

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DALGA DENKLEMİ ÜZERİNE BAZI UYGULAMALAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Seracettin YALVAÇ
DANIŞMAN: Yrd. Doç. Dr. Esin İnan ÇINAR

VAN - 2009

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DALGA DENKLEMİ ÜZERİNE BAZI UYGULAMALAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Seracettin YALVAÇ

VAN - 2009

KABUL ve ONAY SAYFASI

Yrd. Doç. Dr. Esin İnan ÇINAR danışmanlığında, Seracettin YALVAÇ tarafından hazırlanan “*Dalga Denklemi Üzerine Bazı Uygulamalar*” isimli bu çalışma/...../2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı’nda *Yüksek Lisans Tezi* olarak kabul edilmiştir.

Başkan:..... İmza:

Üye :..... İmza:

Üye :..... İmza:

Üye :..... İmza:

Üye :..... İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’ nun/...../..... gün ve.....
.....sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

DALGA DENKLEMİ ÜZERİNE BAZI UYGULAMALAR

YALVAÇ, Seracettin

Yüksek Lisans Tezi , Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Esin İnan ÇINAR

Eylül 2009, 93 sayfa

Bu çalışmada; hiperbolik dalga denkleminin temel özellikleri ve bazı uygulamaları incelenmiştir. Hiperbolik denklem sınıfının temsilci denklemi dalga denklemidir ve bu denklem elektromanyetik, hidrodinamik, radyo dalgaları gibi alanlarda ortaya çıkmaktadır.

Anahtar kelimeler : Dalga denklemi, Hiperbolik denklem.

ABSTRACT

SOME APPLICATIONS OVER WAVE EQUATION

YALVAÇ, Seracettin

Msc, Mathematics Science

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Esin İnan ÇINAR

September 2009, 93 pages

In this study it has been investigated fundamental characterizations and some applications of wave equation. It is wave equation to the representative equation of class of hyperbolic equations and this equation has appeared in areas such as electro-magnetic, hydrodynamic, radio waves.

Key words: Hyperbolic equation, Wave equation.

ÖN SÖZ

Bu çalışma; özellikle hiperbolik dalga denklemlerini ele almaktadır. Dalga denkleminin çözümleri; fiziksel elektrik ve manyetik kuvvetlerin dalgasını ses dalgası olarak ortama yansıtır. Hiperbolik denklemler elektromanyetik, hidrodinamik, radyo dalgaları gibi alanlarda kullanılmaktadır.

Bu çalışmanın başlangıcında dalga denklemi konusundaki bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir. Daha sonra hiperbolik dalga denklemleri ve bazı uygulamaları ele alınmıştır.

Bu çalışmayı bana veren ve çalışmalarım süresince karşılaştığım güçlüklerde yardımlarını esirgemeyen hocam, Sayın Yrd. Doç. Dr. Esin İnancınar ÇINAR'a teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Seracettin YALVAÇ

İÇİNDEKİLER

	sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖN SÖZ	v
İÇİNDEKİLER	vii-ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	xiii
1. GİRİŞ ve KAYNAK BİLDİRİŞLERİ	1
2. DALGA DENKLEMİNİN TEMEL ÖZELLİKLERİ	4
2.1. Dalga Denklemi	4
2.2. Başlangıç Değer Problemi	4
2.2.1. Homojen Dalga Denkleminin Genel Çözümü	4
2.2.2. Homojen Dalga Denklemi için Başlangıç Değer Problemi	6
2.2.3. Homojen Olmayan Dalga Denklemi İçin Başlangıç Değer Problemi	11
2.2.4. Cauchy Problemi	16
2.3. Başlangıç–Sınır Değer Problemleri	18
2.4. İkinci Basamaktan Hemen-Hemen Lineer Denklemler	
İçin Bir Sınıflandırma, Kanonik Forma İndirgeme	24
2.4.1. Kısmi Türevli Denklemlerin Genel Bir Sınıflandırılması	25
3. BİR BOYUTLU DALGA DENKLEMİNİN DEĞİŞKENLERİNE AYRILABİLİR ÇÖZÜMLERİ	29
3.1. Homojen Hal	29
3.2. Homojen Olmayan Hal	36
3.3. Dikdörtgensel Bölgede İki Boyutlu Dalga Denklemi	42
3.4. Sınırları Sabitleştirilmiş Dikdörtgensel Bir Zarın Dış Kuvvetin Etkisi	
Altındaki Titreşim Hareketi	50
3.5. İki Boyutlu Homogen Dalga Denkleminin Kutupsal Koordinatlarda	

Çözümü	55
4. DALGA DENKLEMİ YARDIMIYLA İFADE EDİLEBİLEN FİZİKSEL	
OLAYLAR	64
4.1. Sabit Periyotlu Çözümler ve Doğal Frekanslar	64
4.2. Zorlanmış Titreşimler ve Rezonans	65
4.3. Kirişlerin Doğal Frekansları	66
4.4. Titreşen Kirişler ve Atlama Tahtaları	70
4.5. Dikdörtgensel Zarın Titreşimleri	74
4.6. Kutupsal Koordinatlı Uygulamalar	78
4.7. Küresel Koordinatlı Uygulamalar	83
KAYNAKLAR	84
ÖZ GEÇMİŞ	85

ŞEKİLLER DİZİNİ

	sayfa
Şekil 2.1. Dalga hareketleri	6
Şekil 2.2. Bağımlılık etki ve belirlilik bölgesi	10
Şekil 2.3. İntegral bölgesi	13
Şekil 2.4. Üçgen bölgesi	15
Şekil 2.5. Üçgensel sınırlı bölge	17
Şekil 2.6. Ω bölgesi	19
Şekil 2.7. Birim çemberde denklem tipleri	25
Şekil 3.1. Açıdan bağımsız titreşim hareketi	63
Şekil 4.1. (a) Levhanın sağ sınırında sıcaklığın zamana göre değişimi (b) Sağ sınırdaki sıcaklık 25° olduğunda levhanın iç noktalarındaki sıcaklık değişimi	69
Şekil 4.2. Her iki ucundan bağlanmış (kenetlenmiş) kiriş	73
Şekil 4.3. $\cosh x \cos x = 1$ denkleminin çözümleri	74
Şekil 4.4. İdealleştirilmiş I kirişi	75
Şekil 4.5. Uçları sabitlenmiş titreşen kiriş için $\cosh x \cos x = 1$ özdeğer denkleminin ilk 10 pozitif çözümü	82
Şekil 4.6. Sabit-sabit durumundaki I-kirişinin ilk üç öz fonksiyonunun grafiği	83
Şekil 4.7. Güzel görüntülü atlamalar	84
Şekil 4.8. $u = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$ yüzeyleri	88
Şekil 4.9. Çadır fonksiyonunun parçalı biçimde tanımı	88
Şekil 4.10. Kare şekilli $p = \pi\sqrt{2}$ periyotlu titreşimleri	89
Şekil 4.11. Uygun katı silindir	90
Şekil 4.12. İlk Birkaç Bessel fonksiyonunun grafikleri ve başlangıç kökleri	93
Şekil 4.13. Bessel fonksiyonunun grafikleri ve başlangıç kökleri	94

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

C^2	: 2 basamaktan türevlenebilen sürekli fonksiyonların sınıfı
$u(x)$	: u nun x değişkenine göre fonksiyonu
$\hat{f}$	$f(x)$ in genişletmesi
$\hat{g}$	$g(x)$ in genişletmesi
$C^n[D]$	Uygun bir D bölgesinde en az n . basamağa kadar sürekli türetilebilir fonksiyonların sınıfı

1. GİRİŞ ve KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

İkinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemler sınıflandırıldığı zaman hiperbolik, parabolik ve eliptik denklemler olmak üzere üç kısımda incelenir ama biz sadece hiperbolik denklemi ele alacağız.

Hiperbolik denklemler sınıfının temsilci denklemi dalga denklemidir ki bu denklem elektromanyetik, hidrodinamik, radyo dalgaları v.b. gibi alanlarda oldukça geniş bir biçimde karşımıza çıkmaktadır. Kısacası dalga denkleminin çözümleri fiziksel olarak elektrik ve manyetik kuvvetlerin dalgasını bir ortamdaki ses dalgası v.s. olarak ifade eder.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C^2 \Delta u = 0$$

denklemi hiperbolik tipten olup dalga denklemi olarak bilinir. Burada c pozitif reel sabit t zaman değişkeni Δu t'ye göre türev içermektedir.

Bir boyutlu $u_{tt} - C^2 u_{xx} = 0$ ve iki boyutlu $u_{tt} - C^2 (u_{xx} + u_{yy}) = 0$ dalga denklemlerinin u çözümlerine dalga fonksiyonu denir.

$$u_{tt} - C^2 \Delta u = F$$

denkleminde homojen olmayan dalga denklemi denir. F fonksiyonu sadece bağımsız değişkenlerin fonksiyonu olup bilinen dış kuvveti veya dalganın kaynağını ifade eder.

$$u_{tt} - \gamma u_t - C^2 \Delta u = F \quad (\gamma = \text{sabit})$$

Hiperbolik denklemi ise sönümlü dalga denklemi olarak bilinir. Çözüm üstel tipten terimler içerdiği için t büyüdüğünde u küçülür. Buda dalganın yayılışına etki eden enerji kaybına neden olur. Enerji kaybına neden olan görünmeyen kuvvetler bulunması halinde bu tip denklemlerle karşılaşılır.

$$u_{tt} + \gamma u_t + \beta u - C^2 \Delta u = F$$

Telgraf denklemini

$$u_{tt} - C^2 u_{xx} = -g$$

(g: gravitasyonel ivme) titreşim denklemi adını alır.

Uygulamada $t \geq 0$ olacak şekilde dalga denkleminin genel çözümünü bulmaktan çok $t = 0$ için u ve u_t nin değerlerinin denklemle birlikte önceden verilmesi ve bu başlangıç verilerini sağlayan çözüm bulunması önemlidir. t zaman değişkeni ve u aranan fonksiyon olacak şekilde u ve u_t değerlerinin denklemle birlikte verilmesi problemine başlangıç değer problemi denir. Denklemle birlikte aranan fonksiyonun tanımlı olduğu bölgenin sınırı üzerindeki değerlerin önceden verilmesi halinde buna sınır değer problemi denir. Denklemle birlikte başlangıç ve sınır değerlerinin önceden verilmesi halinde buna başlangıç ve sınır değer problemi denir.

2. basamaktan lineer kısmi diferansiyel denklemler önceden verilmiş başlangıç koşullarını sağlayan çözümün bulunması hiperbolik tipten denklemler için genellikle mümkündür. Hiperbolik

olmayan denklemler içinde böyle bir problem çözülebilir. Ancak elde edilen çözüm başlangıç verileriyle sürekli bir şekilde uyumlu olmayabilir. Yani başlangıç verilerindeki küçük bir değişiklik çözümün büyük oranda değişmesine sebep olur. Eliptik tipten denklemler için ise genellikle sınır koşulları verilir.

John (1944), tarafından bir boyutlu dalga denklemi için Riemann Volterra yöntemi verilmiştir. Sneddon (1957), tarafından Green fonksiyonu yardımıyla tanımlanan ve Riesz integrali yardımıyla nonhomojen iki boyutlu dalga denkleminin çözümü vermiştir. Lorenz (1963) ise periyodik olmayan bir akışın hesaplanmasını yapmıştır. Wainberger (1965) tarafından sönümlü dalga denklemi ve üç boyuttaki dalga denklemi, Fourier transformu yardımıyla çözülmüştür. Caddington ve Leinson (1968) çalışmasının ilki Caddington tarafından yazılmış ve sonra birlikte tamamlamış olup yukarıdaki yazarlara göre daha basit bir bakış açısı göze çarpmaktadır.

Feckan (1995) çalışmasında belirli dalga denklemlerini incelemiştir. Vladimir (1997), tarafından dalga denkleminin değişkenlere ayrılabilir çözümleri verilerek trampolenden atlayan sporcunun en iyi atlayışı yapılabilmesi için gerekli salınımı veren önemli örnekler ifade edilmiştir.

King ve ark. (2003) tarafından harmonik ve sönümlü dalga denklemleri incelenmiştir. Çağlayan ve Çelebi (2002) tarafından homojen ve nonhomojen dalga denkleminin çözümü için önemli bir yer tutan ve ilk olarak D'Alambert tarafından bulunmuş olan D'Alambert formülü ile bu formül yardımıyla dalga denkleminin başlangıç ve sınır değer probleminin iyi ifade edilmiş problem olduğu verilmiş olup ayrıca Hiperbolik Cauchy probleminin çözümünü bulmak için Riemann yöntemi verilmiştir.

Boyce ve DiPrima (2001) ile Constanta (2002) tarafından ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin hiperbolik ve eliptik denklem uygulamaları ve analitik çözüm metotları ayrı ayrı ifade edilmiştir.

Anar (2005) çalışmasında harmonik dalga yayılması vererek sınırlı veya sınırsız bir bölgede dalganın yayılmasının ancak titreşen bir tel ile dikedörtgensel bir zarın titreşimi fonksiyonları ile bir Green fonksiyonu yardımıyla tanımlanabileceği belirtmiştir. Pinchover ve Rubinnstein (2005) tarafından dalga denklemin genel bir bakışı yapılmış ve çözümleriyle ilgili bir takım bilgiler verilerek elektrik sirkülasyonu ile ilgili örnekler verilmiştir. Dernek (2005) çalışmasında dalga denklemleri izah edilmiştir. Edwards (2006) ise bir köprünün ayaklarının dayanıklılığı için gerekli olan rezonansı dalga denklemi yardımıyla vermiştir. Dolayısıyla bu çalışmada hiperbolik dalga denklemleri ve uygulamaları incelenecektir.

2. DALGA DENKLEMİNİN TEMEL ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde konuyla ilgili daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilecektir.

2.1. Dalga Denklemi

Hiperbolik denklemler sınıfının temsilci denklemi dalga denklemidir.

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad (2.1)$$

denklemine bir boyutlu homojen dalga denklemi,

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t) \quad (2.2)$$

denklemine ise bir boyutlu homojen olmayan dalga denklemi denir. (2.1), (2.2) denklemlerin de x değişkeni yer ve t değişkeni zamanı göstermektedir. c , pozitif bir sabittir ve F , dalgaya etki eden bilinen bir dış kuvveti temsil etmektedir.

2.2. Başlangıç Değer Problemi

2.2.1. Homojen Dalga Denkleminin Genel Çözümü

Homojen dalga denklemi, genel çözümü kolayca elde edilebilen denklemlerden biridir. Denklemin karakteristikleri $x \pm ct = \text{sabit}$ doğrularıdır. Eğer

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct$$

değişken değişimi yapılırsa, (2.1) ifadesi $u_{\xi\eta} = 0$ denklemine dönüşür. Buradan C^2 sınıfından

ϕ ve ψ fonksiyonları için $u = \phi(\xi) + \psi(\eta)$ veya tekrar x, t değişkenlerine seçilirse,

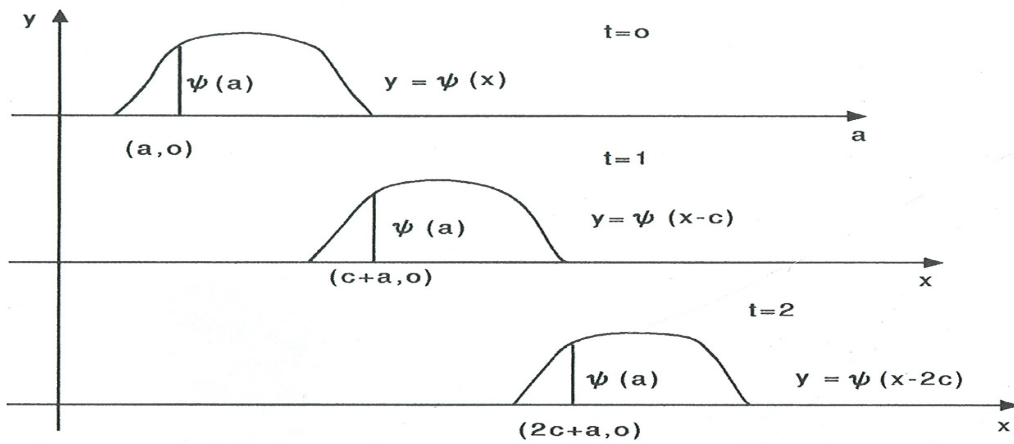
$$u(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct) \quad (2.3)$$

elde edilir. Demek ki, eğer (2.1) in bir çözümü mevcutsa, bu çözüm (2.3) şeklindedir. Tersine, keyfi

ϕ ve ψ fonksiyonları C^2 sınıfına aitse, $u \in C^2$ dir ve (2.3) ün homojen dalga denkleminin klasik çözümü olduğu kolayca görülebilir. Yani (2.3), homojen dalga denkleminin genel çözümüdür. (2.3) genel çözümü, iki fonksiyonun toplamından ibarettir. (2.1) denkleminin indirgenebilir olduğu, yani

$(D_t + cD_x)(D_t - cD_x)u = 0$ şeklinde lineer çarpanlara ayrılabilirdiği dikkate alınır, genel çözümdeki $\phi(x+ct)$ fonksiyonunun birinci mertebeden $(D_t - cD_x)u_2 = 0$ lineer denkleminin ve $\psi(x-ct)$ fonksiyonunun ise birinci mertebeden $(D_t + cD_x)u_2 = 0$ lineer denkleminin çözümü olduğu açıktır. Bu birinci mertebeden lineer denklemlerin karakteristik eğrileri, dalga denkleminin de karakteristik eğrileridir. $x-ct = \text{sabit}$ karakteristikleri boyunca $\psi(x-ct)$ fonksiyonu ve $x+ct = \text{sabit}$ karakteristikleri boyunca $\phi(x+ct)$ fonksiyonu sabittir.

Genel çözümdeki $\phi(x+ct)$ ve $\psi(x-ct)$ fonksiyonları, sırasıyla sola ve sağa c hızı ile yayılan iki dalga olarak yorumlanabilir. Örnek olarak, $\psi(x-ct)$ nin c hızı ile sağa yayılan bir dalga olduğunu gösterelim. ψ nin argümanının da $t=0$ koyalım ve sonra $y=\psi(x)$ fonksiyonunun grafiğini çizelim. Herhangi bir $x=a$ noktası seçelim. $t=0$ anında ψ fonksiyonu bir noktada $\psi(a)$ değerine sahiptir. Açık ki $\psi(x-ct)$, $x-ct=a$ olacak şekildeki (x,t) uzay-zaman noktalarında aynı $\psi(a)$ değerine sahip olacaktır. Özel olarak $\psi, t=1$ anında $x=a+c$ noktasında, $t=2$ anında $x=a+2c$ noktasında vb. $\psi(a)$ değerini alacaktır. Yani ψ nin $\psi(a)$ değerini aldığı noktalar, c hızı ile sağa hareket eder (Şekil 2.1). Böylece (2.1) dalga denkleminin genel çözümü, aynı hızla sola ve sağa yayılan iki dalganın üst üste bindirilmesinden ibarettir.



Şekil 2.1. Dalga hareketleri

2.2.2. Homojen Dalga Denklemi için Başlangıç Değer Problemi

Homojen dalga denklemi için önemli bir problem başlangıç değer problemidir.

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, 0 \leq t < \infty \quad (2.4)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (2.5)$$

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (2.6)$$

problemine, homojen dalga denklemi için başlangıç değer problemi denir. Bu problem, fiziksel olarak, uzunluğu sonsuz farz edilen titreşen bir telin (sicimin) serbest salınımlarını verir.

Şimdi, problemin bir çözümünün mevcut olduğunu varsayalım. Bu çözüm, ϕ ve ψ C^2 sınıfından fonksiyonlar olmak üzere, (2.3) şeklindedir. Buradan (2.5) ve (2.6) başlangıç koşullarının sağlanması için

$$u(x, 0) = \phi(x) + \psi(x) = f(x) \quad (2.7)$$

$$u_t(x, 0) = c[\phi'(x) - \psi'(x)] = g(x) \quad (2.8)$$

olmalıdır. (2.8) den derhal

$$\phi(x) - \psi(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x g(\xi) d\xi + K \quad (2.9)$$

yazılabilir. Burada x_0 ve K keyfi sabitlerdir. (2.7) ve (2.9) denklemlerinden ϕ ve ψ çözülerek

$$\phi(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x g(\xi) d\xi + \frac{K}{2}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x g(\xi) d\xi - \frac{K}{2}$$

ve dolayısıyla (2.3) den

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \phi(x + ct) + \psi(x - ct) \\ &= \frac{1}{2} [f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} \left[\int_{x_0}^{x+ct} g(\xi) d\xi - \int_{x_0}^{x-ct} g(\xi) d\xi \right] \\ &= \frac{1}{2} [f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (2.10)$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

Teorem 2.2.2.1.

Eğer $f(x) \in C^2(-\infty, \infty)$ ve $g(x) \in C^1(-\infty, \infty)$ ise (2.10) fonksiyonu (2.4)-(2.6) başlangıç değer probleminin tek çözümüdür.

