

**T.C.
CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN LEGENDRE POLİNOM
YAKLAŞIMI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İlknur GÜÇLÜ

Anabilim Dalı :Matematik

Programı :Uygulamalı Matematik

MANİSA - 2009

T.C.
CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN LEGENDRE POLİNOM
YAKLAŞIMI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İlknur GÜÇLÜ

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 29.06.2009
Tezin Savunulduğu Tarih : 31.08.2009

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Salih YALÇINBAŞ

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mehmet SEZER

Prof. Dr. Necdet BİLDİK

MANİSA 2009

ÖZET

YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

İLKNUR GÜÇLÜ

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, tez için gerekli bazı temel kavramlar verilmiştir. Bu çalışmanın orijinal kısmı üçüncü ve dördüncü bölümde yer almaktadır. Üçüncü bölümde, Yüksek Mertebeden Lineer Volterra İntegro-Diferansiyel denklemleri Legendre polinomları cinsinden çözmek için “Legendre Collocation” adlı yeni bir yöntem sunulmuştur. Dördüncü bölümde ise sunulan bu yöntem yardımıyla bahsedilen tip denklemler için örnekler çözülmüş, bu örneklerin hata analizleri yapılmış ve grafikleri çizilmiştir. Ek olarak örneklerin hata analizlerinin incelenmesi ile yöntemin iyi çalıştığı, kullanılabilir olduğu sonucuna varılmıştır.

ANAHTAR KELİMELELER: Legendre Polinomları, Yüksek Mertebeden Volterra İntegral ve İntegro-Diferansiyel Denklemler, Sıralama (Collocation) Noktaları.

ABSTRACT**LEGENDRE POLYNOMIAL SOLUTIONS OF HIGHER ORDER LINEAR
DIFFERENTIAL AND INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS****İLKNUR GÜÇLÜ**

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction. The second deals with the preliminaries, necessary fundamental definitions that will be need for later use. Original results are contained in the third and fourth section. In the third section, a new method called “Legendre Collocation” for the Legendre polynomial solutions of higher order linear differential and integro-differential equations was presented. In the fourth section, examples of these kinds of equations were solved by using this new method, error analysis was done and graphics were drawn. In addition, we conclude that this new method works well and it can be suitable by examining error analysis of examples.

KEY WORDS: Legendre Polynomials, Higher Order Volterra Integral and Integro-Differential Equations, Collocation Points.

TEŞEKKÜR

Bu alıőmanın belirlenmesi ve yürütülmesi esnasında ilgi ve alakasını esirgemeyen, ortaya ıkan her türlü bilimsel problemin çözümünde devamlı yardımlarını gördüğüm değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Salih YALÇINBAŞ'a ve Arő. Gör. H.Hilmi SORKUN'a, ayrıca bana daima destek olan aileme ve arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

İlknur GÜÇLÜ

İÇİNDEKİLER

Özet	iv
Abstract	iv
Teşekkür	iv
İçindekiler	iv
Semboller ve Kısaltmalar Dizini	iv
Tablolar Dizini	iv
Grafikler Dizini	iv
1. GİRİŞ	1
1.1. Legendre Polinomlarının Tarihi Gelişimi	1
1.2. Legendre Polinomları ile ilgili Çalışmalar	3
1.3. Problemin Tanıtılması	3
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1. Legendre Diferansiyel Denklemleri	4
2.2. Legendre Polinomları	7
2.2.1. Birinci Tip Legendre Polinomları	15
2.2.2. Birinci Tip Legendre Polinomlarının Ardışık İntegrali	16
2.2.3. Birinci Tip Legendre Polinomları için Üretici Fonksiyon	17
2.2.4. Birinci Tip Legendre Polinomlarının Ortogonalliği	17
2.2.5. Birinci Tip Legendre Polinomlarının Serileri	18
2.3. İkinci Tip Legendre Polinomları	18
2.4. Eşlenik Legendre Polinomları	19
2.4.1. Eşlenik Legendre Polinomlarının Ortogonalliği	19
2.5. Legendre Polinomlarının Özellikleri	20
2.6. Rekürans (Tekrarlama) Bağlılıkları	22
2.7. Bir Yük Dağılımının Çok-Kutup Açılımı	23
3. YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ	27
3.1. Yüksek Mertebeden Lineer Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemlerinin Çözümleri için Legendre Polinom yaklaşımı	27
3.2. Materyal ve Metot	28
3.3. Temel Matris Bağlılıkları	29

3.3.1. $y(x)$ ve $y^{(k)}(x)$ için Matris Bağlılıları	29
3.3.2. Sıralama Noktalarını Esas Alan Matris Bağlılıları	31
3.3.3. $D(x)$ Diferansiyel Kısmı için Matris Bağlılısı	31
3.3.4. $I_v(x)$ Volterra İntegral Kısmı için Matris Bağlılısı	32
3.3.5. Karışık Koşullar için Matris Bağlılısı	37
3.4. Çözümün Doğruluğu	39
4. Yüksek Mertebeden Lineer Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemleri ile İlgili Nümerik Sonuçlar	40
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	70
6. KAYNAKLAR	72
ÖZGEÇMİŞ	

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\frac{d^n y}{dx^n}$: y 'nin x 'e göre n . mertebeden türevi
$\frac{\partial^{(n)} K(x,t)}{\partial x^n}$: $K(x,t)$ fonksiyonunun x 'e göre n . mertebeden kısmi türevi
$P_n(x)$: Legendre Polinomları
$D(x)$: Volterra integro-diferansiyel denkleminin diferansiyel kısmı
I_v	: Volterra integro-diferansiyel denkleminin integral kısmı
$K(x,t)$: Volterra çekirdek matrisi
x_i	: Sıralama noktaları
N	: Kesme sınırı
\mathbf{W}	: Artırılmış matris
$\tilde{\mathbf{W}}$: Koşulları kullanılmış yeni artırılmış matris
$\tilde{\mathbf{U}}$: Koşullar için artırılmış matris
$\tilde{\mathbf{G}}$: Sağ taraftaki koşulları kullanılmış yeni artırılmış matris
$E(x_i)$: x_i noktası için hata

TABLolar DİZİNİ

<u>Tablo No</u>	<u>Sayfa No</u>
Tablo 4.1. Örnek 4.4'ün $N = 3$, $N = 5$ ve $N = 7$ için Nümerik Sonuçları	53
Tablo 4.2. Örnek 4.5'in $N = 3$, $N = 5$ ve $N = 7$ için Nümerik Sonuçları	56
Tablo 4.3. Örnek 4.6'nın $N = 3$, $N = 5$ ve $N = 7$ için Nümerik Sonuçları	59
Tablo 4.4. Örnek 4.7'nin $N = 3, 5, 7, 9$ için Nümerik Sonuçları	62
Tablo 4.5. Örnek 4.8'in $N = 3$, $N = 5$ ve $N = 7$ için Nümerik Sonuçları	65
Tablo 4.6. Örnek 4.9'un $N = 3$, $N = 5$ ve $N = 7$ için Nümerik Sonuçları	67
Tablo 4.7. Örnek 4.9'un $N = 8$ ve $N = 10$ için Chebyshev Metodu Hata Analiz Sonuçları	67

GRAFİKLER DİZİNİ

<u>Grafik No</u>		<u>Sayfa No</u>
Grafik 4.1.	Örnek 4.4'ün $N = 3,5,7$ için karşılaştırma grafiği	54
Grafik 4.2.	Örnek 4.4'ün $N = 3,5,7$ için hata analiz grafiği	54
Grafik 4.3.	Örnek 4.5'ün $N = 3,5,7$ için karşılaştırma grafiği	57
Grafik 4.4.	Örnek 4.5'ün $N = 3,5,7$ için hata analiz grafiği	57
Grafik 4.5.	Örnek 4.6'ün $N = 3,5,7$ için karşılaştırma grafiği	60
Grafik 4.6.	Örnek 4.6'ün $N = 3,5,7$ için hata analiz grafiği	60
Grafik 4.7.	Örnek 4.7'ün $N = 3,5,7,9$ için karşılaştırma grafiği	63
Grafik 4.8.	Örnek 4.7'ün $N = 3,5,7,9$ için hata analiz grafiği	63
Grafik 4.9.	Örnek 4.8'ün $N = 3,5,7$ için karşılaştırma grafiği	66
Grafik 4.10.	Örnek 4.8'ün $N = 3,5,7$ için hata analiz grafiği	66
Grafik 4.11.	Örnek 4.9'ün $N = 3,5,7$ için karşılaştırma grafiği	68
Grafik 4.12.	Örnek 4.9'ün $N = 3,5,7$ için hata analiz grafiği	68
Grafik 4.13.	Örnek 4.9'in $N = 7,9$ için Legendre Collocation ile $N = 8,10$ için Chebyshey Metodu hata analizi karşılaştırılması	69

1. GİRİŞ

1.1. Legendre Polinomlarının Tarihi Gelişimi

Legendre polinomları en sık kullanılan ortogonal polinomlardan birisidir. Ortogonal polinomların alanı ise matematiksel fizik, mühendislik ve bilgisayar bilimindeki uygulamalarda olduğu kadar matematikte de aktif bir araştırma alanıdır. Bu alanlardaki fiziksel problemlerin matematiksel modelleri karşımıza bir diferansiyel, integral veya integro-diferansiyel denklem olarak çıkmaktadır. Bu tip denklemlerin bazıları elamanter metodlarla çözülebilir; fakat çoğunun tam (analitik) çözümünün bulunması ya çok zor ya da mümkün değildir. O zaman seri çözümlerine başvurulur; bunlardan birisi Legendre diferansiyel denkleminin çözümleri olan Legendre polinomlarına dayalı serilerdir.

Legendre polinomlarını ilk kez Andrien-Marie Legendre (1752-1833) ortaya çıkarmıştır.



Legendre (1752 - 1833)

Bir Fransız matematikçisi olan Adrien Marie Legendre, 1752 yılında Paris'te doğdu. 1775 ile 1780 yılları arasında Paris Askeri okulunda matematik dersleri verdi.

1787 yılında, Paris Gözlemevi ile Greenwich Gözlemevi arasında kurulacak jeodezi bağlantısında görev aldı. Fransız devrimi sırasında, metre sisteminin kabul edilmesini ve girifilen jeodezi iflemlerinin hazırlıklarına katıldı. Bu fırsatı değerlendirek, o zamana kadar uygulanan tüm yöntemleri yeniledi. Daha sonra, trigonometri alanında önemli teoremler ileri sürdü.

Özellikle küresel üçgeni düzlem olarak düşünüp açılarda bazı düzeltmeler yaparak alanını hesapladı. 1784 yılında, “Gezegenerin Şekli üstüne” adlı bir inceleme yazısında, kendi adıyla anılan çok terimliliği ortaya attı. 1794 yılında “Geometrinin Temel Bilgileri” adlı eseri yayınlandı. Bu eserde, Euclides postülatını ispatlamak için çok çeşitli ve yeni yollar denedi.

Bununla birlikte, Euclidean olmayan geometrilerin ortaya çıkmasıyla, Legendre'nin bulduğu sonuçların geçerliliği yeniden tartışma konusu oldu.

1798 yılında “Sayılar Kuramı” adlı eseri yayınlandı. Bu kitabında, ikinci dereceden kalanların karşılıklı kanunu gibi ilgi çekici sonuçlar yer alır. Yine de en değerli eseri, 1825 ile 1832 yılları arasında hazırladığı “Eliptik Transandantlar Kuramı” adlı inceleme kitabıdır.

Bu eserde, eliptik integrallerden hareket ederek ustaca bir çözümlemeyle bu integralleri kendi adıyla anılan üç şekle indirgemeyi başarmıştır. Legendre'nin bu alandaki araştırmaları daha sonra Abel ve Jacobi'nin çalışmalarıyla tamamlandı. Legendre'nin, kırk yılın üstünde çalışmayla elde ettiği sonuçları, Abel oldukça kısa ve kesin bir yolla elde ediyordu. Bu nedenle, onun kırk yıllık çalışmaları boşa gidiyor gibiydi.

Legendre'nin hem matematiğe ve hem de matematikçilerin yetişmesinde önemli hizmetleri vardır. Bazı matematikçiler onun kitaplarından ilham almışlardır. 1833 yılında Paris'te ölen Legendre, Abel'in öncülerinden biriydi.

1.2. Legendre Polinomları ile İlgili Çalışmalar

Legendre polinom ve serilerinin uygulamalarına ilişkin çalışmalar bilgisayarın çıkışı ile hızla artmıştır. Özellikle, yüksek mertebeden değişken katsayılı diferansiyel, integral, integro-diferansiyel ve integro-diferansiyel-fark denklemlerinin yaklaşık çözümlerini bulmak için kullanılmışlardır. Bu tip denklemler fizik, mühendislik, biyoloji, tıp ve eczacılık, ekonomi, akışkanlar dinamiği vb. alanlardaki problemlerin matematik modelleri olarak ortaya çıkmıştır. Legendre polinomlarına dayalı çözüm yöntemleri de araştırmacılar tarafından sıkça kullanılmaya başlanmıştır.

Legendre polinomları Tekil Sturm-Liouville probleminin öz fonksiyonlarının örnekleridirler (Fox vd., 1968) ve akışkanlar dinamiğinde, sınır değer problemlerinin çözümünde kullanılmışlardır (Elbarbay, 2002). Diğer yandan Legendre polinomlarına dayalı yöntemler lineer ve lineer olmayan diferansiyel, Fredholm-Volterra integral ve integro-diferansiyel denklemleri çözmek için oldukça uygundur. (El-Mikkawy vd., 2005; Yousefi vd., 2005; Maleknejad vd., 2003; Elbarbary, 2002; Streltsov, 2000)

1.3. Problemin Tanıtılması

Bu çalışmada, m .mertebeden lineer değişken katsayılı

$$\sum_{k=0}^m F_k(x) y^{(k)}(x) = g(x) + \int_{-1}^x K(x,t) y(t) dt \quad (1.1)$$

Volterra integro-diferansiyel denkleminin $-1 \leq x \leq 1$ aralığında

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk} y^{(k)}(-1) + b_{jk} y^{(k)}(1) + c_{jk} y^{(k)}(0)) = j, \quad j = 0,1,2,\dots,m-1 \quad (1.2)$$

karışık koşulları altında yaklaşık çözümü Legendre polinomları cinsinden bir kesilmiş Legendre serisi formunda bulunacaktır. Bu amaç için diferansiyel, integral ve integro-diferansiyel denklemlerin polinom çözümleri, verilen Taylor (matris ve collocation) metodları (Sezer, 1994 ; Sezer, 1996; Nas vd., 2000; Yalçınbaş vd., 2002; Karamete vd., 2002; Sezer vd., 2006; Gülsu vd., 2005) ve Chebyshev (matris ve collocation) metodları (Sezer vd., 1996; Akyüz vd., 1999; Akyüz 2000) geliştirilerek “ Legendre

Collocation (sıralama)” adlı yeni bir yöntem sunulacak ve (1.2) koşullu (1.1) denkleminde uygulanacaktır.

Burada $k = 0$ ise (1.1) denklemi yüksek mertebe bir diferansiyel denkleme; $k \neq 0$ için $F_k(x) = 0$ ise Volterra integral denkleme dönüşür. $F_k(x), g(x), K(x,t)$ fonksiyonları $-1 \leq x \leq 1$ aralığında tanımlı sürekli fonksiyonlar; a_{jk}, b_{jk}, c_j reel uygun sabitlerdir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Legendre Diferansiyel Denklemi

Legendre fonksiyonları, Legendre diferansiyel denklemi adı verilen

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0 \quad (2.1)$$

diferansiyel denklemin çözümlerinden doğar. $N = 0,1,2,3,\dots$ olması durumunda (2.1)'in genel çözümü

$$y = c_1 P_n(x) + c_2 Q_n(x) \quad (2.2)$$

dir. (2.2)'de $P_n(x)$ birinci tip Legendre polinomları, $Q_n(x)$ ikinci tip Legendre polinomları ve $Q_n(x)$ $x = \pm 1$ 'de sınırlandırılmıştır. (Spiegel, 1994)

(2.1) denkleminde n bir sabittir. Bu denklem küresel koordinatlardaki kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde, yani küresel simetri içeren mekanik, quantum mekaniği, elektromanyetik teori, ısı problemlerinde karşımıza çıkar.

(2.1) denklemini aşağıdaki şekilde tekrar yazalım:

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2} y' + \frac{n(n+1)}{1-x^2} y = 0$$

Açıkça görülüyor ki burada $x = \pm 1$ noktaları düzgün tekil noktalardır. Ayrıca $s = \frac{1}{x}$ dönüşümü yapılırsa, (2.1) denkleminin

$$\frac{d^2y}{ds^2} + \left[\frac{2}{s} - \frac{2}{s(s^2-1)} \right] \frac{dy}{ds} + \frac{n(n+1)}{s^2(s^2-1)} y = 0$$

şekline dönüştürülmesinden anlaşılacağı üzere, diferansiyel denklem sonsuzda da bir düzgün tekilliğe sahiptir.

Öyle ise bu noktalar dışında,

$$P_1(x) = -\frac{2x}{1-x^2} \quad \text{ve} \quad P_2(x) = \frac{n(n+1)}{1-x^2}$$

fonksiyonları analitik fonksiyonlardır. Bu nedenle, $x = 0$ noktası komşuluğunda, $|x| < 1$ aralığında (2.1) denkleminin

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

şeklinde bir seri çözümü bulunur.

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}$$

$$y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2}$$

şeklinde olup, y , y' ve y'' değerleri denklem (2.1)'de yerlerine konursa,

$$(1-x^2) \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} - 2x \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} + n(n+1) \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

veya

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2k c_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} n(n+1)c_k x^k = 0$$

olur. İndislerle ilgili düzenlemeler yapılırsa,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2} x^k - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2k c_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} n(n+1)c_k x^k = 0$$

veya

$$2c_2 + n(n+1)c_0 + [3 \cdot 2c_3 + (n+2)(n-1)c_1]x \\ + \sum_{k=2}^{\infty} \{(k+2)(k+1)c_k + 2[n(n+1) - k(k+1)]c_k\} x^k = 0$$

elde edilir. Buradan,

$$(i) 2c_2 + n(n+1)c_0 = 0$$

$$(ii) 3 \cdot 2c_3 + (n+2)(n-1)c_1 = 0$$

$$(iii) (k+2)(k+1)c_{k+2} + (n+k+1)(n-k)c_k = 0, \quad k \geq 2$$

yazılır. $c_0 \neq 0$ olduğu göz önünde tutularak, ilk iki bağıntıdan,

$$c_2 = \frac{-n(n+1)}{2!}c_0 \quad \text{ve} \quad c_3 = \frac{-(n+2)(n-1)}{3!}c_1$$

bulunur. Üçüncü bağıntı,

$$c_{k+2} = -\frac{(n-k)(n+k+1)}{(k+2)(k+1)}c_k, \quad k \geq 2$$

rekürans formülünü verir. Geri kalan katsayılar bu formül yardımıyla c_0, c_1 keyfi sabitleri cinsinden bulunur.

$$k = 2 \text{ için} \quad c_4 = -\frac{(n-2)(n+3)}{3 \cdot 4}c_2 = (-1)^2 \frac{[(n-2)n][(n+1)(n+3)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}c_0$$

$$k = 3 \text{ için} \quad c_5 = -\frac{(n-3)(n+4)}{4 \cdot 5}c_3 = (-1)^2 \frac{[(n-3)(n-1)][(n+2)(n+4)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}c_1$$

$$k = 4 \text{ için} \quad c_6 = -\frac{(n-4)(n+5)}{5 \cdot 6}c_4 = (-1)^3 \frac{[(n-4)(n-2)n][(n+1)(n+3)(n+5)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}c_0$$

$$k = 5 \text{ için} \quad c_7 = -\frac{(n-5)(n+6)}{6 \cdot 7}c_5 = (-1)^3 \frac{[(n-5)(n-3)(n-1)][(n+2)(n+4)(n+6)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}c_1$$

⋮

olur. Bütün bu katsayılar

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots + c_k x^k + \dots$$

denkleminde yerlerine konursa böylece $|x| < 1$ aralığında Legendre denkleminin genel çözümü

$$y = c_0 \left[1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - \frac{(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!}x^6 + \dots \right] \\ + c_1 \left[x - \frac{(n+2)(n-1)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - \dots \right]$$

(2.3)

olarak elde edilir. Lineer bağımsız çözümlerin her biri daha kısa olarak

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{[(n-2k+2)\cdots(n-2)n][(n+1)(n+3)\cdots(n+2k-1)]}{(2k)!} x^{2k}$$

ve

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{[(n-2k+1)\cdots(n-3)(n-1)][(n+2)(n+4)\cdots(n+2k)]}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

şeklinde yazılırsa Legendre denkleminin genel çözümü, $y(x) = c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x)$ biçiminde olur. $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ lineer bağımsız çözümlerinde toplam işareti içinde görülen serilerin her biri $|x| < 1$ aralığında yakınsak ve $|x| > 1$ aralığında ise ıraksaktır. Gauss testinden $x = \pm 1$ noktalarında da bu seriler ıraksaktır. Bu zorluktan kurtulmak için ayrılma sabiti n , bir tamsayıya eşit olacak şekilde yazılır ve sonsuz serileri bir polinoma dönüştürülür. (Rainville,1964)

2.2. Legendre Polinomları

$[-1,+1]$ aralığında tanımlı polinomların oluşturduğu vektör uzayını ele alalım. Skaler çarpımın ıraksak olmasını önlemek için $w(x)$ ağırlık fonksiyonu gözönüne alınır. Aralık sonlu olduğu için, bir ağırlık fonksiyonuna gerek kalmadan skaler çarpım yakınsak olur. O halde,

$$[a,b] = [-1,+1]$$

$$w(x) = 1$$

$$(p,q) = \int_{-1}^{+1} p(x)q(x) dx \quad (2.4)$$

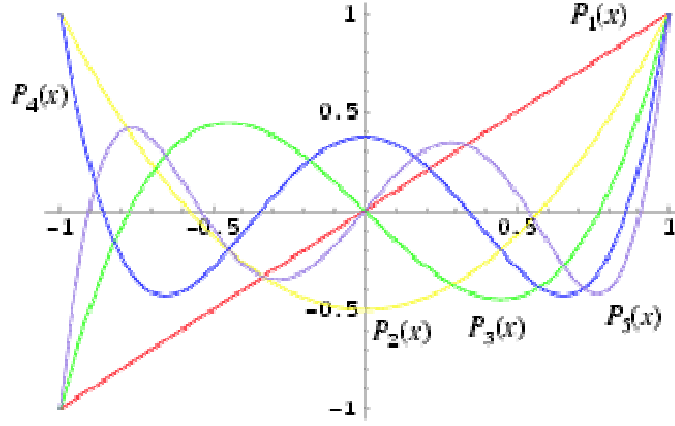
alalım. Bu koşullarda ortogonal olan polinomlar Legendre polinomları adını alır ve $P_n(x)$ ile gösterilir.

