

T.C.
İstanbul Üniversitesi
Sosyal Bilimler Enstitüsü
Ekonometri Anabilim Dalı

Doktora Tezi

**İktisadi Zaman Serilerinde Karşılaşılan Aykırı
Gözlemler ve Kullanılan Güçlü Tahmin Yöntemleri**

Özlem Yorulmaz

2502030138

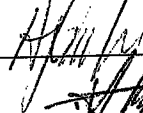
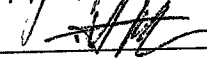
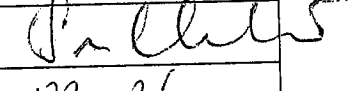
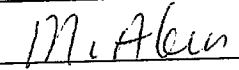
Tez danışmanı: Prof. Dr. Karun Nemlioğlu

İstanbul 2010

T.C
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüz **EKONOMETRİ** Anabilim Dalında **2502030138** numaralı **ÖZLEM YORULMAZ'IN** hazırladığı **“İKTİSADİ ZAMAN SERİLERİNDE KARŞILAŞILAN AYKIRI GÖZLEMLER VE KULLANILAN GÜÇLÜ TAHMİN YÖNTEMLERİ”** konulu ~~YÜKSEK LİSANS~~ / **DOKTORA TEZİ** ile ilgili **TEZ SAVUNMA SINAVI**, Lisansüstü Öğretim Yönetmeliği'nin 35.Maddesi uyarınca **20/04/2010 SALI** günü saat **09:00'da** yapılmış, sorulan sorulara alınan cevaplar sonunda adayın tezinin ~~...ne~~ *** OYBİRLİĞİ / OYÇOKLUĞUYLA** karar verilmiştir.

JÜRİ ÜYESİ	KANAATİ(*)	İMZA
PROF.DR.AHMET GÖKÇEN	Kabul	
PROF.DR.KARUN NEMLİOĞLU	Kabul	
PROF.DR.TARGAN ÜNAL	Kabul	
YRD.DOÇ.DR.SEMA AKMAN	Kabul	
YRD.DOÇ.DR.MELDA AKIN	Kabul	

ÖZ

İKTİSADİ ZAMAN SERİLERİNDE KARŞILAŞILAN
AYKIRI GÖZLEMLER VE KULLANILAN GÜÇLÜ TAHMİN
YÖNTEMLERİ

Zaman serileri kaçınılmaz olarak aykırı gözlem olarak adlandırılan beklenmeyen ya da sıradışı olayları içerir. Aykırı gözlemler türlerine bağlı olarak (AO, IO, LC, TC) zaman serileri analizinin klasik tahmin süreci (model belirlemesi, tahmin, öngörü gibi) aşamalarını önemli derecede etkiler ve yanıltıcı sonuçlar verir. Bu çalışmada, ARMA-GARCH-VAR-MGARCH modellerinin çeşitli dayanıklı tahmin türleri ve aykırı gözlem belirlenmesinde kullanılan yaklaşımlardan bahsedilmiştir. Bunun yanı sıra çalışmanın uygulama bölümünde, Döviz kuru, IMKB-100, SP500 gibi çeşitli seriler üzerinden ARMA-VAR-BEKK modellemeleri klasik ve dayanıklı tahmincilerle yapılmış, MSE-MAD gibi istatistiklerle öngörülerin iyiliği değerlendirilmiş ve model yapıları dikkate alınarak aykırı gözlemler belirlenmiştir. Son bölümde, değişkenler arası ilişkinin açıklanması süreci ve öngörü ile gerçek değerler arasındaki uyum örnekler üzerinden araştırılarak tezin genel bulguları şekillendirilmiştir.

ABSTRACT
OUTLIERS ENCOUNTERED IN ECONOMIC TIME
SERIES AND EMPLOYED ROBUST ESTIMATION
TECHNIQUES

Time Series data inevitably consists of unexpected or extraordinary events that are named as outliers. Outliers, depending on their types (AO, IO, TC, LC), could affect significantly the standard estimation of time series analysis procedure steps (model identification, estimation and forecasting) and give misleading results. In this study, various types of robust estimation of ARMA-GARCH-VAR-MGARCH models and employed outlier detection approaches are mentioned. Besides, in the application part of the study, by using real data sets as exchange rate, ISE-100 and SP-500 series, ARMA-VAR-BEKK structures are modeled by means of classical and robust approaches; goodness of forecasts are evaluated regarding MSE and MAD statistics and outliers are detected with respect to these model structures. By the final section, at the end of the explanation process of cross-variable relations and the comparison process between forecast values and real observations, the crucial remark is obtained thus; “in existence of outliers it is necessary to use robust estimation techniques”. In the final section, the process of cross-variable relations and how fit the forecast values to real observations are investigated over the applications and by the way general findings of thesis are shaped.

ÖNSÖZ

Zaman serileri analizi üzerine son zamanlarda literatürde yapılmakta olan çalışmalar veride aykırı gözlem bulunması gerçekliğinin kabul edildiğini gösterir niteliktedir. Politik ve ekonomik müdahaleler, doğal afetler, ölçüm hataları gibi karşılaşma sıklığı çok olmayan ama seriler üzerindeki etkisi önemli olabilen aykırı gözlemlerle karşılaşılması olasıdır. Bu durumda konvansiyonel olarak ele alınan zaman serisi analiz yaklaşımlarının birçoğunun serinin homojen yapısını gözönüne alarak varsayımlarda bulunması, ister istemez aykırı gözlem varlığında model yapısının yeterliliği, tahmin ve öngörülerin güvenilirliği, etkinliği gibi kavramların sorgulanmasına neden olur.

Yerli literatürde aykırı gözlem etkilerini dikkate alan çalışmaların sayısı oldukça azdır. Bu çalışmalar, ağırlıklı olarak ya ARMA modelleri üzerindeki aykırı gözlemlerin klasik yolla belirlenmesi (TRAMO-SEATS ile) ya da birim kök sınaması aşamasında önceden bilindiği varsayılan AO ve IO türü aykırı gözlem etkilerinin kukla değişken olarak ele alınması üzerinedir. Bu anlamda çalışmanın içeriği ARMA, GARCH, VAR ve MGARCH gibi geniş kapsamda zaman serisi modelleri üzerindeki aykırı gözlem türlerinin belirlenmesi, aykırı gözlem etkilerinin değerlendirilmesi, çeşitli modellerin tahmini için önerilen dayanıklı tahmin tekniklerinin açıklanması şeklinde oluşturularak literatüre katkı sağlamak amaçlanmıştır.

Çalışmada sözü edilen farklı dayanıklı tahmin teknikleri ve aykırı gözlemlerin teşhisine ilişkin programların bir kısmının paylaşımına açık olmamasından dolayı uygulama esnasında sözü edilen bu tekniklerin karşılaştırmalı üstünlüklerine sınırlı biçimde yer verilmiştir.

Bu çalışmanın ortaya çıkmasına göstermiş oldukları katkılardan dolayı, öncelikle, çalışmanın her aşamasında ilgi ile görüşlerini eksik etmeyen, eleştirileriyle çalışmamı şekillendiren danışman hocam Prof. Dr. Karun Nemlioğlu'na, Tez İzleme

Komitesi'ndeki değerli hocalarım Prof. Dr. Ahmet Gökçen'e ve Prof. Dr. Targan Ünal'a,

Tezi baştan sona okuyarak gerekli düzeltmeler konusunda yardımcı olan İstatistik Ana Bilim Dalı'ndaki hocalarıma,

Karşılıksız olarak kodlarını paylaşıma açan Prof.Dr.Christophe Croux'a, Doç.Dr.Kris Boudt'a, Doç.Dr. Pedro Galeano ve Prof.Dr.Luigi Grossi'ye, çok değerli yorumlarını sabırla e-postalarımaya cevap vererek yapan Prof.Dr.Victor Yohai ve Prof.Dr. Philip Hans Franses'e,

Ve çalışma süresince kendilerinden çalmış olduğum zamanı anlayışla karşılayan, ilgilerini hiç bir zaman eksik etmeyen dostlarıma ve aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZ.....	III
ABSTRACT.....	IV
ÖNSÖZ.....	V
İÇİNDEKİLER.....	VII
TABLolar – ŞEKİLLER.....	X
KISALTMALAR.....	XII
GİRİŞ.....	1

BİRİNCİ BÖLÜM

ARMA MODELLERİNDE KARŞILAŞILABİLEN AYKIRI GÖZLEM TÜRLERİ VE GÜÇLÜ TAHMİN YÖNTEMLERİ3

1.1. ARMA Modeli.....	5
1.2. ARMA Modellerinde Aykırı Gözlem Türleri.....	7
1.2.1. Anlık Aykırı Gözlem(Additive Outlier-AO) Türü.....	8
1.2.2. Şoka Dayalı Aykırı Gözlem (Innovative Outlier-IO) Türü.....	10
1.2.3. Seviye Kayması (Level Shifts-LS) Türü Aykırı Gözlem.....	11
1.2.4. Geçici Değişim (Temporary Change-TC) Türü Aykırı Gözlem.....	13
1.3. Müdahale Analizi.....	15
1.4. ARMA Modellerinde Aykırı Gözlem Etkileri.....	19
1.4.1. Otokorelasyon Katsayısı Üzerindeki Etki.....	20
1.4.2. Parametre Tahminleri Üzerindeki Etki.....	22
1.5. Etkin Gözlemler.....	25
1.6. ARMA Modellerinde Aykırı Gözlemlerin Teşhisi.....	27
1.6.2. Klasik Yöntemle Teşhis.....	28
1.6.1.1 Aykırı Gözlem Etkisinin Tahmini.....	30
1.6.1.2 Çoklu Aykırı Gözlem Etkisi ve Çoklu Aykırı Gözlem Etkisinin Belirlenmesi.....	32
1.6.3. Dayanıklı Yöntemle Teşhis.....	35
1.7. Çeşitli Dayanıklı Tahminciler.....	37

1.7.1. ARMA Modellerinin M Tahmini.....	41
1.7.2. ARMA Modellerinin Genelleştirilmiş M Tahmini.....	42
1.7.3. ARMA modelinin τ Tahmini.....	43
1.7.4. Dayanıklı Filtrelenmiş τ Tahmini.....	45

İKİNCİ BÖLÜM

ARCH-GARCH MODELDE KARŞILAŞILAN AYKIRI GÖZLEMLER VE KULLANILABİLECEK GÜÇLÜ TAHMİN YÖNTEMLERİ	47
2.1. GARCH Modelleri.....	49
2.2. GARCH Modellerinde Aykırı Gözlem Türleri.....	50
2.3. GARCH Modellerinde Aykırı Gözlemlerin Teşhis Yöntemleri.....	52
2.3.1. İlk Yaklaşım (Franses ve Ghijssels Metodu-1999).....	52
2.3.2. İkinci Yaklaşım (Doornik ve Ooms Metodu- 2005).....	55
2.3.3. Üçüncü Yaklaşım (Charles-Darne Metodu-2005-2008).....	55
2.3.4. Dördüncü Yaklaşım (ICSS algoritması ile).....	56
2.4. GARCH Modellerinin Klasik Yöntemle Tahmini.....	58
2.4.1. EKK Tahmini.....	59
2.4.2. EÇO Tahmini.....	60
2.4.3. GEKK Tahmini.....	61
2.4.4. QML Tahmini.....	62
2.5. GARCH Modellerinde Aykırı Gözlemlerin Etkileri.....	62
2.5.1. EKK Tahmini Üzerine Etki.....	63
2.5.2. GEKK Tahmin Üzerine Etki.....	66
2.5.3. EÇO Tahmin Üzerine Etki.....	67
2.5.4. QML Tahmin Üzerine Etki.....	67
2.6. ARCH Etkisinin Testine Dayanıklı Yaklaşım.....	68
2.6.1. İlk Yaklaşım.....	70
2.6.2. İkinci Yaklaşım.....	72
2.7. GARCH Modellerinin Dayanıklı Tahmini.....	73
2.7.2. Sınırlandırılmış M Tahmincisi.....	78
2.7.3. Sınırlandırılmış QML Tahmincisi.....	80
2.7.4. LAD Tahmincisi.....	83
2.7.5. LMS Tahmincisi.....	84

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

ÇOK DEĞİŞKENLİ ZAMAN SERİLERİNDE KARŞILAŞILAN AYKIRI GÖZLEMLER VE GÜÇLÜ TAHMİN YÖNTEMLERİ87

3.1.	Çok Değişkenli Zaman Serilerinde Aykırı Gözlem Türleri.....	91
3.2.	Çok Değişkenli Zaman Serilerinde Aykırı Gözlemlerin Teşhis Süreci.....	93
3.2.1	İlk Yaklaşım (Tsay, Pena ve Pankartz Metodu-2000).....	94
3.2.2	İkinci Yaklaşım (Galeano, Pena ve Tsay Metodu-2006).....	96
3.3	Çok Değişkenli Zaman Serilerinde Aykırı Gözlem Etkileri.....	99
3.4	Çok Değişkenli Zaman Serilerine Dayanıklı Yaklaşım.....	100
3.4.1	Vektör Otoregresif Modeller ve Dayanıklı Tahmin.....	100
3.4.2	Çok Değişkenli GARCH Modelleri ve Dayanıklı Tahmin.....	106
3.4.2.1	BEKK Parametrizasyonu.....	108
3.4.2.2	BEKK Parametrizasyonuna Dayanıklı Yaklaşım.....	109
3.5	Boyut İndirgeme.....	113

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

UYGULAMA.....116

UYGULAMA 1: Döviz Kuru ve Altın Fiyatları Serilerinin ARMA Modellemesi..117

UYGULAMA 2: Döviz Kuru ve İMKB-100 Endeksi Arasındaki İlişkinin VAR ile İncelenmesi.....139

UYGULAMA 3: İMKB-100 ve SP-500 Endeksleri Arasındaki İlişkinin Çok Değişkenli GARCH ile Araştırılması.....148

SONUÇ.....155

KAYNAKÇA.....158

EKLER.169

ÖZGEÇMİŞ.....188

TABLÖLAR

Tablo 4.1. Farkı Alınmış Logaritmik Döviz Kuru Serisinde Belirlenen Aykırı Gözlemler

Tablo 4.2. Klasik Yolla ARMA Model Tahmini (Döviz Kuru Serisi)

Tablo 4.3. Müdahale Değişkeni İçeren ARMA Model Tahmini (Döviz Kuru Serisi)

Tablo 4.4. Dayanıklı I Tahmicisi ile Yapılan ARMA Model Tahmini (Döviz Kuru Serisi)

Tablo 4.5. Dayanıklı II Tahmicisi ile Yapılan ARMA Model Tahmini (Döviz Kuru Serisi)

Tablo 4.6. Dayanıklı III Tahmicisi ile Yapılan ARMA Model Tahmini (Döviz Kuru Serisi)

Tablo 4.7.a Klasik ve Dayanıklı Tahmin Yöntemlerine Dayalı MSE Değerleri (Döviz Kuru Serisi)

Tablo 4.7.b Klasik ve Dayanıklı Tahmin Yöntemlerine Dayalı MAD Değerleri (Döviz Kuru Serisi)

Tablo 4.8. Farkı Alınmış Logaritmik Altın Fiyatları Serisinde Belirlenen Aykırı Gözlemler

Tablo 4.9. Klasik Tahmin ile Yapılan Modelleme (Altın Serisi)

Tablo 4.10. Dayanıklı I Tahmircisi ile Yapılan Modelleme (Altın Serisi)

Tablo 4.11. Dayanıklı II Tahmircisi ile Yapılan Modelleme (Altın Serisi)

Tablo 4.12. Dayanıklı III Tahmircisi ile Yapılan Modelleme (Altın Serisi)

Tablo 4.13a Klasik ve Dayanıklı Tahmin Yöntemlerine Dayalı MSE Değerleri (Altın Serisi)

Tablo 4.13b Klasik ve Dayanıklı Tahmin Yöntemlerine Dayalı MAD Değerleri (Altın Serisi)

Tablo 4.14. Logaritmik Döviz Kuru ve Logaritmik İMKB-100 serilerine ilişkin Birim Kök Sınaması

Tablo 4.15. Klasik yolla VAR Modelinin Tahmini

Tablo 4.16. Klasik Modele Müdahale Değişkeninin Eklenmesiyle Bulunan Tahminler

Tablo 4.17. Logaritmik Döviz Kuru ve Logaritmik İMKB-100 serilerine ilişkin Birim Kök Sınaması (LS Noktasının Dikkate Alındığı)

Tablo 4.18. MLTS ile VAR Modelinin Tahminine Dayalı Sonuçlar

Tablo 4.19. Filtre Edilen Seri Üzerinden VAR modeli Tahmin Sonuçları

Tablo 4.20a Klasik ve Dayanıklı Yöntemlere Dayanarak Elde Edilen VAR Modelinin MSE kriterine göre değerlendirilmesi

Tablo 4.20b Klasik ve Dayanıklı Yöntemlere Dayanarak Elde Edilen VAR Modelinin MAD kriterine göre değerlendirilmesi

Tablo 4.21. İMKB100 –SP500 Serileri Özet İstatistikleri

Tablo 4.22. EÇÖ'ya Dayalı BEKK Modelinin Parametre Tahminleri

Tablo 4.23. BIP-BEKK Model Parametrelerinin Tahmini

ŞEKİLLER

Şekil 1.1. AO Türü Aykırı Gözlemin Bir Seri Üzerinde Gösterimi

Şekil 1.2. IO Türü Aykırı Gözlemin Bir Seri Üzerinde Gösterimi

Şekil 1.3. LS Türü Aykırı Gözlemin Bir Seri Üzerinde Gösterimi

Şekil 1.4. TC Türü Aykırı Gözlemin Bir Seri Üzerinde Gösterimi

Şekil 4.1. 1950-2009 Tarihleri Arasındaki Aylık Döviz Kuru Serisi

Şekil 4.2. 1950-2009 Tarihleri Arasındaki Aylık Logaritmik Döviz Kuru Serisi

Şekil 4.3. 1950-2009 Tarihleri Arasındaki Farkı Alınmış Logaritmik Aylık Döviz Kuru Serisi

Şekil 4.4. Klasik Tahminle Bulunan Model Artıklarının QQ Çizimi (Döviz Kuru)

Şekil 4.5. Dayanıklı III Tahminiyle Bulunan Model Artıklarının QQ Çizimi (Döviz Kuru)

Şekil 4.6. Klasik Yolla Tahminle Bulunan $\hat{y}_t$ ve y_t çizimi (Döviz Kuru)

Şekil 4.7. Dayanıklı III ile Tahmin Edilen Modelden elde edilen $\hat{y}_t$ ve y_t çizimi (Döviz Kuru)

Şekil 4.8. 1995-2009 Tarihleri Arasında Logaritmik Altın Fiyatları Serisi

Şekil 4.9. 1995-2009 Tarihleri Arasında Farkı Alınmış Logaritmik Altın Fiyatları Serisi

Şekil 4.10. Klasik Yolla Tahminle Bulunan $\hat{y}_t$ ve y_t çizimi (Altın Serisi)

Şekil 4.11. Dayanıklı III Tahmini ile Bulunan $\hat{y}_t$ ve y_t çizimi (Altın Serisi)

Şekil 4.12. Klasik Tahminle Bulunan Model Artıklarının QQ Çizimi (Altın Serisi)

Şekil 4.13. Dayanıklı III Tahminiyle Bulunan Model Artıklarının QQ Çizimi (Altın Serisi)

Şekil 4.14. Logaritmik Döviz Kuru ve Logaritmik İMKB-100 Serileri

Şekil 4.15. Logaritmik İMKB100 ve Logaritmik SP500 Serilerinin Çizimi

Şekil 4.16. Farkı alınmış Logaritmik İMKB ve Farkı Alınmış Logaritmik SP500 Serilerinin Çizimi

Şekil 4.17. İMKB-SP500 Serileri Arası BEKK Korelasyonuna Ait Çizim

Şekil 4.18. İMKB-SP500 Serileri Arası BIP-BEKK Korelasyonuna Ait Çizim

Şekil 4.19. İMKB-SP500 Serilerine Ait Mahalanobis Uzaklığına Ait Çizim

KISALTMALAR

ACF: Otokorelasyon Fonksiyonu

ADF: Augmented Dickey-Fuller

AO: Anlık Aykırı Gözlem Türü - (Additive Outlier)

AR: Otoregresif

ARCH: Otoregresif Koşullu Değişen Varyans

ARMA: Otoregresif Hareketli Ortalama

B: Gecikme İşlemcisi

BEKK :Baba, Engle, Kraft, Kroner Parametrizasyonu

BHHH: Berndt, Hall, Hall, Hausman

BIP: Şok Yayılımı Sınırlı

CCC: Sabit Koşullu Korelasyonlar

DCC: Dinamik Koşullu Korelasyonlar

EÇO: En Çok Olabilirlik

EKK: En Küçük Kareler

GARCH: Genelleştirilmiş Otoregresif Koşullu Değişen Varyans

GM: Genelleştirilmiş M tahmini

ICA: Bağımsız Bileşenler Analizi

IF: Etki Fonksiyonu

IID: Bağımsız ve Özdeş Dağılır

IO: Şoka Dayalı Aykırı Gözlem Türü(Innovative Outlier)

İMKB: İstanbul Menkul Kıymetler Borsası

LAD:En Küçük Mutlak Sapmalar

LMS:En Küçük Medyan Kareler Tahmincisi

LN: Doğal Logaritma

LR: Benzerlik Oranı

LS: Seviye Kayması Türü Aykırı Gözlem

LTS: En Küçük Kırpılmış Kareler Tahmincisi

M: M Tahmincisi

MA: Hareketli Ortalama

MAD: Ortalama Mutlak Sapma

MAO: Çok Değişkenli Anlık Aykırı Gözlem

MCD: Minimum Determinantlı Kovaryans Tahmincisi

MIO: Çok Değişkenli Kademeli Aykırı Gözlem

MLS: Çok Değişkenli Seviye Kayması

MLTS: Çok Değişkenli En Küçük Kırpılmış Kareler Tahmincisi

MSE: Ortalama Hata Kare

MTC: Çok Değişkenli Geçici Değişim

PACF: Kısmi Otokorelasyon Fonksiyonu

PCA : Temel Bileşenler Analizi

QML: Sözde En Çok Olabilirlik

SP: Standard & Poor's Endeksi

TC: Geçici Değişim Türü Aykırı Gözlem

VAR: Vektör Otoregresif

VO : Varyans Türü Aykırı Gözlem

WN: Saf Hata Terimi

GİRİŞ

Çeşitli analizlerde kullanılan istatistiksel metodların uygulanabilmesi, ilgilenilen probleme ilişkin modelleme ve çıkarsama yapılabilmesi ancak belli varsayımların sağlanması ile mümkündür. Genellikle en sık kullanılan varsayım verinin normal dağılması üzerinedir. Uygulamada, veriyi oluşturan gözlemlerin çoğunluğunun bu varsayımı temsil edebilmesinin yanısıra bazı gözlemler çoğunluktan farklı bir yapı sergileyerek dağılımın kuyruk kısmının normal dağılıma göre daha kalın kuyruklu yapıda olmasına neden olabilir. Böyle bir durumda normallik varsayımı dikkate alınmaya devam edilirse, örneğin En Çok Olabilirlik (EÇO) yöntemine ya da En Küçük Kareler (EKK) yöntemine dayalı tahminler yapılırsa, etkin olmayan, yanlı olan tahminlerle karşı karşıya kalınacaktır. Her ne kadar aykırı gözlem, yapılan varsayımlara ya da verinin yapısına bağlı olarak tanımlansa ve çalışma boyunca değişen modeller doğrultusunda bu tanımlama güncellenecek olsa da, Barnett ve Lewis (1994)'in çalışmalarında¹ getirdikleri kapsamlı tanımlama yaklaşımı şimdilik benimsenebilir. Buna göre aykırı gözlem, verinin kalan kısmından tutarsız, aykırı görünüm izleyen, veriyle uyumlu görünmeyen ve çeşitli istatistiksel testlerle uyumsuz olduğu belirlenen gözlemlerdir.

Veri analiz sürecinde aykırı gözlemlerle sık sık karşı karşıya kalınabilir, zaman serileri analizi de bu süreç içerisinde değerlendirilir. Zaman serilerinin akışı **aykırı gözlem** ya da **müdahale**ler başlığı altında değerlendirilen genel düzeni bozan olaylar yüzünden zaman zaman değişebilir. Nitekim, Balke ve Fomby çalışmalarında² resesyon ve dönüm noktaları ile aykırı gözlemlerin bağlantılı olduğunu söylemiştir. Genel düzeni bozacak olaylar tatiller, grev, satış promosyonları, politika değişimleri, ekonomik krizler, beklenmeyen sıcak ya da soğuk hava dalgaları, savaş, doğal afetler, reklamlar v.s. şeklinde sıralanabileceği gibi ölçüm ya da kayıt hatası kaynaklı da olabilir. Kayıt ya da ölçüm hatası kaynaklı

¹ V. Barnett, T. Lewis, **Outliers in Statistical Data**, 3.bs, New York, John Wiley, 1994, s.3.

² N. S. Balke, T. S. Fomby, "Large shocks, small shocks, and economic fluctuations: Outliers in macroeconomic time series", **Journal of Applied Econometrics**, 9, 1994, s.181–200.

durum, gerçek olmayan aykırı gözlem şeklinde bir sınıflamayı da beraberinde getirir. Burada sıralanan grev, satış promosyonları, reklam, politika değişimleri, yeni kanun ya da düzenlemeler gibi dışsal olayların gerçekleşme zamanları biliniyorsa bunlar aslında birer müdahaledir ve bunlar üzerinde yapılacak incelemeler müdahale analizi olarak isimlendirilir. Olayların gerçekleşme zamanları bilinmediğinde ise aykırı gözlem olarak isimlendirilir. Zaman serilerinde aykırı gözlemlerin etkileri model belirlenmesi, tahmin ve öngörü aşamaları üzerinde gözardı edilemeyecek düzeydedir.

Aykırı gözlemlerin teşhis edilmesi ve etkilerinin belirlenip kontrol altına alınması üzerine yapılmış fazla sayıda araştırma olmakla beraber, literatürde bu konuda yapılan çalışmaların sayısı alanlarına göre oranlandığında iktisadi zaman serilerinin fazla yer tutmadığı söylenebilir. Nitekim, zaman serileri analizlerinin gelişiminin **1970’li yılların başından** itibaren olması bu oranın görece az olmasını açıklayan bir durum olarak düşünülebilir. Öte yandan son zamanlarda bu konu üzerine artmaya başlayan ilginin, Durbin’in “**Zaman serisi analizine iktisadi açıdan yaklaşılrken aykırı gözlem probleminin gözardı edilmemesi gerekir**” sözünü destekler nitelikte olduğu söylenebilir.

Bu konunun gelişim sürecinde birer istatistik olarak ele alınan aykırı gözlem teşhisçilerinin genellikle klasik tahminlere dayanması alternatif olarak dayanıklı tahmincilerin kullanımını gerekli kılmıştır. Zira, dayanıklı tahminciler aykırı gözlemler karşısında dirençli bir yapı sergileyerek güvenilir parametre tahminlerini verir. Dayanıklı yaklaşım üzerine ilk çalışmalar 1960 ve 1970’li yıllarda John Tukey, Peter Huber ve Frank Hampel tarafından yapılmış olmakla beraber, dayanıklı tahmincilerin zaman serisi analizlerinde kullanımı oldukça yenidir.

Zaman serileri ekseninde özellikle *yerli literatürde aykırı gözlemlere, bunların teşhisine ve alternatif dayanıklı tahmincilere henüz yeterli ilgi gösterilmemiş olması, çalışmanın konusunun bu yönde seçilmiş olmasında belirleyici olmuştur*. Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. İlk üç bölümde sırayla ARMA, GARCH ve çeşitli çok değişkenli zaman serileri analizlerinde aykırı gözlem türleri, teşhis ve etkileri ile dayanıklı tahminciler ele alınmıştır. Dördüncü bölümde ise ilk üç bölümde anlatılanlar çeşitli seriler üzerinde uygulanmıştır.

I. BÖLÜM

ARIMA MODELLERİNDE KARŞILAŞILABİLECEK AYKIRI GÖZLEM TÜRLERİ VE GÜÇLÜ TAHMİN YÖNTEMLERİ

Aykırı gözlemi tanımlamak için kullanılan değişik ifadeler mevcuttur. Bunlardan bir kısmı şöyle sıralanabilir: Temsili olmayan, sıradışı, uyumsuz, hedef kitleden gelmeyen, verinin çoğunluğundan anlamlı biçimde sapma gösteren, verinin çoğunluğunun izlediği istatistiksel dağılımı izlemeyen ve verinin analizini etkileyen gözlemlerdir. Barnett ve Lewis³ aykırı gözlem tanımlamasını yaptıkları yayınlarında **aykırı gözlem, kirletici gözlem ve uçdeğer** tanımlamalarının kimi zaman birbirinin yerine kullanılmakla beraber, esasında farklı kavramlara karşılık geldiğini belirterek bu üç ifadeye şöyle açıklık getirmişlerdir. F ve G iki farklı yoğunluk fonksiyonunu gösterebilir ve F dağılımı ilgilenilen veriye ait olsun. $(x_1, x_2, \dots, x_T)$ gözlem kümesini göstermek üzere, $(x_1, y_1, \dots, x_T)$ şeklindeki kümedeki G dağılımından gelen y_1 kirletici gözlem olarak isimlendirilir. Kirletici gözlemler aykırı gözlem olmak zorunda değildir, benzer şekilde aykırı gözlemler de kirletici olmak zorunda değildir. Uç değer verinin maksimum ya da minimumuna yakın olan değerlerdir ve gözlemlerin sıraya dizilmesiyle elde edilir. Tüm aykırı gözlemler birer uç değer olarak kabul edilebilir.

Literatürde aykırı gözlem tanımının varsayımlara ve veri yapısına bağlı olarak şekillendiği, aykırı gözlemlerin belirlenme sürecinin de ister istemez buna göre değişeceği belirtilmiştir. Tolvi'nin çalışmasında⁴ vurguladığı açıklama bunu oldukça iyi özetler. Buna göre: Gözlemlerin bağımsız ve özdeş dağılım varsayımı söz konusu iken, gözlemlerin hepsinin aynı dağılıma sahip olduğu varsayımını gerçeklemeyen gözlemler, aykırı ya da kirletici olarak belirlenir. Bu aşamada gözlemlerin, verinin bir öbek olarak bulunduğu bölgeye olan uzaklığı, teşhis için bir ölçüttür. **Zaman serilerinde karşılaşılan aykırı gözlemler, zamana bağlı bir**

³ V. Barnett, T. Lewis, **a.g.e.**, s.6-8.

⁴ Jussi Tolvi, "Outliers in time series: A review", **University of Turku, Department of Economics, Research reports**, No. 76.1998, s. 4.

bağımlılık göstermeyen serilerde karşılaşılanlara göre örneğin standart regresyon analizinde karşılaşılanlara göre, karmaşık bir yapı izler, birbirleriyle bağımlı gözlemlerin bulunduğu zaman serilerinde gözlemlerin uzaklığı bir ölçüt olarak değerlendirilemez ve bu noktada aykırı gözlem tanım ve teşhis süreci değişir.

Literatürde genellikle zaman serilerinde aykırı gözlemler serideki diğer gözlemler (kendinden önce ya da sonra gelen gözlemler) baz alındığında karşılaşılan sürpriz ya da beklenmeyen değerler olarak tanımlanır. Ayrıca aykırı gözlemleri belirleme sürecinde çeşitli çalışmalarda serinin asimetri ve basıklığını incelemek uygun ve kolay bir yol olarak benimsenmiştir.

Aykırı gözlemlerin zaman serisi analizinin tüm aşamalarında olumsuz bir etkisi sözkonusu olabilir. Şöyle ki, yapılan çıkarsamaların doğruluğunu, güvenilirliğini etkilediğinden, veri üzerindeki aykırı gözlemlerin etkilerini dikkate almadan yapılan analizle araştırmacı yanlış model seçimi, yanlış tahmin ve öngörülerle yüzleşebilir. Birçok yazar sözü edilen yanlışlığın büyüklüğünün aykırı gözlemin türüne, sayısına, şiddetine, üzerine kurulu olduğu modele ve otokorelasyon yapısına bağlı olarak değiştiğini, nominal serideki aykırı gözlem tür ve yapısının reel seriden farklılık gösterdiğini belirtmiştir.

İlerleyen bölümlerde sıkça bahsedilecek olan önemli bir diğer aykırı gözlem etkisi de maskeleye ve süpürme etkisidir. Bu etki genellikle aykırı gözlem teşhis metodlarının aykırı gözlemler karşısındaki direnç yapısına bağlı olarak ortaya çıkar. Literatürdeki genel tanımlama, süpürme etkisi için, tek bir aykırı gözlemin etkisiyle diğer gözlemlerin aykırı gözlem gibi görünmesi durumu, maskeleye etkisi içinse, bir aykırı gözlemin diğer aykırı gözlemleri saklaması, onların teşhis edilmesine engel olması durumu şeklindedir.

Tüm bu sözü edilen olumsuzluklara ilave, teknik bir gereklilik de olarak, aykırı gözlemleri dikkate almanın temel nedeni, verinin test ve çıkarsama yapılabilecek hale gelmesidir. Daha da ayrıntılı olarak Pankratz⁵, aykırı gözlem

⁵ A. Pankratz, **Forecasting with Dynamic Regression Models**, New York, John Wiley & Sons, 1991.

teşhisinin ve aykırı gözlem varlığında düzeltme nedenlerini sıralamıştır. Bunlardan bazıları şöyledir:

-“Serilerin yapısının daha iyi anlaşılması: Aykırı gözlemlerin tespiti, serileri etkileyen gelişmelerin varlığına ve bu gelişmelerin etkisine ışık tutar. Bu tür olayları açığa çıkarmak, serinin yapısını anlamak adına aydınlatıcıdır. Bu yolla veri girişinden kaynaklanan aykırı gözlemleri-sahte gözlemleri bulabilmek de mümkündür.

-Daha iyi modelleme ve tahmin: Bilinmeyen dışsal olaylar, model belirlemede kullanılan istatistiklerin yapısını değiştirebilir.

-Daha iyi öngörü performansı: Aykırı gözlemin gerçekleşme zamanına ve yapısına bağlı olarak, modelin öngörü performansı da etkilenir.”

1.1 ARMA MODELİ

Box ve Jenkins 1970 yılında yayımladıkları çalışmalarıyla ARMA (otoregresif hareketli ortalama) modellerinin belirlenmesi ve bu modellerde parametre tahminlerinin yapılması süreçlerini literatüre kazandıran isimlerdir.

İlgilenilen y_t zaman serisi için p ve q dereceli ARMA modeli aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$(y_t - \mu) - \phi_1(y_{t-1} - \mu) - \dots - \phi_p(y_{t-p} - \mu) = -\theta_1 u_{t-1} - \dots - \theta_q u_{t-q} + u_t \quad (1.1)$$

Burada u_t sıfır ortalamalı ve sabit σ_u^2 varyanslı şok/hata terimidir. Bu eşitlik gecikme işlemcisi kullanılarak kapalı biçimde aşağıdaki gibi yazılır:

$$\phi(B)(y_t - \mu) = \theta(B)u_t \quad (1.2)$$

1.2 eşitliğinde yer alan 'B' gecikme işlemcisi olarak bilinir, $By_t = y_{t-1}$ şeklinde gösterilir ve yine aynı eşitlikte yer alan $\phi(B)$ ile $\theta(B)$ polinomial gecikme işlemcilerine karşılık gelir. Şöyle tanımlanır:

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$$

ve

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$$
(1.3)

Zaman serilerinde sıklıkla kullanılan kavramlardan biri durağanlıktır. Durağanlık, birçok zaman serisi modellerinin uygulanabilmesi için gerekli olan bir varsayımdır. Literatürde $\phi(B)$ polinomunun tüm köklerinin birim kökün dışında olması, durağanlık varsayımına karşılık gelir.

ARMA modellerinin tahmininde kullanılan tahmin metodlarını EKK, EÇO, Momentler Metodu, Doğrusal olmayan tahmin yöntemleri şeklinde sıralamak mümkündür. EKK ve EÇO yöntemleri genel halleriyle aşağıdaki gibi özetlenebilir:⁶

- Parametre vektörü $\lambda = (\phi, \theta, \mu) = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q, \mu)$ şeklinde tanımlanmak üzere, tahmin hatalarına ait kareler toplamının, $\sum_{t=p+1}^T \hat{u}_t^2(\lambda)$, λ ' ya göre minimize edilmesiyle EKK parametre tahminlerine ulaşılır.

Tahmin hataları ise şöyle elde edilir:

$$\hat{u}_t(\lambda) = (y_t - \mu) - \phi_1(y_{t-1} - \mu) - \dots - \phi_p(y_{t-p} - \mu) + \theta_1 \hat{u}_{t-1}(\lambda) + \dots + \theta_q \hat{u}_{t-q}(\lambda)$$
(1.4)

- Tahmin hatalarının, $\hat{u}_t$ 'lerin, WN^7 sürecinde normal dağıldığı varsayılmak üzere, EÇO tahminini elde etmek için gereken log olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi

⁶ Bu tahmin metodlarının özetlenmesinde ağırlıklı olarak kullanılan iki kaynak için bkz: 1) Ricardo A. Maronna, R. Douglas Martin, Víctor J. Yohai, **Robust Statistics**, New York, John Wiley & Sons, 2006, s.257. 2) William Wei, **Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods**, Pearson Addison Wesley, 2.bs, 2006, s.136-140.

⁷ **W.N.(White-Noise)**; Sıfır ortalamalı, sabit varyanslı olasılık dağılımından çekilen rastlantı değişkenlerinin oluşturduğu seriye denilir.

yazılabilir, bu aşamada hataların birbirinden bağımsız olması bilgisinden faydalanılır:

$$\ln L = \frac{-T}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^T u_t^2(\lambda) \quad (1.5)$$

Regresyondaki yaklaşımdan farklı olarak, $\ln L$ ifadesinin kısmi türevleriyle parametre tahminlerine ulaşma esnasında çeşitli uygun algoritmalar kullanılır.

ARMA(p,q)' da tahmin hatalarının varyansı için koşullu EÇÖ tahmini ise şöyledir:

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{T-p} \sum_{t=p+1}^T \hat{u}_t^2(\hat{\lambda})$$

Literatürde, ARMA modelin parametre tahmininde kullanılan bu tekniklerin aykırı gözlem karşısında dirençsiz olduğu, bu yüzden dayanıklı tahmin yöntemlerine başvurulması gerektiği vurgulanır. İlerleyen alt bölümlerde bu dayanıklı tahmin tekniklerden sözedilecektir. Bu bölümde tanımlanacak olan aykırı gözlemler ARMA modellerine dayalıdır. ARMA modelleri aykırı gözlem teşhisi ve modellemesi çerçevesinde genel çatıyı oluşturur.

1.2 ARMA MODELLERİNDE AYKIRI GÖZLEM TÜRLERİ

Zaman serilerinde aykırı gözlem konusunu ilk kez Fox⁸ ele almıştır. Giriş kısmında da değinildiği gibi genellikle aykırı gözlem analizlerinde tanımlama **bağımsızlık ve özdeşlik varsayımından** hareketle yapılır. Fakat Fox, çalışmasında bu yaklaşımın zaman serileri için uygun olmayacağını ifade etmiştir. Otoregresif modellere dayalı zaman serilerinde karşılaşılabilecek aykırı gözlem türlerini iki sınıfa ayırmış, **I. tür (additive-AO)** ve **II. tür (innovational-IO)** olarak isimlendirmiştir. Literatüre Tsay⁹'ın önerdiği üç farklı aykırı gözlem türü daha eklenene kadar uzunca

⁸ A. J. Fox, "Outliers in Time Series", **Journal of the Royal Statistical Society**, Series B, 34, 1972, s.350-363.

⁹ R. S. Tsay, "Outliers, Level Shifts, and Variance Changes in Time Series", **Journal of Forecasting**, 7, 1988, s. 1-20.

bir süre sadece AO ve IO türü aykırı gözlemler yer tutmuştur. Tsay'ın bu çalışmada önerdiği aykırı gözlemler **Level Shift-LS (seviye değişimi)**, **Temporary Change-TC (geçici değişim)** ve **Variance Change-VC (varyans değişimi)**'dır. Seviye ve varyans değişimi kimi yazarlar tarafından aykırı gözlem olarak sınıflandırılmak yerine yapısal değişim olarak ele alınır ve bu değişim kalıcı olarak değerlendirilir.

Maronna, Martin ve Yohai¹⁰ aykırı gözlemlerin belirlenme ve değerlendirilme sürecinde, aykırı gözlemlerin gerçekleştikleri zaman sonrasında gözlem bulunması gerektiğini vurgulamış ve türleri üç ana başlık altında incelemiştir. Bu türler, **yalıtılmış (isolated)**, **parçalı (patchy)** ve **seviye kayması** şeklinde sıralanır.

Daha önce de sözü edildiği gibi verinin yapısı aykırı gözlem tanımlaması yapılırken belirleyicidir, literatürde yazarlar bu süreçte belirleyici olan bir diğer faktörün zaman serisi modellemesi olduğunu belirtirler. Ayrıca, zaman serisinde diğer veri türlerinden farklı olarak birbirini takip eden gözlemler arasındaki *olası korelasyon* ilişkisinin *aykırı gözlem etkisinin ilerleyen dönemlerde de devam etmesine* neden olduğu ve bu durumun aykırı gözlem türlerinin tanımlanmasında belirleyici olduğunu ifade ederler.

1.2.1 Anlık Aykırı Gözlem (*Additive Outlier-AO*) Türü

AO türü aykırı gözlemler, T noktasında gerçekleşen beklenmeyen grev, kaza gibi dışsal kaynaklı değişimlere karşılık gelir, kendinden sonra gelen gözlemleri etkilemez, sistem dışındaki faktörlerin gerçekleşmesine neden olur. Kimi durumlarda bir kayıt hatasının sonucu olarak da karşılaşılabilmektedir. Çeşitli çalışmalarda, AO türü aykırı gözlemin özel hali, tek gözlemi etkileyen kaba-bariz hata (gross error) olarak isimlendirilmiştir. AO türü aykırı gözlemlerin çeşitli istatistikler üzerinde önemli etkileri vardır, buna aykırı gözlem etkileri başlığı altında değinilecektir.

¹⁰ Ricardo A. Maronna, R. Douglas Martin, Víctor J. Yohai, **a.g.e.**, s. 248.

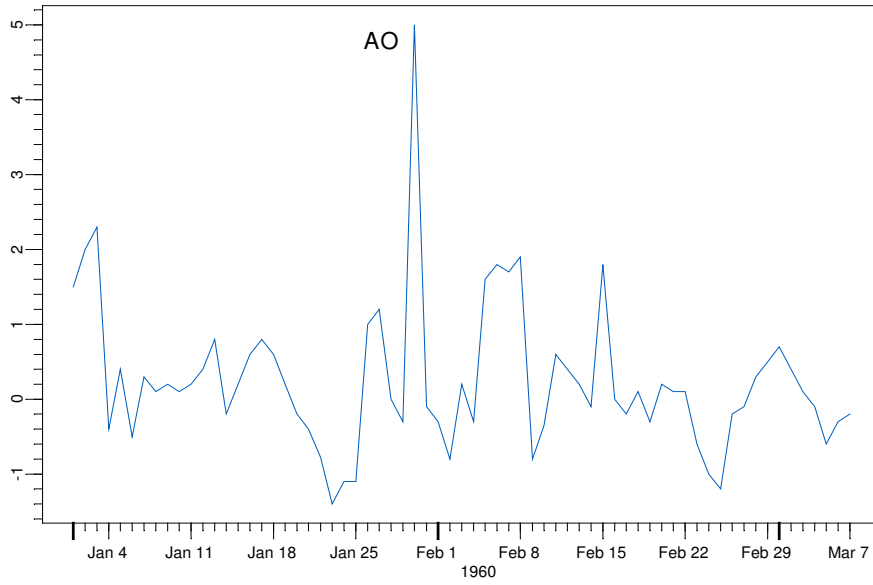
Orijinal seri y_t ve gözlenen seri z_t iken ve y_t serisi ARMA(p,q) (1.2) modeli ile ifade edilebiliyorsa AO türü aykırı gözlem şöyle ifade edilir:¹¹

$$z_t = \begin{cases} y_t & \dots t \neq T \\ y_t + \omega_A & \dots t = T \end{cases} \quad (1.6)$$

$$= y_t + \omega I_t^{(T)}$$

$$= \frac{\theta(B)}{\phi(B)} u_t + \omega I_t^{(T)}$$

Burada $I_t^{(T)}$ kukla değişkendir ve $t = T$ zamanı hariç diğer gecikmelerde sıfır değerini alır. Aşağıdaki çizimde (Şekil 1.1) görülebileceği gibi AO türü aykırı gözlem sürecin trendini etkilemez.



Şekil 1.1. AO Türü Aykırı Gözlemin Bir Seri Üzerinde Gösterimi

* Hipotetik oluşturulmuş seridir.

¹¹ William Wei, **a.g.e**, s. 223.

1.2.2 Şoka Dayalı-Kademeli Aykırı Gözlem (*Innovative Outlier-IO*) Türü

IO türü aykırı gözlem, olayın gerçekleştiği T zamanında etkili olmakla kalmaz, izleyen dönemleri de etkileyerek süreci değiştirir. AO ve IO arasındaki temel fark IO'nun süreçte yeni kısa süreli bir etkiyi (kimi kaynaklarda trend olarak da adlandırılan) vurgulamasıdır. Ancak süreç sonrasında normal seyrine döner. Ayrıca literatürde, AO'dan farklı olarak sürecin üzerindeki içsel etkiyle belirlenebileceği ifade edilir.

IO için model orijinal sürecin hatasına eklenerek oluşturulur.¹²

$$\begin{aligned} z_t &= y_t + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} \omega I_t^{(T)} \\ &= \frac{\theta(B)}{\phi(B)} (u_t + \omega I_t^{(T)}) \end{aligned} \quad (1.7)$$

burada z_t gözlenen zaman serisi, ω_t aykırı gözlem büyüklüğü ve I_t , $t=T$ iken $I_t = 1$ durumu hariç tüm gecikmelerde sıfır değerini alan kukla değişkendir. Bu model IO türü aykırı gözlem modeli olarak bilinir. Şu şekilde gösterilir:

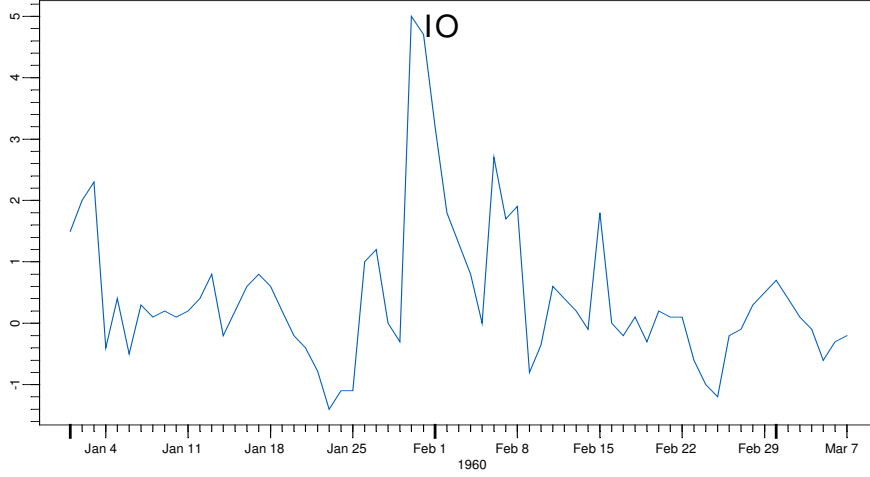
$$z_t = \begin{cases} y_t & t < T \\ y_t + \omega_1 \psi_j & t = T + j, \quad j > 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

ψ_j katsayıları ARMA sürecinin $MA(\infty)$ gösteriminden elde edilir. Bu sonuç, gözlenen zaman serisi üzerindeki IO türü gözlemin etkisinin ARMA modeline bağlı olduğunu gösterir.¹³

¹² William Wei, **a.g.e.**, s. 224.

¹³ Lon-Mu Liu, **Time Series Analysis and Forecasting**, Scientific Computing Associates Corp. 2.bs, 2009, s. 128.

Şekil 1.2 de IO'nun birkaç gözlemi birden etkilediği görülmektedir:



Şekil 1.2. IO Türü Aykırı Gözlemin Bir Seri Üzerinde Gösterimi

* Hipotetik oluşturulmuş seridir.

Tolvi, AO ve IO arasındaki ayrımı çalışmasında¹⁴ ilustratif olarak şöyle açıklar; AO serinin tepe noktasında sanki olay gerçekleştikten sonra eklenmiş gibi bulunarak tek bir gözlemi etkilerken, IO olayın gerçekleşmesi esnasında seriye eklenmiş gibidir, yani serinin hata teriminin içindedir ve gelecek gözlemleri de etkiler.

1.2.3. Seviye Kayması (*Level Shifts-LS*) Türü Aykırı Gözlem

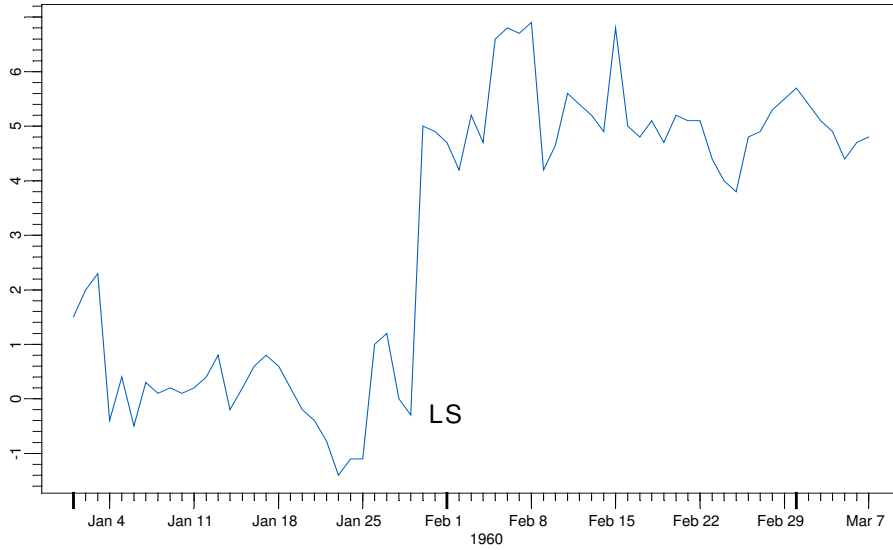
Serinin ortalama seviyesinin değişimine karşılık gelir, belli bir noktada başlayan ve gözlenen periyodun sonuna kadar devam eden bir süreçtir. Birçok çalışmada da bu tür ortalama seviyesindeki kalıcı ve sürekli değişimin, durağan süreci durağan olmayan hale dönüştürebileceği vurgulanmıştır. Ayrıca bazı

¹⁴ Jussi Tolvi, **a.g.e**, s:10.

durumlarda¹⁵ *LS'nin durağan olmayan süreçlerde IO etkisi olarak yorumlanabileceği belirtilir.*

LS varlığında, gözlenen zaman serisi ve orijinal zaman serisi arasındaki ilişki şöyledir:

$$z_t = \begin{cases} y_t & t < T \\ y_t + \omega_L & t \geq T \end{cases} \quad (1.9)$$



Şekil 1.3. LS Türü Aykırı Gözlemin Bir Seri Üzerinde Gösterimi

* Hipotetik oluşturulmuş seridir.

Bir diğer tanımlamayı Tolvi¹⁶, “seviye kayması zamanın bir noktasında başlayıp periyodun sonuna kadar devam eden aynı büyüklükteki AO türü aykırı gözlemlerin sıralaması olarak da düşünülebilir” şeklinde yapmıştır.

Modelleme şöyle de yapılabilir:

¹⁵H.P. Franses, **Time series model for business and economic forecasting**, Cambridge, Cambridge University Press, 2002, s. 144.

¹⁶Jussi, Tolvi, **a.g.e.**, s:13.

$$z_t = \omega_L S_t^{(T)} + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} u_t \quad (1.10)$$

Burada S_t T 'den önce 0 ve $t \geq T$ iken 1 değerlerini alan adımsal fonksiyondur (step function). Müdahale analizi başlığı altında tekrar değinilecek olan bu fonksiyon şöyledir:

$$S_t^{(T)} = 1 / (1 - B) I_t^{(T)} \quad (1.11)$$

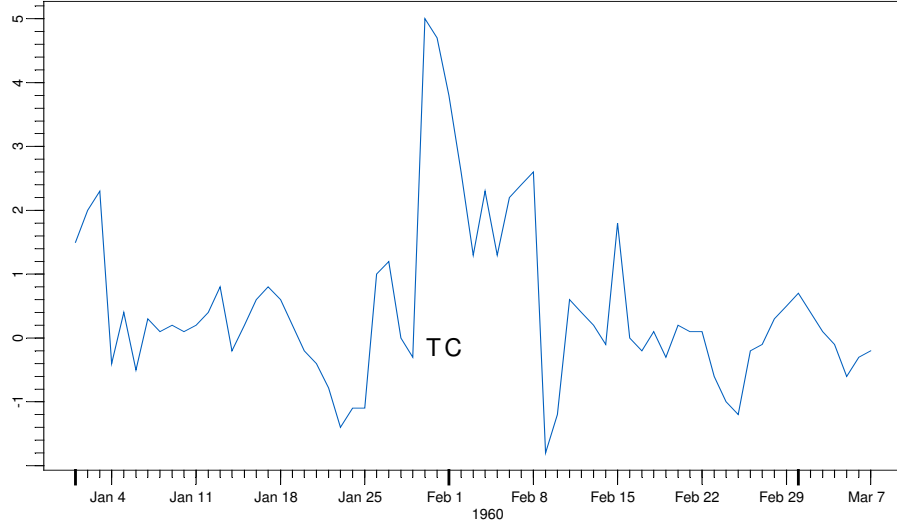
1.2.4 Geçici Değişim (*Temporary Change-TC*) Türü Aykırı Gözlem

Bu aykırı gözlemin seri üzerindeki başlangıç etkisi AO'ya benzer fakat sonrasında etki, takip eden gözlemler üzerinde de devam ettiğinden, TC türü aykırı gözlemler AO ve LS'nin genellemesi olarak ele alınır. TC'nin etkisi kalıcı değildir ve üstel olarak azalma gösterir.¹⁷

TC türü aykırı gözlem modellemesine müdahale analizi başlığı altında değinilmiştir.¹⁸

¹⁷ H. P.Franses, **a.g.e** ,s.139.

¹⁸ bkz formül 1.21



Şekil 1.4. TC Türü Aykırı Gözlemin Bir Seri Üzerinde Gösterimi

* Hipotetik oluşturulmuş seridir.

Bunlara dahil edilebilecek bir diğer aykırı gözlem türü ise **varyans değişimi** (variance change-VC)'dir. AO ve IO türü aykırı gözlemlerden farklı bir yapısı vardır ve aslında kimi zaman aykırı gözlem sınıflamasına dahil edilmez. VC, doğrudan serinin seviyesinde değişime neden olmaz.¹⁹

Literatürde bu konu üzerine yapılan çalışmalarda özellikle vurgulanan *aykırı gözlem türlerinin birden fazla ve değişik kombinasyon halinde veride bulunabileceği, aynı periyotta farklı türde aykırı gözlemlerin gerçekleşebileceği ve nominal serideki aykırı gözlem türünün reel serilerdekinden farklı olabileceği* bu yüzden fark alma sürecinin dikkate alınması gerektiğidir. Örneğin, Franses²⁰ farkı alınmadan önce LS bulunduran serinin farkı alındıktan sonra AO'ya sahip olabileceğini, özellikle birden fazla kırılma noktası varlığında böyle bir durumun görülebileceğini belirtmiştir.

¹⁹Tsay, Ruey: "Outliers, Level Shifts, and Variance Changes in Time Series", **Journal of Forecasting**, 7, 1988, s.1-20.

²⁰P.H. Franses, **a.g.e**, s. 148.

