

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TOPLANABİLİRLİK ALANLARININ ÇARPAN UZAYLARI

Mehmet ÜNVER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2009**

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

TOPLANABİLİRLİK ALANLARININ ÇARPAN UZAYLARI

Mehmet ÜNVER

Ankara Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Cihan ORHAN

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, toplanabilme teorisinin bazı temel kavramlarına yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, öncelikle istatistiksel yakınsaklık ile kuvvetli p -Cesàro toplanabilme kavramları tanıtılıp sınırlı diziler için bu kavramların denkliği gösterilmiştir. Daha sonra A -istatistiksel yakınsaklık ve A -kuvvetli toplanabilme kavramları tanıtılıp yine sınırlı diziler için bu kavramların denkliği gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde, çarpımsal (P özellikli) matrisler tanıtılıp reel terimli, regüler bir A matrisinin çarpımsal olması karakterize edilmiştir. Daha sonra bir A matrisinin sınırlı toplanabilme alanının çarpan uzayı incelenmiştir.

Son bölümde ise, ilk olarak A -düzgün integrallenebilen diziler uzayı ile A -sınırlı diziler uzayı tanıtılmış ve bir x dizisinin A -kuvvetli yakınsak olması için gerek ve yeter koşulun x dizisinin A -istatistiksel yakınsak ve A -düzgün integrallenebilir olması olduğu gösterilmiştir. Daha sonra A -düzgün integrallenebilirlik kullanılarak bir $\mathcal{U}$ cebiri için A matrisinin çarpan uzayı karakterize edilmiştir. Ayrıca, A -düzgün integrallenebilen diziler uzayı üzerinde A -istatistiksel yakınsaklığın negatif olmayan regüler ve üçgensel bir matris metoduna denk olduğu gösterilmiştir.

2009, 56 sayfa

Anahtar Kelimeler : Çarpımsal toplanabilme metodu, kuvvetli toplanabilme metodu, istatistiksel yakınsak dizi, çarpan uzaylar

ABSTRACT

Master Thesis

MULTIPLIER SPACES OF SUMMABILITY FIELDS

Mehmet ÜNVER

Ankara University

Graduate School of Natural And Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof.Dr. Cihan ORHAN

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, some basic concept of summability theory has been recalled. In the third chapter, the concepts of statistical convergence and strong p -Cesàro convergence of sequences have been studied and equivalence of these concepts for bounded sequences have been given. Subsequently, the idea of A -statistical convergence and A -strong convergence of sequences have been explained. The equivalence of these concepts for bounded sequences have also been examined.

In the fourth chapter, multiplicative matrices (property P) have been explained. A characterization of a multiplicative regular matrix with real entries has been given. Subsequently, multiplier space of the bounded summability field of a matrix has been investigated.

In the final chapter, by using a recently introduced concept of A -uniform integrability, multipliers of A , over any algebra, $\mathcal{U}$, has been characterized. It has been shown that x is A -strongly convergent if and only if it is A -statistically convergent and A -uniformly integrable. Moreover, it has been shown that, over the space of A -uniform integrable sequences, A -statistical convergence is equivalent to a nonnegative regular and triangular matrix method.

2009, 56 pages

Key Words: Multiplicative summability method, strong summability method, statistically convergent sequence, multiplier spaces

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana veren ve değerli bilgilerini benden hiçbir zaman esirgemeyen danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Cihan Orhan (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'a en içten saygı ve minnetlerimi sunarım. Her zaman bana sağladığı verimli çalışma ortamı ve desteği nedeniyle ayrıca teşekkür ederim. Çalışmalarımız esnasında öğrendiğim bilgiler tüm kariyerim boyunca bana ışık tutacaktır.

Yüksek lisans eğitimime başladığım andan itibaren benden desteğini esirgemeyen Sayın Yrd. Doç. Dr. Şeyhmus Yardımcı'ya ve haftalık seminerlerimizde benimle birlikte olan arkadaşlarıma en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca bu bölümün bir mensubu olmaktan her zaman gurur ve mutluluk duyacağımı da belirtmek isterim.

Bu tez "TÜBİTAK-2228 Yüksek Lisans Burs Programı" tarafından desteklenmiştir. TÜBİTAK'na en içten teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın tüm aşamalarında beni yalnız bırakmayan ve destekleyen aileme sonsuz teşekkürler ederim.

Mehmet ÜNVER

Ankara, Temmuz 2009.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
SİMGELER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	2
3. İSTATİSTİKSEL VE A-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK	4
3.1 İstatistiksel Yakınsaklık	4
3.2 İstatistiksel Yakınsaklığın Matris Karakterizasyonu	10
3.3 İstatistiksel Yakınsaklık ve Kuvvetli p-Cesáro Toplanabilme	12
3.4 A-istatistiksel Yakınsaklık ve Kuvvetli Toplanabilme	15
4. SINIRLI TOPLANABİLME ALANLARI	18
4.1 Çarpımsal (P Özellikli) Matrisler	18
4.2 Sınırlı Toplanabilme Alanlarında Yaklaşım	20
4.3 Sınırlı Toplanabilme Alanlarının Çarpanları	21
5. TOPLANABİLME ALANLARININ DÜZGÜN İNTEGRALLENEBİLEN DİZİLER ÜZERİNDE ÇARPANLARI	30
5.1 Düzgün İntegrallenebilen ve A-sınırlı Diziler	30
5.2 Çarpan Uzaylar	36
6. SONUÇ	52
KAYNAKLAR	54
ÖZGEÇMİŞ	56

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{U}_A$	A -düzgün integrallenebilen diziler uzayı
st_A	A -istatistiksel yakınsak diziler uzayı
$\delta(A)$	A kümesinin asimptotik yoğunluğu
$\omega(A)$	A -kuvvetli toplanabilen diziler uzayı
$ A $	A kümesinin eleman sayısı
A^c	A kümesinin tümleyeni
χ_A	A kümesinin karakteristik fonksiyonu
A^*	A matrisinin sınırlı toplanabilme alanı
c_A	A matrisinin toplanabilirlik alanı
$\mathbb{S}_A$	A -sınırlı diziler uzayı
C_1	Cesàro matrisi
$h.h.k$	Hemen her k
ω_p	Kuvvetli p -Cesàro toplanabilen diziler uzayı
$\ \cdot\ _\infty$	ℓ_∞ uzayının alışılmış supremum normu
$m_{\mathcal{U}}$	$m_{\mathcal{U}}(c_A \cap \mathcal{U}, c_A)$
w	Reel ya da kompleks terimli tüm diziler uzayı
$\omega_0(A)$	Sıfıra A -kuvvetli toplanabilen diziler uzayı
ℓ_∞	Sınırlı diziler uzayı
$m_{\mathcal{U}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$	$\mathcal{U}$ üzerinde çarpanların uzayı
$\{(Ax)_n\}$	x dizisinin A matrisi altındaki dönüşüm dizisi
$A(x)$	$\{(Ax)_n\}$ dizisinin limiti

1. GİRİŞ

Sınırlı diziler uzayı ℓ_∞ ile gösterilmek üzere keyfi bir B matrisi için $m_B(\ell_\infty) = \{x \in \ell_\infty : \text{her } y \in c_B \cap \ell_\infty \text{ için } xy \in c_B\}$ uzayının karakterize edilmesi toplanabilme teorisinin bugüne kadar çözülememiş önemli bir problemidir. Bununla ilişkili olarak bir bakıma daha kolay bir problem de çarpımsal metodlar için $m_B(\ell_\infty)$ uzayının karakterizasyonudur. Bu tür bir karakterizasyon Henriksen ve Isbell (1964) tarafından bir konferansta sunulmuş ancak yayınlanmamıştır. Petersen (1972) tarafından bir ispat yayınlanmış ancak bu ispatın yanlış olduğu Khan ve Orhan (2007) tarafından yapılan incelemelerle ortaya konulmuştur.

Bu tezin amacı regüler ve çarpımsal toplanabilme metodlarının toplanabilirlik alanlarının çarpanlarını karakterize etmektir.

Bu tezde, A -düzgün integrallenebilme kavramı kullanılarak A -düzgün integrallenebilir diziler uzayı tarafından içerilen bir $\mathcal{U}$ cebiri için A matrisinin çarpan uzayı karakterize edilecektir. Ayrıca, çarpımsal negatif olmayan ve regüler bir B matris toplanabilme metodu için $m_B(\ell_\infty) = c_B \cap \ell_\infty = st_B \cap \ell_\infty$ olduğu gösterilecektir.

Fridy (1985) tarafından istatistiksel yakınsaklığın bir matris gösteriminin olmadığını ispatlanmıştır. Fridy ve Miller (1991) tarafından ise istatistiksel yakınsaklık ve matris toplanabilme metodlarının bir sınıfı arasında kuvvetli bir bağlantı olduğunu gösterilmiştir. Burada ise A -düzgün integrallenebilir diziler uzayı üzerinde A -istatistiksel yakınsaklığın negatif olmayan regüler ve üçgensel bir matris metoduna denk olduğu gösterilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde toplanabilme teorisinin bazı temel kavramları verilecektir. Bu yüksek lisans tezinde $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ doğal sayılar kümesini gösterecektir.

Tanım 2.1 ω , reel ya da kompleks terimli tüm dizilerin uzayı ve $E \subseteq \omega$ alt vektör uzayı olmak üzere E uzayına bir dizi uzayı denir. Bir E dizi uzayından reel veya kompleks cisime tanımlı lineer bir f fonksiyoneline toplanabilme metodu denir. Eğer E yakınsak diziler uzayını içeriyor ve $\lim x = L$ olduğunda $f(x) = L$ oluyorsa f fonksiyoneline regüler toplanabilme metodu denir.

Tanım 2.2 $A = (a_{nk})$ reel ya da kompleks terimli sonsuz matris ve $x = (x_k)$ bir dizi olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k$$

serisi yakınsak ise

$$(Ax)_n := \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k$$

olmak üzere $Ax := \{(Ax)_n\}$ dizisine x dizisinin A dönüşüm dizisi denir (Maddox 1970).

$$\omega_A := \{x \in \omega : \{(Ax)_n\} \text{ dizisi mevcut}\}$$

ve

$$c_A := \{x \in \omega : \{(Ax)_n\} \text{ dizisi yakınsak}\}$$

kümelerini tanımlayalım. Eğer $f : c_A \rightarrow \mathbb{K}$ fonksiyoneline $f(x) = \lim_n (Ax)_n$ şeklinde tanımlarsak f bir toplanabilme metodudur. Eğer $\lim_n (Ax)_n = L$ ise x dizisi L değerine A -toplanabilirdir denir. Bu tezde $A(x) := \lim_n (Ax)_n$ ile gösterilecektir.

Teorem 2.1 (Silverman-Toeplitz) Bir $A = (a_{nk})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter koşul;

- (i) $\|A\| := \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = 0$ (her k için)

$$(iii) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$$

olmasıdır (Hardy and Littlewood 1913, Boos 2000).

Örneğin

$$c_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n} & , \quad 1 \leq k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

ile tanımlı C_1 Cesàro matrisi regülerdir.

Tanım 2.3 A ve B iki matris toplanabilme metodu olsun. Her $x \in c_A \cap c_B$ için $\lim_n (Ax)_n = \lim_n (Bx)_n$ oluyorsa A ile B tutarlıdır denir (Boos 2000).

Tanım 2.4 A ve B iki matris toplanabilme metodu olmak üzere eğer $c_B \supset c_A$ ve A ile B tutarlı ise B metodu A metodunu içeriyor denir ve $B \supset A$ ile gösterilir. $B \supset A \supset B$ oluyorsa A ile B denktir denir (Boos 2000).

3. İSTATİSTİKSEL VE A-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde önce istatistiksel yakınsaklık incelenecek daha sonra istatistiksel yakınsaklığın matris karakterizasyonu verilecek ve kuvvetli yakınsaklık ile ilişkisi incelenecektir. Ayrıca, A -istatistiksel yakınsaklık kavramı ele alınacak ve A -istatistiksel yakınsaklık ile A -kuvvetli toplanabilmenin ilişkisi incelenecektir. Bu bölümde ele alınacak diziler *reel* terimli olup aslında elde edilen sonuçların bir çoğu *kompleks* terimli diziler için de geçerlidir.

3.1 İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda bir dizinin istatistiksel yakınsaklığı incelenecektir.

Tanım 3.1.1 $K \subseteq \mathbb{N}$ kümesini alalım.

$$\delta(K) := \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$$

limiti mevcut ise bu limite K kümesinin asimptotik yoğunluğu denir (Niven and Zuckerman 1980). Burada $A \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere $|A|$ ile A kümesinin kardinal sayısı gösterilmektedir.

Tanım 3.1.2 $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa x dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - \lim x = L$ ile gösterilir (Fast 1951, Steinhaus 1951).

Şimdi bir $\varepsilon > 0$ için $E_\varepsilon = \{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ dersek χ_{E_ε} bu kümenin karakteristik fonksiyonu olmak üzere $st - \lim x = L$ olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ için $\lim_n (C_1 \chi_{E_\varepsilon}(k))_n = 0$ olmasıdır.

Örnek 3.1.1

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k} & , \quad k = m^2 \\ 1 & , \quad k \neq m^2 \end{cases} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini inceleyelim. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - 1| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 1\}| \leq \lim_n \frac{1}{n} \sqrt{n} = 0$$

olduğundan $st - \lim x = 1$ bulunur.

Tanım 3.1.3 $x = (x_k)$ dizisi bir P özelliğini yoğunluğu sıfır olan bir küme dışındaki her k için gerçekliyorsa x dizisi P özelliğini *hemen her k için* gerçekliyor denir (Fridy 1985).

Önerme 3.1.1 $x = (x_k)$ bir dizi olmak üzere, x dizisinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $x_k = y_k$ ($h.h.k$) olacak biçimde yakınsak bir $y = (y_k)$ dizisinin mevcut olmasıdır (Fridy 1985).

Önerme 3.1.2 Bir $x = (x_k)$ dizisinin bir L sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\delta(K) = 1$ olacak biçimde bir $K \subseteq \mathbb{N}$ için $\lim_{k \in K} x_k = L$ olmasıdır (Şalát 1980, Fridy 1985, Connor 1988).

x ve y iki istatistiksel yakınsak dizi ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $xy = (x_k y_k)$ ve $\lambda x = (\lambda x_k)$ dizileri de istatistiksel yakınsak dizilerdir. x dizisinin bir L sayısına yakınsak olması x dizisinin yine L sayısına istatistiksel yakınsak olmasını gerektirdiği açıktır. O halde istatistiksel yakınsaklık, yakınsaklığın bir genişletilmesidir.

Teorem 3.1.1 $x = (x_k)$ bir dizi olmak üzere, x bir L sayısına istatistiksel yakınsak ise $x = y + z$ olacak biçimde L değerine yakınsak bir $y = (y_k)$ dizisi ve sıfıra istatistiksel yakınsak bir $z = (z_k)$ dizisi vardır. Hatta x dizisi sınırlı ise z dizisi de sınırlıdır (Connor 1988).