Tanım : $[-1,+1]$ aralığında

$$P_0(x) = 1 \quad (2.5)$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (n > 0) \quad (\text{Rodrigue formülü}) \quad (2.6)$$

olarak tanımlanan $P_n(x)$ polinomlarına Legendre polinomları denir. Her ortogonal polinom ailesi bir Rodrigue formülü ile tanımlanabilir.



Şekil 2.1. Legendre Polinomları.

İlk olarak Legendre Polinomlarının açık ifadesini yazalım:

$$P_0(x) = 1 \quad , \quad P_1(x) = x \quad , \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \quad ,$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \quad , \quad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \quad , \dots$$

Şekil 2.1 de bu polinomların ilk beş tanesinin grafikleri verilmiştir.

Legendre Polinomlarının Özellikleri

Parite: Bir $f(x)$ fonksiyonun $\pm x$ için aldığı değerlere göre tek ve çift olma özelliğine parite denir. $f(-x) = f(x)$ ise fonksiyon çift pariteli, $f(-x) = -f(x)$ ise fonksiyon tek pariteli denir.

n çift ise, P_n polinomu x 'in çift üslü terimlerinden oluşur (x^2, x^4, \dots) ve dolayısıyla, çift fonksiyondur.

n tek ise, P_n polinomu x 'in tek üslü terimlerinden oluşur (x, x^3, x^5, \dots) ve tek fonksiyondur.

$$P_n(-x) = \begin{cases} P_n(x) & n \text{ çift ise} \\ -P_n(x) & n \text{ tek ise} \end{cases} \quad (2.7)$$

Üretici Fonksiyon

Hem x değişkenine ve hem de bir t parametresine bağlı olan

$$G(x, t) = \frac{1}{(1 - 2xt + t^2)^{1/2}} \quad (|t| < 1)$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. $G(x, t)$ nin t değişkenine göre Taylor açılımı yapıldığında, t^n nin katsayıları Legendre polinomlarını verir.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 - 2xt + t^2)^{1/2}} &= \{1 + (t^2 - 2xt)\}^{-1/2} \\ &= 1 - \frac{1}{2}(t^2 - 2xt) + \frac{3}{8}(t^2 - 2xt)^2 - \frac{15}{48}(t^2 - 2xt)^3 + \dots \end{aligned}$$

Bu seri t 'nin artan kuvvetlerine göre düzenlenir.

Bu seri incelendiğinde, her bir t^n kuvvetine sahip terimin katsayısının P_n Legendre polinomu olduğu görülür.

$$G(x, t) = \frac{1}{(1 - 2xt + t^2)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \quad (2.8)$$

Bu tür fonksiyonlara üretici fonksiyon denir. Her ortogonal polinom ailesinin bir üretici fonksiyonu vardır. Üretici fonksiyon yardımıyla birçok özdeşlik kolayca ispat edilebilir.

Tekrarlama Bağlantısı

Her ortogonal polinom ailesi için ardışık 3 polinom arasında bir bağıntı bulmak mümkündür. Legendre polinomları için tekrarlama bağıntısı

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \quad (2.9)$$

olur.

İspat: Üretici fonksiyon $G(x,t)$ nin t değişkenine göre kısmi türevi alınırsa

$$G(x,t) = \frac{1}{(1-2xt+t^2)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{x-t}{(1-2xt+t^2)^{3/2}} = \frac{x-t}{1-2xt+t^2} G(x,t)$$

$$(1-2xt+t^2) \frac{\partial G}{\partial t} + (t-x)G(x,t) = 0$$

G ve $\partial G/\partial t$ için seri ifadeleri olan

$$G(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x)t^m \quad \frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{m=1}^{\infty} mP_m(x)t^{m-1}$$

yukarıdaki denklemde kullanılırsa

$$(1-2xt+t^2) = \sum_{m=1}^{\infty} mP_m(x)t^{m-1} + (t-x) \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x)t^m = 0$$

$$\sum_{\substack{m=1 \\ m-1=n}}^{\infty} mP_m(x)t^{m-1} - 2 \sum_{\substack{m=1 \\ m=n}}^{\infty} xP_m(x)t^{m-1} + \sum_{\substack{m=1 \\ m+1=n}}^{\infty} mP_m(x)t^{m+1} + \sum_{\substack{m=0 \\ m-1=n}}^{\infty} mP_m(x)t^{m-1} - \sum_{\substack{m=0 \\ m=n}}^{\infty} xP_m(x)t^m = 0$$

elde edilir. Bu ifadenin her terimindeki t 'nin kuvvetini aynı n indisiyle gösterildiğinde

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)P_{n+1}(x)t^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} xnP_n(x)t^n + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)P_{n-1}(x)t^n + \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} xnP_n(x)t^n = 0$$

elde edilir. Bu ifadedeki her toplam ayrı bir indisten başlamaktadır. Ancak, tekrarlama bağıntısını elde etmek için $n \geq 2$ olan t^n üslerine bakmak yeterlidir. Her $n \geq 2$ değeri

için bu eşitliğin doğru olabilmesi için t^n kuvvetinin özdeş olarak sıfır olması gerekir. Böylece

$$(n+1)P_{n+1}(x) - 2nxP_n(x) + (n-1)P_{n-1}(x) + P_{n-1} - xP_n = 0 \quad (2.10)$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \quad (2.11)$$

yazılır. Öte yandan tekrarlama bağıntıları, sayısal hesaplarda ortogonal polinomları hesaplamak için kullanılabilecek en kısa yoldur.

Türev Bağıntısı

Her ortogonal polinom ailesinde bir polinomun türevi diğer indisli polinomlar cinsinden yazılabilir. Legendre polinomları için birkaç türev bağıntısı yazılabilir. Bunlardan bazılarını ispatsız verelim.

$$nP_n(x) = xP_n'(x) - P_{n-1}'(x) \quad (n \geq 1)$$

$$(x^2 - 1)P_n'(x) = nxP_n(x) - nP_{n-1}(x) \quad (n \geq 1)$$

Diklik Bağıntısı ve Normlama

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)P_m(x) dx = \begin{cases} 0 & (n \neq m \text{ ise}) \\ \frac{2}{2n+1} & (n = m \text{ ise}) \end{cases} \quad (2.12)$$

İspat: Önce $n \neq m$ için bu integralin sıfır olduğunu gösterelim. Bunun için Legendre diferansiyel denklemini aşağıdaki gibi biraz değişik yazalım.

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)P_n'(x)] + n(n+1)P_n(x) = 0$$

Bu denklemi farklı bir m indisi için tekrar yazar ve P_n denklemini P_m ile P_m denklemini de P_n ile çarpıp farkını alırsak (kısaca $P_n(x) = P_n$ alınır).

$$P_m \frac{d}{dx}[(1-x^2)P_n'] - P_n \frac{d}{dx}[(1-x^2)P_m'] + [n(n+1) - m(m+1)]P_m P_n = 0$$

olur. İlk iki terim bir araya getirilirse

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)(P_m P'_n - P_n P'_m)]$$

olur. Bu ifade denklemde kullanılıp $[-1,+1]$ aralığında integral alınır

$$(1-x^2)(P_m P'_n - P_n P'_m) \Big|_{-1}^{+1} + [n(n+1) - m(m+1)] \int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x) dx = 0$$

$x = \pm 1$ de $(1-x^2) = 0$ olduğundan birinci terim kısılır ve

$$[n(n+1) - m(m+1)] \int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x) dx = 0$$

bulunur. Eğer burada $m \neq n$ ise bu integral sıfır olmak zorundadır.

Şimdi normlama integraline bakalım. Yukarıda verilen türev bağıntularından birincisini yani

$$nP_n(x) = xP'_n(x) - P'_{n-1}(x)$$

ele alalım. Bu denklem $P_n(x)$ ile çarpılır integralini alınır

$$n \int_{-1}^{+1} [P_n(x)]^2 dx = \int_{-1}^{+1} x P_n(x) P'_n(x) dx - \int_{-1}^{+1} P_n(x) P'_{n-1}(x) dx$$

olur. Sağ taraftaki II. integral sıfırdır, çünkü buradaki P_{n-1} faktörü en fazla x^{n-1} kuvvetini, bunun türevi ise en fazla x^{n-2} kuvvetini içerir. O halde, P'_{n-1} en fazla P_{n-2} ye kadar olan polinomların bir lineer kombinasyonu olacaktır. Bunların hepsi P_n ye dik olduğundan integral sıfır olur. Diğer integral kısmi integral yoluyla hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \underbrace{x P_n}_{u} \underbrace{P'_n}_{dv} dx &= \left| x P_n^2 \right|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} P_n [P_n + x P'_n] dx \\ &= \left| x P_n^2 \right|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} [P_n]^2 dx - \int_{-1}^{+1} x P_n P'_n dx \end{aligned}$$

sağ taraftaki son terim sol tarafa geçirilirse

$$2 \int_{-1}^{+1} x P_n P'_n dx = \left| x P_n^2 \right|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} [P_n]^2 dx$$

bulunur. Burada uç değerlerin $P_n(+1) = 1$ ve $P_n(-1) = (-1)^n$ olduğu hatırlanırsa,

$$xP_n^2 \Big|_{-1}^{+1} = \{1 - (-1)(-1)^{2n}\} = 2$$

$$\int_{-1}^{+1} x P_n P_n' dx = 1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} [P_n]^2 dx$$

olur. Bu sonuç, başladığımız ilk denklemden yerine yazılırsa

$$n \int_{-1}^{+1} [P_n]^2 dx = 1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} [P_n]^2 dx$$

$$\int_{-1}^{+1} [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}$$

elde edilir.

Bu sonuca göre, Legendre polinomları diktir ama normları 1 den farklıdır. Ortonormal bir baz istenirse $\sqrt{(2n+1)/2} P_n(x)$ şeklinde alınabilirler.

Bir Fonksiyonun Legendre Serisi Olarak Açılımı

$[-1,+1]$ aralığında sürekli her $f(x)$ fonksiyonu Legendre polinomları cinsinden

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) \quad (2.13)$$

olarak yazılabilir. c_n katsayılarını bulmak için, bu denklemin P_n ile skaler çarpımı alınır norm bağıntısı da kullanırsa

$$\int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x) dx = c_n \int_{-1}^{+1} [P_n(x)]^2 dx = c_n \frac{2}{2n+1} \quad (2.14)$$

olur. Şimdi çok sık kullanılan birkaç integral sonucunu burada verelim.

$$\int_{-1}^{+1} x^m P_n(x) dx = 0 \quad (m < n \text{ veya } m+n \text{ tek ise}) \quad (2.15)$$

$$\int_{-1}^{+1} x^m P_n(x) dx = \frac{2^{n+1} (n!)^2}{(2n+1)!} \quad (m = n) \quad (2.16)$$

$$\int_{-1}^{+1} x^m P_n(x) dx = \frac{m!}{(m-n+1)!} \frac{(m-n+1)!!}{(m+n+1)!!} \quad (m > n \text{ ise}) \quad (2.17)$$

Bağlı Legendre Fonksiyonları

Legendre polinomlarının türevleri de, $(1-x^2)$ faktörüyle çarpıldıktan sonra, birer ortogonal fonksiyon olurlar. Kuantum mekaniğinde sık kullanılan Bağlı (asosye) Legendre fonksiyonları $P_n^m(x)$ şeklinde iki indisle belirlenir.

$$\begin{aligned} P_n^m(x) &= (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) & (m \geq 0) \\ P_n^m(x) &= (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} P_n^{|m|}(x) & (m < 0) \end{aligned} \quad (2.18)$$

P_n polinomunun derecesi n olduğundan, en fazla n kez türevi alınır, sonuçta onun sıfır olduğu görülür. Bu tanıma göre, $|m| \leq l$ olmalıdır.

Bu tanım, Rodrigue cinsinden yazılmak istenirse,

$$P_n^m(x) = \frac{1}{2^n n!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n \quad (2.19)$$

olur. Şimdi ilk birkaç Legendre fonksiyonunu verelim.

$$\begin{aligned} P_n^0(x) &= P_n(x), & P_1^1(x) &= (1-x^2)^{1/2}, & P_2^1(x) &= 3x(1-x^2)^{1/2} \\ P_2^2(x) &= 3(1-x^2), & P_3^1(x) &= \frac{3}{2}(5x^2-1)(1-x^2)^{1/2} \\ P_3^2(x) &= 15x(1-x^2), & P_3^3(x) &= 15(1-x^2)^{3/2} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Buradaki $(1-x^2)^{1/2}$ faktöründen dolayı, bunlara polinom diyemeyiz. Ancak, fiziksel uygulamalarda $x = \cos \theta$ olarak tanımlanırsa $(1-x^2)^{1/2} = \sin \theta$ olur ve böylece Legendre fonksiyonlarının trigonometrik ifadeleri $\sin \theta$ veya $\cos \theta$ faktörleri cinsinden daha basit hale gelir.

$$\begin{aligned}
P_1^1(\theta) &= \sin \theta, & P_1^0(\theta) &= \cos \theta, & P_1^{-1}(\theta) &= -\frac{1}{2}\sin \theta \\
P_2^2 &= 3\sin^2 \theta, & P_2^1 &= 3\sin \theta \cos \theta, & P_2^0 &= \frac{1}{2}(3\cos^2 \theta - 1) \\
P_2^{-1} &= -\frac{1}{2}\sin \theta \cos \theta, & P_2^{-2} &= \frac{1}{8}\sin^2 \theta
\end{aligned} \tag{2.21}$$

2.2.1. Birinci Tip Legendre Polinomları

(2.1) Legendre diferansiyel denkleminin lineer bağımsız çözümlerinden biri olan birinci tip Legendre polinomları

$$P_n(x) = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots-1}{n!} \left\{ x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \dots \right\} \tag{2.22}$$

şeklinde ifade edilir.

Burada $P_n(x)$, n . dereceden bir polinomdur. Böylece ilk birkaç Legendre polinomları ise

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \tag{El-Mikkawy vd., 2005}$$

şeklinde ifade edilir.

Ayrıca bu polinomları, x 'in kuvvetleri şeklinde de aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$x^0 = P_0(x)$$

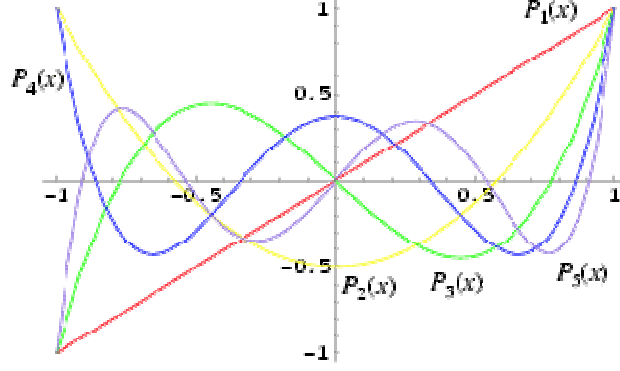
$$x^1 = P_1(x)$$

$$x^2 = \frac{1}{3}[P_0(x) + 2P_2(x)]$$

$$x^3 = \frac{1}{5}[3P_1(x) + 2P_3(x)]$$

$$x^4 = \frac{1}{35}[7P_0(x) + 20P_2(x) + 8P_4(x)]$$

$$x^5 = \frac{1}{63}[27P_1(x) + 28P_3(x) + 8P_5(x)]$$



Şekil 2.1. Birinci tip Legendre polinomlarının grafiği

Bütün durumlarda $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$ 'dir.

Legendre polinomları ayrıca Rodriguez formülü ile de

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (\text{Spiegel, 1994})$$

biçiminde gösterilir.

2.2.2. Birinci Tip Legendre Polinomlarının Ardışık İntegrali (Elbarbary, 2002)

Teorem 2.1. $P_n(x)$ Legendre polinomları ile türevleri arasındaki tam bağıntı

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m e_{n,m,k} \binom{k}{m}}{w_{n,m,k}} P_{n+k-2m}^{(k)}(x) \quad (2.23)$$

ile verilir. Buradaki $w_{n,m,k}$ ve $e_{n,m,k}$

$$w_{n,m,k} = \prod_{i=0, i \neq m}^k (2n + 2k - 2m - 2i + 1)$$

$$e_{n,m,k} = \begin{cases} 0, & n < 2m - k \\ 1, & n \geq 2m - k \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.2. Birinci tip Legendre polinomlarının ardışık integrali Legendre polinomları cinsinden

$$\begin{aligned} [P_n(x)]_k &= \int_{-1}^x \int_{-1}^{t_{k-1}} \int_{-1}^{t_{k-2}} \cdots \int_{-1}^{t_2} \int_{-1}^{t_1} P_n(t_0) dt_0 dt_1 \dots dt_{k-2} dt_{k-1} \\ &= \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m e_{n,m,k} \binom{k}{m}}{W_{n,m,k}} {}_{k,m,n}(x) \\ {}_{k,m,n}(x) &= P_{n+k-2m}(x) - \sum_{i=0}^{k-1} i P_{n+k-2m}^{(i)}(-1) \\ i &= \sum_{j=0}^i \frac{x^j}{j!(i-j)!} \end{aligned} \quad (2.24)$$

şeklinde ifade edilir.

2.2.3. Birinci Tip Legendre Polinomları için Üreten Fonksiyon

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

fonksiyonu birinci tip Legendre polinomları için üreten fonksiyondur ve Legendre polinomlarının özelliklerini elde etmek için kullanılır. (Yu, 2003)

2.2.4. Birinci Tip Legendre Polinomlarının Ortogonalliği

Legendre polinomları $-1 < x < 1$ aralığında

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0, \quad m \neq n \quad \text{ise}$$

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}$$

olması durumunda ortogonaldır. (Gillis vd., 1988)

2.2.5. Birinci Tip Legendre Polinomlarının Serileri

$f(x)$ ve $f'(x)$ parçalı sürekli ise $-1 < x < 1$ aralığında $f(x)$ 'in her süreklilik noktasında

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx$$

olmak üzere

$$f(x) = A_0 P_0(x) + A_1 P_1(x) + A_2 P_2(x) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(x) \quad (2.25)$$

formuna sahip bir Legendre seri açılımı vardır.

