solutions of the Schrödinger Equation for Two Deformed Hyperbolic Molecular Potentials, *Physica Scripta*. Vol. 60, 195-198.
- Eğrifes, H., Demirhan, D. and Büyükkılıç, F.**, 1999b, Polynomial Solutions of the Schrödinger Equation for the “Deformed” Hyperbolic Potentials by Nikiforov-Uvarov Method, *Physica Scripta*. Vol. 59, 90–94.
- Eğrifes, H., Demirhan, D. and Büyükkılıç, F.**, 2000, Exact Solutions of the Schrödinger Equation for the Deformed Hyperbolic Potential Well and the Deformed Four-parameter Exponential Type Potential, *Physics Letters A* 275 229-237.
- Gendenshtein, L.**, 1983, Derivation of Exact Spectra of the Schrödinger Equation by Means of Supersymmetry, *JETP Lett.* 38, 356.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Hrüska, M., Keung, W.Y. and Sukhatme, U.,** 1996, Accuracy of Semiclassical Methods for Shape Invariant Potentials, *arXiv:quant-ph/9611030v1*.
- Khare, A.,** 2004, Supersymmetry in Quantum Mechanics, *arXiv:math-ph/0409003v1*.
- Lee, C.,** 1999, Supersymmetric Quantum Mechanics, *Reed College* pp 15-19, 30-31
- Özer, O.,** 2003, Supersymmetric Quantum Mechanics and Its Application in Physics, Engineering Physics, *University of Gaziantep*, pp 7-10.
- Ramond, P.,** 1971, Dual Theory for Free Fermions, *Phys. Rev.*, D3, 2415
- Wellman, T.,** 2003, An Introduction to Supersymmetry in Quantum Mechanical System, www.physics.brown.edu/physics/undergradpages/theses/SeniorThesisWellman.pdf.
- Witten, E.,** 1981, Dynamical Breaking of Supersymmetry, *Nucl. Phys.* B188, 513

EKLER

Ek 1. SWKB ile hesaplanan şekil invaryant potansiyeller için alınan referans değerler

Potansiyelin Adı:	$W(x)$ (Khare,2004):	$E_n^{(1)}$ (Khare, 2004):	$\Psi_0^{(1)}(x)$ (Dutt, 1988):
Pöschl-Teller	$A \coth(\alpha x)$ $- B \operatorname{sech}(\alpha x)$	$A^2 - (A - n\alpha)^2$	$\frac{[\sinh(\alpha x)]^{\frac{\sqrt{2m}}{\hbar\alpha}(B-A)}}{[1 + \cosh(\alpha x)]^{\frac{\sqrt{2m}}{\hbar\alpha}B}}$
Scarf I trigonometrik	$A \tan(\alpha x)$ $- B \sec(\alpha x)$	$(A + n\alpha)^2 - A^2$	$\frac{[\cos(\alpha x)]^{\frac{\sqrt{2m}}{\hbar\alpha}(B-A)}}{[1 + \sin(\alpha x)]^{\frac{\sqrt{2m}}{\hbar\alpha}B}}$
Scarf II hiperbolik	$A \tanh(\alpha x)$ $+ B \operatorname{sech}(\alpha x)$	$A^2 - (A - n\alpha)^2$	$\frac{[\operatorname{sech}(\alpha x)]^{\frac{\sqrt{2m}}{\hbar\alpha}A}}{\exp\left[-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar\alpha}B \tan^{-1}(\sinh(\alpha x))\right]}$
Rosen Morse II Hiperbolik	$A \tanh(\alpha x)$ $+ B/A$	$A^2 - (A - n\alpha)^2$ $+ B^2 / A^2 - B^2 / (A - n\alpha)^2$	$\frac{[\operatorname{sech}(\alpha x)]^{\frac{\sqrt{2m}}{\hbar\alpha}A}}{\exp\left[-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \frac{B}{A} x\right]}$

Çizelge Ek.1: Şekil invaryant potansiyellere karşılık gelen süper potansiyel değerleri ile $\hbar = \sqrt{2m} = 1$ için hesaplanan enerji özdeğerleri (Khare, 2004) ve bu potansiyellerin taban durumu dalga fonksiyonları (Dutt, 1988)