İspat: $st - \lim x = L$ olsun. $N_0 = 0$ olmak üzere $n > N_j$ için,

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq j\}| < \frac{1}{j}$$

olacak şekilde pozitif tamsayıların artan bir,

$$N_1 < N_2 < \dots$$

dizisini alalım. $y = (y_k)$ ve $z = (z_k)$ dizilerini aşağıdaki şekilde tanımlayalım;

$N_0 < k \leq N_1$ ise

$$z_k = 0 \text{ ve } y_k = x_k$$

olsun. $j > 1$ ve $N_j < k \leq N_{j+1}$ için ,

$$\begin{aligned} |x_k - L| &< \frac{1}{j} \text{ ise } y_k = x_k \text{ ve } z_k = 0 \\ |x_k - L| &\geq \frac{1}{j} \text{ ise } y_k = L \text{ ve } z_k = x_k - L \end{aligned}$$

olsun. Bu durumda $x = y + z$ gerçekleşir. Ayrıca $\|x\|_\infty := \sup_k |x_k|$ olmak üzere x dizisi sınırlı ise

$$\|z\|_\infty \leq \|x\|_\infty + |L|$$

olduğu açıktır. Şimdi $\varepsilon > 0$ alalım ve j 'yi $\varepsilon > \frac{1}{j}$ olacak şekilde seçelim. $k > N_j$ olmak üzere; $|x_k - L| < \frac{1}{j}$ ise $|y_k - L| = |x_k - L|$ olduğundan $|y_k - L| < \varepsilon$, $|x_k - L| \geq \frac{1}{j}$ ise $|y_k - L| = |L - L| = 0$ olup ε keyfi olduğundan y dizisi L değerine yakınsaktır. Her n sayısı ve her $\varepsilon > 0$ için,

$$|\{k \leq n : z_k \neq 0\}| \geq |\{k \leq n : |z_k| \geq \varepsilon\}|$$

olduğundan $st - \lim z = 0$ olduğunu göstermek için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : z_k \neq 0\}| = 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir. $\frac{1}{j} < \delta$ olacak şekilde $\delta > 0$ ve $j \in \mathbb{N}$ alalım.

$N_j < k \leq N_{j+1}$ ise sadece $|x_k - L| > \frac{1}{j}$ olduğunda $z_k \neq 0$ olur. O halde $N_l < k \leq N_{l+1}$ ise

$$\{k \leq n : z_k \neq 0\} \subseteq \left\{k \leq n : |x_k - L| > \frac{1}{l}\right\}$$

olur. Sonuç olarak, $N_l < k \leq N_{l+1}$ ve $l > j$ ise,

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : z_k \neq 0\}| \leq \frac{1}{n} \left| \left\{k \leq n : |x_k - L| > \frac{1}{l}\right\} \right| < \frac{1}{l} < \frac{1}{j} < \delta$$

gerçeklenir. Bu da ispatı tamamlar.

İstatistiksel yakınsaklığa regüler bir toplanabilme metodu olarak bakılabilir. Aşağıda istatistiksel yakınsaklığın bir matris toplanabilme metodu tarafından *içerilmediğini* göstereceğiz. Bunun için öncelikle aşağıdaki lemmayı vereceğiz.

Lemma 3.1.1 Sonsuz sayıda k için $t_k \neq 0$ olacak şekilde bir t sayı dizisini alalım. Bu durumda $x_k = 0$ ($h.h.k$) ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k x_k = \infty$$

olacak şekilde bir x dizisi vardır (Fridy 1985).

İspat: $\{m(k)\}$ pozitif tamsayıların artan bir dizisi ve her k için,

$$m(k) > k^2 \text{ ve } t_{m(k)} \neq 0$$

olsun. Şimdi bir $x = (x_k)$ dizisini

$$x_{m(k)} = \frac{1}{t_{m(k)}} \text{ ve } x_k = 0 \text{ (diğer durumlarda)}$$

olacak şekilde tanımlayalım. O halde $x_k = 0$ ($h.h.k$) ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k x_k = \sum_{k=1}^{\infty} t_{m(k)} x_{m(k)} = \infty$$

gerçeklenir.

Teorem 3.1.2 Hiçbir matris toplanabilme metodu istatistiksel yakınsaklık metodunu içermez (Fridy 1985).

İspat: *Lemma 3.1.1* gösteriyorki istatistiksel yakınsaklık metodunu içeren bir matris öncelikle satır sonlu olmalıdır. Keyfi satır sonlu bir $A = (a_{nk})$ matrisini alalım. Sıfırdan farklı $a_{n(1),k'(1)}$ elemanını seçelim. Daha sonra $k(1) \geq k'(1)$, $a_{n(1),k(1)} \neq 0$ ve $k > k(1)$ için $a_{n(1),k} = 0$ olacak şekilde bir $k(1)$ kolonunu seçelim. Her m için,

$$k(m) \geq m^2 \text{ ise } a_{n(m),k(m)} \neq 0$$

ve

$$k > k(m) \text{ ise } a_{n(m),k} = 0$$

olmak üzere satır ve sütun indislerinin artan bir dizisini seçebiliriz. Şimdi $x = (x_k)$ dizisini

$$\begin{aligned} x_{k(1)} &= \frac{1}{a_{n(1),k(1)}} \\ &\vdots \\ x_{k(m)} &= \frac{1}{a_{n(m),k(m)}} \left[m - \sum_{i=1}^{m-1} a_{n(m),k(i)} x_{k(i)} \right] \\ &\vdots \\ x_k &= 0 \text{ (diğer durumlarda)} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. O halde

$$\begin{aligned} (Ax)_{n(m)} &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{n(m),k} x_k = \sum_{i=1}^m a_{n(m),k(i)} x_{k(i)} \\ &= a_{n(m),k(m)} x_{k(m)} + \sum_{i=1}^{m-1} a_{n(m),k(i)} x_{k(i)} \\ &= a_{n(m),k(m)} \frac{1}{a_{n(m),k(m)}} \left[m - \sum_{i=1}^{m-1} a_{n(m),k(i)} x_{k(i)} \right] + \sum_{i=1}^{m-1} a_{n(m),k(i)} x_{k(i)} \\ &= m \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\{(Ax)_{n(m)}\}$ dizisi yakınsak değildir. Bir başka deyimle x dizisi A -toplanabilen bir dizi değildir. Ayrıca $k(m) \geq m^2$ olduğundan,

$$|\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olup

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \lim_n \frac{1}{n} \sqrt{n} = 0$$

olduğundan $st - \lim x = 0$ elde edilir. Bu durumda x dizisi istatistiksel yakınsak olduğu halde A -toplanabilir değildir, yani A metodu istatistiksel yakınsaklığı içermez.

Şimdi de istatistiksel yakınsaklığın içerdiği aşıkâr olmayan bir matris metodunun varlığını gösterelim.

Örnek 3.1.2 $A = (a_{nk})$ matrisi,

$$a_{nk} = \begin{cases} 1 & , \quad k = n \text{ ve } n \text{ tam kare değil} \\ \frac{1}{2} & , \quad n = m^2 \text{ ve } k = n \text{ veya } k = (m-1)^2 \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O halde her $x = (x_k)$ dizisi için

$$(Ax)_n = \begin{cases} \frac{x_1}{2} & , \quad n = 1 \\ \frac{x_{(m-1)^2} + x_{m^2}}{2} & , \quad n = m^2 \quad (m = 1, 2, \dots) \\ x_n & , \quad n \text{ tam kare değil} \end{cases}$$

gerçeklenir. A matrisi regüler ve üçgen bir matrisdir. Kabul edelimki $\lim_n (Ax)_n = L$ olsun.

$$|\{k \leq n : (Ax)_k \neq x_k\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : (Ax)_k \neq x_k\}| \leq \lim_n \frac{1}{n} \sqrt{n} = 0$$

gerçeklenir. Dolayısıyla $(Ax)_k = x_k$ ($h.h.k$) olur. Bu durumda *Önerme 3.1.1*'den $st - \lim x = L$ gerçekleşir. O halde istatistiksel yakınsaklık metodunun A metodunu içerdiğini söyleyebiliriz. Şimdi de A metodunun yakınsaklığa denk olmadığını gösterelim. Bunun için bir $x = (x_k)$ dizisini,

$$x_k = \begin{cases} (-1)^m & , \quad k = m^2 \\ 0 & , \quad k \neq m^2 \end{cases} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $(Ax)_1 = -\frac{1}{2}$ ve $n > 1$ için $(Ax)_n = 0$ elde edilir. x dizisi yakınsak değildir fakat A -toplanabilirdir (Fridy 1985).

3.2 İstatistiksel Yakınsaklığın Matris Karakterizasyonu

Bu kısımda matris metodlarının bir τ sınıfı ile matris toplanabilme ve istatistiksel yakınsaklık arasında güçlü bir ilişki kurulacaktır. Şimdi,

- (i) Her n için $\sum_{k=1}^n a_{nk} = 1$,
- (ii) $K \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere $\delta(K) = 0$ ise $\lim_n \sum_{k \in K} a_{nk} = 0$

olacak şekilde negatif olmayan üçgensel $A = (a_{nk})$ matrislerinin sınıfı τ olsun. Bu sınıftaki her matris negatif olmayan terimlere sahip olduğundan (i) ve (ii) şartları, matrisin regülerliği için *Silverman-Toeplitz* koşullarının gerçekleşmesini garantiler. Sözü edilen karakterizasyonu vermek için aşağıda ispatsız verilen lemmaya ihtiyaç duyulacaktır.

Lemma 3.2.1 Sınırlı bir $x = (x_k)$ dizisi istatistiksel yakınsak değil ise $\{n \in \mathbb{N} : x_n < \lambda\}$ ve $\{n \in \mathbb{N} : x_n > \mu\}$ kümeleri sıfır yoğunluğa sahip olmayacak şekilde $\lambda < \mu$ reel sayıları vardır (Fridy and Miller 1991).

Teorem 3.2.1 Sınırlı bir $x = (x_k)$ dizisinin L sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $A \in \tau$ için $\lim_n (Ax)_n = L$ olmasıdır (Fridy and Miller 1991).

İspat: İlk olarak $st - \lim x = L$ olduğunu kabul edelim. $A \in \tau$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. $K := \{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ olmak üzere $\delta(K) = 0$ ve $k \notin K$ ise $|x_k - L| < \varepsilon$ gerçektir.

$$\begin{aligned}
|(Ax)_n - L| &= \left| \sum_k a_{nk} x_k - L \right| \\
&= \left| \sum_k a_{nk} x_k - L \sum_k a_{nk} \right| \\
&\leq \left| \sum_{k \notin K} a_{nk} (x_k - L) \right| + \left| \sum_{k \in K} a_{nk} (x_k - L) \right| \\
&\leq \varepsilon \sum_{k \notin K} a_{nk} + \left(\sup_k |x_k - L| \right) \sum_{k \in K} a_{nk} \tag{3.2.1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi (3.2.1) eşitsizliğinde her iki tarafın $n \rightarrow \infty$ için limiti alınırsa,

$$\lim_n |(Ax)_n - L| \leq \varepsilon \lim_n \sum_{k \notin K} a_{nk} + \left(\sup_k |x_k - L| \right) \lim_n \sum_{k \in K} a_{nk}$$

gerçektir. $\delta(K) = 0$ ve ε keyfi olduğundan (ii) koşuluna göre

$$\lim_n |(Ax)_n - L| = 0$$

olur. Yani $\lim_n (Ax)_n = L$ gerçektir.

Karşıt olarak $st - \lim x = M \neq L$ olsun. Bu durumda gerek koşuldaki her $A \in \tau$ için $\lim_n (Ax)_n = M \neq L$ gerçektir. O halde x dizisinin istatistiksel yakınsak olmadığını kabul edelim. *Lemma 3.2.1*'den $U = \{k \in \mathbb{N} : x_k < \lambda\}$ ve $V = \{k \in \mathbb{N} : x_k > \mu\}$ sıfır yoğunluğa sahip olmayacak şekilde $\lambda < \mu$ reel sayıları vardır. O halde her $k \in \mathbb{N}$ için,

$$\frac{1}{u_k} |\{n \in U : n \leq u_k\}| > \varepsilon$$

ve

$$\frac{1}{v_k} |\{n \in V : n \leq v_k\}| > \varepsilon$$

olacak şekilde $\varepsilon > 0$, $U' = \{u_k\}_{k=1}^\infty \subset U$ ve $V' = \{v_k\}_{k=1}^\infty \subset V$ alt kümeleri vardır.

$U \cap V = \emptyset$ olduğundan U' ile V' kümeleri ayrıktır. Şimdi,

$$U_n = \{k \leq n : k \in U\}$$

ve

$$V_n = \{k \leq n : k \in V\}$$

olmak üzere bir $A = (a_{nk})$ matrisini,

$$a_{nk} = \begin{cases} 0 & , \quad k > n \\ \frac{1}{n} & , \quad k \leq n \text{ ve } n \notin U' \cup V' \\ \frac{1}{|U_n|} & , \quad n \in U' \text{ ve } k \in U_n \\ \frac{1}{|V_n|} & , \quad n \in V' \text{ ve } k \in V_n \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $A \in \tau$ olup

$$n \in U' \text{ ise } (Ax)_n < \lambda$$

ancak

$$n \in V' \text{ ise } (Ax)_n > \mu$$

olacaktır. O halde $A \in \tau$ gerçekleştiği halde $\{(Ax)\}_n$ yakınsak değildir.

3.3 İstatistiksel Yakınsaklık ve Kuvvetli p-Cesàro Toplanabilme

Bu kısımda kuvvetli p -Cesàro toplanabilme kavramının tanımı yapıldıktan sonra sınırlı diziler için kuvvetli p -Cesàro toplanabilme ile istatistiksel yakınsaklığın denk olduğu gösterilecektir.

Tanım 3.3.1 $x = (x_k)$ bir dizi ve $0 < p < \infty$ olsun.

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde L sayısı varsa x dizisi L sayısına kuvvetli p -Cesàro toplanabilirdir

denir (Hardy and Littlewood 1913, Connor 1988). Bu tezde p -Cesàro toplanabilen dizilerin kümesi ω_p ile gösterilecektir.

Teorem 3.3.1 $p \in \mathbb{R}^+$ olsun.

i) Bir dizi bir L değerine kuvvetli p -Cesàro toplanabilir ise aynı değere istatistiksel yakınsaktır.

ii) Sınırlı bir dizi L değerine istatistiksel yakınsak ise aynı değere kuvvetli p -Cesàro toplanabilir (Connor 1988).