Herhangi bir süreksizlik noktasında (2.25) formülü,

$$\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]$$

ifadesine yakınsar. (Spiegel, 1994)

2.3. İkinci Tip Legendre Polinoları

(2.1) Legendre diferansiyel denkleminin lineer bağımsız çözümlerinden biri olan ikinci tip Legendre polinoları $|x| < 1$ ise sırasıyla n 'in tek ya da çift olması durumuna göre aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$Q_n(x) = \frac{(-1)^{n/2} 2^n [(n/2)!]^2}{n!} \left\{ x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!} x^5 - \dots \right\}$$

$$Q_n(x) = \frac{(-1)^{(n+1)/2} 2^{n-1} [(n-1)/2!]^2}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n} \left\{ 1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!} x^4 - \dots \right\}$$

$n > 1$ için baştaki katsayılar alınmıştır, bu yüzden $P_n(x)$ 'e ait olan rekürans bağıntıları aynı zamanda $Q_n(x)$ içinde sağlanır. (Spiegel, 1994)

2.4. Eşlenik Legendre Polinomları

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + [n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}]y = 0 \quad (2.26)$$

diferansiyel denklemine eşlenik Legendre diferansiyel denklemini denir. $m=0$ olması durumunda bu denklem (2.26) Legendre diferansiyel denklemine indirgenir. (2.26)'in çözümlerine eşlenik Legendre polinomları adı verilir. Şimdi m ve n 'nin negatif olmayan tamsayılar olduğu durumunu düşünelim. Bu durumda (2.26)'in genel çözümü, sırasıyla $P_n^m(x)$ ve $Q_n^m(x)$ birinci ve ikinci tip Legendre polinomları olmak üzere

$$y = c_1 P_n^m(x) + c_2 Q_n^m(x)$$

şeklindedir. Buradaki $P_n^m(x)$ ve $Q_n^m(x)$

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$$

$$Q_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} Q_n(x)$$

olarak ifade edilir.

$m > n$ ise $P_n^m(x) = 0$ 'dır. $Q_n^m(x)$ polinomları $x = \pm 1$ için sınırlanmamıştır.

(2.26) diferansiyel denklemini (r, θ, ϕ) küresel koordinatlarda ifade edilen $\nabla^2 u = 0$ Laplace denkleminde elde edilir. (Mavromatris vd., 1999)

2.4.1. Eşlenik Legendre Polinomlarının Ortogonalliği

Birinci tip eşlenik Legendre polinomları $-1 < x < 1$ aralığında

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_k^m(x) dx = 0, \quad n \neq k \text{ ise}$$

$$\int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

olması durumunda ortogonaldır. Bunlar kullanılarak bir $f(x)$ fonksiyonunu seri formunda

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k P_k^m(x) \quad (\text{Spiegel, 1994})$$

biçiminde yazılır.

2.5. Legendre Polinomlarının Özellikleri (El- Mikkawy vd., 2005)

$P_n(x)$ Legendre polinomları; lineer, ikinci dereceden,

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + n(n+1)y(x) = 0$$

homojen diferansiyel denklemi sağlar.

$-1 < x < 1$ ve $n \geq 0$ için $P_n(x)$ Legendre polinomları aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- $P_n(x) = \frac{1}{2^n (n!)} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$
- $P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}^2 (1-x)^k (1+x)^{n-k}$, $n = 0, 1, 2, \dots$
- $P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (x+1)^k (x-1)^{n-k}$, $n = 0, 1, 2, \dots$
- $P_n(x) = \sum_{k=0}^n 2^{-k} \binom{n}{k} \binom{-n-1}{k} (1-x)^k$, $n = 0, 1, 2, \dots$
- $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^k \binom{n}{k} \binom{n+k}{n} (1-x)^k$, $n = 0, 1, 2, \dots$
- $P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n-2k}{n} x^{n-2k}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \begin{cases} \frac{n}{2} & , n \text{ çift} \\ \frac{n-1}{2} & , n \text{ tek} \end{cases}$$

n tek ise $P_n(x)$ tek fonksiyon, n çift ise $P_n(x)$ çift fonksiyondur.

- $P_n(1) = 1$, $n = 0,1,2,\dots$
- $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$, $n = 0,1,2,3,\dots$
- $(1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$, $|t| \leq 1$
- $\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x) dx = \begin{cases} 0 & , m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & , m = n \end{cases}$
- $\frac{d^n}{dx^n} P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)}$, $n = 0,1,2,\dots$
- $\int_{-1}^1 f(x)P_n(x) dx = \frac{1}{2^n (n!)} \int_{-1}^1 (1-x^2)^n \left[\frac{d^n}{dx^n} f(x) \right] dx$
- $P_0(0) = \begin{cases} 0 & , n \text{ tek} \\ \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} \binom{n}{n/2}}{2^n} & , n \text{ çift} \end{cases}$
- $\int_{-1}^1 \frac{P_n(x)}{\sqrt{1-x}} dx = \frac{2\sqrt{2}}{2n+1}$, $n = 0,1,2,\dots$
- $\int_{-1}^1 \frac{P_n(x)}{\sqrt{1+x}} dx = (-1)^n \frac{2\sqrt{2}}{2n+1}$, $n = 0,1,2,\dots$
- $\int_{-1}^1 \frac{xP_n(x)}{\sqrt{1-x}} dx = 2 \int_0^1 \frac{xP_n(x)}{\sqrt{1-x}} dx$
- $\int_{-1}^1 (x+a)^m P_n(x) dx = \begin{cases} 0 & , m = 0,1,2,\dots,n-1 \\ \frac{2^{n+1} (n!)^2}{(2n+1)!} & , m = n \end{cases}$ (a herhangi bir reel sayı)
- $\int_0^1 P_n(x) dx = \begin{cases} (-1/4)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\binom{n-1}{(n-1)/2}}{n+1} & , n = 1,3,5,\dots \\ 0 & , n = 2,4,6,\dots \end{cases}$

2.6. Rekürans (Tekrarlama) Bağlıları (Spiegel, 1994)

Üreten fonksiyon Legendre polinomlarının tekrarlarba bağıntılarını türetmede yararlıdır. Bu bağıntılar x cinsinden özdeşliklerdir ve trigonometrik özdeşlikler gibi işimizi kolaylaştırması ispatlarda, türevlerde yardımcı olması için kullanılır. Bazı tekrarlarba bağıntıları şunlardır:

- $n P_n(x) = (2n-1)x P_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x)$
- $x P_n'(x) - P_{n-1}'(x) = n P_n(x)$
- $P_n'(x) - x P_{n-1}'(x) = n P_{n-1}(x)$
- $(1-x^2)P_n'(x) = n P_{n-1}(x) - n x P_n(x)$
- $(2n+1)P_n(x) = n P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x)$
- $P_{n+1}'(x) = (n+1)P_n(x) + x P_n'(x)$
- $(1-x^2)P_n'(x) = (n+1)x P_n(x) - (n+1)P_{n+1}(x)$
- $P_n' - 2x P_{n-1}' + P_{n-2}' = P_{n-1}$
- $P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x)$

Örnek 2.1. $[-1,+1]$ aralığında tanımlı

$$f(x) = 7x^4 - 3x + 1$$

fonksiyonunun Legendre serisi açılımını yazınız.

Çözüm:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) \quad c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x) dx$$

bağıntılarını kullanalım. Polinomun derecesi 4 olduğu için, bu toplamda en fazla P_4 yer alacaktır. $x^m P_n$ türü integraller için yukarıda verilen ifade kullanılırsa

$$c_4 = \frac{2 \times 4 + 1}{2} \int_{-1}^{+1} (7x^4 - 3x + 1) P_4(x) dx = \frac{63}{2} \frac{2^{4+1} (4!)^2}{(2 \times 4 + 1)!} + 0 + 0 = \frac{8}{5}$$

$$c_3 = \frac{7}{2} \int_{-1}^{+1} (7x^4 - 3x + 1) P_3(x) dx = \frac{49}{2} \int_{-1}^{+1} x^4 P_3(x) dx + 0 + 0 = 0 \quad (\text{tek fonksiyon})$$

$$c_2 = \frac{5}{2} \int_{-1}^{+1} (7x^4 - 3x + 1) P_2(x) dx = \frac{35}{2} \int_{-1}^{+1} x^4 P_2(x) dx + 0 + 0 = 35 \int_{-1}^{+1} x^4 P_2(x) dx$$

$$= 35 \frac{4!(4-2+1)!!}{(4-2+1)!(4+2+1)!!} = 4$$

$$c_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^{+1} (7x^4 - 3x + 1) P_1(x) dx = \frac{3}{2} \int_{-1}^{+1} (7x^5 - 3x^2 + x) dx = -3$$

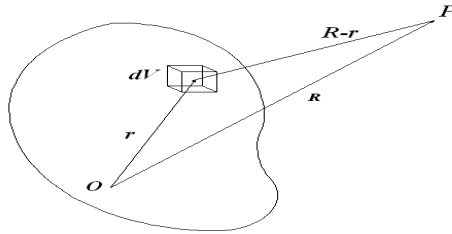
$$c_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (7x^4 - 3x + 1) \cdot x dx = \frac{12}{5}$$

olur. Bu katsayılar seri açılımında kullanılırsa

$$7x^4 - 3x + 1 = \frac{12}{5} P_0 - 3P_1 + 4P_2 + \frac{8}{5} P_4$$

elde edilir. Bu sonuç, $f(x) = c_0 p_0 + c_1 p_1 + \dots + c_4 p_4$ şeklinde bir eşitliğin katsayılarının taraf tarafa karşılaştırılmasıyla da bulunabilir. Küçük çaplı polinomlar için daha çabuk sonuç verir. Burada verilen yöntem genel bir $f(x)$ fonksiyonu için örnek olur.

2.7. Bir Yük Dağılımının Çok-Kutup Açılımı



Şekil 2.2.

3-boyutlu uzayda bir V hacmi içinde \vec{r} bir elektrik yük dağılımı olsun. Bu yüklerin uzak bir P noktasında oluşturduğu U elektrostatik potansiyeli hesaplayalım (Şekil 2.2).

Noktasal bir yükün potansiyeli q/r ile verilir. V hacmi içinde (\vec{r}) konumlu bir nokta etrafında küçük bir dV hacmi alınırsa bunun içindeki dq yükü $dq = (\vec{r})dV$ olur. Bu noktasal yükün (\vec{R}) konumlu bir P noktasında oluşturduğu potansiyel

$$dU = \frac{dq}{|\vec{R} - \vec{r}|} = \frac{(\vec{r})dV}{|\vec{R} - \vec{r}|}$$

biçimindedir. Tüm yüklerin katkısı bu elemanter katkıların V hacmindeki integrali olur.

$$U(r, \vec{r}) = \int_V \frac{(\vec{r})dV}{|\vec{R} - \vec{r}|} \quad (|\vec{R} - \vec{r}| = \sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta})$$

Burada \vec{r} ile \vec{R} arasındaki açıdır.

Şimdi yük dağılımının z -ekseni etrafında ekstenel simetriye sahip olduğunu varsayalım ve P noktasını z -ekseni üzerinde alalım. Bu durumda yük dağılımı sadece r , değişkenlerinin bir fonksiyonu olacaktır. Ekstenel simetrik durum için hacim elemanı $dV = 2\pi r^2 dr \sin \theta$ olduğundan

$$U = \int_V \frac{(\vec{r})dV}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta}} = \frac{2}{R} \int_0^\infty \int_0^\pi \frac{(r, \theta) r^2 dr \sin \theta}{\sqrt{1 + (r/R)^2 - 2(r/R) \cos \theta}}$$

formundadır. Legendre polinomları ekstenel simetrik bir problemin açısal kısmının sadeleştirilmesini sağlar. Bunun için

$$= \cos \theta \quad \sin \theta d\theta = -d$$

şeklinde yeni bir değişken tanımlayalım. Açısal integralin sınırları $[-1, +1]$ olduğundan eksi işaret kalkar ve

$$U = \frac{2}{R} \int_0^\infty \int_{-1}^1 \frac{(r, \theta) r^2 dr d}{\sqrt{1 + (r/R)^2 - 2(r/R) \cos \theta}}$$

olur. Paydadaki ifade Legendre polinomlarının üretici fonksiyonudur ve r/R ya göre seri açıldığında katsayılar Legendre polinomları olur. Böylece

$$\frac{1}{\sqrt{1+(r/R)^2-2(r/R)\cos\theta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos\theta)$$

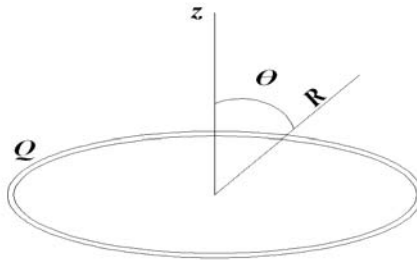
$$U = \frac{2}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} r^2 dr \left(\frac{r}{R}\right)^n \int_{-1}^{+1} d\cos\theta (r, \theta) P_n(\cos\theta)$$

yazılır. Eğer (r, θ) yük dağılım fonksiyonu verilmişse, bu integraller hesaplanır ve çözüm n indisli bir seri olarak yazılabilir. Örneğin $n = 0$ olduğunda ilk terim;

$$\frac{2}{R} \int_0^{\infty} r^2 dr \int_{-1}^{+1} d\cos\theta (r, \theta) P_0(\cos\theta) = \frac{1}{R} \int_0^{\infty} \int_{-1}^{+1} (2 r^2 dr d\cos\theta) (r, \theta) = \frac{1}{R} \int_V dV = \frac{Q}{R}$$

veya tüm Q yükü orijinde toplanmış bir katkı verir. Bu terim monopol katkısı olarak bilinir. Diğer terimler ($n = 1$ dipol, $n = 2$ kuadrupal terimi, ...) olurlar. Her bir terimin katkısı $(1/r)^{n+1}$ olarak uzaklığa bağlıdır. Eğer R uzaklığı büyükse ($r/R \ll 1$), bu serideki yüksek dereceli terimler ihmal edilip, ilk birkaç terim alınarak iyi bir yaklaşık çözüm bulunabilir.

Örnek 2.2. xy - düzleminde a yarıçaplı ve toplam Q yüklü bir çemberin $R \gg a$ olan yerlerde elektrostatik potansiyeli bulunuz (Şekil 2.3).



Şekil 2.3.

Çözüm: Yük dağılımı aksenal simetriye sahip olduğundan

$$U(R, \theta) = \frac{Q}{R} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{a}{R}\right)^n P_n(\cos\theta)$$

şeklinde bir seri çözümü aranır. Buradaki c_n katsayılarını bulmak için yük dağılımının integralleri gerekirse de, bunun için daha kolay bir yöntem vardır. Potansiyelin z ekseninde ($\theta = 0$) aldığı değer hemen yazılabilir. Çemberin her noktası bu eksene aynı uzaklıkta olduğundan

$$U(R, \theta) = \frac{Q}{\sqrt{R^2 + a^2}}$$

yazılır. Yukarıda verilen seri ifadesi z ekseninde ($\theta = 0$ veya $\cos \theta = 1$) bu çözümü sağlaması gerekir. Böylece

$$\frac{Q}{\sqrt{R^2 + a^2}} = \frac{Q}{R} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{a}{R}\right)^n \underbrace{P_n(1)}_1 = \frac{Q}{R} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{a}{R}\right)^n$$

olur.

Eşitliğin sol tarafının (a/R) 're göre seri açılımı yapılırsa

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}} = \frac{1}{R} [1 + (a/R)^2]^{-1/2} = \frac{1}{R} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{R}\right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{a}{R}\right)^4 - \frac{5}{16} \left(\frac{a}{R}\right)^6 + \dots \right\}$$

bulunur.

İki taraf birbiri ile karşılaştırılırsa

$$c_1 = c_3 = \dots = c_{2n+1} = 0$$

$$c_0 = 1, \quad c_2 = -\frac{1}{2}, \quad c_4 = \frac{3}{8}, \quad c_6 = -\frac{5}{16}, \quad \dots$$

elde edilir. Sonuç olarak bu yük dağılımının herhangi bir (R, θ) konumlu yerdeki potansiyeli

$$U(R, \theta) = \frac{Q}{R} \left\{ P_0(\cos \theta) - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{R}\right)^2 P_2(\cos \theta) + \frac{3}{8} \left(\frac{a}{R}\right)^4 P_4(\cos \theta) - \dots \right\}$$

olur.

3. YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

Son yıllarda diferansiyel ve integral denklemlerin bir kombinasyonu olan integro-diferansiyel denklemler üzerinde ilgi oldukça artmaktadır. Bunlar modern matematiğin önemli bir dalıdır ve mühendislik, mekanizm, potansiyel teori, elektrostatik v.s. gibi birçok uygulamalı alanda çok sık bir biçimde kullanılır (S. Yalçınbaş, M. Sezer, K. Maleknejad, N. Aghazadeh). Bu denklemlerin genellikle analitik olarak çözülmesi zor olduğundan nümerik metotlarla çözümleri araştırılmaktadır.

İntegro-diferansiyel denklemler, son yıllardaki araştırma çalışmalarında büyük bir ilgi uyandırmış olup, bu tip denklemleri çözmek için Ardışık Yaklaşım Metodu, Adomian Decomposition Metodu, Chebyshev ve Taylor Sıralama Metodları, Haar Wavelet Metodu, Wavelet-Galerkin Metodu, Monoton İterasyon Tekniği, Tau Metodu, Walsh serileri metodu gibi birçok nümerik metod kullanılmıştır (S. Yalçınbaş, M. Sezer, Y. Ren, B. Zhang, H. Qiao, K. Maleknejad, N. Aghazadeh, M. Razzaghi, S. Yousefi).

Diğer yandan ortogonal polinomların ise, matematiksel fizik, mühendislik ve bilgisayar bilimleri gibi uygulamalarda oldukça geniş bir alanda kullanıldığı gözlemlenmektedir.

3.1. Yüksek Mertebeden Lineer Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemlerinin Çözümleri için Legendre Polinom yaklaşımı

Bu kısımda, m . mertebeden lineer değişken katsayılı

$$\sum_{k=0}^m F_k(x) y^{(k)}(x) = g(x) + \int_{-1}^x K(x,t) y(t) dt, \quad -1 \leq x, t \leq 1 \quad (3.1)$$

Volterra integro-diferansiyel denkleminin

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk} y^{(k)}(-1) + b_{jk} y^{(k)}(1) + c_{jk} y^k(0)) = \alpha_j, \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.2)$$

ile verilen karışık koşullar altında yaklaşık çözümü Legendre polinomları cinsinden bir kesilmiş Legendre serisi formunda bulunacaktır. Burada $F_k(x)$, $g(x)$, $K(x,t)$ fonksiyonları $-1 \leq x, t \leq 1$ aralığında tanımlı sürekli fonksiyonlar ve $a_{jk}, b_{jk}, c_{jk}, j$ değişmez sabitlerdir. Bu amaç için diferansiyel, integral ve integro-diferansiyel denklemlerin polinom çözümleri, verilen Taylor (matris ve collocation) metotları (Sezer, 1994; Sezer, 1996; Nas vd., 2000; Yalçınbaş vd., 2002; Karamete vd., 2002; Sezer vd., 2006; Gülsu vd., 2005) ve Chebyshev (matris ve collocation) metotları (Sezer vd., 1996; Akyüz vd., 1999; Akyüz 2000) geliştirilerek “Legendre Collocation (sıralama)” adlı yeni bir yöntem sunulacak ve (3.1) koşullu (3.2) denkleme uygulanacaktır.