İspat: Teoremin ispatı doğrudan doğruya yukarıdaki incelemelerden ve (2.10)'nun istenen özelliklere sahip bir çözüm olduğunun gerçekleşmesinden çıkar. Üstelik inşa gereğince çözüm tektir.

(2.10) çözümüne d'Alembert formülü adı verilir. Başlangıç verilerinin analitik olmasının gerekmediğine dikkat edilmelidir.

Sonuç 2.2.2.1.

(2.4)-(2.6) başlangıç değer probleminin çözümü başlangıç verilerine sürekli bağımlıdır. Yani eğer $u^*(x, t)$,

$$u^*(x, 0) = f^*(x)$$

$$u_t^*(x, 0) = g^*(x)$$

başlangıç koşullarını sağlayan diğer bir çözüm ise ve eğer herhangi bir $\epsilon > 0$ için

$$|f(x) - f^*(x)| < \delta(\epsilon), \quad |g(x) - g^*(x)| < \delta(\epsilon)$$

ise, bu takdirde $|u(x, t) - u^*(x, t)| < \epsilon$ dur.

İspat: İspat doğrudan doğruya d'Alembert formülünden çıkar. Gerçekten $0 \leq t \leq t_0$ için

$$\begin{aligned} |u(x, t) - u^*(x, t)| &\leq \frac{1}{2} |f(x+ct) - f^*(x+ct)| \\ &\quad + \frac{1}{2} |f(x-ct) - f^*(x-ct)| \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} |g(\xi) - g^*(\xi)| d\xi \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

dır. Burada $\epsilon = \delta(1 + ct_0)$ dır.

Tanım 2.2.2.1.

Eğer bir problemin çözümü var, tek ve verilere sürekli bağımlı ise, probleme iyi konulmuş problem denir.

Şu şekilde (2.4)-(2.6) başlangıç değer problemi iyi konulmuş bir problemidir.

Örnek 2.2.2.1.

$$\left. \begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} \\ u(x,0) &= x^3 \\ u_t(x,0) &= x \end{aligned} \right\} \text{başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.}$$

Çözüm: (2.10) d'Alembert formülünden

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2} \left| (x+ct)^3 + (x-ct)^3 \right| + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \xi d\xi \\ &= x^3 + 3xc^2t^2 + \frac{1}{4c} \left| (x+ct)^2 - (x-ct)^2 \right| \\ &= x^3 + 3xc^2t^2 + xt \end{aligned}$$

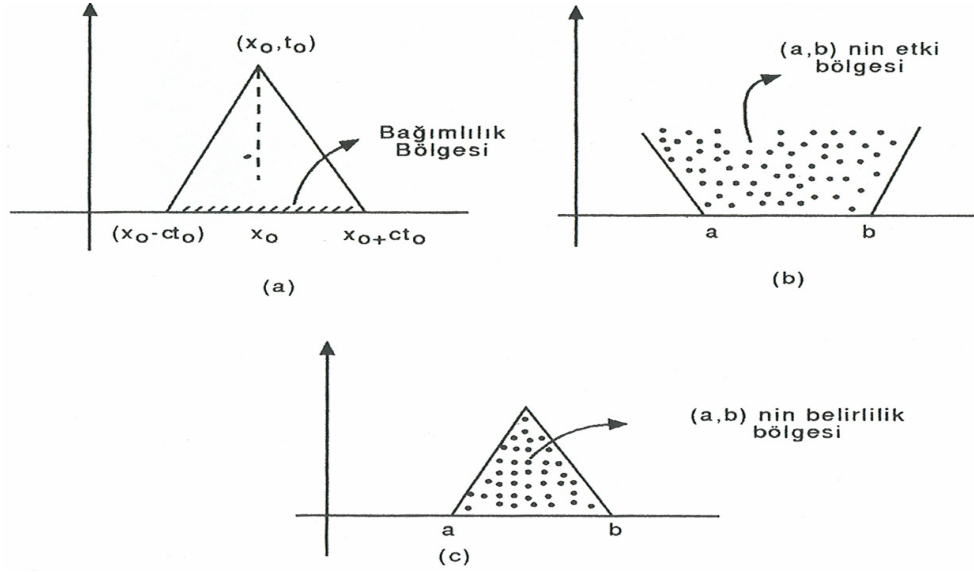
bulunur.

d'Alembert formülü, çözümlerle ilgili önemli sonuçlara sahiptir. Bu sonuçları ifade etmek için, xt -düzleminde bir (x_0, t_0) noktası alalım ve bu noktadan geçen iki karakteristiği çizelim. Bu karakteristiklerin denklemi $x \pm ct = x_0 \pm ct_0$ olur. Bu karakteristikler x eksenini (yani başlangıç doğrusunu) $(x_0 - ct_0, 0)$ ve $(x_0 + ct_0, 0)$ noktalarında keser. d'Alembert formülü

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2} \left| f(x_0 + ct_0) + f(x_0 - ct_0) \right| + \frac{1}{2c} \int_{x_0 - ct_0}^{x_0 + ct_0} g(\xi) d\xi$$

verir. Aşıkarak $u(x_0 - ct_0)$, f ve g başlangıç değerlerinin toplam davranışına değil sadece $|x_0 - ct_0, x_0 + ct_0|$ aralığındaki x lere karşılık gelen değerlerine bağlıdır. Bu nokta cümlesine, (x_0, t_0) noktasına göre bağımlılık bölgesi denir. $a(x_0, t_0) = \{x : |x - x_0| \leq ct_0\}$ ile gösterilir.

Bağımlılık bölgesinin dışında başlangıç verilerindeki bir değişiklik, (x_0, y_0) noktasındaki u değerine etki etmez (Şekil 2.2 (a)). Diğer taraftan, başlangıç doğrusunun (x -ekseni) bir I alt aralığı üzerinde tanımlanan başlangıç değerleri, çözüme, sadece bu aralığın uç noktalarından uzaklaşan iki karakteristik tarafından sınırlanan bölgede etki edebilir. Bu bölgeye, aralığın etki bölgesi denir (Şekil 4.2(b)). Aralığın uç noktalarından çizilen, yakınsayan iki karakteristik tarafından oluşturulan, üçgene de aralığın belirlilik bölgesi denir. Çünkü çözüm, bu bölge içinde, aralık üzerindeki başlangıç verileriyle tam olarak belirtilir (Şekil 2.2(c)). Ayrıca, d'Alembert formülünden ve belirlilik bölgesi tanımından şu sonuç çıkar: Eğer $a \leq x \leq b$ aralığında $f(x) = 0$ ve $g(x) = 0$ ise, bu aralığa ait belirlilik bölgesinde $u = 0$ dır.



Şekil 2.2. Bağımlılık etki ve belirlilik bölgesi

Örnek 2.2.2.2.

$$\left. \begin{array}{l} u_{tt} = c^2 u_{xx} \\ u(x,0) = x^3 \\ u_t(x,0) = x \end{array} \right\} \text{ probleminde, } (-3,5) \text{ noktasına göre bağımlılık bölgesini bulunuz.}$$

Çözüm: $(-3,5)$ noktasından geçen $x \mp ct = -3 \mp 5c$ karakteristiklerinin başlangıç doğrusunun yani x eksenini kestiği noktalar $(-3-5c)$ ve $(-3+5c)$ dir. Dolayısıyla $(-3,5)$ noktasına göre bağımlılık bölgesi $-5c-3 \leq x \leq 5c+3$ yani $|x+3| \leq 5c$ aralığıdır.

Örnek 2.2.2.3.

Örnek 2.2.2.2. de verilen problemde, $I : -3 < x < 2$ aralığının belirlilik bölgesini bulunuz.

Çözüm: Aralığın uç noktalarından geçen kesişen karakteristikler, $x-ct = -3$ ve $x+ct = 2$ doğrularıdır. Böylece I aralığının belirlilik bölgesi, bu doğrular ve x -ekseni tarafından sınırlanan üçgensel bölge yani $\left| x + \frac{1}{2} \right| < \frac{5}{2} - ct$ bölgesidir.

Homojen dalga denklemi için başlangıç değer problemi incelemesini tamamlamadan önce, başlangıç verilerinin yeteri kadar düzgün olmaması halinde çözümün nasıl bir davranış gösterdiğine açıklık getirilebilir. Basit olsun diye (2.4)-(2.6) başlangıç değer probleminde $g(x) = 0$ ve f nin de

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$$

olduğunu varsayalım. Açık olarak $f''(x)$, $x = 0$ noktasında mevcut değildir. Bu halde, başlangıç değer probleminin çözümü

$$u(x,t) = \begin{cases} x^2 + c^2 t^2, & x > ct \\ 2ctx, & |x| \leq ct \\ -(x^2 + c^2 t^2), & x < -ct \end{cases}$$

dır. Görüldüğü gibi bu çözüm birinci mertebeden sürekli türetilebilirdir, fakat ikinci mertebeden türevleri $x - ct = 0$, $x + ct = 0$ doğruları boyunca mevcut değildir. Bu doğrular, gerçekte, (2.1) denkleminin (0,0) noktasından geçen karakteristikleridir. Demek ki, başlangıç verilerindeki bir süreksizlik karakteristikler boyunca yayılır.

2.2.3. Homojen Olmayan Dalga Denklemi İçin Başlangıç Değer Problemi

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t), \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 \leq t < \infty \quad (2.11)$$

$$u(x,0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (2.12)$$

$$u_t(x,0) = g(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (2.13)$$

problemine, homojen olmayan dalga denklemi için başlangıç değer problemi denir. Burada $F(x,t)$, sonsuz uzunluktaki bir sicime etki eden dış kuvveti, örneğin yerçekimi kuvvetini temsil eden verilmiş bir fonksiyondur.

Kolayca görülür ki, eğer $v(x,t)$ homojen olmayan dalga denkleminin $v(x,0) = 0$, $v_t(x,0) = 0$ homojen başlangıç koşullarını sağlayan bir çözümü ve $w(x,t)$ de homojen dalga denkleminin $w(x,0) = f(x)$, $w_t(x,0) = g(x)$ homojen olmayan başlangıç koşullarını sağlayan bir çözümü ise, $u = v + w$ da (2.11) homojen olmayan denkleminin (2.12), (2.13) homojen olmayan başlangıç koşullarını sağlayan çözümüdür. w nun nasıl bulunduğu önceden 2.2.2 de incelendiğinden (2.11)-(2.13) probleminin çözümünün elde edilmesi için v nin, yani $v_{tt} - c^2 v_{xx} = F(x,t)$ denkleminin

$$v(x,0) = v_t(x,0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty \quad (2.14)$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümünün bulunması yeterlidir.

$v_{tt} - c^2 v_{xx} = F(x, t)$ denkleminin (2.14) başlangıç koşullarını sağlayan çözümünü bulmak için, önce

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct \quad (2.15)$$

değişken değişimi ile denklemi ξ, η – karakteristik koordinatlara dönüştürelim.

Böylece

$$v_{\xi\eta} = -\frac{1}{4c^2} F\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2c}\right) \quad (2.16)$$

denklemi elde edilir.

Doğal olarak bundan sonraki adım, (2.16) nın önce ξ ye sonra η ya göre integralini almaktır. Bu integraller, çözüme, ξ ve η nın keyfi fonksiyonlarını dahil edecektir. Fakat (2.11) in (2.12), (2.13) başlangıç koşullarını sağlayan çözümü tek olduğundan, bu keyfi fonksiyonları başlangıç koşulları ile tayin etmek mümkündür.

Şimdi, bu denklem gibi, (2.14) başlangıç koşullarını da ξ, η değişkenleri cinsinden ifade edelim. (2.15) dönüşümü altında $x = 0$ doğrusu $\xi + \eta = 0$ doğrusuna ve $t = 0$ doğrusu da $\xi = \eta$ doğrusuna dönüşür. $\xi - \eta = 2ct$ olduğundan $t > 0$, $\xi > \eta$ olmasını gerektirir. Böylece xt – düzleminin üst yarısı, $\xi\eta$ – düzleminde $\xi = \eta$ doğrusunun üst yarısına dönüşür. $t = 0$ başlangıç doğrusu $\xi = \eta$ doğrusuna dönüştüğünden $\xi\eta$ – düzlemindeki başlangıç koşulları bu doğru boyunca verilmelidir. Başlangıç koşullarından ilki $t = 0$ üzerinde $v = 0$ idi. Bu koşul,

$$\xi = \eta \text{ için } v = 0 \quad (2.17)$$

koşuluna dönüşür. $t = 0$ için $v_t = 0$ başlangıç koşulunu dönüştürmek için, tüm x ler için $v(x, 0) = 0$ olmasının tüm x ler için $v_x(x, 0) = 0$ olmasını gerektirdiğine dikkat edilmelidir. Çünkü x e göre türev alınırken t sabit tutulur. Böylece başlangıç koşullarına $t = 0$ için $v_x = 0$ başlangıç koşulu da ilave edilebilir. Bu koşul, $t = 0$ için $v = 0$ koşulunun bir sonucudur, dolayısıyla ilave bir kısıtlama değildir. Bununla beraber amaç için ilave bir avantaj da sağlar. Çünkü $t = 0$ için $v_x = v_t = 0$ olduğu bilindiğinden,

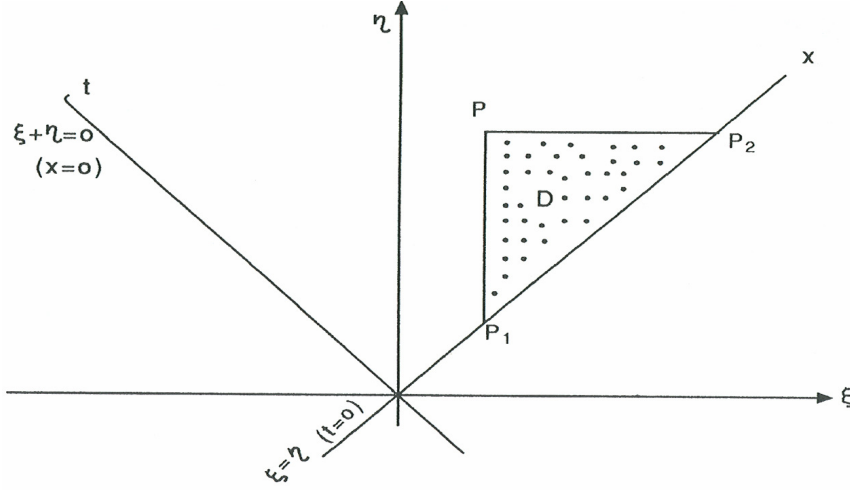
$$\begin{aligned} v_x &= v_\xi + v_\eta \\ v_t &= cv_\xi - cv_\eta \end{aligned}$$

bağıntılarından

$$\xi = \eta \text{ için } v_\xi = v_\eta = 0 \quad (2.18)$$

sonucu çıkarılır. Dikkat edilmelidir ki, (2.17) ve (2.18) deki üç koşul bağımsız değildir. (2.18) deki iki koşuldan biri, (2.17) gereğince başka bir sonucu olur.

Şimdi, $\xi = \eta$ doğrusunun üst yarı düzleminde bir $P(\xi_0, \eta_0)$ noktası seçelim ve denklemin çözümünün belirlilik bölgesinin grafiğini çizelim. Böylece, köşeleri $P(\xi_0, \eta_0)$, $P_1(\xi_0, \xi_0)$, $P_2(\eta_0, \eta_0)$ olan bir üçgen bulunur (Şekil 2.3). Bu üçgen tarafından sınırlanan bölge D olsun. D üçgensel bölgesi üzerinden (2.16) nın iki tarafının integralini alalım. Böylece



Şekil 2.3. İntegral bölgesi

$$\int_{\xi_0}^{\eta_0} \int_{\xi}^{\eta_0} v_{\xi\eta} d\eta d\xi = -\frac{1}{4c^2} \int_{\xi_0}^{\mu_0} \int_{\xi}^{\eta_0} F\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2c}\right) d\eta d\xi$$

$$\int_{\xi_0}^{\eta_0} \int_{\xi}^{\eta_0} [v_{\xi}(\xi, \eta_0) - v_{\xi}(\xi, \xi)] d\xi = \frac{1}{4c^2} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \int_{\xi}^{\eta_0} F\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2c}\right) d\eta d\xi$$

ve buradan (2.17), (2.18) başlangıç koşulları göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned} v(\xi_0, \eta_0) &= \frac{1}{4c^2} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \int_{\xi}^{\eta_0} F\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2c}\right) d\eta d\xi \\ &= \frac{1}{4c^2} \iint_D F\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2c}\right) d\eta d\xi \end{aligned} \quad (2.19)$$

elde edilir. Eğer gerisingeriye xt – koordinat sistemine dönülürse, D üçgensel bölgesi, tepesi (x_0, t_0) noktası, tabanı $t=0$ başlangıç doğrusu ve kenarları (x_0, t_0) noktasından geçen karakteristikler olan bir D_1 üçgensel bölgesi halini alır (Şekil 2.4).

Dönüşümün Jakobiyeni

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, t)} = \begin{vmatrix} 1 & c \\ 1 & -c \end{vmatrix} = -2c$$

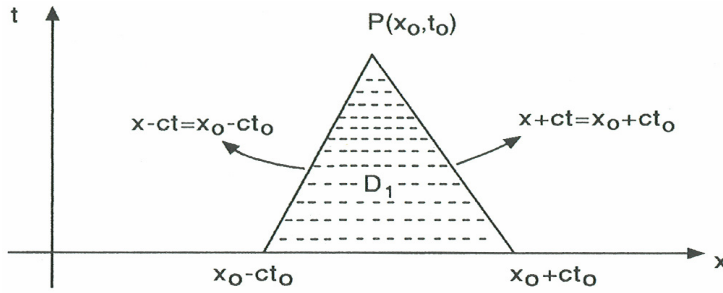
dir. Böylece (2.19) dan

$$\begin{aligned}
v(x_0, t_0) &= \iint_{D_1} \frac{1}{4c^2} F(x, t) (-2c) dx dt \\
&= \frac{1}{2c} \iint_{D_1} F(x, t) dx dt \\
&= \frac{1}{2c} \int_0^{t_0} dt \int_{x_0-c(t_0-t)}^{x_0+c(t_0-t)} F(x, t) dx
\end{aligned} \tag{2.20}$$

veya indisleri kaldırmak suretiyle

$$v(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t dt \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(\xi, \tau) d\xi d\tau \tag{2.21}$$

elde edilir.



Şekil 2.4. Üçgen bölgesi

Böylece (2.11)-(2.13) başlangıç değer problemi için aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

Teorem 2.2.3.1.

$F(x, t)$, $-\infty < x < \infty$, $0 \leq t < \infty$ yarı düzleminde sürekli olsun. Eğer $f \in C^2(-\infty, \infty)$, $g \in C^1(-\infty, \infty)$ ise, bu takdirde

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \frac{1}{2} [f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi) d\xi \\
&\quad + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(\xi, \tau) d\xi d\tau
\end{aligned} \tag{2.22}$$

fonksiyonunu (2.11)-(2.23) başlangıç değer probleminin tek çözümüdür.

İspat: Teoremin ispatı, doğrudan doğruya, yukarıdaki incelemelerden ve (2.22) nin denklemi ve başlangıç koşullarını sağladığı gerçeğinden çıkar.

(2.22) formülü, homojen olmayan dalga denklemi için D'Alembert çözümü olarak bilinir. $F = 0$ olduğunda (2.22) formülü (2.10) formülüne indirgenir. Açıktır ki $u(x, t)$ çözümü, sadece, $|\xi - x| \leq c(t - \tau)$ üçgeninin içi ve sınırı üzerinde bulunan $(\xi - \tau)$ noktalarındaki verilere bağımlıdır.

Karakteristik üçgen denilen bu üçgen, (x, t) noktasının bağımlılık bölgesidir. Çözümün F ve başlangıç verilerine sürekli bağımlı olduğu da kolayca gösterilebilir. Yani, (2.11)-(2.13) problemi iyi konulmuş bir problemidir.

Örnek 2.2.3.1.

$$\left. \begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 1 \\ u(x, 0) &= x^2 \\ u_t(x, 0) &= 1 \end{aligned} \right\} \text{ probleminin çözümünü bulunuz.}$$

Çözüm: Bu problemde, $F(x, t) = 1$, $f(x) = x^2$ ve $g(x) = 1$ dir. Böylece (2.22) formülünden

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \left| (x + ct)^2 + (x - ct)^2 \right| + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} 1.d\xi \\ &+ \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} 1.d\xi d\tau \end{aligned}$$

veya işlemler yapılarak

$$u(x, t) = x^2 + c^2 t^2 + t + \frac{t^2}{2}$$

elde edilir.

2.2.4. Cauchy Problemi

Homojen ve homojen olmayan dalga denklemleri için yukarıda ele alınan başlangıç değer problemlerindeki veriler, x – eksenini üzerinde verilmiştir. Veriler, xt – düzleminde bir eğri üzerinde de verilebilir. Bu durumda probleme, daha önce de ifade edildiği gibi, başlangıç değer problemi yerine genelde Cauchy problemi denir.