İspat: *i)* L sayısına kuvvetli p -Cesàro toplanabilir bir $x = (x_k)$ dizisini alalım. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n |x_k - L|^p &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |x_k - L| < \varepsilon}} |x_k - L|^p + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L|^p \\
&\geq \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L|^p \\
&\geq \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} \varepsilon^p \\
&= \varepsilon^p \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} 1 \\
&= \varepsilon^p |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|
\end{aligned}$$

gerçeklenir. Bu durumda,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p \geq \frac{\varepsilon^p}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \geq 0 \quad (3.3.1)$$

elde edilir. (3.3.1) eşitsizliğinde her iki tarafın $n \rightarrow \infty$ için limiti alınır sol tarafın limiti sıfır olacağından her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

gerçeklenir. Yani $st - \lim x = L$ olmalıdır.

ii) Şimdi sınırlı bir $x = (x_k)$ dizisini alalım. Ayrıca $st - \lim x = L$ olduğunu kabul edelim. $\|x\|_\infty := \sup_k |x_k|$ olmak üzere $M := \|x\|_\infty + L$ tanımlayalım. $\varepsilon > 0$ olmak üzere her $n > N_\varepsilon$ için,

$$\frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |x_k - L| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \right| < \frac{\varepsilon}{2M^p}$$

olacak şekilde bir $N_\varepsilon > 0$ seçelim. Her k için $|x_k - L| \leq |x_k| + |L| = M$ olduğundan $|x_k - L|^p \leq M^p$ elde edilir. $n > N_\varepsilon$ olmak üzere,

$$E := \left\{ k \in \mathbb{N} : |x_k - L| < \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

dersek,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p &= \frac{1}{n} \left\{ \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \in E^c}} |x_k - L|^p + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \in E}} |x_k - L|^p \right\} \\ &\leq \frac{1}{n} \left\{ \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \in E^c}} M^p + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \in E}} \frac{\varepsilon}{2} \right\} \\ &\leq \frac{1}{n} \left\{ M^p \left| \left\{ k \leq n : |x_k - L| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \right| + n \frac{\varepsilon}{2} \right\} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

gerçeklenir. Bu durumda $st - \lim x = L$ gerçekleşir.

Sonuç 3.3.1 Sınırlı diziler uzayı üzerinde istatistiksel yakınsaklık ile kuvvetli p -Cesàro toplanabilme denktir.

3.4 A-İstatistiksel Yakınsaklık ve Kuvvetli Toplanabilme

Bu kısımda A -istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli toplanabilme kavramları verilip sınırlı diziler üzerinde bu kavramların denkliği gösterilecektir.

Tanım 3.4.1 $A = (a_{nk})$ negatif olmayan matris olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \sum_{k: |x_k - L| > \varepsilon} a_{nk} = 0$$

gerçekleniyorsa $x = (x_k)$ dizisi L sayısına A -istatistiksel yakınsaktır denir ve $st_A - \lim x = L$ ile gösterilir (Connor 1989, Kolk 1991, Miller 1995). A -istatistiksel yakınsak dizilerin uzayını st_A ile gösterirsek st_A uzayının bir cebir yapısına sahip olduğunu söyleyebiliriz. Burada $\mathcal{U}$ bir dizi uzayı olmak üzere her $x, y \in \mathcal{U}$ için $xy \in \mathcal{U}$ oluyorsa $\mathcal{U}$ uzayına bir cebir denir. A -istatistiksel yakınsaklık ile bir $E \subseteq \mathbb{N}$ kümesinin A -yoğunluğu bağlantılıdır. Eğer,

$$\delta_A(E) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in E} a_{nk}$$

limiti mevcut ise E , A -yoğunluğa sahiptir denir (Freedman and Sember 1981). Böylece bir $\varepsilon > 0$ için $E_\varepsilon := \{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ dersek, $st_A - \lim x = L$ olması için gerek ve şart her $\varepsilon > 0$ için $\delta_A(E_\varepsilon) = 0$ olmasıdır.

A -istatistiksel yakınsaklık kavramında A matrisi yerine C_1 Cesàro matrisi alınırsa istatistiksel yakınsaklık kavramı elde edilir.

Daha önce ispatlanan *Teorem 3.2.1*'in bir benzeri de A -istatistiksel yakınsaklık için verilebilir: A negatif olmayan regüler bir matris olmak üzere,

i) Her n için $\sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} = 1$,

ii) $K \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere $\delta_A(K) = 0$ ise $\lim_n \sum_{k \in K} b_{nk} = 0$

olacak şekilde tüm $B = (b_{nk})$ matrislerinin sınıfı τ_A ile gösterilsin. O halde aşağıdaki teorem ispatsız verilebilir.

Teorem 3.4.1 Sınırlı bir x dizisinin bir L sayısına A -istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $B \in \tau_A$ için $\lim_n (Bx)_n = L$ olmasıdır (Fridy and Miller 1991).

Şimdi de A -kuvvetli yakınsaklığa ilişkin bilgileri hatırlatalım.

Tanım 3.4.2 $A = (a_{nk})$ negatif olmayan bir matris ve $p \in \mathbb{R}^+$ olsun. Bir $x = (x_k)$ dizisi için,

$$\lim_n \sum_k a_{nk} |x_k - L|^p = 0$$

oluyorsa x dizisi L sayısına p indisine göre A -kuvvetli toplanabilirdir denir. Özel olarak $p = 1$ ise x dizisi L sayısına A -kuvvetli toplanabilir denir. (Freedman and Sember 1989, Connor 1989). Bu tezde tüm A -kuvvetli toplanabilen dizilerin kümesi $\omega(A)$ ve sıfıra A -kuvvetli toplanabilen dizilerin kümesi $\omega_0(A)$ ile gösterilecektir.

Teorem 3.4.2 A negatif olmayan regüler matris olsun. O halde,

(i) Bir $x = (x_k)$ dizisi L sayısına A -kuvvetli toplanabiliyorsa $st_A - \lim x = L$ gerçekleşir.

(ii) $x = (x_k)$ sınırlı bir dizi ve $st_A - \lim x = L$ ise x dizisi, L sayısına A -kuvvetli toplanabilirdir (Connor 1989).

İspat: $L = 0$ almak genellikle birşey kaybettirmez.

(i) $x \in \omega_0(A)$ alalım. Bu durumda,

$$\lim_n \sum_k a_{nk} |x_k| = 0$$

gerçeklenir. Böylece her $\varepsilon > 0$ için,

$$\begin{aligned} \sum_k a_{nk} |x_k| &= \sum_{k: |x_k| > \varepsilon} a_{nk} |x_k| + \sum_{k: |x_k| \leq \varepsilon} a_{nk} |x_k| \\ &\geq \sum_{k: |x_k| > \varepsilon} a_{nk} |x_k| \\ &\geq \varepsilon \sum_{k: |x_k| > \varepsilon} a_{nk} \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

elde edilir. (3.4.1) eşitsizliğinde her iki tarafın $n \rightarrow \infty$ için limiti alınırsa sol taraf sıfıra yakınsayacağından ve sağ taraf negatif olmadığından sağ taraf da sıfıra yakınsayacaktır. O halde $st_A - \lim x = 0$ elde edilir.

(ii) Şimdi $x \in st_A \cap \ell_\infty$ alalım. Bu durumda $\|x\|_\infty < \infty$ olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \sum_k a_{nk} |x_k| &= \sum_{k:|x_k| \geq \varepsilon} a_{nk} |x_k| + \sum_{k:|x_k| < \varepsilon} a_{nk} |x_k| \\ &\leq \|x\|_\infty \sum_{k:|x_k| \geq \varepsilon} a_{nk} + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

gerçeklenir. A regüler olduğundan (3.4.2) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ikinci ifade ε 'a yakınsar. Kabulümüz gereği eşitsizliğin sağ tarafındaki ilk ifade de sıfıra yakınsayacağından ve ε keyfi olduğundan $x \in \omega_0(A)$ gerçekleşir. Bu da ispatı tamamlar.

4. SINIRLI TOPLANABİLME ALANLARI

Bu bölümde bir matrisin çarpımsal olması ve negatif olmayan regüler bir matrisin sınırlı toplanabilme alanının çarpanları ile ilgileneceğiz.

4.1 Çarpımsal (P Özellikli) Matrisler

Bu kısımda bir A matrisinin çarpımsallığı tanıtılıp bu özellik karakterize edilecektir.

Tanım 4.1.1 A reel terimli regüler bir matris olmak üzere x ve x' sırasıyla L ve L' sayılarına A -toplanabilen sınırlı diziler olduğunda xx' çarpımı da LL' çarpımına A -toplanabilir oluyorsa A matrisi çarpımsaldır veya P özelliklidir denir (Brauer 1956).

Teorem 4.1.1 A , çarpımsal ve x terimleri 0 veya 1 olan bir dizi olsun. Eğer x , L sayısına A -toplanabilir ise $L = 0$ veya $L = 1$ gerçekleşir (Brauer 1956).

İspat: x terimleri 0 veya 1 olan bir dizi ve A matrisi çarpımsal olsun. $xx = x$ olup A çarpımsal olduğundan $L = L^2$ elde edilir. Bu ise $L = 0$ veya $L = 1$ olmasını gerektirir.

Teorem 4.1.2 Reel terimli ve regüler bir A matrisinin çarpımsal olması için gerek ve yeter koşul reel ve sınırlı bir $x = (x_k)$ dizisi L sayısına A -toplanabilir olduğunda (x_k^2) dizisinin de L^2 sayısına A -toplanabilir olmasıdır (Brauer 1956).

İspat: A reel terimli, regüler bir matris olmak üzere reel terimli, sınırlı $x = (x_k)$ dizisi L sayısına A -toplanabilir olduğunda (x_k^2) dizisi de L^2 sayısına A -toplanabilir oluyorsa A matrisi Q özelliklidir diyelim. Şimdi $x' = (x'_k) = (x_k)$ alalım. A çarpımsal olduğundan $(x_k x_k) = (x_k^2)$ de $LL = L^2$ sayısına A -toplanabilirdir.

Karşıt olarak A matrisi Q özellikli olsun. $x = (x_k)$ ve $x' = (x'_k)$ dizileri sırasıyla L ve L' sayılarına A -toplanabilir, reel terimli ve sınırlı diziler ise $\{x_k + x'_k\}$ ve $\{x_k - x'_k\}$ dizileri de reel terimli, sınırlı ve sırasıyla $L + L'$ ve $L - L'$ sayılarına A -toplanabilir dizilerdir. A matrisi, Q özellikli olduğundan $\{(x_k + x'_k)^2\}$ ve $\{(x_k - x'_k)^2\}$ dizileri de

sırasıyla $(L + L')^2$ ve $(L - L')^2$ sayılarına A -toplanabilirdir. Her k için,

$$(x_k + x'_k)^2 - (x_k - x'_k)^2 = 4x_k x'_k$$

ve

$$(L + L')^2 - (L - L')^2 = 4LL'$$

olduğundan $(x_k x'_k)$ dizisi LL' sayısına A -toplanabilirdir.

Teorem 4.1.2''nin daha kullanışlı olabilecek bir başka hali aşağıda verilmiştir.

Teorem 4.1.3 Reel terimli ve regüler bir $A = (a_{nk})$ matrisinin çarpımsal olması için gerek ve yeter koşul $x = (x_k)$ dizisi sıfıra A -toplanabilir olduğunda (x_k^2) dizisinin de sıfıra A -toplanabilir olmasıdır (Brauer 1956).

İspat: $A = (a_{nk})$ çarpımsal bir matris olsun. Bu durumda $x = (x_k)$ sıfıra A -toplanabilir bir dizi ise (x_k^2) dizisi de sıfıra A -toplanabilir bir dizidir.

Karşıt olarak $x = (x_k)$ dizisi sıfıra A -toplanabilir olduğunda (x'_k) dizisi de sıfıra A -toplanabilir olsun. L sayısına A -toplanabilen $y = (y_k)$ dizisi alalım. Bu durumda $(y_k - L)$ dizisi de sıfıra A -toplanabilirdir. Hipotezden $\{(y_k - L)^2\}$ dizisi de sıfıra A -toplanabilirdir. O halde

$$(y_k - L)^2 = y_k^2 - 2Ly_k + L^2$$

olduğundan

$$0 = A(y_k^2 - 2Ly_k + L^2) = A(y_k^2) - 2LA(y_k) + L^2$$

gerçeklenir. Buradan (y_k^2) dizisinin L^2 sayısına A -toplanabilir olduğunu söyleyebiliriz. O halde *Teorem 4.1.2'*den A matrisi çarpımsaldır.

4.2 Sınırlı Toplanabilme Alanlarında Yaklaşım

A reel terimli regüler bir matris ve ℓ_∞ reel terimli ve sınırlı diziler uzayı olmak üzere

$$A^* := \left\{ x \in \ell_\infty : \lim_n (Ax)_n \text{ mevcut} \right\}$$

kümesi ile A matrisinin sınırlı toplanabilme alanını tanımlayalım, yani

$$A^* = c_A \cap \ell_\infty$$

olsun. Bu kısımda, A^* uzayının elemanlarına yine A^* uzayına ait karakteristik fonksiyonların sonlu lineer kombinasyonu ile düzgün olarak yaklaşılabilen A^* kümesini karakterize edeceğiz. Daha sonra A^* kümesinin çarpanları ile ilgileneceğiz. Bu kısımda matrisler reel terimli ve regüler alınacaktır.

Tanım 4.2.1 X , ℓ_∞ uzayının kapalı alt uzayı olsun. $E \subseteq \mathbb{N}$ alalım. E kümesinin karakteristik fonksiyonu;

$$\chi_E(k) = \begin{cases} 1 & , \quad k \in E \\ 0 & , \quad k \notin E \end{cases}$$

olmak üzere, eğer $\chi_E \in X$ ise E kümesine X -kabul edilebilir (admissible) denir (Hill and Sledd 1968).

Tanım 4.2.2 $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin X -kabul edilebilir alt cümlelerinin sonlu parçalanmasına $\mathbb{N}$ kümesinin X -kabul edilebilir parçalanması denir (Hill and Sledd 1968).

Tanım 4.2.3 E_i kümeleri $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir X -kabul edilebilir parçalanmasını oluştursun. Her $i \in \mathbb{N}$ için $\lambda_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\phi := \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_{E_i}$$

şeklindeki bir fonksiyona X -kabul edilebilir fonksiyon denir (Hill and Sledd 1968).

Teorem 4.2.1 Eğer X kümesi, X -kabul edilebilir fonksiyonların kapanışı ise bu durumda X bir cebirdir (Hill and Sledd 1968).

Teorem 4.2.2 A^* , ℓ_∞ uzayının bir alt cebiri ise A^* , A^* -kabul edilebilir fonksiyonların kapanışına eşittir (Hill and Sledd 1968).

4.3 Sınırlı Toplanabilme Alanlarının Çarpanları

Bu kısımda sınırlı toplanabilme alanlarının çarpanları ile ilgileneceğiz.