3.2. Materyal ve Metot

Bu çalışmadaki amacımız, (3.1) denkleminin (3.2) koşulları altında verilen

$$y(x) = \sum_{n=0}^N a_n P_n(x) \quad , \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (3.3)$$

formunda ifade edilebilen bir çözümünü bulmaktır. Böylece Legendre katsayıları a_n , $(n = 0,1,2,\dots,N)$ ’ler belirlenir. Buradaki $P_n(x)$ fonksiyonları

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n-2k}{n} x^{n-2k} \quad , \quad n = 0,1,2,\dots,N \quad (3.4)$$

formülü ile tanımlanan Legendre polinomlarıdır. Aynı zamanda, Legendre polinomlarının türevleri ile bileşik tekraralama formülleri

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x) \quad , \quad n \geq 1 \quad (3.5)$$

bağıntısı ile verilir.

3.3. Temel Matris Bağıntıları

(3.1) denkleminin diferansiyel kısmı

$$D(x) = \sum_{k=0}^m F_k(x) y^{(k)}(x) \quad (3.6)$$

ve Volterra İntegro Diferansiyel denkleminin integral kısmı

$$I_v = \int_{-1}^x K(x,t) y(t) dt \quad (3.7)$$

olmak üzere

$$D(x) = g(x) + I_v(x) \quad (3.8)$$

formunda yazılır.

İlk olarak $y(x)$ ve onun türevi $y^{(k)}(x)$ çözümleri ile, (3.7), (3.8) ve (3.2) deki karışık koşulları matris formuna dönüştürelim.

3.3.1. $y(x)$ ve $y^{(k)}(x)$ için Matris Bağıntıları

(3.3) ile tanımlanan $y(x)$ fonksiyonunun,

$$y(x) = \sum_{n=0}^N a_n P_n(x) \quad , \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (3.9)$$

formunda kesilmiş Legendre serisine açıldığını kabul edelim. Bu takdirde (3.8) ile ifade edilen çözüm ve onun türevleri

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(x) &= [P_0(x) \quad P_1(x) \quad \dots \quad P_N(x)] \\ \mathbf{P}^{(k)}(x) &= [P_0^{(k)}(x) \quad P_1^{(k)}(x) \quad \dots \quad P_N^{(k)}(x)] \end{aligned}$$

ve

$$\mathbf{A} = [a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_N]^T$$

olmak üzere matris formları sırasıyla

$$[y(x)] = \mathbf{P}(x)\mathbf{A} \quad \text{ve} \quad [y^{(k)}(x)] = \mathbf{P}^{(k)}(x)\mathbf{A} \quad (3.10)$$

şeklinde yazılabilir.

Diğer taraftan, (3.4) ve (3.5) Legendre yineleme formüllerini kullanarak ($n = 0,1,2,\dots,N$),

N 'in tek değerleri için

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 3 & 0 & 7 & \dots & 2N-3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & \dots & 0 & 2N-1 & 0 \end{bmatrix}$$

ve N 'in çift değerleri için

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 5 & 0 & \dots & 2N-3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 7 & \dots & 0 & 2N-1 & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathbf{P}^{(1)}(x) = \mathbf{P}(x)\Pi^T \quad (3.11)$$

matris denklemi bulunabilir.

Aynı zamanda, $P(x)$ matrisi ve onun türevi olan $P^{(k)}(x)$ arasındaki bağıntılar, (3.11) denkleminde açıkça görüldüğü gibi aşağıdaki sıra ile verilebilir.

$$\begin{aligned} P^{(1)}(x) &= P(x)\Pi^T \\ P^{(2)}(x) &= P^{(1)}(x)\Pi^T = P(x)(\Pi^T)^2 \\ &\vdots \\ P^{(k)}(x) &= P^{(k-1)}(x)(\Pi^T)^{k-1} = P(x)(\Pi^T)^k \end{aligned} \quad k = 0,1,2,\dots \quad (3.12)$$

Sonuç olarak (3.12) matris bağıntıları (3.10) denkleminde yerine yazılırsa, $y(x)$ ve $y^{(k)}(x)$ için matris bağıntıları

$$[y^k(x)] = \mathbf{P}(x)(\mathbf{\Pi}^T)^k \mathbf{A} \quad (3.13)$$

biçiminde bulunabilir.

3.3.2. Sıralama Noktalarını Esas Alan Matris Bağlıları

(3.2) koşulları ile verilen Problem (3.1)'in, (3.3) formundaki bir çözümünü bulmak için

$$x_i = -1 + \frac{2}{N}i, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (3.14)$$

ile tanımlanan Legendre sıralama noktalarına dayanan bir matris metodu kullanabiliriz. Bu metod bir Legendre sıralama metodudur. Burada (3.14) sıralama noktalarını kullanarak

$$D(x_i) = g(x_i) + I_v(x_i)$$

sistemini veya

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D(x_0) \\ D(x_1) \\ \vdots \\ D(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_v = \begin{bmatrix} I_v(x_0) \\ I_v(x_1) \\ \vdots \\ I_v(x_N) \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathbf{D} = \mathbf{G} + \mathbf{I}_v \quad (3.15)$$

matris denklemini elde ederiz.

3.3.3. $D(x)$ Diferansiyel Kısmı için Matris Bağlısı

$D(x)$ kısmını (3.14) sıralama noktalarını kullanarak matris formuna indirmek için önce

$$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} F_k(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F_k(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & F_k(x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}^{(k)} = \begin{bmatrix} y^{(k)}(x_0) \\ y^{(k)}(x_1) \\ \vdots \\ y^{(k)}(x_N) \end{bmatrix}$$

olmak üzere (3.15) denkleminde tanımlanan \mathbf{D} matrisi,

$$\mathbf{D} = \sum_{k=0}^m \mathbf{F}_k \mathbf{Y}^{(k)} \quad (3.16)$$

olarak yazılır. x_i , $i=0,1,2,\dots,N$ sıralama noktaları (3.13) bağıntısında yerine yazılırsa matris denklemleri,

$$[y^{(k)}(x_i)] = \mathbf{P}(x_i)(\mathbf{\Pi}^T)^k \mathbf{A} \quad , \quad k = 0,1,\dots,m \quad (3.17)$$

veya kısaca

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_0(x_0) & P_1(x_0) & \cdots & P_N(x_0) \\ P_0(x_1) & P_1(x_1) & \cdots & P_N(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_0(x_N) & P_1(x_N) & \cdots & P_N(x_N) \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathbf{Y}^{(k)} = \begin{bmatrix} y^{(k)}(x_0) \\ y^{(k)}(x_1) \\ \vdots \\ y^{(k)}(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(x_0) \\ P(x_1) \\ \vdots \\ P(x_N) \end{bmatrix} [(\mathbf{\Pi}^T)^k \mathbf{A}] = \mathbf{P}(\mathbf{\Pi}^T)^k \mathbf{A} \quad (3.18)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Sonuç olarak, (3.16) ve (3.17) matris formlarından, $D(x)$ diferansiyel kısmı için

$$\mathbf{D} = \sum_{k=0}^m \mathbf{F}_k \mathbf{P}(\mathbf{\Pi}^T)^k \mathbf{A} \quad (3.19)$$

temel matris bağıntısı elde edilir.

3.3.4. $I_v(x)$ Volterra İntegral Kısmı için Matris Bağıntısı

Şimdi (3.8) denklemdeki $I_v(x)$ Volterra İntegro Diferansiyel denkleminin integral kısmı için matris bağıntısını ifade edelim. $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu kesilmiş Legendre serileri ile,

$$K(x,t) = \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N k_{mn}^t P_m(x) P_n(t) \quad (3.20)$$

buradaki k_{mn}^t ,

$$k_{mn}^t = \frac{1}{m!n!} \frac{\partial^{m+n} K(0,0)}{\partial x^m \partial t^n}; \quad m, n = 0, 1, \dots, N$$

olmak üzere, kesilmiş Taylor serileri ile,

$$K(x, t) = \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N k_{mn}^t x^m t^n \quad (3.21)$$

olarak ifade edilebilir.

Önce (3.20) ve (3.21) ifadeleri matris formunda gösterilecek olursa, bu takdirde;

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(x) &= [P_0(x) \quad P_1(x) \quad \dots \quad P_N(x)] \\ \mathbf{X}(x) &= [1 \quad x \quad \dots \quad x^N] \\ \mathbf{K} &= [k_{mn}] \quad , \quad \mathbf{K}_t = [k_{mn}^t]; \quad m, n = 0, 1, \dots, N \end{aligned}$$

ve

$$y(x) = \mathbf{P}(x)\mathbf{A}$$

denklemini t değişkeni için

$$y(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{A} \quad (3.22)$$

Legendre açılımından

$$\begin{aligned} [K(x, t)] &= \mathbf{P}(x)\mathbf{K}\mathbf{P}^T(t) \\ [K(x, t)] &= \mathbf{X}(x)\mathbf{K}_t\mathbf{X}^T(t) \end{aligned} \quad (3.23)$$

ifadesi elde edilebilir.

Diğer yandan, $n = 0, 1, \dots, N$ için (3.4) ile verilen Legendre tekrarlama formülü

kullanılarak ve

$$\left[\frac{n}{2} \right] = \begin{cases} \frac{n}{2} & , \quad n \text{ çift} \\ \frac{n-1}{2} & , \quad n \text{ tek} \end{cases}$$

özelliğinden yararlanılarak

N çift ise,

$$\begin{bmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ \vdots \\ P_{N-1}(x) \\ P_N(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^0}{2^0} \binom{0}{0} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^1}{2^1} \binom{1}{0} \binom{2}{1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{(-1)^{(N-2)/2}}{2^{N-1}} \binom{N-1}{N-2/2} \binom{N}{N-1} & \cdots & \frac{(-1)^0}{2^{N-1}} \binom{N-1}{0} \binom{2N-2}{N-1} & 0 \\ \frac{(-1)^{N/2}}{2^N} \binom{N}{N/2} \binom{N}{N} & 0 & \cdots & 0 & \frac{(-1)^0}{2^N} \binom{N}{0} \binom{2N}{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^{N-1} \\ x^N \end{bmatrix}$$

N tek ise,

$$\begin{bmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ \vdots \\ P_{N-1}(x) \\ P_N(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^0}{2^0} \binom{0}{0} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^1}{2^1} \binom{1}{0} \binom{2}{1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{(-1)^{(N-1)/2}}{2^{N-1}} \binom{N-1}{N-1/2} \binom{N-1}{N-1} & 0 & \cdots & \frac{(-1)^0}{2^{N-1}} \binom{N-1}{0} \binom{2N-2}{N-1} & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^{(N-1)/2}}{2^N} \binom{N}{N-1/2} \binom{N+1}{N} & \cdots & 0 & \frac{(-1)^0}{2^N} \binom{N}{0} \binom{2N}{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^{N-1} \\ x^N \end{bmatrix}$$

matris denklemleri yazılabilmektedir. Burada,

N 'in çift değerleri için,

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^0}{2^0} \binom{0}{0} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^1}{2^1} \binom{1}{0} \binom{2}{1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{(-1)^{(N-2)/2}}{2^{N-1}} \binom{N-1}{N-2/2} \binom{N}{N-1} & \cdots & \frac{(-1)^0}{2^{N-1}} \binom{N-1}{0} \binom{2N-2}{N-1} & 0 \\ \frac{(-1)^{N/2}}{2^N} \binom{N}{N/2} \binom{N}{N} & 0 & \cdots & 0 & \frac{(-1)^0}{2^N} \binom{N}{0} \binom{2N}{N} \end{bmatrix}$$

N 'in tek değerleri için,

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^0}{2^0} \binom{0}{0} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^1}{2^1} \binom{1}{0} \binom{2}{1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{(-1)^{(N-1)/2}}{2^{N-1}} \binom{N-1}{N-1/2} \binom{N-1}{N-1} & 0 & \cdots & \frac{(-1)^0}{2^{N-1}} \binom{N-1}{0} \binom{2N-2}{N-1} & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^{(N-1)/2}}{2^N} \binom{N}{N-1/2} \binom{N+1}{N} & \cdots & 0 & \frac{(-1)^0}{2^N} \binom{N}{0} \binom{2N}{N} \end{bmatrix}$$

olmak üzere yukarıdaki matris denklemleri kısaca

$$\mathbf{P}^T(x) = \mathbf{\Phi} \mathbf{X}^T(x) \quad \text{veya} \quad \mathbf{P}(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{\Phi}^T \quad (3.24)$$

biçiminde gösterilebilir.

Diğer yandan (3.23) denklemleri birbirine eşit olduğundan yani

$$\mathbf{X}(x) \mathbf{K}_t \mathbf{X}^T(t) = \mathbf{P}(x) \mathbf{K} \mathbf{P}^T(x)$$

ile ifade edilebileceğinden ve bu özellikler (3.24) denkleminde kullanılarak yeniden düzenlenirse

$$\mathbf{X}(x) \mathbf{K}_t \mathbf{X}^T(t) = \mathbf{X}(x) \mathbf{\Phi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Phi} \mathbf{X}^T(t)$$

bulunur. Denklemin her iki tarafını sağdan $\mathbf{X}(x)$ ve soldan $\mathbf{X}^T(t)$ ile çarptığımızda denklem

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Phi} \quad (3.25)$$

şekline dönüştürülür.

Burada (3.25) denklemini ele alırsa bu takdirde, Legendre ile $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonunun Taylor katsayıları arasındaki bağıntıyı veren

$$\mathbf{K} = (\mathbf{\Phi}^{-1})^T \mathbf{K}_t \mathbf{\Phi}^{-1} \quad (3.26)$$

matris bağıntısı elde edilir.

$K(x,t)$ ve $y(t)$ fonksiyonlarına karşılık gelen (3.22) ve (3.23) denklemleri (3.7) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} [I_v(x)] &= \int_{-1}^x K(x,t) y(t) dt \\ &= \int_{-1}^x \mathbf{P}(x) \mathbf{K} \mathbf{P}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{A} dt \\ &= \mathbf{P}(x) \mathbf{K} \left\{ \int_{-1}^x \mathbf{P}^T(t) \mathbf{P}(t) dt \right\} \mathbf{A} \\ &= \mathbf{P}(x) \mathbf{K} \left\{ \int_{-1}^x \mathbf{\Phi} \mathbf{X}^T(t) \mathbf{X}(t) \mathbf{\Phi}^T dt \right\} \mathbf{A} \end{aligned}$$

bulunur.

Burada

$$\mathbf{H}(x) = [h_{ij}(x)] = \int_{-1}^x \mathbf{X}^T(t) \mathbf{X}(t) dt$$

$$h_{ij}(x) = \frac{x^{i+j+1} - (-1)^{i+j+1}}{i+j+1}$$

olarak alınır, böylece

$$[I_v(x)] = \mathbf{P}(x) \mathbf{K} \mathcal{D} \mathbf{H}(x) \mathcal{D}^T \mathbf{A} \quad (3.27)$$

elde edilir. Bu durumda $x = x_i$ sıralama (collocation) noktaları için (3.27) denklemi

$$[I_v(x_i)] = \mathbf{P}(x_i) \mathbf{K} \mathcal{D} \mathbf{H}(x_i) \mathcal{D}^T \mathbf{A} \quad , \quad i = 0, 1, \dots, N$$

$$[I_v(x_i)] = \mathbf{X}(x_i) \mathcal{D}^T \mathbf{K} \mathcal{D} \mathbf{H}(x_i) \mathcal{D}^T \mathbf{A}$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\mathbf{M} = \mathcal{D}^T \mathbf{K} \mathcal{D} \quad (3.28)$$

olarak tanımlanırsa, o halde

$$[I_v(x_i)] = \mathbf{X}(x_i) \mathbf{M} \mathbf{H}(x_i) \mathcal{D}^T \mathbf{A} \quad (3.29)$$

veya

$$\begin{bmatrix} I_v(x_0) \\ I_v(x_1) \\ \vdots \\ I_v(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{X}(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{M} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{H}(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{H}(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{D}^T \\ \mathcal{D}^T \\ \vdots \\ \mathcal{D}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}$$

bulunur. Burada,

$$\mathbf{I}_v = \begin{bmatrix} I_v(x_0) \\ I_v(x_1) \\ \vdots \\ I_v(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad \bar{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{X}(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^2},$$

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{M} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{M} \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}, \quad \bar{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{H}(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{H}(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2},$$

$$\bar{\mathcal{D}} = [\mathcal{D}^T \quad \mathcal{D}^T \quad \cdots \quad \mathcal{D}^T]_{(N+1)^2 \times (N+1)}^T, \quad \mathbf{A} = [a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_N]_{(N+1) \times 1}^T,$$

olmak üzere

$$\mathbf{I}_v = \bar{\mathbf{X}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathcal{D}} \mathbf{A} \quad (3.30)$$

elde edilir.

Bulunan (3.19) ve (3.27) denklemleri (3.15) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{G} + \mathbf{I}_v \\ \sum_{k=0}^m \mathbf{F}_k \mathbf{P}(\Pi^T)^k \mathbf{A} &= \mathbf{G} + \bar{\mathbf{X}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathcal{D}} \mathbf{A} \\ \left\{ \sum_{k=0}^m \mathbf{F}_k \mathbf{P}(\Pi^T)^k - \bar{\mathbf{X}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathcal{D}} \right\} \mathbf{A} &= \mathbf{G} \end{aligned} \quad (3.31)$$

temel matris denklemini elde edilir. Bu denklemin

$$\begin{aligned} \mathbf{W} = [w_{pq}] &= \sum_{k=0}^m \mathbf{F}_k \mathbf{P}(\Pi^T)^k - \bar{\mathbf{X}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathcal{D}}, \quad p, q = 0, 1, \dots, N \\ \mathbf{G} &= [g(x_0) \quad g(x_1) \quad \cdots \quad g(x_N)]^T \end{aligned}$$

olmak üzere (3.31) denklemini

$$\mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad \text{veya} \quad [\mathbf{W}; \mathbf{G}] \quad (3.32)$$

cebirsel sistemine dönüştürülür ve (3.2) denkleminde gösterildiği gibi koşullar yerine yazılarak

$$\mathbf{A} = [a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_N]^T$$

bilinmeyen Legendre katsayılarının oluşturduğu sütun matrisi bulunur ve

$$[y(x)] = \mathbf{P}(x) \mathbf{A}$$

şeklinde Legendre polinom çözümü elde edilir.

3.3.5. Karışık Koşullar için Matris Bağıntısı

(3.2) denkleminde tanımlanan

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk} y^{(k)}(-1) + b_{jk} y^{(k)}(1) + c_{jk} y^k(0)) = \quad_j, \quad j = 0, 1, \dots, m-1$$

koşul denkleminde (3.17) ile verilen ifade kullanılarak

$$[y^{(k)}(x_i)] = \mathbf{P}(x_i)(\Pi^T)^k \mathbf{A}$$

$$[y^{(k)}(x_i)] = \mathbf{X}(x_i)(\Pi^T)^k \mathbf{D}^T \mathbf{A}$$

$$y^{(k)}(-1) = \mathbf{X}(-1)(\Pi^T)^k \mathbf{D}^T \mathbf{A}$$

$$y^{(k)}(1) = \mathbf{X}(1)(\Pi^T)^k \mathbf{D}^T \mathbf{A}$$

$$y^{(k)}(0) = \mathbf{X}(0)(\Pi^T)^k \mathbf{D}^T \mathbf{A}$$

denklemleri bulunur. Bu denklemler (3.2) de tanımlanan koşul denkleminde yerine yazılırsa

$$\mathbf{U}_j = \sum_{k=0}^{m-1} [a_{jk} \mathbf{X}(-1) + b_{jk} \mathbf{X}(1) + c_{jk} \mathbf{X}(0)] (\Pi^T)^k \mathbf{D}^T \mathbf{A}$$

$$\mathbf{U}_j \equiv [u_{j0} \quad u_{j1} \quad \cdots \quad u_{jm-1}] \quad (3.33)$$

olmak üzere (3.32) matris sistemi $j = 0, 1, \dots, m-1$ için

$$\mathbf{U}_0 \mathbf{A} = [\quad]_0$$

$$\mathbf{U}_1 \mathbf{A} = [\quad]_1$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{U}_j \mathbf{A} = [\quad]_j$$

veya artırılmış matris formlarından

$$\mathbf{U}_j \mathbf{A} = [\quad]_j \quad \text{veya} \quad [\mathbf{U}_j; \quad]_j, \quad j = 0, 1, \dots, m-1$$

olarak ifade edilir. O halde koşullarla ilgili artırılmış matris

$$[\mathbf{U}_j; \quad]_j = \begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0N} & ; & 0 \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} & ; & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & \cdots & u_{m-1,N} & ; & m-1 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

şeklinde yazılabilir.