Böyle bir problem, kısmî diferensiyel denklem yerine bir integral denklem almak suretiyle kolayca incelenebilir. Bunun için Divergens teoremi kullanılır. Bu teorem; eğer $a(x, y)$ ve $b(x, y)$ fonksiyonları bir Ω bölgesine C^1 sınıfından ve Ω nın kapanışında C sınıfından ise,

$$\iint_{\Omega} (a_x + b_y) dx dy = \int_{\partial\Omega} a dy - b dx \quad (2.23)$$

eşitliğinin geçerli olduğunun ifade eder. Burada sağ taraftaki integral Ω bölgesinin $\partial\Omega$ sınırı üzerinden pozitif yönde alınmış eğrisel integralidir. Basit bağlantılı bir Ω bölgesinde $u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t)$ denkleminin bir çözüme sahip olduğunu varsayalım. Denklemin her iki

tarafının Ω bölgesi üzerinden integralini alalım ve $a = u_x$, $b = u_t$ için (2.23) formülünü uygulayalım. Böylece

$$\int \int_{\Omega} (u_{tt} - c^2 u_{xx}) dx dt = - \int_{\partial\Omega} c^2 u_x dt + u_t dx$$

veya

$$\int \int_{\Omega} F(x, t) dx dt = - \int_{\partial\Omega} c^2 u_x dt + u_t dx \quad (2.24)$$

özdeşliği elde edilir.

Şimdi Ω bölgesi, keyfi bir (x_0, t_0) noktasından geçen C_1 ve C_2 karakteristikleri ve bu karakteristikleri kesen bir Γ eğrisi tarafından oluşturulan üçgensel bölge olsun. Bu durumda Ω nın sınırı $\partial\Omega = C_1 \cup C_2 \cup \Gamma$ olur. (Şekil 2.5.)

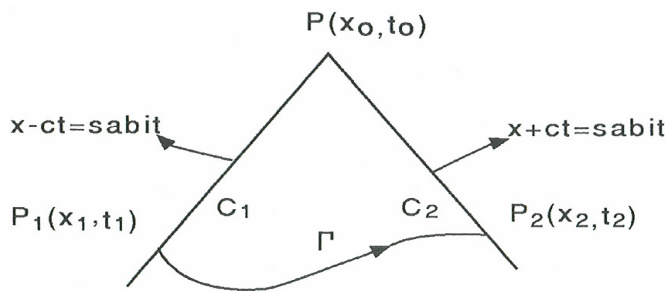
C_1 karakteristiği üzerinde $dx = c dt$ olup eğrisel integralin C_2 boyunca alınan parçası için

$$\begin{aligned} - \int_{C_1} c^2 u_x dt + u_t dx &= - \int_{C_1} c u_x dx + c u_t dt \\ &= -c \int_{C_1} du \\ &= c |u(x_0, t_0) - u(x_1, t_1)| \end{aligned}$$

ve C_2 karakteristiği üzerinde olup eğrisel integralin C_2 boyunca alınan parçası için

$$\begin{aligned} - \int_{C_2} c^2 u_x dt + u_t dx &= - \int_{C_2} c u_x dx + c u_t dt \\ &= c \int_{C_2} du \\ &= c |u(x_0, t_0) - u(x_2, t_2)| \end{aligned}$$

yazılabilir.



Şekil 2.5. Üçgensel sınırlı bölge

Böylece (2.24) özdeşliğinden

$$\begin{aligned} u(x_0, t_0) &= \frac{1}{2} [u(x_1, t_1) + u(x_2, t_2)] + \frac{1}{2c} \int_{\Gamma} c^2 u_x dt + u_t dx \\ &\quad + \frac{1}{2c} \int \int_{\Omega} F(x, t) dx dt \end{aligned} \quad (2.25)$$

elde edilir. Görüldüğü gibi, (2.25) formülü, u nun (x_0, t_0) noktasındaki değerini Γ eğrisi üzerindeki u ve onun u_x, u_t türevlerinin değerleri yardımıyla ifade etmektedir. Dolayısıyla (2.25) formülünün kendisi, açıkça, (2.25) in

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t)$$

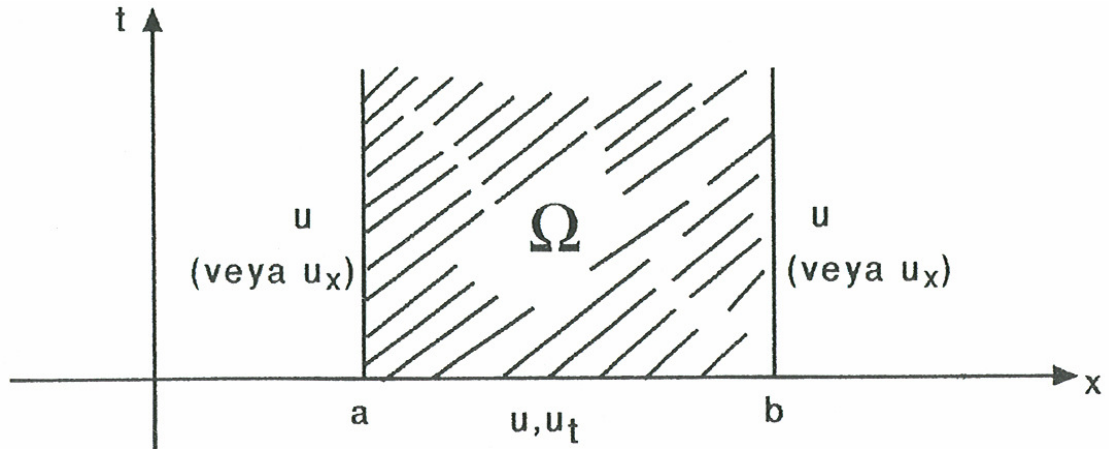
$$u|_{\Gamma} = f(x), \quad u_x|_{\Gamma} = g(t), \quad u_t|_{\Gamma} = h(x)$$

Cauchy probleminin bir çözümü olduğunu belirtir.

Gerçekte, bazı koşullar altında (2.25) in Cauchy probleminin çözümü olduğu gösterilebilir. Bunun için, Cauchy verilerinin Γ üzerinde ve F nin Ω bölgesinde sürekliliğinin yanı sıra $(x_0, t_0) \rightarrow \Gamma$ iken $(x_1, t_1) \rightarrow (x_2, t_2)$ olması, yani (x_0, t_0) noktası Γ başlangıç eğrisine yaklaşırken Ω üçgensel bölgesinin bir noktaya büzülebilmesi gerekir. Çünkü bu halde, formülden, $u(x_0, t_0)$ ın Γ üzerinde önceden verilen değerleri alacağı açıktır. $(x_0, t_0) \rightarrow \Gamma$ iken Ω bölgesinin bir noktaya büzülmesi, örneğin Γ nin eğiminin her noktada 1 den büyük olması halinde mümkün değildir. Bu nedenle Cauchy probleminin çözümünün mevcut olması için, başlangıç eğrisinin eğimleri mutlak değerce 1 den küçük olan eğriler olması gerekir. Böyle eğrilere uzay-tipi (space-like) eğriler denir. Eğimleri mutlak değerce 1 den büyük eğrilere de zaman-tipi (time-like) eğrileri denir. Mesela, x – eksenli dalga denklemi için uzay-tipi, t – eksenli ise zaman-tipi eğridir. Eğer $F \equiv 0$ ise, (4.25) formülü, homojen dalga denklemi için Cauchy probleminin çözümünü temsil eder.

2.3. Başlangıç–Sınır Değer Problemleri

Dalga denklemi için, önceki kısımlarda ele alınan başlangıç veya Cauchy probleminden başka, sınırlı bölgelere kısıtlandırılan fiziksel olaylarla ilgili diğer bazı problemlere de karşılaşılır. Bu tip problemlerde başlangıç verileri, $t = 0$ doğrusunun sonlu bir alt aralığında, mesela $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlanır. Ayrıca bu başlangıç verilerine ilaveten, aralığın uç noktalarında yani $x = a$, $x = b$ doğruları üzerinde u veya u_x ın değerleri de önceden tanımlanır. Böylece, homojen veya homojen olmayan dalga denkleminin, Şekil 2.6. da gösterilen Ω bölgesinde yukarıda verilen koşulları sağlayan çözümleri aranır. Bu tip problemlere başlangıç–sınır değer problemleri denir. Dikkat edileceği gibi, elde edilen çözümlerin C^2 sınıfından olması için başlangıç ve sınır verilerinin sürekliliği ve türetebilirliğin yanı sıra bu verilen uyumluluk koşulları denilen koşulları sağlamaları da gerekir. Hemen belirtmelidir ki, bunlardan başka başlangıç–sınır değer problemleri de tanımlanabilir. Burada, sadece, yukarıda tanımlanan başlangıç–sınır değer problemleri ele alınabilir.



Şekil 2.6. Ω bölgesi

Aşağıdaki teorem, başlangıç-sınır değer problemlerinin makul problemler olduğunu gösterir.

Teorem 2.3.1.

Dalga denklemi için yukarıda tanımlanan başlangıç-sınır değer problemlerinin çözümü tektir.

İspat: v ve w nın farklı iki çözüm olduğuna varsayalım. Bu takdirde $u = v - w$, homojen dalga denkleminin homojen başlangıç ve sınır koşullarını sağlayan bir çözümdür. Dolayısıyla teoremi ispat etmek için gösterilmelidir ki, eğer u fonksiyonu $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ homojen dalga denkleminin $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$ homojen başlangıç koşullarını ve $u(a,t) = u(b,t) = 0$ (veya $u_x(a,t) = u_x(b,t) = 0$) homojen sınır koşullarını bir çözümü ise, $u \equiv 0$ dır.

$$I(t) = \frac{1}{2} \int_a^b [(cu_x)^2 + (u_t)^2] dx \quad (2.26)$$

integralini göz önüne alalım. $I(t)$, sistemin toplam enerjisini verir. $I(t)$ nin t ye göre türevi

$$\frac{dI(t)}{dt} = \int_a^b (c^2 u_x u_{xt} + u_t u_{tt}) dx$$

olup $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ olduğu dikkate alınır,

$$\begin{aligned} \frac{dI(t)}{dt} &= c^2 \int_a^b (u_t u_{xx} + u_x u_{xt}) dx \\ &= c^2 \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} (u_x u_t) dx \\ &= c^2 [u_x(b,t) u_t(b,t) - u_x(a,t) u_t(a,t)] \end{aligned}$$

elde edilir. Fakat sınır koşulları $u_t(b, t) = u_t(a, t) = 0$ veya $u_x(b, t) = u_x(a, t) = 0$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla $\frac{dI(t)}{dt} = 0$ veya $I(t) = \text{sabit}$ olur. Başlangıçta $u_x(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$ olduğundan, (2.26) dan $I(0) = 0$ bulunur. Böylece $I(t) \equiv 0$ dır. Diğer taraftan (2.26) daki integrand pozitif tanımlı olduğundan, $I(t) = 0$ ancak ve ancak $u_x(x, t) = 0$ ve $u_t(x, t) = 0$ olması halinde mümkündür ki bu $u = \text{sabit}$ olduğunu ifade eder. Ancak $t = 0$ için $u = 0$ olduğundan $u \equiv 0$ olmalıdır. Bu, teoremi ispat eder.

Şimdi başlangıç-sınır değer problemlerine bir örnek olarak,

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 & (0 < x < \ell), (t > 0) \\ u(x, 0) &= f(x) & (0 \leq x \leq \ell) \\ u_t(x, 0) &= g(x) & (0 \leq x \leq \ell) \\ u(0, t) &= 0 & (t \geq 0) \\ u(\ell, t) &= 0 & (t \geq 0) \end{aligned} \quad (2.27)$$

problemini ele alalım. Burada f ve g fonksiyonları $f(0) = f(\ell) = g(0) = g(\ell) = 0$ uyumluluk koşullarını sağlar. Bu problem, fiziksel olarak, iki ucu tespit edilmiş bir sicimin serbest salınımlarını verir. Problemin bir çözümünün mevcut olduğunu varsayalım. Bu çözümü (2.3) şeklindedir. Çözümü elde etmek için (2.3)deki ϕ ve ψ fonksiyonları başlangıç ve sınır koşulları sağlanacak şekilde tayin etmeye çalışabiliriz. $u(x, 0) = f(x)$ ve $u_t(x, 0) = g(x)$ başlangıç koşulları kullanılarak (2.3) den önceden bilindiği gibi

$$\phi(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(\xi) d\xi + \frac{K}{2} \quad (0 \leq x \leq \ell) \quad (2.28)$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(\xi) d\xi - \frac{K}{2} \quad (0 \leq x \leq \ell) \quad (2.29)$$

elde edilir. Dikkat edilirse, ϕ ve ψ fonksiyonları $0 \leq x \leq \ell$ koşuluna uyan x ler için tanımlıdır. Böylece $0 \leq x + ct \leq \ell$ ve $0 \leq x - ct \leq \ell$ için

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \phi(x + ct) + \psi(x - ct) \\ &= \frac{1}{2} [f(x + ct) + f(x - ct)] \\ &\quad + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (2.30)$$

elde edilir. Kolayca gerçekleştirilebilir ki, eğer f fonksiyonu C^2 sınıfından ve g de C^1 sınıfından ise,

(2.30) fonksiyonu $t \leq \frac{x}{c}$, $t \leq \frac{\ell - x}{c}$, $t \geq 0$ ile tanımlanan üçgen bölgede homojen dalga

denklemini ve başlangıç koşullarını sağlar ve başlangıç verileriyle tek olarak belirtir. Ancak burada bir

güçlük vardır: $f(x)$, $g(x)$ ve dolayısıyla $\phi(x)$, $\psi(x)$ sadece $0 \leq x \leq \ell$ aralığında tanımlıdır. Oysa, t , 0 dan ∞ a kadar değiştiğinden büyük t 'ler için $x \pm ct$ argümanları $[0, \ell]$ aralığının dışında da olabilir. Bundan dolayı büyük t 'ler için de $u(x, t)$ yi tayin edebilmek için $\phi(x)$, $\psi(x)$ veya $f(x)$, $g(x)$ fonksiyonlarını $[0, \ell]$ aralığının dışına genişletmek gerekir. Bunun için $u(0, t) = 0$, $u(\ell, t) = 0$ sınır koşullarını kullanacaktır. (2.3) den

$$\begin{aligned}\phi(ct) + \psi(-ct) &= 0 \quad (t \geq 0) \\ \phi(\ell + ct) + \psi(\ell - ct) &= 0 \quad (t \geq 0)\end{aligned}\tag{2.31}$$

elde edilir. Eğer $x = -ct$ konursa (2.31) deki ilk bağıntı

$$\psi(x) = -\phi(-x) \quad (x \leq 0)\tag{2.32}$$

ve $x = \ell + ct$ konursa (4.31) deki ikinci bağıntı

$$\phi(x) = -\psi(2\ell - x) \quad (x \geq \ell)\tag{2.33}$$

olur. $0 \leq x \leq \ell$ aralığında $\phi(x)$ bilindiğinden (2.32) kullanılarak $-\ell \leq x \leq 0$ aralığında $\psi(x)$ bulunabilir. Böylece $-\ell \leq x \leq \ell$ aralığında $\psi(x)$ elde edilmiş olur. $\psi(x)$, $0 \leq x \leq \ell$ aralığında bilindiğinden, (2.33) kullanılarak $\ell \leq x \leq 2\ell$ aralığında $\phi(x)$ bulunabilir. Şimdi ϕ ve ψ fonksiyonları 2ℓ uzunluğunda bir aralıkta tanımlıdır. Diğer taraftan (2.32) ve (2.33) bağlantılarından

$$\begin{aligned}\phi(2\ell + x) &= -\psi(x) \\ \psi(2\ell + x) &= \phi(x)\end{aligned}\tag{2.34}$$

elde edilir. Yani, ϕ ve ψ fonksiyonları 2ℓ periyodik fonksiyonlardır, dolayısıyla tüm reel değerli x ler için tanımlıdır. Diğer taraftan $f(x) = \phi(x) + \psi(x)$ ve $g(x) = c[\phi'(x) - \psi'(x)]$ olduğundan

$$\begin{aligned}f(-x) &= \phi(-x) + \psi(-x) \\ &= -\psi(x) - \phi(x) = -f(x) \\ g(-x) &= c[\phi'(-x) - \psi'(-x)] \\ &= c[c\psi'(x) - \phi'(x)] = -g(x) \\ f(x + 2\ell) &= f(x) \\ g(x + 2\ell) &= g(x)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu formüller, f ve g fonksiyonlarının $[0, \ell]$ aralığının dışına çıkarak $[-\ell, 0]$ da devam ettiğini ve bu fonksiyonların 2ℓ periyotlu periyodik fonksiyonlar olduğunu gösterir.

Demek ki, eğer $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $0 \leq x \leq \ell$ aralığının dışına 2ℓ periyotlu tek fonksiyonlar olarak genişletilebiliyorlar ise, problemin sınır koşulları da sağlanacak ve çözüm (2.30) formülü ile verilecektir. $f(x)$ ve $g(x)$ in genişletmeleri sırasıyla $\hat{f}$ ve $\hat{g}$ ile gösterilirse sonuçları bir teorem olarak ifade edilebilir.

Teorem 2.3.2.

Eğer $\hat{f}$ ve $\hat{g}$ fonksiyonları tüm reel eksen üzerinde sırasıyla C^2 ve C^1 sınıfından ise,

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [\hat{f}(x+ct) + \hat{f}(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \hat{g}(\xi) d\xi \quad (2.35)$$

fonksiyonu (2.27) başlangıç sınır değer probleminin tek çözümüdür.

Uyarı 2.3.1.

$\hat{f}$ fonksiyonunun C^2 ve $\hat{g}$ fonksiyonunun C^1 sınıfından olması için gerek ve yeter koşul.

i) f ve g nin $0 < x < \ell$ de sırasıyla C^2 ve C^1 sınıfından

ii) f ve g nin $0 \leq x \leq \ell$ de sürekli

iii) $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$, $f''_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'_+(x) - f'_+(0)}{x}$ ve benzer biçimde

$f''_-(\ell)$, $f''(\ell)$, $g'_+(0)$, $g'_-(\ell)$ mevcut

iv) $f(0) = f(\ell) = g(0) = g(\ell) = f''_+(0) = f''_-(0) = 0$

olmasıdır.

Uyarı 2.3.2.

f ve g fonksiyonlarını $0 \leq x \leq \ell$ aralığında bir Fourier-sinüs serisine açmak çok kolay bir şekilde başarılabilir. Eğer

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad \text{ve} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

değerleri f ve g nin fourier sinüs açılımları ise, (2.29) başlangıç-sınır değer probleminin çözümü olarak (2.30) dan

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sin \frac{n\pi(x+ct)}{\ell} + \sin \frac{n\pi(x-ct)}{\ell} \right) - \frac{\ell}{2\pi c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} b_n \left(\cos \frac{n\pi(x+ct)}{\ell} - \cos \frac{n\pi(x-ct)}{\ell} \right)$$

veya

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi ct}{\ell} + \frac{\ell}{n\pi c} b_n \sin \frac{n\pi ct}{\ell} \right] \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

elde edilir. Burada

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx, \quad b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} g(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx$$

dır.

Dolayısıyla dalga denklemi fizikte çok önemli yere sahip bir kısmi diferensiyel denklemdir. Bu denklemin çözümlerinden ses, ışık ve su dalgalarının hareketlerini tanımlamada fiziksel nicelikler ortaya çıkar. Kullanım alanı akustik, akışkanlar mekaniği ve elektromanyetikte oldukça fazladır.

2.4. İkinci Basamaktan Hemen-Hemen Lineer Denklemler İçin Bir Sınıflandırma, Kanonik Forma İndirgeme

İkinci basamaktan, iki bağımsız değişkenli hemen-hemen lineer bir denklemin en genel şekli

$$A(x, y)z_{xx} + B(x, y)z_{xy} + C(x, y)z_{yy} + H(x, y, z, z_x, z_y) = 0 \quad (2.36)$$

dir. Burada $A, B, C \in C^2[D]$ 'dir. Diğer yandan

$$\Delta(x, y) := [B(x, y)]^2 - 4A(x, y)C(x, y)$$

fonksiyonunu tanımlansın.

Tanım 2.4.1.

(2.36) denklemine

- i) $\Delta(x, y) > 0$ eşitsizliğinin sağladığı noktalarda hiperbolik;
- ii) $\Delta(x, y) = 0$ eşitliğinin sağladığı noktalarda parabolik;
- iii) $\Delta(x, y) < 0$ eşitsizliğinin sağladığı noktalarda eliptik

tiptendir denir.

Örnek 2.4.1.

$(x^2 - 1)z_{xx} + 2yz_{xy} - z_{yy} + z_x + z_y = 0$ denkleminin tipini belirtiniz.