Öncelikle A^* uzayının bir alt kümesini tanımlayalım:

$$A^{**} := \{x \in \ell_\infty : \text{her } y \in A^* \text{ için } xy \in A^*\}$$

kümesi A^* uzayının bir alt kümesidir. $A^* = A^{**}$ olması için gerek ve yeter şart A^* uzayının ℓ_∞ uzayının bir alt cebiri olmasıdır.

Teorem 4.3.1 (Brudno-Mazur-Orlicz Sınırlı Tutarlılık Teoremi) $A = (a_{nk})$ ve $B = (b_{nk})$, $A^* \subseteq B^*$ olacak şekilde iki regüler matris olsun. Bu durumda her $x \in A^*$ için $A(x) = B(x)$ gerçekleşir (Boos 2000).

İspat: $A^* \subseteq B^*$ gerçeklensin ancak bir $x \in A^*$ için $A(x) \neq B(x)$ olsun. O halde $\alpha \neq \beta$ olmak üzere $A(x) = \alpha$ ve $B(x) = \beta$ alalım. Bir $x' = (x'_k)$ dizisini

$$x'_k = \frac{x_k - \alpha}{\beta - \alpha}$$

şeklinde tanımlayalım. O halde $x' \in A^*$ olup $A(x') = \frac{\alpha - \alpha}{\beta - \alpha} = 0$ ve $B(x') = \frac{\beta - \alpha}{\beta - \alpha} = 1$ gerçekleşir. Bu durumda $x \in A^*$ dizisini $A(x) = 0$ ve $B(x) = 1$ olacak şekilde almak genellikle birşey kaybettirmez. $(x_k a_{nk})$ ve $(x_k b_{nk})$ matrislerini gözönüne alalım. $K(0) = 0$ ve $r(1) = 1$ olmak üzere $K(1)$ indisini her $n \leq r(1)$ için,

$$\sum_{k > K(1)} |x_k a_{nk}| < 1 \text{ ve } \sum_{k > K(1)} |x_k b_{nk}| < 1$$

olacak şekilde seçelim. Şimdi $r(2) > r(1)$ indisini her $n > r(2)$ için,

$$\sum_{k \leq K(1)} |x_k a_{nk}| < 1 \text{ ve } \sum_{k \leq K(1)} |x_k b_{nk}| < 1$$

olacak şekilde seçelim. Bu şekilde devam ederek bir $m \geq 1$ için,

$$\begin{aligned} r(1) &< r(2) < \dots < r(m) \\ K(1) &< K(2) < \dots < K(m-1) \end{aligned}$$

indisleri seçilsin. Şimdi de $K(m) > K(m-1)$ indisini her $n \leq r(m)$ için,

$$\sum_{k > K(m)} |x_k a_{nk}| < \frac{1}{m} \text{ ve } \sum_{k > K(m)} |x_k b_{nk}| < \frac{1}{m}$$

olacak şekilde seçelim. Şimdi $r(m+1) > r(m)$ indisini her $n > r(m)$ için,

$$\sum_{k \leq K(m)} |x_k a_{nk}| < \frac{1}{m} \text{ ve } \sum_{k \leq K(m)} |x_k b_{nk}| < \frac{1}{m}$$

olacak şekilde seçelim. Böylece,

$$\begin{aligned} (Ax)_n &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k \in (K(j), K(j+1)]} x_k a_{nk} \\ &= \sum_{j < m-1} \sum_{k \in (K(j), K(j+1)]} x_k a_{nk} + \sum_{k \in (K(m), K(m+1)]} x_k a_{nk} \\ &\quad + \sum_{j > m} \sum_{k \in (K(j), K(j+1)]} x_k a_{nk} \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

şeklinde yazılabilir. Burada her $n \geq r(m)$ için

$$\left| \sum_{k < K(m-1)} x_k a_{nk} \right| < \frac{1}{m-1}$$

olduğundan (4.3.1) eşitliğindeki ilk ifade sınırlıdır. Ayrıca $n \leq r(m+1)$ için

$$\left| \sum_{k > K(m+1)} x_k a_{nk} \right| < \frac{1}{m+1}$$

olduğundan (4.3.1) eşitliğindeki üçüncü ifade de sınırlıdır. O halde her $r(m) \leq n \leq r(m+1)$ için

$$(Ax)_n = O\left(\frac{1}{m}\right) + \sum_{k \in (K(m-1), K(m+1)]} x_k a_{nk} \quad (4.3.2)$$

gerçeklenir. Benzer şekilde

$$(Bx)_n = O\left(\frac{1}{m}\right) + \sum_{k \in (K(m-1), K(m+1)]} x_k b_{nk} \quad (4.3.3)$$

elde edilir. Her k için $\phi_k \in (0, 1]$, $\liminf_k \phi_k = 0$, $\limsup_k \phi_k = 1$ ve $\lim_k (\phi_{k+1} - \phi_k) = 0$ olacak şekilde bir $\phi = (\phi_k)$ dizisi vardır. Bu şekilde bir dizi yavaş salınlımlı dizi olarak adlandırılır. O halde yavaş salınlımlı bir $\phi = (\phi_k)$ dizi alalım ve bir $y = (y_k)$ dizisini

$$y_k = x_k \phi_j \quad , \quad K(j-1) < k \leq K(j)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $K(j-1) < k \leq K(j)$ için,

$$\begin{aligned} (Ay)_n &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \phi_j \\ &= \sum_{j < m-1} \phi_{j+1} \sum_{k \in (K(j), K(j+1)]} x_k a_{nk} + \phi_m \sum_{k \in (K(m-1), K(m)]} x_k a_{nk} \\ &\quad + \phi_{m+1} \sum_{k \in (K(m), K(m+1)]} x_k a_{nk} + \sum_{j > m} \phi_{j+1} \sum_{k \in (K(j), K(j+1)]} x_k a_{nk} \quad (4.3.4) \end{aligned}$$

gerçeklenir. (4.3.4) eşitliğinde sağ tarafa $\phi_m \sum_{k \in (K(m), K(m+1)]} x_k a_{nk}$ ifadesi eklenip

çıkartılırsa,

$$\begin{aligned}
(Ay)_n &= O\left(\frac{1}{m}\right) + \phi_m \sum_{k \in (K(m-1), K(m)]} x_k a_{nk} + \phi_m \sum_{k \in (K(m), K(m+1)]} x_k a_{nk} \\
&\quad - \phi_m \sum_{k \in (K(m), K(m+1)]} x_k a_{nk} + \phi_{m+1} \sum_{k \in (K(m), K(m+1)]} x_k a_{nk} \\
&= O\left(\frac{1}{m}\right) + \phi_m \sum_{k \in (K(m-1), K(m+1)]} x_k a_{nk} \\
&\quad + (\phi_{m+1} - \phi_m) \sum_{k \in (K(m), K(m+1)]} x_k a_{nk} \tag{4.3.5}
\end{aligned}$$

gerçeklenir. (4.3.2) eşitliğinden

$$\sum_{k \in (K(m-1), K(m+1)]} x_k a_{nk} \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$$

olup $\phi_m \in (0, 1]$ olduğundan (4.3.5) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci ifade sıfıra yakınsar. Aynı zamanda

$$\sum_{k \in (K(m), K(m+1)]} x_k a_{nk}$$

sınırlı ve $(\phi_{m+1} - \phi_m) \rightarrow 0$ olduğundan (4.3.5) eşitliğinin sağ tarafındaki üçüncü ifade de sıfıra yakınsar. O halde $n \rightarrow \infty$ için $(Ay)_n \rightarrow 0$ gerçekleşir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
(By)_n &= O\left(\frac{1}{m}\right) + \phi_m \sum_{k \in (K(m-1), K(m+1)]} x_k b_{nk} \\
&\quad + (\phi_{m+1} - \phi_m) \sum_{k \in (K(m), K(m+1)]} x_k b_{nk} \tag{4.3.6}
\end{aligned}$$

elde edilir. $(Bx)_n \rightarrow 1$ ve ϕ dizisi yakınsak olmadığından (4.3.3), (4.3.6) eşitliklerinden $\{(By)_n\}$ dizisinin yakınsak olmadığı görülür. Bu ise çelişkidir.

Eğer

$$\underbrace{1-1}_{\text{}} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}_{\text{}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}}_{\text{}} + \dots$$

serisinin kısmi toplamlar dizisi (ϕ_j) olarak alınırsa (ϕ_j) dizisinin yavaş salınımlı olduğu kolayca görülebilir.

Teorem 4.3.2 Bir $A = (a_{nk})$ matrisi A^{**} üzerinde çarpımsaldır, yani her $x, y \in A^{**}$ için $A(xy) = A(x)A(y)$ gerçekenir (Hill and Sledd 1968).

İspat: $x \in A^{**}$ alalım. Önce $A(x) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. $B = (b_{nk})$ matrisini,

$$b_{nk} = \frac{a_{nk}x_k}{A(x)}$$

şeklinde tanımlayalım. x sınırlı ve A regüler olduğundan B matrisi regülerdir. Şimdi $y \in A^*$ alalım. $x \in A^{**}$ olduğundan $xy \in A^*$ olur ve

$$(By)_n = \sum_k b_{nk}y_k = \sum_k \frac{a_{nk}x_ky_k}{A(x)} = \frac{(Axy)_n}{A(x)}$$

gerçekenir. Bu durumda $y \in B^*$ olur, yani $A^* \subset B^*$ elde edilir. *Teorem 4.3.1'den* $B(y) = A(y)$ olmalıdır.

$$B(y) = \frac{A(xy)}{A(x)}$$

oldüğundan $A(xy) = A(x)A(y)$ elde edilir. Şimdi $A(x) = 0$ alalım. Bir $B = (b_{nk})$ matrisini,

$$b_{nk} = a_{nk}x_k + a_{nk}$$

şeklinde tanımlayalım. A regüler ve x sınırlı olduğundan B regülerdir. $y \in A^*$ alırsak $x \in A^{**}$ olduğundan $xy \in A^*$ olur ve

$$(By)_n = \sum_k b_{nk}y_k = (Axy)_n + (Ay)_n$$

gerçekenir. Bu durumda $y \in B^*$ olup $A^* \subset B^*$ bulunur. *Teorem 4.3.1'den* $A(y) = B(y)$ olup

$$B(y) = A(xy) + A(y)$$

ve $A(x) = 0$ olduğundan

$$A(xy) = 0 = A(x)A(y)$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.3.3 $x \in A^{**}$ olsun. x dizisinin görüntü kümesi ve $A(x)$ noktasının

birleşiminden oluşan kümenin kapanışını C ile gösterelim. Bu küme reel sayıların kompakt bir alt kümesidir. F , C üzerinde sürekli, reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $y = \{F(x_k)\}$ olmak üzere $y \in A^{**}$ olur. Hatta $z \in A^*$ için $A(yz) = A(z)F(A(x))$ gerçekleşir (Hill and Sledd 1968).

İspat: $n \in \mathbb{N}$, $z \in A^*$ ve $x \in A^{**}$ olsun. *Teorem 4.3.2'*den

$$A(zx^n) = A(z)A(x^n) = A(z)\{A(x)\}^n$$

elde edilir. O halde teorem F polinom olduğunda gerçekleşir. A dönüşümü sürekli dönüşüm olduğundan *Weierstrass Yaklaşım Teoremi*'nden sürekli her F fonksiyonu için bu teorem gerçekleşir.

Teorem 4.3.4 Negatif olmayan bir $A = (a_{nk})$ matrisi için $A^{**} = \omega(A) \cap \ell_\infty$ gerçekleşir (Hill and Sledd 1968).

İspat: İlk olarak $x \in A^{**}$ alalım. A regüler olduğundan,

$$\begin{aligned} \lim_n \sum_k a_{nk}(x_k - A(x)) &= \lim_n \sum_k a_{nk}x_k - \lim_n \sum_k a_{nk}A(x) \\ &= A(x) - A(x) = 0 \end{aligned}$$

olur. Bir $s = (s_k)$ dizisini

$$s_k = x_k - A(x)$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda $s \in A^{**}$ olur. Şimdi *Teorem 4.3.3'*de $F(t) = |t|$ ve $z = (1, 1, \dots)$ alınırsa

$$y_k = F(s_k) = |x_k - A(x)|$$

olup

$$A(yz) = A(z)F(A(s)) = F(A(s))$$

gerçekleşir. O halde,

$$\lim_n \sum_k a_{nk}|x_k - A(x)| = A(yz) = \left| \lim_n \sum_k a_{nk}(x_k - A(x)) \right| = 0$$

olduğundan $x \in \omega(A)$ gerçekleşir. Böylece $x \in \omega(A) \cap \ell_\infty$ gerçekleşir.

Karşıt olarak $x \in \omega_A \cap \ell_\infty$ alalım. O halde

$$\lim_n \sum_k a_{nk} |x_k - L| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı vardır. Ayrıca her $y \in A^*$ için

$$\lim_n \sum_k a_{nk} x_k y_k = \lim_n \sum_k a_{nk} (x_k - L) y_k + L \lim_n \sum_k a_{nk} y_k \quad (4.3.7)$$

yazabiliriz. y dizisi sınırlı ve $x \in \omega_A$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \left| \sum_k a_{nk} (x_k - L) y_k \right| &\leq \sum_k a_{nk} |x_k - L| |y_k| \\ &\leq \|y\|_\infty \sum_k a_{nk} |x_k - L| \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

gerçekleşir. O halde

$$\lim_n \sum_k a_{nk} (x_k - L) y_k = 0$$

olup (4.3.7) eşitliğinden

$$\lim_n \sum_k a_{nk} x_k y_k = LA(y)$$

olur. Bu durumda $xy \in c_A$ gerçekleşir, yani $x \in A^{**}$ bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.3.5 $x \in A^{**}$ ise $A(x) \in \left[\liminf_k x_k, \limsup_k x_k \right]$ gerçekleşir (Hill and Sledd 1968).

İspat: p pozitif bir tamsayı olsun. Bir $y = (y_k)$ dizisini

$$y_k = \begin{cases} x_k & , \quad k \geq p \\ \inf x_k & , \quad k < p \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $y \in A^{**}$ olup $A(y) = A(x)$ elde edilir. Şimdi $a := \sup y_k$ olsun. Bu durumda $a - y_k = |a - y_k|$ olur. *Teorem 4.3.3'*de her $k \in \mathbb{N}$

için $z_k = 1$ ve $F(t) = |t|$ alırsak

$$0 \leq |A(a - y)| = A(a - y) = a - A(y) = a - A(x)$$

gerçeklenir. O halde her p için

$$A(x) \leq a = \sup_{k \geq p} x_k$$

bulunur. Bu durumda

$$A(x) \leq \limsup_k x_k$$

gerçeklenir. Benzer şekilde

$$A(x) \geq \liminf_k x_k$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 4.3.1 Bir x dizisi A^{**} kümesine ait ise $A(x)$, x dizisinin bir limit noktasıdır (Hill and Sledd 1968).