(3.1) denkleminin (3.2) şartları altındaki çözümünü elde etmek için (3.34) satır matrisi (3.32) matrisinin son m tane satırı ile (veya herhangi m tane satırı ile) yer değiştirilerek yeni

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} & ; & g(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} & ; & g(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ w_{N-m,0} & w_{N-m,1} & \cdots & w_{N-m,N} & ; & g(x_{N-m}) \\ u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0N} & ; & 0 \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} & ; & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & \cdots & u_{m-1,N} & ; & m-1 \end{bmatrix}$$

artırılmış matrisi bulunur. Eğer $\text{rank } \tilde{\mathbf{W}} = \text{rank } [\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = N + 1$ ise, bu takdirde

$$\mathbf{A} = (\tilde{\mathbf{W}})^{-1} \tilde{\mathbf{G}}$$

yazılabilir. Böylece a_n , ($n = 0, 1, \dots, N$) katsayıları (3.35) denklemi ile belirlenmiş olur. Aynı zamanda (3.32) sistemi yardımıyla bazı özel çözümler bulunabilir. Eğer $k = 0$ ise, denklem yüksek mertebeden lineer diferansiyel denklem haline gelir. $k \neq 0$ için $P_k(x) = 0$ ise denklem Volterra integral denklemine dönüşür.

3.4. Çözümün Doğruluğu

Metodun doğruluğunu kolaylıkla kontrol edebiliriz. (3.3)'teki kesilmiş Legendre serisi, (3.1) denkleminin yaklaşık bir çözümü olup bu çözüm denklemini sağlamalıdır.

Bu takdirde her bir $x_i \in [-1, 1]$ için

$$E(x_i) = |D(x_i) - g(x_i) - I_v(x_i)| \cong 0$$

veya

$$E(x_i) \leq 10^{-k_i}, \quad (k_i \text{ herhangi bir pozitif tamsayı})$$

olmalıdır. Eğer $\max(10^{-k_i}) = 10^{-k}$, (k_i herhangi bir pozitif tamsayı) önceden belirlenmiş ise, x_i noktalarının her birindeki $E(x_i)$ farkı belirlenen 10^{-k} dan daha küçük oluncaya kadar N kesme sınırı artırılabilir.

Diğer taraftan, hata fonksiyonu

$$E_N(x) = \left| \sum_{k=0}^m F_k Y_N^{(k)}(x) - g(x) - I_v(x) \right|$$

formülü ile hesaplanabilir. Eğer N yeteri derecede büyük ise o zaman $E_N(x) \rightarrow 0$, bu durumda hata gittikçe küçülür.

4. YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ İLE İLGİLİ NÜMERİK UYGULAMALAR

Aşağıdaki örneklerle, verilen metodun doğruluğu gösterilmeye çalışılacaktır.

Örnek 4.1. 2. mertebeden lineer

$$y''(x) + x y'(x) - xy(x) = 7x + 8x^2 + 7x^3 - 3x^4 + 4, \quad -1 \leq x \leq 1$$

diferansiyel denklemini ve

$$y(0) = 7, \quad y'(0) = -4$$

koşullarını göz önüne alalım ve bu denklemin $y(x)$ çözümüne

$$y(x) = \sum_{n=0}^4 a_n P_n(x)$$

sonlu Legendre serisiyle yaklaşalım. ($N = 4$ ikinci dereceli Legendre polinomları cinsinden). Burada

$$F_0(x) = -x, \quad F_1(x) = x, \quad F_2(x) = 1, \quad g(x) = 7x + 8x^2 + 7x^3 - 3x^4 + 4$$

olup $N = 4$ için çözümü arayalım. Bu durumda

$$x_i = -1 + \frac{2}{N}i = -1 + \frac{2}{4}i; \quad i = 0,1,2,3,4$$

olup sıralama noktaları

$$x_0 = -1, \quad x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{1}{2}, \quad x_4 = 1$$

olarak bulunur. Şimdi (3.16) da tanımlanan \mathbf{F}_0 , \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 matrisleri,

$$\mathbf{F}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve (3.18) de tanımlanan \mathbf{P} matrisi ile (3.11) de tanımlanan $\mathbf{\Pi}$ matrisi de

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1/2 & -1/8 & 7/16 & -37/128 \\ 1 & 0 & -1/2 & 0 & 3/8 \\ 1 & 1/2 & -1/8 & -7/16 & -37/128 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Pi}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\mathbf{\Pi}^T)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Böylece diferansiyel kısım ile ilgili olan matris formu (3.19) tanımlanan

$$\mathbf{D} = \sum_{k=0}^m \mathbf{F}_k \mathbf{P} (\mathbf{\Pi}^T)^k \mathbf{A} = \mathbf{F}_0 \mathbf{P} (\mathbf{\Pi}^T)^0 + \mathbf{F}_1 \mathbf{P} (\mathbf{\Pi}^T)^1 + \mathbf{F}_2 \mathbf{P} (\mathbf{\Pi}^T)^2$$

olduğundan

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 & -22 & 56 \\ 1/2 & -3/4 & 59/16 & -239/32 & 1203/256 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -15/2 \\ -1/2 & 1/4 & 61/16 & 253/32 & 1277/256 \\ -1 & 0 & 5 & 20 & 54 \end{bmatrix}$$

biçiminde bulunur. Sorunun integral kısmı olmadığı için $\mathbf{D} = \mathbf{W}$ dir. Böylece

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 & -22 & 56 \\ 1/2 & -3/4 & 59/16 & -239/32 & 1203/256 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -15/2 \\ -1/2 & 1/4 & 61/16 & 253/32 & 1277/256 \\ -1 & 0 & 5 & 20 & 54 \end{bmatrix}$$

$g(x) = 7x + 8x^2 + 7x^3 - 3x^4 + 4$ fonksiyonuna karşılık gelen \mathbf{G} matrisi de

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ g(x_2) \\ g(x_3) \\ g(x_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 23/16 \\ 4 \\ 163/16 \\ 23 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Daha sonra verilen koşullar ile ilgili satır matrisleri

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}_0 &= [1 \ 0 \ -1/2 \ 0 \ 3/8 \ ; \ 7] \\ \tilde{\mathbf{U}}_1 &= [0 \ 1 \ 0 \ -3/2 \ 0 \ ; \ -4] \end{aligned}$$

olarak bulunur. \mathbf{W} ve \mathbf{G} matrislerinin son iki satırları yerine koşullarla ilgili satır matrisleri yazılırsa

$$\tilde{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 & -22 & 56 \\ 1/2 & -3/4 & 59/16 & -239/32 & 1203/256 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -15/2 \\ 1 & 0 & -1/2 & 0 & 3/8 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} -5 \\ 23/16 \\ 4 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 & -22 & 56 & ; & -5 \\ 1/2 & -3/4 & 59/16 & -239/32 & 1203/256 & ; & 23/16 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -15/2 & ; & 4 \\ 1 & 0 & -1/2 & 0 & 3/8 & ; & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & 0 & ; & -4 \end{bmatrix}$$

artırılmış matrisi elde edilir. Böylece Legendre katsayıları

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (\tilde{\mathbf{W}})^{-1} \tilde{\mathbf{G}} \\ &= \begin{bmatrix} 11/410 & -16/205 & 497/2460 & 83/82 & -1/205 \\ 63/820 & -408/1025 & 2709/8200 & 501/4100 & 1753/2050 \\ 22/287 & -64/287 & 374/861 & 10/287 & -4/287 \\ 21/410 & -272/1025 & 903/4100 & 167/2050 & -99/1025 \\ 44/1435 & -128/1435 & 58/1435 & 4/287 & -8/1435 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 23/16 \\ 4 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23/3 \\ -11/5 \\ 4/3 \\ 6/5 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu katsayılar (3.3) de yerine yazılırsa verilen koşullar altındaki

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^3 a_n P_n(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) + a_3 P_3(x) + a_4 P_4(x) \\ &= \left(\frac{23}{3}\right) \cdot 1 + \left(-\frac{11}{5}\right) \cdot x + \left(\frac{4}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}(3x^2 - 1)\right) + \left(\frac{6}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)\right) \\ &\quad + (0) \cdot \left(\frac{1}{8}\right) \cdot (35x^4 - 30x^2 + 3) \end{aligned}$$

ve sonuç olarak ise

$$y(x) = 3x^3 + 2x^2 - 4x + 7$$

formundaki tam çözüm elde edilir.

Örnek 4.2. 4. mertebeden lineer

$$y^{(4)}(x) + (1-x)y(x) = 24 + x^2(1-x)^3, \quad -1 \leq x \leq 1$$

diferansiyel denklemini ve

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0$$

koşullarını göz önüne alalım (Yalçınbaş, S., 2000) ve $y(x)$ çözümüne

$$y(x) = \sum_{n=0}^3 a_n P_n(x)$$

sonlu Legendre serisiyle ($N=4$ ikinci dereceli Legendre Polinomları cinsinden) yaklaşalım.

$$F_0(x) = (1-x), \quad F_1(x) = 0, \quad F_2(x) = 0, \quad F_3(x) = 0, \quad F_4(x) = 1 \quad g(x) = 24 + x^2(1-x)$$

olup $N=4$ için

$$x_i = -1 + \frac{2}{N}i = -1 + \frac{2}{2}i; \quad i = 0,1,2,3,4$$

$$x_0 = -1, \quad x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{1}{2}, \quad x_4 = 1$$

bulunur. (3.16) da tanımlanan $\mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4$ matrisleri,

$$\mathbf{F}_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve (3.18) de tanımlanan \mathbf{P} matrisi ile (3.11) de tanımlanan $\mathbf{\Pi}$ matrisi de

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1/2 & -1/8 & 7/16 & -37/128 \\ 1 & 0 & -1/2 & 0 & 3/8 \\ 1 & 1/2 & -1/8 & -7/16 & -37/128 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Böylece diferansiyel kısım ile ilgili olan matris formu

$$\mathbf{D} = \sum_{k=0}^m \mathbf{F}_k \mathbf{P} (\mathbf{\Pi}^T)^k \mathbf{A} = \mathbf{F}_0 \mathbf{P} (\mathbf{\Pi}^T)^0 + \mathbf{F}_1 \mathbf{P} (\mathbf{\Pi}^T)^1 + \mathbf{F}_2 \mathbf{P} (\mathbf{\Pi}^T)^2$$

şeklinde olduğundan

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & -2 & 107 \\ 3/2 & -3/4 & -3/16 & 21/32 & 26769/256 \\ 1 & 0 & -1/2 & 0 & 843/8 \\ 1/2 & 1/4 & -1/16 & -7/32 & 26843/256 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 105 \end{bmatrix}$$

diferansiyel denklemin integral kısmı olmadığı için $\mathbf{D} = \mathbf{W}$ dir.

$g(x) = 24 + x^2(1-x)$ fonksiyonuna karşılık gelen \mathbf{G} matrisi ise

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ g(x_2) \\ g(x_3) \\ g(x_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 1537/64 \\ 24 \\ 1537/64 \\ 25 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Daha sonra verilen koşullar ile ilgili satır matrisleri

$$\tilde{\mathbf{U}}_0 = [1 \ 0 \ -1/2 \ 0 \ 3/8 \ ; \ 0]$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_1 = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ ; \ 0]$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_2 = [0 \ 1 \ 0 \ -3/2 \ 0 \ ; \ 0]$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_3 = [0 \ 1 \ 3 \ 6 \ 10 \ ; \ 0]$$

şeklindedir. Buradan Legendre katsayıları

$$\mathbf{A} = (\tilde{\mathbf{W}})^{-1} \tilde{\mathbf{G}}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/60 & 2/15 & 5/6 & -8/15 & -4/15 \\ -3/80 & 9/10 & -33/40 & 13/10 & 9/20 \\ 13/336 & -71/42 & 271/168 & -43/42 & -43/84 \\ -1/40 & 3/5 & -11/20 & 1/5 & 3/10 \\ 1/140 & 2/35 & -1/14 & 2/35 & 1/35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 32 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8/15 \\ -6/5 \\ 26/21 \\ -4/5 \\ 8/35 \end{bmatrix}$$

biçiminde hesaplanır. Bu katsayılar yerine yazılırsa

$$y(x) = \sum_{n=0}^3 a_n P_n(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) + a_3 P_3(x) + a_4 P_4(x)$$

$$= \left(\frac{8}{15}\right) \cdot 1 + \left(-\frac{6}{5}\right) \cdot x + \left(\frac{26}{21}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}(3x^2 - 1)\right) + \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)\right)$$

$$+ \left(\frac{8}{35}\right) \cdot \left(\frac{1}{8}\right) \cdot (35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$y(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$$

formundaki tam çözüm elde edilir.

Örnek 4.3. $y'' + xy' - xy = \frac{223}{6}x + \frac{27}{2}x^3 - \frac{10}{3}x^4 - x^5 - 4 + \int_{-1}^x xy(t)dt,$

$y(0) = -5, \ y'(0) = 1$ şartları ile verilen ikinci mertebeden lineer Volterra integro-diferansiyel denklemini göz önüne alalım.

Burada $F_2(x) = 1$, $F_1(x) = x$, $F_0(x) = -x$, $g(x) = 223/6x + 27/2x^3 - 10/3x^4 - x^5 - 4$,
 $= 1$, $K(x,t) = x$ olup $N = 3$ olarak denklemin çözümünü araştıralım. Bu durumda

$$x_i = -1 + \frac{2}{N}i = -1 + \frac{2}{3}i ; i = 0,1,2,3$$

olup sıralama noktaları $x_0 = -1$, $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = 1$ olarak belirlenir. (3.16) da tanımlanan \mathbf{F}_0 , \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 matrisleri,

$$\mathbf{F}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve (3.18) de tanımlanan \mathbf{P} matrisi ile (3.11) de tanımlanan $\mathbf{\Pi}$ matrisi ise

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1/3 & -1/3 & 11/27 \\ 1 & 1/3 & -1/3 & -11/27 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Böylece diferansiyel kısım ile ilgili olan matris formu

$$\mathbf{D} = \sum_{k=0}^m \mathbf{F}_k \mathbf{P} (\mathbf{\Pi}^T)^k \mathbf{A} = \mathbf{F}_0 \mathbf{P} (\mathbf{\Pi}^T)^0 + \mathbf{F}_1 \mathbf{P} (\mathbf{\Pi}^T)^1 + \mathbf{F}_2 \mathbf{P} (\mathbf{\Pi}^T)^2$$

olduğundan

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 & -22 \\ 1/3 & -4/9 & 29/9 & -376/81 \\ -1/3 & 2/9 & 31/9 & 398/81 \\ -1 & 0 & 5 & 20 \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilir. Daha sonra (3.20) de verilen çekirdek ile ilgili olan matris formunu bulmak için ($K(x,t) = x$ olmak üzere)

$$k_{mn}^t = \frac{1}{m!n!} \frac{\partial^{m+n} K(0,0)}{\partial x^m \partial t^n}; m, n = 0,1,\dots,N$$

ifadesinden faydalanarak

$$k'_{00} = \frac{1}{0!0!} \frac{\partial^0 K(0,0)}{\partial x^0 \partial t^0} = 0, k'_{01} = \frac{1}{0!1!} \frac{\partial^1 K(0,0)}{\partial x^0 \partial t^1} = 0, k'_{02} = \frac{1}{0!2!} \frac{\partial^2 K(0,0)}{\partial x^0 \partial t^2} = 0, k'_{03} = \frac{1}{0!3!} \frac{\partial^3 K(0,0)}{\partial x^0 \partial t^3} = 0$$

$$k'_{10} = \frac{1}{1!0!} \frac{\partial^1 K(0,0)}{\partial x^1 \partial t^0} = 1, k'_{11} = \frac{1}{1!1!} \frac{\partial^2 K(0,0)}{\partial x^1 \partial t^1} = 0, k'_{12} = \frac{1}{1!2!} \frac{\partial^3 K(0,0)}{\partial x^1 \partial t^2} = 0, k'_{13} = \frac{1}{1!3!} \frac{\partial^4 K(0,0)}{\partial x^1 \partial t^3} = 0$$

$$k'_{20} = \frac{1}{2!0!} \frac{\partial^2 K(0,0)}{\partial x^2 \partial t^0} = 0, k'_{21} = \frac{1}{2!1!} \frac{\partial^3 K(0,0)}{\partial x^2 \partial t^1} = 0, k'_{22} = \frac{1}{2!2!} \frac{\partial^4 K(0,0)}{\partial x^2 \partial t^2} = 0, k'_{23} = \frac{1}{2!3!} \frac{\partial^5 K(0,0)}{\partial x^2 \partial t^3} = 0$$

$$k'_{30} = \frac{1}{3!0!} \frac{\partial^3 K(0,0)}{\partial x^3 \partial t^0} = 0, k'_{31} = \frac{1}{3!1!} \frac{\partial^4 K(0,0)}{\partial x^3 \partial t^1} = 0, k'_{32} = \frac{1}{3!2!} \frac{\partial^5 K(0,0)}{\partial x^3 \partial t^2} = 0, k'_{33} = \frac{1}{3!3!} \frac{\partial^6 K(0,0)}{\partial x^3 \partial t^3} = 0$$

değerleri elde edilir. Böylece (3.25) deki \mathbf{K}_t matrisi

$$\mathbf{K}_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde olup, N tek olduğu için (3.25) deki \mathcal{D} matrisi de

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & -3/2 & 0 & 5/2 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır. Bunlar yardımı ile (3.20) ile tanımlanan $\mathbf{K} = (\mathcal{D}^{-1})^T \mathbf{K}_t \mathcal{D}^{-1}$ ifadesi

kullanılarak \mathbf{K} matrisi

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Daha sonra (3.28) de tanımlanan \mathbf{M} matrisi

$$\mathbf{M} = \mathcal{D}^T \mathbf{K} \mathcal{D}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde bulunur.

Şimdi diferansiyel denklemin integral kısmı için $I_v = \bar{\mathbf{X}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{D}} \mathbf{A}$ şeklinde ifade edilen matrisleri oluşturalım.

$\bar{\mathbf{X}}$ matrisi için $x_0 = -1, x_1 = -1/3, x_2 = 1/3, x_3 = 1$ noktalarından yararlanarak $\mathbf{X}(x_0), \mathbf{X}(x_1), \mathbf{X}(x_2), \mathbf{X}(x_3)$ matrislerini bularak 4×16 tipindeki $\bar{\mathbf{X}}$ matrisini teşkil edelim. Bunun için

$$\mathbf{X}(x) = [1 \quad x \quad \cdots \quad x^N]$$

matrisinden

$$\mathbf{X}(x_0) = [1 \quad -1 \quad 1 \quad -1]$$

$$\mathbf{X}(x_1) = [1 \quad -1/3 \quad 1/9 \quad -1/27]$$

$$\mathbf{X}(x_2) = [1 \quad 1/3 \quad 1/9 \quad 1/27]$$

$$\mathbf{X}(x_3) = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

olup, böylece

$$\bar{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(x_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X}(x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{X}(x_3) \end{bmatrix}_{4 \times 16}$$

bulunur. Buradan da

$$\bar{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/9 & -1/27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/9 & 1/27 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Diğer yandan $\bar{\mathbf{M}}$ matrisi

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{M} \end{bmatrix}_{16 \times 16}$$

formunda olduğundan \mathbf{M} matrisi de, yerine yazılarak 16×16 tipinde $\bar{\mathbf{M}}$ matrisi

$$\mathbf{H}(x_3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 2/5 \\ 2/3 & 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 & 2/7 \end{bmatrix}$$

biçiminde bulunur ve bulunan değerler $\bar{\mathbf{H}}$ matrisinde yerine yazılırsa

$$\bar{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(x_0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{H}(x_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{H}(x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{H}(x_3) \end{bmatrix}_{16 \times 16}$$

şeklinde 16×16 tipindeki $\bar{\mathbf{H}}$ matrisi oluşturulur.

Diğer yandan, \mathcal{D} matrisinin transpozu alınarak 16×4 tipindeki $\bar{\mathcal{D}}$ matrisi ise

$$\bar{\mathcal{D}} = [\mathcal{D}^T \quad \mathcal{D}^T \quad \dots \quad \mathcal{D}^T]_{(N+1)^2 \times (N+1)}^T$$

şeklinde elde edilir.