1.3 MÜDAHALE ANALİZİ

Etki analizi olarak da isimlendirilen bu analiz, zamanın bilinen bir noktasındaki değişim etkisini modellemek için kullanılır. Giriş kısmında da vurgulandığı gibi genellikle literatürde aykırı gözlemler müdahale analizinin özel bir durumu olarak ele alınmıştır.

Box ve Tiao 1965 yılındaki çalışmasında, zaman serisinin T zamanında bir müdahaleye konu olup olmadığını anlamak için konuyu serinin ortalama düzeyindeki değişim olarak ele alınması ve bunun için iki örneklem t testini uygulanmasının uygunluğu düşüncesini çürütmüştür ve *bu yaklaşımın serisel bir korelasyona sahip seride uygun olmayacağını* ve müdahalenin yapısının her zaman iki örneklem t testinin temel varsayımlarına uygun da olmayabileceğini belirtmiştir.²¹ Box ve Tiao bunu takiben 1975'te yaptıkları çalışmada, dışsal olayların modellenmesinde başvurulacak müdahale analizini tanımlamışlardır.

Tek bir müdahale olması halinde şöyle modellenir²²:

$$Y_t = C + \frac{\omega(B)}{\delta(B)} I_t + N_t \quad (1.12)$$

Burada, I_t 0-1 değerlerini alan müdahalenin periyodunu tanımlayan değişkendir. Modelde $\omega(B)/\delta(B)$ terimi, müdahale etkisini veren kısım ve N_t ise hata/şok kısmıdır.

$$N_t = Y_t - C - \frac{\omega(B)}{\delta(B)} I_t \quad (1.13)$$

N_t 'nin ARIMA sürecine dahil olduğu varsayılırsa, s mevsimselliği göstermek üzere tanımlama şöyle yapılabilir:

²¹ Lon-Mu Liu, **a.g.e**, s: 67.

²² Lon-Mu Liu, **a.g.e**, s: 69

$$N_t = \frac{\theta(B)\Theta(B^s)}{\phi(B)\Phi(B^s)(1-B)^d(1-B^s)^D} u_t \quad (1.14)$$

Bu eşitlikteki işlemciler şöyle açıklanabilir:

$$\begin{aligned} \phi(B) &= (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) \\ \theta(B) &= (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) \\ \Phi(B^s) &= (1 - \Phi_1 B^s - \Phi_2 B^{2s} - \dots - \Phi_p B^{ps}) \\ \Theta(B^s) &= (1 - \Theta_1 B^s - \Theta_2 B^{2s} - \dots - \Theta_p B^{ps}) \end{aligned} \quad (1.15)$$

Bir müdahale söz konusu değilken Y_t modeli ARIMA modeline indirgenebilir.

Bir periyotta müdahale etkisini temsil eden indikatör değişken, -pulse- olarak bilinir. Genellikle, $P_t^{(T)}$ ile gösterilir, T müdahalenin gerçekleştiği zamandır. Müdahaleyi temsil eden indikatör değişken, zamanın belli bir noktasından sonra etkide kalıyorsa, adımsal fonksiyon olarak bilinir ve $S_t^{(T)}$ ile gösterilir. Bu iki fonksiyon müdahaleyi tanımlayan karakteristiklerdir. Müdahaleye yanıt ise $\omega(B)/\delta(B)$ polinomuyla tanımlanır. Pay kısmındaki işlemci, müdahalenin seriye yansıyan etkisinin uzunluğunu gösterir.²³

$\omega(B) = \omega_0$ aynı periyot etkisini gösteren,

$\omega(B) = \omega_1 B$ gelecek periyotları etkilemeyecek etkiyi gösteren,

$\omega(B) = \omega_0 + \omega_1 B$ ise şimdiki ve gelecek dönemde etkisini gösteren olaydır.

Payda kısmındaki işlemci $\delta(B)$ ise etkinin zamanla azalma biçimini temsil eder. Genellikle birçok durumda, aşağıdaki gibi azalan dereceli polinomdur.

²³ William Wei, **a.g.e**, s: 232.

$$\delta(B) = 1 - \delta_1(B)$$

O halde $Y_t = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} u_t$, ARMA modelini göstermek üzere, yukarıda sözü edilen aykırı gözlem türleri yeniden şu şekilde yazılabilir:²⁴

- AO türü aykırı gözlem

Daha önce de söz edildiği gibi AO serinin sadece bir dönemini etkiler ve t=T zamanında bir aykırı gözlemin varlığı durumunda modelleme şöyle olur:

$$z_t = y_t + \omega_A P_t^{(T)} \quad (1.16)$$

$P_t^{(T)}$ pulse fonksiyonunu ve ω_A değeri ise gerçek y_t değerinden sapmanın miktarını gösterir. Hem ω_A hem de y_t 'nin değeri bilinmez, bunların tahmin edilmesi gerekir.

- IO türü aykırı gözlem

IO'nun veride yer almasıyla diğer gözlemler de etkilenir. Böyle bir durumda da model şu şekilde gösterilebilir:

$$z_t = y_t + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} \omega_I P_t^{(T)} \quad (1.17)$$

Yukarıdaki model şu şekilde de yazılabilir:

$$z_t = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} (u_t + \omega_I P_t^{(T)}) \quad (1.18)$$

²⁴ Lon-Mu Liu, **a.g.e.**, s.70.

AO'daki formülasyonla kıyaslanırsa AO sadece y_t gözlemini değiştirirken, IO u_t hatasını değiştirir. Bu yüzden, AO tek gözlem z_T 'yi etkilerken, IO ise $t \geq T$ sonrasındaki gözlemleri, azalan ψ ağırlıklarıyla etkiler. Hata/şok innovation olarak da bilinen u_T 'nin, IO'nun formülünde yer almasıyla, IO'nun neden terminolojik olarak “innovational” şeklinde isimlendirildiğini açıklar.²⁵

- Seviye Kayması-LS

LS'nin seri üzerindeki kalıcı etkisi şu şekilde modellenir:

$$z_t = y_t + \frac{1}{1-B} \omega_L P_t^{(T)} \quad (1.19)$$

Bu gösterim adımsal fonksiyon ile de ifade edilebilir:

$$z_t = y_t + \omega_L S_t^{(T)} \quad (1.20)$$

AO modellemesiyle yukarıdaki modelin aynı olduğu görülür, sadece AO pulse (atış) fonksiyonuna göre y_t 'yi $t=T$ zamanında etkilerken, LS adımsal fonksiyonuna göre $t=T$ sonrasını etkiler.²⁶

-Geçici Değişim (TC)

TC, başlangıç etkisinin δ faktörüne göre azalması şeklinde tanımlanır, seri üzerindeki bu başlangıç etkisi zamanla azalarak yok olur. Modelleme şöyledir:²⁷

$$z_t = y_t + \frac{1}{1-\delta B} \omega_C P_t^{(T)}, \quad 0 < \delta < 1 \quad (1.21)$$

²⁵ P. H. Franses, **a.g.e.**, s.135.

²⁶ William Wei, **a.g.e.**, s. 217.

²⁷ William Wei, **a.g.e.**, s. 220.

1.4 ARMA MODELLERİNDE AYKIRI GÖZLEM ETKİLERİ

Aykırı gözlemlerin ARIMA model parametre tahminleri üzerindeki etkilerine çeşitli çalışmalarda değinilmiştir. Çalışmaların bir kısmı şöyle sıralanabilir: Ledolter (1989)²⁸ ve Hotta (1993)²⁹ öngörü-tahmin yapılacak döneme yakın bir tarihte yer alan aykırı gözlemlerin tahmin sonuçlarını ciddi bir biçimde etkileyebileceğini, özellikle aralık tahmininin AO türü aykırı gözlemlerin varyansta şişmeye neden olmasıyla yanıltıcı sonuçlar vereceğini belirtmişlerdir. Trivez³⁰ (1993) ise, LS ve/veya TC noktalarının varlığında özellikle nokta tahminin, bu noktalar öngörü eksenine yakın olmasalar dahi ciddi yanıltıcı sonuçlar verdiğini belirtmiştir. Chen ve Liu³¹ (1993) aykırı gözlem varlığının öngörü üzerindeki etkisi ve öngörü aralıklarının bu etkiyle değişimi üzerine çalışmışlardır. Deutsch, Richards ve Swain (1990), aykırı gözlem varlığında AR modelinin yanlışlıkla MA yada ARMA olarak tahmin edilebileceğini gecikme dereceleri p,q ‘nun yanlış belirlenebileceğini belirtmişlerdir. Chen ve Tiao³² (1990) ARMA modelinin EKK tahminlerinin seri LS bulundururken tutarsız sonuçlar verdiğini belirtmişlerdir. Ayrıca Franses³³ pratikte JB normallik testinin büyük bir skor vermesinin veride aykırı gözlem olması ihtimalinin güçlü bir işareti olarak düşünülebileceğini belirtmiştir.

Genel olarak aykırı gözlemlerin zaman serisi analizleri üzerine yapılan çalışmaların sonucu, çeşitli tahminçiler üzerindeki aykırı gözlem etkisinin bu aykırı gözlemlerin türüne, sayısına, şiddetine, üzerine kurulu olduğu modele bağlı olarak değişim gösterdiği şeklindedir.

²⁸J.Ledolter: “The Effect of Additive Outliers On The Forecasts From Arima Model”, **International Journal of Forecasting**, 5, 1989, s. 231–240.

²⁹L. K. Hotta: “The Effect Of Additive Outliers On The Estimates From Aggregated and Disaggregated ARMA Models”, **International Journal of Forecasting**, 9, 1993, s.85–93.

³⁰F. J. Trivez: “Level Shifts, Temporary Changes And Forecasting”, **Journal of Forecasting**, 14, 1993, s. 543-550.

³¹C. Chen, L. M. Liu: “ Joint estimation of model parameters and outlier effects in time series”, **Journal of the American Statistical Association**, 88, 1993, s. 284-297.

³²C. Chen, G.C.Tiao: “Random Level-Shift Time Series Models, Arima Approximations, And Level-Shift Detection”, **Journal Of Business & Economic Statistics**, Vol. 8, No.1,1990, s. 83-97

³³P. H. Franses, **a.g.e.**, s. 129.

1.4.1 Otokorelasyon Katsayısı Üzerindeki Etki

Çeşitli çalışma sonuçları, aykırı gözlemlerin otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonlarını etkilediğini ve yanlılığa neden olduğunu göstermektedir. Bunlardan ilki Detsch, Richards ve Swain'ın 1990 yılındaki çalışmasına aittir. ARMA modelde yer alan aykırı gözlemlerin etkisi üzerine yaptıkları bu çalışmada modellemenin, p ve q gecikme sayılarının yanlış saptanabilmesinden ötürü etkileneceğini belirtmişlerdir. Zira ARMA modellemesi otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonları ile yapıldığından aykırı gözlem varlığında yanıltıcı sonuçlara ulaşılması beklenen sonuçtur. Öte yandan, öngörü hatası üzerinde AO, TC ve LS'nin IO'ya göre çok daha etkili olduğu Chen ve Liu³⁴ (1993b) tarafından çeşitli simülasyon sonuçlarıyla gösterilmiştir. Yine çeşitli çalışmalarda AO, IO ve TC'nin tersine, durağan serinin ACF ve PACF istatistiklerinin serinin durağan olmayan şeklinde yorumlanmasına neden olduğu belirtilmiştir. Bunların yanısıra aykırı gözlemlerin otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon katsayıları üzerindeki etkisi, Guttman ve Tiao³⁵ ile Chan ve Wei³⁶ tarafından çalışılmıştır.

İlgilenilen y_t serisi, AO türü k tane aynı ω büyüklüğündeki aykırı gözlemlerle kirlenmiş olmak üzere, (1.5) denkleminde faydalanılarak derecesi h olan otokorelasyon fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:³⁷

$$r(h) = \frac{\sum_{t=h+1}^T z_t^2 z_{t-h}^2 - \frac{T-h}{T^2} \left(\sum_{t=1}^T z_t^2 \right)^2}{\sum_{t=1}^T z_t^4 - T^{-1} \left(\sum_{t=1}^T z_t^2 \right)^2} \quad (1.22)$$

³⁴ C.Chen, L.M. Liu, **a.g.e.**, s. 292–295.

³⁵ I.Guttman, I. and G. C. Tiao: “Effect of Correlation on The Estimation of The Mean in The Presence of Spurious Observations”, **Canadian Journal of Statistics**, 6, 1978, s.229-247.

³⁶ Wai Chan, W.W.S Wei: “A comparison of some estimators of time series autocorrelations”, **Computational Statistics & Data Analysis**, 14, 1992, s.149–163.

³⁷ M. Angeles Carnero, Daniel Pena and Esther Ruiz, “Effects Of Outliers On The Identification And Estimation Of Garch Models”, **Journal of Time Series Analysis**, 2007, 28, 4, s.74.

Eğer örnek büyüklüğü T , otokorelasyon derecesi h 'a göre yeterince büyükse, $r(h)$ 'ın pay kısmı şöyle yazılabilir:

$$\begin{aligned} & \sum_{t \in T(h)} y_t^2 y_{t-h}^2 + \sum_{i=0}^{h-1} (y_{\tau+i} + \omega)^2 y_{\tau+i-h}^2 + \sum_{i=h}^{k-1} (y_{\tau+i-h} + \omega)^2 \\ & + \sum_{i=k}^{k+h-1} y_{\tau+i}^2 (y_{\tau+i-h} + \omega)^2 - T^{-1} \left[\sum_{t \in T(h)} y_t^2 + \sum_{i=0}^{k-1} (y_{\tau+i} + \omega)^2 \right]^2 \end{aligned} \quad (1.23)$$

burada $T(s) = \{s+1, \dots, t-1, t+k+s, \dots, T\}$ 'dır. Benzer şekilde payda kısmı şöyle yazılabilir:

$$\sum_{t \in T(0)} y_t^4 + \sum_{i=0}^{k-1} (y_{\tau+i} + \omega)^4 - T^{-1} \left[\sum_{t \in T(0)} y_t^2 + \sum_{i=0}^{k-1} (y_{\tau+i} + \omega)^2 \right]^2 \quad (1.24)$$

Eğer otokorelasyonun derecesi ardışık k aykırı gözlem sayısından küçükse (yani $h < k$), (1.23)'de bulunan toplam, ω^4 'ya bağlı $k-h$ tane terimi içerir. Dolayısıyla, (1.24) numaralı eşitlik $(k-h-(k^2/T))\omega^4 + o(\omega^4)$ 'ya eşit olur. Bununla beraber eğer $h \geq k$ ise, üçüncü ifadedeki üçüncü toplam kaybolur ve pay kısmı $-(k^2/T)\omega^4 + o(\omega^4)$ ³⁸,na eşit olur. Diğer taraftan (1.24) numaralı eşitlik $(k-(k^2/T))\omega^4 + o(\omega^4)$ 'ya eşit olur.

Otokorelasyon eşitliği şu hali alır:

$$\lim r(h) = \begin{cases} h < k & \text{ise} & 1 - \frac{h}{k(1 - \frac{k}{T})} \\ h \geq k & \text{ise} & \frac{k}{k-T} \end{cases} \quad (1.25)$$

Bu durum, tüm gecikmelerde ($k=1$) iken $r(h)$ 'ın sifıra doğru yanlı olmasına neden olurken, $h < k$ ve T 'nin artmasıyla otokorelasyonlar aykırı gözlemler karşısında lineer bir azalma gösterirler.³⁹

³⁸ “o” yakınsamaya ilişkin notasyondur.

³⁹ M. Angeles Carnero, Daniel Pena and Esther Ruiz, **a.g.e.**, s:475.

1.4.2 Parametre Tahminleri Üzerindeki Etki

Aykırı gözlemlerin ARIMA modelin parametre tahminleri üzerindeki etkileri çeşitli çalışmalarda anlatılmakla beraber burada aykırı gözlem türlerinin EKK parametre tahminleri üzerindeki etkileri ağırlıklı olarak Maronna, Martin ve Yohai'nin çalışmalarından faydalanılarak anlatılmıştır.

AO ETKİSİ:

Daha önce de söz edildiği gibi, AO türü aykırı gözlemler model parametreleri üzerinde güçlü bir etkiye sahiptir. AR(1) modeli ele alınmak üzere, tek tahmin edilecek parametre ϕ ise, EKK tahmincisi şöyle tanımlanır:

$$\hat{\phi}_0 = \frac{\sum y_t y_{t-1}}{\sum y_t^2} \quad (1.26)$$

AO türü aykırı gözlem T noktasında gerçekleşmek üzere, y_t 'yi gözlemlemek yerine z_t gözlemlenir ve elde edilen parametre tahmini şöyledir:

$$\hat{\phi} = \frac{\sum z_t z_{t-1}}{\sum z_t^2}, \text{ ifadesindeki } y_t \text{'lerin } z_t \text{'lerle yeri değiştirilirse, parametre tahmini}$$

şöyle yazılır:

$$\hat{\phi} = \frac{\hat{\phi}_0 + n^{-1} \tilde{\omega}_A (\tilde{y}_{T-1} + \tilde{y}_{T+1})}{1 + 2 \tilde{\omega}_A \tilde{y}_T + n^{-1} \tilde{\omega}_A} \quad (1.27)$$

burada, $\tilde{\omega}_A = \omega_A / s_y$ ve $\tilde{y}_t = y_t / s_y$ sırasıyla AO türü aykırı gözlemin büyüklüğünü ve gerçek sürecin $s_y^2 = \sum y_t^2 / n$ ile gösterilen örnek varyansı ile standardize edilen örnek varyansını gösterir. Örnek büyüklüğü sabit kalmak üzere,

$$\omega_A \rightarrow \infty, \Rightarrow \hat{\phi} \rightarrow 0 \text{ 'dir. }^{40}$$

Yazar, burada AO türü aykırı gözlemin büyüklüğüne bağlı olarak parametre tahminleri sıfıra doğru yanlı olacağını ve aykırı gözlemin etkisi örneklem büyüklüğü ile azalacağını belirtmiştir.

IO ETKİSİ

Literatürde çeşitli çalışmalarda belirtilen görüşler, seride bulunan IO türü aykırı gözlem etkisinin AO türünden daha az olduğu yönündedir.

AR(1) modeli varsayılın, ϕ 'daki aynı notasyonları kullanmak üzere z_t yi $y_t + \omega_1 \phi^j$

ile $\hat{\phi} = \frac{\sum z_t z_{t-1}}{\sum z_t^2}$ yer değiştirildiğinde,

$$\hat{\phi} = \frac{\hat{\phi}_0 + n^{-1}S_1 + n^{-1}\tilde{\omega}_1^2(\phi/(1-\phi^2))}{1 + n^{-1}2S_2 + n^{-1}\tilde{\omega}_1^2/(1-\phi^2)} \quad (1.28)$$

ifadesi elde edilir.

Burada,

$$\hat{\phi}_0 = (\sum y_t^2)^{-1} \sum y_t y_{t-1},$$

$$\tilde{\omega}_1 = \omega_1 / \Delta y S_1 = \tilde{\omega}_1 \sum_{j=0} (\tilde{y}_{T-1+j} + \tilde{y}_{T+1+j}) \phi^j \quad \text{ve}$$

$$S_2 = \tilde{\omega} \sum_{j=0} \tilde{y}_{T+j} \phi^j \quad \text{ifadelerine karşılık gelir.}$$

Sabit örneklem büyüklüğü için, $\omega_1 \rightarrow \infty, \Rightarrow \hat{\phi} \rightarrow \hat{\phi}_0$ iken parametre değerinin tutarlı bir tahmini elde edilir. Bu sonuçla yazar büyük örnek söz konusu olduğunda IO'nun parametre değerleri üzerindeki etkisinin görmezden gelinebileceğini belirtir⁴¹.

⁴⁰ Ricardo A. Maronna, R. Douglas Martin, Víctor J. Yohai, **a.g.e.**, s. 256.

LS ETKİSİ

Perron (1989), Vogelsang (1990) ve Perron- Vogelsang⁴² (1992) yıllarındaki çalışmalarında LS varlığında durağan (I(0)) yapıdaki serinin durağan olmayan (I(1)) yapıda gibi davrandığını belirtmişlerdir.

Bu nedenden ötürü, serilerin durağanlığının sınanmasında kullanılan DF, ADF istatistiklerini Ng-Perron⁴³ (2001), Phillips-Perron⁴⁴ (1998) çalışmalarında modifiye etmişlerdir. Modifikasyon, DF istatistikleri üzerinden artıkların otokorelasyonunu düzeltmeye dayalıdır.

Aparacio-Escribano ve Sipols ise 2006 yılındaki çalışmalarında⁴⁵ RUR testini önermişlerdir. Nonparametrik yaklaşımlara dayalı bu testin AO ve LS varlığında oldukça iyi sonuçlar verdiğini belirtmişlerdir. Yazarlar önerdikleri bu testin çeşitli transformasyonlar ve hataların dağılımı karşısında nonparametrik yapılarından ötürü özelliklerinin değişmez (invariant) olduğunu belirtmişlerdir.

Perron'ın $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \omega I_t[t \geq \tau] + \varepsilon_t$ şeklindeki modelde LS etkisinin dikkate alınmamasıyla, ω değerinin artmasıyla, $\hat{\phi}_1$ değerinin 1'e yaklaştığı açıklaması, parametre değeri üzerindeki etkinin görmezden gelinemeyeceğini gösterir.

LS etkisinin seride birim kök yanılsamasına nasıl neden olduğu otokorelasyon katsayısı üzerinden gidilerek şöyle açıklanabilir:

AR(1) modeli varsayılmak üzere, z_t ve y_t ile ilişkili olan $r_y(1)$ serileri için, ilk otokorelasyon katsayısı yerine $r_z(1) = (\sum z_t^2)^{-1} \sum z_t z_{t-1}$, $z_t = y_t + \omega_L$ ifadesi yazıldığında,

⁴¹ Daniel Pena, George Tiao, Ruey Tsay, **A Course in Time Series Analysis**, New York, Wiley, 2001, s.139.

⁴² P. Perron, T.J Vogelsang: "Testing for a unit root in a time series with a changing mean: corrections and extensions", **Journal of Business and Economic Statistics**, 10, 1992, s. 467-475.

⁴³ Ng, S., P. Perron: "Lag lenght selection and the construction of unit root tests with good size and power", **Econometrica**, 69, 2001, s.1519-1554.

⁴⁴ P. Phillips, ve P. Perron: "Testing For a Unit Root in Time Series Regression", **Biometrika**, 75, 1998, s.335-346.

⁴⁵ Felipe Aparicio, Alvaro Escribano, Ana E. Sipols: "Range Unit-Root (RUR) Tests: Robust Against Nonlinearities, Error Distributions, Structural Breaks And Outliers", **Journal of Time Series Analysis**, 27, 4, 2006, s. 545-576.

$$r_z(1) = \frac{r_y(1) + n^{-1}S_3 + n^{-1}\tilde{\omega}_L(n-T)}{1 + n^{-1}2S_4 + n^{-1}\tilde{\omega}_L^2(n-T+1)} \quad (1.29)$$

elde edilir.

Burada

$$S_3 = \tilde{\omega}_L (\tilde{y}_{T-1} + \tilde{y}_T + 2\tilde{y}_{T+1} + \dots + 2\tilde{y}_n) \text{ ve}$$

$$S_4 = \tilde{\omega}_L \sum_{j=0} \tilde{y}_{T+j} \text{ 'dir. Eğer, } n-T \text{ eğer çok küçük değilse,}$$

$$\tilde{\omega}_L \rightarrow \infty, \Rightarrow r_z(1) \rightarrow 1$$

LS etkisi, ilk otokorelasyon katsayısını 1'e iter. Bu etki eğer n-T büyükse tüm gecikmelerde görülebilir ve dolayısıyla durağan bir seride LS etkisi varsa seri birim köke sahip gibi algılanabilir.⁴⁶

1.5 ETKİN GÖZLEMLER

Regresyon analizinden de bilindiği gibi etkin gözlemler aykırı gözlemler gibi belirlenemeyen, parametre tahminlerinde ve öngörülerde etkiye sahip olan gözlemlerdir. Pena⁴⁷ etkinin ölçümü için gözlemi kayıp gözlem yaparak ele almayı önermiştir. Sonraki çalışmasında Pena ARIMA model parametreleri üzerinde etki ölçümünü önermiştir. Önerdiği ölçütün gözlemin aykırılığını değerlendirmede de kullanılabileceğini vurgulamıştır. Ayrıca Ledolter 1990 yılındaki ve Ljung' da 1993 yılındaki çalışmalarında bu ölçütü kullanmışlardır.

⁴⁶ Daniel Pena, George Tiao, Ruey Tsay, **a.g.e.**, s.144-145.

⁴⁷ Daniel Pena: "Discussion of local influence by Cook", Journal of Royal Statistical Society, 48 (2), 1986, s. 164-165.

Pena⁴⁸ parametre tahmini için aykırı gözlem varlığında, etkin gözlemlerin etkisinin araştırılmasında kullanılan yaklaşıma benzer kayıp gözlem yaklaşımını önermiştir.

Kayıp gözlemleri incelemek üzere, ARMA modeli şu şekilde yazılmak üzere,⁴⁹

$$y_t = \sum_{i=1}^h \pi_i y_{t-i} + u_t, \quad (1.30)$$

T gözleminin parametre değerleri üzerindeki etkisinin ölçümü için geliştirilen istatistik şöyledir:

$$P_{\pi}(T) = \frac{(\hat{\pi} - \hat{\pi}_{(T)})' \sum_{\pi}^{-1} (\hat{\pi} - \hat{\pi}_{(T)})}{h \hat{\sigma}_u^2} \quad (1.31)$$

Burada $\hat{\pi}$ parametre vektörü π 'nin EÇO tahminidir ve hiç aykırı gözlem olmadığı varsayılır, $\hat{\pi}_{(T)}$ EÇO tahminidir ve t=T gözleminin kayıp olduğunu varsayar.

σ_u^2 tahmin vektörünün varyans-kovaryans tahminidir ve h parametre sayısını gösterir. Bu ölçüt geneldir ve durağan seriler için kullanılabileceği gibi durağan olmayan süreçler için de kullanılabilir.

Parametreler üzerinden belli bir noktada hiç aykırı gözlem olmadığı varsayılarak EÇO ile tahmin edilen parametre vektöründen sonra aykırı gözlem ile hesaplanan parametre vektörü arasındaki Mahalanobis uzaklığı⁵⁰ hesaplanır. Bu yolla, aykırı gözlemin örneklemin her noktasındaki etkisi elde edilebilir.⁵¹

⁴⁸Daniel Pena, "Influential observations in time series", **Journal of Business & Economic Statistics**, 8, 2, 1990,s. 235–241.

⁴⁹ Daniel Pena, George Tiao, Ruey Tsay, **a.g.e.** ,s. 153.

⁵⁰ **Bkz. EK**

⁵¹ Detaylar için bkz, **a.e.** s.154.

1.6 ARMA MODELLERİNDE AYKIRI GÖZLEMLERİN TEŞHİSİ

Fox⁵² 1972 yılındaki aykırı gözlem türlerini belirlediği çalışmasında aynı zamanda en çok olabilirlik oran testleri yardımıyla aykırı gözlemlerin belirlenebileceğini belirtmiştir. Chang, Tiao ve Chen,⁵³ Fox'un bulduğu sonuçları ARMA modelleri üzerine genişletmiş, olabilirlik oran testini kapsayan iteratif bir süreci aykırı gözlemleri teşhis etmek için önermiş ve model parametrelerini bu yolla tahmin etmişlerdir. Sonrasında, Abraham ve Yatawara⁵⁴ tarafından süreç için score testi önerilmiştir. Tsay⁵⁵, Chang, Tiao ve Chen sürecine seviye kayması ve geçici değişimi yerleştirerek genelleştirmiştir. Bu sürecin gelişimi için Chen ve Tiao⁵⁶ eklemeler yapmışlardır ve günümüzde de sıkça kullanılan teşhis yöntemi Chen ve Liu⁵⁷, nun çalışmasıyla şekillenmiştir.

Literatürde, teşhis süreci için Chen-Liu yaklaşımından farklı yaklaşımlar da önerilmiştir. Örneğin, Abraham ve Chuang⁵⁸ regresyon analizinde kullanılan aykırı gözlem teşhis yöntemlerini AO'yu IO'dan ayırmak için kullanmıştır. Bu yöntemler etki fonksiyonuna ve silme metoduna dayalıdır. Bruce ve Martin⁵⁹ ARMA modeli üzerinde etkin gözlemleri kullanarak karşılaşılabilecek aykırı gözlem türleri üzerinde çalışmıştır. Buna göre öncelikle zaman serisinden k tane gözlemin silinmesiyle elde edilen veriye uyan ARMA modeli bulunur ve parametre tahminleri üzerindeki değişim ölçülür. Yani belli oranda gözlem dışarıda bırakılarak, kayıp gözlem gibi düşünülerek, ARMA modeli kurulur ve çeşitli istatistiklere dayanarak, çizimlerle aykırı gözlemlerin yeri bulunur. Abraham ve Chuang EM algoritmasını aykırı

⁵² A. J.Fox: "Outliers in Time Series", **Journal of the Royal Statistical Society**, Series B, 34, 1972, s.350-363.

⁵³ I.Chang, G. Tiao, C.Chen, "Estimation Of Time Series Parameters In The Presence Of Outliers", **Technometrics**, 30, 1988, s. 193–204.

⁵⁴ B.Abraham, N. Yatawara, "A Score Test For Detection Of Time Series Outliers", **Journal Of Time Series Analysis**, 9, 1988,s. 109–19.

⁵⁵ R. S.Tsay, "Outliers, Level Shifts And Variance Changes İn Time Series", **Journal Of Forecasting** 7, 1988, s.1–20.

⁵⁶ C. Chen, G.C.Tiao, "Random Level-Shift Time Series Models, Arima Approximations, And Level-Shift Detection", **Journal Of Business & Economic Statistics**, Vol. 8, No.1,1990.

⁵⁷ C. Chen, L. M. Liu, "Forecasting Time Series With Outliers", **Journal Of Forecasting**, 12, 1993, s.13–35.

⁵⁸ B. Abraham, A.Chuang, "Expectation-Maximisation Algorithms And The Estimation Of Time Series Models İn The Presence Of Outliers", **Journal Of Time Series Analysis** 14,1993, s. 221–34.

⁵⁹ A.Bruce, R.D. Martin, **a.g.e.**, s. 363–424.

gözlem teşhisi için kullanmışlardır. Hancong Liu⁶⁰-“on-line outlier detection” çalışmasında, aykırı gözlem filtreleme ve temizleme tekniğinden bahsetmiştir. Önerilen yöntem modifiye edilmiş Kalman filtresini kullanmaktadır ve otokorelasyon içeren bir veriye uygulanabilir. Aykırı gözlemleri teşhis edip temizlerken verideki diğer tüm bilgiyi muhafaza eder.

Yukarıda da sıralandığı üzere aykırı gözlemlerin teşhisi; regresyon analizine, kayıp gözlem analizine, EM algoritmasına, dayanıklı tahmin yöntemlerine dayalı olabilir. Tolvi⁶¹ aykırı gözlem teşhis metodlarını, teşhis sürecinde kullanılan testlere göre şöyle gruplamıştır:

- Olabilirlik testlerine dayalı teşhis metodları
- Etkiye dayalı testlerle teşhis metodları
- Artıkları kullanan testlere dayalı teşhis metodları

Bu şekilde bir ayırma gitmesine rağmen, Tolvi çalışmasında bunun en iyi sınıflama olmadığını da ifade etmiştir.

1.6.1 Klasik Yöntemle Teşhis

ARMA modellerinde aykırı gözlem belirlenmesi için Chang, Tiao ve Chen (1988)’in önerdikleri süreç kısaca şöyle özetlenebilir: Öncelikle ARMA modeli, modelde hiçbir aykırı gözlem yokmuş gibi tahmin edilir. Tahmin edilen artıklar üzerinden her bir gözlem için ayrı ayrı düşünülecek şekilde olabilirlik oran istatistikleri hesaplanır. Mutlak değeri en büyük olan test istatistiği, önceden belirlenen kritik değerle kıyaslanır; test istatistiği kritik değerden daha büyükse

⁶⁰ Hancong Liu, Sirish Shah, Wei Jiang: “On-line outlier detection and data cleaning”, **Computers & Chemical Engineering**, 28(9), 2004, s. 1635-1647.

⁶¹ Tolvi, **a.g.e.**, s. 23.

aykırı gözlem elde edilmiş olur. Bulunan aykırı gözlemin etkisi dikkate alınır ve bu işlem hiçbir aykırı gözlem kalmayana kadar devam eder.

Bu süreç daha detaylı olarak aşağıdaki gibi açıklanır:⁶²

İlk adımda veride hiç aykırı gözlem yokmuş gibi düşünülerek, zaman serisine EÇO ile model tahmini yapılır ve tahmini parametreler kullanılarak zamanın her bir noktası için, artıklar, varyans tahmini (burada güçlü tahminci için artıkların mutlak değerlerinin medyanın da alınabileceği belirtilir) ile parametreler için başlangıç tahminlerine dayalı olabilirlik oranları hesaplanır. Teşhis sürecinde kullanılan olabilirlik oran kriteri parametre tahmin değerinin standart hatasına oranlanmasına dayanır;

$$H_0 \text{ vs } H_j : \lambda_{j,t} = \frac{\hat{\omega}_{j,t}}{\rho_{j,t} \sigma_a}$$

Burada, $\rho_{1,T} = 1$ ise $\lambda_{j,t}$ Student t dağılır. Fox, aykırı gözlemin yeri bilinmediği zaman, $\eta_t = \max_{1 \leq t \leq n} \{\lambda_{j,t}\}$ ifadesinin kullanımını önermiştir.

Herhangi bir aykırı gözlem türünün T zamanında gerçekleşip gerçekleşmediğini kontrol etmek için kullanılan test ise şöyle ifade edilebilir;

$$\begin{aligned} H_0 : \omega_j &= 0 \\ H_j : \omega_j &\neq 0 \end{aligned} \quad j=IO, AO, LS, TC$$

Parametreler bilinmediği zaman, olabilirlik oran testi her iki hipotez altında tahmini gerektirir ve alternatif hipotez altındaki tahmin herbir T noktasında yürütülür.

Sonrasında tüm $t=1, \dots, n$ gözlemleri için $\eta_t = \max\{|\hat{\lambda}_{i,t}|, i = AO, IO, LS, TC\}$ istatistiği hesaplanır. Eğer $\eta_t = |\hat{\lambda}_{A,T}| \geq C$ ise, C önceden belirlenmiş sabit olmak üzere $t=T$ 'de AO varsayılır, eğer $\eta_t = |\hat{\lambda}_{i,T}| \geq C$ ise $t=T$ noktasında IO varsayılır,

⁶² Chang, Tiao, Chen, **a.g.e**, s.195.

C'nin değeri genellikle 3.5 veya 4 olarak alınır. Bir aykırı gözlem bulunduğu zaman bu yapıdaki aykırı gözlem dikkate alınarak artıklar düzeltilir.

Örneğin, artık $t \geq T$ iken, IO için $\tilde{u}_t = \hat{u}_t - \hat{\omega}_t$ olurken, eğer AO için $\tilde{u}_t = \hat{u}_t - \hat{\omega}_t \hat{\pi}(B) I_t^{(T)}$ gibi olur.⁶³

Bir sonraki adımda, bu yeni artıklar kullanılarak, $\tilde{\sigma}_e^2$ gibi yeni bir varyans tahmincisi elde edilir ve olabilirlik oranları $\hat{\lambda}_{t,t}$ ve varyansı $\tilde{\sigma}_e^2$ yeni artıklar $\tilde{u}_t$ kullanılarak tekrar hesaplanır. Aykırı gözlemlerin belirlenmesi ve yeni artıkların hesaplanması süreci yeni aykırı gözlem olarak görülebilen diğer noktalar için de devam eder.

Son aşamada belirlenen aykırı gözlemlerin büyüklüğü ve parametreler topluca tahmin edilir ve aşağıdaki model tahmin edilir;

$$z_t = \sum_{j=1}^k \omega_j V_{T_j}(B) I_t^{(T_j)} + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} u_t \quad (1.35)$$

burada AO için $V_{T_j}(B) = 1$, IO için $V_{T_j}(B) = \theta(B) / \phi(B)$ şeklinde ifade kullanılır. Bu yeni parametre tahminlerine başvurarak, süreç hiç aykırı gözlem bulunmayana kadar devam eder.

1.6.1.1 Aykırı Gözlem Etkisinin Tahmini

Pena çalışmasında aykırı gözlem türü bilindiğinde aykırı gözlem etkisinin tahminini aşağıdaki gibi açıklamıştır.⁶⁴

Buna göre, gözlenen serilerden elde edilen model parametrelerinin gerçek değerleri veriyken bulunan artıklar $e_t = \pi(B)z_t$ olmak üzere, model $e_t = \omega_t x_t + a_t$ şeklinde yazılır. Burada,

⁶³ LS ve TC için bkz. Daniel Pena, George C. Tiao, Ruey S. Tsay, **a.g.e.**, s.145.

⁶⁴ **A.e.**, s. 148

AO türü aykırı gözlemler için $\omega_i = \omega_A, x_i = \pi(B)I_i^{(T)}$,

IO türü aykırı gözlemler için $\omega_i = \omega_I, x_i = I_i^{(T)}$,

LS türü aykırı gözlemler için $\omega_i = \omega_L, x_i = \pi(B)/(1-B)$ ve

TC türü aykırı gözlemler için $\omega_i = \omega_{TC}, x_i = \pi(B)/(1-\delta B)$ olur.

Model parametrelerinin bilindiği varsayılırsa $\hat{\omega}_i = \sum e_i x_i / \sum x_i^2$, e dayanarak, $\sigma_a^2 (\sum x_i^2)^{-1}$ varyansı iken ω_i en küçük karelerle tahmin edilir.

Buna göre, AO durumunda tahmin $\hat{\omega}_A = \rho_A^2 \pi(F) e_T$ olur.

Burada $F, Fz_t = z_{t+1}$ ve $\rho_A^2 = (1 + \pi_1^2 + \dots + \pi_{n-T}^2)^{-1}$ şeklinde tanımlı işlemcidir.

Bu durumda AR(1) modeli için,

$$\hat{\omega}_A = \frac{e_T - \phi e_{T+1}}{1 + \phi^2} \text{ olur.}$$

e_T, ω_A için σ_a^2 varyansı ile yansız bir tahmincidir. Ayrıca, $-e_{T+1}/\phi$ de σ^2/ϕ^2 varyansı ile ω_A 'nın yansız tahmincidir.

$$\text{Bu yolla } \hat{\omega}_A = \frac{\frac{1}{\sigma_a^2} e_T + \frac{\phi^2}{\sigma_a^2} (-e_{T+1}/\phi)}{\frac{1}{\sigma_a^2} + \frac{\phi^2}{\sigma_a^2}} \text{ şeklinde yazılır.}$$

Genel olarak ifade edileceğin de ise $e_{T+j} = -\pi_j \omega_A / a_{T+j}$ (a_T 'ler bağımsız ve özdeş olarak dağılır) ve $\hat{\omega}_A^{(T+j)} = -e_{T+j} / \pi_j$ ile gösterilir.

Burada $(e_T, -e_{T+1}/\pi_1, \dots, -e_{T+j}/\pi_j)$ tahminler kümesi, σ_a^2/π_j^2 varyansı ile yansız ve bağımsız dağılır.

$\hat{\omega}_A = \rho_A^2 \pi(F) e_T$ tahmini kesinlikleriyle⁶⁵ orantılı olarak ağırlıklandırılmış tahmincilerin lineer kombinasyonlarına karşılık gelir, varyans $Var(\hat{\omega}_A) = \rho_A^2 \sigma_a^2$ ’dir.

IO türü aykırı gözlemler için, T noktasında aykırı gözlem büyüklüğü hakkında bilgiye sahip tek artık tahmini, $\hat{\omega}_I = e_T$ ve varyansının tahmini $Var(\hat{\omega}_I) = \sigma_a^2$ ’dir.

LS durumunda, kaymadan sonra tüm artıklar bilgiyi taşır. Tahmin $\hat{\omega}_L = \rho_L^2 l(F) e_T$ olur. Burada, $l(B) = \pi(B) / (1 - B)$ ve $\rho_L^2 = (1 + l_1^2 + l_2^2 + \dots + l_{n-T}^2)^{-1}$ ’dir. LS tanımı gereği, T’den sonra zamanın her bir noktasında kendi büyüklüğünün yansız tahmini e_{T+j} / l_j , σ_a^2 / l_j^2 varyansı ile elde edilir. Sonrasında, önceki durumlarda olduğu gibi tahmin, artıklardan elde edilen yansız tahminlerin lineer kombinasyonudur, ağırlıkları kendi göreceli kesinlikleridir. Bu istatistik T öncesi ve sonrası seviye farkını ölçer. Tahminin varyansı $V(\hat{\omega}_L) = \rho_L^2 \sigma_a^2$ ’dir.

Son olarak TC durumunda,

$\hat{\omega}_{TC} = \rho_T^2 \beta(F) e_T$ ’dir, burada $\rho_T^2 = (1 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_{n-T}^2)^{-1}$ ve β_i ’ler $\beta(B) = \pi(B) / (1 - \delta B)$ ’un katsayıları şeklinde açıklanır ve varyansı $V(\hat{\omega}_{TC}) = \rho_T^2 \sigma_a^2$ ’dir.⁶⁶

Yukarıda anlatılan süreç tek bir aykırı gözlemin belirlenmesine yöneliktir. Belirlenecek aykırı gözlemin artmasıyla beraber maskeleye ve süpürme etkileriyle de yüzleşilebilir.

1.6.1.2 Çoklu Aykırı Gözlem Etkisi ve Çoklu Aykırı Gözlemlerin Belirlenmesi

Bruce ve Martin, seride LS ve AO türü aykırı gözlemlerden farklı olarak, IO türü aykırı gözlemlerin etkisinin diğer etkilerle korelasyonsuz olduğunu, ayrıca

⁶⁵ kesinlik (precision): 1/varyans

⁶⁶ Ağırlıklı olarak faydalanan kaynaklar için bkz: 1) Daniel Pena, George C. Tiao, Ruey S. Tsay, **a.g.e.** s.153. 2) C.Chen, L.M. Liu, “Joint Estimation of Model Parameters and Outlier Effects in Time Series”, **Journal of the American Statistical Association**, 88, 421,1993, s. 284-297.

AO türü aykırı gözlemler arasındaki korelasyon katsayısının oldukça yüksek olabileceğini belirtmiştir.⁶⁷ Ayrıca çoklu aykırı gözlem varlığının parametre tahminleri üzerinde yanlılığa neden olmasının bazı aykırı gözlem türlerinin belirlenememesine, maskelenmesine neden olduğu belirtilmiştir.⁶⁸

Chen ve Liu'nun geliştirdikleri algoritma Chang vd (1988) ile Tsay (1988)'ın önerdikleri süreçte yüzleşilebilen maskeleyen etkisinden kaçınmak için geliştirilmiştir. Buna göre yazarlar, aykırı gözlemlerin teşhis süreci aşamasında parametrelerin yanlılığına neden olmasından dolayı tüm süreci etkileyebileceğini ve yöntemin aykırı gözlemleri belirlemede başarısız kalacağını belirtmişlerdir. Yazarların teşhis sürecine yaptıkları uyarılama şöyledir:⁶⁹

1- İlk parametre tahminleri hesaplanır, hiç bir aykırı gözleme rastlanmayana kadar olabilirlik oran kriteriyle aykırı gözlemler teker teker araştırılır.

2- Belirlenmiş aykırı gözlemlerin büyüklüğü aykırı gözlemlerle birlikte tahmin edilir. Sonrasında, geriye doğru elimine etme metodu uygulanır. Aykırı gözlemler üzerinden minimum olabilirlik oran testi hesaplanır. Eğer bu değer aykırı gözlemleri belirlemek için kullanılan kritik değer C' den küçükse, bu nokta aday aykırı gözlem kümesinden silinir. Herhangi bir nokta silindikten sonra, kalan aykırı gözlemler ve parametre değerleri tekrar EÇO ile tahmin edilir ve geriye doğru elimine etme işlemi yeniden uygulanır.

3- İlk iki aşamaya hiç aykırı gözlem bulunamaya kadar devam edilir. Yazarlar, bu metodun çeşitli problemleri olduğunu belirtmişlerdir. Bu problemlerden biri seride LS varken bunun IO ile karıştırılabilmesi durumudur. Bu olasılık Balke tarafından vurgulanmıştır; IO ve LS türü aykırı gözlemlerin ayrılmasında olabilirlik oranının kullanımının işe yaramayacağını belirtmiştir. Bu yüzden de genellikle LS'nin IO olarak belirlenebileceğini söylemiştir.

⁶⁷ A.Bruce, R.D. Martin, "Leave-K-Out Diagnostics For Time Series (With Discussion)", **Journal Of The Royal Statistical Society Series B** 51, 1989, s. 363–424.

⁶⁸ Daniel Pena, George C. Tiao, Ruey S. Tsay, **a.g.e.s.** 154.

⁶⁹ C.Chen, L.M. Liu, **a.g.e.**, s. 290.

Pena, Tiao ve Tsay her iki aykırı gözlemi belirlemede kullanılan istatistiğin dağılımlarının sıfır hipotezi altında farklı olduğunu, IO türü aykırı gözlemi test etmede kullanılan istatistiğin,

$$\lambda_{l,T} = \frac{\hat{e}_T}{\hat{\sigma}_a}$$

iken LS için,

$$\hat{\lambda}_{l,T} = \frac{\hat{e}_T - \sum_{i=1}^{n-T} \hat{l}_i \hat{e}_{T+i}}{\hat{\sigma}_a (1 + \sum_{i=1}^{n-T} \hat{l}_i^2)^{1/2}} \text{ şeklinde tanımlandığını belirtmiştir.} \quad (1.35)$$

Burada, $(\hat{l}_1 = -1 + \hat{\pi}_1)$ ve $(\hat{l}_2 = -1 + \hat{\pi}_1 + \hat{\pi}_2, \dots, \hat{l}_{n-T} = -1 + \sum_{i=1}^{n-T} \hat{\pi}_i)$ şeklinde tanımlanır.

$\hat{\lambda}_{l,T}$ ile $\hat{\lambda}_{L,T}$ arasındaki ilişki ise aşağıdaki gibidir;

$$\hat{\lambda}_{L,T} = \frac{\hat{\lambda}_{l,T} + \frac{\sum_{i=1}^{n-T} (\hat{e}_{T+i} (1 - \sum_{j=1}^i \hat{\pi}_j))}{\hat{\sigma}_a}}{(1 + \sum_{i=1}^{n-T} (-1 + \sum_{j=1}^i \hat{\pi}_j)^2)^{1/2}} \quad (1.36)$$

ARMA modeli için, hiç aykırı gözlemin olmadığını varsayan H_0 altında $t=T$ serinin sonuna yakın değilken, büyük örneklem değerleri için, ifadenin sıfıra gittiği ve LS için olabilirlik oranının $\hat{\lambda}_{L,T}$, IO türü aykırı gözlem için olan olabilirlik oranından $\hat{\lambda}_{l,T}$ küçük olmasının beklendiği ifade edilir. Sanchez ve Pena bu iki istatistiğin dağılımı için simülasyon çalışması yapmışlardır. Bu yolla, yazarlar $\eta_t = \max_t \left\{ \left| \hat{\lambda}_{l,t} \right| \right\}$ 'e dayalı yetersiz görünen teşhis metodunu doğrulayan olabilirlik

oran istatistikleri için kritik değerleri elde etmişlerdir. Buna göre, LS için istatistiğin maksimum değerinin örnek davranışı IO ve AO'dan farklıdır. LS ve IO arasındaki karmaşanın üstesinden IO AO ya karşı kıyaslanarak ve sadece LS ile ilgilenilerek gelinebilir.⁷⁰

Ayrıca, Pena, Tiao ve Tsay aynı çalışmalarında, bu süreçte başlangıç aşamasında etkin gözlem yaklaşımı kullanarak daha iyi sonuçlar elde edilebileceğini ifade etmişlerdir

Bu aşamada bir diğer problem olarak ardışık AO türü gözlemlerin varlığı görülür. Çeşitli yazarlar teker teker aykırı gözlemlerin belirlenmesine dayalı sürecin, grup elemanlarının belirlenmesinde başarısızlıkla sonuçlanacağını ileri sürmüşlerdir. Balke, WN modeli kullanılmasıyla, LS'nin IO belirlenmesi probleminin üstesinden üstesinden gelinebileceğini söyler. Bunun için de süreçte ilave arama yapma fikrini önermiştir.

1.6.2 Dayanıklı Yöntemle Teşhis

Aykırı gözlemlerin dayanıklı yöntemle teşhisi, klasik yaklaşımdan farklı olarak EÇO yerine dayanıklı tahmincilerin kullanımını gerektirir. Bianco, Ben, Martinez ve Yohai⁷¹ çalışmalarında iteratif bir süreçle aykırı gözlemleri dayanıklı yolla teşhisini açıklamıştır. Süreç şöyle özetlenebilir:

Aşama 1: λ ve σ_u parametreleri dayanıklı $F\tau$ ⁷² tahmincisiyle tahmin edilir. Elde edilen bu tahminler, $\hat{\lambda}$ ve $\hat{\sigma}_u$ ile gösterilir (λ ve σ_u tahminleri önceki bölümde açıklandığı gibidir).

⁷⁰ Daniel Pena, George C. Tiao, Ruey S. Tsay, **a.g.e.** s.156.

⁷¹ A. M. Bianco, M. García Ben, E. J. Martínez, V. J. Yohai, "Outlier Detection in Regression Models with ARIMA Errors using Robust Estimates", **Journal of Forecasting**, 20, 2001, s.565–579.

⁷² Bu tahminci bir sonraki alt bölümde anlatılacaktır.

Aşama 2: y_t serisi için dayanıklı filtre⁷³ kullanılır. Önceki adımda tanımlanan tahminlerle filtre edilmiş artıklar ($\tilde{u}_t$) ve standart sapma (s_t) elde edilir.

Aşama 3: Aykırı gözlemlerin yeri önsel olarak belirlenir;

$|\tilde{u}_{t_0}| > M_{I_{s_{t_0}}}$ ise, M_1 uygun bir sabit olarak seçilir, bu eşitsizliği sağlayan t_0 'lar kümesi C ile gösterilir.

Aşama 4: Her $t_0 \in C$ ise, $\hat{\pi}^*$ 2. aşamadakine benzer şekilde dayanıklı filtre kullanılmak üzere, $\tilde{u}_t^* = \hat{\pi}^*(B)y_t$ şeklinde tanımlı artıklar bu filtreyle elde edilir. Bu artıkların farklı varyansları olduğundan, ω ağırlıklandırılmış EKK ile tahmin edilir. Ağırlıklandırmada oranlar $1/s_t^2$ şeklindedir. Sonrasında klasik yaklaşımda izlenen sürece çok benzer adımlar izlenerek, aşağıda tanımlı eşitlikler elde edilir:

$$\tilde{\omega} = \frac{\sum_{t=t_0}^T \tilde{u}_t^* \hat{\pi}^*(B) I_t^T / s_t^2}{\sum_{t=t_0}^T (\hat{\pi}^*(B) I_t^T)^2 / s_t^2} \quad (1.37)$$

$$\text{Var}(\tilde{\omega}) = \frac{1}{\sum_{t=t_0}^T (\hat{\pi}^*(B) I_t^T)^2 / s_t^2} \quad (1.38)$$

ve

$$\lambda^* = \frac{|\tilde{\omega}|}{(\text{Var}(\tilde{\omega}))^{1/2}} \quad (1.39)$$

⁷³ Sonraki alt bölümde bahsedilecek.

$\hat{\pi}$, y_t $\hat{\pi}^*$ ile yer değiştirme işlemiyle T'den farklı olan durumlardaki aykırı gözlem etkisini ortadan kaldırmak için yapılır. Bu nedenle, aykırı gözlemlerin etkisi T 'den önce ve T+h'dan sonra dayanıklı filtre sayesinde azaltılır. T noktasında olası bir aykırı gözlem istendiğinden ve aykırı gözlemlerin etkisi kendinden sonra gelen gözlemlerde de devam ettiğinden, T ve T+h arasındaki olası gözlemlerin etkisi azaltılmaz.

Aşama 5: $\lambda_0^* = \max_{t_0} \{ \lambda_{t_0,AO}^*, \lambda_{t_0,LS}^*, \lambda_{t_0,IO}^* \}$ hesaplanır, $\lambda_{t_0,AO}^*, \lambda_{t_0,LS}^*$ ve $\lambda_{t_0,IO}^*$ istatistikleri yukarıda tanımlandığı gibidir ve t_0 noktasında AO, LS ve IO için bulunur. Eğer $\lambda_0^* \leq M_2$ ise M_2 uygun seçilmiş sabit olmak üzere, yeni aykırı gözlemler bulunamaz ve iterasyon sona erer. Yerine $U_0^* > M_2$ ise, yeni AO, LS veya IO teşhis edilir ($M_2=3$ olarak alınır).

Aşama 6: Gözlemlerinde AO, LS veya IO varlığı teşhis edilen bir y_t serisi $y_t - \tilde{\omega} I_t^T$ ile yer değiştirir, $I_t^{(T)}$, T noktasında testle belirlenen değişime karşılık gelir. Sonrasında, iterasyon 2. adımda hiç yeni değişimle karşılaşmayana kadar devam eder.⁷⁴

1.7 ÇEşİTLİ DAYANIKLI TAHMİNCİLER

Bu alt bölümde ARMA modeli için önerilen M, GM ve τ Tahminleri gibi dayanıklı tahminlerin yanısıra, otokorelasyon katsayısının ve AR model derecesinin belirlenmesi için önerilen çeşitli dayanıklı yaklaşımlara da yer verilmiştir.

ARMA modellerinin dayanıklı tahmin süreci için literatürde önerilen çeşitli çalışmalar şöyledir: Martin⁷⁵ (1980), GM tahmincilerini geliştirmiştir, sonrasında ise

⁷⁴ Sürecin anlatımında ağırlıklı olarak kullanılan iki kaynak için bkz: 1)Ricardo A. Maronna, R. Douglas Martin, Víctor J. Yohai, **a.g.e.** s.297. 2) A. M. Bianco, M. García Ben, E. J. Martínez, V. J. Yohai, **a.g.e.** s.570.

⁷⁵ R. D. Martin: "Robust estimation of autoregressive models", in **Directions in Time Series Eds. Brillinger and Tiao**, Institute of Mathematical Statistics, California,1980, s.228-254.

yazar tarafından tekrarlı filtrelemeye dayalı, şüpheli gözlemlerin temizlenmiş olanlarla yer değiştirilerek yeniden tahminine dayalı yöntem önerilmiştir. Martin ve Yohai⁷⁶ (1996)'nin çalışmaları bu yaklaşıma dayalıdır; dayanıklı tahminler filtre edilmiş artıkların dayanıklı yayılım tahmininin minimize edilmesine dayalıdır.⁷⁷ Muler, Pena ve Yohai (2009) çalışmalarında BIP-ARMA modellerini geliştirmişlerdir. Dayanıklı filtre kullanımına benzeyen bu yaklaşımın tutarlı ve asimptotik normal olduğu ifade edilmiştir. Öncelikle dayanıklı artıklar üzerinden ölçek tahmini bulunur sonra, azalan ağırlıklandırılmalı M tahmini kullanılır.⁷⁸

Dayanıklı Otokorelasyon Tahmini I

Aykırı gözlemlerin, ACF tahmini üzerindeki olumsuz etkiyi ortadan kaldırmak için, Chan ve Wei (1992) α kırılmış örnek otokorelasyon fonksiyonu TACF (Trimmed Autocorrelation Function)' yi tanıtmışlardır.

$$\hat{\rho}_k^{(\alpha)} = \frac{\hat{\gamma}_k^{(\alpha)}}{\hat{\gamma}_0^{(\alpha)}} \quad (1.40a)$$

$$\hat{\gamma}_k^{(\alpha)} = \frac{1}{\sum_{t=k+1}^n L_{t-k}^{(\alpha)} L_t^{(\alpha)}} \left\{ \sum_{t=k+1}^n (Z_{t-k} - \bar{Z}^{(\alpha)})(Z_t - \bar{Z}^{(\alpha)}) L_{t-k}^{(\alpha)} L_t^{(\alpha)} \right\} \quad (1.41b)$$

$$\bar{Z}^{(\alpha)} = \left(\frac{\sum_{t=1}^n Z_t L_t^{(\alpha)}}{\sum_{t=1}^n L_t^{(\alpha)}} \right) \quad (1.41c)$$

⁷⁶ R. D. Martin and Yohai, V.: “Highly robust estimation of autoregressive integrated time series models”, **Publicaciones Previas No. 79, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**, Univ. Buenos Aires, 1996. (Çevrimiçi): <http://mate.dm.uba.ar/~vyohai/Martin-Yohai-1996.pdf>, 15 Ağustos 2009.