İspat: $x \in A^{**}$ alalım. İlk olarak $A(x) = 0$ kabul edelim. *Teorem 4.3.3*'de her $k \in \mathbb{N}$ için $z_k = 1$ ve $F(t) = |t|$ alırsak $F(x) = |x| \in A^{**}$ olur ve

$$A(yz) = A(z)F\{A(x)\}$$

olduğundan

$$A(|x|) = |A(x)|$$

gerçeklenir. Bu durumda $A(x) = 0$ olduğundan $A(|x|) = 0$ elde edilir. Böylece *Teorem 4.3.5*'den

$$0 \leq \liminf |x| \leq A(|x|) = 0 \leq \limsup |x|$$

gerçeklenir. O halde $\liminf |x| = 0$ olup $0 = A(x)$ bir limit noktası olur. Şimdi de $A(x) = L \neq 0$ kabul edelim. Bu durumda $A(x - L) = 0$ gerçekleşir. Birinci kısma

benzer şekilde

$$0 \leq \liminf |x - L| \leq 0 \leq \limsup |x - L|$$

gerçeklenir ve böylece $\liminf |x - L| = 0$ olup L sayısı x dizisinin bir limit noktasıdır.

Bu da ispatı tamamlar.

5. TOPLANABİLME ALANLARININ DÜZGÜN İNTEGRALLENEBİLEN DİZİLER ÜZERİNDE ÇARPANLARI

Bu bölümde regüler matris metodlarının toplanabilirlik alanlarının çarpanlarını sınırlılık şartını hafifleterek karakterize edeceğiz. Bu amaçla A -sınırlı diziler ve A -düzgün integrallenebilen diziler uzaylarını kullanacağız.

5.1 Düzgün İntegrallenebilen ve A -sınırlı Diziler

Bu kısımda düzgün integrallenebilme ve A -sınırlı diziler tanıtılıp düzgün integrallenebilme şartının sınırlılık şartından daha genel bir şart olduğunu göstereceğiz. Negatif olmayan elemanlara sahip ve herbir satır toplamı 1 olan matrislerin sınıfını M^+ ile göstereceğiz.

Tanım 5.1.1 $A = (a_{nk})$ bir matris toplanabilme metodu olmak üzere

$$\mathbb{S}_A := \left\{ x = (x_k) : \sup_n \sum_k |x_k| |a_{nk}| < \infty \right\}$$

uzayına A -sınırlı diziler uzayı ve

$$\mathbb{U}_A := \left\{ x = (x_k) : \lim_{M \rightarrow \infty} \sup_n \sum_{k: |x_k| > M} |x_k| |a_{nk}| = 0 \right\}$$

uzayına ise A -düzgün integrallenebilen diziler uzayı denir (Khan and Orhan 2007).

Düzgün integrallenebilen diziler uzayını karakterize eden aşağıdaki sonucu ispatsız vereceğiz.

Lemma 5.1.1 $x = (x_k)$ reel terimli bir dizi ve $A \in M^+$ olsun. x dizisinin A -düzgün integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul $\phi(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\phi(x)}{x} = \infty$ ve

$$\sup_n \sum_k \phi(|x_k|) a_{nk} < \infty$$

olacak şekilde konveks ve çift bir $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun mevcut olmasıdır (Khan and Orhan 2008).

Şimdi sınırlı diziler uzayının düzgün integrallenebilen diziler uzayının bir alt kümesi olduğunu gösterelim. Bunun için sınırlı her dizinin A -düzgün integrallenebilir olduğunu göstermeliyiz. $x = (x_k)$ sınırlı bir dizi olsun.

$$E := \{k : |x_k| > M\}$$

kümesini tanımlayalım. $\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$ değerinden büyük her $M > 0$ için $E = \emptyset$ olup

$$\begin{aligned} \sup_n \sum_{k:|x_k|>M} |x_k| |a_{nk}| &= \sup_n \sum_k \chi_E(k) |x_k| |a_{nk}| \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan $x \in \mathbb{U}_A$ gerçekleşir. Regüler ve maks $a_{nk} \rightarrow 0$ olacak şekilde bir $A \in M^+$ matrisi aldığımızda sınırsız ancak A -düzgün integrallenebilen bir dizi inşaa edebiliriz. Aslında A matrisi sıfıra yakınsayan kolonlara sahip ve

$$\lim_k \inf \left\{ \max_n a_{nk} \right\} = 0$$

olacak şekilde bir matris olduğunda da sınırsız ancak A -düzgün integrallenebilen bir $x = (x_k)$ dizisi inşaa edilebilir. Bunun için kolon indislerinin

$$\max_n a_{n,K(m)} < 2^{-m}, m = 0, 1, 2, \dots$$

olacak şekilde bir

$$K(0) < K(1) < K(2) \dots$$

dizisini seçelim. Şimdi de $n > N(m)$ ve $k \leq K(m)$ olduğunda $a_{nk} < 2^{-m}$ olacak

biçimde satır indislerinin artan $N(j)$ indislerini seçelim. O halde bir $y = (y_k)$ dizisini,

$$y_k = \begin{cases} m+1 & , \quad k = K(m) \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Her $n > N(m)$ için,

$$\begin{aligned} (Ay)_n &= \sum_{k=1}^{\infty} y_k a_{nk} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) a_{n,K(j)} \\ &\leq \sum_{j=0}^m (j+1) 2^{-m} + \sum_{j>m} (j+1) 2^{-j} \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

gerçeklenir. (5.1.1) eşitsizliğinin her iki tarafında $m \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $n > N(m)$ olduğunda $n \rightarrow \infty$ olacağından $\lim_n (Ay)_n = 0$ gerçekleşir. Şimdi bir $x = (x_k)$ dizisini her k için,

$$x_k := \sqrt{y_k}$$

şeklinde tanımlayalım. $\phi(x) = x^2$ fonksiyonunu göz önüne alırsak $\lim_n (Ay)_n = 0$ olduğundan

$$\sup_n \sum_k \phi(|x_k|) a_{nk} = \sup_n \sum_k a_{nk} y_k < \infty$$

olup *Lemma 5.1.1*'den x dizisi A -düzgün integrallenebilirdir.

Tanım 5.1.2 $x = (x_k)$ reel terimli bir dizi, $A = (a_{nk})$ bir matris ve F fonksiyonu, $\mathbb{R}$ üzerinde bir olasılık dağılımı olmak üzere F fonksiyonunun sürekli olduğu her t için,

$$\lim_n \sum_{k:x_k \leq t} a_{nk} = F(t)$$

oluyorsa x dizisi F fonksiyonuna A -dağılımsal yakınsaktır denir (Khan and Orhan 2008).

Aşağıda vereceğimiz teorem bir x dizisinin A -kuvvetli yakınsaklığını karakterize et-

mehtedir.

Teorem 5.1.1 $A = (a_{nk}) \in M^+$ ve $x = (x_k)$ reel terimli bir dizi olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

(i) $F = \chi_{[0,\infty)}$ olmak üzere x , F fonksiyonuna A -dağılımsal yakınsaktır ve x dizisi A -düzgün integrallenebilir.

(ii) $st_A - \lim x = 0$ ve x dizisi A -düzgün integrallenebilir.

(iii) x dizisi sıfıra A -kuvvetli toplanabilir (Khan and Orhan 2008).

İspat: $F := \chi_{[0,\infty)}$ olmak üzere F fonksiyonunun sürekli olduğu her t için

$$\lim_n \sum_{k:x_k \leq t} a_{nk} = F(t)$$

ve x , A -düzgün integrallenebilir olsun. $\varepsilon > 0$ alalım. Böylece,

$$\begin{aligned} \sum_{k:|x_k|>\varepsilon} a_{nk} &= \sum_{k:x_k < -\varepsilon} a_{nk} + \sum_{k:x_k > \varepsilon} a_{nk} \\ &\leq \sum_{k:x_k \leq -\varepsilon} a_{nk} + \sum_k a_{nk} - \sum_{k:x_k \leq \varepsilon} a_{nk} \\ &\rightarrow F(-\varepsilon) + 1 - F(\varepsilon) = 0 + 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

gerçeklenir. O halde $st_A - \lim x = 0$ bulunur.

Şimdi $st_A - \lim x = 0$ ve x , A -düzgün integrallenebilir olsun. *Lemma 5.1.1*'den $x \rightarrow \infty$ için $\frac{x}{\phi(x)} \rightarrow 0$ olacak biçimde konveks bir ϕ fonksiyonu vardır ve

$$\sup_n \sum_k \phi(|x_k|) a_{nk} < \infty \quad (5.1.2)$$

gerçeklenir. $x \rightarrow \infty$ için $\frac{x}{\phi(x)} \rightarrow 0$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $x > L$ için $\frac{x}{\phi(x)} < \varepsilon$ olacak şekilde bir $L > 0$ sayısı vardır. Bir $y = (y_k)$ dizisini;

$$y_k = \begin{cases} x_k & , \quad |x_k| \leq L \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. y dizisinin tanımından her $\varepsilon > 0$ için,

$$\sum_{k:|y_k|\geq\varepsilon} a_{nk} = \sum_{\substack{k:|x_k|\geq\varepsilon \\ |x_k|\leq L}} a_{nk} \leq \sum_{k:|x_k|\geq\varepsilon} a_{nk} \quad (5.1.3)$$

gerçeklenir. x , sıfıra A -istatistiksel yakınsak olduğundan

$$\lim_{n\rightarrow\infty} \sum_{k:|x_k|\geq\varepsilon} a_{nk} = 0$$

olmalıdır. O halde (5.1.3) eşitsizliğinde her iki tarafın $n \rightarrow \infty$ için limiti alınırsa $A\epsilon M^+$ olduğundan

$$\lim_n \sum_{k:|y_k|\geq\varepsilon} a_{nk} = 0$$

gerçeklenir. Bu durumda y dizisi sıfıra A -istatistiksel yakınsaktır. Ayrıca y dizisi sınırlı bir dizi olup A -istatistiksel yakınsak olduğundan *Teorem 3.4.2'*den sıfıra A -kuvvetli yakınsaktır. Diğer yandan,

$$\begin{aligned} \limsup_n \sum_k |x_k| a_{nk} &\leq \limsup_n \sum_{k:|x_k|\leq L} |x_k| a_{nk} + \limsup_n \sum_{k:|x_k|>L} |x_k| a_{nk} \\ &= \limsup_n \sum_k |y_k| a_{nk} + \limsup_n \sum_{k:|x_k|>L} \frac{|x_k|}{\phi(|x_k|)} \phi(|x_k|) a_{nk} \\ &\leq \limsup_n \sum_k |y_k| a_{nk} + \varepsilon \sup_n \sum_k \phi(|x_k|) a_{nk} \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

elde edilir. y dizisi sıfıra A -kuvvetli yakınsak olduğundan (5.1.4) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ilk ifade sıfıra yakınsar. Ayrıca (5.1.2) eşitsizliğinden sağdaki ikinci ifade istenildiği kadar küçük yapılabilir. Böylece,

$$\limsup_n \sum_k |x_k| a_{nk} = 0$$

gerçeklenir.

$$0 \leq \liminf_n \sum_k |x_k| a_{nk} \leq \limsup_n \sum_k |x_k| a_{nk} = 0$$

olduğundan

$$\lim_n \sum_k |x_k| a_{nk} = 0$$

olur. Yani x dizisi sıfıra A -kuvvetli yakınsaktır.

Son olarak

$$\lim_n \sum_k |x_k| a_{nk} = 0 \quad (5.1.5)$$

olduğunu kabul edelim. Her $t < 0$ için, $x_k \leq t$ ise $|x_k| \geq |t| \geq -t \geq 0$ olduğundan $-\frac{|x_k|}{t} \geq 1$ gerçektir. Böylece,

$$\sum_{k:x_k \leq t} a_{nk} \leq -\frac{1}{t} \sum_{k:x_k \leq t} |x_k| a_{nk} \quad (5.1.6)$$

elde edilir. O halde (5.1.5) eşitliği nedeniyle (5.1.6) eşitsizliğinin sağ tarafı sıfıra yakınsayacağından

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k:x_k \leq t} a_{nk} = 0$$

bulunur. Ayrıca her $t > 0$ için,

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_k a_{nk} = \sum_{k:x_k \leq t} a_{nk} + \sum_{k:x_k > t} a_{nk} \\ &\leq \sum_{k:x_k \leq t} a_{nk} + \frac{1}{t} \sum_{k:x_k > t} x_k a_{nk} \\ &\leq \sum_{k:x_k \leq t} a_{nk} + \frac{1}{t} \sum_k |x_k| a_{nk} \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

gerçeklenir. O halde (5.1.7) eşitsizliğinde her iki tarafın $n \rightarrow \infty$ için limiti alınır (5.1.5) eşitliği nedeniyle

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k:x_k \leq t} a_{nk} \geq 1$$

elde edilir. Ayrıca

$$\sum_{k:x_k \leq t} a_{nk} \leq \sum_k a_{nk} = 1$$

olup

$$1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k:x_k \leq t} a_{nk} \leq 1$$

gerçeklenir. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k: x_k \leq t} a_{nk} = 1$$

olmalıdır. Şimdi $\varepsilon > 0$ olsun. Her $n \geq N$ için

$$\sum_k |x_k| a_{nk} < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Her $n = 1, 2, \dots, N - 1$ için

$$\sum_{k > K} |x_k| a_{nk} < \varepsilon \quad , \quad (\text{her } n < N)$$

olacak şekilde yeterince büyük $K \in \mathbb{N}$ sayısı seçilebilir.

$$c > \max \{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_K|\}$$

olduğunda

$$\sup_n \sum_{k: |x_k| > c} |x_k| a_{nk} < \varepsilon$$

olduğu görülür. Bu da ispatı tamamlar.

5.2 Çarpan Uzaylar

Bu kısımda regüler matris metodlarının toplanabilirlik alanlarının çarpanlarını sınırlılık şartı yerine A -düzgün integrallenebilirlik şartını alarak karakterize edeceğiz.

Burada $\mathcal{U}$, $(1, 1, \dots)$ birim elemanını içeren bir cebir olarak alınacaktır. Her regüler $A \in M^+$ matrisi için

$$\mathcal{U}_A := \left\{ x \in c_A : \text{her } p \geq 1 \text{ ve bir } L \text{ için } \sum_k |x_k - L|^p a_{nk} \rightarrow 0 \right\}$$

cümlesi de cebir yapısına sahiptir. $\mathcal{E}$ ve $\mathcal{F}$ iki dizi uzayı ve $\mathcal{U}$ bir cebir olmak üzere

$$m_{\mathcal{U}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) := \{x \in \mathcal{U} : \text{her } y \in \mathcal{E} \text{ için } xy \in \mathcal{F}\}$$

kümesine $\mathcal{U}$ üzerinde çarpanların uzayı diyeceğiz. Uygunluk açısından,

$$m(\mathcal{U}) := m_{\mathcal{U}}(c_A \cap \mathcal{U}, c_A)$$

gösterimini kullanacağız.