Çözüm: $A(x, y) = x^2 - 1$, $B(x, y) = 2y$, $C(x, y) = -1$ olduğundan dolayı $\Delta(x, y)$ fonksiyonu

$$\Delta(x, y) = B^2 - 4AC = 4y^2 - 4AC = 4y^2 - 4(x^2 - 1)(-1) = 4(x^2 + y^2) - 4$$

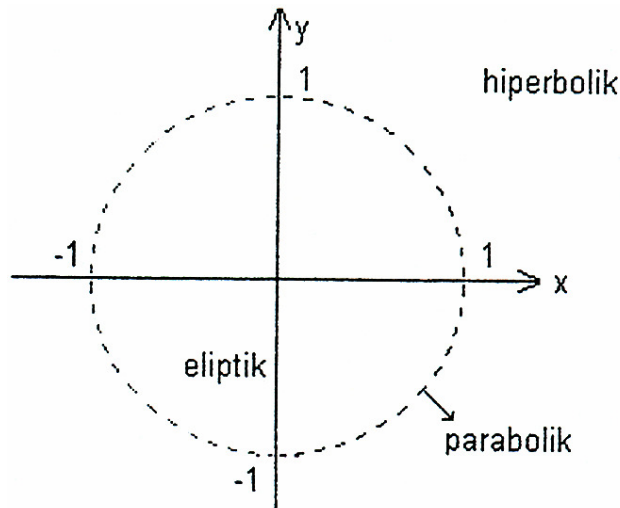
şeklinde elde edilir. Buna göre verilen denklem

$D_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 > 1, x, y \in R\}$ bölgesinde hiperbolik;

$D_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, x, y \in R\}$ çemberi üzerinde parabolik;

$D_3 = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1, x, y \in R\}$ açık diskinde eliptik tiptendir.

Bunun için aşağıdaki Şekil 2.7. ye bakılabilir.



Şekil 2.7. Birim çemberde denklem tipleri

2.4.1. Kısmi Türevli Denklemlerin Genel Bir Sınıflandırılması

Burada kısmi türevli denklemlerin genel bir sınıflandırılması yapılacaktır.

Tanım 2.4.1.

Bir kısmi türevli denklemdeki bağımlı değişken (birden fazla bağımlı değişken olması halinde bağımlı değişkenler) ve bunların denklemdeki bütün kısmi türevleri birinci dereceden ve denklemi, bağımlı değişken ile onun türevleri parantezinde yazdığımızda katsayılar yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonu oluyorsa bu denkleme lineerdir denir. Aksi halde lineer olmayan denklem adını alır.

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci basamaktan lineer kısmi türevli denklemlerin genel formları sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$P(x, y)z_x + Q(x, y)z_y + R(x, y)z = S(x, y) \quad (2.37)$$

$$A(x, y)z_{xx} + B(x, y)z_{xy} + C(x, y)z_{yy} + D(x, y)z_x + E(x, y)z_y + F(x, y)z = G(x, y) \quad (2.38)$$

(2.37) ve (2.38) denklemlerinde x, y bağımsız; z bağımlı değişkendir.

Örnek 2.4.1.

$U_t - k(U_{xx} + U_{yy}) = 0$ (k sabit) iki boyutlu ısı denklemi ikinci basamaktan lineer bir denklemdir. Burada x, y, t bağımsız; U bağımlı değişkendir. Diğer taraftan

$$i) \quad z z_{xy} - z_x z_y = 0$$

$$ii) \quad z_{xy} z_{xx} - 3z_{yy} - 6xz_y + xyz = 0$$

$$iii) \quad z_x (z_{xy})^2 + 2xz z_{yy} - 3xyz_y = 0$$

lineer olmayan denklemlerdir.

Tanım 2.4.2.

Bir kısmi türevli denklem, denkleminde bulunan en yüksek basamaktan kısmi türevlere göre (denklemdaki bütün basamaklı türevlerin ve bağımlı değişkenin bulunuş şekline göre bağımsız olarak) lineer ise bu denklem yarı-lineer (kuasi-lineer) adını alır.

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci basamaktan yarı-lineer denklemlerin genel şekilleri sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$P(x, y, z)z_x + Q(x, y, z)z_y = R(x, y, z), \quad (2.39)$$

$$A(x, y, z, z_x, z_y)z_{xx} + B(x, y, z, z_x, z_y)z_{xy} + C(x, y, z, z_x, z_y)z_{yy} + D(x, y, z, z_x, z_y) = 0 \quad (2.40)$$

Bağımsız değişkenlerin ikiden fazla olması halinde (2.39) ve (2.40) a benzer şekilde yarı-lineer denklemler yazılabilir. Her lineer denklem aynı zamanda yarı-lineerdir, fakat yarı-lineer bir denklem lineer olmayabilir.

Tanım 2.4.3.

İçinde en az iki bağımsız ve en az bir bağımlı değişken ile bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre çeşitli basamaktan kısmi türevlerini kapsayan eşitliklere bir kısmi türevli denklem denir.

z bağımlı; x ve y bağımsız değişkenler olmak üzere bir kısmi türevli denklem genel olarak $F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{yy}, \dots) = 0$ şeklindedir. Burada

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad z_y = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dots$$

dir. n bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip kısmi türevli denklemlerin genel şekli, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), z = (x)$ olmak üzere $F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, z_{x_1}, \dots, z_{x_n}, z_{x_1 x_1}, z_{x_1 x_2}, \dots) = 0$ formundadır. Burada $x_1, x_2, \dots, x_n$ bağımsız değişkenleri; z ise bağımlı değişkeni göstermekte ve

$$z_{x_i} = \frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad z_{x_i y_j} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial y_j}; \quad i, j = 1, 2, \dots, n \text{ dir. } w \text{ ile } v \text{ bağımlı; } x \text{ ile } y \text{ bağımsız}$$

değişkenler olmak üzere

$$w \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} = x + y$$

$$v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial y} = x - y$$

sistemi ve u ile v bağımlı; x ile y bağımsız değişkenler olmak üzere

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Cauchy-Riemann sistemi iki bağımlı, iki bağımsız değişkene sahip kısmi türevli denklemlere örneklerdir.

Tanım 2.4.4.

Bir kısmi türevli denklemde görülen en yüksek basamaktan kısmi türevin basamağına denklemin basamağı denir.

Örnek 2.4.2.

$U_{tt} + aU_t = c^2 U_{xx}$ (a, c : sabit) sönümlü dalga denklemi ikinci basamaktan bir kısmi türevli denklemdir.

Adi diferensiyel denklemlerin genel çözümleri, denklemin basamağı kadar keyfi sabit kapsayan ve her noktasından teğet doğruların çizilebildiği eğri aileleridir. Bu eğri aileleri xy – düzlemindeydir. Kısmi türevli denklemlerin genel çözümleri ise denklemin basamağı kadar keyfi fonksiyon kapsayan ve her noktasından teğet düzlemlerin çizilebildiği yüzey aileleridir. Adi türevli denklemlerde önceden verilen bir noktadan geçen çözümü araştırırken bir başlangıç veya sınır değeri problemi ortaya çıkar. Buna karşılık kısmi türevli denklemlerde ise önceden verilen bir eğriden geçen çözümün araştırılması Cauchy Problemi olarak ortaya çıkar.

Tanım 2.4.5.

Bir kısmi türevli denklemi özdeş olarak sağlayan ve keyfi fonksiyon veya keyfi parametre kapsamayan bir fonksiyona bu kısmi türevli denklemin bir özel çözümü denir. Diğer taraftan bir kısmi türevli denklemin basamağı kadar (sürekli türetilir) keyfi fonksiyon kapsayan ve denklemini özdeş olarak sağlayan bir yüzey ailesine bu kısmi türevli denklemin genel çözümü denir.

Keyfi fonksiyon kapsayan bir yüzey ailesinin, bir denklemin genel çözümü olabilmesi için bu fonksiyon veya fonksiyonların en az denklemin basamağı kadar sürekli türetilir olmaları gerekir.

3. BİR BOYUTLU DALGA DENKLEMİNİN DEĞİŞKENLERİNE AYRILABİLİR ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde, hiperbolik tipten denklemlerin önemli bir örneği olan, bir boyutlu dalga denklemlerinin değişkenlerine ayrılabilir çözümleri incelenecektir.

3.1. Homojen Hal

Uçları sabitleştirilmiş bir sicimin titreşim hareketi incelerken

$$U_{tt} - c^2 U_{xx} = 0, \quad 0 < x < b, t > 0 \quad (3.1)$$

$$\left. \begin{aligned} U(x,0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq b \\ U_t(x,0) &= g(x), \quad 0 \leq x \leq b \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

$$U(0,t) = U(b,t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (3.3)$$

şeklinde bir başlangıç ve sınır değer problemi ele alınabilir. Bazı fiziksel problemleri incelerken denklemin genel çözümünden çok, parametrelere bağlı belli formlarda çözüm aramak daha uygun olmaktadır. Genellikle de özel tipten çözümlerin aranması, fiziksel problemin özelliğinden dolayı doğal olarak ortaya çıkar. Bunlardan birisi üstel tipten çözümler iken diğer bir belli tipten çözüm ise değişkenlerine ayrılabilir formdaki çözümlerdir. Bu durumda kısmi türevli denklem, adi türevli denkleme dönüşür.

Şimdi (3.1) denkleminin

$$U(x,t) = X(x) T(t) \quad (3.4)$$

formunda çözümü aransın. Burada X sadece x in, T ise sadece t nin fonksiyonları olup en az ikinci basamaktan sürekli türevlere sahip oldukları kabul edilmektedir. (3.4)'ün gerekli türevlerini, (3.1)'de yerine yazılırsa

$$XT'' - c^2 X''T = 0 \quad (3.5)$$

olur. (3.5) denklemini $c^2 XT$ ile bölünürse ($XT \neq 0$)

$$\frac{T''}{c^2 T} - \frac{X''}{X} = 0 \quad (3.6)$$

elde ederiz. (3.6) ifadesi

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X} \quad (3.7)$$

şeklinde yazılırsa (3.7) nin sağ tarafı sadece x e sol tarafı ise sadece t ye bağlıdır. Bu durumda t , $[0, +\infty)$ aralığında değişirse sağ taraf t ye bağlı olmadığından değişmeyecektir. Aynı şekilde x , $[0, b]$ aralığında değişirse bu defa sol taraf x e bağlı olmadığından değişmeyecektir. O halde (3.7) nin her iki tarafı, x, t ler değiştiği halde sabit kalmaktadır. Yani

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2 T} = -\lambda, \quad (\lambda \text{ sabit}) \quad (3.8)$$

dır. Burada λ nın önündeki eksi işaretinin incelemede pek önemi yoktur. Ancak çözümün yapısını biraz etkiler. Başlangıç ve sınır koşullarının kullanılması ise çözümün yapısına bağlıdır. Verilen koşullara bakarak λ sabiti uygun şekilde seçilmelidir. Mesela $\lim_{t \rightarrow \infty} U(x, t) = 0$ şeklinde bir koşul verilirse o zaman $T(t)$ fonksiyonunu trigonometrik formda değil, λ nın işaretini değiştirerek üstel formda yazmak daha uygundur.

(3.8) deki λ sabitine ayırma sabiti denir. (3.8) den

$$X'' + \lambda X = 0, \quad T'' + c^2 \lambda T = 0 \quad (3.9)$$

adi türevli denklemleri yazılabilir. Bu denklemlerin genel çözümleri sırasıyla

$$X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda} x) + B \sin(\sqrt{\lambda} x) \quad (3.10)$$

$$T(t) = D^* \cos(\sqrt{\lambda} ct) + E^* \sin(\sqrt{\lambda} ct) \quad (3.11)$$

şeklindedir. Burada A, B, D^*, E^* keyfi sabitlerdir. Diğer taraftan (3.3) ile verilen $U(0, t) = U(b, t) = 0$ sınır koşulları

$$X(0) = X(b) = 0 \quad (3.12)$$

şeklinde gelir. $X(0) = 0$ koşulundan $A = 0$ bulunur. O halde çözüm

$$X(x) = B \sin(\sqrt{\lambda}x) \text{ koşulundan}$$

$$B \sin(\sqrt{\lambda}b) = 0 \quad (3.13)$$

bulunur. Burada $B \neq 0$ olmalıdır. Aksi halde aşikâr çözüm bulunur. (3.13) den $\sqrt{\lambda}b = n\pi, n = 1, 2, \dots$ elde edilir. O halde buradan

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{b^2}, n = 1, 2, \dots \quad (3.14)$$

olmalıdır. Buna göre her $n \in N$ için

$$X_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \quad (3.15)$$

fonksiyonu (3.9) daki birinci denklemin (3.3) sınır koşullarını sağlayan çözümdür. Diğer taraftan (3.14) değerleri (3.11) çözümünde kullanılırsa

$$T_n(t) = D_n^* \cos\left(\frac{n\pi c}{b}t\right) + E_n^* \sin\left(\frac{n\pi c}{b}t\right) \quad (3.16)$$

olur. (3.15) ve (3.16), (3.4) de yerine yazılırsa verilen dalga denkleminin sadece (3.3) sınır koşullarını sağlayan çözümü her $n \in N$ için

$$U_n(x, t) = \sin \frac{n\pi x}{b} \left[D_n \cos\left(\frac{n\pi c t}{b}\right) + E_n \sin\left(\frac{n\pi c t}{b}\right) \right], n = 1, 2, \dots$$

şeklinde olur. Dalga denklemini lineer olduğundan üst üste bindirme kuralından

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{b} \left[D_n \cos\left(\frac{n\pi c t}{b}\right) + E_n \sin\left(\frac{n\pi c t}{b}\right) \right] \quad (3.17)$$

yazılabilir. Burada $D_n = B_n D_n^*, E_n = B_n E_n^*$ dir. (3.17) ifadesi bir biçimsel çözümdür. (3.17) deki ilk başlangıç koşulunun (3.17) de kullanılmasıyla

$$U(x,t) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right), 0 \leq x \leq b \quad (3.18)$$

olur. Diğer taraftan

$$U_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \left[-D_n \frac{n\pi c}{b} \sin\left(\frac{n\pi c t}{b}\right) + E_n \frac{n\pi c}{b} \cos\left(\frac{n\pi c t}{b}\right) \right]$$

olup (3.2) deki ikinci başlangıç koşulunun kullanılmasıyla

$$U_t(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \frac{n\pi c}{b} \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \quad (3.19)$$

elde edilir. (3.19) un her iki tarafı $\sin\left(\frac{m\pi x}{b}\right)$ ifadesi ile çarpılıp 0 dan b ye kadar integrallenirse

$$\int_0^b f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{b}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \int_0^b \sin\left(\frac{m\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) dx = D_m \frac{b}{2} \quad (3.20)$$

olur. Çünkü

$$\int_0^b \sin\left(\frac{m\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ \frac{b}{2}, m = n \end{cases}$$

dir. Böylece (3.20) den

$$D_n = \frac{2}{b} \int_0^b f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) dx \quad (3.21)$$

elde edilir. Aynı şekilde (3.19) un her iki tarafı $\sin\left(\frac{m\pi x}{b}\right)$ ile çarpılıp 0 dan b ye kadar

integrallenirse,

$$\begin{aligned} \int_0^b g(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{b}\right) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} E_n \frac{n\pi c}{b} \int_0^b \sin\left(\frac{m\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) dx \\ &= E_m \frac{m\pi c b}{b} \frac{b}{2} = E_m \frac{m\pi c}{2} \end{aligned} \quad (3.22)$$

olur. Böylece (3.22) den

$$E_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^b g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) dx \quad (3.23)$$

elde edilir. (3.21) ve (3.23) katsayıları hesaplanıp (3.17) de yerine yazılırsa istenilen koşulları sağlayan serisel çözüm

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{b} \left\{ \left[\frac{2}{b} \int_0^b f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) dx \right] \cos\left(\frac{n\pi ct}{b}\right) + \left[\frac{2}{n\pi c} \int_0^b g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) dx \right] \sin\left(\frac{n\pi ct}{b}\right) \right\} \quad (3.24)$$

olarak bulunmuş olur.

Örnek 3.1.1.

$$\begin{aligned} U_{tt} - c^2 U_{xx} &= 0, \quad 0 < x < b, \quad t > 0 \\ U(x,0) &= A \sin \omega x, \quad 0 \leq x \leq b, \quad (A, \omega \text{ sabitler}) \\ U_t(x,0) &= 1, \quad 0 \leq x \leq b \\ U(0,t) &= 0, \quad t \geq 0 \\ U(b,t) &= 0, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

başlangıç ve sınır değer problemini çözünüz.

Çözüm: Bu denklemin $U(0,t) = U(b,t) = 0$ koşullarını sağlayan çözümü (3.17) bağıntısından

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{b}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{b}\right) \right]$$

şeklindedir. Şimdi $U(x,0) = A \sin \omega x, U_t(x,0) = 1$ koşulları kullanılsın.

$$U(x,0) = A \sin \omega x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right)$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{b} \int_0^b A \sin \omega x \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) dx \\ &= \frac{2A}{b} \int_0^b \frac{1}{2} \left[\cos\left(\omega - \frac{n\pi}{b}\right)x - \cos\left(\omega + \frac{n\pi}{b}\right)x \right] dx \\ &= \frac{A}{b} \left[\frac{1}{\omega - \frac{n\pi}{b}} \sin\left(\omega - \frac{n\pi}{b}\right)x - \frac{1}{\omega + \frac{n\pi}{b}} \sin\left(\omega + \frac{n\pi}{b}\right)x \right] \Bigg|_0^b \\ &= \frac{A}{b} \left[\frac{b}{b\omega - n\pi} \sin(b\omega - n\pi) - \frac{b}{b\omega + n\pi} \sin(b\omega + n\pi) \right] \\ &= \frac{A}{b} \left[\frac{b}{b\omega - n\pi} (\sin b\omega \cos n\pi) - \frac{b}{b\omega + n\pi} (\sin b\omega \cos n\pi) \right] \\ &= A(-1)^n \left(\frac{1}{b\omega - n\pi} - \frac{1}{b\omega + n\pi} \right) \sin b\omega \\ &= A(-1)^n \left(\frac{\omega b + n\pi - b\omega + n\pi}{b^2 \omega^2 - n^2 \pi^2} \right) \sin b\omega \\ &= A(-1)^n \left(\frac{2n\pi}{b^2 \omega^2 - n^2 \pi^2} \right) \sin b\omega \end{aligned}$$

bulunur. Diğer koşulun kullanılmasıyla,

$$U_t(x,0) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi c}{b} \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right)$$

olup buradan B_n katsayısı

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{b}{n\pi c} \frac{2}{b} \int_0^b 1 \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) dx = \frac{2}{n\pi c} \left[-\frac{b}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \right] \Bigg|_0^b \\ &= -\frac{2b}{cn^2 \pi^2} [\cos n\pi - 1] = \frac{2b}{cn^2 \pi^2} [1 - (-1)^n] \\ &= \begin{cases} \frac{4b}{cn^2 \pi^2} , & n = 2k + 1 \\ 0 , & n = 2k ; k = 0,1,2,\dots \end{cases} \end{aligned}$$

veya

$$B_{2n} = 0 , \quad B_{2n+1} = \frac{4b}{c\pi^2 (2n+1)^2} , \quad n = 0,1,2,\dots$$

olarak elde edilir. O halde serisel çözüm

$$U(x,t) = 2\pi A \sin b\omega \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(b^2\omega^2 - (2n+1)^2\pi^2)} \sin\left(\frac{2n\pi x}{b}\right) \cos\left(\frac{2n\pi ct}{b}\right) \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{b}\right) \left[-2A \sin b\omega \cdot \frac{(2n+1)\pi}{b^2\omega^2 - (2n+1)^2\pi^2} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi ct}{b}\right) \right. \\ \left. + \frac{4b}{c\pi^2(2n+1)^2} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi ct}{b}\right) \right]$$

şeklindedir. Bu seri yakınsak ise o zaman $U(x,t)$, dalga denkleminin verilen başlangıç ve sınır koşullarını sağlayan çözümü olur.

Tanım 3.1.1.

Elde edilen bu serisel çözümler yakınsak değilse çözüme biçimsel (formel) çözüm denir.

Bu durumda, (3.2) ile verilen $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının trigonometrik, yani, $p, q \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\sin(p\pi x)$, $\cos(q\pi x)$ tipindeki fonksiyonların lineer birleşimleri oluyor ise bu durumda serisel çözüm sadece sonlu çokluktaki terimlerin toplamından oluşur.

Örnek 3.1.2.

$$U_{tt} - 16U_{xx} = 0 ; 0 < x < 2, t > 0 \\ U(x,0) = 6\sin(\pi x) - 3\sin(4\pi x) ; 0 \leq x \leq 2 \\ U_t(x,0) = 0 \text{ ve } |U(x,t)| < M \\ U(0,t) = U(2,t) = 0 ; t \geq 0$$

başlangıç ve sınır değer problemini çözünüz.

Çözüm: Verilen denklemin $U(0,t) = U(2,t) = 0$ sınır koşullarını sağlayan çözümü, $c = 4$

için

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) [A_n \cos(2n\pi t) + B_n \sin(2n\pi t)]$$

formunda olup (3.1)'den

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{2} \int_0^2 [6 \sin(\pi x) - 3 \sin(4\pi x)] \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx \\ &= 6 \int_0^2 \sin(\pi x) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx - 3 \int_0^2 \sin(4\pi x) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitlikteki ilk integral $n = 2$; ikinci integral $n = 8$ için hesaplanırsa, A_n katsayısı

$$A_n = \begin{cases} 6 & , \quad n = 2 \\ -3 & , \quad n = 8 \end{cases}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan $g(x) = 0$ olduğundan, $B_n = 0$ dır. O halde, tüm başlangıç ve sınır koşullarını sağlayan çözüm

$$U(x,t) = 6 \sin(\pi x) \cos(4\pi t) - 3 \sin(4\pi x) \cos(16\pi t)$$

olarak bulunur.