⁷⁷ Bkz altbölüm 1.7.4

⁷⁸ Nora Muler, Daniel Pena, Victor J. Yohai,: “Robust Estimation For ARMA Models”, **The Annals of Statistics**, Vol. 37, No. 2, 2009, s.816–840.

$$L_t^{(\alpha)} = \begin{cases} 0 & Z_t \leq Z_{(g)} \text{ yada } Z_t \geq Z_{(n-g+1)} \\ 1 & \text{ö.d.} \end{cases}$$

g, $[\alpha n]$ 'in tamsayı kısmı ve $0 \leq \alpha \leq .05$ TACF $\hat{\rho}_k^{(\alpha)}$ örnek ACF hesaplaması esnasında, $\% \alpha$ tane ekstrem değerin atılmasıyla elde edilir. Dunsmuir ve Robinson WN varsayımı altında, $k \geq 1$ için $\sqrt{n} \hat{\rho}_k^{(\alpha)}$ ifadesinin $1/\nu(k)$ asimptotik varyansı ile asimptotik olarak bağımsız ve normal dağıldığını göstermişlerdir,

$$\nu(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=k+1}^n L_{t-k}^{(\alpha)} L_t^{(\alpha)}$$

şeklinde tanımlı iken, buradan TACF'nin standart hatası şöyle bulunur:

$$S_{\hat{\rho}_k^{(\alpha)}} = \frac{1}{\sqrt{n \hat{\nu}(k)}}$$

$\alpha > 0$ iken, $\hat{\nu}(k) < 1$ 'dir. Dolayısıyla, WN için $S_{\hat{\rho}_k^{(\alpha)}} > S_{\hat{\rho}_k}$ 'dir, ki bu beklenen bir durumdur çünkü kırılmış serideki bilgi, aykırı gözlemden bağımsız durumda her zaman azdır.⁷⁹

TACF için α 'nın seçimi çok önemlidir. Eğer α için büyük değer seçilirse TACF etkinliğini yitirir, $\hat{\nu}(k)$ azalır. Pratikte yazarlar, $\%2$ oranında kirlenmiş seriler için $\alpha=1$, $\%5$ oranında kirlenmiş seriler için $\alpha=3$ ve $\%10$ kirlenmiş seriler için $\alpha=6$ olarak alınırlar. Chan ve Wei AO ve IO türü aykırı gözlem olması durumunda TACF'nin oldukça iyi sonuç verdiğini belirtmişlerdir.

⁷⁹ Wai-Sum Chan, W.W.S Wei, "A comparison of some estimators of time series autocorrelations", **Computational Statistics & Data Analysis**, 14, 1992, s.149–163.

Dayanıklı Otokorelasyon Tahmini II

Dayanıklı Otokorelasyon tahmininde Maronna, Martin ve Yohai tarafından önerilen iki yaklaşım kısaca şöyledir:⁸⁰

a) $AR(p^*)$ için dayanıklı filtrelenmiş $\hat{y}_{t|t}$ değerleri üzerinden klasik otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon değerleri hesaplanır.

b) Dayanıklı $AR(k)$ modelinden hareketle kısmi otokorelasyon katsayıları hesaplanır ve dayanıklı yolla elde edilen $AR(p^*)$ modeli üzerinden $\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_{p^*}$ katsayıları kullanılarak K adet dayanıklı otokorelasyon tahmini $\hat{\rho}(k)$ ($k=1, \dots, K$), şu eşitlikle bulunur: $\rho(k) = \sum_{i=1}^{p^*} \phi_i \rho(k-i) \quad (k \geq 1)$.

$k \geq p^*$ içinse $\rho(k)$ değeri yukarıdaki denklemden tekrarlı biçimde elde edilir.

AR Modeli Derecesinin Dayanıklı Yolla Belirlenmesi:

Bilindiği gibi ARMA modelinin belirlenmesinde kullanılan kriterlerden birisi Akaike'dir ve aşağıdaki gibi bulunur.

$$AIC_p = \log\left(\frac{1}{T-p} \sum_{t=p+1}^T \hat{u}_t^2(\hat{\lambda}_{p,EKK})\right) + \frac{2p}{T-p} \quad (1.42)$$

Burada, $\hat{\lambda}_{p,EKK}$ $AR(p)$ modelinin EKK tahminine karşılık gelirken, $\hat{u}_t$ ise hataları gösterir. Bunun dayanıklı alternatifi RAIC ile gösterilir ve aşağıdaki gibi bulunur.⁸¹

$$RAIC_p = \log(\tau^2(\tilde{u}_{p+1}(\hat{\lambda}_{p,rob}), \dots, \tilde{u}_T(\hat{\lambda}_{p,rob}))) + \frac{2p}{T-p} \quad (1.43)$$

⁸⁰ Ricardo A. Maronna, R. Douglas Martin, Víctor J. Yohai, **a.g.e.**, s. 278.

⁸¹ **A.e.**, s.280.

Denklemdede, $\tilde{u}_t(\hat{\lambda}_{p,rob})$ filtre edilmiş artıklara karşılık gelir ve $F\tau$ ⁸² tahmini ile bulunur. Buradaki τ ise ölçek tahmini (standart sapma gibi) karşılık gelir.

1.7.1 ARMA Modellerinin M Tahmini

ARMA(p,q) modeli için parametre vektörü λ 'nın M tahmincisi $\hat{\lambda}_M$, aşağıdaki fonksiyon minimize edilerek bulunur;

$$\sum_{t=p+1}^T \rho\left(\frac{\hat{u}_t(\lambda)}{\hat{\sigma}}\right) \text{ burada, } \rho, \text{ EK1'de tanımlandığı gibidir.} \quad (1.44)$$

Artıklar, $\hat{u}_t(\lambda)$ ' ler EKK tahmininde olduğu gibi tanımlıdır ve $\hat{\sigma}$ ise λ ile eşzamanlı elde edilen dayanklı tahmindir. σ 'nın standardize olduğu varsayılır, eğer hatalar normal dağılıyorsa, σ , u_t 'nin varyansı σ_u ile çıkarılır.

ARMA süreci $\sigma_u^2 = \text{Var}(u_t) < \infty$ koşulu altında iken, M tahmincisi $\hat{\lambda}_M$, asimtotik normal dağılıma sahiptir,

$$\sqrt{T}(\hat{\lambda}_M - \lambda) \rightarrow_d N_{p+q+1}(0, V_M)$$

ile $V_M = V_M(\phi, \theta, \sigma^2) = aV_{EKK}$,

a, u_t 'lerin F dağılımına bağlıdır.

$\rho(t) = -\log f(t)$ olması durumunda, f hataların/şokların yoğunluğunu göstermek üzere M tahmincisi $\hat{\lambda}_M$ EÇO haline gelir ve bu açıdan M tahmini asimtotik olarak etkindir.⁸³

⁸² Filtre edilen tahminciye sonraki altbölümde yer verilmiştir.

⁸³ A.e, s.266.

Ek kısmında da belirtildiği gibi ρ fonksiyonu dayanıklılığın belirlenmesinde öne çıkar, çeşitli çalışmalarda iyi bir yerel minimum yakalamak için ilave algoritma kullanılmıştır.

1.7.2 ARMA Modellerinin Genelleştirilmiş M (GM) Tahmini

AR modelleri için GM tahmini- **BIFAR** (bounded influence autoregressive estimates) şeklinde isimlendirilerek ilk kez Denby ve Martin (1979) tarafından ele alınmış ve sonrasında Martin (1980)'in çalışmalarında geliştirilmiştir. Ayrıca, Bustos (1982) çalışmasında AR(p) modelleri için GM tahminlerinin asimptotik normal dağıldığını söylemiştir.

$$\sum_{t=p+1}^T z_{t-1} \psi\left(\frac{\hat{u}_t}{\hat{\sigma}_u}\right) = 0 \quad (1.45)$$

şeklinde tanımlı M tahmincisi amaç fonksiyonunda $\psi = \rho'$ sınırlı ve $z_t = (1, y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-p+1})'$ olmak üzere, z_{t-1} 'deki aykırı gözlemlerin etkisini, artıklar $\hat{u}_t(\hat{\gamma}, \hat{\phi})$ üzerinden sınırlandırarak modifiye edilmek istendiğinde GM tahminine ulaşılır. GM tahmini $\hat{u}_t(\hat{\gamma}, \hat{\phi})$ aşağıdaki eşitlik çözülerek elde edilir:

$$\sum_{t=p+1}^T \eta(d_T(y_{t-1}), \frac{\hat{u}_t(\hat{\gamma}, \hat{\phi})}{\hat{\sigma}_u}) z_{t-1} = 0 \quad (1.46)$$

Burada $\eta(\dots)$ fonksiyonu sınırlı ve süreklidir.

Ayrıca denklemdeki d_T şöyle elde edilir:

$$d_T(y_{t-1}) = \frac{1}{p} y_{t-1}' \hat{C}^{-1} y_{t-1} , \quad (1.47)$$

$\hat{C}$, $y_{t-1} = (y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-p})'$ 'nin $p \times p$ boyutlu C kovaryans matrisidir. ⁸⁴

1.7.3 ARMA modelinin τ Tahmini

Yohai ve Zamar (1988)⁸⁵ regresyon tahmicileri için artıkların dayanıklı yayılım ölçütünün minimizasyonuna dayalı, kırılma noktası ve etkinliği yüksek τ tahmincisini önermiştir. Bu tahminci kısaca şöyle özetlenebilir:

EK-1 kısmında M tahmincileri başlığı altında da ifade edildiği gibi aslında standart sapma, ortalama mutlak sapma, medyan mutlak sapma gibi yayılım ölçütleri aslında M tahminlerinin özel bir halidir. Yayılımın M tahmini aşağıdaki gibi gösterilmek üzere,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \rho\left(\frac{x_i}{s}\right) = b \quad (\text{s ölçek tahmincisidir})$$

standart sapma için $\rho(x) = x^2$ ve $b=1$,

ortalama mutlak sapma için, $\rho(x) = |x|$ ve $b=1$,

ve MAD içinse, $\rho(x) = I_{\{|x|>1\}}$ ve $b=0.5$ şeklindedir.

ρ_1 ve ρ_2 , ρ 'ya bağlı olmak üzere, $u = (u_1, \dots, u_T)'$ şeklinde tanımlı iken τ yayılım (ölçek) tahmini şöyle tanımlanır:

⁸⁴ A.e., s. 270.

⁸⁵ V.J.Yohai, R.H. Zamar, "High breakdown-point estimates of regression by means of the minimization of an efficient scale", **Journal of the American Statistical Association**, 83, 1988,s. 406-413.

$$\tau^2(u) = s^2(u) \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \rho_2\left(\frac{u_t}{s(u)}\right)$$

Bianco vd (1996)⁸⁶ çalışmalarında REGARIMA modellerini önermişlerdir ve bunlar τ tahmincilerine dayalıdır. Süreç aşamaları kısaca şöyle özetlenebilir:

$\lambda = (\phi, \theta, \mu) = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q, \mu)$ parametre vektörünü göstermek üzere, $z_t = y_t$ kirlenme olmayan seriyi tanımlamak üzere tahmin hataları

$$\hat{u}_t(\lambda) = z_t - \hat{z}_{t|t-1}(\lambda) \text{ şeklinde tanımlanır.}$$

Varyansı ise, $\sigma_t^2(\lambda) = E(z_t - \hat{z}_{t|t-1}(\lambda))^2$ 'dir,

$\sigma_t^2(\lambda) = a_t^2(\lambda)\sigma_u^2$ formuna sahiptir ve $\lim_{t \rightarrow \infty} a_t^2(\lambda) = 1$ ' dir.

u_t ' ler $N(0, \sigma_u^2)$ dağılır. $L(z_1, \dots, z_T, \lambda, \sigma_u)$ olabilirliği göstermek üzere,

$Q(\lambda) = -2 \max_{\sigma_u} \log L(z_1, \dots, z_T, \lambda, \sigma_u)$ biçiminden gerekli düzenlemelerle,

$$Q(\lambda) = \sum_{t=1}^T \log a_t^2(\lambda) + T \log\left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{\hat{u}_t^2(\lambda)}{a_t^2(\lambda)}\right) \text{ elde edilir.} \quad (1.48)$$

λ 'nın EÇÖ tahmini, $\hat{\lambda} = \arg \min_{\lambda} Q(\lambda)$ 'dir.

$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{\hat{u}_t^2(\lambda)}{a_t^2(\lambda)}$ ise σ_u 'nın tahminidir. Bu durumda, λ 'nın τ tahmini olan $\hat{\lambda}$ ' i

aşağıdaki ifade minimize edilerek tanımlanır:

$$Q^*(\lambda) = \sum_{t=1}^T \log a_t^2(\lambda) + T \log\left(\tau^2\left(\frac{\hat{u}_1(\lambda)}{a_1(\lambda)}, \dots, \frac{\hat{u}_T(\lambda)}{a_T(\lambda)}\right)\right) \quad (1.49)$$

⁸⁶ A. M.Bianco, Ben Garcia, E. J. Martinez, V. J.Yohai, "Robust procedures for regression models with ARIMA errors", In **COMPSTAT 96, Proceedings in Computational Statistics**, Prat A (ed.). Physica-Verlag: Berlin; 1996, s.27-38.

τ regresyon tahmini yüksek kırılma noktasına sahipken, λ 'nın τ tahmininin kırılma noktası AR(p) için en fazla $0.5/(p+1)$ 'dir.

1.7.4 Dayanıklı Filtrelenmiş τ Tahmini

Martin ve Yohai⁸⁷ çalışmalarında, Masreliesz (1975)'in önerdiği filtre yaklaşımını kullandıklarını belirtmişlerdir. Bu filtre durum uzay modellerine ve kalman filtresine dayalı olarak açıklanmıştır. Filtreleme işlemiyle elde edilen artıklar bir önceki gözlemden daha az etkilenir. Buna göre, şüpheli görünen gözlemler dayanıklı filtre kullanılarak temizlerle yer değiştirilir ve sonrasında filtre edilen artıklar üzerinden dayanıklı yayılım ölçütünün minimizasyonu amaç fonksiyonu olarak belirlenir.

Filtrelenmiş τ ($F\tau$) tahmini şöyle tanımlama aşamasında τ tahmininden faydalanarak açıklanmıştır. τ tahmini $\hat{\lambda}$ dayanıklı yolla filtrelenmiş y_t gözlemlerine dayalı olmak üzere, $Q^*(\lambda)$ 'daki satır filtrelenmemiş artıklar ile yeni dayanıklı filtre artıkları yer değiştirir ve sonrasında $Q^*(\lambda)$ minimize edilir.⁸⁸

$$Q^*(\lambda) = \sum_{t=1}^T \log a_t^2(\lambda) + T \log(\tau^2(\frac{\tilde{u}_1(\lambda)}{a_1(\lambda)}, \dots, \frac{\tilde{u}_T(\lambda)}{a_T(\lambda)})) \quad (1.50)$$

⁸⁷ R. D. Martin, V.J. Yohai, "Highly robust estimation of autoregressive integrated time series models", **Publicaciones Previas No.89, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**, Universidad de Buenos Aires, 1996. (Çevrimiçi): <http://mate.dm.uba.ar/~vyohai/Martin-Yohai-1996.pdf>, 15 Ağustos 2009.

⁸⁸ $F\tau$ tahminin aşamalarının detaylı anlatımında durum uzay modellerinden ve kalman filtresinden faydalanılmaktadır. Bu konular tezin kapsamı dışında tutulduğundan adımların detaylı açıklanmasına yer verilmemiştir.

$\hat{\lambda} = \arg \min_{\lambda} Q^*(\lambda)$ amaç fonksiyonu olmak üzere, $Q^*(\lambda)$ 'nin birden fazla yerel minimumları olabileceğinden iyi bir başlangıç dayanıklı tahmini için önerilen adımlar şöyledir:⁸⁹

1- Filtrelenmiş τ tahminleri kullanılarak $AR(p^*)$ modeli uydurulur, p^* RAIC kriterine göre seçilir. p^* değeri her zaman p 'den büyüktür. Bu uyum, $\hat{\sigma}_u^2$ 'nin tahminine ihtiyaç duyduğu gibi, dayanıklı parametre tahmini $(\hat{\phi}_1^0, \dots, \hat{\phi}_p^0)$ ile dayanıklı filtrelenmiş $\hat{x}_{t|t}$ değerlere de ihtiyaç duyar.

2- $\eta_i = \frac{Cov(x_t, u_{t-i})}{\sigma_u^2}$ iken $(\hat{\phi}_1^0, \dots, \hat{\phi}_p^0)$ ve $\hat{x}_{t|t}$ kullanılarak x_t ve η_i 'nin ilk p otokorelasyonu hesaplanır ($1 \leq i \leq q$).

3- Son olarak, ikinci aşamadan hareketle ARMA(p,q) modelinin başlangıç parametre tahminleri ile hesaplanır.

⁸⁹ Ricardo A. Maronna, R. Douglas Martin, Víctor J. Yohai, **a.g.e.**, s.291.

II. BÖLÜM

ARCH-GARCH MODELLERDE KARŞILAŞILAN AYKIRI GÖZLEMLER VE KULLANILABİLECEK GÜÇLÜ TAHMİN YÖNTEMLERİ

Önceki bölümde anlatılanların devamı olarak bu bölümde ARCH-GARCH modellerde karşılaşılan aykırı gözlem türleri, etkileri, teşhisi tartışılacak ve yanısıra son dönemde bu alanda literatürde yer alan dirençli tahmincilerle yer verilecektir.

Bilindiği gibi regresyon analizindeki varsayımlardan birisi de hata terimlerinin varyanslarının karelerinin aynı olması olarak bilinen homoskedastisitedir. Fakat uygulamada zaman serileriyle çalışılıyor olması bu varsayımın sıklıkla sağlanabilmesine engeldir. Zira hata terimlerinin varyansı aynı olmayabilir, kimi gözlemler için hata terimleri diğerlerine göre daha büyükken kimi durumlarda daha küçük olabilir. EKK ve EÇO yöntemi böyle bir durumda yanlış tahminlere neden olacaktır. Bunun düzeltilmesi gereken bir hata olduğunu düşünmek yerine modeldeki hatanın büyüklüğünü öngören ve analiz edebilen, Engel'in 1982 tarihli çalışmasında ilk olarak enflasyon oranlarına uyguladığı, Bollerslev'in 1987 yılındaki çalışmasıyla da eksik kalan yönlerinin giderilerek geliştirildiği ARCH-GARCH modelleri kullanılır. Zamanla bu modellerin bir çok türevi geliştirilmiştir. Temelde ARCH-GARCH ile türevi modellerinde amaçlanan volatilitenin, değişen varyansın modellenerek riskin ölçülmesi ve etkin tahminlere ulaşılmasıdır.

ARCH modellerinin ekonomi ve finans alanlarında kullanımı oldukça yaygındır. Bunun nedenini verideki olası volatilitenin kümelenmesi, kaldıraç etkisi, uzun dönem hafıza durumu gibi özelliklerin ARCH modelleme yapısına uygun olmasıdır. Özellikle finansal verilerin volatilitenin kümelenmesi, kaldıraç etkisi gibi sözü edilen özelliklerine, koşullu heteroskedastik yapıda olması, aşırı basırlığı ve normal dağılmaması gibi özellikleri de eklenmelidir. Tezin de konusunu oluşturan aykırı gözlemler verinin basırlığının yüksek olmasına neden olabilir ama bu durum

koşullu heteroskedastisiteden de kaynaklı olabilir. Aşırı basıklığın aykırı gözlem varlığından kaynaklı olabileceği ilk olarak Ballie ve Bollerslev⁹⁰ tarafından açıklanmıştır.

Riskin bir göstergesi olan volatilité çeşitli finansal stratejileri anlamak ve geliştirmek açısından önemlidir. Uygulamalarda genellikle kümeler halinde bulunur, bunun nedeni birbirini takip eden dönemler arasında pozitif korelasyon olmasıdır. Yüksek dalgalanmaların yüksek dalgalanmaları ve düşük şiddetli olanları ise küçük hareketlerin takip etmesi olarak yorumlanabilen bu durum volatilité kümelenmesi olarak isimlendirilir.⁹¹ Önceki paragrafta sözü edilen kaldıraç etkisi (asimetrik etki) ise piyasada duyulan olumsuz bir haberin ani düşüşlere ve belirsiz ortama neden olması ve bu belirsizliğin koşullu varyans üzerindeki etkisinin aynı büyüklükteki ani yükselişe göre daha fazla olması olarak yorumlanabilir.⁹²

Volatilitenin zamana karşı değişirliğini modellemede gerekli olan GARCH modelleri her ne kadar finansal ve ekonomik serilerin birçok dinamiğini yansıtsa da, aşırı basıklık, normal dağılmama gibi yukarıda da sözü edilen bazı özellikleri tam karşılayamayabilir. Bu açıdan çeşitli yazarlar GARCH modelini normal dağılım yerine kalın kuyruklu dağılımların kullanımını mümkün kılacak şekilde genişleterek sözü edilen durumları karşılamaya çalışmışlardır. Bunların bir kısmı şöyle sıralanabilir⁹³; student t dağılımı (Bollerslev-1987), genelleştirilmiş hata dağılımı (Nelson), Normal-Poisson (Jorion, 1998), Normal-Lognormal (Hsieh, 1989), Bernoulli-Normal (Vlaar ve Palm, 1993)...gibi.

Ne var ki Franses,⁹⁴ aşırı basıklığın üstesinden gelebilmesi için önerilen bu modellerin GARCH modeli kurulduktan sonra da artıklarının aşırı basık bir yapıda olabileceğini ve bunun en önemli olası nedenlerinden birinin seride aykırı gözlemin bulunması olabileceğini belirtmiştir. Bu bulgu ister istemez aykırı gözlemlerin GARCH modelleri üzerindeki etkisini konu alan çalışma sayısını artırmıştır. Yanısıra

⁹⁰Baillie, Bollerslev, "The Message In Daily Exchange Rates: A Conditional Variance Tale", **Journal of Business and Economic Statistics**, 7, 1989, s. 297-305.

⁹¹ Jean-Philippe Bouchaud, Andrew Matacz, Marc Potters, "Leverage Effect in Financial Markets: The Retarded Volatility Model", **Physical Review Letters**, 87, 22, 2001, s. 228700.

⁹²A.e., s.228701.

⁹³ Timotheos Angelidis, A. Benosi S. Degiannakis: "The Use of GARCH Models in VAR Estimation", **Statistical Methodology**, 1 (2), 2004, s: 105-128.

⁹⁴ P. H. Franses, **Time Series Models for Business and Economic Forecasting**, Cambridge, Cambridge University Press, 1998, s.129.

Luigi⁹⁵ çalışmasında, belirli yapıları modellemek için sıklıkla kullanılan **EGARCH**, **QGARCH**, **GJRGARCH**, **FIGARCH**, **LSTGARCH** gibi GARCH ailesi içinde önerilen çeşitli modellerin, atipik gözlemlere karşı duyarlı olduğunu belirtmiştir.

Carnero çalışmasında⁹⁶ aykırı gözlemlerin etkisini koşullu değişen varyanstan ayırmanın kolay olmadığını, zira her iki kavramında aşırı basıklığa ve karelerin otokorelasyonuna neden olduğunu ifade etmiştir. Yanısıra, değişen varyansın dalgalanmanın öngörüsüne imkan tanıdığını fakat aykırı gözlemlerin tahmin edilemeyeceğini de vurgulamıştır.

Bu bölüm dahilinde aykırı gözlemlerin çeşitli tahminciler üzerindeki etkilerini konu alan çeşitli çalışmalara farklı başlıklar altında yer verilecektir.

2.1 GARCH MODELLERİ

Engle tarafından önerilen ARCH modeli koşullu varyans regresyon modelinden elde edilen hataların geçmiş değerlerinin kareleri ile modellenir.

İlgilenilen y_t serisi tahmin edilebilen ve tahmin edilemeyen kısımlarla ifade edilebilir. Buna göre şöyle yazmak mümkündür⁹⁷:

$$y_t = E[y_t | \Omega_{t-1}] + \varepsilon_t$$

Ω_{t-1} t-1 zamanına kadar bilgi içeren kümeyi gösterir.

$\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t}$ şeklinde gösterilir. Burada z_t 'nin bağımsız ve özdeş olarak sıfır ortalama ve sabit varyansla normal dağıldığı varsayılır. ε_t 'nin koşulsuz varyansı

⁹⁵ Luigi Grossi , "Analyzing Financial Time Series through Robust Estimators", **Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics**, 8, 2, 3, 2004, s.2.

⁹⁶M. A. Carnero, D.Pena, E. Ruiz, "Effects of outliers on the identification and estimation of the GARCH models", **Journal of Time series Analysis**, 28, 2007, s.471-497.

⁹⁷ Ağırlıklı olarak kullanılan kaynaklar için bkz: 1- P. H. Franses, Dick Van Dijk, Nonlinear Time Series Models in Empirical Finance, Cambridge University Press, 2000, s. 137-140. 2- Walter Enders, **Applied Econometric Time Series**, New York, John Wiley&Sons, 2004 s.112- 115.

$\sigma^2 \equiv E[\varepsilon_t^2] = E[E[\varepsilon_t^2 | \Omega_{t-1}]] = E[h_t]$ sabittir.

$$y_t = \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \sqrt{h_t} \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0,1) \quad (2.1)$$

$$h_t = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2$$

h_t , ε_t 'nin varyansıdır ve t zamanındaki bilgiye bağlıdır. $\{\varepsilon_t\}$ 'nin süreci ise modellenen hata sürecidir. a ifadesi ise y_t için ortalama eşitliğini gösterir, sabit terim ya da en azından açıklayıcı terim içerebilir. η_t rastlantı değişkeni şok terimi olarak bilinir, 0 ortalama ve sabit varyansla bağımsız ve özdeş olarak dağıldığı varsayılır. Eğer, $\{\eta_t\}$ standardize edilmiş normal dağılıyorsa ε_t rastlantı değişkeni de koşullu normal dağılır.

2.2 GARCH MODELLERİNDE AYKIRI GÖZLEM TÜRLERİ

Hotta ve Tsay (1998) çalışmalarında⁹⁸ GARCH modellerinde karşılaşılabilen aykırı gözlemleri iki başlık altında toplamışlardır. Bunlar Anlık ve Kademeli seviye türü aykırı gözlemler (ALO, ILO) ile Anlık ve Kademeli varyans türü aykırı gözlemler (AVO, IVO) şeklindedir. Buna göre, seviye türü aykırı gözlemler sadece gerçekleştikleri zamanın seviyesi ile gelecek volatilité tahminlerini etkilerken, varyans türü aykırı gözlemler ise hem seviyeyi hem de koşullu varyansı etkiler.

Charles Darne 2005 ve 2008 yıllarındaki GARCH modellerinde aykırı gözlemlerin teşhisini konu alan çalışmalarında aykırı gözlemleri iki başlıkta incelemiştir. Yazar, GARCH(1,1) modeli üzerinden aykırı gözlemleri aşağıdaki gibi tanımlamıştır:

⁹⁸ L.K. Hotta, R. S. Tsay (1998), “Outliers in GARCH processes”, mimeo, IMECC, **Brazil and University of Chicago**, 1998.

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\varepsilon_{t-1}^2 + v_t - \beta_1 v_{t-1} \quad (2.2)$$

Yukarıda tanımlı GARCH(1,1) modelinde v_t açık haliyle $v_t = \varepsilon_t^2 - h_t$ 'dir. Gerçek ε_t serisi yerine e_t kullanılarak,

$$e_t^2 = \varepsilon_t^2 + \omega_j \xi_i(B) I_t(\tau) \quad (i=1,2) \text{ elde edilir.}$$

(2.3)

Bu denklemde, $I_t(\tau)$ indikatör fonksiyonu, $t = \tau$ iken $I_t(\tau) = 1$ ve diğer durumlarda sıfır değerini alır.

ω_i aykırı gözlem etkisinin büyüklüğüne karşılık gelir.

$\xi_i(B)$ ise,

AO durumunda $\xi_1(B) = 1$ ve

IO durumunda $\xi_2(B) = (1 - \beta_1 B)(1 - (\alpha_1 + \beta_1)B)^{-1}$ olan dinamik yapıyı temsil eder.

Gözlenen e_t^2 serisinden elde edilen artıklar η_t olmak üzere,

$\pi(B) = (1 - (\alpha_1 + \beta_1)B)(1 - \beta_1 B)^{-1}$ iken model genel haliyle şöyle ifade edilmiştir:

$$\eta_t = \frac{-\alpha_0}{1 - \beta_1 B} + \pi(B)e_t^2 = v_t + \pi(B)\xi_i(B)\omega_i I_t(\tau) \quad (2.4)$$

AO ve IO türü aykırı gözlem özellikleri ARMA modellerindekine benzer.

2.3 GARCH MODELLERİNDE AYKIRI GÖZLEMLERİN TEŞHİS YÖNTEMLERİ

GARCH modellerinde aykırı gözlemlerin belirlenmesi konusundaki ilk çalışma Franses ve Ghijssels'e aittir. Sonrasında Doornik ve Ooms, Chen ve Liu 'dan etkilenecek sadece additive level ve additive volatility türü aykırı gözlemleri belirlemeye yönelik bir algoritma önermişlerdir. Tolvi⁹⁹'nin çalışmasında yüksek frekanslı serilerde aykırı gözlemlerin birçoğunun IO türü olduğu vurgusundan da yola çıkarak Charles ve Darne IO türü aykırı gözlemleri de belirleyebilen bir algoritma geliştirmişlerdir.

Ayrıca Hammoudeh ve Li ile Wang ve Moore, Inclan ve Tiao'nun önerdikleri ICSS algoritmasıyla volatilitedeki ciddi ve ani değişimleri belirlemişlerdir. Fakat yöntemin diğer aykırı gözlem türleri üzerine uygulanabilirliği ve gücü üzerine her iki çalışmada da vurgu yapılmamıştır.

Aykırı gözlem teşhisinde sözü edilen bu yaklaşımlara ilişkin süreçler kısaca aşağıda özetlenmiştir.

2.3.1 İlk yaklaşım (Franses ve Ghijssels Metodu-1999)

Franses ve Ghijssels¹⁰⁰, GARCH modelini ARMA modeli şeklinde yazarak Chen ve Liu¹⁰¹, nun önerdiği yaklaşımı kullanarak AO türü aykırı gözlemlerin bulunarak düzeltilmesini önermişlerdir.

GARCH (1,1) modeli olmak üzere,

⁹⁹ Jussi Tolvi, "Outliers In Eleven Finnish Macroeconomic Time Series", **Economic Papers**, 14, 2001, s.14-32.

¹⁰⁰ P.H. Franses, H. Ghijssels, " Additive Outliers, GARCH And Forecasting Volatility", **International Journal of Forecasting**, 15, 1999, s.1-9.

¹⁰¹ C. Chen, L. M. Liu, " Joint estimation of model parameters and outlier effects in time series", **Journal of the American Statistical Association**, 88, 1993, s. 284-297.

$$h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} \quad (2.5)$$

ve $\omega > 0$ $\alpha_1 > 0$ $\beta_1 > 0$
 $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ koşulları sağlanmak üzere, gözlenen y_t serisinin koşullu ortalaması önemsenmez, $\varepsilon_t = y_t$.

GARCH(1,1) modeli ARCH(1,1) olarak yazılırsa ε_t^2 için;

$$\varepsilon_t^2 = \omega + (\alpha_1 + \beta_1) \varepsilon_{t-1}^2 + v_t - \beta_1 v_{t-1} \quad (2.6)$$

burada $v_t = \varepsilon_t^2 - h_t$ 'dır. Gerçek ε_t serisi yerine e_t serisi kullanılabilir:

$e_t^2 = \varepsilon_t^2 + \zeta I(t = \tau)$ burada $I[t = \tau]$, $t = \tau$ iken $I[t = \tau] = 1$ ve diğer durumlarda sıfır değerini alan işaret fonksiyonudur, ζ ise sıfırdan farklı bir fonksiyondur.

Gecikme polinomu $\pi(L)$ ile şöyle tanımlanır:

$$\begin{aligned} \pi(L) &= (1 - \beta_1 L)^{-1} (1 - (\alpha_1 + \beta_1) L) \\ &= (1 + \beta_1 L + \beta_1^2 L^2 + \beta_1^3 L^3 + \dots) (1 - (\alpha_1 + \beta_1) L) \\ &= 1 - \alpha_1 L - \alpha_1 \beta_1 L^2 - \alpha_1 \beta_1^2 L^3 - \dots \end{aligned} \quad (2.7)$$

Gecikme polinomu $\pi(L)$, $v_t = -\omega / (1 - \beta_1) + \pi(L) \varepsilon_t^2$ şeklinde yazılabilir.

Benzer şekilde GARCH(1,1) modeli de gözlenen e_t^2 serilerine uygulanabilir, ilgili artıklar v_t şöyle gösterilebilir:

$$\begin{aligned}
v_t &= \frac{-\omega}{(1-\beta_1)} + \pi(L)e_t^2 \\
&= \frac{-\omega}{(1-\beta_1)} + \pi(L)(e_t^2 + \zeta I[t = \tau]) \\
&= v_t + \pi(L)\zeta I[t = \tau]
\end{aligned}
\tag{2.8}$$

Yukarıdaki ifadenin son satırı, v_t için oluşturulmuş bir regresyon modeli şeklinde yorumlanabilir:

$$v_t = \zeta x_t + v_t \tag{2.9}$$

$$x_t = 0 \quad t < \tau$$

$$x_\tau = 1$$

$$x_{\tau+k} = -\pi_k \quad k=1,2,\dots$$

$t = \tau$ zamanındaki aykırı gözlemin büyüklüğü ζ aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\hat{\zeta}(\tau) = \left(\sum_{t=\tau}^n x_t^2 \right)^{-1} \left(\sum_{t=\tau}^n x_t v_t \right) \tag{2.10}$$

Sabit τ için, $\hat{\zeta}(\tau)$ 'nin t istatistiği $t_{\hat{\zeta}(\tau)} \tau$ ile gösterilir ve bunun asimptotik standart normal dağılımı vardır. Dolayısıyla $t = \tau$ zamanında aykırı gözlem $t_{\hat{\zeta}(\tau)}$ 'nin kritik değerle sınanmasıyla bulunur. Pratikte aykırı gözlemin gerçekleşme zamanı bilinemeyeceğinden tüm t istatistikleri içinden, t istatistiğinin mutlak değeri maksimum olan alınır.

$$t_{maks}(\hat{\zeta}) \equiv \max_{1 \leq \tau \leq n} |t_{\hat{\zeta}(\tau)}|$$

$t_{maks}(\hat{\zeta})$ dağılımı standart değildir ve kritik C değeriyle kıyaslanır. Aykırı gözlem teşhisi şu adımlardan oluşur:

- 1- Gözlenen e_t serisi için GARCH(1,1) serisi oluşturulur ve koşullu varyans $\hat{h}_t$ ile $\hat{v}_t \equiv e_t^2 - \hat{h}_t$ tahminleri elde edilir.
- 2- Tüm mümkün $\tau = 1, \dots, n$ değerleri için $\hat{\zeta}(\tau)$ istatistiği elde edilir ve $\hat{\zeta}_{maks}(\tau)$ değeri bulunur. Eğer test istatistiğinin değeri C kritik değerini aşarsa aykırı gözlem belirlenmiş olur.
- 3- $e_{\hat{\tau}}^2$ nin $e_{\hat{\tau}}^{*2} = e_{\hat{\tau}}^2 - \hat{\zeta}(\hat{\tau})$ ile yeri değiştirilir ve aykırı gözleminden arınmış e_t^* serisi $t \neq \tau$ için $e_t^* = e_t$ ve $e_{\hat{\tau}}^{*2} = \text{sgn}(e_{\hat{\tau}}) \sqrt{e_{\hat{\tau}}^{*2}}$ şeklinde tanımlanır.
- 4- e_t^* serisi için GARCH(1,1) serisi hesaplanır, bunun için ilk adıma geçilir. Eğer $t_{maks}(\hat{\zeta})$ istatistiği C kritik değerini aşamıyorsa iterasyonlar son bulur.¹⁰²

2.3.2 İkinci yaklaşım (Doornik ve Ooms Metodu- 2005)

Doornik ve Ooms, Franses ve Ghijsels'in yaklaşımından farklı olarak volatilité türü aykırı gözlemi de eklemişlerdir. Çalışmalarında (2.5) modeli üzerinden algoritma şöyle özetlenmiştir¹⁰³:

- Model üzerinden artıklar ε_t^* ve log olabirlik fonksiyonu $\hat{l}_b$ tahmin edilir.

$$(\text{Olabilirlik fonksiyonu}; l(\theta) = \sum_{t=1}^T l_t(\theta) = c - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T [\log(h_t) + \frac{\varepsilon_t^2}{h_t}])$$

¹⁰² Philip Hans Franses, Dick Van Dijk, **Non-Linear Time Series Models in Empirical Finance**, Cambridge University Press, 2002, s.169.

¹⁰³ Jurgen A Doornik, Marius Ooms, "Outlier Detection in GARCH Models", **Nuffield Economics Working Papers**, 2005.

- Mutlak değeri maksimum olan artık, yani $(maks_t | \varepsilon_t^* / h_t^* |)$ bulunur ve log olabilirlik fonksiyonu $\hat{l}_m$ olan yeni GARCH modeli, kukla değişkenler gözönünde bulundurularak kurulur. Burada, h_t^* önceki aykırı gözlemlerden etlilenmiş yapıyı gösterir.
- $2(\hat{l}_m - \hat{l}_b) < C_T^\alpha$ değeri, %5 anlam düzeyi için belirlenen kritik $C_T \approx 5.66 + 1.88 \log T$ değeri ile belirlenir. Eğer iki olabilirlik arasındaki fark kritik değerden küçükse aykırı gözlem yoktur.
- $y_t - \hat{\gamma}_m d_t$ için GARCH modeli kurulur. Buna göre eğer, $2(\hat{l}_m - \hat{l}_b) \leq 3.84$ ise aykırı gözlem ALO'dur ama değilse AVO'dur. Burada, d_t indiktor değişken (t=s için "1" ve diğer durumlarda "0" değerini alır) ve $\hat{\gamma}_m$ ise ε_s ve $h_{s+1}, h_{s+2}, \dots, h_T$ 'nin bir fonksiyonudur.

Prosedür hiç aykırı gözlem kalmayana kadar devam eder.

2.3.3 Üçüncü yaklaşım (Charles-Darne Metodu 2005-2008)

Charles ve Darne ise çalışmasında GARCH(1,1) modeli için aykırı gözlemlerin teşhisini şu adımlarla açıklamışlardır¹⁰⁴:

- 1- GARCH(1,1) modeli gözlenen e_t serisi için elde edilir ve koşullu varyans $\hat{h}_t$ ve $\hat{\eta}_t = e_t^2 - \hat{h}_t$ 'nin tahminleri bulunur.

¹⁰⁴Bu sürecin tanımlanmasında kullanılan iki kaynak için bkz ; 1- A. Charles, O. Darne, "Outliers and GARCH Models in Financial Data", **Economics Letters**. 86, 2005, s.347-352. 2- A. Charles, "Forecasting volatility with outliers in GARCH models", **Journal of Forecasting**, 2008, 27, 7, s. 551-565.

2- $\hat{\tau}_i(\tau)$ tüm $\tau=1,...,n$ değerleri için tahmin edilir ve $\hat{\tau}_{maks} = maks_{1 \leq t \leq n} |\hat{\tau}_i(\tau)|$ hesaplanır. Eğer test istatistiğinin değeri, belirlenen kritik değer C'yi aşarsa, $\hat{\tau}_i(\tau)$ 'yu maksimize eden gözlemler aykırı gözlem olarak bulunmuş olur.

3- AO ve IO için e_t^2 sırayla, $e_{\tau}^{*2} = e_{\tau}^2 - \hat{\omega}_1$ ve $e_{\tau+j}^{*2} = e_{\tau+j}^2 - \hat{\omega}_2 \psi_j$ ile yer değiştirilir. Aykırı gözlem etkisinin düzeltildiği e_t^* ise şöyle tanımlanır:

$$\text{AO: } e_t^* = \begin{cases} e_t & t \neq \tau \\ \text{sign}(e_t) \sqrt{e_t^{*2}} & t = \tau \end{cases}$$

$$\text{IO: } e_t^* = \begin{cases} e_t & t < \tau \\ \text{sign}(e_t) \sqrt{e_t^{*2}} & t = \tau + j, j > 0 \end{cases}$$

4- e_t^* serisi için GARCH(1,1) modelini tahminde için ilk adıma dönülerek sırasıyla diğer adımlardan geçilir. Bu işlemler $\hat{\tau}_{maks}$ test istatistiği, kritik değer C'yi aşmayana kadar devam ettirilir. Yazarların simülasyon çalışması sonrasında kritik değer C=10 olarak belirlenmiştir.

2.3.4 Dördüncü yaklaşım (ICSS algoritması ile)

Hammoudeh ve Li çalışmalarında global ve yerel olaylara bağlı olarak gerçekleşen Arap piyasalarında volatilitedeki ciddi, ani değişimi ICSS algoritmasıyla belirlemişlerdir.¹⁰⁵ Sonrasında Wang ve Moore 2009 yılında aynı yaklaşımı Avrupa borsalarına uygulamıştır. Algoritma öncelikle finansal serilerin başlangıç periyodunda durağan varyansının olduğunu ve ani şokla varyansın değiştiğini ama ikinci ani bir şok gelene kadar sistemin durağan olduğunu varsayar. $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2)$ ile

¹⁰⁵Yazarla yapılan yazışmalarda, kendisi bu algoritmanın tüm aykırı gözlemleri yakalayamayabileceğini, bunun nedeninin tüm örneklem üzerinden araştırma yapmayan, sadece alt kümeler üzerinden yola çıkarak varyans değişimlerini saptayan bir algoritma kullanımından kaynaklı olabileceğini belirtmiştir. Bu açıdan yazar algoritmanın diğer algoritmalarla beraber kontrollü kullanımını önermiştir.

bağımsız ve özdeş dağılan gözlemleri göstermek üzere, her bir zaman aralığındaki varyans τ_j^2 ile gösterilsin. $j = 0, 1, \dots, N_T$ olsun ve N_T , T tane gözlemdeki toplam varyans değişim sayısını göstere. Değişim noktalarında $1 < K_1 < K_2 < \dots < K_{N_T} < T$ şeklinde gösterilmek üzere, N_T aralığındaki varyanslar şöyle tanımlanır:

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \tau_0^2 & 1 < t < K_1 \\ &= \tau_1^2 & K_1 < t < K_2 \\ &\vdots \\ &= \tau_{N_T}^2 & K_{N_T} < t < T\end{aligned}$$

Bu şekilde kümülatif kareler toplamı kullanılarak, varyans değişiminin sayısı ve her bir varyans değişim noktası da belirlenmeye çalışılmıştır.

$C_k = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i^2$ ifadesi serinin başından zamanın k noktasına kadar serinin kümülatif

kareler toplamını gösterir, $k=1, 2, \dots, T$ 'dir. Bu şekilde D_k istatistiği tanımlanır:

$$D_k = (C_k / C_T) - k / T, \quad k=1, 2, \dots, T \text{ ile } D_0 = D_T = 0$$

Eğer ilgilenilen seride varyans değişimi yoksa (ilgilenilen periyot üzerinden) D_k sıfır etrafında salınım gösterir. Buna göre k karşısında yatay çizgi olarak gösterilir. Bununla beraber eğer seride birden fazla varyans değişimi varsa, D_k sıfırın altında ya da üstündedir. Bu durumda, kritik değerlere bağlı olarak anlamlı varyans değişimi saptanabilir. Bu kritik değerler kayma için alt ve üst limitleri gösterir. Eğer, D_k 'nın mutlak maksimum değeri kritik değerden büyükse H_0 hipotezindeki “varyansta hiç değişim olmaması” ifadesi reddedilir. Bu durumda k , k^* olarak tanımlanır ve değişim noktasının tahmini olarak ele alınır. D_k 'nın dağılımını standardize etmek için maksimum mutlak değeri $\max_k \sqrt{T/2} |D_k|$ tanımlanır ve kritik değerlerle kıyaslanır.

Kritik değerler $\max_k \sqrt{T/2} |D_k|$ asimptotik dağılımının % 95 kantiline karşılık gelen değerdir. Eğer ilgilenilen serinin birden fazla değişim noktası varsa, D_k fonksiyonu tek başına farklı aralıklardaki değişim noktalarını yakalamada yeterli değildir. Bu problemten kaçınmak için önerilen, D_k fonksiyonunu serinin farklı noktalarındaki değişimi sistematik olarak bakma amaçlı kullanmaktır.

Sonrasında bu değişim noktaları gözönünde bulundurularak GARCH modeli kurulur.

$$h_t = \omega + \alpha e_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} \quad \text{GARCH modeli olmak üzere,}$$

$D_1, \dots, D_n$ ani değişim olan yerlerde 1 diğer yerlerde 0 değerini alan kukla değişkenler iken model şöyle ifade edilir: $h_t = \omega + d_1 D_1 + \dots + d_n D_n + \alpha e_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}$ ¹⁰⁶

2.4 GARCH MODELLERİNİN KLASİK YÖNTEMLERLE TAHMİNİ

ARCH modellerinin tahmin süreci için literatürde önerilen belli başlı tahmin yöntemleri **EKK, EÇO, GEKK ve sözde EÇO (QML)** şeklinde sıralanabilir. Bose ve Mukherjee¹⁰⁷ çalışmalarında, hata terimlerinin değişen varyanslı yapıda olmasından dolayı EKK tahmincilerinin etkin olmama problemine karşı geliştirilmiş EKK tahmincisini önermiştir. Yanısıra şok sürecinin normal olmaması halinde son zamanlarda birçok çalışmada önerilen QML tahmincisi de vardır.

Dayanıklı tahmin süreci aşamasına ve aykırı gözlemlerin etkilerinin değerlendirilmesine geçmeden önce bu tahmin tekniklerine kısaca değinilmiştir.

¹⁰⁶ S. Hammoudeh , L. Huimin, “Sudden Changes In Volatility In Emerging Markets: The Case Of Gulf Arab Stock Markets”, **International Review of Financial Analysis**, 17, 2008, s. 47–63.

¹⁰⁷ A. Bose, K. Mukherjee, “Estimating the ARCH parameters by solving linear equations”, **Journal of Time Series Analysis**, 24, 2003, s. 127–36.

2.4.1 EKK Tahmini

ARCH (p) modeli için $X = (1 Y_p \dots Y_1)$ olmak üzere modelin EKK tahmincisi şöyle bulunur¹⁰⁸:

$$\hat{\alpha}^{EKK} = (X'X)^{-1}(X'Y_{p+1}) \quad (2.11)$$

kovaryans matrisi;

$$(X'X)^{-1}S(X'X)^{-1}$$

$$\text{burada } S = \begin{pmatrix} \sum_{t=p+1}^T \hat{v}_t^2 & \sum_{t=p+1}^T \hat{v}_t^2 y_{t-1}^2 & \dots & \sum_{t=p+1}^T \hat{v}_t^2 y_{t-p}^2 \\ & \sum_{t=p+1}^T \hat{v}_t^2 y_{t-p}^4 & \dots & \sum_{t=p+1}^T \hat{v}_t^2 y_{t-1}^2 y_{t-p}^2 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \sum_{t=p+1}^T \hat{v}_t^2 y_{t-p}^4 \end{pmatrix} \quad \text{iken,}$$

$\hat{v}_t$ 'ler, matristeki OLS regresyonundan elde edilen artıklardır.

2.4.2 EÇO Tahmini

EÇO ile tahmin süreci için $\varepsilon_t = \sqrt{h_t} \eta_t, \eta_t \sim N(0,1)$ ifadeleri yeniden hatırlanırsa, ε_t 'nin olabirliği (l_t) şöyledir:¹⁰⁹

$$l_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp\left(-\frac{1}{2h_t} \varepsilon_t^2\right)$$

Bu aslında $f(\varepsilon_t | \xi_{t-1})$ 'nin koşullu olasılık fonksiyonudur, Burada, $\xi_{t-1} = \sigma(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots)$ 'dır.

¹⁰⁸ M.A. Carnero, D. Pena, E. Ruiz, **a.g.e.**, s.479.

¹⁰⁹ Walter Enders, **Applied Econometric Time Series**, New York, Wiley, 2004, s.138.

T tane gözlem üzerinden birleşik olabilirlik ve logaritma alınırsa;

$$\begin{aligned}\log f(\varepsilon_T, \dots, \varepsilon_1 | \varepsilon_0) &= \sum \log f(\varepsilon_t | \xi_{t-1}) \\ &= -\frac{T}{2} \log 2\pi + \sum_{t=1}^T -\frac{1}{2} \log h_t - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{\varepsilon_t^2}{h_t} \text{ olur.}\end{aligned}$$

Koşullu log olabilirlik fonksiyonu şöyle de yazılabilir:

$$L(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\log 2\pi + \log h_t(\theta) + \frac{\varepsilon_t^2(\theta)}{h_t(\theta)}) \quad (2.12)$$

burada $\theta = (a_0, a_1, \dots, a_q, b_1, \dots, b_p)$ 'dır, belirli varsayımlar altında EÇO tahmincisi tutarlıdır, asimptotik olarak normaldir. EÇO tahmincisi bulunurken log olabilirlik fonksiyonunu maksimize etme aşamasında, birden fazla yerel maksimumla karşılaşmamak için Newton-Raphson, BHHH gibi çeşitli algoritmalarından faydalanılır.

2.3.3 GEKK Tahmini

Hata terimlerinin değişen varyanslı yapıda olması, EKK tahmincilerinin etkin olmaması nedenlerinden dolayı Bose ve Mukherjee Genelleştirilmiş EKK tahmincisi ile ARCH (p) modellerinin tahminini önermiştir.

Buna göre Genelleştirilmiş EKK tahmincisi,¹¹⁰

$$PY = PX\alpha + PV$$

$$P'P = \Omega^{-1} \quad \text{ve} \quad \Omega = \text{diag}(\sigma_{p+1}^4, \dots, \sigma_T^4)$$

denklemindeki α parametresinin EKK tahminiyle elde edilir. Pratikte Ω bilinmediğinden aşağıdaki ifadeler yerine konulduğunda,

¹¹⁰ M. A. Carnero, D. Pena, E. Ruiz , **a.g.e.**, s.483.

$$\hat{\Omega} = \text{diag}(\hat{\sigma}_{p+1}^4, \dots, \hat{\sigma}_T^4) \text{ burada } \hat{\sigma}_t^2 = \hat{\alpha}_0^{OLS} + \hat{\alpha}_1^{OLS} y_{t-1}^2 + \dots + \hat{\alpha}_p^{OLS} y_{t-p}^2$$

GEKK tahmincisi elde edilir:

$$\hat{\alpha}^{GEKK} = (X' \hat{\Omega}^{-1} X)^{-1} (X' \hat{\Omega}^{-1} Y) \quad (2.13)$$

2.4.4 QML Tahmini

Bu yaklaşım, GARCH parametrelerinin tahmini student t dağılıma göre log olabilirliğin maksimize edilmesine dayanır. Bazı yazarlar daha sonra da vurgulanacak aykırı gözlem etkilerinden birisi olarak kabul edilen aşırı basıklık probleminin kalın kuyruklu koşullu dağılımla aşılabileceğini söylerler. Sakata ve White¹¹¹ kalın kuyruklu dağılım üzerine kurulu QML tahmincilerinin aykırı gözlemler karşısında dayanıklı olduğunu ifade etmişlerdir. Fakat çeşitli simülasyon çalışmalarına dayalı güncel makalelerde QML tahmincisinin istenilen sonucu vermediği görülmüştür. Bu yüzden tahminci sınıflama aşamasında dayanıklı gruba alınmamıştır.¹¹²

Olabilirlik fonksiyonunun logaritması şöyle ifade edilir:

$$L_s = \sum_{t=2}^T [\log(\Gamma(\frac{\eta+1}{2\eta})) - \log(\Gamma(\frac{1}{2\eta})) - \frac{1}{2} [\log(\Gamma(\frac{1-2\eta}{\eta})) + \log \pi + \log(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2) + \frac{\eta+1}{\eta} \log(1 + \frac{\eta}{1-2\eta} + \frac{y_t^2}{\alpha_0 \alpha_1 y_{t-1}^2})]] \quad (2.14)$$

$\Gamma(\cdot)$, gama fonksiyonu ve $\eta = 1/\nu$ ν student t dağılımının serbestlik derecesidir. η kuyruk kalınlığının bir ölçüsü olmak üzere eğer koşullu olasılık dağılımının varyansı sonlu ise ($\nu > 2$ gibi), bu ölçüt $0 \leq \eta < 0.5$ değerleri arasında yer alır.¹¹³

¹¹¹ S. Sakata, H.White, “High breakdown point conditional dispersion estimation with application to S&P500 daily returns volatility”, **Econometrica**, 66, 1998, s.529–567.

¹¹² İlerleyen bölümde tahmin sürecine değinilecek

¹¹³ M. A. Carnero, D. Pena, E. Ruiz , **a.g.e.**, s.489.

2.5 ARCH-GARCH MODELLERDE AYKIRI GÖZLEMLERİN ETKİLERİ

Literatürde GARCH modellerinde aykırı gözlem etkileri üzerine yapılan çalışmalar yaklaşımları açısından ele alındığında bunları üç sınıfta toplamak mümkündür. Buna göre;

1-Aykırı gözlemler ARCH modellerinin belirlenmesi için kullanılan basit ve kısmi otokorelasyon katsayılarını kolaylıkla etkiler.

2- ARCH etkisinin, varlığını ölçmek için kullanılan LM testi üzerinde aykırı gözlemlerin negatif bir etkisi söz konusudur.¹¹⁴

3- ARCH modellerin parametre tahminlerinde önemli ölçüde yanlılığa sebep olurlar.

İlk maddede yeralan etkiler önceki bölümde detaylı bir biçimde ele alınmıştır. İkinci ve üçüncü maddede yer alan etkiler ilerleyen altbölümlerde detaylı incelenecektir. Carnero, Pena ve Ruiz'in 2007 yılındaki çalışmaları, aykırı gözlemlerin çeşitli istatistikler üzerindeki etkilerini oldukça detaylı bir biçimde ele alarak değerlendiren güncel bir çalışmadır. Burada EKK, ML, GML ve QML üzerindeki etkiler ağırlıklı olarak bu çalışmaya dayandırılmıştır.