Böylece elde edilen $(\bar{\mathbf{X}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathcal{D}})$ bu dört matris çarpıldığında

$$\mathbf{I}_v = \bar{\mathbf{X}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2/9 & 4/27 & -4/81 & -4/243 \\ 4/9 & -4/27 & -4/81 & 4/243 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \sum_{k=0}^m \mathbf{F}_k \mathbf{P} (\Pi^T)^k - \bar{\mathbf{X}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathcal{D}} \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G}$$

$$\mathbf{W} = \sum_{k=0}^m \mathbf{F}_k \mathbf{P} (\Pi^T)^k - \bar{\mathbf{X}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathcal{D}}$$

formülü yardımı ile

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 & -22 \\ 5/9 & -16/27 & 265/81 & -1124/243 \\ -7/9 & 10/27 & 283/81 & 1190/243 \\ -3 & 0 & 5 & 20 \end{bmatrix}$$

olarak hesap edilir. Daha sonra verilen koşullar ile ilgili satır matrisleri

$$\tilde{\mathbf{U}}_0 = [1 \quad 0 \quad -1/2 \quad 0 \quad ; \quad -1]$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_1 = [0 \quad 1 \quad 0 \quad -3/2 \quad ; \quad 3]$$

biçiminde olup, $g(x) = 223/6x + 27/2x^3 - 10/3x^4 - x^5 - 4$ fonksiyonuna karşılık gelen \mathbf{G} matrisi de

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ g(x_2) \\ g(x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -57 \\ -457/27 \\ 2149/243 \\ 127/3 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. \mathbf{W} ve \mathbf{G} matrislerinin son iki satırları yerine koşullarla ilgili satır matrisleri yazılırsa (3.32) de tanımlanan $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ matrisi

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 & -22 & ; & -57 \\ 5/9 & -16/27 & 265/81 & -1124/243 & ; & -457/27 \\ -7/9 & 10/27 & 283/81 & 1190/243 & ; & 2149/243 \\ -3 & 0 & 5 & 20 & ; & 127/3 \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilir. \mathbf{W} ve \mathbf{G} matrislerinin son iki satırları yerine koşullarla ilgili satır matrisleri yazılırsa

$$\tilde{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 & -22 \\ 5/9 & -16/27 & 265/81 & -1124/243 \\ 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 \end{bmatrix} \text{ ve } \tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} -57 \\ -457/27 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

matrisleri bulunur. Böylece Legendre katsayıları

$$\mathbf{A} = (\tilde{\mathbf{W}})^{-1} \tilde{\mathbf{G}}$$

$$= \begin{bmatrix} -268/4605 & 81/307 & 4198/4605 & 184/4605 \\ -69/614 & 729/3070 & -6/307 & 1406/1535 \\ -536/4605 & 162/307 & -814/4605 & 368/4605 \\ -23/307 & 243/1535 & -4/307 & -86/1535 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -57 \\ -457/27 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17/3 \\ 17/5 \\ -4/3 \\ 8/5 \end{bmatrix}$$

biçiminde hesaplanır. Bu katsayılar (3.3) de yerine yazılırsa verilen koşullar altında

$$y(x) = \sum_{n=0}^3 a_n P_n(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) + a_3 P_3(x)$$

$$y(x) = \left(-\frac{17}{3}\right) + \left(\frac{17}{5}\right)x + \left(-\frac{4}{3}\right)\left(\frac{1}{2}(3x^2 - 1)\right) + \left(\frac{8}{5}\right)\left(\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)\right)$$

$$y(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 5$$

tam çözüm elde edilir.

Örnek 4.4. $y'' - xy' + xy = e^x - x - x^2 + \int_{-1}^x xe^{-t} y(t) dt$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ koşulları

ile verilen ikinci mertebeden lineer Volterra integro-diferansiyel denklemini göz önüne alalım.

Burada $F_2(x) = 1$, $F_1(x) = -x$, $F_0(x) = x$, $g(x) = e^x - x - x^2$, $\lambda = 1$, $K(x,t) = xe^{-t}$ olup önceki örneklerde yapılan işlemler ile farklı N değerleri için bulunan yaklaşık çözümler aşağıdaki gibidir.

$N = 3$ için,

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^3 a_n P_n(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) + a_3 P_3(x) \\ &= 1.14971893 + (1.05488913)x + (0.299437864)\left(\frac{1}{2}(3x^2 - 1)\right) \\ &\quad + (3.65927527 \times 10^{-2})\left(\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)\right) \\ y(x) &= 1.0x + 0.449156796 x^2 + 9.14818818 \times 10^{-2} x^3 + 0.999999998 \end{aligned}$$

$N = 5$ için,

$$\begin{aligned} y(x) &= 1.00002932x + 0.500384543 x^2 + 0.16702008x^3 + 4.02502108 \times 10^{-2} x^4 \\ &\quad + 5.66471550 \times 10^{-3} x^5 + 0.999998755 \end{aligned}$$

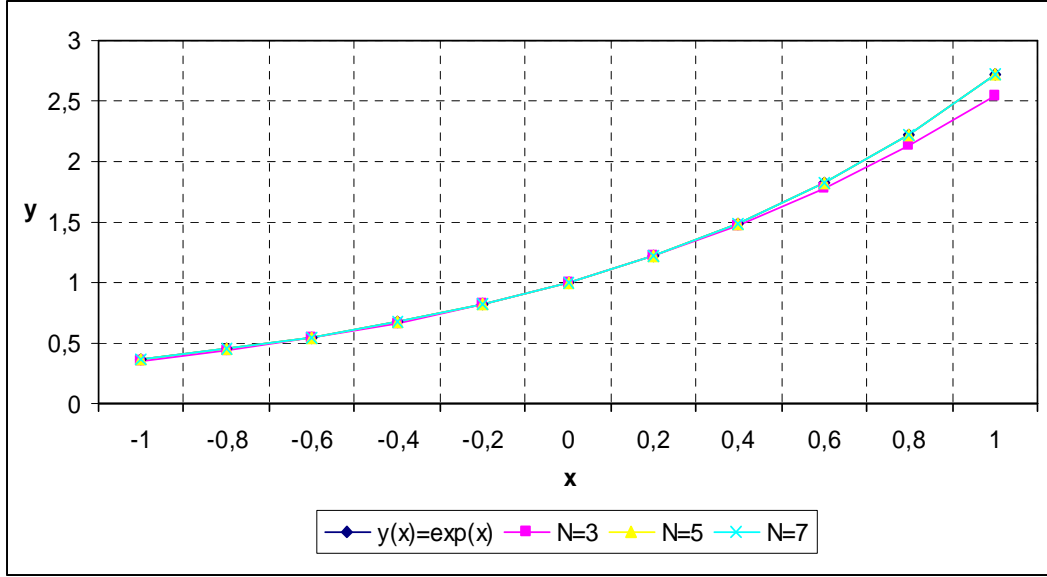
$N = 7$ için de,

$$\begin{aligned} y(x) &= 1.0x + 0.500000056 x^2 + 0.166598310 x^3 + 4.16804703 \times 10^{-2} x^4 + 8.42180965 \times 10^{-3} x^5 \\ &\quad + 1.37594895 \times 10^{-3} x^6 + 1.55146747 \times 10^{-4} x^7 + 0.999999997 \end{aligned}$$

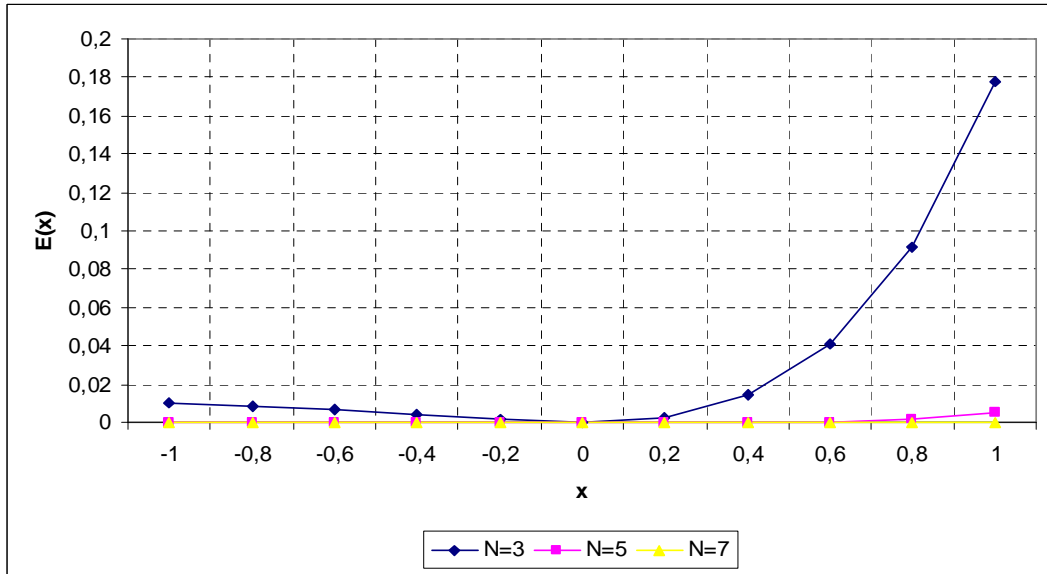
olarak elde edilir. Böylece N 'in farklı değerleri için bulunan çözümlerle denklemin tam çözümü olan $y = e^x$ 'in $[-1,1]$ aralığındaki karşılaştırılması aşağıdaki Tablo 4.1. , Grafik 4.1. ve Grafik 4.2. de verilmiştir

Tablo 4.1. Örnek 4.4'ün $N = 3$, $N = 5$ ve $N = 7$ için Nümerik Sonuçları

x_i	Tam çözüm $y(x) = e^x$	Legendre Collocation					
		$y(x_i), N = 3$	$E(x_i), N = 3$	$y(x_i), N = 5$	$E(x_i), N = 5$	$y(x_i), N = 7$	$E(x_i), N = 7$
-1	0.36787944	0.357674912	1.0204528E-02	0.367908188	2.8748E-06	0.367881206	1.766E-06
-0.8	0.44932896	0.440621624	8.707336E-03	0.449326193	2.767E-06	0.44934252	1.356E-05
-0.6	0.54881163	0.541936358	6.875272E-03	0.548807995	3.635E-06	0.548821544	9.914E-06
-0.4	0.67032004	0.666010245	4.309795E-03	0.670320463	4.23E-07	0.670323877	3.837E-06
-0.2	0.81873075	0.817234415	1.496335E-03	0.818723495	7.255E-06	0.818731293	5.43E-07
0	1.00000000	0.999999998	2E-09	0.99999755	2.45E-06	0.999999997	3E-09
0.2	1.22140275	1.21869813	2.70462E-03	1.22141117	8.42E-06	1.22140226	4.9E-09
0.4	1.49182469	1.47771993	1.410476E-02	1.4918385	1.381E-05	1.49182145	3.24E-06
0.6	1.82211880	1.78145653	4.066227E-02	1.82187683	2.4197E-04	1.82211046	8.34E-06
0.8	2.22554092	2.13429907	9.124185E-02	2.22411410	1.42682E-03	2.22552358	1.734E-05
1	2.71828182	2.54063868	1.7764314E-01	2.71333642	4.9454E-03	2.71823174	5.008E-05



Grafik 4.1. Örnek 4.4'ün $N = 3, 5, 7$ için karşılaştırma grafiği



Grafik 4.2. Örnek 4.4'ün $N = 3, 5, 7$ için hata analiz grafiği

Örnek 4.5.

$$y'' + xy = (x-1)\cos x + \frac{1}{2}x^2(\cos x)e^x + \frac{1}{2}x^2(\sin x)e^x - \frac{1}{2}x^2(\cos 1)e^{-1} + \frac{1}{2}x^2(\sin 1)e^{-1} + \int_{-1}^x x^2 e^t y(t) dt$$

$y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ koşulları ile verilen ikinci mertebeden lineer Volterra integro-diferansiyel denklemini göz önüne alalım.

Burada

$$F_2(x) = 1, F_0(x) = x, \quad = 1, K(x,t) = x^2 e^t,$$

$$g(x) = (x-1)\cos x + \frac{1}{2}x^2(\cos x)e^x + \frac{1}{2}x^2(\sin x)e^x - \frac{1}{2}x^2(\cos 1)e^{-1} + \frac{1}{2}x^2(\sin 1)e^{-1}$$

olup önceki örneklerde yapılan işlemler tekrarlandığında verilen denklemin farklı N değerleri için bulunan yaklaşık çözümler

$N = 3$ için,

$$y(x) = \sum_{n=0}^3 a_n P_n(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) + a_3 P_3(x) \\ = 1.0 - 3.388131789 \times 10^{-21} x - 0.5323925948 x^2 - 0.09035759655 x^3$$

$N = 5$ için,

$$y(x) = 1 + 1.41875 \times 10^{-10} x - 0.4908134941 x^2 + 8.774013576 \times 10^{-3} x^3 \\ + 0.09935434088 x^4 + 0.03362204205 x^5$$

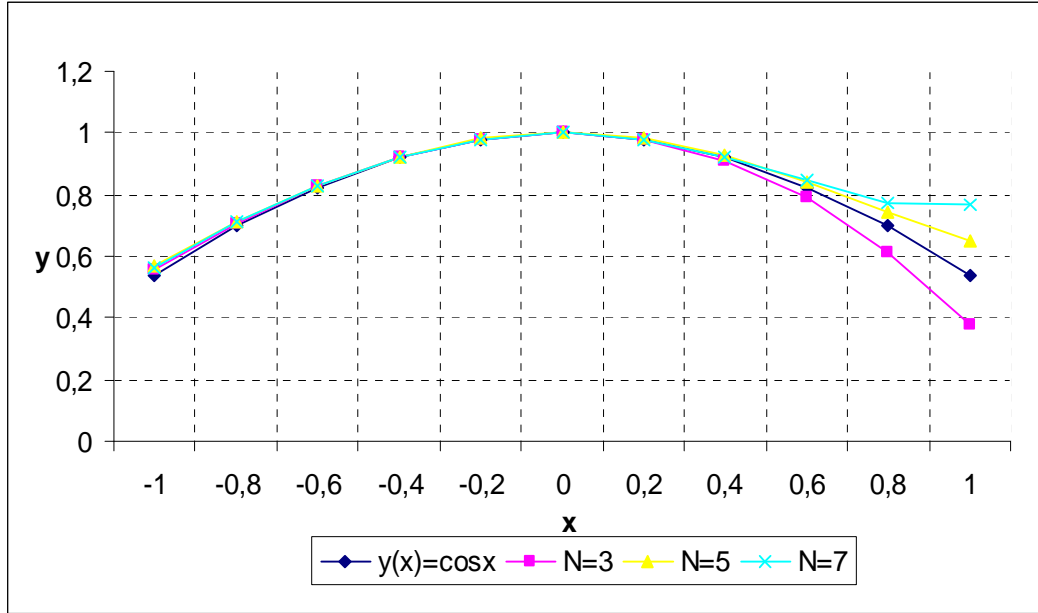
$N = 7$ için de,

$$y(x) = 1 - 1.14125 \times 10^{-10} x - 0.4998318285 x^2 - 1.591552213 \times 10^{-3} x^3 + 0.1330356419 x^4 \\ + 0.09901237073 x^5 + 0.03321505553 x^6 + 3.872352187 \times 10^{-3} x^7$$

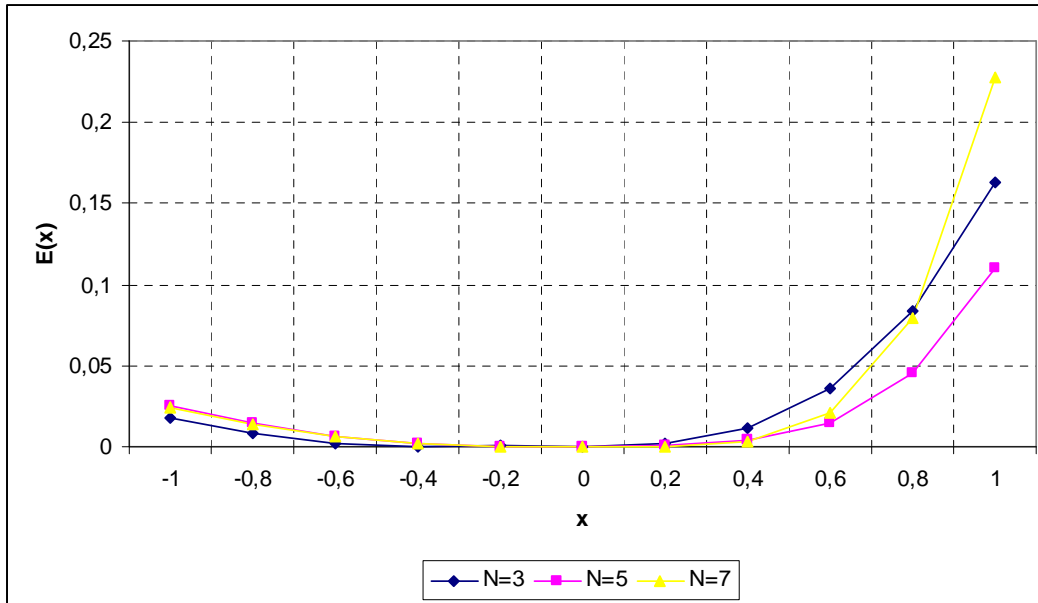
olarak elde edilir. Böylece, N in farklı değerleri için bulunan çözümlerle denklemin tam çözümü olan $y = \cos x$ 'in $[-1,1]$ aralığındaki karşılaştırılması aşağıdaki Tablo 4.2., Grafik 4.3. ve Grafik 4.4. de verilmiştir.

Tablo 4.2. Örnek 4.5'in $N = 3$, $N = 5$ ve $N = 7$ için Nümerik Sonuçları

x_i	Tam çözüm	Legendre Collocation					
	$y(x) = \cos x$	$y(x_i), N = 3$	$E(x_i), N = 3$	$y(x_i), N = 5$	$E(x_i), N = 5$	$y(x_i), N = 7$	$E(x_i), N = 7$
-1	0.5403023059	0.5579650018	1.76626959E-02	0.5661447909	2.5842485E-02	0.5651256984	2.48233925E-02
-0.8	0.6967067094	0.7055318288	8.8251194E-03	0.7110653359	1.43586265E-02	0.7108645663	1.41577859E-02
-0.6	0.8253356149	0.8278559067	2.5202918E-03	0.8316738276	6.3382127E-03	0.8313878149	6.0522E-03
-0.4	0.921060994	0.920600071	4.60923E-04	0.9231074854	2.0464914E-03	0.922650297	1.589303E-03
-0.2	0.9800665779	0.979427157	6.394209E-04	0.9804454759	3.78898E-04	0.9802027086	1.361307E-04
0	1.0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0
0.2	0.9800665779	0.9779814355	2.0851424E-03	0.9806073783	5.408004E-04	0.9802407108	1.741329E-04
0.4	0.921060994	0.9090342987	1.20266953E-02	0.9249191386	3.8581446E-03	0.9244870405	3.4260465E-03
0.6	0.8253356149	0.788821425	3.65141899E-02	0.8406931016	1.53574867E-02	0.8463154703	2.09798554E-02
0.8	0.6967067094	0.6130056499	8.37010595E-02	0.7420844675	4.53777581E-02	0.7757477461	7.90410367E-02
1	0.5403023059	0.3772498087	1.630524972E-01	0.6509369025	1.106345966E-01	0.7677120395	2.27409736E-01



Grafik 4.3. Örnek 4.5'in $N = 3,5,7$ için karşılaştırma grafiği



Grafik 4.4. Örnek 4.5'in $N = 3,5,7$ için hata analiz grafiği

Örnek 4.6.
$$y'' + xy = e^{-x}(x+1) - x^2(x+1) + \int_{-1}^x x^2 e^t y(t) dt,$$

$y(0) = 1, y'(0) = -1$ ile verilen lineer Volterra integro diferansiyel denklemini ele alalım.