3.2. Homojen Olmayan Hal

Şimdi

$$U_{tt} - c^2 U_{xx} = F(x,t) \quad , \quad 0 < x < b, \quad t > 0 \quad (3.25)$$

$$\left. \begin{aligned} U(0,t) &= 0, \quad t \geq 0 \\ U(b,t) &= 0, \quad t \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

$$\left. \begin{aligned} U(x,0) &= 0, \quad 0 \leq x \leq b \\ U_t(x,0) &= 0, \quad 0 \leq x \leq b \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

sınır ve başlangıç değer problemini göz önüne alınsın. Burada sınır ve başlangıç koşullarının homojen olduğuna dikkat edilsin. Fiziksel olarak bu problem, sicimi hareket ettiren bir dış kuvvetin mevcut olduğunu ve sicimin denge konumundan (başlangıç konumu ve başlangıç hızı sıfır) dış kuvvetin etkisinde kalarak hareket ettiğini gösterir. Şimdi φ_n 'ler belirlenmek üzere (3.25) denkleminin

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \quad (3.28)$$

formunda bir çözümü aransın. Burada (3.28) in (3.26) sınır koşullarını sağladığına dikkat edilsin. Eğer (3.28) uygun bir bölgede yakınsak ise o zaman bu biçimsel çözüm gerçek çözüm olur ve homojen sınır koşullarını sağlar. Bunun yanında

$$\varphi_n(0) = 0, \quad \varphi'_n(0) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.29)$$

koşulları gerçekleşirse o zaman (3.28) fonksiyonu (3.27) başlangıç koşullarını da sağlar.

(3.28) den U_{tt} , U_{xx} türevleri hesaplanıp (3.25) homojen olmayan dalga denkleminde yerine yazarsak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi''_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) + c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \varphi_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) = F(x,t)$$

olur. Buradan $\omega_n^2 = \frac{n^2 \pi^2 c^2}{b^2}$ olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\varphi''_n(t) + \omega_n^2 \varphi_n(t)] \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) = F(x,t) \quad (3.30)$$

yazılabilir. (3.30) un her iki tarafını $\sin\left(\frac{k\pi x}{b}\right)$ ile çarpıp $x = 0$ dan $x = b$ ye kadar integre edilirse

$\sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right)$, $(n = 1, 2, \dots)$ lerin diklik özelliğinden

$$\varphi''_n(t) + \omega_n^2 \varphi_n(t) = \frac{2}{b} \int_0^b F(x,t) \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) dx =: F_n(t) \quad (3.31)$$

yazılabilir. Diğer taraftan $\varphi''_n(t) + \omega_n^2 \varphi_n(t) = F_n(t)$ denkleminin (3.29) koşullarını sağlayan çözümünün

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{\omega_n} \int_0^t F_n(\xi) \sin[\omega_n(t - \xi)] d\xi \quad (3.32)$$

şeklinde olduğu daha sonra da ifade edilebilir.

(3.32) nin (3.28) de yerine yazılmasıyla biçimsel çözüm

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \left\{ \frac{1}{\omega_n} \int_0^t F_n(\xi) \sin[\omega_n(t-\xi)] d\xi \right\} \quad (3.33)$$

şeklinde bulunur. Burada $F_n(t)$ (3.31) eşitliğinden hesaplanmaktadır. Ayrıca $\varphi_n(t)$ fonksiyonunun her seçimi için (3.28) çözümü; (3.26) sınır koşullarını sağlar.

Not 3.2.1.

$$\begin{aligned} U_{tt} - c^2 U_{xx} &= 0, \quad 0 < x < b, \quad t > 0 \\ U(0,t) &= U(b,t) = 0, \quad t \geq 0 \\ U(x,0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq b \\ U_t(x,0) &= g(x), \quad 0 \leq x \leq b \end{aligned}$$

olarak tanımlanan Cauchy probleminin çözümü $U_1(x,t)$;

$$\begin{aligned} U_{tt} - c^2 U_{xx} &= F(x,t), \quad 0 < x < b, \quad t > 0 \\ U(0,t) &= U(b,t) = 0, \quad t \geq 0 \\ U(x,0) &= 0, \quad 0 \leq x \leq b \\ U_t(x,0) &= 0, \quad 0 \leq x \leq b \end{aligned}$$

probleminin çözümü $U_2(x,t)$ ise bu takdirde

$$\left. \begin{aligned} U_{tt} - c^2 U_{xx} &= F(x,t), \quad 0 < x < b, \quad t > 0 \\ U(0,t) &= U(b,t) = 0, \quad t \geq 0 \\ U(x,0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq b \\ U_t(x,0) &= g(x), \quad 0 \leq x \leq b \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

şeklinde tanımlanan Cauchy probleminin çözümü

$$U(x,t) = U_1(x,t) + U_2(x,t) \quad (3.35)$$

formundadır. Halbuki $U_1(x, t)$, (3.1) in (3.2) ve (3.3) koşullarını sağlayan çözümdür. Bu çözüm daha önce (3.24) ile verilmektedir. Diğer taraftan $U_2(x, t)$ çözümü ise (3.33) ile verilen çözüme eşittir. Böylece (3.34) Cauchy probleminin (3.35) ile ifade edilen çözümü

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \left\{ \frac{1}{\omega_n} \int_0^t F_n(\xi) \sin[\omega_n(t - \xi)] d\xi \right\} \quad (3.36)$$

olur. Burada

$$A_n = \frac{2}{b} \int_0^b f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) dx, \\ B_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^b g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) dx, \\ F_n(t) = \frac{2}{b} \int_0^b F(x, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

dir.

Şimdi

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n''(t) + \omega_n^2 \varphi_n''(t) &= F(t) \\ \varphi_n(0) &= 0, \quad \varphi_n'(0) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

başlangıç değer probleminin nasıl çözüleceği görülebilir. Bunun için önce $L\varphi_n = \varphi_n'' + \omega_n^2 \varphi_n$ şeklinde L operatörü göz önüne alınsın. Öte yandan ψ, t nin en az ikinci basamaktan türeve sahip bir başka fonksiyonu olmak üzere

$$\begin{aligned} \psi L\varphi_n - \varphi_n L\psi &= \psi(\varphi_n'' + \omega_n^2 \varphi_n) - \varphi_n(\psi'' + \omega_n^2 \psi) = \psi\varphi_n'' - \varphi_n\psi'' \\ &= \frac{d}{dt}(\psi\varphi_n' - \varphi_n\psi') \end{aligned} \quad (3.38)$$

yazılabilir. Diğer taraftan (3.37) denklemi, L operatörü yardımıyla $L\varphi_n(t) = F_n(t)$ şeklinde yazılabilir. Şimdi, ψ fonksiyonu $L\psi = 0$ olacak şekilde seçilsin. Bunun bir özel çözümünün t sabit

olmak üzere $\psi(\xi) = \sin[\omega_n(t - \xi)]$ şeklinde alınabileceği açıktır. Bu açıklamaları da göz önüne alarak (3.38) in her iki tarafı $\xi = 0$ dan $\xi = t$ ye kadar integrallenirse,

$$\int_0^t (\psi L \varphi_n - \varphi_n L \psi) d\xi = \int_0^t \frac{d}{d\xi} (\psi \varphi_n' - \varphi_n \psi') d\xi = (\psi \varphi_n' - \varphi_n \psi') \Big|_0^t$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} \int_0^t F_n(\xi) \sin(\omega_n(t - \xi)) d\xi &= (\psi \varphi_n' - \varphi_n \psi') \Big|_0^t \\ &= [\varphi_n'(\xi) \sin(\omega_n(t - \xi)) + \omega_n \varphi_n(\xi) \cos(\omega_n(t - \xi))] \Big|_{\xi=0}^t \\ &= [\varphi_n'(t) \sin(\omega_n \cdot 0) + \omega_n \varphi_n(t) \cos(\omega_n \cdot 0)] - [\varphi_n'(0) \sin(\omega_n t) + \omega_n \varphi_n(0) \cos(\omega_n t)] \\ &= \omega_n \varphi_n(t) \end{aligned}$$

olur. Çünkü başlangıç koşullarından $\varphi_n'(0) = 0$ dır. Burada istenilen koşulları gerçekleyen çözüm

$$\psi' = \frac{d\psi}{d\xi} \text{ olmak üzere}$$

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{\omega_n} \int_0^t F_n(\xi) \sin \omega_n(t - \xi) d\xi$$

olur.

Örnek 3.2.1.

$$\begin{aligned} U_{tt} - c^2 U_{xx} &= F_0 \sin \omega t, \quad (F_0, \omega \text{ realsabitler}) \quad 0 < x < b \\ U(0, t) &= U(b, t) = 0, \quad t \geq 0 \\ U(x, 0) &= 0, \quad U_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq b \end{aligned}$$

Cauchy problemini çözünüz.

Çözüm: $f(x) = g(x) = 0$ olduğundan (3.36) çözümündeki A_n, B_n katsayıları sıfır olur.

Diğer taraftan (3.31) den dolayı $F_n(t)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned}
F_n(t) &= \frac{2}{b} \int_0^b F(x,t) \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) dx \\
&= \frac{2}{b} \int_0^b F_0 \sin \omega t \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) dx \\
&= \frac{2F_0 \sin \omega t}{b} \left[-\frac{b}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \right] \Big|_0^b \\
&= \frac{2F_0 \sin \omega t}{b} \frac{b}{n\pi} [1 - (-1)^n] \\
&= \begin{cases} \frac{4F_0 \sin \omega t}{b} & , n \text{ tek ise} \\ 0 & , n \text{ çift ise} \end{cases}
\end{aligned}$$

olup böylece

$$F_{2k+1}(t) = \frac{4F_0 \sin \omega t}{(2k+1)\pi} , k = 0,1,2,\dots$$

bulunur. Bunu, (3.32) bağıntısında kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\varphi_{2n+1}(t) &= \frac{1}{\omega_{2n+1}} \int_0^t \frac{4F_0 \sin \omega \xi}{\pi(2n+1)} \sin[\omega_{2n+1}(t-\xi)] d\xi \\
&= \frac{4F_0}{\omega_{2n+1} \pi(2n+1)} \int_0^t \sin(\omega \xi) \sin[\omega_{2n+1}(t-\xi)] d\xi \\
&= \frac{4bF_0}{(2n+1)^2 \pi c^2} \int_0^t \{\cos[\omega \xi - \omega_{2n+1}(t-\xi)] - \cos[\omega \xi + \omega_{2n+1}(t-\xi)]\} d\xi \\
&= \frac{2bF_0}{(2n+1)^2 \pi c} \int_0^t \{\cos[(\omega + \omega_{2n+1})\xi - \omega_{2n+1}t] - \cos[(\omega - \omega_{2n+1})\xi + \omega_{2n+1}t]\} d\xi \\
&= \frac{2bF_0}{(2n+1)^2 \pi c} \left\{ \frac{1}{\omega + \omega_{2n+1}} \sin[(\omega + \omega_{2n+1})\xi - \omega_{2n+1}t] \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\omega - \omega_{2n+1}} \sin[(\omega - \omega_{2n+1})\xi + \omega_{2n+1}t] \right\} \Big|_{\xi=0}^t \\
&= \frac{2bF_0 \omega_{2n+1}}{(2n+1)^2 \pi c (\omega^2 - \omega_{2n+1}^2)} (\sin \omega_{2n+1}t - \sin \omega t)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu fonksiyonu (3.28) de yerine yazıp düzenlenirse Cauchy probleminin serisel çözümü

$$U(x,t) = \frac{2bF_0}{\pi c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_{2n+1} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{b}\right)}{(2n+1)^2 (\omega^2 - \omega_{2n+1}^2)} [\sin(\omega_{2n+1}t) - \sin(\omega t)]$$

olarak elde edilir. Burada $\omega_{2n+1} = \frac{(2n+1)\pi c}{b}$ dir.

3.3. Dikdörtgensel Bölgede İki Boyutlu Dalga Denklemi

Bir önceki kısımda, düzlemde, bir boyutlu çeşitli dalga hareketlerini incelendi. Bu kısımda $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b; x, y \in R\}$ dikdörtgensel bölgesine yerleştirilmiş bir zar veya levhanın titreşim hareketinin zamanla nasıl değiştiği incelenecektir. D bölgesine yerleştirilmiş zarın kenarlarının tamamen sabitleştirildiğini varsayalım. Herhangi bir t anında titreşen zarın hangi konumda olduğunu veren $U(x, y, t)$ fonksiyonunu bulmak için

$$U_{tt} - c^2 (U_{xx} + U_{yy}) = 0; 0 < x < a, 0 < y < b, t > 0 \quad (3.39)$$

$$\left. \begin{aligned} U(x, y, 0) &= f(x, y); 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b \\ U_t(x, y, 0) &= g(x, y); 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

$$U(0, y, t) = U(a, y, t) = U(x, 0, t) = U(x, b, t) = 0 \quad (3.41)$$

şeklinde tanımlanan başlangıç ve sınır değer probleminin çözülmesi gerekir. Burada f ve g , D bölgesinde, düzgün yakınsak katlı Fourier serisine açılabilen fonksiyonlardır. Bir başka deyişle, f ve g , Dirichlet koşullarını sağlamalıdır.

Şimdi (3.39) denkleminin

$$U(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t) \quad (3.42)$$

formunda değişkenlerine ayrılabilir tipten çözümü aranabilir. (3.42) nin gerekli türevlerinin (3.39) da yerine yazılması ve c^2XYT ile her iki tarafın bölünmesiyle

$$\frac{T''}{c^2T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} \quad (3.43)$$

bulunur. $(x, y) \in D$ noktaları, D bölgesinde değiştiği halde, (3.43) ün sol tarafı değişmemektedir. Benzer şekilde $t > 0$ zaman değişkeni değiştiği halde (3.43) ün sağ tarafı değişmemektedir. O halde, (3.43) ün her iki tarafı da aynı sabite eşittir. Böylece k bir ayırma sabiti olmak üzere

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -k^2 \quad (3.44)$$

yazılabilir. Diğer taraftan, (3.44) ün sağ tarafındaki iki eşitlikten

$$\frac{X''}{X} = -k^2 - \frac{Y''}{Y} \quad (3.45)$$

olup benzer şekilde, $0 < x < a$ için (3.45) in sağ tarafı; $0 < y < b$ için sol tarafı değişmeyeceğinden,

$$\frac{X''}{X} = -k^2 - \frac{Y''}{Y} = -h^2, \quad (h \text{ ayırma sabiti}) \quad (3.46)$$

yazılabilir. Böylece (3.44) ve (3.46) dan

$$\begin{aligned} T'' + k^2 c^2 T &= 0 \\ X'' + h^2 X &= 0 \\ Y'' + l^2 Y &= 0, \quad l^2 = k^2 - h^2 \end{aligned}$$

olup bu denklemlerin genel çözümleri, A, B, C, D, E, F keyfi reel sabitler olmak üzere, sırasıyla

$$T(t) = A \cos(kct) + B \sin(kct) \quad (3.47)$$

$$X(x) = C \cos(hx) + D \sin(hx) \quad (3.48)$$

$$Y(y) = E \cos(ly) + F \sin(ly) \quad (3.49)$$

bulunur. Diğer taraftan (3.41) sınır koşulları sırasıyla

$$X(0) = 0, \quad X(a) = 0 \quad (3.50)$$

$$Y(0) = 0, \quad Y(b) = 0 \quad (3.51)$$

şekline gelir. (3.50) koşullarının (3.48) çözümüne uygulanmasıyla,

$$X_m(x) = D_m \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right), \quad m = 1, 2, \dots$$

bulunur. Tamamen benzer şekilde, (3.51) in (3.49) da kullanılmasıyla,

$$Y_n(y) = F_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

elde edilir. Buradan

$$U_{mn}(x, y, t) = D_m F_n \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) [A_{mn} \cos(\alpha_{mn} ct) + B_{mn} \sin(\alpha_{mn} ct)]$$

veya

$$U_{mn}(x, y, t) = [M_{mn} \cos(\alpha_{mn} ct) + N_{mn} \sin(\alpha_{mn} ct)] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

olur. Burada

$$\begin{aligned} M_{mn} &= D_m F_n A_{mn} \\ N_{mn} &= D_m F_n B_{mn} \\ \alpha_{mn}^2 &= \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \end{aligned}$$

dir. İki boyutlu dalga denkleminin lineer olması nedeniyle U_{mn} lerin toplamları da aynı denklemi sağlar. O halde, tüm sınır koşullarını sağlayan biçimsel çözüm,

$$U(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [M_{mn} \cos(\alpha_{mn} ct) + N_{mn} \sin(\alpha_{mn} ct)] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.52)$$

olarak bulunur. Burada M_{mn}, N_{mn} keyfi parametrelerdir.

Şimdi (3.52) çözümüne (3.40) başlangıç koşulları uygulansın. $U(x, y, 0) = f(x, y)$ koşulundan

$$U(x, y, 0) = f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} M_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.53)$$

elde edilir. (3.53) ün her iki tarafını $\sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right)$ ile çarpıp D bölgesi üzerinden

integrallenirse $m \neq p, n \neq q$ için sağdaki integrallerin sonucunun sıfır olması nedeniyle M_{mn} katsayısı $m = p, n = q$ için

$$M_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy dx \quad (3.54)$$

olarak bulunur. Öte yandan (3.52) nin her iki tarafı t 'ye göre türev alınıp sonra t yerine sıfır yazılırsa,

$$U_t(x, y, 0) = g(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} N_{mn} \alpha_{mn} c \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

bulunur. Bunun her iki tarafı yine $\sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right)$ ile çarpılıp D dikdörtgeni üzerinden

integrellenirse N_{mn} katsayısı $p = m, q = n$ için

$$N_{mn} = \frac{4}{\alpha_{mn} abc} \int_0^a \int_0^b g(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy dx \quad (3.55)$$

şeklinde elde edilir. (3.54) ve (3.55) ile hesaplanan katsayılar (3.52) de yerine yazılırsa bütün başlangıç ve sınır değer koşullarını aynı anda sağlayan çözüm elde edilmiş olur.

M_{mn}, N_{mn} katsayılarını hesaplarken (3.53) deki iki katlı serinin düzgün yakınsak olduğunu kabul edilmektedir. Aksi halde integral ile toplamın yer değiştirmesi mümkün olmayabilir.

Tanım 3.3.1.

(3.39), (3.40) ve (3.41) ile tanımlanan Cauchy problemindeki $f(x, y)$ fonksiyonuna titreşimin başlangıç konumu, $g(x, y)$ fonksiyonuna ise başlangıç hızı denir.

Örnek 3.3.1.

$$\begin{aligned} U_{tt} - c^2(U_{xx} + U_{yy}) &= 0, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi, \quad t > 0 \\ U(x, y, 0) &= x^2 y^2, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq \pi \\ U_t(x, y, 0) &= 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq \pi \\ U(0, y, t) &= U(\pi, y, t) = U(x, 0, t) = U(x, \pi, t) = 0, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

olarak tanımlanan Cauchy problemini çözünüz.

Çözüm: $g(x, y) = 0$ olduğundan (3.52) deki N_{mn} katsayısı sıfır olur. Bu durumda bütün sınır koşullarını sağlayan çözüm, $a = b = \pi$ olması nedeniyle

$$U(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} M_{mn} \cos[(m^2 + n^2)ct] \sin(mx) \sin(ny)$$

dir. $U(x, y, 0) = x^2 y^2$ koşulundan

$$U(x, y, 0) = x^2 y^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} M_{mn} \sin(mx) \sin(ny)$$

elde edilir. (3.54) den

$$\begin{aligned} M_{mn} &= \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} x^2 y^2 \sin(mx) \sin(ny) dy dx \\ &= \frac{4}{\pi^2} \left[\int_0^{\pi} x^2 \sin(mx) dx \right] \left[\int_0^{\pi} y^2 \sin(ny) dy \right] \\ &= \frac{4}{\pi^2 \left[\frac{2\pi(-1)^m}{m^2} \cdot \frac{2\pi(-1)^n}{n^2} \right]} \\ &= \frac{16}{m^2 n^2} (-1)^{m+n} \end{aligned}$$

olup böylece verilen problemin çözümü

$$U(x, y, t) = 16 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{m^2 n^2} \cos[(m^2 + n^2)ct] \sin(mx) \sin(ny)$$

olarak bulunur.