2.5.1 EKK Üzerine Etkisi

ARCH (p) modeli ile üretilen bir serinin τ zamanında ω büyüklüğündeki tek bir aykırı gözlemle kirletildiği düşünölsün. Aykırı gözlem modellemesi için aşağıdaki eşitlikte $k=1$ hali olmak üzere,

¹¹⁴ D.Van Dijk, P. H. Franses, A. Lucas, "Testing for ARCH in the presence of additive outliers", *Journal of Applied Econometrics*, 14,1999, s.539-562.

$$z_t = \begin{cases} y_t + \omega & t = \tau, \tau+1, \dots, \tau+k-1 \\ y_t & \text{ö.d.} \end{cases} \quad (2.15)$$

$\hat{\alpha}^{EKK}$, y_t^2 yerine kirlenmiş z_t^2 gözlemleri kullanılarak etki gözlenmiştir. Buna göre;

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_0^{EKK} \\ \hat{\alpha}_1^{EKK} \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_p^{EKK} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T-p & \sum_{t=p}^{T-1} z_t^2 & \dots & \sum_{t=p}^{T-1} z_{t-p+1}^2 \\ \sum_{t=p}^{T-1} z_t^2 & \sum_{t=p}^{T-1} z_t^4 & \dots & \sum_{t=p}^{T-1} z_t^2 z_{t-p+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{t=p}^{T-1} z_{t-p+1}^2 & \sum_{t=p}^{T-1} z_t^2 z_{t-p+1}^2 & \dots & \sum_{t=p}^{T-1} z_{t-p+1}^4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{t=p+1}^T z_t^2 \\ \sum_{t=p+1}^T z_t^2 z_{t-1}^2 \\ \vdots \\ \sum_{t=p+1}^T z_t^2 z_{t-p}^2 \end{pmatrix}$$

$$z_\tau^2 = \omega^2 + o(\omega^2) \quad {}^{115}$$

$$z_\tau^4 = \omega^4 + o(\omega^4) \quad (2.16)$$

$$z_t^r = o(\omega)$$

eşitliklerini dikkate alarak,

$t \neq \tau$ ve $\forall r \geq 0$ için $X'X$ matrisi şöyle yazılabilir:

$$\begin{pmatrix} T-p & (\omega^2 + o(\omega^2))\mathbf{1}' \\ (\omega^2 + o(\omega^2))\mathbf{1} & (\omega^2 + o(\omega^2))F \end{pmatrix}$$

$(X'X)^{-1}$ ise şöyle olur:

$$\frac{1}{(T-2p)\omega^{4p}} \begin{pmatrix} \omega^{4p} + o(\omega^{4p}) & (-\omega^{4p-2} + o(\omega^{4p-2}))\mathbf{1}' \\ (-\omega^{4p-2} + o(\omega^{4p-2}))\mathbf{1} & V \end{pmatrix}$$

¹¹⁵ “o”, yakınsama teorisine ait notasyon.

F, p x p boyutunda simetrik matristir $f_{ii} = \omega^2$ $i=1,...,p$ ve tüm diğer elemanlar 1'e eşittir. V elemanları $o(\omega^{4p-2})$ 'a eşit p x p boyutlu simetrik matristir.

$X'Y_{p+1}$ 'deki tüm elemanlar, $\omega^2 + o(\omega^2)$ ' ya eşittir.

Dolayısıyla ifade şu hali alır:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \hat{\alpha}^{EKK} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{(T-2p)\omega^{4p}} \begin{pmatrix} \omega^{4p+2} + o(\omega^{4p+2}) \\ (-\omega^{4p} + o(\omega^{4p}))1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \infty \\ -\frac{1}{T-2p}1 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Örnek sayısının yeterli derecede büyük olmaması durumunda Mendes¹¹⁶ negatif olmama koşullarını sağlayan tahminlerle karşılaşabileceğini simülasyon çalışmaları ile göstermiştir. Örnek sayısının yeterli olması ve aykırı gözlem sayısının sonsuza gitmesi halinde parametre tahminlerinin sıfıra eğilimli, koşulsuz varyansın ise sonsuza eğilimli olduğu Carnero, Pena ve Ruiz'in simülasyon sonuçlarıyla gösterilmiştir.

Eğer orjinal y_t serisi, k tane ardışık aykırı gözlem ile kirletilirse, OLS tahmindisi üzerindeki etki, aykırı gözlem sayısı ile ARCH modelinin derecesi arasındaki ilişkiye bağlı olarak değişim gösterir:

$k \geq p$ iken (en azından ARCH modelinin gecikme sayısı kadar aykırı gözlem var iken), $p=1$ ve $p>1$ durumlarını ayrı ayrı incelemek gerekir çünkü ilk durumda α_1 parametresi tüm etkiye maruz kalırken, ikincide bu etki diğer parametreler tarafından paylaşılır. ω büyüklüğündeki k tane ardışık aykırı gözlemin ARCH(1) modelinin EKK tahmini üzerindeki etkisi için şu eşitlikler yerleştirilirse;

$$\sum_{t=1}^{T-1} z_t^2 = k\omega^2 + o(\omega^2) \quad \sum_{t=1}^{T-1} z_t^4 = k\omega^4 + o(\omega^4)$$

¹¹⁶ B. V. Mendes, "Assessing the bias of maximum likelihood estimates of contaminated GARCH models", **Journal of Statistical Computation and Simulation**, 67, 2000, s.359–376.

sonuç aşağıdaki gibi olur.

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \hat{\alpha}^{EKK} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} k\omega^2 + o(\omega^2) \\ (k-1)\omega^4 + o(\omega^4) \end{pmatrix} \frac{1}{((T-1)k - k^2)\omega^4} \begin{pmatrix} k\omega^4 + o(\omega^4) & -k\omega^4 + o(\omega^2) \\ -k\omega^4 + o(\omega^2) & T-1 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \hat{\alpha}_i^{EKK} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \infty & i=0 \\ \frac{(T-1)(k-1) - k^2}{(T-1)k - k^2} & i=1 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

$k=1$ iken (2.17) ile aynı sonuca ulaşılır. Eğer ardışık aykırı gözlemlerin sayısı fazla ise, ω sonsuza giderken tahmin edilen α_1 parametresi 1'e yaklaşır. Bu sonuç, büyük aykırı gözlem kümelerinin koşullu varyansın birim köke sahip olmasına ve y_i 'nin durağan olmamasına neden olur. $k \geq p$ ve $p > 1$ iken ardışık aykırı gözlemlerin ARCH (p) parametreleri üzerindeki etkiye ilişkin sonuçlar;

- tahmin edilen parametrelerden $\hat{\alpha}_i$ dışındakilerin sıfıra eğilimli olması,
- ardışık aykırı gözlemlerin sayısının modelin derecesine göre büyük olması durumunda, $\hat{\alpha}_1$ 1'e değere yakınsarken, $\hat{\alpha}_p$ 'nin ise sıfıra yakınsaması, tahmin edilen kararlılığın¹¹⁷ ise izleyen ifadeye, $(-2k^2 + (2k - p - 1)(T - p)) / (-2k^2 + (2k - p + 1)(T - p))$, bunun da 1'e yakınsaması şeklinde sıralanabilir.

EKK tahmincisi büyük yanlılığa ve güvenilir olmayan standart sapmalarla elde edilen çıkarsamalara neden olur. Genellikle tahmincinin gerçek yayılımını

¹¹⁷ $\sum_{i=1}^p \hat{\alpha}_i$, modelin kararlılığına karşılık gelir.

olduğundan büyük tahmin eder. Dolayısıyla, uygulamalarda aykırı gözlemlerin varlığına bağlı olarak ARCH parametrelerinin negatif tahminleriyle karşılaşılır.¹¹⁸

2.5.2 GEKK Üzerine Etkisi

GEKK tahmin sürecinde kullanılan $\hat{\sigma}_t^{-4}$ yükünün varlığı aykırı gözlemlere daha az ağırlık vereceğinden EKK'ya göre daha iyi sonuç alınması beklenir. Nitekim, Carnero çeşitli örnek büyüklükeleri ve kirlenme düzeylerinde yaptıkları simülasyon çalışması sonrasında EKK ya göre sağlam sonuçlar elde etmişlerdir.

2.5.3 EÇO Üzerine Etkisi

Aykırı gözlemlerin EÇO tahmini üzerindeki etkisi çeşitli çalışmalarda yer bulmuştur. Örneğin, Mendes çalışmasında¹¹⁹ EÇO tahmincisinin etki fonksiyonunun aykırı gözlemlerin büyüklüğüne bağlı olarak değişim gösterdiği sonucuna varmıştır. Diğer taraftan Muler ve Yohai¹²⁰ çalışmasında EÇO tahmininin MSE¹²¹ değerinin tek bir aykırı gözlemde etkilendiğini ortaya koymuştur.

Yazarların yaptığı çalışmada, genelleştirilmiş EKK ve EÇO tahmincisinin asimtotik olarak eşit olmalarından dolayı büyük örneklerde aykırı gözlem etkilerinin benzer olacağını bununla beraber örnek sayısının çok büyük olmaması durumunda tek aykırı gözlemler karşısında farklı olduklarını, GEKK'nın EÇO'ya benzer yanlı sonuçlar verse de genelleştirilmiş EKK tahmincisinin varyansının daha küçük olduğu

¹¹⁸ Ağırlıklı olarak kullanılan kaynaklar: 1) M. Angeles Carnero, Daniel Pena, Esther Ruiz, **a.g.e.**, s.477-485. 2) E. Ruiz, M.A. Carnero, D. Pereira, "Effects of Level Outliers on the Identification and Estimation of GARCH Models", **Econometric Society 2004 Australasian Meetings**, 21. (Çevrimiçi): <http://econpapers.repec.org/paper/ecmausm04/21.htm>, 15 Şubat 2010.

¹¹⁹ B. V. Mendes, **a.g.e.**, s.370.

¹²⁰ N. Muller, V.J. Yohai, "Robust estimates for ARCH processes", **Journal of Time Series Analysis**, 23, 2002, s.341-375.

¹²¹ MSE, uygulama bölümünde açıklanmıştır.

sonucuna varılmıştır. Yine simülasyon çalışmaları ardışık aykırı gözlemler karşısında EÇO tahmincisinin varyansının daha zayıf olduğunu göstermiştir.¹²²

2.5.4 QML Tahmini üzerine etkisi:

Sakata ve White, Student t dağılımını maksimize etmenin aykırı gözlemlerin görece büyük olmaları durumunda koruyucu bir sonuç verdiğini, küçük örneklerde, $\hat{\alpha}_0^{QML-t}$ ve $\hat{\alpha}_1^{QML-t}$ 'nin yanlılığının önemsiz olabileceği vurgulanmıştır. GARCH model parametrelerinin tahmininde QML tahmincisinin dayanıklılık özellikleri Sakata ve White ile Mendes tarafından analiz edilmiştir. Buna göre, koşullu ortalama bilindiğinde kalın kuyruklu dağılım kullanılmaması halinde tahmincinin kırılma noktası sıfırken, kalın kuyruklu dağılımın kullanılmasıyla dayanıklı sonuç elde edilebileceğini ifade etmiştir. Fakat Mendes, tahmin sürecinde normal dağılım kullanılmasıyla sıfır kırılma noktası ve sınırsız etki fonksiyonu ile karşılaşılabilceğini göstermiştir. Carnero, Pena ve Ruiz'in sözü edilen çalışmalarında yaptıkları simülasyon sonuçları şöyledir:

ARCH modellerinde (2.2) α_1 için dayanıklı iken, α_0, β için dayanıklı değildir. Yine ARCH modellerinde student t, tek aykırı gözlemlerde dayanıklı sonuç verirken GARCH modellerinde t zamanındaki tek bir aykırı gözlem t+1 zamanındaki koşullu varyansın tahminini etkilemektedir. Yanısıra, yazarlar ise Monte Carlo sonrasında QML tahmincisinin ARCH ve GARCH modelleri için farklı davranışının olduğunu görmüşlerdir.

2.6 ARCH ETKİSİNİN TESTİNE DAYANIKLI YAKLAŞIM

Bilindiği gibi ARCH yapısının veri için gerekli olup olmadığının öncelikli olarak belirlenmesi gerekir, bunun için uygulanabilecek çeşitli testler olmasına rağmen uygulamada en sık kullanılan Engle'in önerdiği EKK artıklarına dayalı

¹²² M. Angeles Carnero, Daniel Pena and Esther Ruiz,,**a.g.e.**, s.490-491

ARCH LM testidir. Bu testte öncelikle EKK ile artıklar elde edilir, artıkların karesi üzerinden yeniden regresyon yapılarak test için bir karar kriteri olacak olan determinasyon katsayısı belirlenir. Şöyle ki;

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \beta_2 \hat{\varepsilon}_{t-2}^2 + \dots + \beta_q \hat{\varepsilon}_{t-q}^2 + v_t \quad \text{modelinden elde edilen } R^2 \text{ kullanılarak}$$

$$LM_{ARCH} = TR^2 \quad \text{istatistiği elde edilir.}$$

$H_0 : \beta_1 = \dots = \beta_q = 0$ sıfır hipotezinin reddedilmesi ARCH etkisinin varlığını göstermektedir. Hipotezin doğruluğu durumunda bu istatistik q serbestlik dereceli χ^2 dağılır.

ARCH bileşenlerinin varlığını saptamada kullanılan diğer testler Hong, McLeod ve Li, Pena ve Rodriguez¹²³ ile Rodriguez ve Ruiz¹²⁴ şeklinde sıralanabilir. Testler genellikle karelerin otokorelasyonuna dayalıdır. Hong'un önerdiği artık karelerinin otokorelasyonuna ve McLeod, Li¹²⁵,nin önerdiği artık karelerin serisel korelasyonuna, Box-Ljung istatistiğine dayalı olan testlerdir.

Hata karelerinin Q istatistiğine dayalı olan test istatistiği şöyledir:

$$Q(q) = T(T+2) \sum_{j=1}^q \frac{\hat{\rho}_{j(\hat{\varepsilon}_t^2)}^2}{T-j} \quad (2.20)$$

Burada T , örneklem büyüklüğü q , test için uygun otokorelasyonlar sayısı, $\hat{\varepsilon}_t$ hata serisi ve $\hat{\rho}_{j(\hat{\varepsilon}_t^2)}$

¹²³ D. Pena, J. Rodriguez, "A powerful portmanteau test of lack of fit in time series", **Journal of the American Statistical Association**, 97, 2002, s. 601–610.

¹²⁴ J. Rodriguez, E. Ruiz, "A powerful test for conditional heteroscedasticity for financial time series with highly persistent volatilities", **Statistica Sinica**, 15, 2005, s.505–525.

¹²⁵ A. J. McLeod, W. K. Li, "Diagnostic checking ARMA time series models using squared residual correlations", **Journal of Time Series Analysis**, 4, 1983, s.269–73.

$$\hat{\rho}_{(\hat{\epsilon}_t^2)}(k) = \frac{\sum_{t=k+1}^T (\hat{\epsilon}_t^2 - \hat{\sigma}^2)(\hat{\epsilon}_{t-k}^2 - \hat{\sigma}^2)}{\sum_{t=k+1}^T (\hat{\epsilon}_t^2 - \hat{\sigma}^2)^2} \quad \hat{\sigma}^2 = \sum \hat{\epsilon}_t^2 / T \quad (2.21)$$

şeklinde hesaplanan $\hat{\epsilon}_t^2$ nin i. gecikmedeki otokorelasyon fonksiyonudur. $\hat{\epsilon}_t$ 'lerin ilişkisiz olması durumunda, $Q(q)$ 'nun q serbestlik dereceli χ^2 dağıldığı varsayılır.

Çeşitli çalışmalarda, LM testinin aykırı gözlemlerden ciddi biçimde etkilendiği görülmüştür. ARCH LM testinde sıfır hipotezi artıkların eşvaryanslı dağılması üzerinedir. Aykırı gözlemlerin varlığı gözardı edildiğinde sıfır hipotezi doğru olduğu halde reddedilebilir ve ARCH testi aykırı gözlemlerin olmaması durumuna göre daha fazla ARCH bileşeni tespit eder, gerçek heteroskedastisite varlığını saklayabilir.¹²⁶ Grossi'nin vurguladığı sonuçlar Van Dijk vd'nin çalışmalarında da çeşitli simülasyon sonuçlarıyla desteklenmiştir. Van Dijk, Franses ve Lucas, Engle'in önerdiği LM testinin yanıltıcı sonuçlar vermesi yüzünden dayanıklı bir test önermiştir. Yazarlar çalışmalarında bu testin aykırı gözlem varlığında oldukça iyi sonuç verirken, veride aykırı gözlem bulunmaması halinde LM testi kadar ARCH modelini saptamada iyi olmadığını, gücünün az olduğunu belirtmişlerdir. Bu açıdan, veride aykırı gözlem olmaması halinde dayanıklı testlerin zayıf sonuç vermesi olasılığına karşı LM testinin dayanıklı testlerle beraber kullanılmasını önerirler. Dayanıklı test sonucunda ARCH varlığından söz edilirken LM testi sonucunda ARCH etkisi yoktur sonucuna varılması halinde modelde ARCH etkisinin aykırı gözlemlerle maskelendiği sonucuna varılabileceğini ve böyle bir durumda ya dayanıklı tahminciler kullanılması ya da veriden aykırı gözlemlerin uzaklaştırılması gerektiğini vurgulamışlardır.

Burada ARCH etkisinin saptanmasında önerilen iki dayanıklı teste yer verilmiştir. İlki Luigi ve Laurini'nin önerdikleri yaklaşımken ikincisi Van Dick, Franses ve Lucas' ın önerdiği yaklaşımdır.

¹²⁶ Laurini Grossi, "A robust forward weighted Lagrange multiplier test for conditional heteroscedasticity", **Computational Statistics & Data Analysis**, 53, 6 ,2009, s. 2251-2263

2.6.1 İlk yaklaşım

Luigi ve Laurini çalışmalarında önerilen dayanıklı test yöntemlerinin birçoğunun geriye doğru (backward) ilerleyen metoda dayalı olduğunu ve bu yaklaşımın aykırı gözlemlerin maskeleye ve süpürme etkilerinden etkilenebileceğini belirtmişlerdir ve yazarlar Atkinson'un önerdiği İleriye doğru arama (Forward Search) yönteminine dayalı bir yöntem geliştirmişlerdir. Aslında yazarların 2004 yılındaki çalışmalarında bu yöntem ARCH LM testinin sağlamlaştırılması amacıyla kullanılmış ve 2009 yılındaki çalışmalarında ise test biraz daha değiştirilmiştir.

Van Dijk, Franses ve Lucas ile Grossi ve Laurini'nin önerdikleri dayanıklı LM yaklaşımlarının yanısıra literatürde bu konu Duchesne¹²⁷ tarafından da ele alınmıştır. Duchesne, Hong¹²⁸ 'un artıkların karelerinin otokorelasyonuna dayalı olarak dayanıklı bir test önermiştir. Ayrıca, Wong ve Li tarafından robust rank testi önerilmiştir.

Grossi ve Luigi çalışmalarında uyguladıkları simülasyon sonucunda ileriye doğru arama yaklaşımına dayalı testin aykırı gözlem sayısından etkilenmediğini yani aykırı gözlemin tek ya da gruplar halinde olmasının, testin performansını değiştirmediğini göstermişlerdir. Yazarların önerdikleri metod dayanıklı ve etkin tahminciye dayalıdır ve üç aşaması vardır. Aşamalardan ilki, aykırı gözlemlerden bağımsız başlangıç kümesi CDS'nin bulunmasına dayalıdır. Küme oluşturulurken LMS regresyon kullanılır, dayanıklı metodla veri aykırı gözlem bulunmayan alt kümeye ayrılır. İkinci adımda ileriye doğru arama ile geliştirilen metoda bağlı olarak bir kriter tanımlanır. Üçüncü adımda ise araştırma süreci boyunca istatistikler gözlemlenerek değerlendirilir. ARCH bileşenleri için λ_{FS} (forward search) test istatistiği her bir aşamada EKK tahmincilerinden elde edilen istatistiklerin dizilimini gerektirir:

$$\lambda_{FS} = (\lambda_{(q+1)}, \dots, \lambda_{(T)})$$

¹²⁷Duchesne, "On robust testing for conditional heteroscedasticity in time series models", **Computational Statistics and Data Analysis**, 46,2004, s.227-256.

¹²⁸Hong, "One-sided testing for conditional heteroscedasticity in time series models", **Journal of Time Series Analysis**, 18, 1997, s.253-277.

Burada $\lambda(m)$ test istatistiği m tane gözlem üzerinden hesaplanır. m . adımdan $(m+1)$ 'e geçmek için tüm gözlemleri azalmayan sırada EKK artıklarına göre dizilir. Bu süreç $m=T$ olana kadar devam eder, bu da zaten CDS'nin tüm gözlemleri içermesi anlamına gelir. İleri arama boyunca $\lambda_{(m)}, \hat{\lambda}_{i(m)}$ katsayıları ve katsayıların t istatistikleri gözlenir. Keskin değişimler, etkin gözlemlerin varlığına işaret eder. Yazara göre herbir bileşenin t istatistiklerini gözlemlemek standart LM testinden daha çok bilgi verir. Bu dayanıklı durumun, ilk adımda aykırı gözlemlerden bağımsız küme üzerinden devam edilmesinden ileri geldiğini belirtir.¹²⁹

Grossi'nin önerdiği yaklaşımların dayalı olduğu ileriye doğru arama yöntemi şöyle özetlenebilir; n gözlem sayısını göstermek üzere m büyüklüğündeki altkümelerin sayısı M olsun. $m_0 \leq m \leq n$ koşulu söz konusu iken, başlangıç kümesi LMS veya LTS ile bulunur. $S_*^{(m)} \in M$, m büyüklüğündeki optimal altkümedir, $X(m^*)$ açıklayıcı değişkenlerin oluşturduğu matristir. EKK bu altkümeye uygulanır, $\hat{\beta}(m^*)$ ve $s^2(m^*)$ tahminleri elde edilir. Tüm gözlemler üzerinden artıklar hesaplanır. EKK artıkları n gözlem üzerinden şöyledir:

$$e_i(m^*) = y_i - x_i^T \hat{\beta}(m^*)$$

($i=1, \dots, n$) Arama işlemi ileri doğru devam eder: $S_*^{(m+1)}$ altkümesi ile, bu altküme $e_i(m^*)$ 'in $m+1$ tane en küçük mutlak değerlerinden oluşur.¹³⁰

2.6.2 İkinci Yaklaşım

Van Dijk, Franse ve Lucas¹³¹, 1989 yılında yaptıkları çalışmada simülasyonla LM testinin dayanıklı sonuçlar vermediğini ifade etmişler ve alternatif dayanıklı

¹²⁹ Laurini Grossi, **a.g.e.**, s. 2260.

¹³⁰ Laurini Grossi, "Analysis of economic time series: Effects of extremal observations on testing heteroscedastic components", **Applied Stochastic Models in Business and Industry**, 20, 2004, s.115–130.

RLM testini önermişler ve bu testle aykırı gözlemler karşısında daha iyi sonuçlar elde etmişlerdir. $\psi(r_t)^2$, aşağıdaki şekilde tanımlanan bir fonksiyon olmak üzere, $\psi(r_t)^2$ 'yi $\psi(r_{t-1})^2, \dots, \psi(r_{t-m})^2$ üzerinden regresyonu alınarak elde edilen TR^2 istatistiğidir.

Bu kısa işlemle RLM testine ulaşılır.

$$\psi(x) = x(1 - H(|x| - c_1))\text{sign}(x) + H(|x| - c_1)(1 - H(|x| - c_2))g(|x|) \quad (2.22)$$

Burada $H(x) = I(x > 0)$ ve $c_1 = 2.576$ $c_2 = 3.291$ 'dir, $g(x)$ ise ψ 'nin iki defa türevlenebilmesini sağlayan 5. dereceden polinom fonksiyonudur. Diğer taraftan r_t şöyle tanımlanır:

$$r_t = \frac{y_t}{\sigma_y \omega_y(y_{t-1})} \quad (2.23)$$

σ_y , y_t 'nin MAD^{132} değerine karşılık gelir. Burada

$$\omega_y(y_{t-1}) = \frac{\psi(d(y_{t-1})^2)}{d(y_{t-1})^2} \text{ 'dir ve}$$

$d(.)$ ise aşağıdaki gibi tanımlıdır

$$d(y_{t-1}) = \frac{|y_{t-1} - m_y|}{\sigma_y}$$

Yukarıdaki eşitlikte m_y ise y_t 'nin medyanıdır, $RLM(m)$ istatistiği m serbestlik dereceli kıkare dağılır.

¹³¹ D. Van Dijk, P. H. Franses, A. Lucas, "Testing for ARCH in the presence of additive outliers", **Journal of Applied Econometrics**, 14, 1989, s. 539-562.

¹³² Uygulamada anlatılmıştır

Ayrıca yazarlar bu testin, alternatif hipotezin nonlinear ARCH etkisinin varlığını sınamak şeklinde düzenlendiğinde de kullanılabileceğini ifade etmişlerdir.

2.7 GARCH MODELLERİNİN DAYANIKLI TAHMİNİ

Her ne kadar seride aşırı basık yapının varlığında koşullu olasılık dağılımını kalın kuyruklu dağılım olarak ele almak yaygın bir kullanım haline gelmiş olsa da bir çok yazara göre, bu yaklaşımın sorunu çözmekte yeterli olmamasından dolayı ARCH modelleri için çeşitli dayanıklı tahminciler önerilmiştir. Zira çeşitli çalışmalarda belirtildiği gibi, veride aykırı gözlem varlığında QML tahmincisinin kullanılması, tahmincinin verinin çoğunluğunu zayıf biçimde temsil ederken aykırı gözlemlere daha iyi uyum göstermesi anlamına gelebilir. Güçlü olmayan bir tahmincinin kullanılması aykırı gözlemlerin saklı kalmasına yol açıp, modelin düzeltilip geliştirilmesine olanak sağlamayabilir. Fakat dayanıklı tahmincinin kullanılmasıyla yazarlar bu riskin ortadan kalkacağını belirtmişlerdir.

Literatürde ARCH modellerine dayanıklı yaklaşım üzerine çeşitli çalışma ve uygulamalar yapılmıştır. Sakata ve White M tahmin sınıfına dayalı tahmini ve Mendes ve Duarte ise sınırlı M tahmin sınıfını önermişlerdir. Jiang, Zhai ve Hui (2001) ile Peng ve Yao (2003) çalışmalarında L1-LAD tahmincisini kullanmışlardır. Muler ve Yohai¹³³, M tahmincisinin yanısıra robust filtreye dayalı yöntem önermiştir. Yazarlar 2006 yılındaki çalışmalarında ise sınırlandırılmış M tahmincisini önermişlerdir. Grossi¹³⁴, Atkinson'un ileriye doğru arama metodunu geliştirerek farklı biçimde ele almıştır. Carnero, QML tahmincisini modifiye ederek sınırlı biçimde düzenlemiş, yazar simülasyon çalışması yaparak çeşitli dayanıklı tahmincilerle kendisinin önerdiği BQML tahmincisinin özelliklerini değerlendirmiştir.

¹³³ Muler ve Yohai, "Robust estimates for GARCH models", **Journal of Statistical Planning and Inference**, 138, 2008, s.2918 – 2940.

¹³⁴ Luigi Grossi, **a.g.e.**, s.3.

Muler ve Yohai¹³⁵ çalışmalarında dayanıklı tahmincileri Huber'in çalışmasında tanımladığı güçlü tahminci özelliklerine göre sınıflandırmıştır. Sözü edilen özellikler iki madde halinde çalışmada şöyle sıralanmıştır:

-Örnekleme tüm gözlemler varsayılan modele uyduğunda tahminci etkin olmalıdır. Bu aşamada etkinlik EÇO tahmincisinin etkinliği ile kıyaslanarak değerlendirilebilir.

-Verinin bir kısmı aykırı gözlemlerle yer değiştirdiğinde, bu durum tahminde önemsiz bir değişikliğe neden olmalıdır.

Muler ve Yohai¹³⁶, GARCH modellerinin tahmini için literatürde yeralan kalın kuyruklu dağılıma dayalı EÇO tahmincisi ya da LAD tahmincilerinin bu koşulları, (özellikle de ikincisini) sağlamadığını belirtmişlerdir. Dayanıklı tahmincileri iki şekilde incelemişlerdir. İlki Huber (1964) tarafından önerilen yer ve regresyon tahmininin uzantısıdır. Olabilirlik fonksiyonunun uygun şekilde modifiye edilmesiyle bulunur. Yazarlar, M tahmincilerinin aykırı gözlemlere karşı QML'den daha az duyarlı olduğunu ve yukarıda sözü edilen Huber koşullarından ilkini sağladığını, ikinciyi sağlamadığını belirtirler. Bunun nedenini koşullu varyansın aykırı gözleme karşı duyarlı tahmincilerine de bağlı olması şeklinde açıklarlar. Bu yüzden dayanıklılığı geliştirmek için modifiye edilmiş M tahmincisini önermişlerdir. Önerilen bu modifiye edilmiş tahmincilerin, koşullu varyans tahminleri üzerinde aykırı gözlem etkisini sınırlandıran ilave mekanizmaları içerdiğini, bu yüzden sınırlandırılmış M tahmincilerin BM (Bounded M) olarak bilindiğini ve bu tahmincilerin asimptotik olarak etkin ve tutarlı olduğunu ayrıca Huber'in her iki tanımlamasını da sağladıklarını belirtmişlerdir.

GARCH modelinin tahmini için önerilen dayanıklı tahmincileri sıralamadan önce kimi yazarlarca dayanıklı kabul edilebileceği söylenen QML tahmincisinin

¹³⁵ N. Muler, V. J. Yohai, **a.g.e.**, s.2920.

¹³⁶ N. Muler, V. J. Yohai, "Robust estimates for GARCH models", **Technical Report, Instituto de Calculo**, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 2007. (Çevrimiçi): <http://ulises.ic.fcen.uba.ar/preprints/muler-yohai2005.pdf>, 15 Şubat 2010

neden bu sınıfta yer almadığını açıklamak gerekir. Muler ve Yohai ¹³⁷ çalışmalarında detaylı olarak incelemişlerdir. Bu bölümün başında tanıtılan GARCH modeli notasyonlarına bağlı kalarak QML tahmincisinin dayanıklılığı yazarlar tarafından aşağıdaki gibi ele alınmıştır:

GARCH (p,q) modeli için σ_t^2 'nin açık halini şu şekilde göstermişlerdir:¹³⁸

$$\sigma_t^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^q \beta_i} + \sum_{i=1}^p \alpha_i x_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_1=1}^q \dots \sum_{j_k=1}^q \beta_{j_1} \dots \beta_{j_k} x_{t-i-j_1-\dots-j_k}^2 \quad (2.24)$$

$a = (a_0, a_1, \dots, a_p)$ ve $b = (b_1, \dots, b_q)$ için $c = (a, b)$ 'nin parametre değerlerini göstermek üzere aşağıdaki fonksiyonda tanımlanırsa,

$$h_t(c) = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i x_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q b_i h_{t-i}(c) \quad \text{olur.} \quad (2.25)$$

ve yukarıdaki ifade (2.25)'in (2.24) ile yerleştirilmesiyle aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$$h_t(c) = \frac{a_0}{1 - \sum_{i=1}^q b_i} + \sum_{i=1}^p a_i x_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p a_i \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_1=1}^q \dots \sum_{j_k=1}^q b_{j_1} \dots b_{j_k} x_{t-i-j_1-\dots-j_k}^2 I_{\{t-i-j_1-\dots-j_k \geq 1\}} \quad (2.26)$$

Bu fonksiyonda yer alan I_A , GARCH modeli başlangıç koşullarındaki A'nın indikatör fonksiyonuna karşılık gelir.

QML tahmini x_t 'ye dayalı, aşağıdaki ifadenin maksimizasyonunu içerir;

$$-\frac{1}{2} \sum_{t=p+1}^T \frac{x_t^2}{h_t(c)} - \frac{1}{2} \sum_{t=p+1}^T \log h_t(c) \quad (2.27)$$

ve $y_t = \log(x_t^2)$ tanımlamasıyla QML tahmini şöyle yazılır:

¹³⁷ Muler ve Yohai, **a.g.e.**, s.2918 – 2940.

¹³⁸ Muler ve Yohai, bu gösterimin Hall ve Yao (2003) ait olduğunu bildirmişlerdir.

$$-\frac{1}{2} \sum_{t=p+1}^T (e^{y_t - \log h_t(c)} + \log h_t(c)) \quad (2.28)$$

Buradan yapılacak maksimizasyonla aşağıdaki ifadeye ulaşılır ve

$$L_{0,T}(c) = \sum_{t=p+1}^T \log(g_0(y_t - \log h_t(c))) \quad (2.29)$$

bu ifade şu biçimde de yazılabilir:

$$M_{0,T}(c) = \frac{1}{T-p} \sum_{t=p+1}^T \rho_0(y_t - \log h_t(c)) \quad (2.30)$$

burada, $\rho_0 = -\log(g_0)$ 'dır.

ρ_0 ¹³⁹, ın sınırlı olmaması, QML tahmincisinin dayanıklı olmaması anlamına gelir.

Tek bir aykırı gözlem $M_{0,T}$ üzerinde sınırlandırılmamış etkiye sahiptir.

GARCH modelleri için M tahminini Muler ve Yohai aynı çalışmada,

(2.30) ifadesinden hareketle, c kümesi için $\hat{\gamma}_T = \arg \min M_T(c)$ şeklinde tanımlamışlardır.

Ayrıca yazarlar dayanıklılık özelliğini gözönüne alarak M tahmincileri ikiye ayırmışlardır.

- sınırlanmış ρ' , fakat sınırlanmamış ρ 'ye sahip M tahmincileri
- ρ' ve ρ 'nin sınırlı olduğu M tahminleri.

Dayanıklılığının derecesini artırmak için ρ 'nun da sınırlı olması gerektiğini vurgulamışlardır. Kalın kuyruklu t dağılımının ilk gruptaki M tahmincilerine örnek olarak gösterilebileceğini, sınırlı ρ değerine sahip M tahmincilerinin QML tahmincisinden daha dayanıklı olduğunu belirtmişlerdir. Bunun nedeni olarak

¹³⁹ Bu fonksiyona ilişkin detaylı açıklamalar Ek-1 'de M tahmincileri başlığı altında yer almaktadır.

tahminin $h_t(c)$ 'nin hesaplanmasını gerektirmesi ve bu yolla aykırı gözlemlerin ($t' > t$ durumlarında) $h_{t'}(c)$ değerlerini etkilemesi gösterilmiştir.

2.7.1. Sınırlandırılmış M tahmincisi

Muler ve Yohai'nin önerdiği¹⁴⁰ bu tahminci, M tahmincisinin modifiye edilmiş olabilirlik fonksiyonunun maksimizasyonuna dayalıdır, koşullu varyans üzerindeki aykırı gözlem etkisini sınırlandıran yapıdadır. Aşağıda yazarların önerdiği bu tahminci açıklanmıştır.

GARCH modelleri için M tahmincilerinin dayanıklılığını artırmak adına M tahminleri modifiye edilmiştir, bu süreçte amaç tahmin edilen $h_t(c)$ üzerindeki aykırı gözlemlerin yayılım etkisini sınırlandırmaktır. Bu amaçla yazarlar, M tahmin sürecinde yeralan $h_t(c)$ ' yi aşağıdaki ifadeyle yer değiştirmişlerdir.

$$h_{t,k}^*(c) = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i h_{t-i,k}^*(c) r_k \left(\frac{x_{t-i}^2}{h_{t-i,k}^*(c)} \right) + \sum_{i=1}^q b_i h_{t-i,k}^*(c) \quad (2.31)$$

Burada, $t \leq 0$ için $x_t = 0$ 'dır ve

$$r_k(u) = \begin{cases} u & u \leq k \\ k & u > k \end{cases} \quad \text{şeklindedir.}$$

Çalışmada, k değeri artıkça $h_t(c)$ ve $h_{t,k}^*(c)$ 'nin birbirine yaklaşacağı belirtilmiştir. Ayrıca, $h_{t,k}^*(c)$ üzerinde t zamanında tek bir aykırı gözlem etkisinin birkaç periyot sonra ortadan kalkacağı ve dolayısıyla, x_t eğer GARCH modeline uygunsa ve aykırı gözlem bulunduruyorsa (2.31)' de verilen koşullu varyansla

¹⁴⁰ A. Muler ve Yohai, **a.g.e.s.**2925-2927

tahmin edilen M tahmininin, GARCH modeline uygun M tahmininden daha iyi sonuç vermesinin bekleneceği de ifade edilmiştir. Bu M tahmininin aşağıdaki gibi modifiye edilmesini önerirler.

$\hat{\gamma}_{1,T}$ yukarıda tanımlandığı gibi kalmak üzere, yani (2.30) gibi olmak üzere, $\hat{\gamma}_{2,T}$ şöyle tanımlanmıştır:

$$\hat{\gamma}_{2,T} = \arg \min M_{Tk}^*(c)$$

Burada,

$$M_{Tk}^*(c) = \frac{1}{T-p} \sum_{t=p+1}^T \rho(y_t - \log h_{t,k}^*(c)) \text{ 'dır.} \quad (2.32)$$

Yazarlar, aykırı gözlem bulundurmeyen bir GARCH süreci söz konusu iken genellikle $\hat{\gamma}_{1,T}$ 'in $\hat{\gamma}_{2,T}$ 'den daha iyi sonuç verdiğini, çünkü $M_T(\hat{\gamma}_{1,T}) < M_{Tk}^*(\hat{\gamma}_{2,T})$ olduğunu fakat, aykırı gözlem varsa $\hat{\gamma}_{2,T}$ tercih edilebilir, $M_T(\hat{\gamma}_{1,T}) > M_{Tk}^*(\hat{\gamma}_{2,T})$ olduğunu belirtmişlerdir.

$$\text{BM tahmincisi şöyle tanımlanır: } \hat{\gamma}_T^B = \begin{cases} \hat{\gamma}_{1,T} & M_T(\hat{\gamma}_{1,T}) \leq M_{Tk}^*(\hat{\gamma}_{2,T}) \\ \hat{\gamma}_{2,T} & M_T(\hat{\gamma}_{1,T}) > M_{Tk}^*(\hat{\gamma}_{2,T}) \end{cases} \quad (2.33)$$

Ayrıca çalışmada, dayanıklı BM tahmincisinin aykırı gözlem olmadığında tutarlı olduğu ve uygun m ve k 'nın değerlerinin belirlenmesiyle de etkin olduğu belirtilmiştir. Yazarların önerisi m sınırlı azalmayan fonksiyon olmak üzere, ρ yu $\rho = m(\rho_0)$ formunda alarak BM tahminlerini kullanmak şeklindedir.

Muler ve Yohai çalışmalarında¹⁴¹ GARCH(1,1) modeli için sınırlı M tahminci için m ve k değerlerini aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$\hat{\theta}_1$, aşağıdaki amaç fonksiyonunun minimizasyonu ile elde edilmek üzere,

¹⁴¹ A.e., s.2930.

$$M = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T \rho(\log y_t^2 - \log \sigma_t^2) \quad (2.34)$$

GARCH (1,1) modelinin parametreleri için tanımlanan BM tahmincisi şöyledir:

$$\hat{\theta}^{BM} = \begin{cases} \hat{\theta}_1 & M \leq M_k^* \\ \hat{\theta}_2 & M > M_k^* \end{cases} \quad (2.35)$$

Burada, $\rho(x) = m_1[-\log(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(e^x - x))]$ ve $k=5.02$ 'dir ve

$m_1(x)$ fonksiyonu ise şöyle tanımlanır:

$$m_1(x) = \begin{cases} x & x \leq 4.02 \\ c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 & 4.02 < x < 4.3 \\ 4.16 & x > 4.3 \end{cases}$$

Yazarlar sabitleri $c_0 = 6777$, $c_1 = -8536.2$, $c_2 = 2362.4$, $c_3 = -379.0087$, $c_4 = 22.777$ şeklinde tanımlamışlardır.

2.7.2 Sınırlandırılmış QML Tahmincisi

Carnero, Pena ve Ruiz'in¹⁴² önerdikleri bu tahminci student-t dağılımına dayalı log olabilirlik fonksiyonunun maksimizasyonuna ve sınırlandırılmasına dayanır. Bu çalışmada tanımlanan süreç şöyle özetlenmiştir:

¹⁴² Bu tahminci için kullanılan kaynaklar için bkz. 1) M. Angeles Carnero, Daniel Pena, Esther Ruiz, “**Estimating and Forecasting GARCH Volatility in the Presence of Outliers**”, Working Papers. Serie AD 2008-13, s.9. (Çevrimiçi:) <http://www.ivie.es/downloads/docs/wpasad/wpasad-2008-13.pdf>, 15 Şubat 2010. 2) M. Angeles Carnero, Daniel Pena, Esther Ruiz, **a.g.e.**, s. 486-487.

Aşağıdaki eşitlikte yer alan $\Gamma(\cdot)$ gamma dağılım fonksiyonuna ve η ise ν student t dağılımının serbestlik derecesini göstermek üzere $\eta = 1/\nu$ ifadesine karşılık gelir.

$$L = \sum_{t=2}^T L_t = \sum_{t=2}^T [\log(\Gamma(\frac{\eta+1}{2\eta})) - \log(\Gamma(\frac{1}{2\eta})) - \frac{1}{2} [\log(\frac{1-2\eta}{\eta}) + \log \pi + \log \sigma_t^2 + \frac{\eta+1}{\eta} \log(1 + \frac{\eta}{1-2\eta} \frac{y_t^2}{\sigma_t^2})]] \quad (2.36)$$

θ bilinmeyen parametre vektörü $\theta = (\alpha_0, \alpha_1, \beta, \eta)'$ olmak üzere,

$$\hat{\theta}^{BQML-t} = \begin{cases} \hat{\theta}_1 & L \geq L_k^* \\ \hat{\theta}_2 & L < L_k^* \end{cases} \quad (2.37)$$

BQML-t tahmincisi yukarıdaki gibi tanımlanır. $\hat{\theta}_1$ student log olabilirliği maksimize eden parametre vektörüdür, $\hat{\theta}_2$ ise modifiye edilmiş student log likelihood' L_k^* u maksimize eden parametre vektörüdür.

σ_t^2 yerine,

$$\sigma_{kt}^{*2} = \alpha_0 + \alpha_1 r_k \left(\frac{y_{t-1}^2}{\sigma_{kt-1}^{*2}} \right) \sigma_{kt-1}^{*2} + \beta \sigma_{kt-1}^{*2} \quad (2.38)$$

kullanılır,

$$\text{burada } r_k(x) = \begin{cases} x & |x| < k \\ k & |x| \geq k \end{cases}, \text{ dır.} \quad (2.39)$$

Muler ve Yohai (2007) $k=5.02$ olarak almayı önerir fakat Carnero, Pena ve Ruiz simülasyon sonucuyla $k=9$ olarak almanın da iyi sonuçlar verdiğini belirtmişlerdir.

-Volatilitenin Tahmini

Volatilite tahminleri için Carnero, Pena ve Ruiz tarafından iki aşamadan oluşan dayanıklı süreç önerilmiştir. Buna göre öncelikle dayanıklı tahminci ile GARCH model parametreleri tahmin edilir, sonrasında dayanıklı filtre kullanılarak volatilite tahmin edilmeye çalışılır. Aslında filtreleme yaklaşımı Muler ve Yohai ile Charles ve Darne'nin çalışmalarında da kullanılmıştır. Muler ve Yohai'nin önerdiği filtre standardize edilmiş gözlemlerin belli bir eşik değerinden büyük ya da küçük olup olmadığıyla kıyaslanarak, büyük olanların budanmasına dayalı iken, Carnero, Pena ve Ruiz'in ki standart sapmalara dayalıdır. Dayanıklı tahminin kullanıldığı sürecin ilk adımı için Carnero vd student t dağılımına dayalı QML tahmincisi, sınırlandırılmış QML-t tahmincisi, BM tahmincisi gibi çeşitli tahmincileri denemiş ve simülasyon sonucuna göre en uygununun BQML-t tahmincisi olduğunu görmüşlerdir.

Volatilite tahmin sürecinde yaklaşım genel olarak $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$ model parametreleri tahmin etmek ve $(\hat{\sigma}_t^{ML})^2$ 'yi bulmak şeklindedir. Muler ve Yohai çalışmalarında buna alternatif olarak robust filtre yaklaşımını önerir. Gerek model tahminlerini gerekse volatilite tahminlerini dayanıklı yolla tahmin etmenin iyi sonuçlara verdiğini belirtmişlerdir. Sadece iyi parametre tahmini yapmanın iyi volatilite tahminlerine neden olmayabileceğini vurgulanmıştır. Benzeri vurguyu Amelie Charles¹⁴³ da çalışmasında yapmıştır.

Yukarıda sözü edilen yaklaşımda, Carnero, volatilite tahmin sürecinde de aşağıdaki 2.41 eşitliğinde görülen noktalara BM, BQML-t, BQM tahminlerini yerleştirmiştir ve en iyi sonucun BQML-t ile elde edildiğini vurgulamıştır.

$$(\hat{\sigma}_t^{**})^2 = \hat{\alpha}_0^{**} + \hat{\alpha}_1^{**} r_k \left(\frac{y_{t-1}^2}{(\hat{\sigma}_{t-1}^{**})^2} \right) (\hat{\sigma}_{t-1}^{**})^2 + \hat{\beta}^{**} (\hat{\sigma}_{t-1}^{**})^2 \quad (2.40)$$

burada $rk(x)$ tanımı şöyledir:

¹⁴³ Charles, **a.g.e.**, s.555.

$$r_k(x) = \begin{cases} x & |x| < k \\ 1 & |x| \geq k \end{cases}$$

2.7.3 LAD Tahmincisi

LAD yaklaşımını kullanarak GARCH modellemesi yapılması konusunda literatürde Park'ın 2002 yılındaki çalışması ile Peng ve Yao¹⁴⁴, nun 2003 yılındaki çalışması öne çıkar. Her iki çalışmada da genel yaklaşım, GARCH modellemesini LAD tahmincisine dayalı bir biçimde modifiye ederek, aykırı gözlemlere daha az ağırlık vermek şeklindedir. Peng ve Yao, Park'tan farklı olarak LAD tahmincisinin varyasyonlarına dayalı tahminler kullanmıştır.

Park¹⁴⁵, ın notasyonuna bağlı kalınarak GARCH(p,q) modeli üzerinden süreç şöyle açıklanabilir:

$$\sigma_t^2 = \theta + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{k=1}^q \delta_k \varepsilon_{t-k}^2 \quad (2.41)$$

$r_t = E(r_t | \psi_{t-1}) + \varepsilon_t$ ve $\varepsilon_t = \sigma_t u_t$ şeklinde ifade edilmek üzere, yazarlar Koenker ve Zhao tarafından 1996 yılında önerilen alternatif tanımı benimsediklerini belirtmişlerdir. Buna göre standart sapma σ_t , artıkların mutlak değerlerinin gecikmeli dağılımıdır.

¹⁴⁴ L. Peng, Q. Yao, "Miscellanea. Least absolute deviations estimation for ARCH and GARCH models", **Biometrika**, 90, 2003, s. 967–975.

¹⁴⁵ Beum-Jo Park, "An Outlier Robust GARCH Model and Forecasting Volatility of Exchange Rate Returns", **Journal of Forecasting**, 21, 2002, s. 381–393.

$$\sigma_t = \theta + \sum_{j=1}^p \beta_j |\varepsilon_{t-j}| \quad (2.42)$$

Bu bilgi kullanılarak mutlak hatalarla GARCH modeli yeniden şöyle yazılır:

$$\sigma_t = \theta + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j} + \sum_{k=1}^q \delta_k |\varepsilon_{t-k}| \quad (2.43)$$

Otoregresif biçimde r_t aşağıdaki şekilde ifade edilir,

$$E(r_t | \psi_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1} + \dots + \alpha_l r_{t-l}$$

ve GARCH modeli (2.43)'e dönüşür.

$$r_t = X_t' \alpha + (Z_t' \zeta) u_t \quad t=1, \dots, T \quad (2.44)$$

Bu modeldeki terimlerin karşılığı ise şöyledir:

$$Z_t = (1, \sigma_{t-1}, \dots, \sigma_{t-p}, |\varepsilon_{t-1}|, \dots, |\varepsilon_{t-k}|)'$$

$$\zeta = (\theta, \beta_1, \dots, \beta_p, \delta_1, \dots, \delta_q)'$$

Modelin LAD tahmincisi, $\xi \equiv (\alpha', \zeta')$ vektörünün aşağıdaki minimizasyon probleminin çözümüyle elde edilir.

$$\hat{\xi}_T = \arg \min_{\xi} \sum |r_t - g(\Gamma_t, \xi)| \quad (2.45)$$

Burada g nonlinear bir fonksiyondur ve $\Gamma_t \equiv (X_t, Z_t)$ 'dir. Çözüm için önerilen gösterim ve açılımlar Park'ın çalışmasında detaylı olarak anlatılmaktadır.¹⁴⁶

Muler ve Yohai'nin çalışmalarında¹⁴⁷ LAD tahmincisinin aslında $\rho(u) = |u|$, ve $\rho'(u) = \text{sign}(u)$ 'ya karşılık gelen M tahmincisi olarak yazılabileceğini ifade

¹⁴⁶ Beum-Jo Park, **a.g.e.**, s.383-386.

¹⁴⁷ N. Muler, V. Yohai (2008), **a.g.e.**, s.2927.

edilmiştir. Kalın kuyruklu z_t için EÇÖ tahminleri ve LAD tahminleri sınırlanmış ρ' fakat sınırlanmamış ρ' ye sahip M tahmincilerine örnek olarak gösterilebileceğini belirtirler.

2.7.4. LMS Tahmincisi

Grossi¹⁴⁸ ileriye doğru arama metoduna dayalı aykırı gözlemlerin maskeleye etkisine karşı dirençli bir yöntem geliştirmiştir. Çalışmasında aykırı gözlemlerin teşhisi için kullanılan diğer yöntemlerin geriye doğru yaklaşımla ilerlediğini ve bu yaklaşımın aykırı gözlemlerin etkisinin altında kaldığını ifade eder. Önerdiği yaklaşımla aykırı gözlemlerin bulunmadığı ilk kümeden aykırı gözlemleri görüntülemeye başlamanın daha sağlam sonuçlar verdiğini ifade etmiştir.

Temelde yapılan, önce aykırı gözlemlerin olmadığı bir başlangıç kümesi oluşturmak ve ileriye doğru arama metodu ile ilgili istatistikleri gözlemlemektir.

Yazarın çalışmasında belirttiği yöntemin aşamaları şöyle özetlenebilir:

Başlangıç kümesinin seçiminde tüm gözlemlerin bulunduğu kümeden bir alt küme seçilir, bu alt kümenin aykırı gözlemlerden bağımsız olduğu varsayılır. Model p sayıda katsayıdan oluşmak üzere, başlangıç kümesi de p sayıda gözlemin oluşturduğu kombinasyonlardan seçilir. Burada lineer regresyon modeli uygulamasından fark, zamana ait sıranın da gözönünde bulundurulmasıdır. Volatilite öngörülerini bir önceki gözleme dayalıdır ve iteratif olarak hesaplanır. Benzer şekilde log olabilirlik fonksiyonu da iteratif olarak bulunur.

Başlangıç kümesinin seçim aşamasında bitişik ve komşu gözlem gruplarına dikkat edilerek, komşu gözlemlerin herbir grubunda orjinal verideki aynı bağımlılık yapısını sürdürmek için blok örnekleme mantığını kullanılır. Buna göre, seride T tane gözlem bulunduğu varsaymak ve b başlangıç kümesini göstermek üzere, $T-b$ tane gözlem komşu birimlerden oluşan f tane alt kümeye bölme işlemi yapılır. Her bir altküme b başlangıç verisinden $r_1, r_2, \dots, r_b$ ve $[(T-b)/f]$ komşu gözlemin

¹⁴⁸ Luigi Grossi , **a.g.e.**, s.1-10

örneklemeden oluşur. $g = (T - b) / f$ şeklinde ve tamsayı olarak varsayılınsın. Bu noktada yazar, çok küçük altkümelerin yeterli derecede istikrarlı parametre tahminleri vermeyebileceğini ve seçimin $g \approx \sqrt{T}$ şeklinde yapmanın parametre tahminlerinin istatistiksel özelliklerine dikkate alındığında daha uygun sonuç verdiğini ve f 'nin altkümelerinin sayısının artmasıyla, aykırı gözlemin barınmadığı başlangıç altkümelerini bulma olasılığının artacağını belirtmiştir.

En iyi alt küme seçiminde, Rousseu ve Leory'un önerdiği artık karelerinin minimize edilmesine dayalı olan LMS¹⁴⁹ kriteri kullanılır. Gözlemlerin arasında korelasyon olmasından dolayı hata bileşeni $\mathcal{E}_{t,S_h^{(g+b)}}$ ve varyansı $\sigma_{t,S_h^{(g+b)}}^2$ t zamanı için $S_h^{(g+b)}$ alt kümesine dayalıdır. e_t ve s_t , ε_t ve σ_t 'nin tahmincisi olmak üzere,

$$\tilde{e}_{t,S_h^{(g+b)}} = e_{t,S_h^{(g+b)}} / s_{t,S_h^{(g+b)}}, \quad t=b+1, \dots, T \quad \text{aslında,} \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

modelinden bulunan standardize edilmiş artığı gösterir. En iyi alt kümeyi seçmek için, ilgili alt kümelerden hesaplanan her bir modelin standardize edilmiş artıklarının analiz edilmesi ile en iyi alt küme seçilir. Daha sonra, başlangıç altkütmesi standardize artıklar üzerinden LMS amaç fonksiyonuna göre düzenlenir.

$$\min_h [\tilde{e}_{[med],S_h^{(g+b)}}^2] \quad h=1, \dots, f$$

Burada, $\tilde{e}_{[j],S_h^{(g+b)}}^2$, j. sıradaki artık $t=b+1, \dots, T$ arasından $med = [(T - b) / 2]$ alınması gerektiğini gösterir.

Ayrıca log-olabilirlik fonksiyonu da $S_h^{(g+b)}$ üzerine kuruludur. Bu fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$l(\theta_{S_h^{(g+b)}}) = -\frac{g}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=b+1+(h-1)g}^{b+hg} (\log(\sigma_t^2) + \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2}) \quad (2.46)$$

¹⁴⁹ Bkz Ek-1

$\alpha_0 \alpha_1 \beta_1$ parametrelerinin MLE tahmini, $S_h^{(g+b)}$ 'deki gözlemler kullanılarak yapılmış ve $\hat{\theta}_{S_h^{(g+b)}}$ sembolü ile gösterilmiştir.

III. BÖLÜM

ÇOK DEĞİŞKENLİ ZAMAN SERİLERİNDE KARŞILAŞILAN AYKIRI GÖZLEMLER VE GÜÇLÜ TAHMİN YÖNTEMLERİ

Çeşitli iktisadi ilişkilere ve finansal piyasalara ilişkin uygulamalarda kullanılan değişkenler birbirlerine ait bilgi içerebilir. Örneğin ilgilenilen uygulama faiz oranı, para arzı, işsizlik, borsa endeksi gibi değişkenlerin değişimi ya da dünya ekonomisinin entegrasyonu ile bağımlı hale gelen finansal piyasaların ilişkisini incelemek üzerine ise büyük olasılıkla incelenen bu değişkenler bir diğer değişkenin geçmiş değerlerine ilişkin bilgi içerebilir. Böyle bir durumda söz konusu değişkenler arası ilişkiyi gözönüne alarak Çok Değişkenli Zaman Serileri Tekniklerini kullanmak yerinde olacaktır. Konu dahilinde ele alınan teknikler **Çok Değişkenli AR ve Çok Değişkenli GARCH Modelleri ile Boyut İndirgeme Teknikleri**'dir. Ancak bu teknikler EÇO ya da EKK tahmin metodlarına bağlı olduğundan ister istemez aykırı gözlemlerden etkileneceklerdir. Literatürde çok değişkenli zaman serileri teknikleri diğer tekniklere görece yeni ağırlık kazanmaya başladığından, alternatif dayanaklı çok değişkenli zaman serileri teknikleri üzerine çalışmalar henüz sınırlı sayıdadır. Bu açıdan çalışmanın bu bölümü **VAR, BEKK ve PCA** yöntemleri için önerilen dayanaklı yaklaşımla sınırlandırılmıştır.

Doğal olarak literatürde çok değişkenli zaman serilerinde karşılaşılan aykırı gözlem türleri, teşhis ve etkileri üzerine yapılan çalışmalar, tek değişkenli seriler üzerine yapılanlar kadar yer tutmamaktadır.