Burada $F_0(x) = x, F_1(x) = 1, g(x) = e^{-x}(x+1) - x^2(x+1), \quad = 1, K(x,t) = x^2 e^t$ olup önceki örneklerdeki prosedür $N = 3$ için tekrarlandığında (3.32) de tanımlanan $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ matrisi

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & -14 & ; & 0 \\ \frac{97}{97} & \frac{1631}{1631} & \frac{101972}{101972} & -\frac{3550072}{3550072} & ; & 0.8563342093 \\ \frac{243}{83} & \frac{10935}{1567} & \frac{32805}{96914} & -\frac{688905}{371594} & ; & 0.8072269326 \\ \frac{729}{13} & \frac{10935}{17} & \frac{32805}{52} & \frac{76545}{552} & ; & -1.264241118 \\ -\frac{3}{3} & -\frac{17}{15} & \frac{52}{15} & \frac{552}{35} & ; & \end{bmatrix}$$

şeklinde olup, buradan bulunan katsayılar yerine yazıldığında

$$y(x) = \sum_{n=0}^3 a_n P_n(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) + a_3 P_3(x)$$

$$y(x) = 0.9999999996 - 1.0x + 0.3987062262 x^2 - 0.3202587548 x^3$$

çözümü elde edilir. Daha sonra sırası ile $N = 5$ için,

$$y(x) = 0.9999999998 - 1.0x + 0.4994102398x^2 - 0.16702008x^3 + 4.02502108 \times 10^{-2} x^4 - 4.66471550 \times 10^{-3} x^5$$

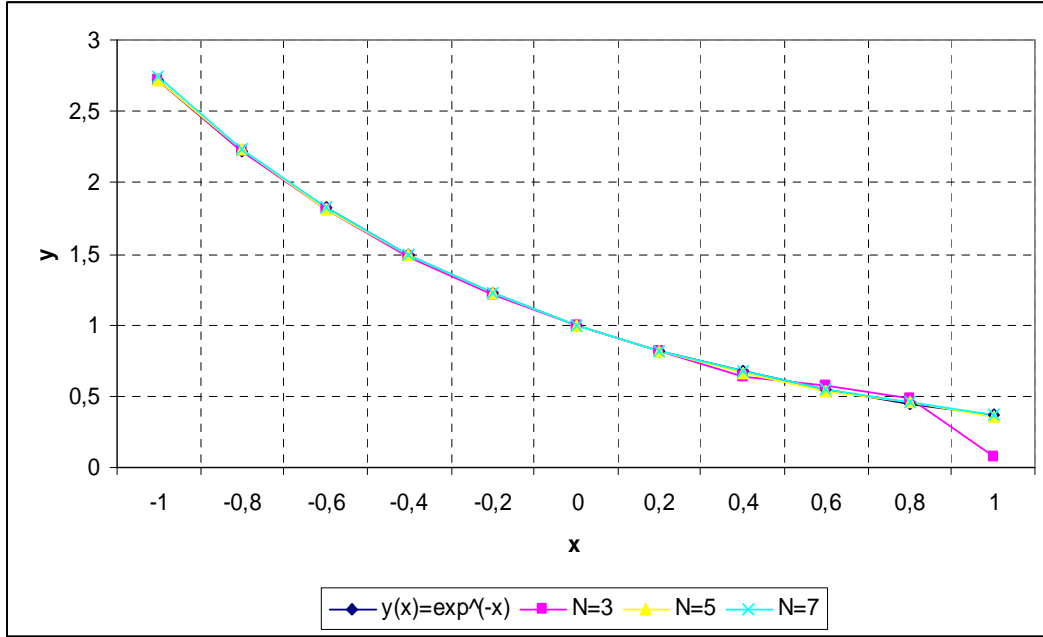
$N = 7$ için de,

$$y(x) = 1.0 - 1.0x + 0.4985435067 x^2 - 0.1575986667 x^3 + 0.135507033 x^4 + 4.397085927 \times 10^{-2} x^5 - 2.375939053 \times 10^{-2} x^6 - 2.157716243 \times 10^{-2} x^7$$

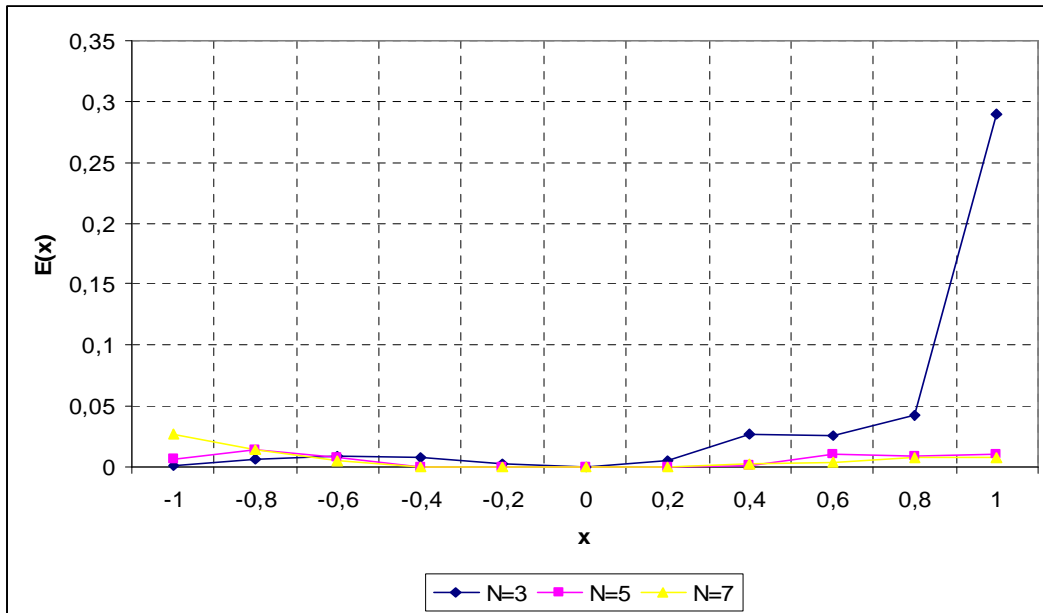
olarak bulunur. Böylece, N in farklı değerleri için elde edilen çözümlerle denklemin tam çözümü olan $y = e^{-x}$ 'in $[-1,1]$ aralığındaki karşılaştırılması aşağıdaki Tablo 4.3. , Grafik 4.5. ve Grafik 4.6. de verilmiştir.

Tablo 4.3. Örnek 4.6'nın $N = 3$, $N = 5$ ve $N = 7$ için Nümerik Sonuçları

x_i	Tam çözüm $y(x) = e^{-x}$	Legendre Collocation					
		$y(x_i), N = 3$	$E(x_i), N = 3$	$y(x_i), N = 5$	$E(x_i), N = 5$	$y(x_i), N = 7$	$E(x_i), N = 7$
-1	2.71828183	2.718964981	6.83151E-03	2.724681832	6.400002E-03	2.745496119	2.7214289E-02
-0.8	2.22554093	2.219144467	6.396463E-03	2.211554679	1.3609419E-02	2.239150349	1.3609419E-02
-0.6	1.8221188	1.812710132	9.408668E-03	1.814678034	7.440766E-03	1.827155016	5.036216E-03
-0.4	1.4918247	1.484289556	7.535144E-03	1.492045621	2.20921E-04	1.491810028	1.4672E-05
-0.2	1.22140276	1.218510319	2.892441E-03	1.221453104	5.0344E-05	1.221404026	1.266E-06
0	1.0	0.999999996	4E-09	0.999999998	2E-09	1.0	0
0.2	0.818730753	0.8133861786	5.344574E-03	0.818523017	2.07736E-04	0.8187100361	2.07169E-05
0.4	0.670320046	0.6432964355	2.702361E-02	0.669350671	9.69375E-04	0.6734672176	3.147172E-04
0.6	0.548811636	0.57435835	2.5546714E-02	0.538704382	1.0107254E-02	0.5447026953	4.108941E-03
0.8	0.449328964	0.4911995019	4.1870538E-02	0.457803467	8.474503E-03	0.4575359382	8.206974E-03
1	0.367879441	0.078447471	2.8943197E-01	0.357832106	1.0047335E-02	0.3750861793	7.206738E-03



Grafik 4.5. Örnek 4.6'nın $N = 3,5,7$ için karşılaştırma grafiği



Grafik 4.6. Örnek 4.6'nın $N = 3,5,7$ için hata analiz grafiği

Örnek 4.7.
$$y' + y = e^{-x}(1+2x) + \int_{-1}^x x(1+2x)e^{t(x-t)}y(t)dt$$

$y(0) = 1, y'(0) = 0$ koşulları ile verilen ikinci mertebeden lineer Volterra integro-diferansiyel denklemini göz önüne alalım.

Burada

$$F_0(x) = 1, F_1(x) = 1, \quad = 1, K(x,t) = x(1+2x)e^{t(x-t)}, g(x) = e^{-x}(1+2x)$$

olup önceki örneklerde yapılan işlemler tekrarlandığında verilen denklemin $N = 3, 5, 7, 9$ değerleri için bulunan yaklaşık çözümler

$N = 3$ için,

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^3 a_n P_n(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) + a_3 P_3(x) \\ &= 1.0 + 0.1829025747x + 0.9746404218x^2 - 1.371820704x^3 \end{aligned}$$

$N = 5$ için,

$$\begin{aligned} y(x) &= 1.0 - 1.11875 \times 10^{-9}x + 1.075012889x^2 - 0.7582855042x^3 \\ &\quad + 0.1232748265x^4 - 0.1892183619x^5 \end{aligned}$$

$N = 7$ için,

$$\begin{aligned} y(x) &= 1.0 - 3.125000001 \times 10^{-12}x - 8.333043063x^2 - 0.273108423x^3 + 31.4363961x^4 \\ &\quad + 1.302484693x^5 - 23.62112393x^6 - 1.421187711x^7 \end{aligned}$$

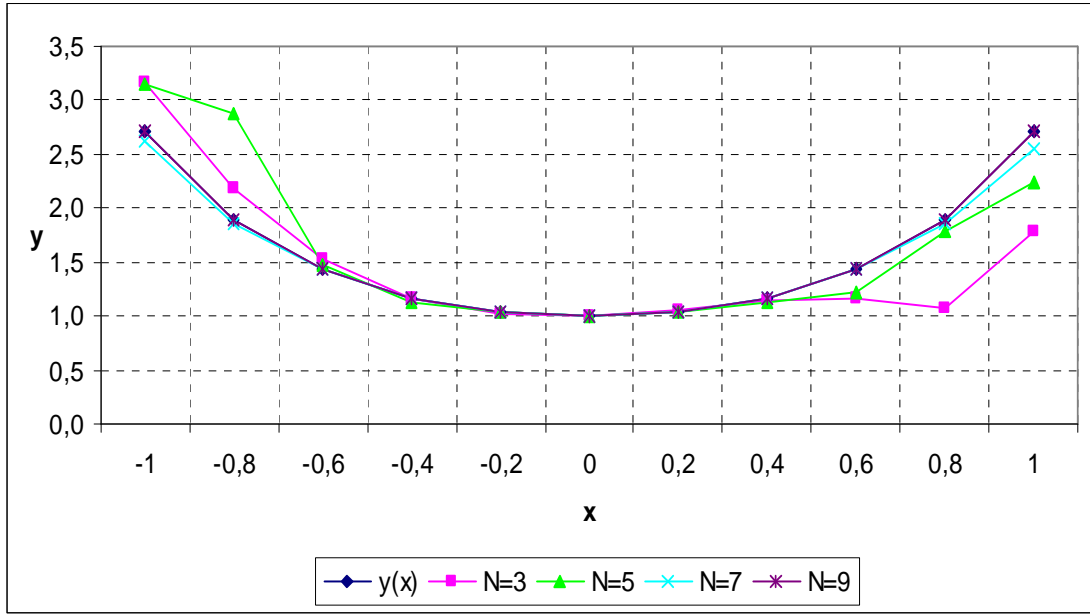
$N = 9$ için de,

$$\begin{aligned} y(x) &= 1.0 - 4.208360021 \times 10^{-15}x + 9.23011824003x^2 - 0.3183001034x^3 + 0.3129046125x^4 \\ &\quad + 0.1127893053x^5 - 13.012793421x^6 + 0.120943815x^7 \\ &\quad - 2.456983014x^8 + 0.690133561x^9 \end{aligned}$$

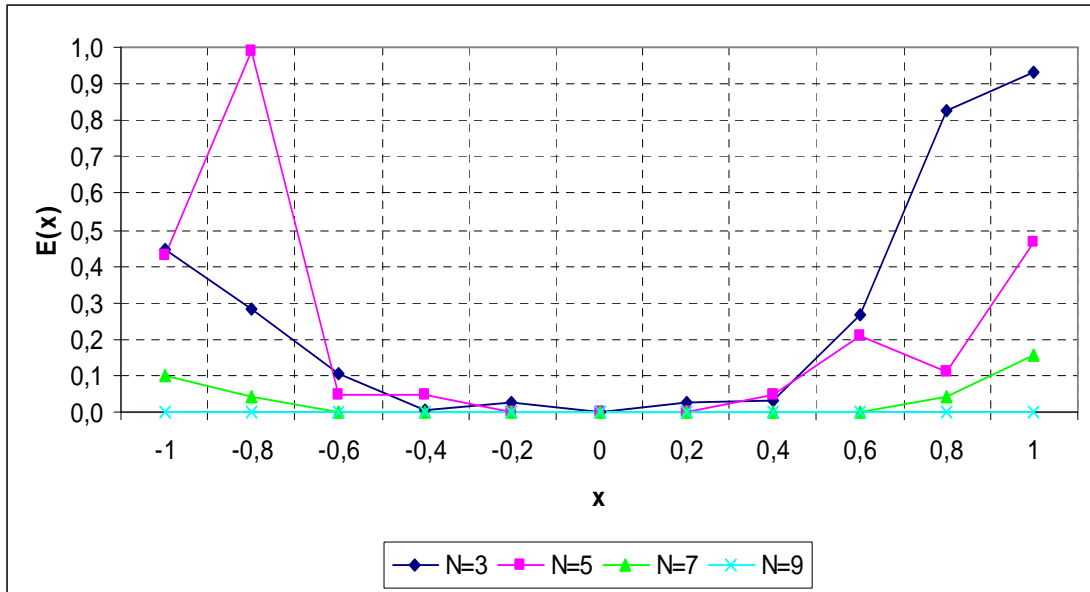
olarak elde edilir. Böylece N in farklı değerleri için bulunan çözümlerle denklemin tam çözümü olan $y = e^{x^2}$ 'in $[-1, 1]$ aralığındaki karşılaştırılması aşağıdaki Tablo 4.4. , Grafik 4.7. ve Grafik 4.8. de verilmiştir.

Tablo 4.4. Örnek 4.7'nin $N = 3$, $N = 5$, $N = 7$ ve $N = 9$ için Nümerik Sonuçları

x_i	Tam çözüm $y(x) = e^{x^2}$	Legendre Collocation							
		$y(x_i), N = 3$	$E(x_i), N = 3$	$y(x_i), N = 5$	$E(x_i), N = 5$	$y(x_i), N = 7$	$E(x_i), N = 7$	$y(x_i), N = 9$	$E(x_i), N = 9$
-1	2.71828183	3.163558551	4.4527672E-01	3.145791583	4.2750975E-01	2.61843901	9.984282E-02	2.71827928	2.55E-06
-0.8	1.89648088	2.179820011	2.8333913E-01	2.88574687	9.8926599E-01	1.85648052	4.000036E-02	1.89647201	8.87E-06
-0.6	1.43332942	1.537442279	1.0411286E-01	1.481484347	4.815493E-02	1.43212956	1.19986E-03	1.43332891	5.1E-07
-0.4	1.17351087	1.170577963	2.93291E-02	1.125625767	4.788510E-02	1.17365307	1.4220E-04	1.17351083	4E-08
-0.2	1.04081077	1.013379668	2.743110E-02	1.040245895	5.6488E-04	1.04086703	5.626E-05	1.04081072	5E-08
0	1.0	1.0	0	1.0	0	1.0	0	1	0
0.2	1.04081077	1.064591566	2.378080E-02	1.040770921	3.985E-05	1.040874051	6.328E-05	1.04081072	5E-08
0.4	1.17351087	1.141306972	3.220390E-02	1.124690029	4.882084E-02	1.17360921	9.834E-05	1.17351083	4E-08
0.6	1.43332942	1.164298825	2.6903060E-01	1.224477768	2.0885165E-02	1.43450714	1.17772E-03	1.43331934	1.008E-05
0.8	1.89648088	1.067719729	8.2876115E-01	1.788256366	1.0822451E-01	1.85603217	4.044871E-02	1.89647247	8.41E-06
1	2.71828183	1.7857222925	9.3255954E-01	2.250783848	4.6749798E-01	2.56078346	1.5749837E-01	2.71826926	1.257E-05



Grafik 4.7. Örnek 4.7'nin $N = 3,5,7,9$ için karşılaştırma grafiği



Grafik 4.8. Örnek 4.7'nin $N = 3,5,7,9$ için hata analiz grafiği

Örnek 4.8. $xy'(x) - y''(x) = 2 \cos x + 3x \cos x - \sin(x+2) + \int_{-1}^x 4 \sin(x-t)y(t)dt$

$y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ koşulları ile verilen ikinci mertebeden lineer Volterra integro-diferansiyel denklemini göz önüne alalım.

Burada

$$F_0(x) = 0, F_1(x) = x, F_2(x) = -1, \quad = 1, K(x, t) = 4 \sin(x-t),$$

$$g(x) = 2 \cos x + 3x \cos x - \sin(x+2)$$

olup $N = 3$ için

W ve **G** matrislerinin son iki satırları yerine koşullarla ilgili satır matrisleri yazılırsa

$$\tilde{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & -14 \\ \frac{97}{243} & \frac{1631}{10935} & \frac{101972}{32805} & \frac{3550072}{688905} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} -1.294465299 \\ -1.940042307 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

matrisleri elde edilip, buradan Legendre katsayıları

$$\mathbf{A} = (\tilde{\mathbf{W}})^{-1} \tilde{\mathbf{G}}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.692586444 \\ -7.533304488 \times 10^{-2} \\ -0.614827153 \\ -5.022202992 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Bu katsayılar (3.3) de yerine yazılırsa verilen koşullar altındaki

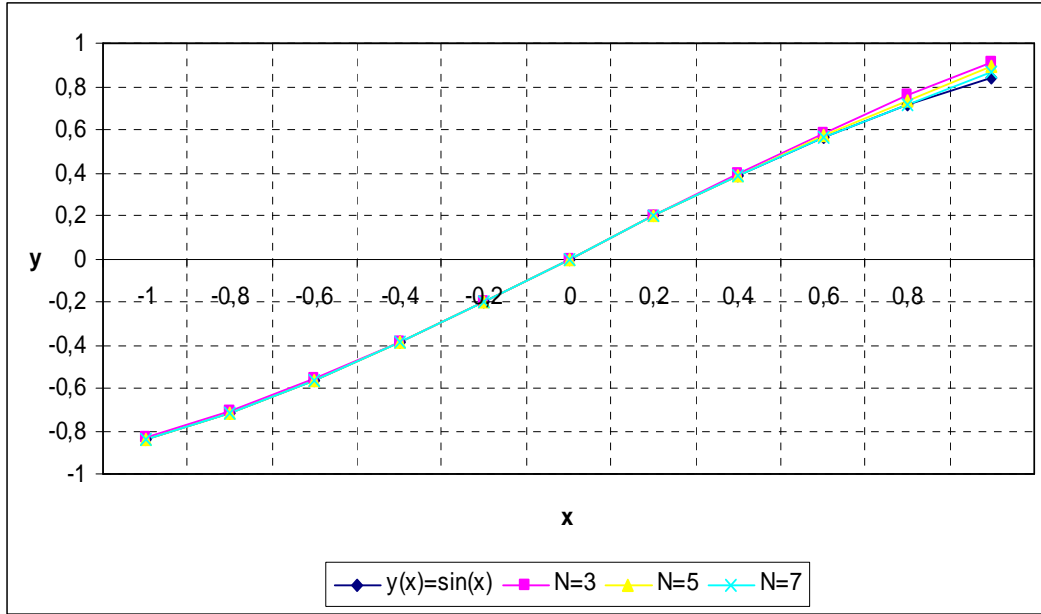
$$y(x) = 1.0 - 0.922240673 x^2 - 0.1255550748 x^3 - 6.776263578 \times 10^{-21} x$$

çözüm elde edilir.