Üç boyutlu uzayda bir prizma içine yerleştirilmiş bir cismin veya gazın (bir dış kuvvetin etkisinde kalmaksızın) serbest titreşim hareketi yapması halinde bu defa üç boyutlu dalga denklemi ortaya çıkar. Başlangıç konumu veya başlangıç hızından en az birinin sıfırdan farklı ve sınır noktalarında titreşimin sıfır olması halinde herhangi bir t anındaki cismin konumunu veren $U(x, y, z, t)$ fonksiyonunu bulmak için

$$U_{tt} - c^2 (U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}) = 0; 0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < d, t > 0 \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} U(x, y, z, 0) &= f(x, y, z) \\ U_t(x, y, z, 0) &= g(x, y, z) \end{aligned} ; 0 \leq x \leq a, 0 \leq z \leq d \} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} U(0, y, z, t) &= U(a, y, z, t) = U(x, 0, z, t) = U(x, b, z, t) \\ &= U(x, y, 0, t) = U(x, y, d, t) = 0, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (3.58)$$

şeklinde tanımlanan bir Cauchy probleminin çözülmesi gerekir. Yine (3.56) nın

$$U(x, y, z, t) = X(x) Y(y) Z(z) T(t) \quad (3.59)$$

şeklinde değişkenlerine ayrılabilir tipten çözümü aranır, gerekli türevlerin yerine yazılması ve her iki tarafın $c^2 XYZT$ ile bölünmesi sonunda

$$\frac{T''}{c^2 T} - \left(\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} \right) = 0$$

elde edilir. Buradan, ayırma sabitinin anlamı nedeniyle

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = -\lambda^2, \quad (\lambda \text{ ayırma sabiti})$$

yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned} T'' + c^2 \lambda^2 T &= 0 \\ \frac{X''}{X} &= -\lambda^2 - \frac{Y''}{Y} - \frac{Z''}{Z} \end{aligned} \quad (3.60)$$

olur. Ayırma sabiti düşüncesiyle ikinci denklem

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2 - \frac{Y''}{Y} - \frac{Z''}{Z} = -\alpha^2, \quad (\alpha \text{ ayırma sabiti})$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$X'' + \alpha^2 X = 0 \quad (3.61)$$

$$\frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = \alpha^2 - \lambda^2 \quad (3.62)$$

elde edilir. Eğer $\alpha^2 - \lambda^2 = -\beta^2$ denirse (3.62) den

$$\frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = -\beta^2 - \lambda^2, \quad (\gamma \text{ ayırma sabiti})$$

olup eğer $\beta^2 - \gamma^2 = \sigma^2$, (σ ayırma sabiti) denirse,

$$Y'' + \gamma^2 Y = 0 \quad (3.63)$$

$$Z'' + \sigma^2 Z = 0 \quad (3.64)$$

elde edilir. Burada, ayırma sabitlerinin karesinin alınması ve eksi işaretinin konulması, sadece çözümlerin trigonometrik formda olması için böyle alınmasa çözümler üstel veya hiperbolik fonksiyonlar cinsinden elde edilmesi ancak mümkün olabilir. Diğer taraftan (3.58) deki $U(0, y, z, t) = U(a, y, z, t) = 0$ koşulları, $X(0) = X(a) = 0$ koşullarına dönüşmüştür. Bu koşullar altında, (3.61) denklemini çözülürse

$$X_m(x) = B_m \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right), \quad m = 1, 2, \dots; \quad (B_m \text{ ler keyfi}) \quad (3.65)$$

bulunur. Tamamen aynı düşünceyle

$$Y'' + \gamma^2 Y = 0, \quad Y(0) = Y(b) = 0$$

$$Z'' + \sigma^2 Z = 0, \quad Z(0) = Z(d) = 0$$

sınır değer problemleri çözülürse sırasıyla

$$Y_n(y) = D_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad n = 1, 2, \dots; \quad (D_n \text{ ler keyfi}) \quad (3.66)$$

$$Z_k(z) = E_k \sin\left(\frac{k\pi z}{d}\right), \quad k = 1, 2, \dots; \quad (E_k \text{ ler keyfi}) \quad (3.67)$$

elde edilir. Diğer taraftan (3.60) ın genel çözümü de

$$T(t) = M \cos(c\lambda t) + N \sin(c\lambda t) \quad (3.68)$$

olur. Ancak $\alpha^2 - \lambda^2 = -\beta^2$ den $\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2$ ve $\beta^2 - \gamma^2 = \sigma^2$ den $\beta^2 = \sigma^2 + \gamma^2$ olması nedeniyle $\gamma^2 = \alpha^2 + \gamma^2 + \sigma^2$ yazılabilir. Diğer taraftan, sınır koşullarının kullanılmasıyla,

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{a}, \gamma_n = \frac{n\pi}{b}, \sigma_k = \frac{k\pi}{d}$$

olması gerektiği kolayca görülebilir. Böylece

$$\lambda^2 = \lambda_{mnk}^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{k^2}{d^2} \right); m, n, k = 1, 2, \dots$$

olur. O halde, (3.68) çözümü

$$T_{mnk}(t) = M_{mnk} \cos(\lambda_{mnk} ct) + N_{mnk} \sin(\lambda_{mnk} ct); (M_{mnk}, N_{mnk} \text{ keyfi sabitler})$$

formunda ortaya çıkar. Böylece, tüm sınır koşullarını sağlayan biçimsel çözüm

$$U(x, y, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} [M_{mnk}^* \cos(\lambda_{mnk} ct) + N_{mnk}^* \sin(\lambda_{mnk} ct)] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{k\pi z}{d}\right) \quad (3.69)$$

şeklinde elde edilir. Diğer iki başlangıç koşullarından

$$\begin{aligned} U(x, y, z, 0) &= f(x, y, z) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} M_{mnk}^* \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{k\pi z}{d}\right) \\ U_t(x, y, z, 0) &= g(x, y, z) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{mnk} c N_{mnk}^* \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{k\pi z}{d}\right) \end{aligned}$$

bulunur. Bu son eşitliklerin her iki tarafı $\sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{l\pi z}{d}\right)$ ile çarpılıp yine her iki tarafın $D = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq d; x, y, z \in R\}$ bölgesi üzerinden integraller alınır. Serinin düzgün yakınsaklığının da kullanılmasıyla $p = m, q = n, l = k$ için

$$M_{mnk}^* = \frac{8}{abd} \int_0^a \int_0^b \int_0^d f(x, y, z) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{k\pi z}{d}\right) dz dy dx$$

$$N_{mnk}^* = \frac{8}{\lambda_{mnk} cabd} \int_0^a \int_0^b \int_0^d g(x, y, z) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{k\pi z}{d}\right) dz dy dx$$

katsayıları kolayca elde edilir. Bu katsayılar (3.69) da yerine yazılırsa tüm sınır ve başlangıç koşullarını sağlayan $U(x, y, z, t)$ çözümü ortaya çıkmış olur.

Bu kısımda incelenen dalga denklemleri homojen olduğundan, titreşim hareketlerini yaptıran dış kuvvet yoktur. Gerek iki boyutlu gerekse üç boyutlu titreşim hareketlerinde, dalganın başlangıç konumu ve başlangıç hızı sıfır ise, yani $f = g = 0$ ise, bu durumda hareket olmayacağından $u = 0$ aşikâr çözümünün ortaya çıkacağı açıktır. Çünkü $f = g = 0$ ise her iki katsayı da sıfır olur.

3.4. Sınırları Sabitleştirilmiş Dikdörtgensel Bir Zarın Dış Kuvvetin Etkisi

Altındaki Titreşim Hareketi

Homojen dikdörtgen bir zarın $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b; x, y \in R\}$ bölgesine yerleştirildiği, zarın kenarlarının sabitleştirildiği ve $F(x, y, t)$ şeklinde bir dış kuvvetin etkisinde kalarak titreşim hareketi yaptığı varsayılın. Bu durumda, herhangi bir t anında zarın hangi konumda olduğunu belirlemek için

$$U_{tt} - c^2(U_{xx} + U_{yy}) = F(x, y, t) ; 0 < x < a, 0 < y < b, t > 0 \quad (3.70)$$

$$\left. \begin{aligned} U(x, y, 0) &= f(x, y) ; 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b \\ U_t(x, y, 0) &= g(x, y) ; 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b \end{aligned} \right\} \quad (3.71)$$

$$U(0, y, t) = U(a, y, t) = U(x, 0, t) = U(x, b, t) = 0 ; t \geq 0 \quad (3.72)$$

şeklinde tanımlanan Cauchy probleminin çözülmesi gerekir.

Şimdi (3.70) denkleminin

$$U(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{mn}(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.73)$$

formunda çözümünü ararsın. Bu çözümün, (3.72) sınır koşullarının tümünü sağladığına dikkat edilebilir. Bu durumda, $U(x, y, t)$ çözümü (3.71) ile verilen başlangıç koşullarını sağlayacak şekilde $\varphi_{mn}(t)$ fonksiyonunun bulunması gerekir. (3.73) ün gerekli türevleri (3.70) de yerine yazılırsa basit bir düzenlemeyle

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\varphi_{mn}''(t) + c^2 \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) \varphi_{mn}(t) \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = F(x, y, t)$$

elde edilir. Kısa olması nedeniyle $\omega_{mn}^2 = \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2}$ denirse son denklem

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\varphi_{mn}''(t) + c^2 \omega_{mn}^2 \varphi_{mn}(t) \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = F(x, y, t) \quad (3.74)$$

haline gelir. (3.74) ün her iki tarafı $\sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right)$ ile çarpılıp D bölgesi üzerinden yine her iki tarafın integrali alınırsa,

$$\left[\varphi_{mn}''(t) + c^2 \omega_{mn}^2 \varphi_{mn}(t) \right] \frac{ab}{4} = \int_0^a \int_0^b F(x, y, t) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy dx \quad (3.75)$$

bulunur. Burada $p, q \in N$ dir. Eğer

$$F_{mn}(t) := \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b F(x, y, t) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy dx \quad (3.76)$$

denirse (3.75) ifadesi kısaca

$$\varphi_{mn}''(t) + c^2 \omega_{mn}^2 \varphi_{mn}(t) = F_{mn}(t) \quad (3.77)$$

olarak yazılabilir. (3.77) ifadesi ikinci basamaktan sabit katsayılı homojen olmayan adi türevli diferensiyel denklemdir. Böylece (3.77) nin çözülmesiyle $\varphi_{mn}(t)$ fonksiyonları daha önce olduğu gibi,

M_{mn}, N_{mn} keyfi parametreler olmak üzere

$$\begin{aligned} \varphi_{mn}(t) &= M_{mn} \cos(c\omega_{mn}t) + N_{mn} \sin(c\omega_{mn}t) \\ &+ \frac{1}{c\omega_{mn}} \int_0^t F_{mn}(\xi) \sin[\omega_{mn}c(t-\xi)] d\xi \end{aligned} \quad (3.78)$$

şeklinde bulunur. O halde sadece sınır koşullarını sağlayan çözüm

$$U(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \{M_{mn} \cos(c\omega_{mn}t) + N_{mn} \sin(c\omega_{mn}t) + \frac{1}{c\omega_{mn}} \int_0^t F_{mn}(\xi) \sin[\omega_{mn}c(t-\xi)] d\xi\} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.79)$$

olarak bulunur. Şimdi (3.71) başlangıç koşullarını sağlayan çözümü arayalım. $U(x, y, 0) = f(x, y)$ den

$$U(x, y, 0) = f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} M_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

olur. Burada M_{mn} 'ler $f(x, y)$ fonksiyonunun katlı Fourier sinüs serisi açılımının katsayıları olup daha önceki düşünceyle

$$M_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy dx \quad (3.80)$$

elde edilir. $U_t(x, y, 0) = g(x, y)$ başlangıç koşulundan

$$U_t(x, y, 0) = g(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} N_{mn} \omega_{mn} c \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

olur. Burada (3.78) den $\phi'_{mn}(0) = N_{mn} \omega_{mn} c$ olacağına dikkat edilebilir. Böylece

$$N_{mn} = \frac{4}{\omega_{mn} cab} \int_0^a \int_0^b g(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy dx \quad (3.81)$$

elde edilir. (3.80) ve (3.81) katsayıları (3.79) da yerine yazılırsa, tüm başlangıç ve sınır koşulları sağlayan çözüm

$$U(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{mn}(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

şeklinde elde edilir.

Bir boyutlu dalga denklemleri için tanımlanan Cauchy problemindeki f ve g fonksiyonları üzerine bazı koşullar önceden konulmuştur. Ancak dalga denkleminin değişkenlerine ayrılabilir tipten çözümleri arandığında, çözümlerin varlığı için f ve g fonksiyonları, en azından, Fourier serisine açılabilir fonksiyonlar olmalıdır. Bir fonksiyonu Fourier serisine açabilmek için fonksiyonun tanımlı olduğu yerde tek değerli, kendisi ile türevi parçalı sürekli ve tanım bölgesinin dışına periyodik olarak genişletebilme özelliklerine sahip olması yeterli fakat gerekli değildir.

Örnek 3.4.1.

$$\begin{aligned} U_{tt} - c^2 (U_{xx} + U_{yy}) &= e^{x+y} \cos(\omega t), \quad (\omega \text{ sabit}), \quad 0 < x < a, 0 < y < b, t > 0 \\ U(x, y, 0) &= U_t(x, y, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b \\ U(0, y, t) &= U(a, y, t) = U(x, 0, t) = U(x, b, t) = 0, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

olarak tanımlanan Cauchy problemini çözünüz.

Çözüm: $f(x, y) = g(x, y) \equiv 0$ olduğundan, (3.80) ve (3.81) ifadesinden

$M_{mn} = N_{mn} = 0$ olur. (3.76) dan

$$\begin{aligned} F_{mn}(t) &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b e^{x+y} \cos(\omega t) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy dx \\ &= \frac{4mn\pi^2}{(m^2\pi^2 + a^2)(n^2\pi^2 + b^2)} [1 + (-1)^{m+1} e^a] [1 + (-1)^{n+1} e^b] \cos(\omega t) \\ &= C_{mn} \cos(\omega t) \end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$C_{mn} = \frac{4mn\pi^2 [1 + (-1)^{m+1} e^a] [1 + (-1)^{n+1} e^b]}{(m^2\pi^2 + a^2)(n^2\pi^2 + b^2)}$$

dir. Böylece (3.78) den

$$\begin{aligned}\varphi_{mn}(t) &= \frac{1}{c\omega_{mn}} \int_0^t C_{mn} \cos(\omega\xi) \sin[\omega_{mn}c(t-\xi)] d\xi \\ &= \frac{1}{(\omega_{mn}^2 c^2 - \omega^2)} [\cos(\omega t) - \cos(\omega_{mn} ct)] , \quad \omega \neq \omega_{mn} c\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan istenilen bütün özellikleri sağlayan çözüm

$$U(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{mn}}{(\omega_{mn}^2 c^2 - \omega^2)} [\cos(\omega t) - \cos(\omega_{mn} ct)] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

olarak bulunur. Burada $\omega_{mn}^2 = \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2}$ dir.

Örnek 3.4.2.

$$\begin{aligned}U_{tt} - c^2 (U_{xx} + U_{yy}) &= \left(1 - \frac{c^2 \pi^2}{9}\right) \frac{y}{2} \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) \sin t , \quad 0 < x < 3, \quad 0 < y < 2, \quad t > 0 \\ U(x, y, 0) &= U_t(x, y, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 2 \\ U(0, y, t) &= U(3, y, t) = U(x, 0, t) = U(x, 2, t) = 0 , \quad 0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 2, \quad t \geq 0\end{aligned}$$

olarak verilen Cauchy problemini çözünüz.

Çözüm: Denkleme ilişkin $F_{mn}(t)$ fonksiyonunu (3.76) dan

$$\begin{aligned}F_{mn}(t) &= \frac{4}{3 \cdot 2} \int_0^3 \int_0^2 F(x, y, t) \sin\left(\frac{m\pi x}{3}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{2}\right) dy dx \\ &= \frac{2}{3} \int_0^3 \int_0^2 \left(1 - \frac{c^2 \pi^2}{9}\right) \frac{y}{2} \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) \sin t \sin\left(\frac{m\pi x}{3}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{2}\right) dy dx \\ &= \frac{2(-1)^{n+1}}{3n} \left(1 - \frac{c^2 \pi^2}{9}\right) \sin t\end{aligned}$$

olarak bulunur. $f(x, y) = g(x, y) = 0$ olduğundan $M_{mn} = N_{mn} = 0$ dir. Böylece (3.78) den hareketle

$$\begin{aligned}\varphi_{mn}(t) &= \frac{1}{\omega_{mn}c} \int_0^t \frac{2(-1)^{n+1}}{3n} \left(1 - \frac{c^2\pi^2}{9}\right) \sin \xi \sin[\omega_{mn}c(t-\xi)] d\xi \\ &= \frac{2(-1)^n}{\omega_{mn}9cn(1-\omega_{mn}^2c^2)} (9-c^2\pi^2) [\sin(\omega_{mn}ct) - \omega_{mn}c \sin t]\end{aligned}$$

olur. O halde, bütün özellikleri sağlayan çözüm (3.79) dan

$$U(x, y, t) = \frac{18-2c^2\pi^2}{9c} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\omega_{mn}(1-\omega_{mn}^2c^2)} [\sin(\omega_{mn}ct) - \omega_{mn}c \sin t]$$

olarak bulunur. Burada $\omega_{mn}^2 = \frac{m^2\pi^2}{9} + \frac{n^2\pi^2}{4}$ dir.

Dik koordinatlardan n – boyutlu $U_{tt} - c^2(U_{x_1x_1} + U_{x_2x_2} + \dots + U_{x_nx_n}) = 0$ dalga denklemi yine uygun koşullar altında incelenebilir.

3.5. İki Boyutlu Homogen Dalga Denkleminin Kutupsal Koordinatlarda Çözümü

Çeşitli titreşim hareketlerinin incelenmesinde, cismin şekline göre değişik koordinat sistemleri kullanılır. Mesela, dikdörtgensel bir zarın titreşim hareketini dik koordinatlarda incelemek, işlemleri oldukça kolaylaştırır. Böyle bir hareketi kutupsal koordinatlarda incelemek ise işlemleri zorlaştırır. Tersine, dairesel bir zarın titreşim hareketini dik koordinatlarda incelemek zor olduğu halde, bu hareketi kutupsal koordinatlarda incelemek özellikle integral işlemlerini son derece basitleştirir. Benzer şekilde cisimlerin silindirik, küresel veya bunların çeşitli kesitleri olması durumlarına göre, sırasıyla, silindirik

ve küresel koordinatlar kullanılır. Bu durumu bir örnek ile açıklamak istersek, $4 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$ ve

$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 d\theta$ integrallerinin her ikisi de a yarıçaplı dairesel bölgenin alanını verir. Ancak, bunlardan

birincisi dik koordinatlarda verilmiş olup integralin sonucu belli dönüşümlerden sonra elde edilir. Halbuki, ikinci integralin hesabı son derece kolaydır. Bu nedenlerden dolayı fiziksel problemin özelliklerine göre amaca uygun olarak değişik koordinat sistemleri kullanmak gerekir. Bu kısımda, dairesel bölgeye yerleştirilmiş bir zarın titreşim hareketini inceleyecektir. Böyle bir zarın kutupsal koordinatlarda verilmiş $D = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi; r, \theta \in R\}$ bölgesine yerleştirildiği

varsayalım. Eğer dış kuvvet yoksa, zarın titreşimi dik koordinatlarda iki boyutlu homojen $U_{tt} - c^2(U_{xx} + U_{yy}) = 0, t > 0$ dalga denklemini sağlar. Bu denkleme

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ t = t \end{array} \right\} 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq a \quad (3.82)$$

dönüşümü uygulansın. Bu durumda $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \text{Arc tan} \left(\frac{y}{x} \right)$ olacağından U' 'nin x 'e

göre türevi $U_x = U_r r_x + U_\theta \theta_x = \frac{x}{r} U_r - \frac{y}{r^2} U_\theta$ olarak elde edilir. Aynı şekilde bu ifadenin tekrar x e göre türetilmesiyle

$$\begin{aligned} U_{xx} &= (U_{rr} r_x + U_{r\theta} \theta_x) \frac{x}{r} + U_r \frac{r - x r_x}{r^2} - (U_{\theta r} r_x + U_{\theta\theta} \theta_x) \frac{y}{r^2} + U_\theta \frac{2 r y r_x}{r^4} \\ &= U_{rr} \frac{x^2}{r^2} + U_r \frac{r^2 - x^2}{r^3} + U_{\theta\theta} \frac{y^2}{r^4} + 2 U_\theta \frac{xy}{r^4} - 2 U_{r\theta} \frac{xy}{r^3} \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde U_{yy} türevinin de

$$U_{yy} = U_{rr} \frac{y^2}{r^2} + U_r \frac{r^2 - y^2}{r^3} + U_{\theta\theta} \frac{x^2}{r^4} + 2 U_{r\theta} \frac{xy}{r^3} - 2 U_\theta \frac{xy}{r^4}$$

şeklinde olduğu kolayca elde edilebilir. Diğer taraftan U_{tt} türevi değişmeyecektir. İkinci basamaktan bu türevler, iki boyutlu homojen dalga denkleminde yerine yazılırsa dönüşmüş denklem

$$U_{tt} - c^2 \left(U_{rr} + \frac{1}{r} U_r + \frac{1}{r^2} U_{\theta\theta} \right) = 0; r \neq 0 \quad (3.83)$$