Her ne kadar çok değişkenli zaman serileri söz konusu iken literatürdeki yaklaşımlardan biri serilere tek değişkenli teknikleri uygulamak ve düzeltilen serileri aykırı gözlem yokmuş gibi kabul ederek topluca modellemek olsa da böyle bir yaklaşımla karşılaşılabilecek çeşitli sıkıntılar olabileceği düşünülerek, çeşitli çalışmalarda aykırı gözlemlerin çok değişkenli seriler üzerinde teşhisi, ayrı bir konu olarak ele alınmıştır. Bu konunun ayrıca ele alınmasına neden olarak gösterilen sıkıntılar, bir serideki aykırı gözlemin diğer serilerdeki aykırı gözlemlerden kaynaklı olabileceği ve bu durumda aykırı gözlem sayısının olduğundan fazla tahmin edilebileceği, yanısıra tek tek serilerin gözlenmesiyle tüm

serileri etkileyen bir aykırı gözlemin varlığının belirlenemeyebileceği, çünkü bunun sadece korelasyon yapısının gözardı edilmesiyle ilgili olabileceği şeklinde sıralanmıştır.

Bununla beraber aykırı gözlem zaman serilerini ifade eden vektörlerin farklı bileşenlerini farklı etkileyebilir. Örneğin; alınan bir grev kararı, üretim serisinde AO türü aykırı gözlem gibiyken satış serisinde LS olarak düşünülebilir ya da enerji fiyatlarındaki artış bir ülkede TC etkisine neden olurken bir başka ülkede kalıcı LS etkisine neden olabilir.¹⁵⁰

Çok değişkenli serilerin tek değişkenli gibi ele alınması birleşik dinamiklerin dikkate alınmaması anlamına gelir ki bu da ilgilenilen ilişkinin daha iyi açıklanabilmesine, karşılıklı ilişkinin görülebilmesine ve öngörülerin daha güvenilir yapılabilmesine engel bir durumdur. Bunun için serileri tek tek incelemek yerine birlikte inceleyerek, serilerin korelasyon yapılarını gözönünde bulundurmak ve buna göre karşılıklı ilişkileri değerlendirmek yerinde olur.

Tek değişkenli zaman serileri için sözü edilen çeşitli kavramları çok değişkenli zaman serileri için de açıklamak mümkündür. Bu kavramlardan bazıları aşağıda sıralanmıştır.

Durağanlık:

$y_t = (y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{kt})'$ k tane değişkeni gösteren zaman serisi vektörü olmak üzere, (zayıf) durağanlık y_t 'nin birinci ve ikinci momentinin zamana göre değişmemesi olarak tanımlanır. Aşağıda tanımlanan ortalama vektörü μ ve kxk boyutlu kovaryans matrisi Γ_0 genellikle zamana göre zayıf durağandır.¹⁵¹

$$\mu = E(y_t) \quad \Gamma_0 = E[(y_t - \mu_t)(y_t - \mu_t)'] \quad (3.1)$$

Korelasyon Katsayısı:

¹⁵⁰ Pedro Galeano, Daniel Pena, Ruey S. Tsay, "Outlier Detection in Multivariate Time Series By Projection Pursuit", **Journal of the American Statistical Association**, 101, 474, 2006, s. 655.

¹⁵¹ Ağırlıklı olarak kullanılan kaynaklar için bkz: 1-WilliamWei, **Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods**, 2.bs, Pearson Addison Wesley, 2006, s.382, 2- Helmut Lütkepohl, **New Introduction to Multiple Time Series Analysis**, Berlin, Springer-Verlag, 2005, s.169.

y_{it} ile y_{jt} arasındaki korelasyon katsayısı ise,

$$\rho_0 \equiv [\rho_{ij}(0)] = D^{-1} \Gamma_0 D^{-1} \text{ ile elde edilir}^{152}. \quad (3.2)$$

Burada D, kxk boyutlu köşegen matrisini gösterir ve y_{it} 'nin standart sapmalarından oluşur,

$$D = diag\{\sqrt{\Gamma_{11}(0)}, \dots, \sqrt{\Gamma_{kk}(0)}\} \quad (3.3)$$

diğer bir ifadeyle aslında,

$$\rho_{ij}(0) = \frac{\Gamma_{ij}(0)}{\sqrt{\Gamma_{ii}(0)\Gamma_{jj}(0)}} = \frac{Cov(y_{it}, y_{jt})}{std(y_{it})std(y_{jt})}, \text{ dir.} \quad (3.4)$$

Bu korelasyon katsayısı eşzamanlı korelasyon katsayısı olarak bilinir, çünkü iki serinin t zamanındaki korelasyonudur.¹⁵³ Seriler arasındaki gecikmeli ilişkiden de söz edilebilir, çapraz korelasyon bu amaçla kullanılır.

y_t 'nin l gecikmeli çapraz kovaryans matrisi şöyle tanımlanır:

$$\Gamma_l \equiv [\Gamma_{ij}(l)] = E[(y_t - \mu)(y_{t-l} - \mu)'] \quad (3.5)$$

y_t 'nin l gecikmeli çapraz korelasyon matrisi ise aşağıdaki gibidir.

$$\rho_l \equiv [\rho_{ij}(l)] = D^{-1} \Gamma_l D^{-1}$$

Burada, Γ_l ve ρ_l simetrik değildir.

$$\rho_{ij}(l) = \frac{\Gamma_{ij}(l)}{\sqrt{\Gamma_{ii}(0)\Gamma_{jj}(0)}}, \quad l > 0 \text{ iken } \rho_{ij}(l) \neq \rho_{ji}(l) \text{ 'dir.} \quad (3.6)$$

¹⁵² William Wei, **a.g.e**, s.383.

¹⁵³ **A.e**, s.383.

Ayrıca Chan ve Wei'nin çalışmalarında önerdiği 1 gecikmeli kırılmış çapraz korelasyon matrisinin (i,j). elemanı (3.6)'daki gibidir. Burada $a_1, \dots, a_T$ T uzunluğundaki N boyutlu zaman serisi vektörüdür. α , $0 < \alpha < 1$ aralığında kırılma faktörüdür. α oranında kırılmış 1 gecikmeli örnek çapraz korelasyon matrisinin (NxN boyutlu) (i,j). elemanı şöyledir:¹⁵⁴

$$\frac{\sum_{t=l+1}^T (a_{i,t} - \bar{a}_i)(a_{j,t-l} - \bar{a}_j) L_t^\alpha L_{t-l}^\alpha}{[\sum_{t=l+1}^T (a_{i,t} - \bar{a}_i)^2 L_{t-l}^\alpha L_t^\alpha \sum_{t=l+1}^T (a_{j,t} - \bar{a}_j)^2 L_{t-l}^\alpha L_t^\alpha]^{1/2}} \quad (3.7)$$

işaret fonksiyonu ise,

$$L_t^\alpha = \begin{cases} (a_t - \bar{a})' \sum_t^{-1} (a_t - \bar{a}) \leq \chi_{N,1-\alpha}^2 & \text{ise } 1 \\ \text{ö.d} & \text{ise } 0 \end{cases}$$

şeklinde olur.

Çok Değişkenli Ljung-Box (Portmanteau) Testi:

Model belirlemesi aşamasında kullanılan bu istatistik ilk kez Box ve Pierce tarafından ARMA modeller için önerilmiştir. Hosking¹⁵⁵ bu istatistiği çok değişkenli seriler için genelleştirmiştir.

Test istatistiği Q(m), y_t vektör serilerinde otokorelasyon ve çapraz otokorelasyon katsayılarının anlamlı olup olmadığını test eder. Tek değişkenli Ljung-Box istatistiği çok değişkenli seriler için genelleştirildiğinde, hipotezler şöyle değişir¹⁵⁶:

$$\begin{aligned} H_0 : \rho_1 = \dots = \rho_m &= 0 \\ H_a : \rho_i &\neq 0 \end{aligned}$$

¹⁵⁴ Chan ve Wei'nin önerdiği, Wei'nin de kitabında detaylı olarak bahsettiği bu yaklaşımın detayları ilk bölümde anlatılmıştır.

¹⁵⁵ J.R. Hosking, "The Multivariate Portmanteau Statistic", **Journal of American Statistical Association**, 75, 1980, s. 602-609.

¹⁵⁶ Ruey S. Tsay, **Analysis of Financial Time Series**, USA, John Wiley & Sons, 2002, s.300-301.

$$Q_k(m) = T^2 \sum_{l=1}^m \frac{1}{T-l} \text{tr}(\hat{\Gamma}_l \hat{\Gamma}_0^{-1} \hat{\Gamma}_l \hat{\Gamma}_0^{-1}) \quad (3.8)$$

T örneklem büyüklüğünü, k ise y_t 'nin boyutunu gösterir. Sıfır hipotezi altında $Q_k(m)$ istatistiği $k^2 m$ serbestlik dereceli kıkare dağılır. Eğer, sıfır hipotezi reddedilirse seriler arasında çok değişkenli model kurulur ve gecikmeli ilişkiler değerlendirilir.

Ljung-Box istatistiği model belirleme aşamasında kullanılan önemli ölçütlerden biri olmakla beraber çeşitli yazarlar çalışmalarında bu ölçütün dayanıklı olmadığını ifade etmişlerdir. Li¹⁵⁷ çalışmada tek değişkenli seriler üzerinden hareketle tahmin edilen eşitlikten elde edilen artıkların kovaryanslarını dayanıklı hale getirerek Ljung-Box istatistiğini modifiye etmeyi önermiştir. Sonrasında Li ve Hui¹⁵⁸, aynı yaklaşımı çok değişkenli durum için genelleştirmişlerdir. Artıkların dayanıklı hale getirilmesiyle elde edilen tahminler RA (residual autocovariance) olarak tanımlanır. RA tahminleri, artıkların ve artıklara ait kovaryans matrisinin birer fonksiyonu olarak koşullu EÇO fonksiyonunu yazmak üzerine kuruludur. Burada sözü edilen artıklar aykırı olma derecelerine göre Huber ya da Tukey fonksiyonları kullanılarak ağırlıklandırılır.

3.1 ÇOK DEĞİŞKENLİ ZAMAN SERİLERİNDE AYKIRI GÖZLEM TÜRLERİ

Önceki bölümlerde sözü edilen dört tür aykırı gözlem aynı isim ve tanımlama ile modele göre güncellenerek ele alınacaktır. $Y = (Y_1', \dots, Y_n')'$ serisinin yerini k tane seriye karşılık gelen $Y_t = (Y_{1t}, \dots, Y_{kt})'$ alır.

$$Y_t = X_t + \alpha(B) \omega I_t^{(h)}$$

¹⁵⁷ W. K. Li, "A goodness-of-fit test in robust time series modeling", **Biometrika**, 75, 1988, s. 355-61.

¹⁵⁸ Detaylar için bkz ,W. K. Li, Y. V.Hui, "Robust Multiple Time Series Modelling", **Biometrika**, 76, 2, 1989, s. 309-315.

Burada X_t ARMA model yapısına uygun vektördür, $I_t^{(h)}$ ise $I_h^{(h)} = 1$ ve $t \neq h$ iken $I_t^{(h)} = 0$ değerlerini alan kukla değişkendir. $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_k)'$ aykırı gözlem büyüklüğünü gösterir. $\alpha(B)$ matris polinomudur ve yapısı aykırı gözlemlerin türlerini belirlemede öne çıkar.

Öte yandan çok değişkenli ARMA modeli gecikme parametreleri kullanılarak $\Phi(B)X_t = C + \theta(B)E_t$ şeklinde de ifade edilebilir. Buna göre, k boyutlu zaman serisi vektörü $X_t = (x_{1t}, \dots, x_{kt})'$ 'dır ve B gecikme işlemcisi $BX_t = X_{t-1}$ olmak üzere, $\Phi(B) = I - \Phi_1 B - \dots - \Phi_p B^p$ ve $\theta(B) = I - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$ $k \times k$ boyutlu matris polinomlara karşılık gelir. C katsayılar vektörü ve $E_t = (E_{1t}, \dots, E_{kt})'$ bağımsız ve özdeş dağılılan rastlantı vektörüdür. ARMA modelindeki otoregresif kısım, $\Pi(B)X_t = C_\Pi + E_t$ iken $\Pi(B) = \Theta(B)^{-1}\Phi(B) = I - \sum_{i=1}^{\infty} \Pi_i B^i$ ve $C_\Pi = \Theta(1)^{-1}C$ 'dır. Hareketli ortalama kısmının gösterimi ise; $X_t = C_\Psi + \psi(B)E_t$ şeklindedir. Burada, $\Phi(1)C_\Psi = C$ $\Phi(B)\Psi(B) = \Theta(B)$ ve $\psi(B) = I + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i B^i$ 'dir.

Buna göre türler ve tanımlamalar kısaca şöyledir:¹⁵⁹

- $\alpha(B) = \Psi(B)$ eşitliği söz konusu ise **çok değişkenli kademeli aykırı gözlem (MIO) türünün** varlığından söz edilir. Şok (innovation) kısmındaki aykırı gözlemdir ve zaman serisinin yapısındaki içsel değişim olarak isimlendirilir. Zaman serisi üzerindeki etkisi modele bağlı olmakla beraber birden fazla ardışık gözlemi etkiler.

- $\alpha(B) = I$ olması halinde **çok değişkenli anlık aykırı gözlem (MAO) türü** vardır. Ölçüm hatası gibi dışsal bir nedeni olabilir ve sadece bir gözlemi etkiler.

- $\alpha(B) = (I - B)^{-1}$ ise bu **çok değişkenli seviye kayması (MLS)** olarak isimlendirilir. Kalıcı bir etkisi vardır ve serilerin ortalamalarının düzeyini değiştirir.

¹⁵⁹ Pedro Galeano, Daniel Pena, Ruey S. Tsay, **a.g.e.**, s. 655.

- $\alpha(B) = (I - \delta B)I$ iken ($0 < \delta < 1$), **çok değişkenli geçici değişim (MTC)**

şeklinde bilinir. Seriler üzerinde başlangıçta bir etkisi vardır ve bu etki sabit oranda azalarak devam eder.

3.2 ÇOK DEĞİŞKENLİ ZAMAN SERİLERİNDE AYKIRI GÖZLEMLERİN TEŞHİS SÜRECİ

Çok değişkenli zaman serilerinde aykırı gözlemlerin teşhisi için çeşitli çalışmalar olmakla beraber bunlar arasında en fazla öne çıkan Tsay, Pena ve Pankratz¹⁶⁰ ile Galeano, Pena ve Tsay¹⁶¹,ın çalışmalarıdır. Bunlardan ilki, ilk bölümde anlatılan tek değişkenli zaman serileri için sözü edilen yönteme benzerdir. Tek değişkenli zaman serilerini çok değişkenli zaman serilerinde kullanılabilecek şekilde, tekli ve birleşik olabilirlik oran istatistiklerine bağlı olarak geliştirmişlerdir. Buna göre, öncelikle veride aykırı gözlem olmadığı varsayılarak seriler için çok değişkenli ARIMA modeli kurulur, tek değişkenli duruma benzer şekilde tekrarlı bir süreçle çok değişkenli aykırı gözlemler belirlenir. Diğer yaklaşımda ise, ilk adımda uygun başlangıç modeli belirlenmez. Zaman serisi vektörlerine tek değişkenli metoda dayalı izdüşüm teknikleri uygulanır, çok değişkenli zaman serisinin basıklığını maksimize eden lineer kombinasyonları bulunur ve sonrasında aykırı gözlemlerin belirlenmesinde tek değişkenli metodlar kullanır. Buna göre izdüşümü alınmış hemen hemen her seride en az bir tane tek değişkenli aykırı gözlemin bulunduğu varsayılır ve bunlar değerlendirilerek çoklu olanlara ulaşılır. Bu iki yaklaşıma ait süreçler izleyen alt bölümde detaylı olarak ele alınmıştır ve literatürde atıfı çok olan bu yaklaşımların açıklanması esnasında, büyük ölçüde yazarların notasyon ve ifadelerine bağlı kalınmıştır.

Ayrıca aykırı gözlemlerin belirlenmesi konusunda Baragona ve Battaglia¹⁶²'nin **Bağımsız Bileşenler Analizinin (ICA)** kullanılmasını önerdiği çalışmaları mevcuttur. Önerilen ICA analizini içeren çeşitli yaklaşımlar olmakla beraber, bu konu kapsama alınmamıştır.

¹⁶⁰ R. S. Tsay, D. Pena, A. E. Pankratz, "Outliers in Multivariate Time Series", **Biometrika**, 87, 2000, s. 789 – 804.

¹⁶¹ Pedro Galeano, Daniel Pena, Ruey S. Tsay, **a.g.e.**, s. 654-669.

¹⁶² Roberto Baragona, Francesco Battaglia, "Outliers Detection In Multivariate Time Series by Independent Component Analysis", **Neural Computation**, 19 , 7, 2007, s. 1962-1984.

3.2.1 İlk Yaklaşım (Tsay, Pena ve Pankartz Metodu-2000)

Yukarıda da belirtildiği gibi öncelikle hiç aykırı gözlem olmadığı varsayılarak çok değişkenli ARIMA modeli kurulur. Yazarların kullandıkları notasyona bağlı olarak; $\hat{a}_t$ tahmini artıkları ve $\hat{\Pi}_t$ 'de otoregresif gösterimle tahmin edilen katsayıları göstermek üzere, herbir aykırı gözlem türünün tahmin süreci şöyle özetlenebilir:

$\hat{a}_h$ 'ın h zamanında aykırı gözlem hakkındaki tüm bilgiyi içerdiği varsayılır ve aykırı gözlemin büyüklüğünün tahmininde kullanılır. Örneğin MAO türü için, aykırı gözlemin büyüklüğü $\hat{\omega}_{A,h} = \hat{a}_h$ ile gösterilir. Prosedür aykırı gözlem türlerine göre değişmezken yaklaşımın tanıtıldığı çalışmada¹⁶³ yazarlar süreci MAO üzerinden tanımlamışlardır. Bu durumda,

$$\hat{a}_t = (I - \sum_{i=1}^{\infty} \hat{\Pi}_i B^i) I^{(h)} \omega + \varepsilon_t = (I^{(h)} - \sum_{i=1}^{\infty} \hat{\Pi}_i I_{t-i}^{(h)}) \omega + \varepsilon_t \quad (3.9)$$

elde edilir. Burada $\varepsilon_t \sim N(0, \Sigma)$ iken ω tahmincisi

$$\hat{\omega}_{A,h} = -(\sum_{i=0}^{n-h} \hat{\Pi}_i' \Sigma^{-1} \hat{\Pi}_i)^{-1} \sum_{i=0}^{n-h} \hat{\Pi}_i' \Sigma^{-1} \hat{a}_{h+i} \text{ 'dir.}$$

Bu ifadenin tahmini çok değişkenli SUR model tahmini gibi düşünülür. Tahmincinin kovaryans matrisi;

$$\Sigma_{A,h} = (\sum_{i=0}^{n-h} \hat{\Pi}_i' \Sigma^{-1} \hat{\Pi}_i)^{-1} \text{ olur.} \quad (3.10)$$

h zamanında çok değişkenli aykırı gözlemin testini yapmak için kullanılan hipotezler şöyledir:

¹⁶³ R. S. Tsay, D. Pena, A. E. Pankratz, **a.g.e.**, s.781.

$$H_0 : \omega = 0$$

$$H_A : \omega \neq 0$$

Süreçte kullanılan iki test istatistiği vardır: Bunlardan ilki $J_{i,h} = \hat{\omega}'_{i,h} \Sigma_{i,h}^{-1} \hat{\omega}_{i,h}$ 'dir.

Sabit h için modelin bilindiği varsayımıyla $J_{i,h}$ istatistiği k sd.'li kıkare dağılır.

İkinci test istatistiği ise maksimum z istatistiğidir:

$$C_{i,h} = \max_{1 \leq j \leq k} |\hat{\omega}_{j,i,h}| / \sqrt{\sigma_{j,i,h}}$$

Burada $\hat{\omega}_{j,i,h}$ ve $\sigma_{j,i,h}$, sırayla $\hat{\omega}_{i,h}$ 'ın j. elemanı ve $\Sigma_{i,h}$ 'ın (i, j). elemanıdır. Test istatistikleri genel halleriyle şöyle tanımlanır:

$$J_{maks}(i, h_i) = \max_h J_{i,h}, \quad C_{maks}(i, h_i^*) = \max_h C_{i,h} \quad (i=I, A, L, T) \quad (3.11)$$

Yukarıdaki h_i notasyonu, $J_{i,h}$ istatistiğinin maksimum değeri gerçekleştiğindeki değeridir ve h_i^* ise $C_{i,h}$ 'nin maksimumu gerçekleştiğindeki değerine karşılık gelir.

Tek değişkenli durumda olduğu gibi eğer $J_{maks}(i, h_0)$ h_0 zamanında anlamlı ise h_0 zamanında i türü (i=I,A,L,T) çoklu aykırı gözlem belirlenmiş olur. Eğer tek bir $J_{maks}(i, h_0)$ istatistiği yerine çok sayıda anlamlı istatistik olursa en küçük olasılık değerine sahip olan aykırı gözlem türü belirlenir. Aykırı gözlem belirlendikten sonra zaman serisinden etkisi uzaklaştırılır. Düzeltilmiş seri, yeni bir veri gibi ele alınır ve prosedür tekrarlanır. Hiç anlamlı olmayan aykırı gözlemle karşılaşılana kadar devam edilir. Sonrasında model parametreleri ile teşhis edilen aykırı gözlemlerin tahmini yapılır. Eğer bazı aykırı gözlem parametreleri bu birlikte tahminle anlamlı bulunamıyorsa, bunlar silinir. Bu tahmin süreci tüm teşhis edilen aykırı gözlemler verilen düzeyde anlamlı olana kadar devam eder.¹⁶⁴

¹⁶⁴ A.e, s. 781-784.

3.2.2 İkinci Yaklaşım (Galeano, Pena ve Tsay Metodu-2006)

İzdüşüm tekniklerinin kullanıldığı bu yaklaşımı dikkate alarak yazarlar yaptıkları çeşitli simülasyon çalışmaları sonrasında, aykırı gözlemleri elde etmek için orijinal serilere çok değişkenli istatistikleri uygulamaktansa uygun izdüşümlerle tek değişkenli istatistikleri uygulamanın daha iyi sonuçlar verdiği sonucuna varmışlardır.

Algoritma en genel haliyle dört aşamada özetlenir. Buna göre;

- Maksimum ayırımın izdüşümleri elde edilir
- İzdüşümleri alınmış tek değişkenli serilerde aykırı gözlemler araştırılır.
- Tek değişkenli analizde elde edilen tüm aykırı gözlemler çok değişkenli çatısı altında incelenir ve etkileri ortadan kaldırılır.
- Bu sürece hiç aykırı gözlem kalmayana kadar devam edilir.

Teşhis aşamasında öncelikle LS belirlenir sonra IO, AO türü aykırı gözlemler ve TC noktaları bulunur. Son olarak, temizlenen zaman serisi için model oluşturulur.

Yazarlar, ARMA serilerinin projeksiyonlarını elde ederken Lütkepohl (1993)'un çalışmasında belirttiği yaklaşımdan faydalanmışlardır. Süreç şöyle açıklanabilir¹⁶⁵:

X_t ve Y_t k boyutlu zaman serilerini göstermek üzere, bunlardan Y_t , $Y_t = X_t + \alpha(B)wI_t^{(h)}$ gözlenen, aykırı gözlem bulunduran vektör serisi olarak tanımlanmıştır. VARMA modeli,

$\Phi(B)X_t = C + \Theta(B)E_t$ şeklinde tanımlanmak üzere,

$BX_t = X_{t-1}$ gecikme işlemcisi olsun,

$$\Phi(B) = I - \Phi_1 B - \dots - \Phi_p B^p$$

¹⁶⁵ Pedro Galeano, Daniel Pena, Ruey S. Tsay, **a.g.e.**, s. 654-655.

$$\Theta(B) = I - \Theta_1 B - \dots - \Theta_q B^q \quad (3.12)$$

şeklinde tanımlansın. Burada C, k boyutlu sabitler vektörünü ve E ise bağımsız ve özdeş olarak normal dağılılan rastlantısal vektörleri temsil eder.

Yazarlar VARMA modelinin bileşenlerinin lineer kombinasyonlarının birer ARMA modeli olarak yazılabileceğini belirtmişlerdir. Buna göre, eğer X_t vektörü VARMA(p,q) sürecine uygunsa, $x_t = v'X_t$ şeklinde tanımlanmak üzere, x_t dereceleri $p^* \leq kp$ ve $q^* \leq (k-1)p$ olan ARMA (p^*, q^*) modeli takip eder. x_t modelinin genel hali şöyle yazılır:

$$\phi(B)x_t = c + \theta(B)e_t \quad (3.13)$$

Bu modelde, $\phi(B) = |\Phi(B)|$, $c = v'\Phi(1)^*C$ ve $v'\Omega(B)E_t = \theta(B)e_t$ 'dir. $\Phi(B)^*$ matrisi $\Phi(B)$ matrisinin ek matrisidir.

Gözlenen Y_t serisi bir aykırı gözlemden etkilenince $y_t = v'Y_t$ projeksiyonu alınan seri de $y_t = x_t + v'\alpha(B)\omega I_t^{(h)}$ şeklinde aykırı gözlemin varlığını doğrular. Eğer Y_t serisinde MAO varsa, projeksiyonu alınmış seri $y_t = x_t + \beta I_t^{(h)}$, t=h zamanında $v'\omega \neq 0$ sağlayan $\beta = v'\omega$ büyüklüğünde AO 'ya sahiptir. Benzer şekilde ω büyüklüğünde çok değişkenli LS'ye sahip vektör serisinin projeksiyonu t=h zamanında $\beta = v'\omega$ büyüklüğünde LS'ye sahiptir. Benzeri sonuç TC için de elde edilir. Bu üç türdeki aykırı gözlem için aşağıdaki hipotezler geçerli olur.

$$H_0 : \omega = 0 \quad H_0^* : \beta = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$H_A : \omega \neq 0 \quad H_A^* : \beta \neq 0$$

Çok değişkenli IO'nun çok daha karmaşık bir etkisi vardır.¹⁶⁶

¹⁶⁶ A.e, s.655.

Y_t serisi ARMA modelinde elde edilen MAO, MLS ya da MTC $t=h$ noktasında eklendiğinde V , $k \times k$ boyutlu matris ilk kolonu ve sonraki $k-1$ birim vektör kolonu w 'ya ortogonaldır. Çok değişkenli seriler $V'Y_t$ $t=h$ noktasında $(\|\omega\|, 0, \dots, 0)$ büyüklüğünde aykırı gözlemden etkilenir. Aykırı gözlem sadece ilk bileşeni etkiler. Çünkü, çok değişkenli test istatistiği $J_{i,h}$ lineer transformasyonlar karşısında değişmez, değeri hem Y_t hem de $V'Y_t$ için aynıdır. Dolayısıyla, aykırı gözlemle ilgili olan tüm bilgi ilk bileşen içindir, $V'Y_t$, ki bu da zaman serisi vektörünün aykırı gözlemle aynı yönlü projeksiyonudur. $V'Y_t$ 'nin kalan bileşenleri aykırı gözlem teşhisi için ilgisizdir.¹⁶⁷

Yazarlar izdüşüm metodunun kullanılmasıyla, düşük boyutlu projeksiyonların oluşturduğu uzayda yüksek boyutlu veriye ait özellikleri araştırırken projeksiyon indeksi adı verilen amaç fonksiyonunu kullanırlar. Buna göre, projeksiyon uygulaması esnasında yön önemlidir ve de yönün belirlenmesinde serilerin basıklığı öne çıkar.

Sürecin tek değişkenli aykırı gözlemlerin aranması aşamasında, literatürde benimsenmiş olan LR testi yerine yazarlar farklı bir yaklaşım önermişlerdir. Bunun nedeni olarak, Sanchez ve Pena'nın çalışmalarında belirttiği aynı kritik değerin kullanımının aykırı gözlem türlerinin yanlış belirlenmesine (LS'nin IO gibi algılanması) yol açacağı vurgusunu gösterirler ve Carnero' nun önerdiği CUSUM testini kullanırlar. Önce LS'ler tespit edilir. LS'nin etkisinin ortadan kaldırılmasıyla aynı algoritma bu sefer AO, TC ve IO noktalarını belirlemede kullanılır. Sonrasında teşhis edilen aykırı gözlemlerle model parametrelerinin tahmini birlikte yapılır. Eğer verilen düzeyde aykırı gözlemler anlamlı değilse, en az anlamlı olan etki ortadan kaldırılır ve hepsi anlamlı olana kadar tahmine devam edilir.¹⁶⁸

¹⁶⁷ A.e., s.656.

¹⁶⁸ Ayrıntılar için bkz., a.e., s.663.

3.3 ÇOK DEĞİŞKENLİ ZAMAN SERİLERİNDE AYKIRI GÖZLEM ETKİLERİ

Aykırı gözlem etkisi tek değişkenli zaman serilerinde olduğu gibi aykırı gözlem büyüklüğüne, modelin yapısına bağlı olmakla beraber, çok değişkenli zaman serilerinde modelin dinamik yapısı ile aykırı gözlemler arasındaki etkileşime de bağlıdır. Çok değişkenli zaman serilerinde aykırı gözlem etkisini konu alan çalışmaların sayısı oldukça sınırlıdır. Ancak Tsay, Pena ve Pankratz çeşitli örnekler üzerinde etki konusunu ele almışlardır. Örnekler üzerinden yola çıkarak vurguladıkları bu sonuçların bir kısmı şöyledir:¹⁶⁹

- Çoklu IO türü aykırı gözlem tek değişkenli durumdan farklı olarak AO'ya benzer şekilde sadece tek bir gözlemi etkileyebilir.

- Tek değişkenli durumda seri üzerindeki tek bir aykırı gözlemin etkisi model yapısına, modelden elde edilen tahmini hatalara ve aykırı gözlem büyüklüğüne bağlı iken, çok değişkenli durumda bunlar arasındaki etkileşim de aykırı gözlem etkisini belirleyen bir faktör olarak değerlendirilir.

- Eğer LS etkisi sözkonusu ise, aykırı gözlemin büyüklüğünün katsayılarla ilişkisine bağlı olarak, ya tek değişkenli durumda olduğu gibi tüm gözlemler etkilenir ve birim kök etkisinden söz edilebilir ya da tek değişkenli durumdan farklı olarak birim kök etkisinden söz edilemez.

3.4 ÇOK DEĞİŞKENLİ ZAMAN SERİLERİNE DAYANIKLI YAKLAŞIM

¹⁶⁹ Tsay, Pena, Pankartz, **a.g.e.**, s. 791-793.

Literatürde çok değişkenli dayanıklı istatistikler henüz çok yenidir. Bu açıdan girişte de belirtildiği gibi sadece, dayanıklı VAR, dayanıklı MGARCH (BEKK) ve dayanıklı temel bileşenler analizine yer verilecektir.

3.4.1 Vektör Otoregresif Modeller ve Dayanıklı Tahmini

Tek değişkenli otoregresif modellerin çok değişkenli şekilde ifade edilmesiyle vektör otoregresif olarak bilinen ve kısa gösterimi VAR şeklinde olan modellere ulaşılır. VAR modelinin gelişim sürecinde Sims'ın 1980 yılındaki çalışmasının yeri önemlidir.

Bustos ve Yohai'nin bu bölümün başında da tanımlanan RA tahminlerine dayalı olarak geliştirdiği ARMA model yapısının tahmin sürecini Ben, Martinez ve Yohai çalışmalarında¹⁷⁰ VARMA modellerine uygulamışlardır. Yazarlar bu çalışmada, RA tahmincisi için çeşitli dönüşümler karşısında özelliklerini de yitirmeyecek şekilde de modifiye etmişler ve bu yeni tahminciyle Ljung-Box istatistiğinin modifiye edilebileceğinden söz etmişlerdir.¹⁷¹

y_t , p boyutlu durağan zaman serilerine karşılık gelen zaman serisi vektörünü göstermek üzere vektör otoregresif model için alternatif gösterim şöyle yazılabilir:¹⁷²

$$y_t = B_0' + B_1'y_{t-1} + \dots + B_k'y_{t-k} + \varepsilon_t$$

Denklemden, B_0' başlangıç parametresini ve $B_1', \dots, B_k'$ eğim parametrelerini göstermektedir. ε_t , p boyutlu hata vektörüdür, bağımsız ve özdeş olarak dağılır.

VAR modeli çok değişkenli regresyon modeli şeklinde düşünülerek EKK ile çözüm sağlanabilir. Yukarıdaki ifade matrisel formda yazılmak üzere,¹⁷³

¹⁷⁰ G. Ben, M. Martinez, E.J., V.J.Yohai, "Robust Estimation In Vector Autoregressive Moving Average Models", **Journal of Time Series Analysis**, 20, 1999, s. 381–399.

¹⁷¹ Dayanıklı VARMA modelinin tahmin sürecinin detaylı anlatımı için bkz., a.e. s. 390-391.

¹⁷² Christophe Croux, Kristel Joossens, "Robust Estimation of the Vector Autoregressive Model by a Least Trimmed Squares procedure", **COMPSTAT 2008, Physica-Verlag HD**, 2008, s. 489.

$$y_t = B'x_t + \varepsilon_t$$

$$t = k+1, \dots, T \text{ ve } x_t = (1, y_{t-1}', \dots, y_{t-k}')'$$

$B = (B_0', B_1', \dots, B_k')'$ tüm bilinmeyen regresyon katsayılarını içerir. Bağımsız ve bağımlı değişkenlere ait matrislerin gösterimi sırayla şöyledir:

$$X = (x_{k+1}, \dots, x_T)', Y = (y_{k+1}, \dots, y_T)'$$

EKK tahmininin matrisel gösterimi şöyledir:

$$\hat{B}_{EKK} = (X'X)^{-1}X'Y \quad (3.14)$$

varyans-kovaryans matrisi ise,

$$\hat{\Sigma}_{EKK} = \frac{1}{n-p} (Y - X\hat{B}_{EKK})'(Y - X\hat{B}_{EKK}) \text{ 'dır.} \quad (3.15)$$

EKK ile VAR modeli tahmin sürecinde, seride aykırı gözlemlerin varlığı halinde yanıltıcı sonuçlara ulaşılması olasıdır. Ek-1 kısmında da söz edildiği gibi, bu tür durumlarda regresyon analizinde EKK yerine sıklıkla başvuru teknikler LMS ve LTS'dir.

VAR modelinin parametre tahminleri için Croux ve Joossens çalışmalarında Çok Değişkenli En Küçük Kırpılmış Kareler (**MLTS**) tahmincisi ile EKK tahmincisinin yerini değiştirmişlerdir. **MLTS** tahmincisi, EKK tahmincisinden elde edilen artıklar üzerinden bulunan kovaryans matrisinin determinantını minimum yapan h tane gözlemden oluşan alt kümelerden faydalanır ve bu altkümeler **MCD**¹⁷⁴ tahmincisi ile elde edilir.

¹⁷³ A.e., s. 490.

¹⁷⁴ MCD tahmincisi için bkz EK 1

Süreç kısaca şöyle özetlenebilir:¹⁷⁵

MLTS tahmini, artıkların Mahalanobis uzaklıklarının¹⁷⁶ kareleri üzerinden en küçük h tanesinin toplamını minimize eden B vektörüne karşılık gelir.

$$\hat{B}_{MLTS} = \arg \min_{B, \Sigma: |\Sigma|=1} \sum_{s=1}^h d_{s:n}^2(B, \Sigma) \quad (3.16)$$

Burada $d_{1:n}(B, \Sigma) \leq \dots \leq d_{n:n}(B, \Sigma)$ ifadesi artıkların Mahalanobis uzaklıklarının dizilimini gösterir, Mahalanobis uzaklıkları ise şöyle hesaplanır:

$$d_s(B, \Sigma) = ((y_t - B'x_t)' \Sigma^{-1} (y_t - B'x_t))^{1/2} \quad (3.17)$$

Ağırlıklandırma işlemiyle MLTS tahmincisinin etkinliğini yükseltilir, bu yeni ağırlıklandırılan tahminci RMLTS olarak bilinir:

$$\hat{B}_{RMLTS} = \hat{B}_{OLS}(J) \text{ ve } \hat{\Sigma}_{RMLTS} = c_{\delta} \hat{\Sigma}_{OLS}(J)$$

$$J = \{j \in \{1, \dots, n\} \mid d_j^2(\hat{B}_{MLTS}, \hat{\Sigma}_{MLTS}) \leq q_{\delta}\} \text{ ve } q_{\delta} = \chi_{q, 1-q}^2$$

Bu sözü edilen süreç boyunca Mahalanobis uzaklığı kritik değerden büyük olan gözlemler aykırı olarak kabul edilebilir. Önerilen kritik değerler şöyledir: $\delta = 0.01$ olarak alınır, c düzeltme faktörünü belirleyen orandır. α ise $\alpha = \%25$ olarak belirlenen, $\alpha \approx 1 - h/n$ yaklaşık eşitliğini sağlayan kırılma oranıdır. c_{α} , Σ 'nın tutarlı tahminini elde etmek için kullanılan düzeltme faktörüdür.¹⁷⁷ Yazarlar çalışmalarında, çok değişkenli normal dağılım söz konusuken $c_{\alpha} = (1 - \alpha) / F_{\chi_{p+2}^2}(q_{\alpha})$ şeklinde gösterilebileceğinin Croux ve Haesbroeck tarafından ispatlandığını belirtmişlerdir.

MLTS tahminlerine ait varyans kovaryans matrisi ise şöyle gösterilir:

¹⁷⁵ Jose Agullo, Christophe Croux, Stefan Van Aelst, "The multivariate least-trimmed squares estimator", **Journal of Multivariate Analysis**, Vol. 99, 2008, s.314.

¹⁷⁶ Bkz Ek-1.

¹⁷⁷ Yazarlar çalışmalarında bu oranları Croux ve Haesbroeck'e dayandırdıklarını ifade etmişlerdir.

$$\hat{\Sigma}_{MLTS} = \frac{c_\delta}{m(k) - p} \sum_{t \in J(k)} \hat{\varepsilon}_t(k) \hat{\varepsilon}_t'(k) \quad (3.18)$$

Burada $\hat{\varepsilon}_t(k)$, VAR(k) modelinden elde edilen artıklardır ve m(k), J(k)'daki elemanların sayısını göstermektedir.

MLTS tahmin sürecinin açıklanması Agullo, Croux, Van Aelst'in¹⁷⁸ çalışmasından hareketle EKK tahmincisi üzerinden daha detaylı olarak şu şekilde de özetlenebilir:

$Z = \{(x_t, y_t), t = k+1, \dots, T\}$ veri kümesini göstermek üzere,

ve $H = \{H \subset \{k+1, \dots, T\} \mid \text{num}H = h\}$, h büyüklüğündeki alt kümelerin toplamına karşılık gelmek üzere, $H \in H$ altkümesinin gözlemleri üzerinden elde edilen klasik EKK tahmincisi $\hat{B}_{EKK}(H)$ yukarıdaki matrisel gösterime uygun olarak şöyle tanımlanır:

$$\hat{B}_{EKK}(H) = (X_H' X_H)^{-1} X_H' Y_H \quad (3.19)$$

X_H ve Y_H , sırayla X ve Y'nin satırlarını içeren alt matrislerdir. Bu altkümeden hesaplanan varyans kovaryans matrisi şu şekilde yazılabilir:

$$\hat{\Sigma}_{EKK}(H) = \frac{1}{h-p} (Y_H - X_H \hat{B}_{EKK}(H))' (Y_H - X_H \hat{B}_{EKK}(H)) \quad (3.20)$$

Yukarıda kısaca özetlenen MLTS tahmin süreci ise elde edilen bu matrislerden yola çıkılarak şöyle bulunur:

$$\hat{B}_{MLTS}(Z) = \hat{B}_{EKK}(\hat{H}), \quad \hat{H} = \arg \min_{H \in H} \det \hat{\Sigma}_{EKK}(H) \quad (3.21)$$

varyans kovaryans matrisi ise şöyledir:

$$\hat{\Sigma}_{MLTS}(H) = c_\alpha \hat{\Sigma}_{EKK}(\hat{H})$$

¹⁷⁸ A.e., s.316.

Croux çalışmasında VAR modelinin derecesinin dayanıklı yaklaşımla belirlenmesi konusuna da değinmiştir. Bilindiği gibi model belirleme ve seçim işlemi çeşitli ölçütler doğrultusunda yapılır. Örneğin modelin yeterliliğini belirlemede ACF ve PACF fonksiyonlarından faydalanılırken, model seçiminde ise artıklara dayalı AIC, BIC, SBC gibi ölçütler kullanılır.

Dayanıklı yaklaşımla VAR modelinin derecesini belirlemede benimsenen genel yaklaşım değişen k değerlerini gözönüne alıp bilgi kriter(ler)ini hesaplayarak, minimum değeri vereni belirlemektir. Bilgi kriterlerinin birçoğu VAR(k) modelinin olabilirlik fonksiyonunun logaritması ile hesaplanır. Model seçiminde kullanılan bilgi kriterinin genel formu şu şekilde ifade edilebilir:

$$\frac{-2}{n} l_k + h(n) \frac{(kp+1)p}{n} \quad (3.22)$$

Eşitlikte $(kp+1)$ bilinmeyen parametrelerin sayısını gösterir, l_k ise olabilirlik fonksiyonunun logaritmasıdır. Bilgi kriteri $h(n)$ 'in formlarına göre isimlendirilir: $h(n)=2$ ise Akaike bilgi kriteri, $h(n)=2\log(\log(n))$ ise Hannan Quin kriteri ve $h(n)=\log(n)$ ise Schwarz kriterini gösterir.

(3.22) ifadesinde yer alan l_k şöyle açık yazılabilir:

$$l_k = -\frac{n}{2} \log \det \Sigma - \frac{np}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=k+1}^T \varepsilon_t' \Sigma^{-1} \varepsilon_t \quad (3.23)$$

Yazarlar, aykırı gözlemlerin bu noktada model seçim kriterini etkilemelerini önlemek için Σ RMLTS 'nin kullanılmasını önerirler.¹⁷⁹

Aynı çalışmada VAR modellerinin çok değişkenli regresyon modeli olarak ele alınmasının çeşitli dezavantajlarına değinilmiştir. Konu dahilinde bu dezavantajlardan en önemlisi, orjinal serideki ε oranında aykırı gözlem bulunması halinde modelde açıklayıcı değişken olarak yer alan k tane gecikmeli serinin $k\varepsilon$ tane aykırı gözlem üretebilmesidir. Bu yüzden, eğer dayanıklı regresyon tahmincisinin kırılma noktası $1/2$ ise, VAR(k) modelinin tahmininde bu $1/(2k)$ ' ya kadar

¹⁷⁹ A.e., s.322.

düşecektir. Bu problemi çözmek için dayanıklı filtreleme yöntemleri önerilmiştir.

Yazarlar literatürde çeşitli filtreleme tekniklerinin bulunduğunu ama bunların tek değişkenli seriler için geçerli olduğunu belirtmişler ve çok değişkenli zaman serileri için henüz bu teknikler üzerine çok fazla çalışmanın olmadığını vurgulamışlardır.

Ayrıca Reber, Terpstra ve Chen¹⁸⁰, VAR modelini ağırlıklandırılmış LAD (L1) tahmincisini kullanarak tahmin etmişlerdir. Çalışmalarında veride AO ve IO türü aykırı gözlemlerin bulunması halinde LAD tahmincisinin davranışını izlemişler ve sonuç olarak parametre tahminlerinin asimptotik olarak normal dağıldığını, LAD tahmincisinin EKK tahmincisine göre çok daha etkin sonuçlar verdiğini görmüşlerdir.

Bunun yanı sıra Nielsen¹⁸¹ çalışmasında VAR yapısında sonlu örneklem üzerinde çalışıldığında uygulanacak kointegrasyon analizinde, aykırı gözlemlerin yıkıcı etkisinin önemli olduğunu belirtmiştir. Yazar, simülasyon çalışmaları sonrasında MIO etkisinin gözardı edilmesiyle VAR sürecinin kointegrasyonuna ait rank değeri üzerinde küçük bir etkisinin olabileceğini ama MAO varlığında Vogelsang'ın çalışmasında belirttiğine uygun olarak yanlı sonuçlara neden olabildiğini belirtmiştir. Yazar aynı çalışmada VAR modellere AO ve IO etkisini kukla değişkenleri ekleyerek yansıtmıştır.

3.4.2 Çok Değişkenli GARCH Modelleri ve Dayanıklı Tahmin

Finans üzerine yapılan çeşitli ampirik çalışmalar finansal pazarların birbirleriyle yakın ilişki içinde olabildiğine ve özellikle volatilitenin yüksek olduğu dönemlerde pazarların volatilitelerinin birlikte hareket ettiğine işaret eder. Ayrıca yine literatürdeki birçok finansal çalışmada getiri serilerinin korelasyonlarının zamana karşı değişir olabileceği kabul görmüştür ve finansal getirilerin koşullu

¹⁸⁰ John C. Reber, Jeff T. Terpstra, Xianzhe Chen, “Weighted L_1 -estimates for a VAR(p) Time Series Model”, *Journal of Nonparametric Statistics*, 20, 5, 2008, s. 395–411.

¹⁸¹ Heino Bohn Nielsen, “Cointegration Analysis in the Presence of Outliers”, *Econometrics Journal*, 7, 1, 2004, s. 249-271

kovaryans matrisinin tahmininde bu özelliği dikkate almanın daha iyi sonuçlar vereceği vurgulanmıştır. Bunun için koşullu korelasyon matrisini, zaman serilerinin geçmişin ölçülebilir bir fonksiyonu olarak yazma fikri ortaya atılmıştır ki bu fikir araştırmacıyı çok değişkenli GARCH modellerine götürür. Çok değişkenli finansal zaman serileri üzerine yapılan ampirik çalışmalarda çok değişkenli GARCH modellerini kurmak oldukça genel bir yaklaşım haline gelmiştir. Harris ve Sollis¹⁸² çok değişkenli serilerin analiz edilmesinde tek değişkenli ARCH-GARCH modellerinin kullanılmasının değişkenlerin koşullu varyanslarının nedenselliğini görmezden gelebileceğini ve seriler arasındaki kovaryansı doğru yansıtmayabileceğinden dolayı zaman serilerinin volatilitesi arasındaki etkileşimi modellemek için çok değişkenli GARCH (MGARCH) modellerinin kullanılması gerektiğini açıklamıştır. MGARCH modelleri üzerine ilk çalışma Engle, Granger ve Kraft'a aittir. Modellerin teorisinin gelişimi özellikle Baba, Engle, Kraft (1991) ile Engle ve Kroner (1995)'in çalışmalarında sağlanmıştır.

Bollerslev, Engle ve Wooldridge tek değişkenli ARCH-GARCH modellerini çok değişkenli modellere genişleterek VEC parametrisasyonu ile çözüm üretmişlerdir. Daha sonra Baba, Engle, Kraft ve Kroner'ın ortak çalışması ile şekillenen ve Engle ve Kroner'ın son halini verdiği-koşullu varyans matrisinin pozitif tanımlı olmasının garantilendiği- BEKK parametrisasyonu geliştirilmiştir. Bollerslev, koşullu korelasyonların sabit olduğu durumlarda, tahmin edilecek parametre sayısının azaldığı ve tahmin sürecinin sadeleştiği CCC (constant conditional correlations) parametrisasyonunu; Tse-Tsui ve Engle koşullu korelasyonların dinamik olduğu durumlar için ise DCC (dynamic conditional correlations) parametrisasyonlarını belirlemişlerdir. İlk iki yöntemde koşullu varyansların yanı sıra koşullu kovaryanslar, diğer iki yöntemde ise koşullu varyanslarla birlikte koşullu korelasyonlar da tanımlanmaktadır. MGARCH modellerinde koşullu kovaryans ve koşullu korelasyonların tahmini için önerilen VEC ve BEKK gibi koşullu kovaryansları modelleyen parametrisasyonlarla CCC ve DCC gibi koşullu korelasyonları modelleyen parametrisasyonların hepsinin ortalama

¹⁸² Richard Harris, Robert Sollis, **Applied Time Series Modelling and Forecasting**, USA, Wiley, 2003, s.221.

eşitlikleri ve koşullu varyansları aynı olmakla beraber, bu koşullu varyansların tahmin süreci için önerilen kısıtlar farklıdır. Yukarıda sözü edilen MGARCH modellerinin gelişim sürecinde VEC önde gelir, sonrasında önerilen diğer parametrisasyonlarla tahmin edilecek parametre sayısında azalma sağlanmıştır.

MGARCH modellerinin parametre tahmini EÇÖ ile olabilirlik fonksiyonunun maksimizasyonuna dayanır. Bu noktada kullanılan tahmin yönteminin EÇÖ'ya dayalı olması, EÇÖ'nun aykırı gözlemler karşısındaki duyarlılığı nedeniyle dayanıklı tahmin yöntemlerinin kullanımını gerekli kılmaktadır. Fakat literatürde henüz sadece BEKK için bir dayanıklı yaklaşım önerilmiştir. Bu yüzden çalışmada BEKK ve onun gelişimi dikkate alınacaktır¹⁸³.

N değişkenli bir GARCH model en genel şekliyle,

$$y_t = \mu + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t | \Psi_{t-1} \sim N(0, H_t)$$

olarak ifade edilir. Burada y_t Nx1 boyutlu açıklanan değişkenler vektörü, μ Nx1 boyutlu ortalama vektörü, ε_t Nx1 boyutlu şoklar vektörüdür.

3.4.2.1 BEKK Parametrizasyonu

Engle ve Kroner 1995 yılındaki çalışmalarında koşullu varyans kovaryans matrisinin, şokların ve volatilitenin çapraz çarpımlarına ve karelerine dayalı olan BEKK analizini önermişlerdir.

$$H_{t,\theta} = C'C + A'H_{t-1,\theta}^{1/2}\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-1}'H_{t-1,\theta}^{1/2}A + B'H_{t-1,\theta}B \quad (3.24)$$

¹⁸³Dayanıklı DCC'ye ilişkin çeşitli 2009 yılı sempozyumlarında sunulan bildirler olmakla beraber henüz çalışma aşamasında olduğundan burada yer verilmemiştir.

Burada C matrisi üst üçgenseldir. Model optimizasyon sürecinde, koşullu varyans kovaryans matrisinin pozitif olmasını sağlayacak koşullara sahiptir. İki değişken olması halinde, BEKK modeli açık olarak şöyle yazılabilir¹⁸⁴:

$$\begin{bmatrix} H_{11t} & H_{12t} \\ H_{21t} & H_{22t} \end{bmatrix} = C'C + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\varepsilon_{1t-1}^2) & (\varepsilon_{1t-1} \varepsilon_{2t-1}) \\ (\varepsilon_{2t-1} \varepsilon_{1t-1}) & (\varepsilon_{2t-1}^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11t-1} & H_{12t-1} \\ H_{21t-1} & H_{22t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

H_t herbir değişkenin gecikmeli volatilité değerini gösterir, ε_t şoka karşılık gelir. c_{ij} sabitleri nxn boyutundaki simetrik matris C'nin elemanlarına karşılık gelir, a_{ij} i ve j değişkenleri arasındaki şoku gösterir ve nxn boyutlu simetrik A matrisinin elemanlarıdır, b_{ij} ise i ve j değişkenleri arasındaki koşullu varyansın kararlılığını verir.

Rastlantısal hataların normal dağılması varsayımıyla EÇO ile tahmin edilen MGARCH modeli için olabilirlik fonksiyonu şöyledir:

$$L(\theta) = -\frac{Tn}{2} + \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\ln |H_t| + \varepsilon_t' |H_t^{-1}| \varepsilon_t) \quad (3.26)$$

T , gözlem sayısına, n değişken sayısına ve θ tahmin edilecek parametre vektörüne karşılık gelir. Genellikle tahmin sürecinde BHHH algoritması EÇO parametre tahminlerini ve ilgili standart hataları bulmak için kullanılır. BHHH algortması olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan parametre değerlerini bulmak için kullanılır ve doğrusal olmayan optimizasyona dayalıdır.

MGARCH modellerinin normal olabilirlik fonksiyonuna dayalı olması durumu uygulamada özellikle finansal çalışmalarda problemle karşılaşılmasına neden olacaktır. İkinci bölümde de belirtildiği gibi, Jeanneau 1998 yılındaki

¹⁸⁴ BEKK analizine, gösterimlerine dayalı olarak ağırlıklı kullanılan kaynaklardan ikisi için bkz: 1- Richard Harris, Robert Sollis, **a.g.e.**, s.224. 2- L.Buwens, S. Laurent, J. Rombouts, "Multivariate Garch Models: A Survey", **Journal Of Applied Econometrics**, 21, 2006, s.82-85.

çalışmasında¹⁸⁵ Normal Sözde EÇO (QML) tahmininin tutarlı parametre tahminleri verdiğini, hatta gerçek dağılım normal olmadığında dahi böyle bir sonuca ulaşılabileceğini söylemiştir. Fakat çeşitli araştırma sonuçlarına göre QML tahmincisinin aykırı gözlemlerden etkilendiği görülmüş ve M tahmincileri önerilmiştir. Sonraki çalışmalarda M tahmincileri de ağırlıklandırılarak sınırlandırılmış ve daha dayanıklı M tahmincilerine ulaşılmıştır. Muler ve Yohai¹⁸⁶ çalışmalarında koşullu varyansın geçmiş getirilerin sınırlandırılmış fonksiyonu olarak belirlenmesiyle, aykırı gözlem varlığında daha güvenli sonuçlara ulaşıldığını göstermişlerdir. Literatürde henüz çok yeni olmakla beraber çok değişkenli yöntemlerle EÇO tahmini yerine bu dayanıklı tahminler kullanılmaktadır.

3.4.2.2 BEKK Parametrizasyonuna Dayanıklı Yaklaşım

Boudt ve Croux çalışmalarında¹⁸⁷ MGARCH modellerinin QML, M ve sınırlandırılmış M tahminleriyle tahmin konusunu detaylı bir biçimde ele almıştır. Aşağıda tahmin süreçlerinin anlatımında büyük ölçüde bu çalışmadan faydalanılmıştır.

N değişkenden oluşan ve koşullu kovaryans matrisi $\{H_{t,\theta}\}$ olan koşullu $\{r_t\}$ rastlantısal sürecin düşünülmesiyle, herbir rastlantı değişkeni r_t aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$r_t = H_{t,\theta}^{1/2} \varepsilon_t \quad (\varepsilon_t \text{ sıfır ortalamalı rastlantı değişkenidir})$$

$I_{r_{t-1}}$ bilgi matrisi, r_t 'nin geçmiş değerleriyle ilgili bilgi taşımak üzere r_t 'nin olasılık dağılımı şöyledir:

¹⁸⁵T. Jeantheau, "Strong consistency of estimators for multivariate ARCH models", **Econometric Theory** 14, 1, 1998, s. 70-86.

¹⁸⁶N. Muler, V. Yohai, "Robust estimates for GARCH models", **Journal of Statistical Planning and Inference**, 138, 10, 2008, s.2918-2940.

¹⁸⁷Kris Boudt, Christophe Croux, "Robust M-Estimation of Multivariate GARCH Models", **Computational Statistics and Data Analysis**, basım aşamasında.

$$p(r_t | I_{t-1}; \theta) = (\det H_{t,\theta})^{-1/2} g(r_t' H_{t,\theta}^{-1} r_t) \quad (3.27)$$

$H_{t,\theta}$ yayılım matrisi ve $g(\cdot)$ ise dağılım fonksiyonuna karşılık gelir. Genellikle $g(\cdot)$ fonksiyonu için standart normal dağılım ya da standardize edilmiş Student t dağılımı kullanılır.

Hataların geçmişteki değerlerinin ölçülebilir bir fonksiyonu olarak MGARCH modeli ile koşullu kovaryans matrisi $H_{t,\theta}$ ile parametrize edilir.

$$H_{t,\theta} = H_\theta(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots),$$

$H_\theta(\cdot)$, NxN boyutlu simetrik pozitif tanımlı matristir. Engle ve Kroner' in $H_{t,\theta}$ için önerdikleri parametrisasyon daha önce (3.25)'de açıklanmıştı.