Aşağıdaki sonuç ispatsız olarak verilecektir.

Önerme 5.2.1 $A = (a_{nk})$ keyfi bir regüler matris olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n \rightarrow \infty$ olduğunda $\sum_{k:|x_k-L|>\varepsilon} |a_{nk}| \rightarrow 0$ olması için gerek ve yeter şart $\lim_{k \in E^c} x_k = L$ ve $n \rightarrow \infty$ için $\sum_{k \in E} |a_{nk}| \rightarrow 0$ olacak biçimde bir $E \subseteq \mathbb{N}$ alt kümesinin var olmasıdır (Khan and Orhan 2007).

Sözü edilen çarpan uzayların karakterizasyonu için *Brudno-Mazur-Orlicz Sınırlı Tutarlılık Teoremi*'nin sınırsız diziler için bir benzerine ihtiyaç duyacağız.

Lemma 5.2.1 A ve B regüler matrisler olmak üzere $\mathcal{U}, \ell_{\infty} \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathbb{S}_A \cap \mathbb{S}_B$ olacak şekilde bir cebir ve $m(\mathcal{U})$, A matrisinin $\mathcal{U}$ üzerindeki çarpanları olsun. Eğer $c_A \cap \mathcal{U} \subseteq c_B \cap \mathcal{U}$ ise A ve B toplanabilme metodları $m(\mathcal{U})$ üzerinde tutarlıdır (Khan and Orhan 2007).

İspat: Kabul edelim $c_A \cap \mathcal{U} \subseteq c_B \cap \mathcal{U}$ olsun ancak bir $x \in m(\mathcal{U})$ için $A(x) = \alpha \neq \beta = B(x)$ olsun. Bir $x' = (x'_k)$ dizisini

$$x'_k = \frac{x_k - \alpha}{\beta - \alpha}$$

şeklinde tanımlayalım. $x' \in m(\mathcal{U})$ olup $A(x') = \frac{\alpha - \alpha}{\beta - \alpha} = 0$ ve $B(x') = \frac{\beta - \alpha}{\beta - \alpha} = 1$ gerçekleşir. Bu durumda $x \in m(\mathcal{U})$ dizisini $A(x) = 0$ ve $B(x) = 1$ olacak şekilde almak genellikle birşey kaybettirmez. *Teorem 4.3.1*'in ispatında kullanıldığı gibi sınırlı ve yavaş salınımlı bir ϕ dizisi kullanarak, $A(y) = 0$ fakat B -toplanabilir olmayacak şekilde bir $y = x\phi$ dizisini elde edebiliriz. Bu ise $c_A \cap \mathcal{U} \subseteq c_B \cap \mathcal{U}$ ile çelişir. Burada detayları vermeyeceğiz.

Aşağıda verilecek olan iki teorem $\mathbb{U}_A$ uzayının sadece toplanabilme alanlarının çarpanlarını karakterize etmek için değil aynı zamanda $\mathbb{U}_A$ üzerinde A -istatistiksel yakınsaklığın bir matris gösterimine sahip olduğunu göstermek için de kullanılabileceğini gösterir.

Teorem 5.2.1 A reel terimli, regüler bir matris ve $\mathcal{U}$ birim elemanı içeren bir cebir olsun. O halde aşağıdaki önermeler gerçekleşir.

- (i) $m(\mathcal{U})$ bir cebirdir.
- (ii) $\ell_\infty \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathbb{S}_A$ ise A , $m(\mathcal{U})$ üzerinde çarpımsaldır, yani, her $x, y \in m(\mathcal{U})$ için $A(xy) = A(x)A(y)$ gerçekleşir.
- (iii) $\ell_\infty \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathbb{S}_A$ ve A negatif olmayan bir matris ise

$$m(\mathcal{U}) \subseteq \left\{ x \in \mathcal{U} : \text{her } p \geq 1 \text{ ve bir } L \text{ sayısı için } \lim_n \sum_k |x_k - L|^p a_{nk} = 0 \right\}$$

gerçekleşir.

- (iv) $\ell_\infty \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathbb{U}_A$ ise

$$m(\mathcal{U}) \supseteq \left\{ x \in \mathcal{U} : \text{bir } L \text{ sayısı için } \lim_n \sum_k |x_k - L| |a_{nk}| = 0 \right\}$$

gerçekleşir.

- (v) $\mathcal{U} = \ell_\infty$ ve $x \in m(\mathcal{U})$ ise $A(x) \in \left[\liminf_k x_k, \limsup_k x_k \right]$ gerçekleşir (Khan and Orhan 2007).

İspat: İlk olarak $m(\mathcal{U}) \subseteq c_A \cap \mathcal{U}$ olduğunu gösterelim. Bir $x \in m(\mathcal{U})$ alalım. $y = (1, 1, \dots)$ için $y \in c_A \cap \mathcal{U}$ olduğundan $xy \in c_A$ olur. $xy = x$ olduğundan $x \in c_A$ olup $x \in c_A \cap \mathcal{U}$ gerçekleşir.

- (i) $x, y \in m(\mathcal{U})$ ve α, β keyfi skalerler olsun. Her $z \in c_A \cap \mathcal{U}$ için $xz, yz \in c_A$ olup $\alpha xz + \beta yz = (\alpha x + \beta y)z \in c_A$ gerçekleşir. Bu durumda $\alpha x + \beta y \in m(\mathcal{U})$ olup $m(\mathcal{U})$ bir lineer uzaydır. Şimdi $x, y \in m(\mathcal{U})$ alalım. $x \in m(\mathcal{U})$ ve $y \in c_A \cap \mathcal{U}$ olduğundan $xy \in c_A$ olur. Ayrıca $\mathcal{U}$ bir cebir olduğundan $xy \in \mathcal{U}$ olup $xy \in c_A \cap \mathcal{U}$ elde edilir. Şimdi $z \in c_A \cap \mathcal{U}$ için $y \in m(\mathcal{U})$ olması $yz \in c_A \cap \mathcal{U}$ olduğunu gösterir. $x \in m(\mathcal{U})$ olduğundan $xy(z) = x(yz) \in c_A$ olmalıdır. Ayrıca $x, yz \in \mathcal{U}$ ve $\mathcal{U}$ bir

cebir olduğundan $xyz \in \mathcal{U}$ olup $xy \in m(\mathcal{U})$ gerçekleşir.

(ii) $x \in m(\mathcal{U})$ alalım ve $A(x) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bir $B = (b_{nk})$ matrisini,

$$b_{nk} := \frac{a_{nk}x_k}{A(x)}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda B matrisinin her bir satır toplamı 1 değerine ve her bir sütunu 0 değerine yakınsaktır. Ayrıca $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{S}_A$ olduğundan

$$\sup_n \sum_k |b_{nk}| = \frac{1}{|A(x)|} \sup_n \sum_k |x_k| |a_{nk}| < \infty$$

gerçeklenir. O halde B matrisi regülerdir. $x \in m(\mathcal{U})$ olduğundan her $y \in c_A \cap \mathcal{U}$ için $xy \in c_A$ olmalıdır, yani $A(xy)$ mevcuttur. Ayrıca

$$(By)_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{nk}x_k y_k}{A(x)} = \frac{1}{A(x)} (Axy)_n$$

olup $B(y) = \frac{A(xy)}{A(x)}$ mevcuttur. O halde $y \in c_B \cap \mathcal{U}$ elde edilir, yani $c_A \cap \mathcal{U} \subseteq c_B \cap \mathcal{U}$ olur. *Lemma 5.2.1*'den $B(y) = A(y)$ olup $A(xy) = A(x).B(y)$ olduğundan

$$A(xy) = A(x)A(y)$$

elde edilir.

Şimdi de $x \in m(\mathcal{U})$ ve $A(x) = 0$ olsun. Bir $B = (b_{nk})$ matrisini

$$b_{nk} := a_{nk}x_k + a_{nk}$$

şeklinde tanımlayalım. O halde B matrisinin kolon limitleri 0 değerine ve her bir satır toplamı 1 değerine yakınsar. Ayrıca,

$$\sup_n \sum_k |b_{nk}| \leq \sup_n \sum_k |x_k| |a_{nk}| + \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$$

gerçeklendiğinden B matrisi regülerdir. Her $y \in c_A \cap \mathcal{U}$ için $(By)_n = (Axy)_n + (Ay)_n$

olduğu açıktır. $x \in m(\mathcal{U})$ olduğundan $A(xy)$ limiti mevcuttur. Bu durumda

$$B(y) = A(xy) + A(y)$$

gerçeklenir. Buradan $c_A \cap \mathcal{U} \subseteq c_B \cap \mathcal{U}$ olup *Lemma 5.2.1'* den $B(y) = A(y)$ olur. Diğer yandan $B(y) = A(xy) + A(y) = A(y)$ olduğundan $A(xy) = 0$ gerçekleşir. O halde $A(x)A(y) = 0$ ve $A(xy) = 0$ olup $A(xy) = A(x)A(y) = 0$ elde edilir.

(iii) $x \in m(\mathcal{U})$ alalım. $m(\mathcal{U}) \subseteq c_A$ olduğundan $x \in c_A$ olup bir L reel sayısı için $A(x) = L$ olur. Bir $z = (z_k)$ dizisini, $z_k := x_k - L$ şeklinde tanımlayalım. $m(\mathcal{U})$ lineer uzay olduğundan z dizisi de $m(\mathcal{U})$ nun bir elemanıdır. Burada $[[.]]$ tamdeğer fonksiyonunu göstermek üzere, her $p \geq 1$ için $z^{2([p]+1)} \in m(\mathcal{U})$ olmalıdır. Hölder eşitsizliğinden her $p \geq 1$ için,

$$\begin{aligned} \sum_k |x_k - L|^p a_{nk} &= \sum_k |x_k - L|^p a_{nk}^{\frac{p}{2([p]+1)}} a_{nk}^{1 - \frac{p}{2([p]+1)}} \\ &\leq \left(\sum_k |x_k - L|^{2([p]+1)} a_{nk} \right)^{\frac{p}{2([p]+1)}} \left(\sum_k a_{nk} \right)^{1 - \frac{p}{2([p]+1)}} \\ &= \left(\sum_k |x_k - L|^{2([p]+1)} a_{nk} \right)^{\frac{p}{2([p]+1)}} O(1) \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

elde edilir. (5.2.1) eşitsizliğinde $n \rightarrow \infty$ için eşitsizliğin sağ tarafı

$$\left[A \left(z^{2([p]+1)} \right) \right]^{\frac{p}{2([p]+1)}}$$

değerine yakınsar. A çarpımsal olduğundan her $m \in \mathbb{N}$ için $A(z^m) = [A(z)]^m = 0$ olur. Bu durumda $n \rightarrow \infty$ için,

$$\sum_k |x_k - L|^p a_{nk} \rightarrow 0$$

elde edilir. Yani

$$m(\mathcal{U}) \subseteq \left\{ x \in \mathcal{U} : \text{her } p \geq 1 \text{ ve bir } L \text{ sayısı için } \lim_n \sum_k |x_k - L|^p a_{nk} = 0 \right\}$$

gerçeklenir.

(iv) $\ell_\infty \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathbb{U}_A$ olmak üzere bir L sayısı için

$$\sum_k |x_k - L| |a_{nk}| \rightarrow 0$$

olacak şekilde bir $x \in \mathcal{U}$ alalım. Ayrıca $y \in c_A \cap \mathcal{U}$ ve $A(y) = \beta$ olsun. Diğer yandan

$$\begin{aligned} \sum_k x_k y_k a_{nk} &= \sum_k (x_k - L + L) y_k a_{nk} \\ &= L \sum_k y_k a_{nk} + \sum_k (x_k - L) y_k a_{nk} \\ &= L(Ay)_n + \sum_k (x_k - L) y_k a_{nk} \end{aligned}$$

olur. $L = 0$ kabul etmek genellikle birşey kaybettirmez. O halde A matrisinin mutlak değer matrisi olan $(|a_{nk}|)$ matrisini kullanarak x dizisinin sıfıra A -istatistiksel yakınsak olduğunu söyleyebiliriz. Hatta $x, y \in \mathcal{U}$ olduğundan $xy \in \mathcal{U}$ olup $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{U}_A$ olduğundan $xy \in \mathbb{U}_A$ olmalıdır. x sıfıra A -istatistiksel yakınsak olduğundan *Önerme 5.2.1*'den $\lim_n \sum_{k \in E} |a_{nk}| = 0$ ve $\lim_{k \in E^c} x_k = 0$ olacak şekilde bir $E \subseteq \mathbb{N}$ vardır. Şimdi I bir gösterge fonksiyonu olsun, yani herhangi bir K kümesi için, I fonksiyonu

$$I(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \notin K \\ 1 & , \quad x \in K \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O halde

$$\begin{aligned} \left| \sum_k x_k y_k a_{nk} \right| &\leq \left| \sum_{k: |x_k y_k| > M} x_k y_k a_{nk} \right| + \left| \sum_{k: |x_k y_k| \leq M} x_k y_k a_{nk} \right| \\ &\leq \sup_n \sum_{k: |x_k y_k| > M} |x_k y_k| |a_{nk}| + M \sum_{k \in E} |a_{nk}| \\ &\quad + \left| \sum_{k \in E^c} x_k y_k I(|x_k y_k| \leq M) a_{nk} \right| \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

elde edilir. Böylece (5.2.2) eşitsizliğinde $n \rightarrow \infty$ için her iki tarafın limiti alınırsa $\lim_n \sum_{k \in E} |a_{nk}| = 0$ olduğundan eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci ifade sıfıra yakınsar.

$n \rightarrow \infty$ için limit alındıktan sonra yeterince büyük M reel sayıları için eşitsizliğin sağ tarafındaki ilk ifade de sıfıra yeterince yakın olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k \in E^c} x_k y_k I(|x_k y_k| \leq M) a_{nk} \right| &\leq \sum_{k \in E^c} |x_k y_k| |a_{nk}| \\
&= \sum_{\substack{k \in E^c \\ |y_k| > N}} |x_k| |y_k| |a_{nk}| + \sum_{\substack{k \in E^c \\ |y_k| \leq N}} |x_k| |y_k| |a_{nk}| \\
&\leq \sup_{k \in E^c} |x_k| \sup_n \sum_{\substack{k \in E^c \\ |y_k| > N}} |y_k| |a_{nk}| \\
&\quad + N \sum_{k \in E^c} |x_k| |a_{nk}| \tag{5.2.3}
\end{aligned}$$

gerçeklenir. $n \rightarrow \infty$ için (5.2.3) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ikinci kısım sıfıra yakınsar. O halde $n \rightarrow \infty$ için limit alınıp N sayısını yeterince büyük seçilirse eşitsizliğin sağ tarafındaki ilk kısım da sıfıra yeterince yaklaştırılabilir. Bu durumda $n \rightarrow \infty$ için,

$$\sum_k x_k y_k a_{nk} \rightarrow L\beta$$

gerçeklenir, yani $xy \in c_A$ bulunur.