şekline gelir. Zarın $r = a$ kenarının sabitleştirildiği, yani sınırda titreşim hareketinin olmadığı varsayalım. Bu durumda, herhangi bir t anında zarın hangi konumda olduğunu veren $U(r, \theta, t)$ fonksiyonu

$$U_{tt} - c^2 \left(U_{rr} + \frac{1}{r} U_r + \frac{1}{r^2} U_{\theta\theta} \right) = 0; 0 < r < a, 0 < \theta < 2\pi, t > 0 \quad (3.84)$$

$$\left. \begin{aligned} U(r, \theta, 0) &= f(r, \theta) ; 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ U_t(r, \theta, 0) &= g(r, \theta) ; 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{aligned} \right\} \quad (3.85)$$

$$U(a, \theta, t) = 0 ; 0 \leq \theta \leq 2\pi, t \geq 0 \quad (3.86)$$

şeklindeki bir Cauchy probleminin çözümü olur. Böyle bir probleme fiziksel bir örnek, davul veya darbuka derisinin titreşim hareketidir. Ancak bu problemde dış kuvvet olmadığından davul derisinin sadece bir defa titreştirilmesi bu probleme uyar. Aksi halde, (3.84) denkleminin sağ tarafına $F(r, \theta, t)$ şeklinde bir fonksiyon gelir. (3.84) denkleminin

$$U(r, \theta, t) = R(r) \Theta(\theta) T(t) \quad (3.87)$$

şeklinde değişkenlerine ayrılabilir tipten çözümü aransın. (3.87) nin gerekli türevlerinin (3.84) de yerine yazılıp $c^2 R \Theta T$ ile her iki tarafın bölünmesiyle

$$\frac{T''}{c^2 T} - \left(\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta} \right) = 0$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta} \quad (3.88)$$

olur. (3.88) in sağ tarafı, r ve θ bağımsız değişkenlerine bağlı olduğu halde sol taraf sadece t zaman değişkenine bağlı olduğundan

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta} = -\lambda^2, \quad (\lambda \text{ ayırma sabiti})$$

yazılabilir. Buradan

$$T'' + c^2 \lambda^2 T = 0 \quad (3.89)$$

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta} = -\lambda^2 \quad (3.90)$$

olup (3.90) in her iki tarafının r^2 ile çarpılmasıyla

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} = -\lambda^2 r^2 \quad (3.91)$$

bulunur. (3.91) den (ayırma sabiti özelliklerinden)

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + \lambda^2 r^2 = \frac{\Theta''}{\Theta} = \mu^2, \quad (\mu \text{ ayırma sabiti})$$

yazılabilir. Bunun yeniden düzenlenmesiyle

$$r^2 R'' + rR' + (\lambda^2 r^2 - \mu^2)R = 0 \quad (3.92)$$

$$\Theta'' + \mu^2 \Theta = 0 \quad (3.93)$$

şeklinde iki ayrı denkleme ulaşılır. (3.89) ve (3.93) denklemlerinin genel çözümleri sırasıyla

$$T(t) = A \cos(\lambda ct) + B \sin(\lambda ct) \quad (3.94)$$

$$\Theta(\theta) = C \cos(\mu\theta) + D \sin(\mu\theta), \quad (A, B, C, D \text{ keyfi sabitler}) \quad (3.95)$$

dır. Ele alınan Cauchy probleminin fiziksel özelliği ve U çözümünün tek anlamlı olması nedeniyle U 'nun $U(r, \theta + 2\pi, t) = U(r, \theta, t)$ şeklinde θ 'ya göre periyodik olması gerekir. Bu ise $\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta)$ olmasını gerektirir. Bunun sağlanması ancak $\cos(\mu(\theta + 2\pi)) = \cos(\mu\theta)$, $\sin(\mu(\theta + 2\pi)) = \sin(\mu\theta)$ olması ile mümkündür. Bu ise $\mu = m$, m 'nin tamsayı olmasını gerektirir. Böylece (3.95) çözümü

$$\Theta_m(\theta) = C_m \cos(m\theta) + D_m \sin(m\theta), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.96)$$

şekline gelir. Daha sonra bu çözümlerden bir seri oluşturulacağı için negatif tamsayıları göz önüne alınmamaktadır. Diğer taraftan, (3.92) denkleminde $r\lambda = \xi$ dönüşümü uygulansın. Bu durumda, ξ yeni bağımsız değişken olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dr} &= \frac{dR}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dr} = \lambda \frac{dR}{d\xi} \\ \frac{d^2 R}{dr^2} &= \frac{d}{d\xi} \left(\lambda \frac{dR}{d\xi} \right) \frac{d\xi}{dr} = \lambda^2 \frac{d^2 R}{d\xi^2} \end{aligned}$$

türevleri (3.92) de yerine yazılırsa $\lambda^2 r^2 \frac{d^2 R}{d\xi^2} + \lambda r \frac{dR}{d\xi} + (\lambda^2 r^2 - m^2)R = 0$ veya

$$\xi^2 \frac{d^2 R}{d\xi^2} + \xi \frac{dR}{d\xi} + (\xi^2 - m^2) R = 0 \quad (3.97)$$

bulunur. Bu ise Bessel diferensiyel denklemdir. (3.97) de m bir pozitif tamsayı olduğundan (3.97) nin genel çözümü

$$R(\xi) = E_m j_m(\xi) + F_m N_m(\xi); \quad (E_m, F_m \text{ keyfi parametre}) \quad (3.98)$$

formundadır. Burada $J_m(\xi)$, m . dereceden Bessel fonksiyonu, $N_m(\xi)$ ise m . dereceden Neumann fonksiyonudur. Bu konuda daha geniş bilgi Sneddon (1957) çalışmasında mevcuttur. Neumann fonksiyonunun içinde logaritmik terim olduğundan bu fonksiyon $\xi = 0$, yani $r = 0$ da sınırsızdır. Biz sınırlı çözümlerle ilgilendiğimizden $F_m = 0$ alınmalıdır. Böylece, sırf uzaklığa bağlı sınırlı çözüm

$$R_m(r) = E_m J_m(\lambda r) \quad (3.99)$$

şeklinde bulunur. Dairesel zarın sınırı sabitleştirilmiş olduğundan, $r = a$ için $U(a, \theta, t) = 0$ olması gerekir. Böylece $J_m(\lambda a) = 0$ olmalıdır. $J_m(\lambda a) = 0$ ın λ ya göre pozitif kökleri sırasıyla

$\xi_1, \xi_2, \dots$ olsun. Bu durumda $\lambda_1 = \frac{\xi_1}{a}, \lambda_2 = \frac{\xi_2}{a}, \dots$ olup böylece (3.99) çözümü

$R_m(r) = E_m j_m(\lambda_m r)$, $m = 0, 1, 2, \dots$ şeklini alır. Bu durumda sınır koşulunu, periyodikliği ve sınırlılığı sağlayan çözüm

$$\begin{aligned} U_{mn}(r, \theta, t) &= E_{mn} J_m(\lambda_m r) [C_{mn} \cos(m\theta) + D_{mn} \sin(m\theta)] \\ &\quad \cdot [A_{mn} \cos(\lambda_{mn} ct) + B_{mn} \sin(\lambda_{mn} ct)] \\ &\quad (m = 0, 1, \dots; n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Burada iki indisten birisi θ ya bağlı çözümden, diğeri ise Bessel diferensiyel denkleminin sıfır yerlerinden gelmektedir. Dalga denkleminin lineerliğinden

$$\begin{aligned} U(r, \theta, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn}(r, \theta, t) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{mn} r) [C_{mn}^* \cos(m\theta) + D_{mn}^* \sin(m\theta)] \\ &\quad \cdot [A_{mn} \cos(\lambda_{mn} ct) + B_{mn} \sin(\lambda_{mn} ct)] \end{aligned} \quad (3.100)$$

yazılabilir. Burada, C_{mn}^* , D_{mn}^* , A_{mn} , B_{mn} keyfi parametrelerdir. Birçok fiziksel problemin özellikleri nedeniyle çözüm genellikle θ dan bağımsızdır. Yani, sırf uzaklık ve zamana bağlıdır. Çözümün θ dan bağımsız olması için (3.100) de $m = 0$ alınmalıdır. Böylece katsayıların da yeniden düzenlenmesiyle, $m = 0$ için (3.100) çözümü

$$U(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0(\lambda_n r) [A_n \cos(\lambda_n ct) + B_n \sin(\lambda_n ct)] \quad (3.101)$$

formuna gelir. Şimdi (3.71) başlangıç koşullarını kullanalım. $U(r,0) = f(r)$ başlangıç koşulundan

$$U(r,0) = f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0(\lambda_n r) A_n \quad (3.102)$$

bulunur. Bu son eşitlik, $f(r)$ fonksiyonunun, $J_0(\lambda_n r)$ Bessel fonksiyonları cinsinden seri açılımıdır. (3.102) nin her iki tarafı $rJ_0(\lambda_m r)$ ile çarpılıp 0 dan a ya kadar integre edilirse

$$\int_0^a r J_0(\lambda_m r) J_0(\lambda_m r) dr = \begin{cases} 0 & , m \neq n \\ \frac{a}{2} J_1^2(\lambda_n a) & , m = n \end{cases}$$

özellliği de kullanılırsa buradan A_n katsayısı

$$A_n = \frac{2}{a J_1^2(\lambda_n a)} \int_0^a r f(r) J_0(\lambda_n r) dr \quad (3.103)$$

olarak bulunur. Öte yandan

$$U_t(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0(\lambda_n r) [-\lambda_n c A_n \sin(\lambda_n ct) + \lambda_n c B_n \cos(\lambda_n ct)]$$

olması nedeniyle $U_t(r,0) = g(r)$ başlangıç koşulundan

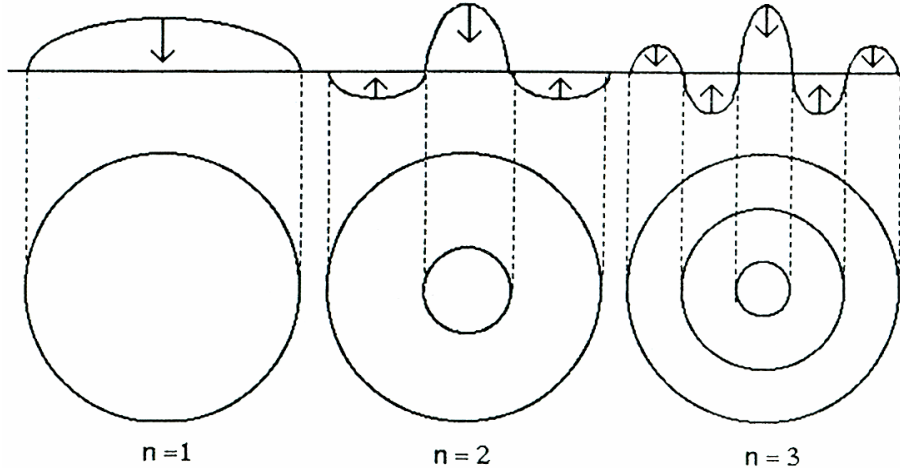
$$U_t(r,0) = g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0(\lambda_n r) \lambda_n c B_n$$

bulunur. Yukarıdaki açıklamalardan dolayı, B_n katsayıları da

$$B_n = \frac{2}{\lambda_n c a J_1^2(\lambda_n a)} \int_0^a r g(r) J_0(\lambda_n r) dr \quad (3.104)$$

şeklinde bulunur. Bu şekilde bulunan (3.103) ve (3.104) katsayıları, (3.101) de yerine yazılırsa, tüm koşulları sağlayan $U(r, t)$ çözümü elde edilmiş olur. Bu fonksiyonun grafiği Şekil 3.1. de verilmiştir.

Bir fonksiyonun Bessel fonksiyonları cinsinden seriye açılması konusunda Sneddon (1957) ve Weinberg (1965) çalışmaları önemli bir yer tutmaktadır.



Şekil 3.1. Açıdan bağımsız titreşim hareketi

Küresel bir bölgeye yerleştirilmiş bir cisim veya gazın titreşim hareketinin herhangi bir t anındaki konumunu veren $U(x, y, z, t)$ fonksiyonu, üç boyutlu homojen $U_{tt} - c^2(U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}) = 0$ dalga denklemini sağlar. Bölge küresel olduğundan, bu denkleme

$$x = r \sin \varphi \cos \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \varphi, \quad t = t$$

$$(0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi)$$

şeklinde bir dönüşüm uygularsak

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c^2 \left[\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right] = 0 \quad (3.105)$$

bulunur.

(3.105) denkleminin üç boyutlu dalga denkleminin küresel koordinatlardaki formu denir.

Tamamen benzer şekilde, (3.105) denkleminin değişkenlerine ayrılabilir tipten çözümü araştırabilir.

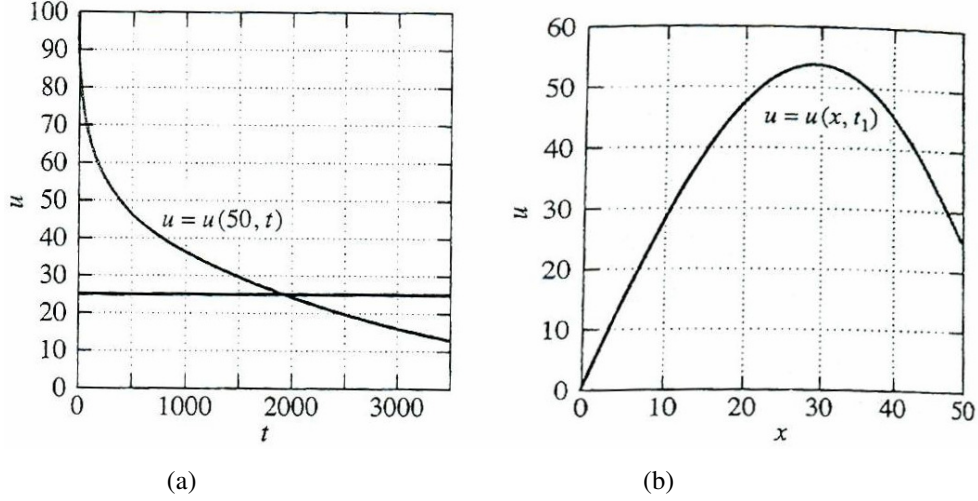
Cauchy problemlerinde bölge ya bir aralık, dikdörtgen, disk, prizma, silindir, küre veya bunların çeşitli kesitleri olarak alınır. Eğer bölgeler böyle seçilmezse hesaplar oldukça zorlaşır.

Bu tür Cauchy problemleri, bazı basit ilave koşullar altında çeşitli integral dönüşümleri, özellikle de Fourier dönüşümleri yardımıyla da tek anlamlı olarak çözülebilir.

4. DALGA DENKLEMİ YARDIMIYLA İFADE EDİLEBİLEN FİZİKSEL

OLAYLAR

Bu bölümde, dalga denklemlerinin kullanıldığı çeşitli fiziksel olaylar ele alınacaktır.



Şekil 4.1. (a) Levhanın sağ sınırında sıcaklığın zamana göre değişimi

(b) Sağ sınırdaki sıcaklık 25° olduğunda levhanın iç noktalarındaki sıcaklık Değişimi

Yukarıdaki şekle göre; düzgün başlangıç sıcaklığı $u(x,0) = 100^\circ$ olan bir levha için $h = 0.1$, $L = 500(10 + p)$ ve $K = q/10$ olsun. Burada p ilgili öğrenci kimliğinin en büyük rakamı, q ise aynı kimliğin sıfırdan farklı en küçük rakamı olsun. Böyle bir levha için yukarıda gösterilen incelemelerin benzerini yapılınsın ve buradan levhanın sağ sınırındaki en zaman 25° ye ulaşacağı ve levhanın o andaki maksimum iç sıcaklığı bulunmak istenmektedir.

Köklerin ve maksimum değerlerin sayısal olarak bulunmasının bir başka yolu yukarıdaki şekle benzer grafiklerde ilgili noktalar arasındaki mesafelerin birkaç kez ayarlanarak çok yakından gösterilmesidir.

4.1. Sabit Periyotlu Çözümler ve Doğal Frekanslar

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi at}{L} + B_n \sin \frac{n\pi at}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \left(\frac{n\pi at}{L} - \gamma_n \right) \sin \frac{n\pi x}{L} \end{aligned} \quad (4.1)$$

fonksiyonunun titreşen tel problemi

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \left(a = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \right); \quad (4.2)$$

$$y(0,t) = y(L,t) = 0, \quad (4.3)$$

$$y(x,0) = f(x), \quad y_t(x,0) = g(x) \quad (4.4)$$

probleminin çözümü olarak bulunabilir. (4.1) çözümü, uzunluğu L ve T gerilimi altındaki lineer yoğunluğu ρ olan telin serbest titreşimlerini ifade etmektedir. (4.1) formülündeki sabit katsayılar (4.4) başlangıç koşulları ile belirlenmektedir.

Özel olarak (4.1) serisinin terimlerinden görüleceği gibi, tel titreşiminin doğal (dairesel) frekansları

$$\omega_n = \frac{n\pi a}{L}, \quad (4.5)$$

şeklinde olup bu frekansların ölçü birimi olarak radyan alınır.

$$y(x,t) = X(x) \cos(\omega t - \gamma) \quad (4.6)$$

şeklindeki bir fonksiyonun (4.1) denkleminin kararlı periyodik ve (4.2) sınır koşullarını sağlayan çözümü olması için $\omega = \omega_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ olmalıdır. Gerçekten, $y(x,t)$ nin (4.6) ifadesi (4.1) denkleminde yerine yazılırsa ve elde edilen eşitliğin her iki tarafı $\cos(\omega t - \gamma)$ ile bölünürse $X(x)$ için $a^2 X''(x) + \omega^2 X(x) = 0$ denklemi elde edilir. Bu denklemin genel çözümü $X(x) = A \cos \frac{\omega x}{a} + B \sin \frac{\omega x}{a}$ olup, ancak $A = 0$ ve bir pozitif n tamsayısı için $\omega = n\pi a / L$ ise çözüm (4.3) deki şartları sağlar.

4.2. Zorlanmış Titreşimler ve Rezonans

Şimdi telin (telin her birim kütesinin) $F = F_0 \cos \omega t$ periyodik dış kuvvetinin etkisi altında olduğunu varsayalım ve bu kuvvetin tüm tel boyunca düzgün olarak etki yaptığını kabul edilsin. Yukarıdaki (4.1) formülüne göre telin $y(x,t)$ yer değişim fonksiyonu

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + F_0 \cos \omega t \quad (4.7)$$

homojen olmayan kısmı türevli denklemini ve (4.3), (4.4) koşullarına benzer sınır koşullarını sağlayacaktır. Mesela, eğer dış kuvvetin etkisi başladığı anda tel hareketsiz durumda ise (4.7) denkleminin

$$y(0,t) = y(L,t) = y(x,0) = y_t(x,0) = 0 \quad (4.8)$$

koşullarını sağlayan çözümü bulunmak istenmektedir. Bunun için önce (4.7) denklemin (4.3) sabitlenmiş sınır koşullarını sağlayan bir $y_p(x,t)$ özel çözümünün bulunması ve daha sonra $f(x) = -y_p(x,0)$, $g(x) = -D_t y_p(x,0)$ olmak üzere (4.2) ve (4.4) probleminin (4.1) formülüne benzer şekilde bir $y_c(x,t)$ çözümünün bulunması yeterli olacaktır. Açıkça, bu durumda $y(x,t) = y_c(x,t) + y_p(x,t)$ fonksiyonu (4.7) denklemini ve (4.8) koşullarını sağlar. Buna göre yeni iş $y_p(x,t)$ nin bulunmasıdır. (4.7) denkleminin $F_0 \cos \omega t$ şeklinde özel bir terime sahip olması nedeniyle $y_p(x,t)$ çözümü

$$y_p(x,t) = X(x) \cos \omega t \quad (4.9)$$

şeklinde aranır. Bunu (4.7) de yerine koyar ve elde edilen eşitliğin her iki tarafı $\cos \omega t$ ile bölünürse $a^2 X'' + \omega^2 X = -F_0$ bulunur. Bu son denklemin genel çözümü

$$X(x) = A \cos \frac{\omega x}{a} + B \sin \frac{\omega x}{a} - \frac{F_0}{\omega^2} \quad (4.10)$$

şeklinde dir. $X(0) = 0$ koşulundan $A = F_0 / \omega^2$ ve böylece $X(L) = 0$ dan

$$X(L) = \frac{F_0}{\omega^2} \left(\cos \frac{\omega L}{a} - 1 \right) + B \sin \frac{\omega L}{a} = 0 \quad (4.11)$$

elde edilir. Şimdi periyodik dış kuvvetin ω frekansının $\omega_n = n\pi a / L$ doğal frekanslarında hiç birine eşit olmayacağı varsayalım. O halde $\sin(\omega L / a) \neq 0$ dir. Buna göre (4.11) denkleminde B bulunabilir. B nin bulunan değeri (4.10) da yerine yazılırsa,

$$X(x) = \frac{F_0}{\omega^2} \left(\cos \frac{\omega x}{a} - 1 \right) - \frac{F_0 [\cos(\omega L / a) - 1]}{\omega^2 \sin(\omega L / a)} \sin \frac{\omega x}{a} \quad (4.12)$$

elde edilir. $X(x)$ in bu ifadesi (4.9) da yerine konursa istenilen $y_p(x,t)$ özel çözümünü bulunur.