Bununla bağlantılı olarak QML tahmincisi şöyle tanımlanır:

$$\hat{\theta}_{QML} = \arg \max_{\theta \in \Theta} -\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [\log \det H_{t,\theta} - 2 \log g(r_t' H_{t,\theta}^{-1} r_t)] \quad (3.28)$$

(3.28)' de yer alan $g(\cdot)$ fonksiyonu normal dağıldığı zaman QML tahmincisi (3.26)'da sözü edilen EÇO tahmincisi ile çakışır.

$S_T = \{r_1, \dots, r_t\}$ örnekleme dayalı M tahmincisi ise şöyle tanımlanmıştır:

$$M(S_T; \theta, \rho) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [\log \det H_{t,\theta} + \sigma_* \rho(r_t' H_{t,\theta}^{-1} r_t)] \quad (3.29)$$

Yukarıdaki denklemde σ_* sabit çarpanı tutarlılığı sağlayan faktördür. M fonksiyonu pozitif azalmayan $\rho(\cdot)$ ile minimize edilir, $\rho(\cdot)$ M tahmincisi ile ilgili tanımlanan zarar/kayıp fonksiyonudur. Eğer, $\rho(\cdot) = -2 \log g(\cdot)$ ise $g(\cdot)$ fonksiyonu ile QML tahmincisi elde edilir. Normal ve t dağılımlarına ilişkin zarar/kayıp fonksiyonları şöyledir:

$$\rho_{\phi}(z) = z \quad \rho_{t_v}(z) = (N + v) \log[1 + \frac{z}{v-2}] \quad (3.30)$$

Yazarın¹⁸⁸ Monte Carlo çalışması sonrasında vardığı sonuç, aykırı gözlem varlığında normal zarar fonksiyonlu M tahmincisinin güvenilir sonuç vermediği ama t dağılımına dayalı kayıp fonksiyonunun kullanılmasıyla daha güvenilir tahminlere ulaşılabileceği şeklindedir.

MGARCH modellerinin M tahmininde parametre tahmini koşullu kovaryans tahmini ile yapılır. Bu ağırlıklandırılmış kovaryans matrisinin koşullu beklenen değerine eşittir. Yükler $\psi(r_t' H_{t,\theta}^{-1} r_t)$ ile orantılıdır.

$$H_{t,\theta} = E[\sigma_* \psi(r_t' H_{t,\theta}^{-1} r_t) r_t r_t' | I_{r_{t-1}}] \quad (3.31)$$

$\psi(\cdot)$, $\rho(\cdot)$ birinci türevine karşılık gelir. Bu Mahalanobis uzaklığıyla karesinin, $d_{t,\theta}^2$, fonksiyonu olarak herbir gözlemin ağırlığını belirlenmesinde öne çıkar. Burada Mahalanobis uzaklığının karesi şu şekilde elde edilir:

$$d_{t,\theta}^2 = r_t' H_{t,\theta}^{-1} r_t = \varepsilon_t' \varepsilon_t$$

Aykırı gözlemler $d_{t,\theta}^2 = r_t' H_{t,\theta}^{-1} r_t$ 'nin büyük değeri ile karakterize edilir ve dayanıklı M tahmincilerini tanımlama aşamasında zarar/kayıp¹⁸⁹ fonksiyonundan faydalanılır. Normal ve t zarar/kayıp fonksiyonlarının türevi aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\rho'_{\phi}(z) = 1 \quad \rho'_{t_v}(z) = \frac{N + v}{v - 2 + z} \quad (3.32)$$

Muler ve Yohai çalışmalarında hataların etkisini ölçen haber etki eğrisinin (NIC)¹⁹⁰ aykırı gözlemlere karşı oldukça duyarlı olduğunu belirtmişlerdir. GARCH süreci için bu eğrinin kuadratik (kareli) yapıda olduğunu ve aykırı gözlemlerin

¹⁸⁸ Kris Boudt, Christophe Croux, **a.g.e.**, s.13-15.

¹⁸⁹ **Zarar/kayıp fonksiyonu (Loss function)**: İktisadi kaybı yada pişmanlığı simgeleyen reel sayılar kümesine bir fonksiyondur. Literatürde, tahminin yanlış yapılmasıyla karşılaşılabilecek değer kaybı ya da yanlışlığın derecesinin bir ölçütü olarak değerlendirilir.

¹⁹⁰ NIC (News Impact Curve): Mevcut durumdaki tahmin hatası ile bir dönem sonraki volatilité arasındaki ilişkiyi gösteren eğridir.

tahmin edilen volatilité üzerindeki ters etkisinin koşullu kovaryans matrisinin gelecek değerlerini etkilediğini vurgulamışlardır.¹⁹¹

Boudt koşullu kovaryans matrisi üzerindeki aykırı gözlem etkisini sınırlandırmanın mümkün olduğunu, ε_t 'lerin yerine ağırlıklandırılmış hataların $\tilde{\varepsilon}_t = w(d_{t,\theta}^2)\varepsilon_t$ fonksiyonu $H_\theta(\cdot)$ kullanılarak bunun sağlanacağını belirtmiştir. Ağırlık fonksiyonu $w(\cdot)$ ekstrem gözlemleri azalan ağırlıklandırır, ekstrem gözlemleri $d_{t,\theta}^2 = r_t' H_{t,\theta}^{-1} r_t = \varepsilon_t' \varepsilon_t$ ifadesindeki büyük değerler belirler. $H_\theta(\cdot)$ BEKK yapısını göstermek üzere, koşullu kovaryans matrisi için aşağıdaki model tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned}\tilde{H}_{t,\theta} &= H_\theta(\tilde{\varepsilon}_{t-1}, \tilde{\varepsilon}_{t-2}, \dots) \\ &= C'C + w^2(d_{t-1,\theta}^2)A'\tilde{H}_{t-1,\theta}^{1/2}\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-1}'\tilde{H}_{t-1,\theta}^{1/2}A + B'\tilde{H}_{t-1,\theta}B\end{aligned}\quad (3.33)$$

$w(\cdot)$ için Tukey'in aşağıda tanımlanmış olan ağırlık fonksiyonu kullanılır.

$$w(z) = \sqrt{\min\{1, 1 - (1 - (c/z)^2)^3\}}$$

Burada c $\varepsilon_t'\varepsilon_t$ 'nin %95 kantiline karşılık gelir ve %95 kantilin dışına çıkan gözlemlerin azalan ağırlıklandırılması gerektiği vurgulanmıştır. Koşullu korelasyon matrisinin r_t 'nin geçmiş gözlemleriyle azalan ağırlıklandırılması işlemi **Bounded Innovation Propagation (BIP) GARCH- Şok yayılımı sınırlı GARCH** olarak bilinir. Bu yolla aykırı gözlemlerin volatilité tahminleri üzerindeki etkisi sınırlandırılmış olur. Aslında bu şekilde aykırı gözlemlere karşı daha dirençli yapı elde edilmesi fikri tek değişkenli seriler için Muler ve Yohai'nin 2002 ve 2008 tarihli çalışmalarında yer almıştır. Buradan elde edilen yeni tahminci ise **BIP-M tahmincisi** olarak adlandırılmıştır.

¹⁹¹ Kris Boudt, Christophe Croux, **a.g.e.** , s.12.

3.5 BOYUT İNDİRGEME

Çok değişkenli zaman serilerinde boyutun artmasına bağlı olarak tahmin edilecek parametre sayısı da hızla artar. Bu anlamda çeşitli istatistiksel boyut indirgeme metodlarının, örneğin temel bileşenler ve faktör modellerinin kullanımı kaçınılmaz olur. Bu yolla fazla sayıdaki stokastik süreçler az sayıdaki stokastik süreçle açıklanır. Son zamanlarda özellikle finans üzerine yapılan çalışmalarda (portföy seçimi gibi) çeşitli boyut indirgeme tekniklerini içerenler ağırlık kazanmıştır.

Lineer modellerde parametre sayısı boyut sayısına (m) bağlı olarak m^2 şeklinde artış gösterir ve VARMA(p,q) modelinde parametre sayısındaki artış $m^2(p+q)$ ' ye ulaşır. Bu açıdan gerek dinamik vektör lineer modellerde, gerekse koşullu değişen varyansı değişen çok değişkenli GARCH modelinde basitleştirici yapılar bulmak parametre sayısını azaltmak açısından önemlidir.¹⁹²

Lineer bir sistemin boyutunu indirgemedeki yaklaşımlar iki sınıfta incelenir. Bunlardan ilki, standart çok değişkenli istatistiksel yaklaşımı kullanarak zaman serisi değişkenlerinin lineer kombinasyonlarını bulmaya dayalıdır. İkinci yaklaşımsa dinamik faktör modellerini kullanmayı gerektirir. Faktör modelleri kointegrasyonla ilgilidir ve zaman serisi vektörünün bileşenleri arasındaki *kointegrasyon* ilişkisinin sayısı *vektörünün boyutu eksi durağan olmayan faktör sayısına eşittir*.¹⁹³

Temel Bileşenler Analizi'nde (PCA) $r = (r_1, \dots, r_k)'$ k boyutlu ve Σ_r kovaryans matrisli rastlantı değişkeni ile r_i 'nin az sayıdaki lineer kombinasyonu kullanılarak Σ_r 'nin yapısı açıklanır¹⁹⁴.

Bilindiği gibi Faktör Analizi ise verinin kovaryans ya da korelasyon matrisindeki en çok değişmeyi açıklayan az sayıda faktör belirlemeyi amaçlar, analiz

¹⁹² Daniel Pena and Pilar Poncela, **Advances in Distribution Theory, Order Statistics and Inference**, isimli yayında "Dimension Reduction in Multivariate Time Series" başlığıyla yer alan çalışma, Birkhauser Boston, 2006, s. 433-458.

¹⁹³ Detaylı bilgi için bkz a.e., s. 433-458.

¹⁹⁴ Ruey S. Tsay, **a.g.e.**, s.335.

kovaryans ve korelasyon matrislerine uygulanır. Faktör Analizi tahmin sürecinde kullanılan tekniklerden birisi temel bileşenler analizine dayanır ve bu yaklaşıma dayalı varsayımlarda verinin normal dağılması yer almaz.¹⁹⁵

Temel Bileşenler Analizinde klasik kovaryans matrisinin aykırı gözlemlerin olumsuz etkilenmesinden dolayı dirençli olanlarla yer değiştirmesi yoluyla dayanıklı olan alternatifi elde edilir ve aslında bu yaklaşım dirençli temel bileşenler tekniklerinden birini oluşturur. Söz konusu teknikler üç sınıfa ayrılabilir:

- klasik kovaryans matrisini dayanıklı kovaryans matrisi ile değiştirmek
- izdüşüm izleme metodunu kullanmak
- izdüşüm izleme metodu ile dayanıklı kovaryans matrisini birleştirmek

Son dönemde dayanıklı kovaryans matrisinin elde edilmesi konusunda öne çıkan çalışmalar; Croux ve Ruiz Gazen,¹⁹⁶ Hubert vd¹⁹⁷ ve Maronna¹⁹⁸, ya aittir. Hubert, Rousseeuw ve Verdonck'un 2009 yılındaki çalışmalarında¹⁹⁹ özellikle finansal verilerde de karşılaşılan asimetrik yapıdaki veriye çözüm olabilecek bir tekniği önermişlerdir. Bu teknik aynı yazarların 2005 yılında geliştirdikleri **ROBPCA** yöntemine dayalıdır. Çalışmada PCA ve literatürdeki dayanıklı PCA yaklaşımlarının simetrik dağılımı olan veriler için uygun olduğunu, bu durumun geçerli olmaması durumunda orjinal değişkenlerin Box-Cox gibi transformasyonlarla hazırlanmasının değişkenlerin yorumunu zorlaştırdığını belirtmişlerdir. Yazarların önerisi asimetrik veriye uygun olan PCA tekniğini kullanmaktır. Teknik, ROBPCA algoritmasına benzer adımlar içerir, fakat çeşitli modifikasyonlar yapılmıştır. Modifikasyonlardan biri Hubert ve Vandervieren²⁰⁰ 'in çalışmalarında önerdikleri “düzeltilmiş kutu diyagramı”na dayalı olan “düzeltilmiş aykırılık” ölçütüdür.

¹⁹⁵ Ruey S. Tsay, **a.g.e**, s.343.

¹⁹⁶ C. Croux, A. Ruiz-Gazen, “High Breakdown Estimators For Principal Components: The Projection-Pursuit Approach Revisited”, **Journal of Multivariate Analysis**, 95, 2005, s. 206-226.

¹⁹⁷ M. Hubert, P.J. Rousseeuw, K.Vanden Branden, “ROBPCA: A New Approach To Robust Principal Component Analysis”, **Technometrics**, 47, 2005, s. 64-79.

¹⁹⁸ R. Maronna, “Principal Components And Orthogonal Regression Based On Robust Scales”, **Technometrics**, 47, 2005, s.264-273.

¹⁹⁹ M. Hubert, P. Rousseeuw, T. Verdonck, “Robust PCA For Skewed Data And Its Outlier Map”, **Computational Statistics and Data Analysis**, 53, 6, 2009, s.2264-2274.

²⁰⁰ M. Hubert, E. Vandervieren, “An adjusted boxplot for skewed distributions”, **Computational Statistics and Data Analysis**, 52, 12, 2008, s. 5186-5201.

Burada sözü edilen kutu diyagramı ICA analizine dayalıdır. Bu ölçüt ROBPCA algoritmasına ilave edilmiştir. ROBPCA metodu ise, Hubert vd ²⁰¹ tarafından önerilmiştir. İzdüşüm izleme ve robust kovaryans matrisi MCD düşüncelerinin her ikisini birden birleştiren bir yöntemdir. Çeşitli simülasyon çalışmalarında²⁰² ROBPCA'nın diğer dayanıklı kovaryans matrisleri üzerine kurulan temel bileşenler analizine eş değer, hatta kimilerinden daha iyi sonuç verdiği görülmüştür.

²⁰¹ Hubert, M., Rousseeuw, P.J., Vanden Branden, K., **a.g.e.**,s. 64-79.

²⁰² Bu çalışmalardan birisi için bkz, Özlem Yorulmaz, "The Performance Evaluation of Robust Pairwise Covariance Estimator", **TÜİK İstatistik Araştırma Dergisi**, 6,1, 2008. s.18-37.

IV. BÖLÜM

UYGULAMA

Bu bölüm üç ana başlık altında toplanan uygulamaları içermektedir. Bu uygulamalarla farklı model kalıplarından hareketle veri gruplarındaki aykırı gözlemleri belirlemeye çalışmak, dayanıklı ve klasik tahminciler yardımıyla modelleri belirlemek amaçlanmıştır. Belirlenen aykırı gözlemlerin kriz dönemleri, rejim değişimleri gibi bir takım sıradışı olaylara karşılık geldiği görülmüştür. Birçok durumda dayanıklı tahmin yöntemlerini kullanmanın tahmin ve öngörü hatasını azalttığı sonucuna ulaşılmıştır.

İlk alt bölümde döviz kuru ve altın serileri üzerinde ilgilenilen dönem içerisindeki aykırı gözlemler belirlenmiş, seriler ARMA modeli ile açıklanmaya çalışılarak, ARMA modeline ait parametre tahminleri klasik ve dayanıklı yollarla tahmin edilmiştir. Bu yolla çeşitli kriz ve rejim değişiklikleri belirlenmek ve ilave olarak krizleri kapsayan dönemlerde, tahmin/öngörüler üzerinden dayanıklı tahminlerin klasik tahminlere göre daha güvenilir sonuçlar verdiği gösterilmek istenmiştir. Bu süreçte S-plus programı kullanılmıştır.

İkinci alt bölümde ise döviz kuru ve İMKB 100 serileri arasındaki ilişki VAR modeli ve nedensellik testleriyle incelenmiştir. Bu serilerdeki aykırı gözlemler izdüşüm izleme tekniği ile bulunmuştur. Seriler üzerindeki aykırı gözlemlerin incelenmesi ayrı ayrı yapılmak yerine izdüşüm izleme tekniği ile yapılarak her iki seriyi eş zamanlı olarak etkileyen aykırı noktalara ulaşmak istenmiştir. VAR modeli parametre tahminleri klasik ve dayanıklı yaklaşımlarla bulunarak tahmin/öngörü aşamasında dayanıklı yaklaşımın dirençli yapısı gösterilmek istenmiştir. Sonuçlara MATLAB ve E-views programları kullanılarak ulaşılmıştır.

Son aşamada ise İMKB 100 ve SP500 arasındaki volatilité ilişkisi çok değişkenli GARCH modeli kullanılarak hem klasik hem de dayanıklı açıdan ele alınmıştır. Bu yolla farklı iki menkul kıymetler piyasası arasındaki karşılıklı

etkileşim, şok ve volatilité saçılımı farklı parametre tahminleriyle açıklanmıştır; işlemler esnasında R programı kullanılmıştır.

Çalışmada kullanılan veriler Merkez Bankası, İMKB ve yahoo finance sitelerinden elde edilmiştir.

UYGULAMA 1

Döviz Kuru ve Altın Fiyatları Serilerinin ARMA Modellemesi

Döviz kuru özellikle gelişmekte olan piyasalarda çeşitli iktisadi olguların yorumlanmasında kullanılan oldukça kullanışlı bir gösterge olarak kabul edilmektedir. Döviz kurunun enflasyon ve cari işlemler dengesi üzerindeki etkisinden yola çıkarak Merkez Bankaları, çeşitli stratejileri belirlemede döviz kurunu bir değişken olarak kullanır. Kamuoyu ve piyasalar döviz kuru alış ve satış rakamları arasındaki farkı istikrar varlığını belirlemede bir ölçüt olarak kullanırlar.

Uygulamanın ilk aşamasında Ocak 1950 ve Eylül 2009 tarihleri arasındaki \$/TL döviz kuru serisi kullanılarak bu aralıktaki rejim değişimleri, kriz dönemleri belirlenmiştir. Belirlenen bu noktalar döviz kurundaki değişim noktalarıyla örtüşmektedir. Bu tarihler arasındaki döviz kuru uygulamaları şu şekilde özetlenebilir²⁰³:

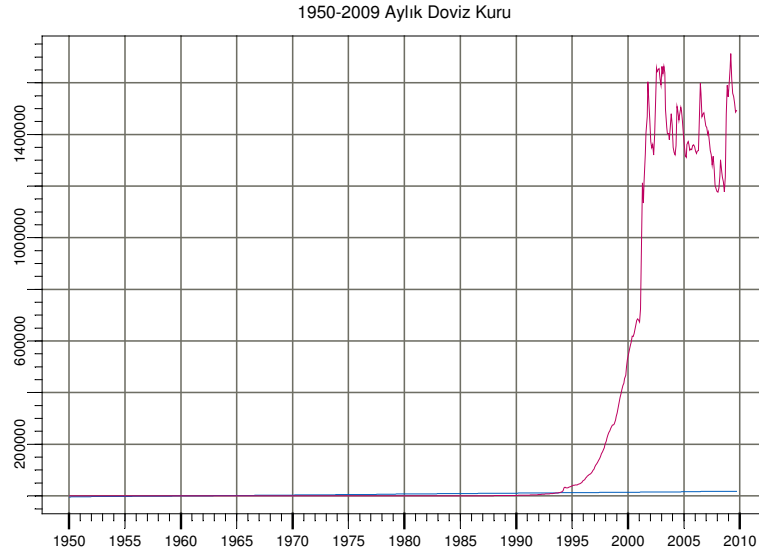
“Cumhuriyet kurulduktan sonra 1950 yılına kadar ağırlıklı olarak sabit kur rejimi kullanılmıştır. Referans olarak İngiliz Sterlini kullanılmıştır 1950 yılından sonra referans olarak ABD doları alınmıştır. Ağustos 1970 tarihinde yeni kur ayarlamasıyla 1 dolar 15 TL olarak saptanmıştır. 1974 tarihinde IMF tarafından uluslararası kambiyo kurları arasında uyumun sağlanması amacıyla çeşitli kurallar konularak bu doğrultuda tedbirler alınmış ve kur sisteminde yeni uygulamaya geçilmiştir. Bu tarihten sonra daha sık devalüasyon yapılmıştır. Kurlar 1976 yılında üç kez, 1977’de iki kez ve 1979 yılında da üç kez ayarlanmıştır. 24 Ocak 1980 ‘ de

²⁰³ Türkiye’de Uygulanan Döviz Kuru Rejim ve Politikaları üzerine kullanılan kaynak için bkz: Kürşad Arat, “Türkiye’de Optimum Döviz Kuru Rejimi Seçimi ve Döviz Kurlarından Fiyatlara Geçiş Etkisinin İncelenmesi”, **Uzmanlık Tezi, Merkez Bankası**,2003.

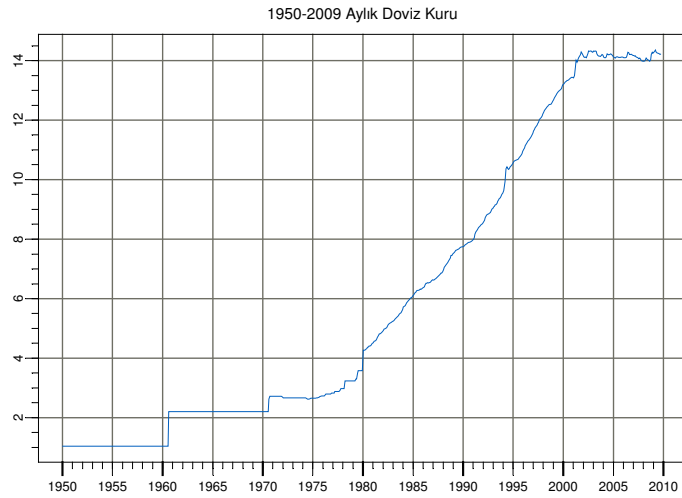
alınan ekonomik tedbir paketine kadar döviz kuru 1 dolar 26.50 olarak devam etmiş sonrasında kur rejimi de değiştirilerek 1 dolar 70 TL' değerine çıkarılmıştır. Aynı sene içerisinde para piyasalarındaki değişmelerin etkisiyle 16 defa değiştirilmiş, çoklu kur uygulaması yapılmıştır. 1989-1990 yıllarında kısa vadeli sermaye girişinin hızlanmasıyla TL reel olarak değer kazanmıştır. 1991 tarihinde Körfez Krizi net kısa vadeli sermaye çıkışına neden olmuştur, TL reel olarak değer kaybetmiştir. 1993 sonlarında açık pozisyonu kapamaya yönelik döviz talebi, döviz kurları üzerinde baskı oluşturmuştur ve bu süreç 1994 yılının ilk aylarına kadar devam etmiştir. Merkez bankası baskıyı azaltmak adına faiz oranını artırmıştır. 1994 yılının başlarında yine devalüasyon yapılmıştır. Nisan 1994 yılında istikrar paketi çerçevesinde kur rejimi değiştirilmiş ve nominal çapa kullanılmıştır. 1995 yılında IMF ile yapılan anlaşma çerçevesinde öngörülen enflasyon oranına bağlı olarak kur sepeti artış oranı belirlenmiştir. Kur rejimi 2000 yılına kadar tahmin edilen enflasyon oranına göre tespit edilirken, 2000 yılı başlarında hedeflenen enflasyon oranı ile belirlenmiştir. 2001 yılındaki krizde ise döviz kuru rejimi değişmiş, kurun artış hızının önceden açıklandığı rejimden dalgalı kur rejimine geçilmiş, Türk lirası değer kaybetmiştir.”

2001'den sonra kur üzerinde rejim değişimi olmamıştır. Merkez Bankası Döviz alım-satım ihaleleriyle, oluşabilecek aşırı oynaklık durumuna karşı müdahale etmektedir. Bilindiği gibi dalgalı kur rejiminde korunması gereken bir kur seviyesi yoktur, döviz kuru ne bir hedef ne de bir politika aracıdır. Dolayısıyla özellikle bu dönemde piyasa koşullarında belirlendiği için genel ekonomik gidişatı için döviz kuru daha net, sağlıklı bir gösterge niteliğindedir.

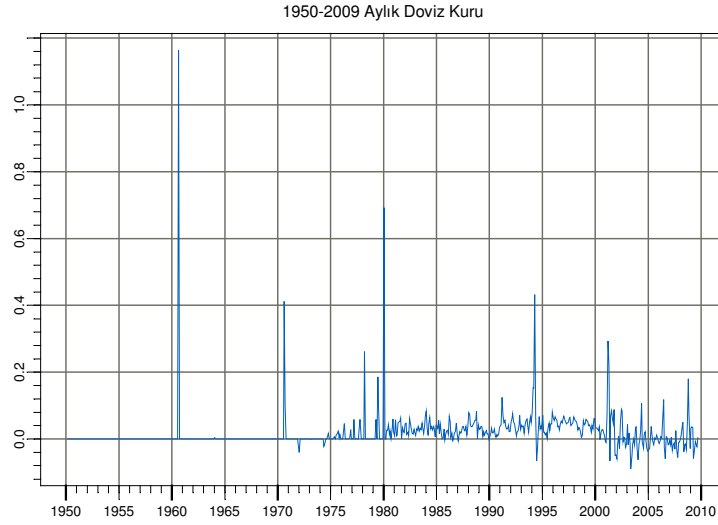
Öncelikle döviz kuru serisinin genel yapısı ve serideki aykırı gözlemler hakkında bilgi sahibi olmak için logaritmik döviz kuru ve farkı alınmış logaritmik nominal döviz kuru serilerine ait incelenen tarih aralığındaki çizimler yapılmıştır. İzleyen şekillerde bu çizimler görülmektedir.



Şekil 4.1. 1950-2009 Tarihleri Arasındaki Aylık Döviz Kuru Serisi



Şekil 4.2. 1950-2009 Tarihleri Arasındaki Aylık Logaritmik Döviz Kuru Serisi



Şekil 4.3. 1950-2009 Tarihleri Arasındaki Farkı Alınmış Logaritmik Aylık Döviz Kuru Serisi

Şekiller incelendiğinde, aykırı gözlem sayı ve türlerinin logaritması alınmış seriler ve logaritma üzerinden farkı alınmış seriler için farklı olabileceği önsel olarak görülebilmektedir. Nitekim logaritması alınmış seri üzerinden hareketle bulunan aykırı gözlem sayısı 246 iken, fark alma işlemiyle belirlenen 16 tanedir. Bu sonuçlar sırasıyla, Ek Tablo 1 ve Tablo 4.1’de görülmektedir. Ek Tablo 1 de görülebileceği gibi rejim değişimi ve piyasada oluşan tüm hareketlilikler belirlenmiştir. Fakat logaritmik seri üzerinden hareketle bulunan bu 246 noktanın birçoğu LS olarak belirlenmiştir. Farkı alınan logaritmik seriden hareketle bulunan 16 nokta döviz kurunun tarihsel gelişimine daha uygun bir sonuç sağlamaktadır.

Tablo 4.1. Farkı Alınmış Logaritmik Döviz Kuru Serisinde Belirlenen Aykırı Gözlemler

	Zaman	Tür	Etki	t-değeri
1	07.1960	LS	1.164	389.6
2	07.1970	AO	0.36	128.8
3	08.1970	LS	-0.051	58.15
4	02.1978	AO	0.2614	92.67

5	05.1979 LS	0.1416 29.43
6	07.1979 LS	-0.0603 51.93
7	12.1979 AO	0.6931 238.8
8	10.1988 LS	-0.0835 40.91
9	02.1991 LS	0.04453 29.55
10	03.1994 AO	0.37 101.7
11	05.1994 LS	-0.07942 60.89
12	08.1994 LS	0.08143 93.59
13	02.2001 IO	0.3339 87.66
14	03.2001 LS	0.2785 69.94
15	04.2004 AO	0.09782 42.26
16	09.2008 AO	0.1283 38.37

Tablo 4.1. incelendiğinde bulunan noktaların karşılık geldiği tarihler şu şekilde sıralanabilir:

07.1960	Kur ayarlaması
07.1970	Kur ayarlaması
08.1970	Kur rejim değişimi
1978-1979	Kur ayarlaması (3 kez)
10.1988	Faiz oranlarının serbest belirlenebilmesi ile mevduat faizlerinin yükselmesi
1991	Körfez Krizi etkisi
1994	Ekonomik Kriz ve Kur ayarlaması
02. 2001	Siyasi Kriz
03.2001	Kur rejim değişimi
04.2004	Bankacılık Krizi
09.2008	Global Kriz

1950-2009 tarihleri arasında ele alınan nominal döviz kuru serisinden elde edilen 16 tane aykırı gözlem incelenmiştir. Mart 2001 tarihine kadar LS türü aykırı gözlemler belirlenmiş ve bu tarihten sonra LS türü gözlemlerle karşılaşılmamıştır. Bu durum Mart 2001 tarihine kadar çeşitli dönemlerde rejim değişimlerinin olması ile açıklanabilir, 2001 tarihinden sonra kurun piyasadaki arz-talep koşullarına göre belirlenmesi ve rejim değişikliği olmaması nedeniyle bu tür aykırı gözlemlerin görülmemesi doğal olarak beklenen bir sonuçtur.

Merkez Bankası, piyasa derinliğinin kaybolmasına bağlı olarak, spekülasyon davranışları sonucunda, kurlarda sağlıklı fiyat oluşumları gözlenmesi durumunda, piyasaya doğrudan müdahale eder.²⁰⁴ Seride belirlenen AO türü aykırı gözlemler Merkez Bankasının sözü edilen müdahalesinin yansıması olarak düşünülebilir. Öte yandan serinin aylık yerine günlük bazda incelemiş olması bu tür müdahale etkisinin zamana yayılan etkisini belirginleştirerek, AO türü aykırı gözlemler yerine IO türü aykırı gözlemlerle karşılaşılmasına neden olabilirdi.

ARMA modellemesi için döviz kuru serisi sınırlandırılarak, Ocak 1995-Aralık 2008 arası dönem alınmıştır. Logaritması üzerinden farkı alınmış seriye klasik ve dayanıklı tahmin sonuçları uygulandığında AIC kriterine göre en uygun modelin AR(1) olduğu sonucuna varılmıştır.

Tablo 4.2. Klasik Yolla ARMA Model Tahmini (Döviz Kuru Serisi)

	KATSAYI DEĞERİ	STANDART HATA	T DEĞERİ
SABİT	0.02157	3.0598	0.0026
AR(1)	0.49410	0.06748	7.322

Tablo 4.2 incelendiğinde AR(1) parametresinin anlamlı olduğu görülmektedir. İncelenen tarihler arasında Mart 2001 tarihinde uygulanan rejim değişiminin önsel olarak bilindiği varsayımıyla hareket edilerek, rejim değişimini temsilen modele müdahale (kukla) değişkeni eklenmiştir. Modele müdahale değişkeni eklemenin gerekliliği, dönemler arası varyans farklılığı hipotezine dayalı Chow testi

²⁰⁴ Merkez Bankası Bültenleri, <http://www.tcmb.gov.tr>.

ile sınanmıştır. Bu test sonucunda yapısal değişimin olmadığı yönündeki sıfır hipotezi %5 anlam düzeyinde reddedilerek, model parametrelerinin tüm periyot boyunca aynı kalamayacağı sonucuna varılmıştır.

$$\frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2} \sim F_{(n_1-k), (n_2-k)}$$

$$F_{hesap} = \text{varyans}(\text{Mart 2001 sonrası}) / \text{varyans}(\text{Mart 2001 öncesi}) = 1.9078$$

$$F_{tablo;90.60}=1.75$$

Tablo 4.3. Müdahale Değişkeni İçeren ARMA Model Tahmini (Döviz Kuru Serisi)

	KATSAYI DEĞERİ	STANDART HATA	T DEĞERİ
SABİT	0.0229	0.0055	4.1390
KUKLA	-0.0188	0.0067	-2.7956
AR(1)	0.4324	0.0704	6.1433

Tablo 4.3’e bakıldığında AR(1) ve müdahale değişken parametrelerinin %5 güven düzeyinde anlamlı kabul edilebileceği görülür.

Dayanıklı tahmincilere dayalı tahmin sürecinde Yohai’nin önerdiği yaklaşıma göre, GM tahmincisi ve filtre edilen seriye dayalı EÇO tahmincileri kullanılmıştır. Literatürde çeşitli çalışmalarda filtre edilen seriden hareketle parametre tahmini yapmakla dayanıklı ve etkin sonuçlar elde edilebileceği belirtilmektedir²⁰⁵. Filtreleme, çeşitli türdeki aykırı gözlemlerin belirlenmesinden sonra bunların dikkate alınmasıyla serinin yeniden düzenlenmesi işleminine dayanır. Burada, Splus programından elde edilen filtrelenmiş veri ile modelleme yapılmıştır. Yukarıda

²⁰⁵ Dayanıklı tahmin sonucunun değerlendirilerek yeniden yapılanmış seriden hareketle tahmin için faydalanan kaynaklar için bkz: 1-Mia Huber, **Regression Techniques**, Leuven, ACCO, 2005. 2-Ricardo Maronna, Douglas Martin, Victor Yohai, **Robust Statistics, Theory and Methods**, New York, Wiley 2007. Ayrıca, Prof.Dr. Yohai ile yazışma bilgileri ve Prof.Dr. Huber ders notlarından da faydalanılmıştır.

sıralanan dayanıklı tahminciler ilerleyen bölümlerde Dayanıklı I (Yohai'nin önerdiği yaklaşım), Dayanıklı II (GM tahmincisi) ve Dayanıklı III (filtre edilen seriye dayalı EÇO tahmincisi) olarak isimlendirilecektir.

Tablo 4.4. Dayanıklı I Tahmincisi ile Yapılan ARMA Model Tahmini (Döviz Kuru Serisi)

	KATSAYI DEĞERİ	STANDART HATA	T DEĞERİ
SABİT	0.0344	0.0396	0.8687
AR(1)	0.9504	0.0317	29.987

Tablo 4.5. Dayanıklı II Tahmincisi ile Yapılan ARMA Model Tahmini (Döviz Kuru Serisi)

	KATSAYI DEĞERİ	STANDART HATA	T DEĞERİ
AR(1)	0.6567225	0.0390396	16.43

Tablo 4.6. Dayanıklı III Tahmincisi ile Yapılan ARMA Model Tahmini (Döviz Kuru Serisi)

	KATSAYI DEĞERİ	STANDART HATA	T DEĞERİ
SABİT	0.0069	0.0029	2.3904
AR(1)	0.6227	0.0615	10.1191

AR(1) modeli parametre tahmin sonuçlarına dayalı olarak oluşturulan Tablo 4.2, Tablo 4.3, Tablo 4.4, Tablo 4.5 ve Tablo 4.6 'ya bakıldığında tümünde AR(1) katsayılarının anlamlı çıktığı görülür.

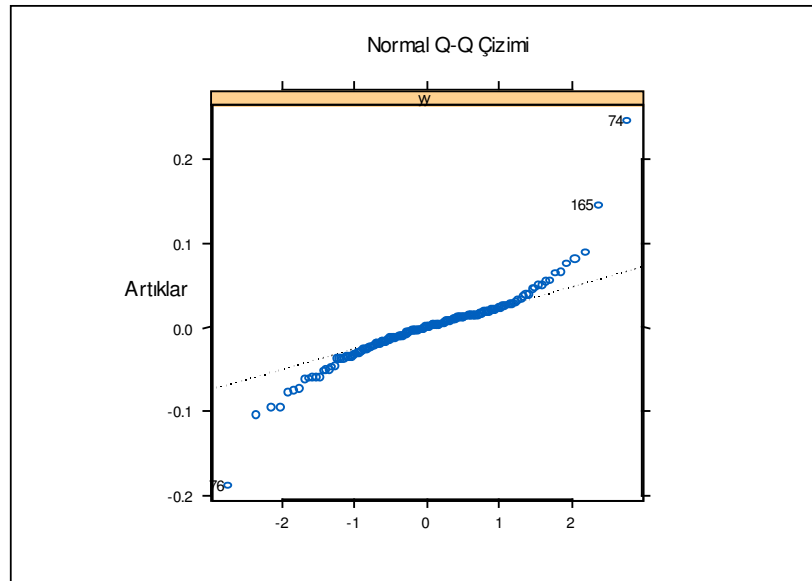
Her biri farklı tahmin tekniğiyle elde edilen modellere ait artıklar üzerinden çeşitli istatistikler bulunmuş ve tahmin teknikleri bu istatistiklerle değerlendirilmiştir.

Bunlardan ilki hata kareler toplamına dayalı MSE'dir. Diğeri ise hataların dağılımını dikkate alan Jarque-Bera istatistiğidir ki bu yolla hataların normal dağılıma uygunluğu sınanmıştır. Bunların yanı sıra y_t ve $\hat{y}_t$ değerlerinin çizimleri ile QQ şekillerinden de faydalanılmıştır. MSE değeri aşağıdaki gibi bulunur²⁰⁶:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{t \in T} (Y_t - \hat{Y}_t)^2}{T}}$$

Jarque-Bera Normallik testinde, EKK artıklarının asimetri ve basıklık ölçütlerine bağlı olarak hesaplanan bir istatistik söz konusudur ve artıkların normal dağıldığı sıfır hipotezinden hareketle test edilir.

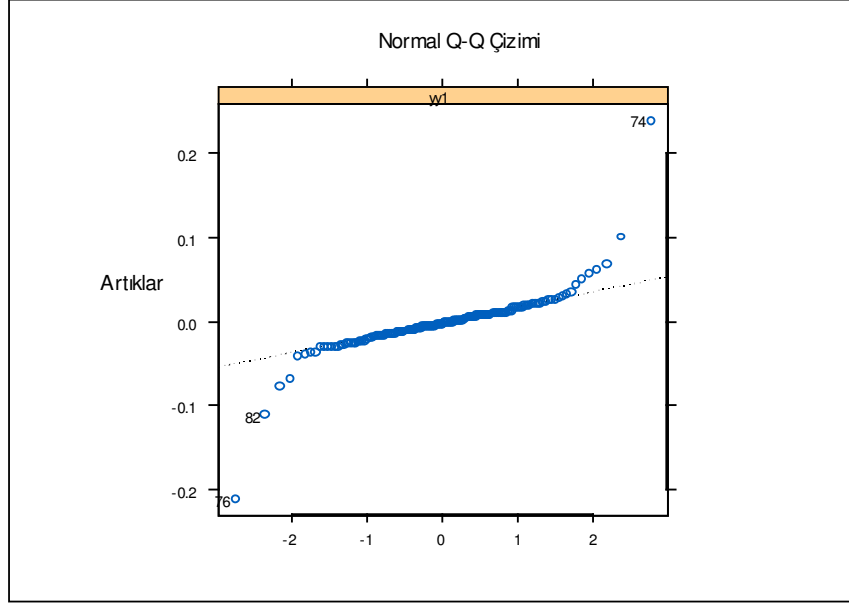
$$JB = n \left[\frac{S^2}{6} + \frac{(K-3)^2}{24} \right]$$



Şekil 4.4. Klasik Tahminle Bulunan Model Artıklarının QQ Çizimi (Döviz Kuru)

²⁰⁶Öngörülerin doğruluğunun hesaplanmasında MSE kriterinin kullanılabileceğini anlatan kaynaklardan biri için bkz. Ramos, "Forecasts of Market Shares from VAR and BVAR Models: A Comparison of Their Accuracy", *International Journal of Forecasting*, 19, 2003, s: 95-110.

Klasik tahmin yöntemiyle elde edilen artıklara dayalı QQ çiziminde (Şekil 4.4) hataların normal dağılmadığı görülmektedir.

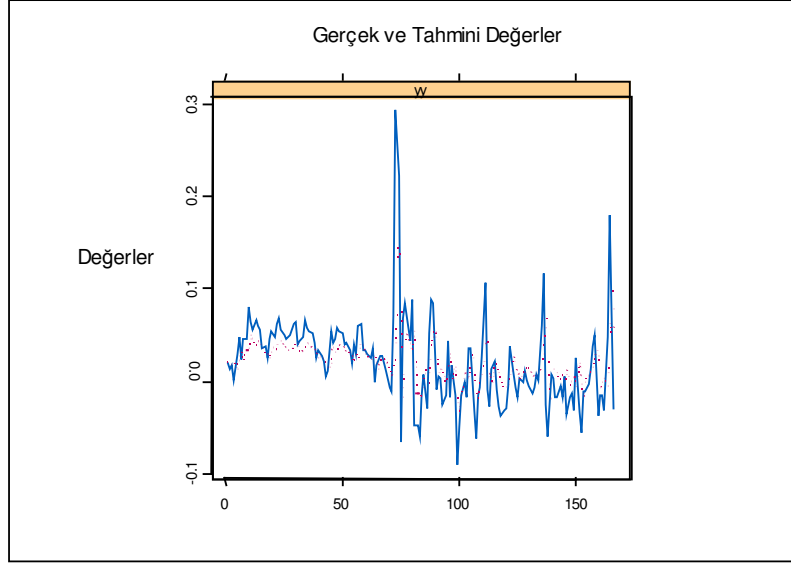


Şekil 4.5. Dayanıklı III Tahminiyle Bulunan Model Artıklarının QQ Çizimi (Döviz Kuru)

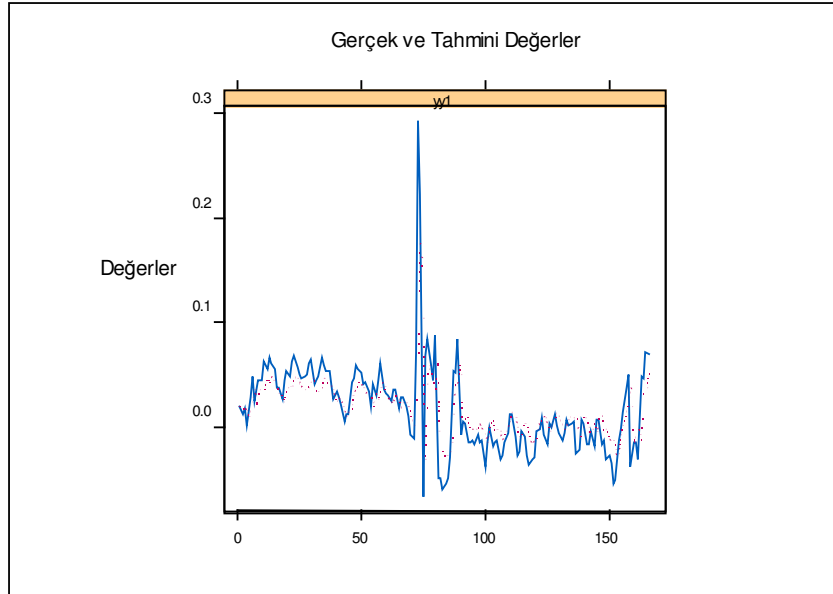
Benzer şekilde Dayanıklı III tahmini için Şekil 4.5 'e bakıldığında, artıkların dağılımının 45° 'lik doğru üzerinde yer almadığı görülmektedir.

Nitekim aşağıdaki Jarque-Bera test sonuçları da her iki yöntem için bunu desteklemektedir.

JARQUE-BERA	TEST İSTATİSTİĞİ	P-DEĞERİ
Klasik	654.7498	0.000
Dayanıklı	609.393	0.000



Şekil 4.6. Klasik Yolla Tahminle Bulunan $\hat{y}_t$ ve y_t çizimi (Döviz Kuru)



Şekil 4.7. Dayanıklı III Tahminiyle Bulunan $\hat{y}_t$ ve y_t çizimi (Döviz Kuru)

Orijinal ve filtre edilmiş serilere uygulanan tahmin yöntemiyle bulunan tahmini y ve gerçek y değerlerine ait çizimlere bakıldığında (Şekil 4.6 ve Şekil 4.7), filtre edilmiş seriler üzerinden bulunan tahmini y değerlerinin gerçek değerlere biraz daha yakın olduğu görülmektedir (Şekil 4.7). Bu durum aşağıdaki MSE kriterlerine dayalı olarak elde edilen tablodaki değerler ile de doğrulanmaktadır. MSE değerleri hesaplanırken örneklem, Ocak 1995-Aralık 2008 tarih aralığını kapsayan “örneklem içi” değerler ve Ocak 2009-Eylül 2009 tarih aralığını kapsayan “örneklem dışı” değerler şeklinde iki gruba ayrılmıştır.

Tablo 4.7a incelendiğinde, klasik tahminci ile elde edilen MSE değeri sırayla örneklem içi ve dışı değerler için 0.304, 0.014 iken filtre edilmiş seri üzerinden yine sırayla 0.300 ve 0.007 olarak bulunmuştur. Örneklem içi değerler için en iyi skorun kukla değişkeni kapsayan modelin klasik tahminine ait olduğu görülür. Örneklem dışındaki değerler içinse en iyi skorlar Dayanıklı II ve Dayanıklı III tahminlerine aittir.

Tablo 4.7.a Klasik ve Dayanıklı Tahmin Yöntemlerine Dayalı MSE Değerleri (Döviz Kuru Serisi)

TAHMİN YÖNTEMLERİ/ ÖRNEKLEM DURUMU	KLASİK	KLASİK +KUKLA	DAYANIKLI I	DAYANIKLI II	DAYANIKLI III
Örneklem içi	0.304	0.271	0.55058	0.302	0.2923
Örneklem dışı	0.0139	0.008	0.02225	0.007	0.007

Örneklem içi değerler üzerinden hareketle EKK ve EÇO’ya dayalı yöntemlerle elde edilen MSE değerinin daha küçük sonuç vermesi beklenen bir sonuçtur. Çünkü amaç fonksiyonu örneğin EKK için, hata karelerinin en küçüklenmesine dayanır. Ancak çalışmada seçilen örneklem dışı tarih aralığı global kriz etkilerinin görüldüğü döneme denk geldiğinden ve potansiyel aykırı gözlemlerin varlığı beklentisi olduğundan MSE kriterinin EKK için en küçük değeri vermesi beklenmeyebilir.

Literatürde aslında MSE dayanıklı bir ölçüt olarak değerlendirilmediğinden, bu kriterinin yanısıra MAD (Mean Absolute Deviations) kriteri ile de sonuçlar izlenmiştir. MAD kriteri, dayanıklı bir ölçüttür ve şu şekilde tanımlanır:

$$MAD(x) = Med \{ |x - Med(x)| \}$$

MAD tahmincisi medyan değerini iki kez kullanır, ilkinde medyan değerinden sapmaların mutlak değeri alınır, sonrasında ise mutlak değeri alınmış artıklar üzerinden yeniden medyan değeri hesaplanır.

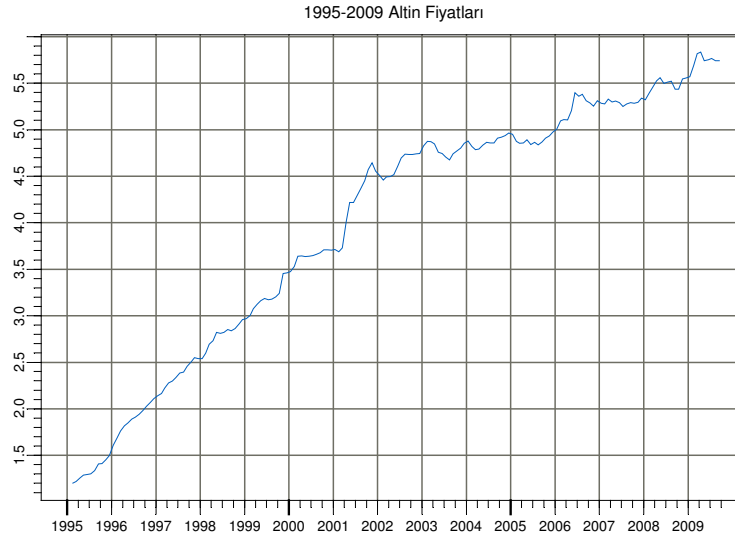
Tablo 4.7.b Klasik ve Dayanıklı Tahmin Yöntemlerine Dayalı MAD Değerleri (Döviz Kuru Serisi)

TAHMİN YÖNTEMLERİ/ ÖRNEKLEM DURUMU	KLASİK	Klasik +KUKLA	DAYANIKLI I	DAYANIKLI II	DAYANIKLI III
Örneklem içi	0.01755	0.013472	0.01435	0.0161	0.01551
Örneklem dışı	0.01760	0.013939	0.01479	0.01224	0.011059

Tablo 4.7.b incelendiğinde, Dayanıklı I (klasik) tahmini ve kukla değişken kullanımlı klasik tahminin örneklem içi söz konusuysen oldukça iyi sonuçlar verdiği görülmektedir. Örneklem dışı değerler söz konusu iken en iyi sonuçlar Dayanıklı III (filtre edilmiş veriye uygulanan) ve Dayanıklı II (GM) tahmincisine aittir. Klasik tahminci örneklem içi ve dışında iyi sonuçlar vermemektedir.

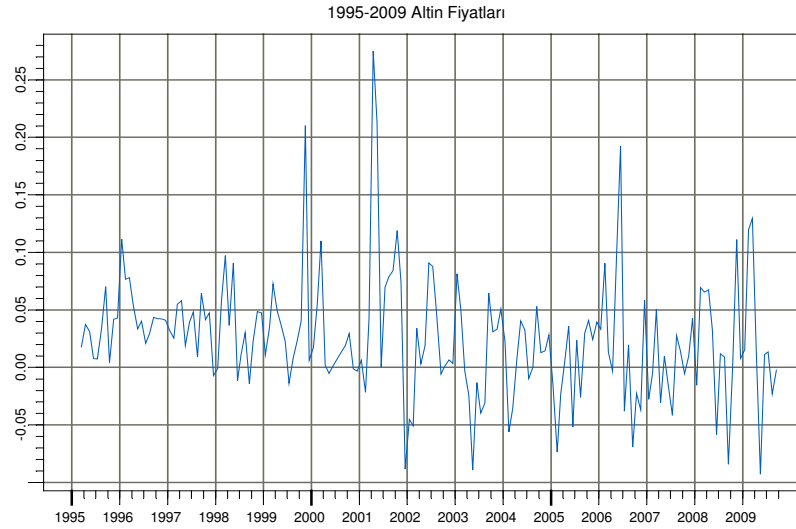
Dolayısıyla, bu seri üzerinden hareketle aykırı gözlem varlığında dayanıklı tahmin sonuçlarının klasik tahmine göre daha iyi sonuçlar verdiğini söylemek mümkündür.

Döviz kuru serisinin yanısıra Ocak 1995-Aralık 2008 tarihleri arasındaki altın serisi de ele alınarak, aynı aşamalarla incelenmiştir. Altın serisi kullanılarak tekrar aynı analiz aşamalarının takip edilmesinin temel nedenlerinden birisi ARMA model yapısının döviz kuru serisini açıklamada yeterli olamayabileceği düşüncesidir.²⁰⁷ Diğer neden ise seride döviz kuru serisine benzer şekilde müdahale etkisinin (rejim değişiminin) olmamasıdır. İncelenen bu seriyle klasik ve dayanıklı yaklaşım arasındaki farkın daha belirgin olabileceği düşünülmüştür. Ele alınan tarihler arasında 24 tane aykırı gözlem bulunmuştur. Seriyeye ait şekiller aşağıdaki gibidir:



Şekil 4.8. 1995-2009 Tarihleri Arasında Logaritmik Altın Fiyatları Serisi

²⁰⁷ Gerek klasik gerekse dayanıklı yaklaşımla döviz kuru serisinin ARMA modellemesinden elde edilen hataların normal dağılmaması, yanlış/eksik bir model yapısı ile çalışıldığının göstergesi olarak düşünülebilir.



Şekil 4.9. 1995-2009 Tarihleri Arasında Farkı Alınmış Logaritmik Altın Fiyatları Serisi

Tablo 4.8. Farkı Alınmış Logaritmik Altın Fiyatları Serisinde Belirlenen Aykırı Gözlemler

	Zaman	Tür	Etki	t-değeri
1	11.1995	IO	0.08189	3.135
2	03.1998	AO	0.07569	3.172
3	09.1999	AO	0.1874	5.751
4	01.2000	AO	0.08419	3.183
5	02.2001	IO	0.2451	6.974
6	03.2001	AO	0.1124	3.708
7	05.2001	AO	-0.06476	3.121
8	09.2001	IO	0.07275	3.146
9	11.2001	IO	-0.1303	3.926
10	04.2002	IO	0.07051	3.105
11	11.2002	IO	0.06703	3.045

12	03.2003 IO	-0.09244 3.076	
13	12.2003 IO	-0.07767 3.187	
14	12.2004 IO	-0.08027 3.191	
15	04.2005 AO	-0.07863 3.09	
16	12.2005 AO	0.06788 3.048	
17	03.2006 AO	0.09274 3.182	
18	04.2006 AO	0.1858 5.654	
19	07.2006 IO	-0.08979 3.098	
20	11.2006 AO	0.07367 3.205	
21	11.2007 AO	-0.06051 3.009	
22	04.2008 AO	-0.08 3.076	
23	07.2008 IO	-0.1006 3.184	
24	09.2008 AO	0.1022 3.351	

İncelenen tarih aralığında belirlenen aykırı gözlemler Tablo 4.8’de yer almaktadır. Bu tarihlere karşılık gelen olaylarsa şöyle sıralanabilir:

-Kasım 1995	Aralık seçimi öncesi etki
-Mart 1998	Nisan seçimi öncesi etki
-Eylül 1999	Altın satışını sınırlandırma anlaşması, deprem
-Ocak 2000	Stand By anlaşması
-2001	Kriz etkisi
-2003	Yüklü sıcak para girişi
-2004	Savaş nedeniyle dolardaki ciddi düşüş, altına hücum
-2003	ABD Irak savaşı
-2005	Kasım ayı TÜFE fiyatlarındaki rekor artış, terör saldırılarındaki artış nedeniyle döviz fiyatlarında gerileme
-2006	Global Finansal Kriz öncesi hareketlilik
-2007-2008	Global Finansal Kriz Etkisi

Logaritmik altın serisinin farkı alınmıştır ve ARMA model sınaması aşamaları sonrasında AR(1) modeli üzerinden parametre tahminleri yapılmıştır. Aşağıdaki tablolarda klasik ve dayanıklı tahminlere ait değerler verilmiştir.

Tablo 4.9. Klasik Tahmin ile Yapılan Modelleme (Altın Serisi)

	KATSAYI DEĞERİ	STANDART HATA	T DEĞERİ
SABİT	0.3145	0.07368	4.268
AR(1)	0.0262	0.0042	4.2454

Tablo 4.10. Dayanıklı I Tahmincisi ile Yapılan Modelleme (Altın Serisi)

	KATSAYI DEĞERİ	STANDART HATA	T DEĞERİ
SABİT	0.0213	0.0060	3.5394
AR(1)	0.3936	0.0986	3.9935

Tablo 4.11. Dayanıklı II Tahmincisi ile Yapılan Modelleme (Altın Serisi)

	KATSAYI DEĞERİ	STANDART HATA	T DEĞERİ
AR(1)	0.2707369	0.03819139	7.0152

Tablo 4.12. Dayanıklı III Tahmincisi ile Yapılan Modelleme (Altın Serisi)

	KATSAYI DEĞERİ	STANDART HATA	T DEĞERİ
SABİT	0.0147	0.0030	4.9209
AR(1)	0.3626	0.0728	4.9815

Yukarıdaki tablo değerlerine bakıldığında tüm tahmincilerle yapılan modellerde AR(1) katsayısının anlamlı olduğu görülür.

Klasik ve dayanıklı tahmin sonuçlarına bağlı olarak elde edilen artıklar üzerinden bulunan MSE kriteri ve Jarque-Bera istatistikleri aşağıdaki gibidir. MSE kriteri ile değerlendirme yapılırken yine örneklem içi değerler (Ocak 1995- Aralık 2008) ve sonrasında ise Ocak 2009-Eylül 2009 tarihleri arasındaki değerler kullanılmıştır.