Ek 2. İntegral Tablosu

En düşük mertebeli SWKB kuantumlanma koşulu kullanılarak, enerji özdeğerlerinin hesaplanmasında karşılaşılan integraller aşağıdaki tablo integralleri kullanılarak çözülebilir.

$$I_1(a, b) = \int_a^b dy \sqrt{(y-a)(b-y)} = \frac{\pi}{8} (b-a)^2$$

$$I_2(a, b) = \int_a^b \frac{dy}{y} \sqrt{(y-a)(b-y)} = \frac{\pi}{2} (a+b) - \pi \sqrt{ab}$$

$$I_3(a, b) = \int_a^b \frac{dy}{1+y^2} \sqrt{(y-a)(b-y)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{1+a^2} \sqrt{1+b^2} - ab + 1 \right)^{1/2} - \pi$$

$$I_4(a, b) = \int_a^b \frac{dy}{1-y^2} \sqrt{(y-a)(b-y)} = \frac{\pi}{2} \left(2 - \sqrt{(1-a)(1-b)} - \sqrt{(1+a)(1+b)} \right)$$

$$I_5(a, b) = \int_a^b \frac{dy}{y^2-1} \sqrt{(y-a)(b-y)} = \frac{\pi}{2} \left(\sqrt{(a+1)(b+1)} - \sqrt{(a-1)(b-1)} - 2 \right)$$

Burada a ve b dönüm noktaları olup, $a < b$ olmak üzere gerçel sayılardır (Hrüska et al., 1996).

Ek 3. q Deforme Hiperbolik Potansiyeller

$q > 0$ reel bir parametre olmak üzere;

$$\sinh_q(x) = \frac{e^x - qe^{-x}}{2}, \quad \cosh_q(x) = \frac{e^x + qe^{-x}}{2},$$

$$\tanh_q(x) = \frac{\sinh_q(x)}{\cosh_q(x)}, \quad \operatorname{sech}_q(x) = \frac{1}{\cosh_q(x)}$$

şeklinde verilen hiperbolik fonksiyonlar kullanılarak, q deforme hiperbolik potansiyeller olarak adlandırılan ve $q \rightarrow 1$ için standart potansiyellere dönüşen yeni bir potansiyel sınıfı tanımlanmıştır (Arai, 1991). Bu potansiyellerin enerji öz durumlarının genellikle q parametresine bağlı olması beklenmektedir. Ancak bazı q deforme potansiyeller için bulunan enerji özdeğerleri bu parametreden bağımsız olarak elde edilir. Bu durumu sağlayan potansiyeller şekil invaryant potansiyellerdir. Yani q parametresi ile bu potansiyellerin şekilleri değişmez kalır (Eğrifes vd., 1999b). q deforme değiştirilmiş Rosen Morse potansiyeli ve q deforme hiperbolik Kratzer benzeri potansiyel şekil invaryant potansiyellere örnek gösterilebilir.

Genel hiperbolik fonksiyonlar için bilinen tüm bağıntılar, q deforme hiperbolik fonksiyonlar için düzenlenebilir:

$$\cosh_q^2(x) - \sinh_q^2(x) = q \quad 1 - \tanh_q^2(x) = q \operatorname{sech}_q^2(x)$$

$$\frac{d}{dx} \sinh_q(x) = \cosh_q(x), \quad \frac{d}{dx} \cosh_q(x) = \sinh_q(x) \quad .$$

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Tekirdağ, Çorlu’da doğdu. İlkokulu, Marmaracık Köyü İlköğretim okulunda, ortaokulu, Çorlu Cumhuriyet Ortaokulunda okudu. 1997–2001 yılları arasında, yabancı dil ağırlıklı Çorlu Ticaret Borsası Süper Lise’sinde ortaöğretimini tamamladıktan sonra, 2001 yılında Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Fizik bölümünü kazandı. 2001–2002 öğretim yılında İngilizce hazırlık eğitimi aldı. 2005–2006 öğretim yılı bahar döneminde Fizik bölümünü ikincilikle bitirdi ve aynı yıl Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematiksel Fizik bilim dalında yüksek lisans eğitimine başladı.