(v) Bu kısım *Teorem 4.3.5*'de gösterilmiştir.

Yukarıdaki teoremin (iii) ve (iv) kısımları negatif olmayan regüler matrisler için $\ell_\infty \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathbb{U}_A$ olduğunda $m(\mathcal{U})$ uzayını karakterize etmektedir. Bu durumda

$$m(\mathcal{U}) = \left\{ x \in \mathcal{U} : \text{bir } L \text{ sayısı için } \lim_n \sum_k |x_k - L| a_{nk} = 0 \right\}$$

yazılabilir. Bu uzay ise $\mathcal{U}$ üzerinde A -istatistiksel yakınsak dizilerin uzayıdır, yani

$$m(\mathcal{U}) = st_A \cap \mathcal{U}$$

elde edilir. Ayrıca st_A uzayının bir cebir ve iki cebirin arakesitinin yine bir cebir olduğundan yararlanılarak aşağıdaki sonuca varılabilir.

Sonuç 5.2.1 A negatif olmayan regüler bir matris olsun. O halde aşağıdaki öner-

meler gerçeklenir.

(i) $(1, 1, \dots)$ dizisini içeren bir $\mathcal{U}$ cebiri için

$$m_{st_A \cap \mathcal{U}}(st_A \cap c_A \cap \mathcal{U}, c_A)$$

bir cebirdir.

(ii) $\ell_\infty \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathbb{S}_A$ olmak üzere A -matrisi, $m_{st_A \cap \mathcal{U}}(st_A \cap c_A \cap \mathcal{U}, c_A)$ üzerinde çarpım-saldır.

(iii) $\ell_\infty \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathbb{S}_A$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & m_{st_A \cap \mathcal{U}}(st_A \cap c_A \cap \mathcal{U}, c_A) \\ \subseteq & \left\{ x \in \mathcal{U} \cap st_A : \text{her } p \geq 1 \text{ ve bir } L \text{ sayısı için } \lim_n \sum_k |x_k - L| a_{nk} = 0 \right\} \end{aligned}$$

gerçeklenir.

(iv) $\ell_\infty \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathbb{U}_A$ olmak üzere

$$m_{st_A \cap \mathcal{U}}(st_A \cap c_A \cap \mathcal{U}, c_A) = \left\{ x \in \mathcal{U} \cap st_A : \text{bir } L \text{ sayısı için } \lim_n \sum_k |x_k - L| a_{nk} = 0 \right\}$$

gerçeklenir (Khan and Orhan 2007).

nerme 5.2.2 A -negatif olmayan regüler bir matris ise $m_{st_A}(st_A, st_A) = st_A$ gerçeklenir. Hatta herhangi bir $\mathcal{U}$ cebiri için $m_{st_A \cap \mathcal{U}}(st_A \cap \mathcal{U}, st_A) = st_A \cap \mathcal{U}$ gerçeklenir (Khan and Orhan 2007).

İspat: $m_{st_A}(st_A, st_A) \subseteq st_A$ olduğu açıktır. Karşıt olarak $x, y \in st_A$ alalım. Bu durumda $\delta_A(E_x) = \delta_A(E_y) = 0$ ve x, y dizileri sırasıyla E_x^c ve E_y^c üzerinde yakınsak olacak şekilde $E_x, E_y \subseteq \mathbb{N}$ alt kümeleri vardır. $E = E_x \cup E_y$ alırsak $\delta_A(E) = 0$ olup xy dizisi E^c üzerinde yakınsaktır, yani xy dizisi A -istatistiksel yakınsaktır. O halde

$$st_A \subseteq m_{st_A}(st_A, st_A)$$

gerçeklenir.

Şimdi herhangi bir $\mathcal{U}$ cebiri alalım. İki cebirin arakesiti yine bir cebir yapısına sahip olduğundan $st_A \cap \mathcal{U}$ bir cebirdir. $x, y \in st_A \cap \mathcal{U}$ alalım. Bu durumda $\delta_A(E_x) = \delta_A(E_y) = 0$ ve x, y sırasıyla E_x^c ve E_y^c üzerinde yakınsak olacak şekilde $E_x, E_y \subseteq \mathbb{N}$ alt kümeleri vardır. $E = E_x \cup E_y$ alırsak $\delta_A(E) = 0$ ve xy dizisi E^c üzerinde yakınsak olur, yani xy dizisi A -istatistiksel yakınsak olup $xy \in st_A \cap \mathcal{U}$ elde edilir. Böylece

$$m_{st_A \cap \mathcal{U}}(st_A \cap \mathcal{U}, st_A) = st_A \cap \mathcal{U}$$

elde edilir.

Bundan sonraki teoremin ispatı için aşağıdaki lemmaya ihtiyacımız olacaktır.

Lemma 5.2.2 $A = (a_{nk})$ regüler bir matris olsun. O halde satır toplamaları 1 ve $\mathbb{U}_A$ üzerinde A matrisine denk olacak biçimde üçgensel bir B matrisi vardır. Üstelik A matrisi negatif değilse B matrisi de negatif değildir (Khan and Orhan 2007).

İspat: Her n için $\sum_k |a_{nk}|$ serisi yakınsaktır. O halde $K \rightarrow \infty$ için kalan terim,

$$\sum_{k>K} |a_{nk}| \rightarrow 0$$

olur. Özel olarak $K_n < K_{n+1}$ olmak üzere

$$\sum_{k>K_n} |a_{nk}| < \frac{1}{n} = \varepsilon_n$$

olacak biçimde (K_n) seçebiliriz. Şimdi bir $B = (b_{nk})$ matrisini

$$b_{nk} = \begin{cases} a_{nk} & , \quad k \leq K_n \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. A matrisi negatif değilse B matrisi de negatif değildir. Şimdi $x \in \mathbb{U}_A$ alalım. Her $\varepsilon > 0$ ve her $t \geq T$ için,

$$\sup_n \sum_{k:|x_k|>t} |x_k| |a_{nk}| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir T vardır. Böylece

$$\begin{aligned}
|(Ax)_n - (Bx)_n| &= \left| \sum_k a_{nk}x_k - \sum_k b_{nk}x_k \right| \\
&= \left| \sum_k a_{nk}x_k - \sum_{k=1}^{K_n} a_{nk}x_k \right| \\
&= \left| \sum_{k>K_n} a_{nk}x_k \right| \\
&\leq \sup_n \sum_{k:|x_k|>T} |a_{nk}| |x_k| + T \sum_{k>K_n} |a_{nk}| \\
&\leq \varepsilon + T \sum_{k>K_n} |a_{nk}| \rightarrow \varepsilon
\end{aligned}$$

gerçeklenir. Bu ise A matrisi ile B matrisinin A -düzgün integrallenebilen diziler üzerinde denk olduğunu gösterir. Burada B matrisi üçgensel ve satır toplamaları 1 olmak zorunda değildir. Ancak B matrisine denk olacak biçimde satır toplamaları 1 ve üçgensel bir matris elde edilebilir. Bunun için;

$$\alpha_n := \sum_k b_{nk} = \sum_{k=1}^{K_n} a_{nk}$$

tanımlayalım. A regüler olduğundan $\alpha_n \rightarrow 1$ olmalıdır. Her n için $\alpha_n \neq 0$ kabul etmek genelliği bozmaz. Şimdi,

$$b'_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_n} a_{nk} & , \quad k \leq K_n \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $B' = (b'_{nk})$ matrisinin satır toplamaları 1 olup bu matris B matrisine denktir. B' matrisi üçgenselleştirilerek B matrisine denk bir matris elde edilebilir. Her iki satır arasına matrisin kendi satırları eklenerek aşağıdaki gibi bir

matris elde edebiliriz.

$$\begin{bmatrix} b'_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ b'_{11} & b'_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ b'_{11} & b'_{12} & \dots & b'_{1,K_1-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mathbf{b}'_{11} & \mathbf{b}'_{12} & \dots & \mathbf{b}'_{1,K_1-1} & \mathbf{b}'_{1,K_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ b'_{11} & b'_{12} & \dots & b'_{1,K_1-1} & b'_{1,K_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ b'_{11} & b'_{12} & \dots & b'_{1,K_1-1} & b'_{1,K_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ b'_{11} & b'_{12} & \dots & b'_{1,K_1-1} & b'_{1,K_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mathbf{b}'_{21} & \mathbf{b}'_{22} & \mathbf{b}'_{23} & \dots & \mathbf{b}'_{2,K_1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \mathbf{b}'_{2,K_2} & \mathbf{0} & \dots \\ b'_{21} & b'_{22} & b'_{23} & \dots & b'_{2,K_1} & \dots & \dots & \dots & \dots & b'_{2,K_2} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Bu matrisde K_i -inci satırlar B' matrisinin kendi satırları olup diğer satırlar bu satırlardan elde edilmiştir. Burada sonradan eklenen satırlardaki elemanları bulundukları satırların toplamına bölersek elde ettiğimiz son matris satır toplamaları 1 olan üçgensel bir matris olup B matrisine denktir. O halde $\mathbb{U}_A$ üzerinde A matrisine denk olacak şekilde satır toplamaları 1 olan, üçgensel bir matris elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 5.2.2 (Değişmezlik Prensibi) A negatif olmayan regüler bir matris olsun. Bu durumda $\mathbb{U}_A$ üzerinde A -istatistiksel yakınsaklık B toplanabilme metoduna denk olacak biçimde negatif olmayan, üçgensel regüler bir $B \in M^+$ matrisi vardır. Üstelik B matrisi için aşağıdakiler gerçekleşir.

- (i) $c_B \cap \ell_\infty$ bir cebirdir.
- (ii) $B, c_B \cap \ell_\infty$ üzerinde çarpımsaldır (Khan and Orhan 2007).

İspat: *Lemma 5.2.2* nedeniyle $\mathbb{U}_A$ üzerinde A matrisini üçgensel, negatif olmayan, regüler ve her bir satır toplamı 1 olan matris kabul etmek genellikle birşey kaybetmez. B matrisini oluşturabilmek için öncelikle bir $C = (c_{nk})$ matrisi oluşturalım. C matrisinin ilk iki satırı A matrisinin birinci satırı ile aynı olan $(1, 0, 0, \dots)$ ol-

sun. Daha sonra gelen $2^2 = 4$ satırı A matrisinin ikinci satırından elde ederiz. $(a_{21}, a_{22}, 0, 0, \dots)$, C matrisinin üçüncü satırı olsun. C matrisinin dördüncü ve beşinci satırları da $(0, a_{22}, 0, 0, \dots)$ ve $(a_{21}, 0, 0, \dots)$ olsun. Genel olarak

$$N_p := 2^1 + 2^2 + \dots + 2^p$$

olmak üzere N_p satır oluşturulduktan sonra sırada gelen 2^{p+1} satır şöyle oluşturulur. C matrisinin $(N + 1)$ -inci satırı A matrisinin $(p + 1)$ -inci satırı olan $(a_{(p+1),1}, a_{(p+1),2}, \dots, a_{(p+1),(p+1)}, 0, \dots)$ olsun. Daha sonra gelen $\binom{p+1}{1}$ tane satırda A matrisinin $(p + 1)$ -inci satırının terimlerinin bir tanesi sıfır ile değiştirilmiş halini alalım. Daha sonra gelen $\binom{p+1}{2}$ tane satırda, mümkün olan tüm kombinasyonlarda, A matrisinin $(p+1)$ -inci satırının terimlerinin iki teriminin sıfırla değiştirilmiş halini yazalım. Bu şekilde devam edilerek oluşturulmuş bir C matrisi aşağıda verilmiştir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Elde edilen bu C matrisi yardımıyla bir $B = (b_{nk})$ matrisini

$$b_{mk} := (1 - \mu_m)a_{nk} + c_{mk}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $N_n < m \leq N_{n+1}$ olmak üzere

$$\mu_m := \sum_k c_{mk}$$

ile verilmektedir. A matrisinin satır toplamaları 1 olduğundan $\mu_m \in [0, 1]$ olduğu açıktır. O halde B matrisinin de satır toplamaları 1 olmalıdır. C matrisinin elemanları A matrisinin elemanları ile aynı olduğundan C matrisinin kolonları dolayısıyla B matrisinin kolonları sıfıra yakınsar. Bu durumda B matrisi regülerdir. Ayrıca A ve C matrisleri üçgensel olduğundan B matrisi üçgenseldir. Bir L değerine A -istatistiksel yakınsak olacak şekilde bir $x = (x_k) \in \mathbb{U}_A$ dizisi alalım. Şimdi bir $y = (y_k)$ dizisini

$$y_k = x_k - L$$

şeklinde tanımlayalım. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\sum_{k:|y_k|>\varepsilon} a_{nk} = \sum_{k:|x_k-L|>\varepsilon} a_{nk} \rightarrow 0$$

olduğundan $st_A - \lim y = 0$ olur. Bu durumda $\delta_A(E) = 0$ ve E^c üzerinde y dizisi sıfıra yakınsak olacak şekilde bir $E \subseteq \mathbb{N}$ vardır. O halde $N_n < m \leq N_{n+1}$ olacak şekilde her m için,

$$\begin{aligned} \left| \sum_k y_k b_{mk} \right| &\leq \left| \sum_{k:|y_k|>M} y_k b_{mk} \right| + \left| \sum_{k:|y_k|\leq M} y_k b_{mk} \right| \\ &\leq \sup_m \sum_{k:|y_k|>M} |y_k| |b_{mk}| + M \left| \sum_{k \in E} b_{mk} \right| + \left| \sum_{\substack{k \in E^c \\ |y_k|\leq M}} y_k b_{mk} \right| \\ &\leq 2 \sup_m \sum_{k:|y_k|>M} |y_k| a_{nk} + 2M \sum_{k \in E} a_{nk} + \left| \sum_{\substack{k \in E^c \\ |y_k|\leq M}} y_k b_{mk} \right| \quad (5.2.4) \end{aligned}$$

gerçeklenir. B matrisi regüler ve y dizisi E^c üzerinde sıfıra yakınsak olduğundan $m \rightarrow \infty$ için (5.2.4) eşitsizliğinin sağ tarafındaki son toplam sıfıra yakınsar. m büyüdüğünde n de büyüyeceğinden sağ taraftaki ikinci ifade de sıfıra yakınsar. Ayrıca yeterince büyük M sayıları için sağ tarafta ilk ifade de sıfıra yaklaşır. Böylece $\lim_n (By)_n = 0$ bulunur.

$$0 = B(y) = B(x - L) = B(x) - B(L) = B(x) - L$$

olduğundan $B(x) = L$ elde edilir.