Tablo 4.13a Klasik ve Dayanıklı Tahmin Yöntemlerine Dayalı MSE Değerleri (Altın Serisi)

MSE	KLASİK	Dayanıklı I	DAYANIKLI II	DAYANIKLI III
ÖRNEKLEM İÇİ	0.593888	0.404109064	0.468669	0.400939
Örneklem dışı	0.019563	0.022740918	0.013435	0.019002

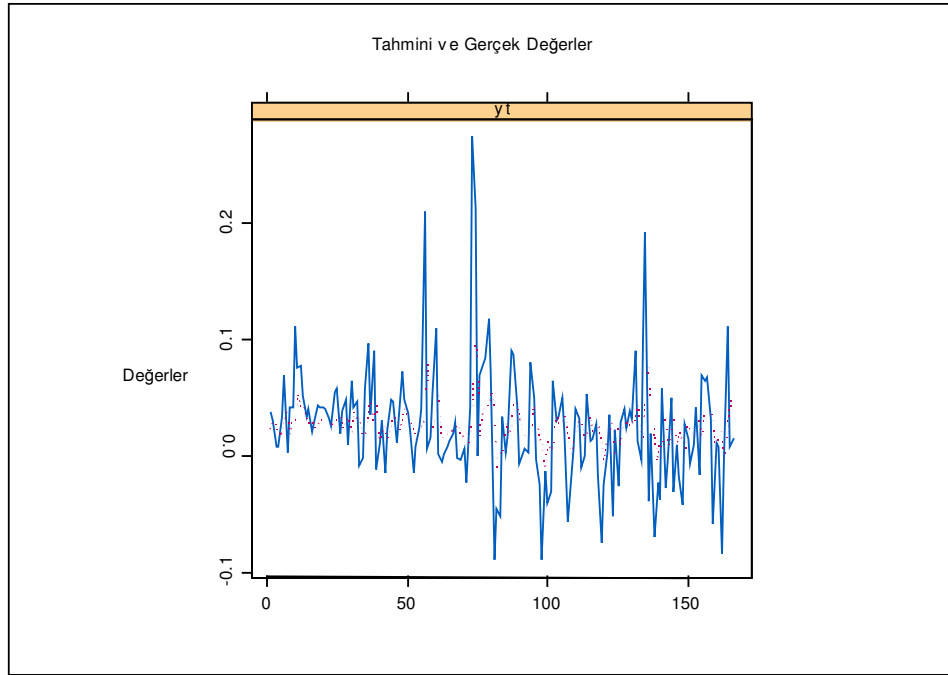
Tablo 4.13a incelendiğinde, örneklem içi değerler söz konusuysen sırayla en iyi değerleri Dayanıklı III (filtrelenmiş seriye uygulanan tahmincisi), Dayanıklı I (Yohai'nin önerdiği tahminci) ve Dayanıklı II (GM) tahmincisi vermektedir. Klasik tahminci ise sıralamada en sonda yer almaktadır. Örneklem dışı değerler söz konusu olduğunda ise en iyi değerler Dayanıklı II ve Dayanıklı III tahmincisine aittir. Bununla beraber Dayanıklı I ve klasik tahmincileri birbirine yakın değerler vererek, sıralamanın sonunda yer alır.

Tablo 4.13b Klasik ve Dayanıklı Tahmin Yöntemlerine Dayalı MAD Değerleri (Altın Serisi)

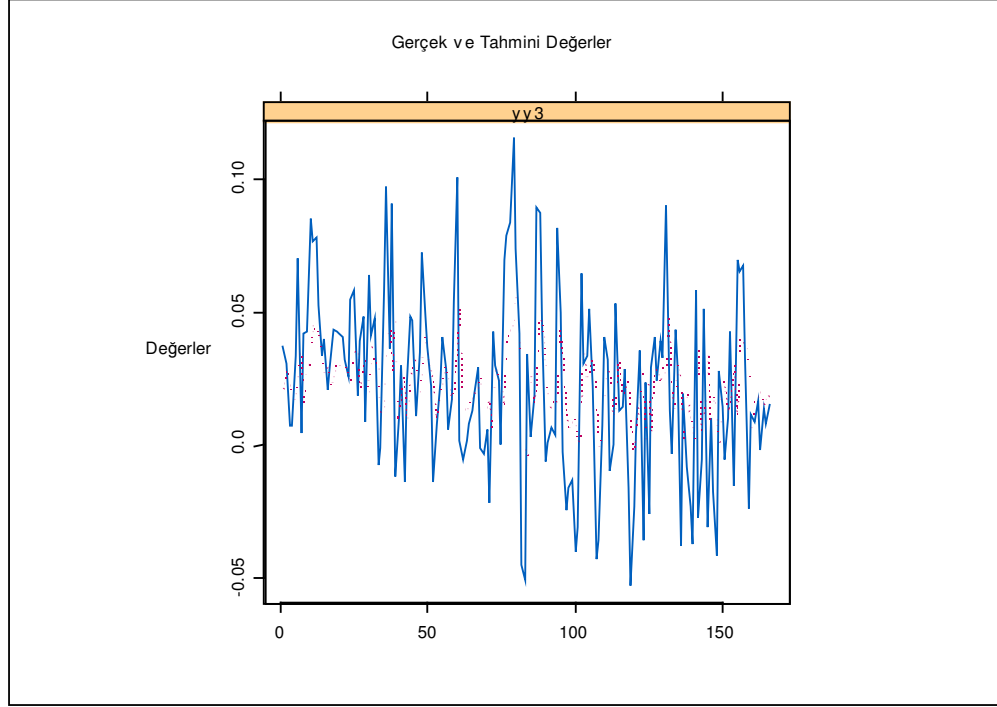
MAD	KLASİK	DAYANIKLI I	DAYANIKLI II	DAYANIKLI III
Örneklem içi	0.028691	0.02279	0.02262	0.02252
Örneklem dışı	0.034764	0.03011	0.02388	0.02896

Tablo 4.13b’ de yer alan MAD değerleri gözönüne alınarak değerlendirme yapıldığında tüm dayanıklı tahmincilerin klasik tahmine göre daha iyi sonuç verdiği görölmektedir.

Aşağıda $\hat{y}_t$ ve y_t değerlerinin çizimlerine ait şekillerden ilki klasik tahminden elde edilen $\hat{y}_t$ değerlerine aittir. Diğeri ise Dayanıklı III tahmin yönteminden elde edilen $\hat{y}_t$ değerlerine aittir. Yukarıdaki tabloyu destekleyen bu çizimlerde göröldüğü gibi klasik tahmine ait olan artıklarla, orijinal y_t değerleriyle tahmin edilenler arasındaki mesafe daha uzaktır, ölçek mesafesi daha geniştir. Dayanıklı III tahmin yönteminde ise ölçek daha az geniştir ve y_t ile $\hat{y}_t$ değerleri arasındaki mesafe daha yakındır.



Şekil 4.10. Klasik Yolla Tahminle Bulunan $\hat{y}_t$ ve y_t çizimi (Altın Serisi)



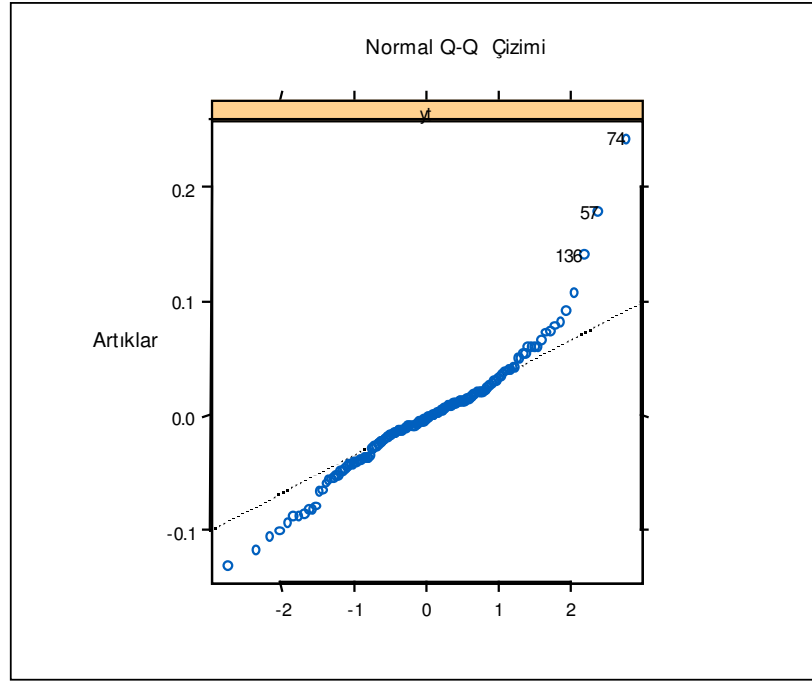
Şekil 4.11. Dayanıklı III Tahmini ile Bulunan $\hat{y}_t$ ve y_t çizimi (Altın Serisi)

Bir sonraki adımda klasik ve dayanıklı tahmin sonuçlarına ait artıkların normal dağılıp dağılmadığı incelenmiştir. Klasik tahmin yönteminden elde edilen artıklar için yapılan Jarque-Bera test istatistiğine göre hatalar normal dağılmamaktadır. Nitekim QQ grafiği de (Şekil 4.12) elde edilen bu sonucu görsel olarak desteklemektedir.

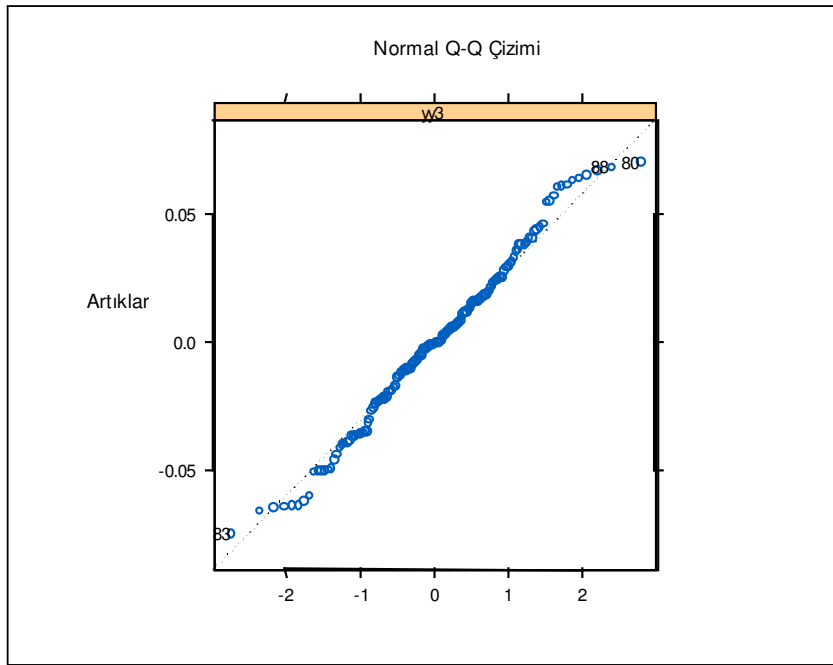
JARQUE-BERA	TEST İSTATİSTİĞİ	P-DEĞERİ
Klasik	162.9890	0.0000

Jarque-Bera istatistiği filtrelenmiş veri üzerinden elde edilen artıklar için bulunduğunda hataların normal dağıldığı sonucuna varılmıştır. Buna ait çizilen QQ grafiği aşağıdaki gibidir (şekil 4.13). İzlenebileceği gibi gözlemler büyük ölçüde çizilen temsili doğru üzerindedir.

JARQUE-BERA	TEST İSTATİSTİĞİ	P-DEĞERİ
Dayanıklı	0.6843	0.7102



şekil 4.12. Klasik Tahminle Bulunan Model Artıklarının QQ izimi (Altın Serisi)



Şekil 4.13. Dayanıklı III Tahminiyle Bulunan Model Artıklarının QQ Çizimi (Altın Serisi)

Altın serisi üzerindeki inceleme, aykırı gözlem varlığında gerek MAD kriteri gerekse JB istatistikleri baz alındığında, dayanıklı tahmincilerin klasik tahminciye göre tercih edilebilir olduğunu göstermiştir.

UYGULAMA 2

Döviz Kuru ve İMKB-100 Endeksi Arasındaki İlişkinin VAR ile İncelenmesi

Bu alt bölümde, döviz kuru ve hisse senedi (İMKB-100) arasındaki ilişki VAR modeli ile açıklanmaya çalışılmıştır. VAR modeli parametrelerinin tahmin sürecinde, klasik tahminden ve Croux'un önerdiği MLTS yaklaşımından faydalanılmıştır. Klasik ve dayanıklı yaklaşıma ilave olarak, Croux'un çalışmasında önerdiği filtelenmiş veri üzerinden yeniden tahmin metodu kullanılmıştır²⁰⁸. Her ne kadar yazar çalışmasında çoklu-ortak filtrelemenin daha uygun sonuçlar vereceğine değinmiş olsa da, bu konuda literatürdeki çalışmalarının henüz tamamlanmamış olmasından dolayı değişkenler tek tek filtrelenerek modele dahil edilmiş, MSE ve MAD kriterlerine göre sonuçlar değerlendirilmiştir. Son olarak izdüşüm izleme metodu ile ilgilenilen dönemdeki ortak aykırı gözlemler belirlenmiştir.

Literatürde döviz kuru ve hisse senedi fiyatları arasındaki ilişki üzerine çok sayıda çalışma mevcuttur. Bu çalışmaların bir kısmında ilişki pozitifken bir kısmında negatif olarak bulunmuştur. Aslındaki ilişkinin varlığı ve yönü önemlidir, çünkü yatırımcılar ve politika yapıcılar gerektiğinde bu bilgiye dayanarak karar alabilirler.

Aradaki ilişkinin negatif olması durumunda, hisse senetleri fiyatları arttığında bireyler yerel aktifleri daha çok talep eder, daha fazla yerel aktif elde etmek için de yabancı aktifleri satarlar. Döviz kurundan hisse senedine doğru bir nedensellik varlığında hisse senedi piyasasındaki krizlerin döviz kuru kontrolü ile önlenebileceği belirtilmiştir. Yine nedenselliğin tersi yönde olması durumunda hisse senedi piyasasını dengelemek için döviz kurundan bağımsız olarak yerel ekonomik

²⁰⁸ Christophe Croux, Kristel Joossens, "Robust Estimation of the Vector Autoregressive Model by a Least Trimmed Squares procedure", **COMPSTAT 2008**, Physica-Verlag HD, 2008, s:489.

politikalar benimsenebilir. Eğer ilişki iki yönlü ise yatırımcılar bir piyasadaki bilgiyi kullanarak diğer piyasanın davranışını öngörebilirler.²⁰⁹

Ocak 1995-Aralık 2008 tarihleri arasında döviz kuru serisi için DOLAR (\$/TL)'ın satış fiyatı ve hisse senedi fiyatları için İMKB Ulusal-100 endeksi kapanış fiyatları kullanılmıştır. Her iki değişkenin logaritması alınmıştır.

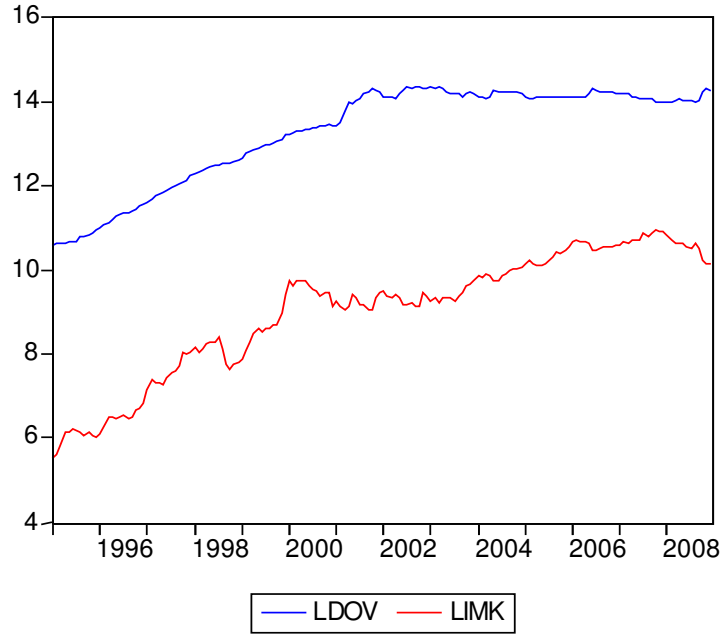
Bilindiği gibi literatürde VAR modelindeki değişkenlerin durağan olup olmamasının gerekliliği tartışma konusudur. Bir kısım yazarlar durağan olmayan serilerle yapılan analizin istatistiksel açıdan doğru olmayan sonuçlar ortaya koyabileceğini belirtirken, bir diğer kısım yazarlarsa durağanlaştırma işleminin bilgi kaybına neden olabileceğini belirtmekte ve VAR analizinin amacının parametre tahmini olmadığını, değişkenler arasındaki ilişki belirlenmesinde kullanıldığını savunmaktadırlar.

Burada ilk yaklaşım üzerinden hareket edilmiştir. Bu amaçla ilk aşamada değişkenlerin durağanlığı sınanmıştır, sonrasında durağan haldeki değişkenler arasındaki ilişkinin VAR modeli ile açıklanma sürecinde klasik ve dayanıklı yaklaşımlar kullanılmıştır. Değişkenler arası uzun dönemli ilişkinin araştırılmasının yanısıra, kısa dönemli ilişki de incelenmiştir. VECM²¹⁰ ile araştırılan bu konudaki bulgulara ekte yer verilmiştir.

Döviz kuru serisi ve İMKB-100 serilerinin logaritmalarına ait çizim yapıldığında, döviz kuru serisinin Mart 2001 tarihinde gerçekleşen rejim değişikliği ile kırılma yaşadığı görülmektedir. Bu aşamada, İMKB-100 serisindeki trend etkisi ve döviz kurundaki yapısal kırılma noktası dikkate alınarak durağanlık analizi yapılmıştır.

²⁰⁹ H. Berüment, M. Sevüktekin, “Türkiye’de İMKB ve Döviz Kuru Arasındaki Dinamik İlişkinin Belirlenmesi”, **8. Ulusal Ekonometri ve İstatistik Sempozyumu**, Malatya.

²¹⁰ VECM: Vektör Hata Düzeltme Modeli



Şekil 4.14. Logaritmik Döviz Kuru ve Logaritmik İMKB-100 Serileri

*LDOV: Logaritmik Döviz Kuru serisi (üstteki)

LİMKB: Logaritmik İMKB 100 serisi (alttaki)

Değişkenlerin durağanlığının sınanmasında ADF testi kullanılmıştır. Aşağıda da görülebilen sonuçlara göre logaritmaları alınan değişkenler birim köke sahipken, bunun üzerinden ilk farklarının alınması sonrası durağan hale gelmektedir.

Tablo 4.14. Logaritmik Döviz Kuru ve Logaritmik İMKB-100 serilerine ilişkin Birim Kök Sınaması

ADF	DÜZEY ÜZERİNDEN	BİRİNCİ FARKLAR ÜZERİNDEN
LDOV	-0.965601 (0.9448)	-4.941838 (0.0001)
LİMKB	-1.950605 (0.6234)	-9.311629 (0.0000)

*İlk değer t

istatistiğine, parantez içindeki ikinci değerse olasılık değerine karşılık gelmektedir. Test sürecinde, logaritmik değerler üzerinden modelleme yapılırken trend etkisi dikkate alınmıştır.

Analize, farkı alınarak durağanlığı sağlanmış olan logaritmik serilerle devam edilir. VAR modeli parametrelerinin tahmin sürecindeki üç yaklaşıma ilişkin bulgular aşağıdaki gibi sıralanmıştır. Bu üç yaklaşım, klasik tahmin, MLTS tahmini ve filtre edilmiş veri üzerinden tahmindir. Filtre edilmiş veri üzerinden hem MLTS hem de klasik yolla yapılan tahmin sonuçları hemen hemen aynı olduğu için sonuçlar ayrı ayrı yansıtılmamış, tabloda sadece filtre edilen veriye dayalı klasik tahminciye yer verilmiştir. Ayrıca Mart 2001 tarihindeki döviz kuru rejim değişimi dikkate alınarak ve klasik modele kukla değişken eklenerek tahmin yapılmıştır. Gerek klasik gerekse dayanıklı yaklaşımla tahmin edilen modeller AIC kriterine göre uygun gecikmeyi 2 olarak belirlemiştir.

Tablo 4.15. Klasik yolla VAR Modelinin Tahmini

	İMKB	DÖVİZ
SABİT	0.0057 (0.0102) 0.558824	0.0109 (0.0037) 2.945
İMKB(-1)	0.3488 (0.0801) 4.36	-0.0062 (0.0290) -0.214
DÖVİZ(-1)	0.5012 (0.2171) 2.31	0.5899 (0.0786) 7,505
İMKB(-2)	-0.0775 (0.0770) -1.006	0.0624 (0.0279) 2.236
DÖVİZ(-2)	0.0913 (0.2234) 0.408	-0.1698 (0.0809) -2.098

*Tablodaki ilk değer katsayı tahminine, parantez içindeki ikinci değer standart hataya ve son değer t istatistik değerine karşılık gelmektedir.

Tablo 4.15 sonuçlarına göre, İMKB değişkenini İMKB(-1) ve DÖVİZ(-1) değişkenleri aynı yönde etkilemektedir. Döviz değişkeni ise İMKB(-2) ve DÖVİZ(-1)'den aynı yönlü etkilenirken, DÖVİZ(-2)' den ters yönlü etkilenir.

Tablo 4.16. Klasik Modele Müdahale Değişkeninin Eklenmesiyle Bulunan Tahminler

	İMKB	DÖVİZ
SABİT	0.0083 (0.0176) 0.4716	0.0333 (0.00595) 5.596
İMKB(-1)	0.3472 (0.08218) 4.252	-0.0203(0.02775) -0.7315
DÖVİZ(-1)	0.4883(0.2627) 1.858	0.4764(0.0887) 5.371
İMKB(-2)	-0.0800 (0.08) -1	0.0403(0.027) 1.493
DÖVİZ(-2)	0.0851 (0.234) 0.364	-0.2240 (0.079) -2.835
KUKLA	-0.0071 (0.0195) -0.3637	-0.02157 (0.007) -3.106

Önceki tahmin sonuçlarına uygun olarak Tablo 4.16'de de İMKB değişkenini İMKB(-1) ve DÖVİZ(-1) değişkenleri aynı yönde etkiler. Döviz değişkeni ise DÖVİZ(-1)'den aynı yönlü etkilenirken, DÖVİZ(-2)' den ters yönlü etkilenir. İMKB'yi açıklamada İMKB(-2) ve DÖVİZ(-2) istatistiksel olarak yeterli değildir. DÖVİZ'in açıklanmasında İMKB(-1) ve İMKB(-2) değişkenleri anlamlı bulunmamıştır. Öte yandan beklendiği gibi kukla değişken DÖVİZ değişkeni üzerinde etkiye sahipken, İMKB değişkeni üzerinde etkisi yoktur.

Tablo 4.14' te birim kök sonuçlarına yer verilmekle beraber, kırılma noktasının önceden bilindiği varsayımından hareketle, yukarıdaki modele uygun biçimde yeniden birim kök sınaması yapılmıştır, sonuçlar aşağıdaki gibidir:

Tablo 4.17. Logarimik Döviz Kuru ve Logaritmik İMKB-100 serilerine ilişkin Birim Kök Sınaması (LS Noktasının Dikkate Alındığı)

	DÜZEY ÜZERİNDEN
ARTIK DEĞİŞKEN	-2.543679 (0.1071)

*Test sürecinde modelde sabite yer verilmiştir.

Yapısal kırılma söz konusu olduğunda Perron (1989) sürecine dayalı test kullanılır. Kırılma noktasının bilindiği varsayılıarak bu yaklaşımla model yeniden düzenlenip ADF testi uygulanır ve serilerin durağan olmama etkilerinin devam edip etmediği görülür. Buna göre, döviz kurunda 2001 yılında gerçekleşen rejim değişikliği, kırılma noktası olarak dikkate alınarak yapılan yapılmıştır. Tablo 4.17. dikkate alındığında, LS noktasından bağımsız olarak birim kök varlığından söz edilebileceği sonucuna ulaşılır.

Tablo 4.15 ve Tablo 4.16’da yer verilen VAR modeli tahminlerinin sonuçlarına aşağıda devam edilmiştir:

Tablo 4.18. MLTS ile VAR Modelinin Tahminine Dayalı Sonuçlar

	İMKB	DÖVİZ
SABİT	0.0135(0.0268) 0.5037	0.0066(0.0147) 0,4489
İMKB(-1)	0.2181(0.2112) 1.0326	-0.0076(0.1160) -0,0655
DÖVİZ(-1)	0.3321(0.5728) 0.5797	0.7690(0.3145) 2.445
İMKB(-2)	0.0011(0.2032) 0.0054	0.0194(0.1116) 0.1738
DÖVİZ(-2)	0.2121(0.5893) 0.3599	-0.0418(0.3236) -0.129

MLTS tahminine dayalı sonuçlarsa (Tablo 4.18) sadece DÖVİZ(-1)’in DÖVİZ’i açıklamada istatistiksel olarak yeterli olduğunu göstermektedir. Diğer değişkenler arasında anlamlı ilişki bulunamamıştır.

Tablo 4.19. Filtre Edilen Seri Üzerinden VAR Modeli Tahmin Sonuçları

	İMKB	DÖVİZ
SABİT	0.0079(0.0077) 1.026	0.0100(0.0038) 2.64
İMKB(-1)	0.1827(0.0789) 2.316	-0.0363(0.0383) -0.947
DÖVİZ(-1)	0.2273(0.1611) 1.420	0.5936(0.0782) 7.591
İMKB(-2)	0.0450(0.0774) 0.581	0.1258(0.0375) 3.354
DÖVİZ(-2)	0.1342(0.1625) 0.826	-0.1549(0.0788) -1,967

Tablo 4.19 sonuçlarına göre, İMKB değişkenini İMKB(-1) değişkeni aynı yönde etkilemektedir. Döviz değişkeni ise İMKB(-2) ve DÖVİZ(-1)'den aynı yönlü etkilenirken, DÖVİZ(-2)' den ters yönlü etkilenmektedir. Bu sonuç klasik tahminle elde edilen sonuca benzemektedir.

Parametrelerin tahmin sürecindeki Klasik, MLTS ve filtre edilmiş veri üzerinden tahmin yaklaşımlarına ait MSE değerleri aşağıda sıralanmıştır.

Tablo 4.20a Klasik ve Dayanıklı Yöntemlere Dayanarak Elde Edilen VAR Modelinin MSE kriterine göre değerlendirilmesi

TAHMİN YÖNTEMİ /ÖRNEKLEM DURUMU	KLASİK	KLASİK+ KUKLA	DAYANIKLI- MLTS	FİLTRE
ÖRNEKLEM İÇİ	0.00686	0.00676	0.00709	0.00415
Örneklem dışı	0.006641	0.006464	0.006257	0.006073

Tablo 4.20b Klasik ve Dayanıklı Yöntemlere Dayanarak Elde Edilen VAR Modelinin MAD kriterine göre değerlendirilmesi

TAHMİN YÖNTEMİ /ÖRNEKLEM DURUMU	KLASİK	KLASİK+ KUKLA	DAYANIKLI- MLTS	FİLTRE
ÖRNEKLEM İÇİ	0.0430	0.0405	0.04205	0.0367
Örneklem dışı	0.0658	0.0618	0.06235	0.0334

MSE değerlerini gösteren yukarıdaki Tablo 4.20a incelendiğinde örneklem içi ve dış değerler için en iyi sonucun filtre edilmiş veriler üzerinden yapılan tahminle elde edildiği görülür. MAD kritik değerleri de (Tablo 4.20b) filtre edilen seri üzerinden en iyi sonucun elde edilebileceği sonucunu belirgin biçimde doğrular. Bu farklılık özellikle MAD lt ile daha da öne çıkmıştır. Her iki kriter dikkate alındığında Klasik yöntemin örneklem dışı için en kötü sonucunu verdiği görülür. Döviz kurundaki rejim değişiminin dikkate alınmasıyla yapılan tahmin sonucu ise farkedilir düzeyde gerek örneklem içi gerekse örneklem dışı için iyi olarak nitelenebilecek bir sonuç vermektedir. Örneklem dışı veriler için en iyi ikinci skora sahip olan dayanıklı-MLTS’ dir.

Bu veriden hareketle yapılan VAR modeli tahminlerinde filtre edilmiş veri üzerinden bulunan değerlerin MAD kriterine göre tartışmasız en iyi sonucu verdiği görülmüştür. Aynı kritere göre MLTS’nin klasik tahminciye daha iyi sonuçlar vermesinden dolayı, dayanıklı yaklaşımın tercih edilebilir olduğunu söylemek mümkündür.

Burada ayrıca faiz oranı ve döviz kuru arasındaki kısa dönem ilişkisi de VECM modeli ile araştırılmış, Block Exogeneity Wald Testi ile değişkenler arasındaki nedensellik incelenmiştir. Bu işlemler yapılırken, filtre edilmiş seriler üzerinden de gidilmiştir. Kısa dönem ilişkisine dair her iki durum için bulunan sonuçlar aşağıda özetlenmiştir.

Normal veriye uygulanan VECM modeline göre;

DÖVİZ(-1) ve İMKB(-2) değişkenleri DÖVİZ değişkenini aynı yönlü etkiler.

DÖVİZ(-2) değişkeni ise ters yönlü etkiler.

İMKB(-1) ve DÖVİZ(-1) değişkenleri İMKB değişkenini aynı yönlü etkiler.

Filtre edilmiş veriye uygulanan VECM modeline göre;

DÖVİZ(-1) değişkeni DÖVİZ değişkenini aynı yönlü etkiler.

İMKB(-1) ve DÖVİZ(-1) değişkenleri İMKB değişkenini aynı yönlü etkiler.

Verinin filtrelenmesi sonrasında kısa dönemde hisse senedi piyasasındaki değişmelere karşı döviz kurunun inelastik olduğu söylenebilir. Oysa veri filtrelenmeden önce İMKB değişkeninin gecikmeli olarak döviz etkilediği sonucu görülmektedir. Filtreleme işlemi sonrasında döviz kurundaki artışın İMKB’de de getirilerin artışına neden olduğu sonucu değişmemiştir. Block Exogeneity Wald Testi ile değişkenler arasındaki nedensellik incelendiğinde %5 anlam düzeyinde değişkenler arasında nedensellik ilişkisinden söz edilemez. Filtreleme işlemi sonrasında elde edilen skorlar da bu sonucu destekler. Bu sonuçları gösteren tablolara ekte yer verilmiştir.

İzdüşüm izleme metodu ile İMKB-100 ve Döviz Kuru değişkenleri üzerinden ortak hareketle beş aykırı gözlem noktası belirlenmiştir. Belirlenen bu aykırı gözlemler ve türleri şöyledir:

12.2000	AO türü,
03.2001	IO türü,
05.2001	TC türü,
06.2006	TC türü,
10.2008	LS türü,

Aşağıda bu aykırı gözlemlere karşılık gelen tarihsel olaylar şöyle sıralanmıştır:

12.2000	AO türü, Kapatılan bankalar- Yabancı yatırımcıların ayrılışı, 22 Kasım finansal kriz etkisi
03.2001	IO türü, Kemal Derviş Güçlü Ekonomiye Geçiş politikası
05.2001	TC türü, IMF onaylı programa geçiş etkisi
06.2006	TC türü, Global Kriz öncesi sinyaller
10.2008	LS türü, Global Kriz Etkisi

İzdüşüm izleme tekniği ile bulunan bu noktalar, iki serinin birlikte, eşzamanlı olarak etkilendiği tarihlerdir. İki seri arasında açıklanan ilişkinin gecikmeli olması, bu belirlenmiş olan aykırı gözlem sayısının neden serilerin tek tek incelenmesiyle elde edilen aykırı gözlem sayısına göre daha az olduğunun bir açıklaması olarak düşünülebilir.

UYGULAMA 3

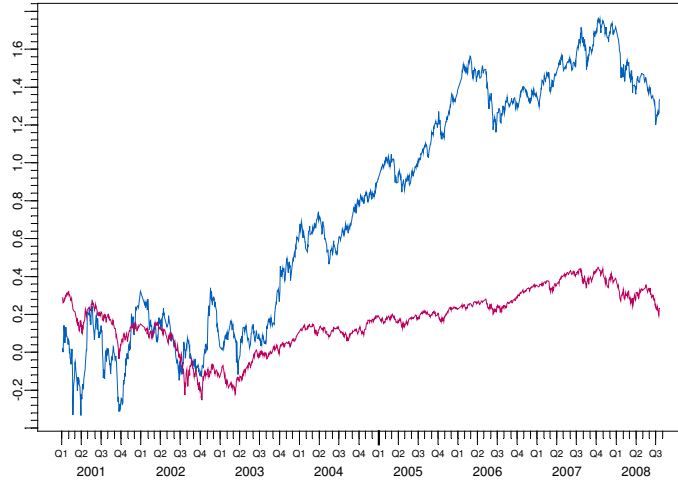
İMKB100 ve SP500 Endeksleri Arasındaki İlişkinin Çok Değişkenli GARCH ile Araştırılması

İMKB100 ve SP500 endekslerine ait veri 04 Ocak 2001 - 18 Temmuz 2008 tarih aralığında incelenmiştir. Bu dönem içerisinde ülkelerin ortak işlem günleri esas alınarak kesişen tarihlerdeki 1512 gözlemle çalışılmıştır. Seriler günlük kapanış değerleri ile oluşturulmuş ve analizde de logaritmalarının farkı alınarak getiri serilerine dönüştürülmüştür.

İlk olarak iki piyasa arasındaki ilişki EÇO yöntemine dayalı çok değişkenli GARCH (BEKK) modeliyle incelenmiştir. Sonrasında ise yine aynı model Boudt'un önerdiği sınırlandırılmış M (BIP-BEKK) tahmincisi ile tahmin edilmiştir²¹¹. BEKK modeli simetrik şekilde oluşturulmuş ve BIP-BEKK yaklaşımıyla tahmin sürecinde Boudt'a ait R kodları kullanılmıştır.

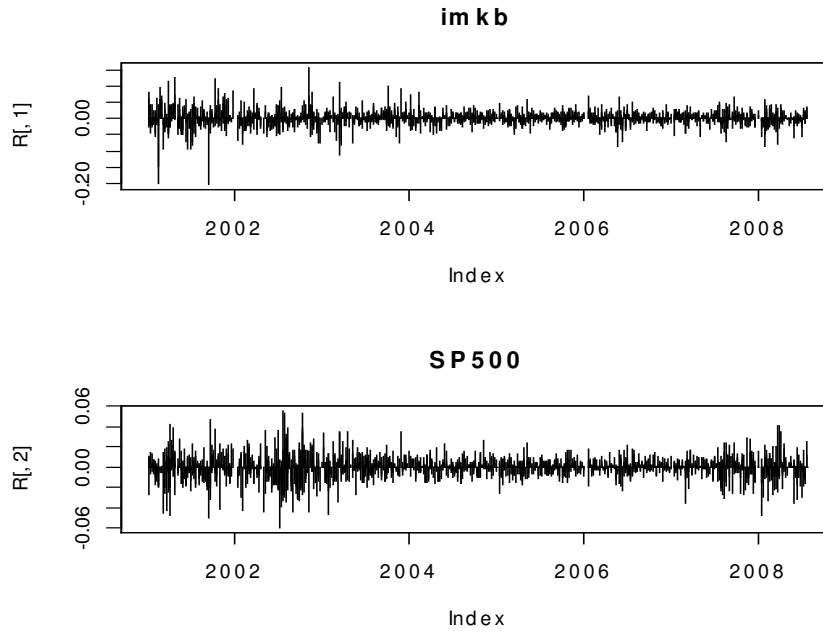
İlk aşamada her iki endeks değerine ait şekil ve betimleyici istatistik değerlerine yer verilmiştir.

²¹¹Kris Boudt, Christophe Croux, "Robust M-Estimation of Multivariate GARCH Model", **Computational Statistics and Data Analysis**, (basım aşamasında).



Şekil 4.15. Logaritmik İMKB100 ve Logaritmik SP500 Serilerinin Çizimi

Şekil 4.15, İMKB-100 (üstteki) ve SP-500 endekslerinin logaritmalarına dayalı olarak çizilmiştir. Bu çizimler incelendiğinde özellikle 2001-2003 ile 2007-2008 tarihleri arasında her iki endeksin seyrinin benzer olduğu görülmektedir.



Şekil 4.16. Farkı Alınmış Logaritmik İMKB ve Farkı Alınmış Logaritmik SP500 Serilerinin Çizimi

Şekil 4.16 ise getiri serilerine aittir ki bunun için bilindiği gibi logaritması alınmış seriler üzerinden fark alma işlemi yapılır. Şekillerdeki ölçek farklılığı serilerin volatilitésinin yorumlanmasında yanılgılara neden olabileceğinden çeşitli istatistik değerlerine başvurulmuştur.

Başvurulan bu özet istatistik bilgileri Tablo 4.21’de yer almaktadır. Tabloya göre getiri serilerinin ortalama değeriyle ölçülen hisse senetleri performansının İMKB için daha iyi olduğu görülmekle beraber, İMKB’ nin standart sapmasının daha yüksek olması yüzünden volatilitésinin yüksek olduğu söylenebilir. Her iki serinin asimetrisi “0” dan küçük ve basıklığı ise 3’ten fazladır.

Tablo 4.21. İMKB100 –SP500 Serileri Özet İstatistikleri

	ORTALAMA	MEDYAN	STANDART SAPMA	ASİMETRİ	BASIKLIK
İMKB-100	0.000870	0.0014800	0.02696	-0.3802	10.006
SP-500	-0.000037	0.0005138	0.01214	-0.1503	5.773

* Tablodaki veriler getiri serileri üzerinden hesaplanmıştır

EÇÖ’ya dayalı BEKK modelinin parametrelerine ait tahmin sonuçlar, Tablo 4.22’de yer almaktadır. Köşegen elemanlarına bakılarak ARCH ve GARCH etkileri, köşegen dışındaki elemanlara bakılırsa karşılıklı piyasaların şok ve volatilité saçılım etkileri değerlendirilir. Eğer köşegendeki değerler istatistiksel olarak anlamlı ise güçlü bir GARCH(1,1) süreci söz konusudur; köşegende olmayan elemanların istatistiksel olarak anlamlı olması halinde ise karşılıklı piyasalar arasında güçlü bir bağ olduğu söylenebilir²¹².

²¹²BEKK modellerinde köşegen olan ve olmayan elemanların değerlendirilmesi konusunda faydalanılan iki kaynak için bkz.1-Li Hong and Majerowska, “Testing Stock Market Linkages for Poland and Hungary:A multivariate GARCH approach”, **Research in International Business and Finance**, 22(3), 2008, s.247-266. 2- Zhuo Qiao, Thoma Chiang, Wing-Keung Wong, “Long-run equilibrium, short-term adjustment, and spillover effects across Chinese segmented stock markets and

Tablo 4.22. EÇO’ya Dayalı BEKK Modelinin Parametre Tahminleri

	KATSAYI	S.HATA	T DEĞERİ
A(1, 1)	6.876e-006	1.465e-006	4.693
A(2, 1)	4.083e-007	1.986e-007	2.056
A(2, 2)	1.077e-006	2.693e-007	4.000
ARCH(1; 1, 1)	5.144e-002	5.176e-003	9.938
ARCH(1; 2, 1)	1.446e-002	4.702e-003	3.075
ARCH(1; 2, 2)	5.246e-002	8.048e-003	6.518
GARCH(1; 1, 1)	9.394e-001	4.533e-003	207.241
GARCH(1; 2, 1)	9.778e-001	6.888e-003	141.957
GARCH(1; 2, 2)	9.395e-001	8.976e-003	104.668

* “1” İMKB için ,
“2” SP500 için

Buna göre, piyasaların kendi geçmiş değerlerine bağlı olduğu ve aralarında hem çok hem de volatilité saçılımının olduğunu söylemek mümkündür. Saçılımın hangi yönde olduğunun tespit edilmesi için modelin asimetrik modellenmesi gerekir.

the Hong Kong stock market”, *Journal of International Financial Markets, Institutions & Money*, 18, (5), 2008, s.425-437.

Tablo 4.23. BIP-BEKK Model Parametrelerinin Tahmini

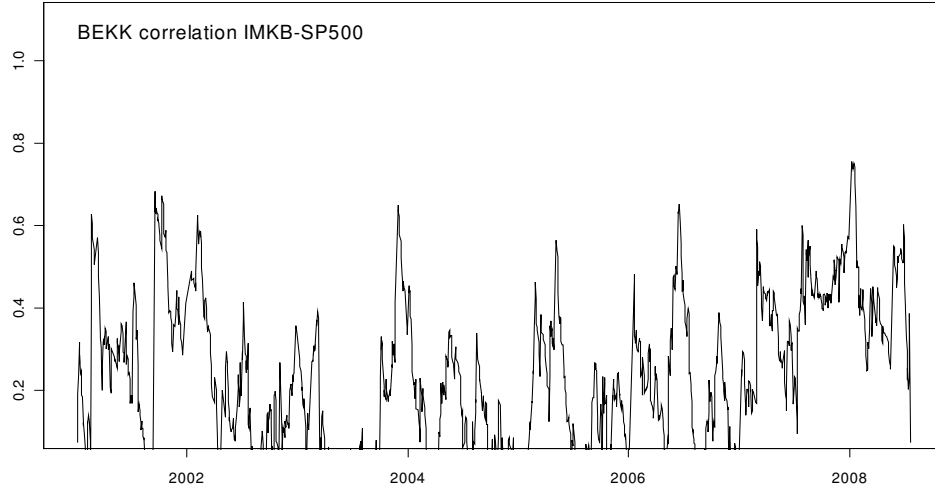
	KATSAYI	S.HATA	T DEĞERİ
A(1, 1)	0.00173643	3.989e-004	4.3530
A(2, 1)	0.00011226	4.745e-005	2.3651
A(2, 2)	0.00099921	1.398e-004	7.1474
ARCH(1; 1, 1)	0.15398176	2.236e-002	6.8860
ARCH(1; 2, 1)	0.01031350	5.022e-003	2.0531
ARCH(1; 2, 2)	0.22956232	6.498e-002	3.5320
GARCH(1; 1, 1)	0.98561875	2.023e-002	48.720
GARCH(1; 2, 1)	0.00057219	0.988e-002	0.0579
GARCH(1; 2, 2)	0.96916646	1.367e-002	70.897

* “1” İMKB için ,

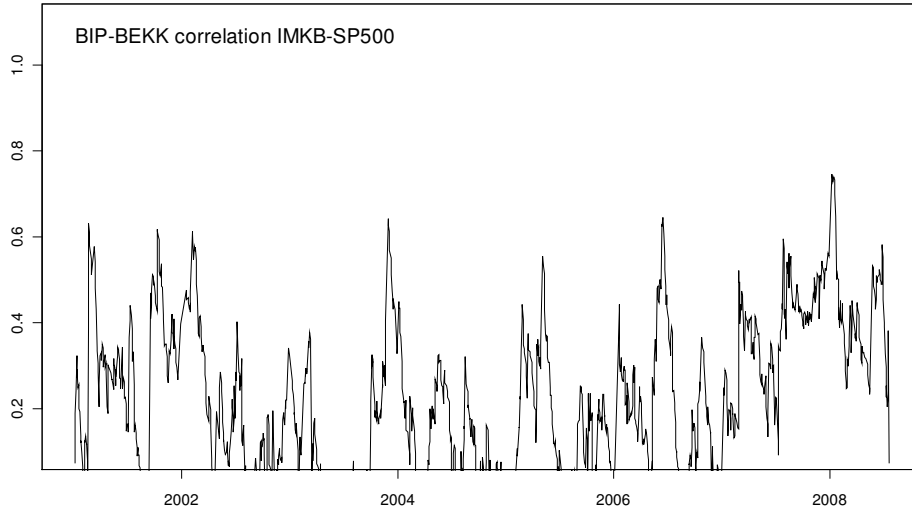
“2” SP500 için

Tablo 4.23'teki dayanıklı yaklaşımla bulunan BEKK parametre tahminlerine göre, klasik yolla bulunan tahmin sonuçlarına benzer şekilde, piyasaların kendi geçmiş değerlerine bağlı olduğunu söylemek mümkündür. Ama köşegende olmayan elemanlara bakıldığında İMKB 100 ve SP500 arasında sadece şok saçılımının olduğu volatilitite saçılımının olmadığı söylenebilir.

Şekil 4.17 ve Şekil 4.18'de klasik ve dayanıklı yolla elde edilen BEKK korelasyon çizimleri görülmektedir. Bu çizimlere bakıldığında bazı dönemlerde endeksler arasındaki korelasyonun 0.6'nın üzerine çıktığı ama bazı dönemlerde ise 0.2'nin altına indiği görülmektedir. Her iki yaklaşım değerlendirildiğinde, korelasyon rakamları arasında çok farklılık olmadığı görülmüştür. Dolayısıyla çizimler de birbirine benzemektedir.



Şekil 4.17. İMKB-SP500 Serileri Arası BEKK Korelasyonuna Ait Çizim



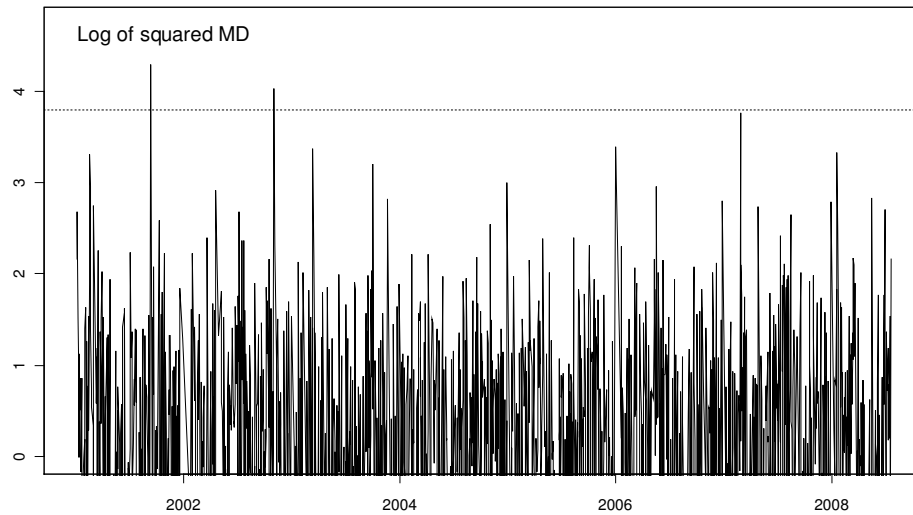
Şekil 4.18. İMKB-SP500 Serileri Arası BIP-BEKK Korelasyonuna Ait Çizim

İki seri üzerinden elde edilen Mahalanobis Uzaklıklarına ait çizimle aykırı gözlemler belirlenmeye çalışılmıştır (Şekil 4.19). Buna göre her iki seride belirlenen ortak üç aykırı gözlem aşağıdaki gibidir:

Eylül 2001 11 Eylül ikiz kulelerin bombalanması
Mart 2003 ABD'nin 11 Eylül sonrası misilleme saldırılarında artış
Ekim 2007 Global Ekonomik Kriz

Fakat referans doğrusu dikkate alınmaksızın öne çıkan noktalar sıralandığında şu tarihlere ulaşılır:

- Şubat, Mart, Mayıs, Eylül 2001
- Mart, Ekim 2003
- Nisan, Aralık 2004
- Haziran 2006
- Mayıs, Ekim 2006
- Ekim 2007
- Nisan 2008



Şekil 4.19. İMKB-SP500 Serilerinin Mahalanobis Uzaklığına Ait Çizimi

Sonuç olarak her iki piyasa arasında korelasyon çizimlerine göre bir ilişki olduğunu söylemek mümkündür, nitekim BEKK model tahmin sonuçları da karşılıklı şok saçılımı olduğunu göstermektedir. Ayrıca incelenen tarih aralığında her iki serinin eş dönemli olarak etkilendiği üç aykırı gözlem noktası belirlenmiştir.

SONUÇ

İktisadi zaman serilerinin analiz aşamasında aykırı gözlem varlığını dikkate alan çalışmaların sayısı son zamanlarda artış göstermektedir. Literatürde aykırı gözlem etkilerinin üstesinden gelebilmek için önerilen yaklaşımlardan biri model parametrelerini klasik yolla tahmin ederek, artıklar üzerinden hareketle aykırı gözlemlere ulaşmak, aykırı gözlemleri belirlemek ve onları müdahale model yapısına uygun hale getirmekken, ikincisi dayanıklı tahminler kullanmak ve bu yolla aykırı gözlemlerden çok fazla etkilenmeyen tahminlere ulaşmaktır. Nitekim, Huber²¹³, in tahmincinin dayanıklılık özelliğini dikkate alma işlemini bir tür “sigortalama işlemine” benzetmesi, analiz aşamasında bu konunun ne denli önemli olduğunu ifade eden yerinde bir vurgudur.

Çalışmanın ilk üç bölümünde sırasıyla ARMA, GARCH ve MGARCH modellerinin EKK ve EÇO tahminleri üzerindeki etkileri açıklanmış, aykırı gözlemlerin belirlenmesine ilişkin yaklaşımlar anlatılmış, EÇO ve EKK yerine önerilen dayanıklı tahminciler ele alınmıştır. Ayrıca çeşitli test istatistikleri üzerindeki aykırı gözlem etkileri de dikkate alınmış ve bunların yerine bahsedilen alternatif dayanıklı tekniklere değinilmiştir. Çalışmanın, bu geniş kapsam ve içerdiği konular açısından özgünlüğüyle, konu üzerinde çalışma yapacak araştırmacılara yol gösterici nitelikte olacağı düşünülmektedir.

Üç kısımdan oluşan uygulamanın ilk bölümünde, öncelikle Ocak 1950-Eylül 2009 tarihleri arasında farkı alınmış logaritmik döviz kuru serisi üzerinden, aykırı gözlemler belirlenmiş ve belirlenen bu noktaların kriz, rejim değişimi, deprem ya da politik istikrarsızlık gibi özel tarihlere karşılık geldiği görülmüştür. Ocak 1995 ve Aralık 2008 tarihleri arasında sınırlandırılan farkı alınmış logaritmik döviz kuru serisi AR(1) yapısı ile modellenerek, modelin klasik ve dayanıklı yollarla parametre tahminleri yapılmıştır. Ayrıca 2001 tarihindeki rejim değişimi müdahale değişkeni olarak modele dahil edilmiş ve buna göre sonuçlar değerlendirilmiştir. Farklı tahmin

²¹³ P.J. Huber, “Robust statistics: a review”, *The Annals of Mathematical Statistics* 43, 1972, s.1041–1067.

sonuçlarından elde edilen artıkların normal dağılmaması, döviz kuru için yapılan ARMA model yapısının uygun olmayabileceğini düşündürdüğünden, altın fiyatları serisi ile ARMA modellemesine devam edilmiş ve aynı adımlar izlenmiştir. Bu seri üzerinde belirlenen aykırılık gösteren tarihlerin gerçekleşen sıra dışı olaylara karşılık geldiği tespit edilmiştir. Ayrıca, dayanıklı tahmin sonuçlarının aykırı gözlemlerin bulunduğu örneklem dışı değerlerde daha dirençli yapı sergilediği ve sonunda bu tahminler üzerinden elde edilen hataların normal dağıldığı görülmüştür.

Uygulamanın ikinci bölümünde, döviz kuru ve İMKB-100 serileri arasındaki ilişki VAR model yapısı ile incelenmiş, parametre tahminleri dayanıklı ve klasik yollarla yapılmıştır. Bunun yansira aykırı gözlem etkilerinin filtrelenmesiyle elde edilen yeni seri üzerinden çeşitli nedensellik testleri uygulanmış, her iki seriyi eşzamanlı olarak etkileyen aykırı noktalar belirlenmiş ve örneklem dışı değerler alınarak her iki farklı tahmin yaklaşımının sonuçları yorumlanmıştır.

Son kısımda ise İMKB-100 ve SP-500 endeksleri arasındaki şok ve volatilité etkileşimi BEKK model parametreleri hem klasik hem de dayanıklı yaklaşımla tahmin edilerek değerlendirilmiş, her iki piyasayı etkileyen ortak aykırı gözlemler belirlenmiştir. Klasik yaklaşımla parametreleri değerlendirme aşamasında, piyasalar arasında şok ve volatilité yayılımı olduğu sonucuna varılırken, dayanıklı yaklaşımla değerlendirme aşamasında piyasalar arasında volatilité yayılımı olmadığı sadece şok yayılımı olduğu sonucuna varılmıştır.

Böylelikle uygulama bölümünde üç farklı veri yapısı incelenerek, aykırı gözlemler belirlenmeye çalışılmış, aykırı gözlemlerin klasik ve dayanıklı tahminciler üzerindeki etkisi tahmin/öngörüler doğrultusunda MSE ve MAD kriterlerine göre değerlendirilmiştir. Bu kritik değerlere göre, dayanıklı tahmincilerin daha güvenilir sonuçlar verdiği ve bu tahmincilere dayalı olarak açıklanan ilişkilerin tatmin edici olduğu, aykırı gözlemlerin belirlenmesinde kullanılan yöntemlerin gerçekte örtüştüğü sonucuna varılmıştır.

Bu sonuca dayanarak tekrar vurgulanmalı ki, “iktisadi analizlerin tahmin ve ilişkiyi açıklamak gibi iki temel sorunsalının çözümüne ilişkin aşamaları etkileyen ve yanlış sonuçlara neden olabilen aykırı gözlemlerin, analiz aşamasında dikkate alınması ve dayanıklı tahmin tekniklerinin kullanılması gerekir.”

KAYNAKÇA

KİTAPLAR

Barnett, V., T. Lewis: **Outliers in Statistical Data**, 3.bs, New York, John Wiley, 1994.

Birkes, D.,Y. Dodge: **Alternative methods of regression**, New York, Wiley, 1990.

Box, George E.P., Gwilym Jenkins: **Time Series Analysis Forecasting and Control**, 4. bs., New York, John Wiley&Sons, 2008,

Casella, G., R. Berger: **Statistical Inference**, 2.bs, USA, Duxbury, 2001.

Cook, D., S. Weisberg: **Residuals and influence in regression**, Great Britain, Chapman&Hall,1992.

Enders, Walter: **Applied Econometric Time Series**, 2. bs., New York, John Wiley&Sons, 2004.

Franses, Philip Hans: **Time Series Models for Business and Economic Forecasting**, Cambridge, Cambridge University Press 1998.

Franses, Philip,H., Dick Van Dijk: **Non-Linear Time Series Models in Empirical Finance**, Cambridge University Press, 2002.

Greene, William H.: **Econometric Analysis**, 4. bs., USA, Prentice Hall, 2000.

Gujarati, Damodar N.: **Basic Econometrics**, İstanbul, Literatür Yayıncılık, 1995.

Harris Richard, Robert Sollis, **Applied Time Series Modelling and Forecasting**, USA, Wiley, 2003.

Helmut Lütkepohl, **New Introduction to Multiple Time Series Analysis**, Berlin, Springer-Verlag, 2005.

Huber, P.J.: **Robust Statistics**, New York, Wiley,1981.

Hubert, Mia, **Regression Techniques**, Leuven, ACCO, 2005.

Liu, Lon-Mu: **Time Series Analysis and Forecasting**, 2.bs, Scientific Computing Associates Corp., 2009.

Nemlioğlu, Karun: **Birim Kök Analizinin Temelleri**, İstanbul, Beşir Kitabevi, 2006.

Pankratz, A: **Forecasting with Dynamic Regression Models**, New York, John Wiley & Sons, 1991.

Pena Daniel, George Tiao, Ruey Tsay, **A Course in Time Series Analysis**, New York, Wiley, 2001.

Ricardo, A., R. Maronna, M.Douglas, Y. J. Víctor: **Robust Statistics**, New York, John Wiley & Sons, 2006.

Rousseeuw, P.J., A. M. Leroy: **Robust regression and outlier detection**, New York, Wiley, 1987.

Staudte, R., S. Sheather: **Robust estimation and testing**, USA, Wiley, 1989.

Tsay, Ruey S.: **Analysis of Financial Time Series**, USA, John Wiley & Sons, 2002

Verbeek, Marno: **A Guide to Modern Econometrics**, Chichester, John Wiley&Sons, 2000.

William, Wei: **Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods**, 2.bs, USA, Pearson Addison Wesley, 2006.

Zivot, Eric, Jiahui Wang: **Modeling Financial Time Series with S-PLUS**, 2.bs., USA, Springer, 2005.