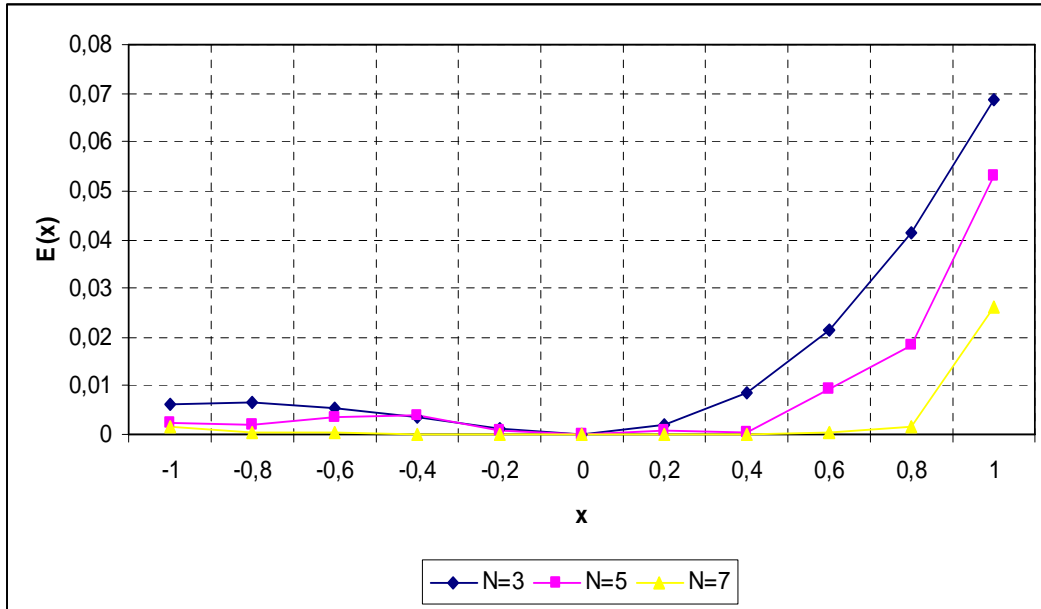
Aynı işlemler $N = 5$ ve $N = 7$ için tekrarlandığında bulunan çözümlerin karşılaştırılması Tablo 4.5. , Grafik 4.9. ve Grafik 4.10. ile verilmiştir.

Tablo 4.5. Örnek 4.8'in $N = 3$, $N = 5$ ve $N = 7$ için Nümerik Sonuçları

x_i	Tam çözüm $y(x) = \sin x$	Legendre Collocation					
		$y(x_i), N = 3$	$E(x_i), N = 3$	$y(x_i), N = 5$	$E(x_i), N = 5$	$y(x_i), N = 7$	$E(x_i), N = 7$
-1	0.841470985	0.835245515	6.22547E-03	0.839255673	2.215312E-04	0.839745232	1.725753E-03
-0.8	0.717356091	0.710846123	6.509967E-03	0.715580932	1.775159E-03	0.717657391	3.013E-04
-0.6	0.564642473	0.559013503	5.62897E-03	0.561296454	3.346019E-03	0.564354291	2.88182E-04
-0.4	0.389418342	0.385856028	3.562315E-03	0.385649213	3.769129E-03	0.389403822	1.45203E-05
-0.2	0.198669331	0.197482069	1.187262E-03	0.197904321	7.6501E-04	0.198653829	1.55018E-05
0	0	0	0	0	0	0	0
0.2	0.198669331	0.200481807	1.812476E-03	0.199457392	7.88061E-04	0.198645638	2.36928E-05
0.4	0.389418342	0.397854979	8.436636E-03	0.389673042	2.547E-04	0.389423715	5.3727E-06
0.6	0.564642473	0.586011143	2.1368669E-02	0.573901923	9.25945E-03	0.564267835	3.74638E-04
0.8	0.717356091	0.758841927	4.1485836E-02	0.735673927	1.8317836E-02	0.715697032	1.659059E-03
1	0.841470985	0.910238958	6.8767973E-02	0.894567219	5.3096234E-02	0.867649012	2.6178027E-02



Grafik 4.9. Örnek 4.8'in $N = 3,5,7$ için karşılaştırma grafiği



Grafik 4.10. Örnek 4.8'in $N = 3,5,7$ için hata analiz grafiği

Örnek 4.9. $y(x) = e^{-x^2} - (1/2)(1/e - e^{-x^2})x + \int_{-1}^x xt y(t) dt$ Volterra integral denkleminin

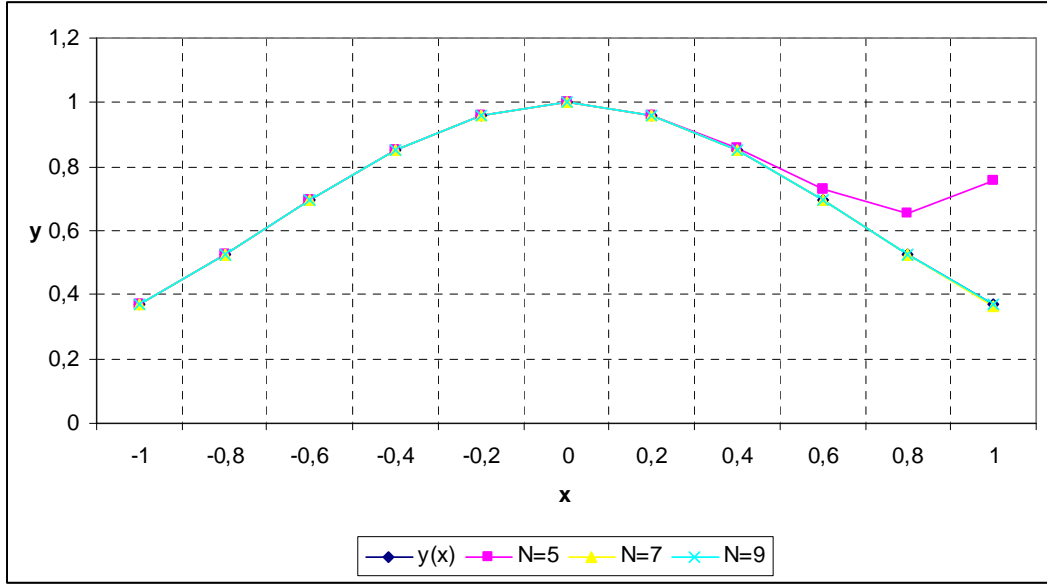
$y(0) = 1, y'(0) = 0$ biçiminde verilen başlangıç koşulları altındaki denklemini ele alalım. Önceki örneklerde yapılan işlemler tekrarlandığında verilen denklemin farklı N değerleri için bulunan çözümlerin ve diğer metotlarla bulunan çözümlerin karşılaştırılması Tablo 4.6. , Grafik 4.11.-4.12.-4.13 de verilmiştir.

Tablo 4.6. Örnek 4.9'un $N = 5, N = 7$ ve $N = 9$ için Nümerik Sonuçları

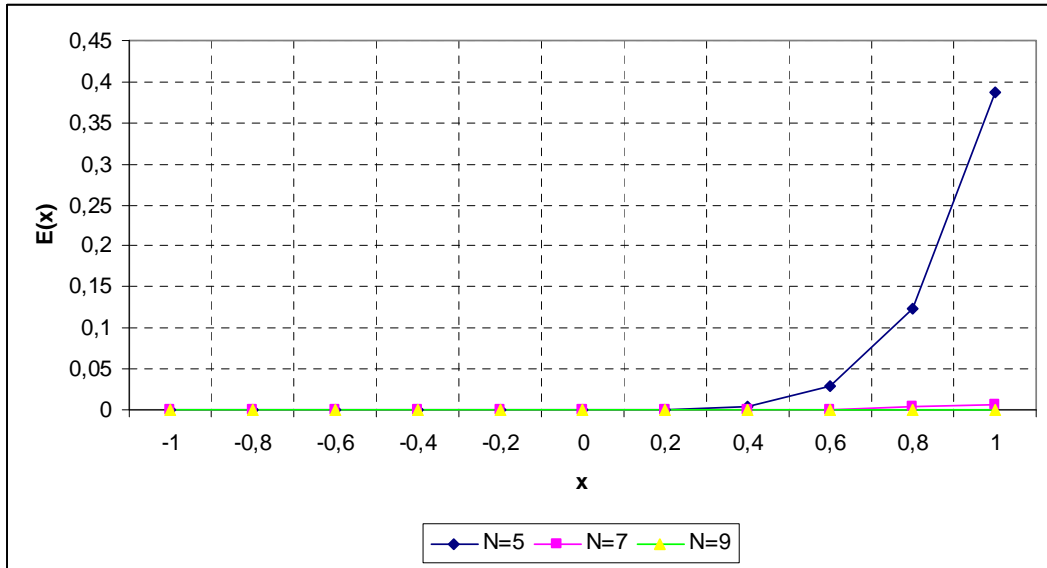
x_i	Tam çözüm	Legendre Collocation					
	$y(x) = e^{-x^2}$	$y(x_i),$ $N = 5$	$E(x_i),$ $N = 5$	$y(x_i),$ $N = 7$	$E(x_i),$ $N = 7$	$y(x_i),$ $N = 9$	$E(x_i),$ $N = 9$
-1	0.367879441	0.36787946	1.83E-08	0.367879525	8.35E-08	0.367879465	2.38E-08
-0.8	0.527292424	0.526573294	7.19E-04	0.52729174	6.843E-07	0.527292352	7.21E-08
-0.6	0.697676326	0.697577435	9.88916E-05	0.697676627	3.004E-07	0.697676291	3.51E-08
-0.4	0.852143789	0.852214122	7.0333E-05	0.852143643	1.459E-07	0.852143777	1.22E-08
-0.2	0.960789439	0.960757301	3.2138E-05	0.960789499	6.02E-08	0.960789428	1.12E-08
0	1	0.999999979	2.06E-08	1	0	1	0
0.2	0.960789439	0.960821587	3.21473E-05	0.960785963	3.47654E-06	0.960789427	1.22E-08
0.4	0.852143789	0.855755334	3.61E-03	0.852108752	3.50372E-05	0.852143776	1.3E-08
0.6	0.697676326	0.726555578	2.89E-02	0.697697958	2.16318E-05	0.697676298	2.81E-08
0.8	0.527292424	0.651765172	1.24E-01	0.5229131	4.38E-03	0.52729238	4.41E-08
1	0.367879441	0.754282835	3.86E-01	0.361701569	6.18E-03	0.36787863	8.112E-07

Tablo 4.7. Örnek 4.9'un $N = 8$ ve $N = 10$ için Chebyshev Metodu Hata Analiz Sonuçları

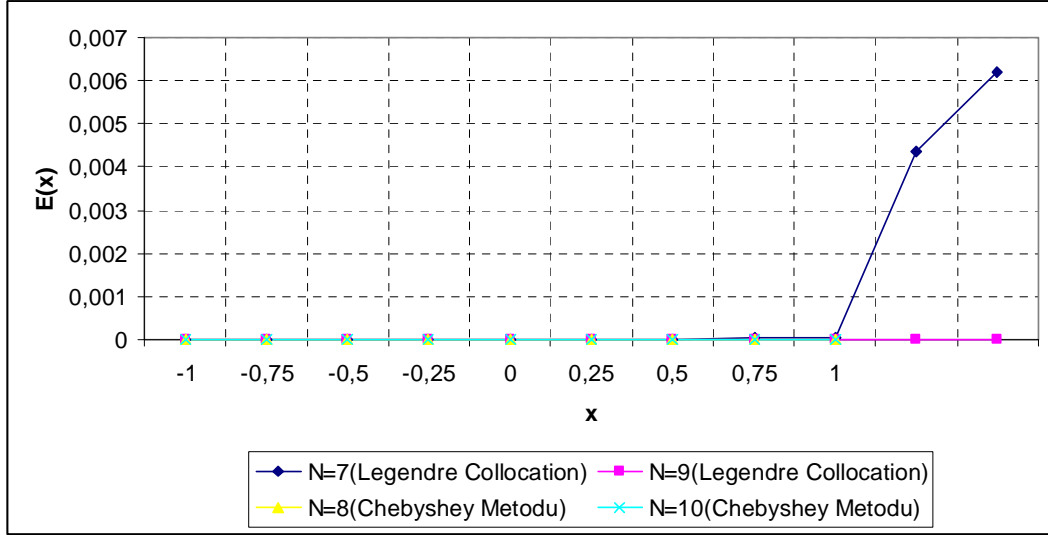
x_i	Tam çözüm	Chebyshev Metodu [Ref. Maleknejad,K., Sohrabi, S., Rostami, Y.]	
	$y(x) = e^{-x^2}$	$E(x_i), N = 8$	$E(x_i), N = 10$
-1.0	0.3678794412	8.423E-09	3.524E-09
-0.75	0.5697828247	1.137E-05	1.144E-07
-0.5	0.7788007831	5.914E-06	5.431E-07
-0.25	0.9394130628	1.331E-06	2.922E-07
0	1.0	0	0
0.25	0.9394130628	1.346E-06	3.396E-07
0.5	0.7788007831	6.267E-06	2.902E-07
0.75	0.5697828247	1.424E-05	1.593E-06
1.0	0.3678794412	8.690E-06	7.823E-07



Grafik 4.11. Örnek 4.9'in $N = 5,7,9$ için karşılaştırma grafiği



Grafik 4.12. Örnek 4.9'in $N = 5,7,9$ için hata analiz grafiği



Grafik 4.13. Örnek 4.9'in $N = 7,9$ için Legendre Collocation ile $N = 8,10$ için Chebyshey Metodu hata analizi karşılaştırılması

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, yüksek mertebeden Volterra tipi integro-diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için bir Legendre polinom yaklaşım yöntemi geliştirilmiştir. Aynı zamanda yöntem bahsedilen özellikteki denklemlerin tam çözümlerini bulmak içinde kullanılabilen iyi bir yöntemdir.

Bu metot, $F_k(x), g(x)$ ve $K(x,t)$ fonksiyonları $-1 \leq x, t \leq 1$ aralığında tanımlı iken geçerlidir. Problem sonlu bir $[a, b]$ aralığında tanımlandığında ise,

$$x = \frac{1}{2}(b-a)t + \frac{1}{2}(b+a)$$

lineer dönüşümü yardımı ile bu aralık $[-1,1]$ aralığına dönüştürülebilir. O zaman herhangi bir integro-diferansiyel denklem, verilen bu metotla çözülebilir.

Bu metodun en belirleyici özelliği, çözümün N . dereceden bir polinom olması durumunda kesme sınırının N ya da daha büyük bir değer alındığı zaman analitik çözümünün bulunmasıdır. Bu metodun bir avantajı da, çözümün Legendre katsayılarının bilgisayar programları kullanarak çok rahat bulunabilmesidir. Bu sebeple, bu yöntem diğer metotlardan daha pratiktir.

Verilen metotla kullanılarak $[-1,1]$ aralığında tanımlanan, m . mertebeden lineer değişken katsayılı

$$\sum_{k=0}^m F_k(x) y^{(k)}(x) = g(x) + \int_{-1}^x K(x,t) y(t) dt$$

Volterra integro-diferansiyel denkleminin

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{jk} y^{(k)}(-1) + b_{jk} y^{(k)}(1) + c_{jk} y^k(0)) = \gamma_j, \quad j = 0, 1, \dots, m-1$$

karışık koşullar altındaki yaklaşık çözümü Legendre polinomları yardımı ile bulunur.

Bu çalışmanın son kısmında ise, farklı tipte yüksek mertebeden lineer Volterra integro-diferansiyel denklemlerin verilen Legendre yöntemi ile çözümleri bulunmuştur. Farklı N değerleri için bulunan örneklerin çözümlerinin grafikleri çizilip hata

analizleri yapılmıştır. Bu grafiklerde çözümlerin N kesme sınırının yeterince artırıldığında tam çözüme daha da yaklaşıldığı saptanmıştır.

Böylece örneklerin sonunda çizilen grafiklerin ve hata analizlerinin de gösterdiği gibi yöntemin son derece iyi sonuçlar verdiği tespit edilmiştir.

Ayrıca farklı yöntemlerle çözülen örneklerinde verilen Legendre yöntemi ile çözüldüğünde yapılan karşılaştırmalarda da yöntemin iyi sonuçlar verdiği gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

- Akyüz-Daşcıoğlu, A., A Chebyshev polynomial approach for Linear Fredholm-Volterra Integro-Differential Equations in the most General Form, *Appl. Math. Comput.*, 181, 103-112, 2006.
- Akyüz-Daşcıoğlu, A., Chebyshev polynomial solutions of systems of linear integral equations, *Appl. Math. Comput.*, 151, 221–232, 2004.
- Bayın, S. Ş., *Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler*, Odtü Yayıncılık, Ankara, s. 249-254, 2000.
- El-Gendi, S.E., Chebyshev Solution of Differential, Integral and Integro-Differential Equations, *Comp. J.*, 12, 282-287, 1969.
- Ezechias, J., Contribution to the calculation of thick arcs with respect to shearing strain and extension of the centroid axis. *Computers & Structures*, 29, 4, 645-656, 1998.
- Greenspan, D., Dynamical simulation of the simplest hydrides. *Comput. Math. Appl.*, 35, 10, 55-62, 1998.
- Gürgöze, M., On some series occurring in the theory of vibrations. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol*, 23, 3, 493-496, 1992.
- Holmekar, K., Global asymptotic stability for a stationary solution of a system of integro-differential equations describing the formation of liver zones. *SIAM Journal Math. Anal.*, 24, 1, 116-128, 1993.
- Kauthen, J.P., Continuous time collocation methods for Volterra-Fredholm Integral Equations, *Numer. Math.*, 56, 409-424, 1989.
- Kopeikin, I.D. & Shishkin, V.P., Integral form of the general solution of equations of steady-state thermo elasticity. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics (PMM U.S.S.R.)*, 48, 1, 117-119, 1984.

- Lovitt, W.V., *Linear Integral Equations*, McGraw-Hill, New York, 1924.
- Maleknejad, K., Aghazadeh, N., Numerical solutions of Volterra integral equations of the second kind with convolution kernel by using Taylor-series expansion method, *Appl. Math. Comput.*, 161 (3), 915–922, 2005.
- Maleknejad, K., Mahmoudi, Y., Numerical solution of linear Fredholm integral equation by using hybrid Taylor and Block-Pulse functions, *Appl. Math. Comput.*, 149, 799–806, 2004.
- Maleknejad, K., Sohrabi, S., Rostami, Y., Numerical solution of nonlinear Volterra integral equations of the second kind by using Chebyshev polynomials, *Appl. Math. Comput.*, 188, 123-128, 2007.
- Rashed, M. T., Lagrange Interpolation to Compute the Numerical Solutions of Differential, Integral and Integro-Differential Equations, *Appl. Math. Comput.*, 151, 869-878, 2004.
- Sezer, M., Gülsu, M., A Taylor Collocation Method for the Approximate Solution of General Linear Fredholm-Volterra Integro- Difference Equations with Mixed Argument, *Appl. Math. Comput.*, 175, 675-690, 2006.
- Tulga, İ., *İntegral Denklem Sistemlerinin Yaklaşık Çözümleri*, Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Ens., Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi, 2006.
- Yalçınbaş, S., Taylor polynomial solutions of nonlinear Volterra–Fredholm integral equations, *Appl. Math. Comput.*, 127, 195–206, 2002.
- Yalçınbaş, S., Sezer, M., 2000. The Approximate Solutions of High-Order Linear Volterra- Fredholm Integro-Differential Equations in Terms of Taylor Polynomials, *Appl. Math. and Comput.*, 112, 291-308, 2000.
- Yalçınbaş, S., Taylor Polynomial Solutions of Volterra-Fredholm Integral and Integro-Differential Equations, Dokuz Eylül Üniversitesi, Fen Bilimleri Ens., Matematik Anabilim Dalı, Doktora Tezi, 1998.

ÖZGEÇMİŞ

Manisa'nın Saruhanlı İlçesinde 15.03.1984 tarihinde doğdum. 1991 yılında Atatürk İlköğretim Okulundan 1999 yılında mezun oldum. 1999 yılında başladığım Cumhuriyet Lisesini 2002 yılında bitirdim. 2002 yılında Afyon Kocatepe Üniversitesi Uşak Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazanarak Üniversite hayatına başladım ve 2006 yılında mezun oldum. 2006 yılında Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda tezli yüksek lisansa başladım ve hala öğrenimime devam etmekteyim.

İLKNUR GÜÇLÜ