Karşıt olarak $x = (x_k) \in \mathbb{U}_A$ alalım ve $B(x) = L$ olsun. Bir $y = (y_k)$ dizisini $y_k := x_k - L$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $B(y) = 0$ olur. Diğer yandan 2^m -inci bloğun ilk satırı A matrisinin m -inci satırından oluştuğundan $\lim_n (Ay)_n = 0$ olmalıdır. Ayrıca $N_n < m \leq N_{n+1}$ için,

$$\begin{aligned} (Cy)_m &= \sum_k c_{mk} y_k = \sum_k [b_{mk} + (\mu_m - 1) a_{nk}] y_k \\ &= \sum_k b_{mk} y_k + (\mu_m - 1) \sum_k a_{nk} y_k \\ &= (By)_m + (\mu_m - 1) (Ay)_n \end{aligned}$$

olup $m \rightarrow \infty$ için $(By)_m \rightarrow 0$ ve $(Ay)_n \rightarrow 0$ olduğundan $(Cy)_n \rightarrow 0$ elde edilir. Şimdi y dizisinin ilk n teriminin negatif işaretlileri kesinlikle A matrisinin n -inci satırının sıfırla yer değiştirilmemiş terimlerine karşılık gelecek şekilde bir $m \in (N_n, N_{n+1}]$ seçelim. O halde $\lim_n (Cy)_n = 0$ olduğundan,

$$\sum_k y_k I(y_k < 0) a_{nk} \rightarrow 0$$

gerçeklenir. Aynı işlem y dizisinin pozitif terimleri için de tekrarlanırsa

$$\sum_k |y_k| a_{nk} \rightarrow 0$$

olduğu görülür. Ayrıca $y \in \mathbb{U}_A$ olduğundan $st_A - \lim y = 0$ elde edilir, yani $st_A - \lim x = L$ elde etmiş olduk. Bu da A -istatistiksel yakınsaklık ile B -toplanabil-

menin $\mathbb{U}_A$ üzerinde denk olduğunu gösterir. Hatta $\ell_\infty \subseteq \mathbb{U}_A$ ve $st_A \cap \mathbb{U}_A = c_B \cap \mathbb{U}_A$ olduğundan $st_A \cap \ell_\infty = c_B \cap \ell_\infty$ olup st_A ve ℓ_∞ uzaylarının herbiri cebir olduğundan $st_A \cap \ell_\infty$ uzayı bir cebirdir. Bu durumda $c_B \cap \ell_\infty$ da bir cebirdir. Böylece (i) ispatlanmış olur. Ayrıca (ii) ifadesini ispatlamak için $st_A \cap \ell_\infty$ uzayının bir cebir olduğunu gözönüne almak yeterlidir.

Sonuç 5.2.2

- (i) A negatif olmayan matris olsun. Bu durumda sınırlı A -istatistiksel yakınsak dizilerin cümlesi ℓ_∞ uzayının kapalı lineer alt uzayıdır ve hiçbir yerde yoğun değildir.
- (ii) A ve B , $\omega(A) \cap \ell_\infty \subseteq \omega(B) \cap \ell_\infty$ olacak şekilde iki negatif olmayan regüler matris ise A -istatistiksel yakınsaklık ile B -istatistiksel yakınsaklık tutarlıdır.
- (iii) x sınırlı bir dizi ve $st_A - \lim x = L$ ise L sayısı x dizisinin bir limit noktasıdır ve

$$L \in \left[\liminf_k x_k, \limsup_k x_k \right]$$

gerçeklenir (Khan and Orhan 2007).

İspat: (i) A negatif olmayan regüler matris olduğundan *Teorem 5.2.2'*den $\mathbb{U}_A$ üzerinde A -istatistiksel yakınsaklık B -toplanabilmeye denk olacak biçimde regüler, negatif olmayan, üçgensel bir B matrisi vardır. O halde $\ell_\infty \subseteq \mathbb{U}_A$ olduğundan sınırlı A -istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı B matrisinin sınırlı toplanabilme alanına eşittir. *Teorem 4.2.2'*den $c_B \cap \ell_\infty$ kapalıdır. Böylece A -istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı kapalıdır.

(ii) Bu sonuç Connor ve Kline tarafından 1996 yılında verilmiştir. Burada da " $st_A \cap \mathbb{U}_A \subseteq st_B \cap \mathbb{U}_A$ ise $st_A \cap \mathbb{U}_A$ üzerinde A -istatistiksel yakınsaklık ile B -istatistiksel yakınsaklık denktir" sonucunu belirtebiliriz. Bunun için *Teorem 5.2.2* ve *Lemma 5.2.1'* den yararlanmak yeterlidir.

(iii) *Teorem 5.2.2'*den $\mathbb{U}_A$ üzerinde A -istatistiksel yakınsaklık ile B -toplanabilme denk olacak biçimde bir B matrisi vardır. B matrisinin ℓ_∞ üzerinde çarpanlarının

$$m(\ell_\infty) = m_{\ell_\infty}(c_B \cap \ell_\infty, c_B) = \{x \in \ell_\infty : \text{her } y \in c_B \cap \ell_\infty \text{ için } xy \in c_B\}$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi $y \in c_B \cap \ell_\infty$ alalım. Hipotezden $x \in \ell_\infty$ ve $B(x) = L$

olduğundan $x \in c_B \cap \ell_\infty$ gerçekleşir. $c_B \cap \ell_\infty$ uzayı bir cebir olduğundan $xy \in c_B \cap \ell_\infty$ olup bu durumda $x \in m(\ell_\infty)$ gerçekleşir. O halde *Teorem 5.2.1 (v)*'den

$$L \in \left[\liminf_k x_k, \limsup_k x_k \right]$$

gerçeklenir. Ayrıca *Sonuç 4.3.1*'den $B(x) = L$ değeri x dizisinin bir limit noktasıdır.

Diğer yandan *Teorem 5.2.2* yeni sonuçlar da verir. Örneğin; B matrisi sınırlı diziler üzerinde çarpımsal, negatif olmayan bir matris ise

$$c_B \cap \ell_\infty = m(\ell_\infty) = \left\{ x \in \ell_\infty : \text{bir } L \text{ sayısı için } \sum_k |x_k - L| |b_{nk}| \rightarrow 0 \right\} = st_B \cap \ell_\infty$$

gerçeklenir. Çarpımsal metodlar için $c_B \cap \ell_\infty \subseteq m(\ell_\infty)$ olup $c_B \cap \ell_\infty \supseteq m(\ell_\infty)$ her zaman doğru olduğundan ilk eşitlik açıktır. İkinci eşitlik *Teorem 5.1.1*'den B -düzgün integrallenebilir diziler üzerinde B -istatistiksel yakınsaklık ile B -kuvvetli toplanabilme eşit olduğundan gerçekleşir.

Hatta aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 5.2.3 A negatif olmayan regüler matris olsun. Bu durumda sınırlı diziler için A ve B aynı istatistiksel limiti verecek şekilde bir $B \in M^+$ matrisi vardır. Aslında burada sınırlı diziler uzayı yerine $\mathbb{U}_A \cap \mathbb{U}_B$ uzayı alınabilir.

Sınırlı diziler üzerinde çarpımsal bir $B = (b_{nk})$ matrisi inşa edebiliriz. B matrisi, $b_{nn} = 2$, $b_{n,n+1} = -1$ ve diğer durumlarda sıfır olan bir matris olsun. Bu durumda $c_B \cap \ell_\infty = c$ gerçekleşir. Atalla (1970, 1975), $\max_k b_{nk} \rightarrow 0$ ve sınırlı diziler üzerinde çarpımsal olacak şekilde negatif olmayan bir B matrisi vermiştir. Garreau (1951) tarafından ise bu matrisin sınırlı diziler üzerinde istatistiksel yakınsaklığa denk olduğu gösterilmiştir

6. SONUÇ

B reel terimli, regüler ve sınırlı diziler üzerinde çarpımsal ise sınırlı diziler üzerinde, B matrisi A -kuvvetli toplanabilmeye denk olacak biçimde negatif olmayan ve regüler bir A matrisi vardır (Henriksen and Isbell 1964).

A negatif olmayan ve regüler bir matris ise sınırlı diziler üzerinde A -kuvvetli toplanabilme regüler bir B matrisine denktir. Böylece $\omega(A) \cap \ell_\infty = c_B \cap \ell_\infty$ gerçekleşir ve B , A -kuvvetli limiti korur (Henriksen and Isbell 1964).

Bu sonuçlar aşağıdaki sonuçlarla karşılaştırılmalıdır.

Mazur ve Orlicz (1954), c_B bir cebir ve c_B üzerinde B matrisi çarpımsal olacak biçimde reel terimli, regüler bir matris ise bu matrisin birim matrisin bazı satırlarının atılması ile elde edilen bir satır-alt matrise denk olduğunu göstermiştir.

Brauer, $c_B \cap \ell_\infty$ bir cebir ve B matrisi $c_B \cap \ell_\infty$ üzerinde çarpımsal olacak biçimde regüler, reel terimli B matrisleri üzerinde çalışmıştır ve bu tür matrislerin birim matrisin alt matrisi olabileceğini düşünmüştür. Henriksen ve Isbell (1964) tarafından ise Brauer'in bu düşüncesinin yanlış olduğunu gösterilmiştir.

Karl Zeller (1953), sınırlı diziler üzerinde C_1 -kuvvetli yakınsaklığa denk olacak biçimde regüler bir B matrisinin varlığını göstermiştir.

Fridy ve Miller (1991), A negatif olmayan, regüler matris olduğunda sınırlı diziler üzerinde A -istatistiksel yakınsaklığın negatif olmayan bir B matrisine denkleğinin doğruluğu ile ilgilenmiştir. Biliyoruz ki dizi uzayı üzerinde hiçbir kısıtlama olmadığı takdirde A -istatistiksel yakınsaklık, B -toplanabilmeye denk olacak biçimde regüler bir B matrisi mevcut değildir.

Fridy ve Miller, negatif olmayan regüler matrislerin "*sınırlı bir x dizisinin bir L sayısına A -istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul her $B \in \tau_A$ için $B(x)=L$* " gerçekleyecek biçimde bir τ_A sınıfının var olduğunu göstermiştir, yani

$$st_A \cap \ell_\infty = \bigcap_{B \in \tau_A} (c_B \cap \ell_\infty)$$

gerçeklenir.

Bu sonuçlar ise sınırlı diziler üzerinde A -istatistiksel yakınsaklık için doğrudan *Teorem 5.2.2 değişmezlik prensibini* akla getirmektedir. Sınırlı bir x dizisinin bir L sayısına A -istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart L sayısına A -kuvvetli yakınsak olmasıdır. O halde $st_A \cap \ell_\infty = \omega(A) \cap \ell_\infty$ gerçekleşir. Ancak Henriksen ve Isbell'in sonucu negatif olmayan regüler bir A matrisi için sınırlı diziler üzerinde A -kuvvetli toplanabilme B -toplanabilmeye denk olacak biçimde regüler bir B matrisinin varlığını söyler. Böylece, sınırlı diziler için A -istatistiksel yakınsaklık bir B matrisi için B -toplanabilmeye denk olmak zorundadır.

KAYNAKLAR

- Atalla, R. E. 1970. On the multiplicative behavior of regular matrices. Proc. Amer. Math. Soc. 26; 437-446.
- Atalla, R. E. 1975. Addendum to: On the multiplicative behavior of regular matrices. Proc. Amer. Math. Soc. 48 (1); 268.
- Brauer, G. 1956. Evaluation of product sequences by matrix methods. Amer. Math. Monthly 63; 323-326.
- Boos, J. 2000. Classical and Modern Methods in Summability. Oxford Univ. Press, UK.
- Connor, J. S. 1988. The statistical and strong p -Cesàro convergence of sequences. Analysis 8; 47-63.
- Connor, J. S. 1989. On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence. Canad Math. Bull. Vol. 32; 194-198.
- Connor, J. S. and Kline, J. 1996. On statistical limit points and the consistency of statistical convergence. J. Math. Anal. Appl. 197; 392-399.
- Demirci, K. and Orhan, C. 1999. Bounded multipliers of bounded A -statistically convergent sequences. J. Math. Anal. Appl. 235; 122-129.
- Fast, H. 1951. Sur la convergence statistique. Colloq. Math. 2; 241-244.
- Freedman, A. R. and Sember, J. J. 1981. Densities and summability. Pacific J. Math. 95; 293-305
- Fridy, J. A. 1985. On statistical convergence. Analysis 5; 301-313.
- Fridy, J. A. and Miller, H. I. 1991. A matrix characterization of statistical convergence. Analysis 11; 59-66.
- Garreau, G. A. 1951. A note on the summation of sequences of 0's and 1's. Ann. of Math. 54; 183-185.
- Hardy, G. H. and Littlewood, J. E. 1913. Sur la série de Fourier d'une fonction à carré sommable. C. R. Acad. Sci. Paris 156; 1307-1309.
- Henriksen, M. and Isbell, J. R. 1964. Multiplicative summability methods and Stone-Čech compactification. Notices Amer. Math. Soc. 11, p. 90, Abstract 608-611.

- Hill, J. D. and Sledd, W. T. 1968. Approximation in bounded summability fields. *Canad. J. Math.* Vol. 20; 410-415.
- Khan, M. K. and Orhan C. 2007. Matrix characterization of A -statistical convergence. *J. Math. Anal. Appl.*, 335; 406-417.
- Khan, M. K. and Orhan C. 2008. Characterization of strong and statistical convergences. Submitted for Publication.
- Kolk, E. 1981. The statistical convergence in Banach spaces. *Tartu ÜL. Toimatised.* 928; 41-52.
- Maddox, I. J. 1970. *Elements Of Functional Analysis*. Cambridge University Press.
- Mazur, S. and Orlicz, W. 1954. On linear methods of summability. *Studia Math.* 14; 129-160.
- Miller, H. I. 1995. A measure theoretic subsequences characterization of statistical convergence. *Trans. Amer. Soc.* 347. 5; 1811-1819.
- Niven, I. and Zuckerman, H. S. 1980. *An Introduction to the Theory of Numbers*. John Walley and Sons, 4th ed. New York.
- Petersen, G. M. 1972. The algebra of bounded sequences as factor sequences. *Indag. Math.-Verein.* 74; 182-188.
- Šalát, T. 1980. On statistically convergent sequences of real numbers. *Math. Slovaca* 30, no.2; 139-150.
- Steinhaus, H. 1951. Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique. *Colloq. Math.* 2; 73-7.
- Zeller, K. 1953. Über die Darstellbarkeit von Limitierungsverfahren mittels Matrixtransformationen. *Math. Z.* 59; 271-277.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Mehmet ÜNVER

Doğum Yeri : Karabük

Doğum Tarihi : 20.09.1985

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Karabük 75. Yıl Anadolu Lisesi (2003)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2007)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi

Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi (2009 – ...)