MAKALELER

Abraham B., N. Yatawara: “A Score Test For Detection Of Time Series Outliers”, **Journal Of Time Series Analysis**, 9, 1988, s. 109–19.

Abraham, B., A. Chuang: “Expectation-Maximisation Algorithms And The Estimation Of Time Series Models In The Presence Of Outliers”, **Journal Of Time Series Analysis** 14, 1993, s. 221–34.

Agullo, Jose, Christophe Croux, Stefan Van Aelst: “The multivariate least-trimmed squares estimator”, **Journal of Multivariate Analysis**, Vol. 99, 2008, s. 311–318.

Angelidis Timotheos ,A. Benosi S. Degiannakis: “The Use of GARCH Models in VAR Estimation”, **Statistical Methodology**, 1 (2), 2004, s: 105-128.

Aparicio, Felipe, Alvaro Escibano, Ana E. Sipols: “Range Unit-Root (RUR) Tests: Robust Against Nonlinearities, Error Distributions, Structural Breaks And Outliers”, **Journal of Time Series Analysis**, 27, 4, 2006, s. 545-576.

Arat, Kürşad: “Türkiye’de Optimum Döviz Kuru Rejimi Seçimi ve Döviz Kurlarından Fiyatlara Geçiş Etkisinin İncelenmesi”, Uzmanlık Tezi, Merkez Bankası, 2003.

Baillie, Bollerslev: “The Message In Daily Exchange Rates: A Conditional Variance Tale”, **Journal of Business and Economic Statistics** , 7, 1989, s. 297–305.

Baillie, Richard T., Tim Bollerslev, Hans Ole Mikkelsen: “Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity”, **Journal of Econometrics**, 74, 1996, s. 3–30

Bali, Rakesh, Hany Guirguis: “Extreme observations and non-normality in ARCH and GARCH”, **International Review of Economics and Finance**, 16, 2007, s:332-346

Balke, N. S., T. S. Fomby: “Large shocks, small shocks, and economic fluctuations: Outliers in macroeconomic time series”, **Journal of Applied Econometrics**, 9, 1994, s.181–200.

Baragona, Roberto, Francesco Battaglia: “Outliers Detection In Multivariate Time Series by Independent Component Analysis”, **Neural Computation**, 19 , 7, 2007, s. 1962-1984.

Battaglia, Francesco, Lia Orfei: “Outlier Detection And Estimation In Nonlinear Time Series”, **Journal Of Time Series Analysis**, Vol. 26, No. 1, 2005, s. 107-121

Bauwens, L., S. Laurent, J. Rombouts: “Multivariate GARCH Models: A Survey”, **Journal of Applied Econometrics**, 21 ,2006, s. 79–109

Ben, G., M. Martiez, E.J., V.J.Yohai: “Robust Estimation In Vector Autoregressive Moving Average Models”, **Journal of Time Series Analysis**, 20, 1999, s. 381–399.

Bianco A.M, M. G. Ben, E.J. Martinez, and V.J. Yohai: “Outlier Detection In Regression Models With Arima Errors Using Robust Estimates”, **Journal Of Forecasting**, 20, 2001, s. 565-579.

Bianco, A. M., Ben Garcia, E. J. Martinez, V. J.Yohai: “Robust procedures for regression models with ARIMA errors”, In **COMPSTAT 96, Proceedings in Computational Statistics**, Prat A (ed.). Physica-Verlag: Berlin; 1996, s.27–38.

Bianco, A., M., Ben García, E. J. Martínez, V. J. Yohai: “Outlier Detection in Regression Models with ARIMA Errors using Robust Estimates”, **Journal of Forecasting**, 20, 2001, s.565–579.

Bollerslev, Tim: “A Conditionally Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return”, **The Review of Economics and Statistics**, Vol. 69, No. 3, 1987, s.542-547

Bollerslev, Tim: “Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity”, **Journal of Econometrics**, 31, 1986, s. 307-327

Bollerslev, Tim: “On the Correlation Structure for the Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedastic Process”, **Journal of Time Series Analysis**, 9, 1988, s. 121-131

Bose, A., K., Mukherjee: "Estimating the ARCH parameters by solving linear equations", **Journal of Time Series Analysis**, 24, 2003, s. 127–36.

Bouchaud, Jean-Philippe, Andrew Matacz, Marc Potters: "Leverage Effect in Financial Markets: The Retarded Volatility Model", **Physical Review Letters**, 87, 22, 2001, s. 228700-9.

Boudt, Kris, Christophe Croux: "Robust M-Estimation of Multivariate GARCH Models", **Computational Statistics and Data Analysis**, basım aşamasında.

Box, G.E.P., G.C. Tiao: "Intervention Analysis with Applications to Economic and Environmental Problems," **JASA**, March 1975, Vol.70, s.70-79.

Bruce, A., R.D. Martin: "Leave-K-Out Diagnostics For Time Series (With Discussion)", **Journal of The Royal Statistical Society Series B** 51, 1989, s. 363–424.

Bustos, O. H.: "General M-Estimates for Contaminated pth Order Autoregressive Processes: Consistency and Asymptotic Normality," *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 59, 1982, s.491–504.

Carnero, A., D. Pena, E. Ruiz: "Outliers and Conditional Autoregressive Heteroscedasticity in Time Series", **Estadística**, 53, 2001, s.143–213.

Carnero, M. A., D.Pena, E. Ruiz: "Effects of outliers on the identification and estimation of the GARCH models", **Journal of Time series Analysis**, 28, 2007, s.471-497.

Chan, Wai-Sum, W.W.S Wei: "A comparison of some estimators of time series autocorrelations", **Computational Statistics & Data Analysis**, 14, 1992, s.149–163.

Chang, I, G. Tiao, C.Chen: "Estimation Of Time Series Parameters In The Presence Of Outliers", **Technometrics**, 30, 1988, s. 193–204.

Charles, A., O. Darne: "Outliers and GARCH Models in Financial Data", **Economics Letters**. 86, 2005, s.347-352.

Charles, Amelie: "Forecasting volatility with outliers in GARCH models", **Journal of Forecasting**, 2008, 27, 7, s. 551-565.

Chen, C., G.C.Tiao: "Random Level-Shift Time Series Models, Arima Approximations, And Level-Shift Detection", **Journal Of Business & Economic Statistics**, Vol. 8, No.1,1990, s. 83-97.

Chen, C., L. M. Liu: " Joint estimation of model parameters and outlier effects in time series", **Journal of the American Statistical Association**, 88, 1993, s. 284-297.

Chen, C., L. M. Liu: "Forecasting Time Series With Outliers", **Journal Of Forecasting**, 12, 1993, s.13–35.

Chen,C.,G.,Tiao: "Random level-shift time series models,ARIMAapproximations, and level-shift detection", **Journal of Business & Economic Statistics**, 8, 1, 1990, s.83-97.

Croux, C, A. Ruiz-Gazen: "High Breakdown Estimators For Principal Components: The Projection-Pursuit Approach Revisited", **Journal of Multivariate Analysis**,95, 2005, s. 206-226.

Croux, C., Kristel Joossens: "Robust Estimation of the Vector Autoregressive Model by a Least Trimmed Squares procedure", **COMPSTAT 2008, Physica-Verlag HD**, 2008, s.489-501.

Denby, L. and R. D. Martin: "Robust Estimation Of The First Order Autoregressive Parameter", **Journal Of The American Statistical Association**, 74, 1979, s.140-146.

Deutsch, S.J., J.E Richards and J. Swain: "Effects of a Single Outlier on ARIMA Identification", **Communications in Statistics - Theory and Methods**, 21, 1990, s. 3407-3425.

Dijk, Dick Van, Philip Hans Franses: "Testing for Smooth Transition Nonlinearity in the Presence of Outliers", **Journal of Business & Economic Statistics**, 17, 2, 1999, s. 217-235

Dijk, V. D., P.H. Frances, A.Lucas : "Testing for ARCH in the presence of additive outliers", **Journal of Applied Econometrics**, 14, 1999, s.539–562.

Duchesne, Pierre: "On robust testing for conditional heteroscedasticity in time series models", **Computational Statistics & Data Analysis**, 46, 2004, s. 227-256.

Ekici, Oya, Özlem Yorulmaz: "Sapan Gözlem İle Yapısal Kırılma Noktası İlişkisi ve Bunun Bayesyen Otoregresif Süreçle Tespiti", **Doğuş Üniversitesi Dergisi**, 9 (2), 2008, s.146-157.

Engle, R.F.: "Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of UK inflation", **Econometrica**, 50, 1982, s. 987–1008.

Engle, Robert F.: "GARCH 101: The Use of ARCH/GARCH Models in Applied Econometrics", **The Journal of Economic Perspectives**, 15, 4, 2001, s.157-168

Fox, A. J.: "Outliers in Time Series", **Journal of the Royal Statistical Society, Series B**, 34, 1972, s.350-363.

Franses, P. H., Ghijssels: “Additive Outliers, GARCH And Forecasting Volatility”, **International Journal of Forecasting**, 15, 1999, s.1-9.

Franses, P. H., D. V. Dijk, A. Lucas: “Short patches of outliers, ARCH and volatility modeling”. *Applied Financial*, 14,4, 2004, s.221-231.

Galeano Pedro, Daniel Pena, Ruey S. Tsay: “Outlier Detection in Multivariate Time Series By Projection Pursuit”, **Journal of the American Statistical Association**, 101, 474, 2006, s. 654-669.

Grossi, Laurini: “A robust forward weighted Lagrange multiplier test for conditional heteroscedasticity”, **Computational Statistics & Data Analysis**, 53, 6 ,2009, s. 2251-2263

Grossi, Laurini: “Analysis of economic time series: Effects of extremal observations on testing heteroscedastic components”, **Applied Stochastic Models in Business and Industry**, 20, 2004, s.115–130.

Grossi, Luigi: “Analyzing Financial Time Series through Robust Estimators”, **Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics**, 8, 2, 3, 2004, s. 1-10.

Guttman, I. and G. C. Tiao: “Effect of Correlation on The Estimation of The Mean in The Presence of Spurious Observations”, **Canadian Journal of Statistics**, 6, 1978, s.229-247.

Hall, P., Q.Yao: “Inference in ARCH and GARCH models with heavy-tailed errors”, **Econometrica**, 71, 2003, s. 285–317.

Hammoudeh, S., L. Huimin: “Sudden Changes In Volatility In Emerging Markets: The Case Of Gulf Arab Stock Markets”, **International Review of Financial Analysis**, 17, 2008, s. 47–63.

Hong: “One-sided testing for conditional heteroscedasticity in time series models”, **Journal of Time Series Analysis**, 18, 1997, s.253-277.

Hosking, J.R.: “The Multivariate Portmanteau Statistic”, **Journal of American Statistical Association**, 75, 1980, s. 602-609.

Hotta, L. K.: “The Effect Of Additive Outliers On The Estimates From Aggregated and Disaggregated ARMA Models”, **International Journal of Forecasting**, 9, 1993, s.85–93.

Huber, P.J.: “Robust statistics: a review”, **The Annals of Mathematical Statistics** 43, 1972, s.1041–1067.

Hubert, M., E. Vandervieren: “An adjusted boxplot for skewed distributions”, **Computational Statistics and Data Analysis**, 52, 12, 2008, s. 5186-5201.

- Hubert, M., P. Rousseeuw, T. Verdonck: "Robust PCA for skewed data and its outlier map", **Computational Statistics and Data Analysis**, 53, 6, 2009, s.2264-2274.
- Hubert, M., P.J. Rousseeuw, K.Vanden Branden: "ROBPCA: A New Approach To Robust Principal Component Analysis", **Technometrics**, 47, 2005, s. 64-79.
- Jeantheau, T.: "Strong consistency of estimators for multivariate ARCH models", **Econometric Theory**, 14, 1, 1998, s.70-86.
- Jiang, J., Q. Zhao, Y. V. Hui: "Robust modelling of ARCH models", **Journal of Forecasting**, 20, 2001, s.111-133.
- Ledolter, J.: "Outlier Diagnostics in Time Series Analysis influence", **Journal of Time Series Analysis**, 11, 1990, s.317-324.
- Ledolter, J.: "The Effect of Additive Outliers On The Forecasts From Arima Model", **International Journal of Forecasting**, 5, 1989, s. 231-240.
- Lee, John H.: "A Lagrange multiplier test for GARCH models", **Economics Letters**, 37, 3, 1991, s. 265-271.
- Li, Hong Majerowska: "Testing Stock Market Linkages for Poland and Hungary:A multivariate GARCH approach", **Research in International Business and Finance**, 22, 3, 2008, s.247-266.
- Li, Hong, Majerowska: "Testing Stock Market Linkages for Poland and Hungary:A multivariate GARCH approach", **Research in International Business and Finance**, 22, 3, 2008, s.247-266
- Li, W. K. , Y. V.Hui: "Robust Multiple Time Series Modelling", **Biometrika**, 76, 2, 1989, s. 309-315.
- Li, W. K.: "A goodness-of-fit test in robust time series modeling", **Biometrika**, 75, 1988, s. 355-361.
- Liu Hancong, Sirish Shah, Wei Jiang: "On-line outlier detection and data cleaning", **Computers & Chemical Engineering**, 28(9), 2004, s. 1635-1647
- Ljung, G. M.: "On Outlier Detection in Time Series", **Journal of The Royal Statistical Society, Ser. B**, 55, 1993, s.559-567.
- Maddala, G., Y. Yin: "Outliers, unit roots and robust estimation of nonstationary time series", **In: Handbook of Statistics 15: Robust Inference** (eds. G.S. Maddala and C.R. Rao), d237-266, Elsevier, Amsterdam.1997.
- Maronna, R.: "Principal components and orthogonal regression based on robust scales", **Technometrics**, 47, 2005, s. 264-273.

Martin R. D.: Robust estimation of autoregressive models”, in **Directions in Time Series Eds. Brillinger and Tiao**, Institute of Mathematical Statistics, California, 1980, s.228-254.

Martin R. D. and Yohai, V.: “Highly robust estimation of autoregressive integrated time series models”, **Publicaciones Previas No. 79, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**, Univ. Buenos Aires, 1996.

McLeod, A. J., W. K. Li: “Diagnostic checking ARMA time series models using squared residual correlations”, **Journal of Time Series Analysis**, 4, 1983, s.269–73.

Mcquarrie A.D. and C.L. Tsai: “Outlier Detections in Autoregressive Models”, **Journal of Computational and Graphical Statistics**, 12, 2003, s.450-471

Mendes, B. V.: “Assessing the bias of maximum likelihood estimates of contaminated GARCH models”, **Journal of Statistical Computation and Simulation**, 67, 2000, s.359–376.

Mendes, B.V.M., A.M Duarte: “Robust estimation for ARCH models”, **Rev. Econometrica**, 19, 1999, s.138–180.

Muler, N., V. J.Yohai: “Robust estimates for ARCH Processes”, **Journal of Time Series Analysis**, 23, 2002, s. 341–375.

Muler, N., V. Yohai: “Robust estimates for GARCH models”, **Journal of Statistical Planning and Inference**, 138, 10, 2008, s.2918-2940.

Muler, Nora, Daniel Pena, Victor J. Yohai: “Robust Estimation For ARMA Models”, **The Annals of Statistics**, Vol. 37, No. 2, 2009, s.816–840.

Nemlioğlu, Karun: “An Alternative Approach Testing Shocks in First Order Autoregressive Time Series”, **İ.Ü. İktisat Fakültesi Mecmuası**, 55, 2, 2005.

Ng, S., P. Perron: “Lag lenght selection and the construction of unit root tests with good size and power”, **Econometrica**, 69, 2001, s.1519-1554.

Nielsen, Heino Bohn: “Cointegration Analysis in the Presence of Outliers”, **Econometrics Journal**, 7, 1, 2004, s. 249-271.

Park, Beum-Jo: “An Outlier Robust GARCH Model and Forecasting Volatility of Exchange Rate Returns”, **Journal of Forecasting**, 21, 2002, s. 381–393.

Pena, Daniel: “Discussion of local influence by Cook”, **Journal of Royal Statistical Society**, 48 (2), 1986, s. 164-165.

Pena, D., J.Rodriguez: “A powerful portmanteau test of lack of fit in time series”, **Journal of the American Statistical Association** , 97, 2002, s. 601–610.

Pena, Daniel and Pilar Poncela, **Advances in Distribution Theory, Order Statistics and Inference**, isimli yayında “Dimension Reduction in Multivariate Time Series” başlığıyla yer alan çalışma, Birkhauser Boston, 2006, s. 433-458.

Pena, Daniel: “Influential observations in time series”, **Journal Of Business & Economic Statistics**, 8, 2, 1990, s. 235–241.

Peng, L., Q. Yao: “Least absolute deviations estimation for ARCH and GARCH model”, **Biometrika**, 90, 2003, s.967–975.

Perron, P, T.J Vogelsang: “Testing for a unit root in a time series with a changing mean: corrections and extensions”, **Journal of Business and Economic Statistics**, 10, 1992, s. 467-475.

Phillips, P.C.B. ve P. Perron: “Testing For a Unit Root in Time Series Regression”, **Biometrika**, 75, 1998, s.335-346.

Qiao, Zhuo, Thoma Chiang, Wing-Keung Wong: “Long-run equilibrium, short-term adjustment, and spillover effects across Chinese segmented stock markets and the Hong Kong stock market”, **Journal of International Financial Markets, Institutions & Money**, 18, 5, 2008, s.425-437.

Ramos: “Forecasts of Market Shares from VAR and BVAR Models: A Comparison of Their Accuracy”, **International Journal of Forecasting**, 19, 2003, s. 95-110.

Reber, John C., Jeff T. Terpstra, Xianzhe Chen: “Weighted L_1 -estimates for a $VAR(p)$ Time Series Model”, **Journal of Nonparametric Statistics**, 20, 5, 2008, s.395–411.

Rodriguez, J., E. Ruiz: “A powerful test for conditional heteroscedasticity for financial time series with highly persistent volatilities”, **Statistica Sinica**, 15, 2005, s.505–25.

Sakata S., H.White: “High breakdown point conditional dispersion estimation with application to S&P500 daily returns volatility”, **Econometrica**, 66, 1998, s.529–567.

Scheicher, Martin: “The Comovements Of Stock Markets In Hungary, Poland And The Czech Republic”, **International Journal Of Finance And Economics**, 6, 2001, s.27–39

Tolvi, Jussi: “Outliers In Eleven Finnish Macroeconomic Time Series”, **Economic Papers**, 14, 2001, s.14–32.

Tolvi, Jussi: “The effects of outliers on two nonlinearity tests”, **Communications in Statistics Simulation and Computation**, 29,3, 2000, s.898 –899.

Trivez, F.J.: “Level Shifts, Temporary Changes And Forecasting”, **Journal of Forecasting**, 14, 1993, s. 543-550.

Tsay, R. S., D. Pena, A. E. Pankratz: “Outliers in Multivariate Time Series”, **Biometrika**, 87, 2000, s. 789 – 804.

Tsay, R. S.: “Outliers, Level Shifts, and Variance Changes in Time Series”, **Journal of Forecasting**, 7, 1988, s. 1-20.

Tsay, Ruey: “Detecting and Modelling Nonlinearity in Univariate Time Series Analysis”, **Statistica Sinica**, Vol. 1, 1991, s. 431-451

Van Dijk, D., P. H. Franses, A. Lucas: “Testing for ARCH in the presence of additive outliers”, **Journal of Applied Econometrics**, 14, 1989, s. 539-562.

Yohai V. J., R.H. Zamar: “High breakdown-point estimates of regression by means of the minimization of an efficient scale”, **Journal of the American Statistical Association**, 83, 1988, s. 406–413.

Yorulmaz, Özlem, “The Performance Evaluation of Robust Pairwise Covariance Estimator“, **TÜİK İstatistik Araştırma Dergisi**, Vol.6,1, 2008, s.18-37.

ÇEVİRİMİÇİ, TEZ ve BİLDİRİLER

Arat, Kürşad: “Türkiye’de Optimum Döviz Kuru Rejimi Seçimi ve Döviz Kurlarından Fiyatlara Geçiş Etkisinin İncelenmesi”, Uzmanlık Tezi, Merkez Bankası, 2003.

Berüment, H, M. Sevüktekin: “Türkiye’de İMKB ve Döviz Kuru Arasındaki Dinamik İlişkinin Belirlenmesi”, **8. Ulusal Ekonometri ve İstatistik Sempozyumu**, Malatya, 2007.

Boudt, Kris:., “**Estimation of financial risk under non-normal distributions**”, Ph-D Thesis, KULeuven, Belgium, 2008.

Carnero, M. Angeles, Daniel Pena, Esther Ruiz: “Estimating and Forecasting GARCH Volatility in the Presence of Outliers”, Working Papers. Serie AD 2008-13, (Çevrimiçi): <http://www.ivie.es/downloads/docs/wpasad/wpasad-2008-13.pdf>, 15 Şubat 2010.

DasGupta, M., S.K. Mishra: “Least Absolute Deviation Estimation of Linear Econometric Models : A Literature Review”, 2004, (Çevrimiçi): http://mpra.ub.uni-muenchen.de/1781/1/MPRA_paper_1781.pdf 15 Şubat 2010

Doornik, Jurgen A, Marius Ooms: “Outlier Detection in GARCH Models”, Nuffield Economics Working Papers, 2005, (Çevrimiçi): <http://www.nuffield.ox.ac.uk/economics/papers/2005/w24/GarchOutlier.pdf>, 15 Şubat 2010

Franses, P.H., D. Van Dijk: “Outlier detection in GARCH models”. Research Report EI-9926/RV, Econometric Institute, Erasmus University, Rotterdam, 2000.

Hotta, L. K., R. S. Tsay :“Outliers in GARCH processes”, mimeo, IMECC, **Brazil and University of Chicago**, 1998.

Lambert, Philippe, Sebastien Laurent: “Modelling financial time series using GARCH-type models with a skewed Student distribution for the innovations”, Discussion Paper 01-25, Institut de Statistique, Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium, 2001, (Çevrimiçi): <http://www.stat.ucl.ac.be/ISpersonnel/lambert/publications.html>, 15 Şubat 2010

Martin, R. D., V.J. Yohai: “Highly robust estimation of autoregressive integrated time series models”, **Publicaciones Previas No.89, Facultadde Ciencias Exactas y Naturales**, Universidad de Buenos Aires, 1996. (Çevrimiçi): <http://mate.dm.uba.ar/~vyohai/Martin-Yohai-1996.pdf>, 15 Ağustos 2009.

Merkez Bankası Bültenleri, <http://www.tcmb.gov.tr>.

Muler N., V. J. Yohai: “Robust estimates for GARCH models”, **Technical Report, Instituto de Calculo**, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 2007. (Çevrimiçi): <http://ulises.ic.fcen.uba.ar/preprints/muler-yohai2005.pdf>, 15 Şubat 2010

Ruiz, E., M.A. Carnero, D. Pereira: “Effects of Level Outliers on the Identification and Estimation of GARCH Models”, **Econometric Society 2004 Australasian Meetings** , 21. (Çevrimiçi): <http://econpapers.repec.org/paper/ecmausm04/21.htm>, 15 Şubat 2010.

Tolvi Jussi, “Outliers in time series: A review”, **University of Turku, Department of Economics, Research Reports**, No. 76.1998

EKLER

EK-I GENEL KAVRAMLAR

E-1 Dayanıklı Tahminciler ve Özellikleri

Daha önce de belirtildiği gibi istatistiksel modellerin uygulanabilmesi için gereken varsayımların (verideki gözlemlerin belli bir dağılımdan gelmesi ve iid dağılması gibi) sapan-atipik gözlemler yüzünden sağlanamaması dayanıklı tahmincilerin kullanımını gerekli kılar. Dayanıklı tahminciler, klasik olanların aksine aykırı gözlemlere karşı duyarlı değildir ve onların etkisini sınırlandırır. Tahmincinin dayanıklılığının belirlenmesinde çeşitli ölçütler vardır. Bunlar arasında öne çıkanlar etki fonksiyonu ve kırılma noktasıdır.

E.1.1 Etki Fonksiyonu (Influence Function-IF)

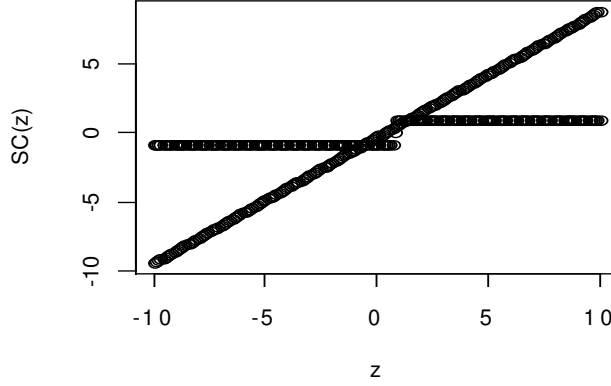
Etki fonksiyonu açıklanmadan önce Hassasiyet Eğrisini (Sensitivity Curve-SC) açıklamak yerinde olacaktır. Asimptotik durumda etki eğrisi olarak isimlendirilen bu eğri, örnekleme bir gözlemin eklenmesi ya da örneklemden bir gözlemin çıkarılması halinde tahminci üzerindeki etkiyi gösterir. $(x_1, \dots, x_n)$ ilgilenilen örnekleme ve $\hat{\theta}$ tahminciyi göstermek üzere z noktasındaki SC şöyle tanımlanır²¹⁴:

$$SC(z) = n(\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n, z) - \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n))$$

Tahmincinin dayanıklılığının değerlendirilmesinde bu eğrinin artan, azalan ya da sınırlı yapısı tahmincinin dirençliliğinin yorumlanmasında önem taşır. Örnek ortalama ve medyanı için düşünüldüğünde, ortalamanın daha hassas olduğu görülür,

²¹⁴ Mia Hubert, **Regression techniques**, ACCO, Leuven, Belgium, 2004, s.28.

ortalamanın eğrisi sınırlı değildir, artar ve azalır. Fakat medyanın SC'si sınırlıdır ve tek bir z noktasının eğri üzerinde çok büyük bir etkisi olamaz. Aşağıdaki çizimde yatay doğrular Medyanı temsil ederken diğeri Ortalamaya aittir.



Şekil Ek.1 Ortalama ve Medyana ait SC Eğrisi

Eğer SC sınırlı ise, tek bir gözlemin tahminci üzerinde keyfi bir etkisinin olmadığı söylenebilir ama birden fazla aykırı gözlem olması halinde kırılma noktası kavramı üzerinde durmak gerekir.

SC örnekleme bağlı niceliktir, örneklem büyüklüğü sonsuza götürüldüğünde etki fonksiyonu (IF);

$$IF(z; T, F) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{T(F_{\varepsilon, \Delta z}) - T(F)}{\varepsilon}$$

olarak elde edilir.

IF'nin tanımlamasından da anlaşılacağı üzere, tahminci $T(F)$ 'nin türevidir. Tahmincinin dayanıklı olması için türevinin sonlu olması istenir. Ayrıca, asimptotik varyans ile IF arasında basit bir ilişki vardır:

$$V(T,F) = \int IF(z;T,F)^2 dF(z)^{215}$$

Zaman serilerinde etki fonksiyonu üzerinde Künsch (1984) çalışmıştır. ARMA modelleri için λ vektörü $\lambda = (\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q, \mu)'$ ve tahmini $\hat{\lambda}_T = \hat{\lambda}_T(y_1, \dots, y_T)$ şeklinde tanımlanmak üzere ve y_T 'nin olasılık dağılımı F ile gösterilmek üzere şu şekilde tanımlanır:

$$IF_H(y; \hat{\lambda}, F_k)^\wedge = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\hat{\lambda}_\infty[(1-\varepsilon)F_k + \varepsilon\delta_y] - \hat{\lambda}_\infty(F_k)}{\varepsilon}$$

Burada y , $y = (y_k, \dots, y_1)'$ vektörünü ve H Hampel'ı ifade eder. Eğer y_t AR(p) sürecindeyse; EKK üzerinden M tahmini tanımlanır. Künsch (1984) bu durumda GM formuna dönen Hampel optimal tahmincisini kullanmıştır. Ayrıca Martin ve Yohai (1986)'de alternatif bir yaklaşımla zaman serilerinde etki fonksiyonunu tanımlamıştır.²¹⁶

E.1.2 Kırılma Noktası

Kırılma noktasını Staudte ve Sheather (1989) tahmincinin değişimi için bir sınır olarak değerlendirir. Buna göre tahmincinin değişimi için tanımlanan sınırın aşılmasına neden olan en yüksek aykırı gözlem oranı olarak tanımlanır. Hubert, daha teknik olarak, tahmincinin parametre değerinden uzaklaşmasına neden olacak aykırı gözlem sayısının toplam gözlem sayısına oranının supremumu olarak tanımlamıştır.

$x = (x_1, \dots, x_n)$ şeklinde verilen örnekleme m tane veri $x_{i1}, \dots, x_{im}$ keyfi $y_1, \dots, y_m$ değerleriyle yer değiştirilsin. Bu yeni veri kümesi $z_1, \dots, z_n$ olarak

²¹⁵ R.Staudte, S.Sheather, **Robust estimation and testing**. USA, John Wiley&Sons. Inc.,1989, s. 53.

²¹⁶ Ricardo A. Maronna, R. Douglas Martin, Víctor J. Yohai, **Robust Statistics**, New York, John Wiley & Sons, 2006, s.301-302.

bilinir. Θ parametrik modelin parametre uzayını göstermek üzere $\hat{\theta}$ tahmincisinin sonlu kırılma noktası iken,

$$\varepsilon_n^*(\hat{\theta}; x) = \min\left\{\frac{m}{n} : \hat{\theta}(z_1, \dots, z_n) \text{ } \Theta \text{ sınırına yakındır}\right\}$$

olarak tanımlanır.²¹⁷

Eğer tahmincinin kırılma noktası 0'dan büyükse o tahminci dirençlidir. Aritmetik ortalamanın kırılma noktası 0'dır. Çünkü tek bir aykırı gözlemin varlığı duyarlı tahminci olan aritmetik ortalamayı tamamen değiştirebilir. Medyanın kırılma noktası bir tahminci için mümkün olabilecek en büyük sınır olan 0.5'tir. Kırılma noktası toplam gözlem sayısının % 50'sinden fazlasına karşılık gelemmez çünkü aykırı gözlem sayısı toplam gözlem sayısının yarısından fazlasına karşılık geliyorsa veriyi temsil eden dağılım hakkında anlamlı bir sonuç çıkarılamaz. Yanıltıcı biçimde, aykırı bir gözlem “düzenli” ve düzenli bir gözlem “aykırı” olarak algılanabilir.

E.1.3 M Tahmincileri

M tahmincileri dayanıklı tahmincilerin geniş bir sınıfıdır ve EÇO'nun bir genellemesi olarak Huber (1964) tarafından önerilmiştir. EÇO'nun $\pi f(x_i)$ ifadesini maksimize ya da $\sum -\log f(x_i)$ ifadesini minimize eden tanımını; ρ bir fonksiyon (kayıp fonksiyonu) olmak üzere, $\sum \rho(x_i)$ 'in minimizasyonu şeklinde geneller. Buradan yola çıkılarak, ρ genel tahmincisinde $\sum \rho(x_i - \theta)$ 'yı minimize eden tahminciye M tahmincisi denir. ρ fonksiyonu $\rho(x_i, t)$ şeklinde yazılır ve x ve t arasındaki ilişki $(x_i - t)$ şeklindedir. ρ fonksiyonunun yapısı M tahmincisinin özelliklerini belirler. Aslında ortalama ve medyan M tahmincilerinin özel halidir. Ortalama $\sum (x_i - t)^2$ ifadesini, medyan ise $\sum |x_i - t|$ ifadesini minimize eder.²¹⁸

²¹⁷ R. Staudte, S. Sheather, **a.g.e.**, s. 54

²¹⁸ Casella, G., R. Berger: **Statistical Inference**, 2.bs, USA, Duxbury, 2001, s.484.

ρ fonksiyonu, M tahmincileri aykırı gözlemlerin etkisini sınırlandırma aşamasında önemlidir. Regresyon için M tahmincileri, EKK'nın amaç fonksiyonundan farklı olarak şöyle tanımlanmıştır:

$$\min_{\theta} \sum_{i=1}^n \rho(u_i) \quad (u_i \text{ regresyon denkleminde elde edilen hataları göstermektedir})$$

ρ burada simetrik [$\rho(-u) = \rho(u)$], sürekli ve türevi alınabilir bir fonksiyon şeklinde tanımlanır. ψ , ρ 'nun türevini göstermek üzere,

$\psi(u) = u$ ise EKK'ya eşit olmaktadır.

$\psi(u) = \text{sgn}(u)$ olduğunda ise LAD regresyon çözümüne eşittir.

Türevleme işlemi mümkün olmadığında M tahmincisi ψ türü olarak bilinir, diğer durumlarda ise M tahmincisi ρ türü olarak bilinir.

E.1.4 En Küçük Mutlak Sapmalar Yöntemi (Least Absolute Deviations-LAD)

En küçük mutlak sapmalar (LAD) yönteminde $\hat{\beta}$ vektörünün seçimi

$\min_{\beta} \sum_{i=1}^n |e_i|$ amaç fonksiyonu ile mümkündür. Çeşitli iteratif yaklaşımlarla çözüme ulaşılır.²¹⁹

E.1.5 En Küçük Medyan Kareler (Least Median Squares-LMS)

Rousseeuw (1984), bir çok yazarın EKK amaç fonksiyonunda tanımlı “kare” yerine değişik değerler kullanarak dayanıklı sonuçlar elde etmeye çalıştığını, oysa “ $\sum$ ” yerine “medyan” $\min_{\beta} \text{medyan } e_i^2$ yazılarak diğerlerinden daha dirençli, çok daha az duyarlı, kırılma noktası %50 olan tahminci elde edilebileceğini ifade etmiştir. Algoritma kısaca şöyle tanımlanabilir: p parametre sayısını göstermek üzere

²¹⁹ Birkes, D., Dodge, **Alternative methods of regression**, New York, Wiley, 1990, s.58.

eleman sayısı en az $p+1$ olan tüm mümkün altkümeler elde edilir, her bir altküme için EKK tahmincileri bulunur ve bu tahmincilerle tüm gözlemler üzerinden elde edilen artıkların karelerinin ya da mutlak değerlerinin medyanı alınarak LMS amaç fonksiyonu elde edilir. Bu işlem altküme sayısı kadar tekrarlanarak amaç fonksiyonunu minimum yapan LMS parametre tahminlerine ulaşılır. LMS' nin kırılma noktası % 50' dir, bu yönüyle EKK ve LAD tahmincilerine göre oldukça yüksek bir kırılma noktasına sahiptir.²²⁰

E.1.6 En Küçük Kırılmış Kareler (Least Trimmed Sum of Squares-LTS)

Rousseeuw (1984) bu tahminci için amaç fonksiyonunu şöyle tanımlamıştır:

$$\text{Min}_{\hat{\beta}} \sum_{i=1}^h (e^2(\hat{\beta}))_{i:n}$$

Yine verideki gözlem ve değişken sayıları dikkate alınarak çeşitli altkümeler elde edilir. Her bir altküme için h gözlem üzerinden EKK katsayıları bulunur ve bu katsayılarla kalıntıların kareleri sıralanır, hedef alınan belirli bir sıradaki kalıntıdan küçük bütün kalıntılar toplanır ve bu toplam başka tahminler sonucu elde edilen toplamdan daha düşük yapılmaya çalışılır. Rousseeuw h değerini $(n+p+1)/2$ olarak önermiş ve ayrıca çalışmasında gerek LTS'nin amaç fonksiyonunun LMS'ye göre daha düzgün olmasından gerekse LTS'nin istatistiksel etkinliğinin LMS'ye göre daha fazla olmasından dolayı LTS metodunun LMS ile yer değiştirebilir nitelikte olduğunu belirtmiştir.²²¹

E.1.7 En Küçük Varyans-Kovaryans Determinantı (Minimum Covariance Determinant-MCD)

Bu yöntem Rousseeuw (1984) tarafından önerilmiştir. Amaç varyans-kovaryans matrisinin determinantını en küçük yapacak olan h tane gözlemden oluşan veriyi bulmaktır. Elde edilecek olan h gözlemden hesaplanan ortalama MCD yer

²²⁰ Rousseeuw, Leroy, **Robust regression and outlier detection**, John Wiley, New York., 1987, s.79.

²²¹ A.e., s.12

tahmincisi, aynı gözlemlerden elde edilecek varyans-kovaryans matrisi de yayılım tahmincisi olacaktır. $h, (n+p+1)/2$ ' ninnin tam kısmı olarak belirlenebilir.

Bu iki yöntem için hemen burada belirtmek gerekir ki, LTS ve MCD kırılma noktaları en yüksek olan tahmincilerdendir. ²²²

E.2 Mahalanobis Uzaklığı

Aykırı gözlemlerin belirlenme sürecinde öne çıkan bir uzaklıktır, x vektörleri ve μ ortalama vektörü arasındaki Mahalanobis uzaklığının karesi, Σ varyans-kovaryans matrisi dikkate alınarak şöyle gösterilir:

$$d(x, \mu, \Sigma) = (x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu)$$

$$x \sim N(\mu, \Sigma) \text{ ise } d(x, \mu, \Sigma) \sim \chi_p^2 \text{ 'dir.}^{223}$$

²²² A.e., s. 152.

²²³ Cook, Weisberg, **Residuals and influence in regression**, Great Britain, Chapman&Hall, 1992, s.14.

EK-2 ANALİZ SONUÇLARI

Tablo EK-1. Log(Döviz Kuru) Serisinde Belirlenen Aykırı Gözlemler:

	Time Type Impact t-value	39	05.1983 IO 0.02068 6.36
1	08.1960 LS 1.176 139.9	40	06.1983 LS 0.03121 8.195
2	08.1970 LS 0.4201 45.84	41	07.1983 LS 0.02622 7.467
3	09.1970 LS 0.1067 12.74	42	08.1983 LS 0.04866 9.709
4	01.1970 IO -0.04241 9.226	43	09.1983 LS 0.03245 8.384
5	05.1974 IO -0.02399 7.141	44	11.1983 LS 0.04254 9.221
6	09.1975 IO 0.02086 6.393	45	12.1983 LS 0.07144 10.67
7	04.1976 LS 0.04785 9.579	46	01.1984 LS 0.08997 11.55
8	11.1976 LS 0.02604 7.431	47	02.1984 LS 0.02917 7.937
9	03.1977 LS 0.06242 10.44	48	04.1984 LS 0.04617 9.689
10	09.1977 LS 0.03687 8.875	49	05.1984 LS 0.06893 10.5
11	10.1977 LS 0.06125 10.28	50	06.1984 LS 0.02813 7.809
12	03.1978 LS 0.2695 29.27	51	07.1984 LS 0.03753 8.873
13	04.1979 LS 0.06176 10.38	52	08.1984 LS 0.02535 7.316
14	05.1979 LS 0.1933 21.27	53	09.1984 LS 0.03726 8.889

15	06.1979 LS	0.09902 11.77	54	10.1984 LS	0.03085 8.197
16	07.1979 LS	0.7033 76.85	55	12.1984 LS	0.04209 9.206
17	04.1980 LS	0.02434 7.212	56	01.1985 LS	0.03924 9.052
18	05.1980 LS	0.0236 7.108	57	02.1985 LS	0.03117 8.232
19	06.1980 LS	0.0444 9.455	58	03.1985 LS	0.05878 10.01
20	08.1980 LS	0.02202 6.741	59	05.1985 LS	0.04533 9.597
21	10.1980 LS	0.02296 6.949	60	09.1985 LS	0.02903 7.911
22	11.1980 LS	0.06357 10.41	61	12.1985 IO	0.0221 6.743
23	02.1981 LS	0.06042 10.12	62	01.1986 IO	0.02422 7.186
24	05.1981 LS	0.05129 9.911	63	03.1986 LS	0.07358 10.66
25	06.1981 LS	0.05317 10.02	64	04.1986 LS	0.0549 10.19
26	07.1981 LS	0.05634 9.988	65	10.1986 IO	0.02002 6.258
27	08.1981 LS	0.06639 10.39	66	11.1986 LS	0.04859 9.706
28	10.1981 LS	0.03265 8.424	67	03.1987 IO	0.01997 6.26
29	11.1981 IO	0.01994 6.291	68	06.1987 LS	0.03538 8.776
30	01.1982 LS	0.04692 9.555	69	07.1987 LS	0.03748 8.877
31	02.1982 LS	0.04925 9.78	70	08.1987 IO	0.02442 7.211
32	06.1982 LS	0.06563 10.27	71	09.1987 IO	0.02274 6.892
33	07.1982 LS	0.04517 9.58	72	10.1987 LS	0.03693 8.869
34	08.1982 LS	0.03015 8.023	73	12.1987 LS	0.03702 8.871
35	11.1982 LS	0.02734 7.719	74	01.1988 LS	0.08434 11.1
36	02.1983 LS	0.02876 7.913	75	02.1988 LS	0.07605 10.88
37	03.1983 LS	0.02383 7.142	76	03.1988 LS	0.04249 9.223

38	04.1983 LS	0.0377 8.898	77	04.1988 LS	0.03575 8.808
----	------------	---------------	----	------------	----------------

78	05.1988 LS	0.03666 8.827	118	02.1993 IO	0.03595 8.818
79	06.1988 LS	0.04262 9.216	119	03.1993 LS	0.03827 8.888
80	07.1988 LS	0.05012 9.818	120	05.1993 LS	0.04473 9.494
81	08.1988 LS	0.05859 10.13	121	06.1993 LS	0.05719 10.09
82	09.1988 LS	0.05936 10.01	122	07.1993 LS	0.06336 10.37
83	10.1988 LS	0.08864 11.43	123	08.1993 LS	0.0406 9.144
84	12.1988 LS	0.04317 9.22	124	10.1993 LS	0.05429 10.15
85	01.1989 IO	0.02698 7.657	125	11.1993 LS	0.072 10.66
86	02.1989 LS	0.02986 7.992	126	12.1993 LS	0.05221 9.994
87	03.1989 LS	0.03717 8.884	127	01.1994 LS	0.08327 11.18
88	04.1989 LS	0.0365 8.81	128	02.1994 LS	0.1604 17.97
89	06.1989 IO	0.02067 6.377	129	03.1994 LS	0.1592 18.05
90	09.1989 IO	0.0239 7.138	130	04.1992 LS	0.4404 47.81
91	03.1990 LS	0.03217 8.326	131	05.1994 AO	0.06529 11.15
92	06.1990 IO	0.0288 7.894	132	07.1994 AO	0.0225 8.256
93	12.1990 LS	0.03374 8.573	133	09.1994 LS	0.07246 10.64
94	01.1991 LS	0.04117 9.114	134	538 IO	0.02847 7.843
95	02.1991 LS	0.04399 9.37	135	10.1994 LS	0.03818 8.896
96	03.1991 LS	0.1313 15.06	136	12.1994 IO	0.03096 8.19
97	04.1991 LS	0.07394 10.63	137	01.1995 LS	0.07647 10.73
98	05.1991 LS	0.05118 9.892	138	07.1995 IO	0.02892 7.895

99	06.1991 LS	0.05829 10.12	139	08.1995 LS	0.04912 9.759
100	07.1991 LS	0.03973 9.067	140	09.1995 IO	0.02368 7.108
101	08.1991 IO	0.02832 7.834	141	10.1995 LS	0.04689 9.615
102	09.1991 LS	0.02939 7.945	142	11.1995 LS	0.0469 9.655
103	10.1991 LS	0.04146 9.151	143	12.1995 LS	0.08658 11.26
104	11.1991 IO	0.02036 6.322	144	01.1996 LS	0.06783 10.44
105	12.1991 IO	0.02038 6.309	145	02.1996 LS	0.05869 10.09
106	01.1992 LS	0.05291 10.03	146	03.1996 LS	0.07082 10.69
107	02.1992 LS	0.065 10.34	147	04.1996 LS	0.06457 10.33
108	03.1992 LS	0.08108 11	148	05.1996 LS	0.05918 10.01
109	04.1992 LS	0.05375 10.09	149	06.1996 IO	0.03643 8.854
110	05.1992 LS	0.04611 9.688	150	07.1996 IO	0.03838 8.869
111	06.1992 IO	0.02446 7.196	151	08.1996 IO	0.02551 7.307
112	08.1992 IO	0.02008 6.255	152	09.1996 LS	0.04674 9.658
113	09.1992 IO	0.02244 6.822	153	10.1996 LS	0.05605 10.09
114	10.1992 LS	0.04022 9.087	154	11.1996 LS	0.0502 9.784
115	11.1992 LS	0.07625 10.81	155	12.1996 LS	0.067 10.4
116	12.1992 IO	0.02781 7.791	156	01.1997 LS	0.07293 10.6
117	01.1993 LS	0.04172 9.181	157	02.1997 LS	0.06032 10.1

158	03.1997 LS	0.05303 9.996	203	10.2001 AO	0.06829 30.58
159	04.1997 LS	0.04715 9.472	204	12.2001 LS	0.04697 9.571
160	05.1997 LS	0.0497 9.76	205	01.2002 LS	0.05601 10

161	06.1997 ILS	0.05183 9.963	206	02.2002 ILS	0.02969 7.961
162	07.1997 ILS	0.06547 10.24	207	03.2002 IIO	0.05596 10.12
163	08.1997 ILS	0.06876 10.49	208	04.2002 IIO	0.09479 11.28
164	09.1997 ILS	0.04107 9.116	209	05.2002 IIO	0.09051 11.38
165	10.1997 ILS	0.04569 9.63	210	11.2002 ILS	0.02484 7.205
166	11.1997 ILS	0.05034 9.76	211	01.2003 IIO	0.0464 9.628
167	12.1997 ILS	0.07093 10.61	212	02.2003 IAO	0.01732 7.157
168	01.1998 ILS	0.0625 10.37	213	05.2003 IIO	0.08439 11.18
169	02.1998 ILS	0.05585 10.17	214	06.2003 ILS	0.04719 9.525
170	03.1998 ILS	0.05549 10.24	215	10.2003 IIO	0.03543 8.748
171	04.1998 ILS	0.04183 9.163	216	11.2003 IAO	0.03331 9.573
172	05.1998 IIO	0.02596 7.41	217	01.2004 ILS	0.05871 10.02
173	06.1998 IIO	0.03388 8.571	218	04.2004 IIO	0.02519 7.281
174	07.1998 IIO	0.028 7.788	219	05.2004 ILS	0.1127 13.24
175	08.1998 IIO	0.01996 6.277	220	07.2004 IAO	0.02028 7.905
176	11.1998 ILS	0.05729 10.05	221	09.2004 IAO	0.01496 6.489
177	12.1998 ILS	0.04296 9.246	222	11.2004 ILS	0.02707 7.654
178	01.1999 ILS	0.04725 9.445	223	12.2004 ILS	0.03654 8.84
179	02.1999 ILS	0.06186 10.32	224	01.2005 ILS	0.03156 8.251
180	03.1999 ILS	0.05798 10.1	225	02.2005 ILS	0.02939 7.913
181	04.1999 ILS	0.05485 10.19	226	04.2005 IIO	0.03776 8.867
182	05.1999 IIO	0.04091 9.166	227	05.2006 IIO	0.0638 10.36
183	06.1999 IIO	0.04305 9.218	228	06.2006 ILS	0.1237 14.32

184	07.1999	IIO	0.03434 8.573	229	07.2006	ILS	-0.02538 7.296
185	08.1999	IIO	0.04102 9.145	230	08.2006	ILS	-0.05609 9.944
186	09.1999	IIO	0.02935 7.954	231	04.2007	ILS	-0.03434 8.611
187	10.1999	ILS	0.06412 10.33	232	07.2007	IAO	-0.02783 9.012
188	11.1999	ILS	0.06534 10.31	233	09.2007	ILS	-0.03401 8.566
189	12.1999	IIO	0.03368 8.577	234	10.2007	IIO	-0.05272 10.02
190	01.2000	IIO	0.03286 8.442	235	03.2008	IIO	0.03813 8.911
191	02.2000	IIO	0.03003 8.004	236	04.2008	IAO	0.04424 10.39
192	03.2000	IIO	0.02467 7.182	237	08.2008	ILS	-0.03122 8.212
193	04.2000	IIO	0.03641 8.891	238	09.2008	ILS	0.04933 9.734
194	08.2000	IIO	0.02784 7.772	239	10.2008	IIO	0.1871 20.64
195	09.2000	IIO	0.0277 7.789	240	11.2008	ILS	0.07713 10.56
196	02.2001	ILS	0.07683 10.65	241	12.2008	IAO	-0.03035 9.731
197	03.2001	ILS	0.3008 32.31	242	02.2009	IIO	0.03732 8.86
198	04.2001	ILS	0.2302 25	243	03.2009	IIO	0.03366 8.61
199	05.2001	IAO	-0.06738 12.16	244	04.2009	ILS	-0.05553 10.17
200	07.2001	ILS	0.09063 11.23	245	05.2009	ILS	-0.03526 8.763
201	08.2001	IIO	0.06291 10.35	246	08.2009	ILS	-0.023 6.937
202	09.2001	IIO	0.04633 9.667				

Tablo EK-2 LDOV ve LIMK değişkenleri üzerinden VEC Modeli

Vector Error Correction Estimates

Sample (adjusted): 1995M04 2008M12

Included observations: 165 after adjustments

Standard errors in () & t-statistics in []

Error Correction:	D(LDOV)	D(LIMK)
CointEq1	-0.002938 (0.00087) [-3.38244]	-0.002554 (0.00246) [-1.03863]
D(LDOV(-1))	0.521138 (0.08020) [6.49774]	0.441409 (0.22710) [1.94370]
D(LDOV(-2))	-0.219691 (0.08117) [-2.70652]	0.047885 (0.22984) [0.20834]
D(LIMK(-1))	-0.016883 (0.02878) [-0.58670]	0.339586 (0.08148) [4.16773]
D(LIMK(-2))	0.047635 (0.02787) [1.70947]	-0.090308 (0.07890) [-1.14456]
C	0.014229 (0.00376) [3.78534]	0.008599 (0.01064) [0.80788]

Tablo EK-3 LDOV ve LIMK değişkenlerinin nedensellik sınaması (VEC üzerinden)

VEC Granger Causality/Block Exogeneity Wald Tests

Sample: 1995M01 2008M12

Included observations: 165

Dependent variable: D(LDOV)

Excluded	Chi-sq	df	Prob.
D(LIMK)	2.923779	2	0.2318

Dependent variable: D(LIMK)

Excluded	Chi-sq	df	Prob.
D(LDOV)	5.380105	2	0.0679

Tablo EK-4 Filtrelenmiş Döviz Kuru ve İMKB değişkenleri üzerinden VEC Modeli

Vector Error Correction Estimates

Sample (adjusted): 1995M04 2008M12

Included observations: 165 after adjustments

Standard errors in () & t-statistics in []

Error Correction:	D(FILTIMK)	D(FILTDOV)
CointEq1	-0.002936 (0.00265) [-1.10932]	-0.003891 (0.00097) [-4.02062]
D(FILTIMK(-1))	0.242722 (0.07882) [3.07943]	-0.048252 (0.02883) [-1.67394]
D(FILTIMK(-2))	-0.087897 (0.07805) [-1.12616]	-0.017035 (0.02854) [-0.59681]
D(FILTDOV(-1))	0.410065 (0.21674) [1.89194]	0.316472 (0.07927) [3.99254]
D(FILTDOV(-2))	0.078047 (0.21789) [0.35819]	0.003807 (0.07969) [0.04778]
C	0.009954	0.016398

(0.00999) (0.00365)
[0.99605] [4.48687]

Tablo EK-5 Filtrelenmiş Döviz Kuru ve İMKB Değişkenlerinin nedensellik sınaması (VEC üzerinden)

VEC Granger Causality/Block Exogeneity Wald Tests
Sample: 1995M01 2008M12
Included observations: 165

Dependent variable: D(FILTIMK)			
Excluded	Chi-sq	df	Prob.
D(FILTDOV)	4.805182	2	0.0905
Dependent variable: D(FILTDOV)			
Excluded	Chi-sq	df	Prob.
D(FILTIMK)	3.781094	2	0.1510

Tablo EK-6 LDOV ve LIMK değişkenlerinin nedensellik sınaması (VAR üzerinden)

VAR Granger Causality/Block Exogeneity Wald Tests
Sample: 1995M01 2008M12
Included observations: 165

Dependent variable: D(LDOV)			
Excluded	Chi-sq	df	Prob.
D(LIMK)	5.163910	2	0.0756
Dependent variable: D(LIMK)			
Excluded	Chi-sq	df	Prob.
D(LDOV)	8.991890	2	0.0112

Tablo EK-7 Filtrelenmiş Döviz Kuru ve İMKB Değişkenlerinin nedensellik
sınaması (VAR üzerinden)

VAR Granger Causality/Block Exogeneity Wald Tests
Sample: 1995M01 2008M12
Included observations: 165

Dependent variable: FILT D(LDOV)			
Excluded	Chi-sq	df	Prob.
FILTD(LIMK)	11.32106	2	0.0035
Dependent variable: FILTD(LIMK)			
Excluded	Chi-sq	df	Prob.
FILT D(LDOV)	5.233901	2	0.0730

Tablo EK-8 Kukla Değişkenlerle, LDOV ve LIMK değişkenlerinin nedensellik
sınaması

VAR Granger Causality/Block Exogeneity Wald Tests
Sample: 1995M01 2008M12
Included observations: 165

Dependent variable: D(LDOV)			
Excluded	Chi-sq	df	Prob.
D(LIMK)	3.039932	2	0.2187
KUKLA	26.27210	2	0.0000
All	32.21938	4	0.0000
Dependent variable: D(LIMK)			

Excluded	Chi-sq	df	Prob.
D(LDOV)	6.418494	2	0.0404
KUKLA	0.209876	2	0.9004
All	9.101162	4	0.0586
Dependent variable: KUKLA			
Excluded	Chi-sq	df	Prob.
D(LDOV)	1.469787	2	0.4796
D(LIMK)	2.349412	2	0.3089
All	5.784327	4	0.2158

Tablo EK-9 LDOV değişkeninin durağanlık sınaması

Null Hypothesis: LDOV has a unit root
Exogenous: Constant, Linear Trend
Lag Length: 2 (Automatic based on SIC, MAXLAG=13)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-0.965601	0.9448
Test critical values: 1% level	-4.014635	
5% level	-3.437289	
10% level	-3.142837	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Tablo EK-10 LIMK değişkeninin durağanlık sınaması

Null Hypothesis: LIMK has a unit root
Exogenous: Constant, Linear Trend
Lag Length: 1 (Automatic based on SIC, MAXLAG=13)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-1.950605	0.6234
Test critical values: 1% level	-4.014288	
5% level	-3.437122	
10% level	-3.142739	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Tablo EK-11 Model artıklarının durağanlık sınaması

Null Hypothesis: RES has a unit root

Exogenous: Constant

Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=13)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-2.543679	0.1071
Test critical values: 1% level	-3.469691	
5% level	-2.878723	
10% level	-2.576010	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Tablo EK-12 Farkı alınmış LDOV değişkeninin durağanlık sınaması

Null Hypothesis: D(LDOV) has a unit root

Exogenous: Constant

Lag Length: 2 (Automatic based on SIC, MAXLAG=13)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-4.941838	0.0001
Test critical values: 1% level	-3.470427	
5% level	-2.879045	
10% level	-2.576182	

Tablo EK-13 Farkı alınmış LIMK değişkeninin durağanlık sınaması

Null Hypothesis: D(LIMK) has a unit root

Exogenous: Constant

Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=13)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-9.311629	0.0000
Test critical values: 1% level	-3.469933	
5% level	-2.878829	
10% level	-2.576067	

ÖZGEÇMİŞ

19.04.1979 tarihinde doğan Özlem Yorulmaz, 2001 tarihinde Mimar Sinan Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü’nden mezun olmuştur. 2001-2003 tarihleri arasında Marmara Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü İstatistik Ana Bilim Dalı’ndan “Robust Regresyon ve Mathematica Uygulamaları” isimli tez çalışması ile yüksek lisans diplomasını almıştır. Akademik hayata Aralık 2001’de başlayan araştırmacı, halen İstanbul Üniversitesi İktisat Fakültesi’nde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.