Buna rağmen, dikkat edelim ki, n pozitif tek tamsayı olmak üzere ω değeri $\omega_n = n\pi a / L$ ye yaklaşıyor ise (4.12) formülünde $\sin(\omega x / a)$ nın katsayısı $\pm \infty$ a yaklaşır. Böylece, rezonans olayı gerçekleşir. Bu olay şu şekilde izah edilebilir. Birbirine çok yakın olan iki özdeş (eşdeğer) tel göz önüne alınsın. Bu tellerden biri titreştirildiğinde, periyodik dış kuvvetin etkisiyle (hava ortamı içinden) diğeri de aynı temel frekansta titreşmeye başlayacaktır. Aynı zamanda dikkat edelim ki, n pozitif çift tamsayı olmak üzere $\omega = \omega_n = n\pi a / L$ ise (4.11) denkleminde $B=0$ alınabilir. Dolayısıyla bu halde rezonans

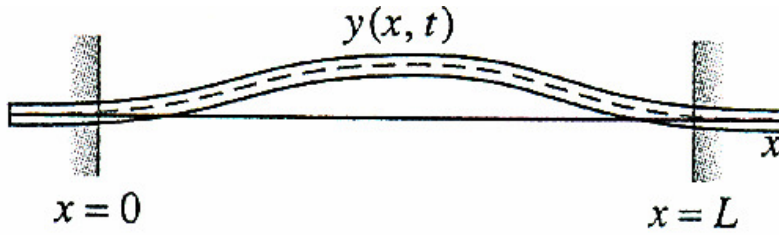
gerçekleşmez. Burada bazı rezonans olaylarının gerçekleşmemesinin nedeni açıklanabilmektedir. Titreşen tel sonsuz sayıda doğal titreşim frekanslarına sahip tipik bir sürekli sistemdir. Böyle bir sisteme bir periyodik dış kuvvet etki yaptığında, etkileyici frekansın sistemin doğal frekanslarında birine yakın olması durumunda, olası bozucu rezonans titreşimleri gerçekleşebilir. Bundan dolayı, düzgün yapısal tasarımda önemli hedef böyle rezonans titreşimlerinden sakınılmasıdır.

4.3. Kirişlerin Doğal Frekansları

Şekil 4.2, uzunluğu L , lineer yoğunluğu ρ , Young modülü E olan uçlardan kenetlenmiş (bağlanmış) bir düzgün kirişi gösterir. $0 < x < L$ ve $t > 0$ için bu kirişin $y(x,t)$ sapma fonksiyonu daha önceden düşünülen

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^4 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad \left(a^4 = \frac{EI}{\rho} \right) \quad (4.13)$$

dördüncü mertebeden denklemini sağlar.



Şekil 4.2. Her iki ucundan bağlanmış (kenetlenmiş) kiriş

Ayrıca burada I , kirişin yatay simetri eksenine civarındaki dik kesitin eylemsizlik momentidir. Sabitlenmiş uçlarda yer değişim ve bu yer değişimin eğimi sıfır olduğundan sınır (uç nokta) koşulları

$$y(0,t) = y_x(0,t) = 0 \quad (4.14)$$

ve

$$y(L,t) = y_x(L,t) = 0 \quad (4.15)$$

şeklinde. Burada sadece, kirişin titreşiminin doğal frekansları bulunmak istenmektedir. Bundan dolayı başlangıç koşulları önemsenmemektedir. Doğal frekansların ω sayısı; (4.13) denkleminin

$$y(x,t) = X(x) \cos(\omega t - \gamma) \quad (4.16)$$

biçimindeki sıfırdan farklı bir çözüme sahip olduğu ve bu çözümün (4.14) ve (4.15) koşullarını sağlayacak şekildeki değerleridir. $y(x,t)$ nin (4.16) ifadesini (4.13) te yerine yazar ve elde edilecek eşitliği $\cos(\omega t - \gamma)$ ile bölerek, dördüncü mertebeden $-\omega^2 X + \alpha^4 X^{(4)} = 0$ diferensiyel denklemini, yani

$$X^{(4)} - \frac{\omega^2}{a^4} X = 0 \quad (4.17)$$

denklemini elde etmek mümkündür. $\alpha^4 = \omega^2 / a^4$ olmak üzere (4.17) denkleminin genel çözümü $X(x) = A \cosh \alpha x + B \sinh \alpha x + C \cos \alpha x + D \sin \alpha x$ şeklinde yazılabilir. Böylece, $X'(x) = \alpha(A \sinh \alpha x + B \cosh \alpha x - C \sin \alpha x + D \cos \alpha x)$ olur. (4.14) deki şartlar $X(0) = A + C = 0$ ve $X'(0) = \alpha(B + D) = 0$ değerlerini verir. Dolayısıyla, $C = -A$ ve $D = -B$ dir. Bu nedenle, (4.15) deki şartlar

$$X(L) = A(\cosh \alpha L - \cos \alpha L) + B(\sinh \alpha L - \sin \alpha L) = 0$$

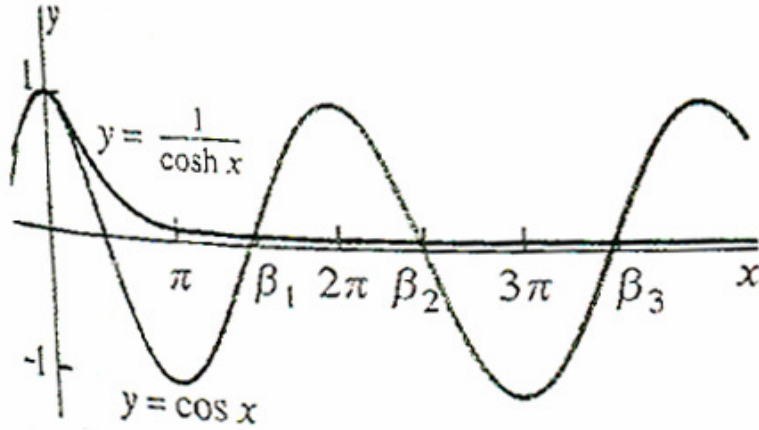
ve

$$\frac{1}{\alpha} X'(L) = A(\sinh \alpha L + \sin \alpha L) + B(\cosh \alpha L - \cos \alpha L) = 0$$

değerlerini verir. Bu son iki eşitlik A ve B bilinmeyenlerine göre homojen denklem sistemi olarak düşünülün. Bu sistemin sıfırdan farklı çözümünün mevcut olması için A ve B bilinmeyenlerinin katsayılarından oluşturulan determinant sıfıra eşit olmalıdır. Yani $\cosh \alpha L - \cos \alpha L)^2 - (\sinh^2 \alpha L - \sin^2 \alpha L) = 0$ buradan

$$(\cosh^2 \alpha L - \sinh^2 \alpha L) + (\cos^2 \alpha L + \sin^2 \alpha L) - 2 \cosh \alpha L \cos \alpha L = 0$$

veya $2 - 2 \cosh \alpha L \cos \alpha L = 0$ olmalıdır.



Şekil 4.3. $\cosh x \cos x = 1$ denkleminin çözümleri

Buna göre $\beta = \alpha L$ sayısı

$$\cosh x \cos x = 1 \quad (4.18)$$

denkleminin sıfırdan farklı kökü olmalıdır.

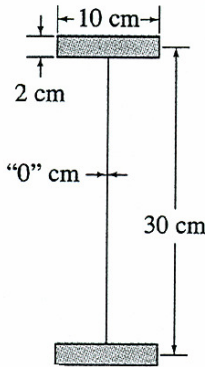
Şekil 4.3 den görüldüğü gibi bu denklemin kökleri pozitif ve artan $\{\beta_n\}_1^\infty$ dizisini oluşturmaktadır. $\omega = \alpha^2$, $a^2 = \beta^2 a^2 / L^2$ ve $a^2 = \sqrt{EI / \rho}$ olduğundan uçlardan (bağlanmış) kirişin titreşiminin doğal (dairese) frekansları için $n = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere

$$\omega_n \frac{\beta_n^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \quad (\text{rad/s}) \quad (4.19)$$

formülü elde edilir. Şekil 4.3 de gösterildiği gibi (4.18) denkleminin kökleri yaklaşık olarak

$$\beta_1 \approx 4.73004, \beta_2 \approx 7.85320, \beta_3 = 10.99561 \text{ ve } n \geq 4$$

olduğunda $\beta_n \approx (2n + 1)\pi / 2$ dir.



Şekil 4.4. İdealleştirilmiş I kirişi

Mesela, taban yapı elemanı 120 ft uzunluğunda bir çelik I-kiriş olan bir köprü göz önüne alınsın. Kirişin eylemsizlik momenti $I=9000 \text{ cm}^4$ olsun. Şekil 4.4 de bu kirişin dik-kesiti gösterilmiştir. Eğer (4.19) formülünde

$$L = (120 \text{ ft}) \left(30.48 \frac{\text{cm}}{\text{ft}} \right), \quad \rho = \left(7.75 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \right) (40 \text{ cm}^2), \quad E = 2 \times 10^{12} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}$$

ve β_1 ve β_2 değerleri yerine konursa, kirişin en düşük iki

$$\omega_1 \approx 12.74 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \left(122 \frac{\text{çevrim}}{\text{dak}} \right) \quad \omega_2 \approx 35.13 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \left(335 \frac{\text{çevrim}}{\text{dak}} \right)$$

doğal frekansı elde edilir.

Dakikada 120 adım yürüyen bir askeri bölük bu köprüye yaklaştığında köprüyü geçmeden önce adım ritmini bozma için iyice bilgilendirilmelidir. Çünkü rezonans titreşimlerinden dolayı köprüler zaman-zaman çökerler. 17 Temmuz 1981 yılında Kansas City hotelinde meydana gelen felaketi faciayı araştıranlara dayanarak bu facianın dansçıların ritmik hareketleri sonucunda gerçekleştiğini yazılmıştır. Araştırmacılara göre bu ritmik hareketler sonucunda dans sahnesini destekleyen *I* kirişlerde bozucu rezonans titreşimleri oluşmuş ve bu sebepten dans sahnesi çökmüştür.

4.4. Titreşen Kirişler ve Atlama Tahtaları

Burada L uzunlukta bir elastik çubuğun veya kirişin enine titreşimlerini incelenecektir. Böylece bir çubuğun $y(x,t)$ yer değişim fonksiyonu $\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$, $(0 < x < L)$ kısmi türevli denklemini ve $y(x,0)=f(x)$, $y_t(x,0) = 0$ başlangıç koşullarını sağlar.

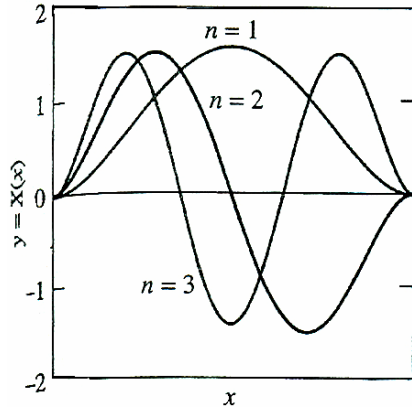
n	β_n
1	4.7300
2	7.8532
3	10.9956
4	14.1372
5	17.2788
6	20.4204
7	23.5619
8	26.7035
9	29.8451
10	32.9867

Şekil 4.5. Uçları sabitlenmiş titreşen kiriş için $\cosh x \cos x = 1$ özdeğer denkleminin ilk 10 pozitif çözümü

$$\text{Daha önceden yapıldığı gibi } y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\cos \frac{\beta_n^2 a^2 t}{L^2} \right) X_n(x), \text{ biçimsel seri çözümünü}$$

elde etmek için önce değişkenlerin ayrılması yöntemi uygulanabilir. Burada $a^4 = EI / \rho$, $\{c_n\}_1^{\infty}$ başlangıç konum fonksiyonu $f(x)$ e karışık gelen öz fonksiyon serisinin katsayılarıdır. $\{\beta_n\}_1^{\infty}$ ve $X_n(x)$ çubuk üzerine konan sınır koşullarından belirlenmektedir. Ayrıca burada bir özel

durum için pozitif kökleri $\{\beta_n\}_1^\infty$ olan frekans denklemi ve $\{X_n(x)\}$ öz fonksiyonları bulunmak istenmektedir. Bu kısımda sabit/sabit durumu için $(y(0) = y'(0) = y(L) = y'(L) = 0)$ sınır koşulları durumu için) frekans denkleminin $\cosh x \cos x = 1$ şeklinde olduğu görülebilir. Bu denklem, bilgisayar sistemi yöntemleri ile çözülebilir. Şekil 4.5 da bu frekans denkleminin ilk on $\{\beta_n\}_1^{10}$ pozitif çözümünün listesi verilmiştir. Bu kısmın (4.18) formülünden önce yapılan hesaplamalara göre n . öz fonksiyonu $X_n(x) = A_n \left(\cosh \frac{\beta_n x}{L} - \cos \frac{\beta_n x}{L} \right) + B_n \left(\sinh \frac{\beta_n x}{L} - \sin \frac{\beta_n x}{L} \right)$ şeklinde verilir. Burada A_n / B_n oranı $X_n(L) = 0$ uç nokta koşulu ile belirlenir. Şekil 4.6 de bu öz fonksiyonlardan ilk üçünün grafiği, her n için $A_n = 1$ ve $L = 2657.6$ cm olmak üzere, bu kısımda 120 ft uzunluğundaki çelik I -kiriş durumu için çizilmiştir. Bu öz fonksiyonlardan her birinin uç noktalarda sıfır eğime sahip olmaları gerçeği, şekilden elde edilen hesaplamaları doğrulamaktadır.



Şekil 4.6. Sabit-sabit durumundaki I -kirişinin ilk üç öz fonksiyonunun grafiği

Aşağıda titreşen kiriş durumları verilmiştir.

Durum 1. Her iki uçtan bağlı çubuk durumu

Bu durumda sınır koşulları $y(0) = y''(0) = y(L) = y''(L) = 0$ şeklindedir. Bu durum için frekans denklemi $\sin x = 0$ şeklindedir. Buna göre $\beta_n = n\pi$ ve $X_n(x) = \sin n\pi x$ dir. Çubuğun çelikten yapıldığını kabul edelim yani çubuğun yoğunluğu $\delta = 7.75$ g/cm³ ve Young modülü $E = 2 \times 10^{11}$ N/m²

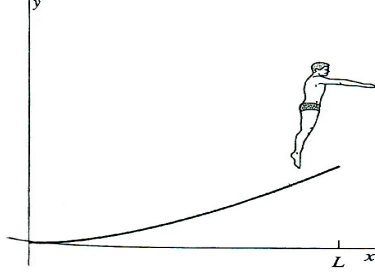
10^{12} dyn/cm² olsun. Ayrıca, çubuğun uzunluğu 19 inç ve enine kesiti, kenarı $w = 1$ inç olan kare olsun.

Buna göre onun eylemsizlik momenti $I = \frac{1}{12} w^4$ dir.

Durum 2. Her iki uçtan serbest çubuk durumu

Bu durumda sınır koşulları $y''(0) = y^{(3)}(0) = y''(L) = y^{(3)}(L) = 0$ şeklindedir. Bu durum, mesela, uzayda bir yörüngede dönen uzay gemisinde asılmış bir ağırlıksız çubuğun modelidir. Frekans denklemi $\cosh x \cos x = 1$ şeklindedir. Gerçi, öz fonksiyonlar sabit/sabit durumundaki öz fonksiyonlardan farklıdır.

Durum 3. $x=0$ ucu sabit, $x=L$ ucu serbest çubuk durumu



Şekil 4.7. Güzel görüntülü atlamalar

Bu şekilde Durum 3 ün frekans denklemi belirlenir. Şimdi sınır koşulları $y(0) = y'(0) = y''(L) = y^{(3)}(L) = 0$ şeklindedir. Böyle bir çubuk Şekil 4.7 de gösterilen atlama tahtasına benzerdir. Bu durum frekans denklemi $\cosh x \cos x = -1$ dir. Bu denklemin ilk birkaç çözümünü yaklaşık olarak bulunabilir ve grafik olarak, yeterince büyük n ler için $\beta_n \approx (2n - 1)\pi / 2$ olduğunu gösterir. Bundan yararlanarak atlama problemindeki özel atlama tahtasının salınımının ilk birkaç doğal frekansını hız cinsinden ifade edilir. Bu frekanslar tahta üzerindeki dalgıcın tahtanın serbest

ucunda yukarıya ve aşağıya doğru zıplayarak maksimum rezonans tepkisi elde etmesi için gereken frekanslardır.

Bir levha $x=0$, $y=0$ ve $y=b$ kenarları sıfır sıcaklığında tutulsun, fakat dördüncü $x=a$ kenarı yalıtılmış olsun. Bu duruma $u(0, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, b, t) = u_x(a, y, t) = 0$ sınır koşulları karşılık gelecektir.

Eğer levhanın başlangıç sıcaklığı $u(x, y, 0) = f(x, y)$ ise onun sıcaklık fonksiyonunun

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \exp(-\gamma_{mn}^2 kt) \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (4.20)$$

şeklinde olduğunu gösterilir. Burada $\left(\frac{y_{mn}}{\pi}\right)^2 = \left(\frac{2m-1}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2$ ve aynı zamanda

$C_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{b} dy dx$ dir. Eğer $f(x, y) = u_0$ (sabit) ise bu denklemin

$$u(x, y, t) = \frac{16u_0}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n \text{ tek}} \frac{\exp(-\gamma_{mn}^2 kt)}{(2m-1)n} \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (4.21)$$

şeklinde olduğu görülür.

4.5. Dikdörtgensel Zarın Titreşimleri

Şimdi denge konumu yatay xy -düzleminin bir bölgesi olan iki boyutlu esnek bir zar göz önüne alınsın. Bu zarın aşağıya ve yukarıya doğru titreşimlerde bulunduğu varsayalım. T anında zarın (x, y) noktasındaki düşey yer değişimini $u(x, y, t)$ göstereyim. T ve g sırası ile zarın gerilimi ve yoğunluğu (her birim alanı için) olsun. O zaman standart kabullerin yardımı ile $u(x, y, t)$ yer değişim fonksiyonu için iki boyutlu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (4.22)$$

dalga denklemini elde edilir. Burada $c^2 = T / \rho$ dur.

Örnek 4.5.1.

$0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ bölgesine yerleştirilmiş dikdörtgensel zar verilen $u(x, y, 0) = f(x, y)$ başlangıç yer değişimi ile duraklama durumundan çıkartılmış olsun. Zar dört bir kenarından sabitlenmiş ise kanarlarındaki yer değişim sıfıra eşit olacaktır. Bu durumda $u(x, y, t)$ yer değişim fonksiyonu (4.22) denklemini ve

$$u(0, y, t) = u(a, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, b, t) = 0 ,$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y) \quad (\text{başlangıç konumu}), \quad (4.23)$$

$$u_t(x, y, 0) = 0 \quad (\text{başlangıç hızı})$$

sınır koşullarını sağlar. Bu problemin çözümünün

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \cos \gamma_{mn} ct \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (4.24)$$

şeklindedir. Dolayısıyla $\{\gamma_{mn}\}$ sayıları ve $\{c_{mn}\}$ katsayıları buradan kolayca elde edilebilir.

(4.24) serisinin (mn) . terimi dikdörtgensel zarın (mn) . doğal salınım modunu tanımlar. Bu salınım modunun yer değişim fonksiyonu

$$u_{mn}(x, y, t) = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \gamma_{mn} ct \quad (4.25)$$

dir. Zar bu moda $w_{mn} = \gamma_{mn} c$ dairesel salınım frekansı ile $u = \pm \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$ sanal yüzeyleri arasında aşağıya ve yukarıya doğru hareket halindedir. Şekil 4.8 da m ve n bazı küçük değerleri için bu yüzeylerin görüntüsü verilmiştir.

Mesela, eğer $c = 1$ ve $a = b = \pi$ ise ardışık frekanslar

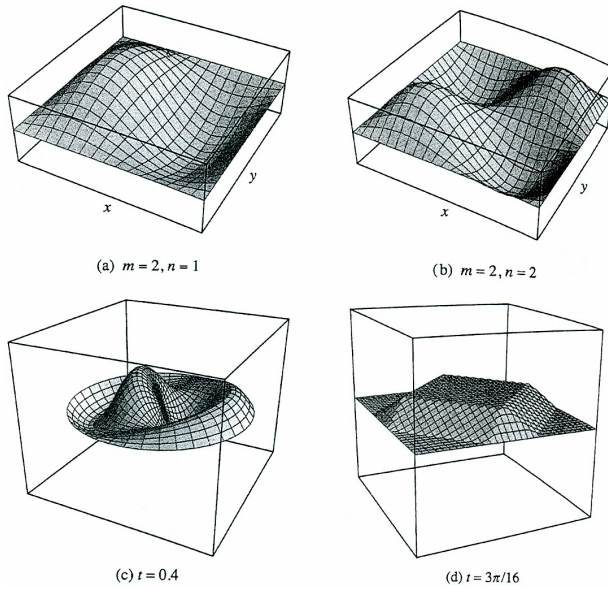
$$\begin{aligned}
\omega_{12} = \omega_{21} &= \sqrt{5} \approx 2.24, & \omega_{22} &= \sqrt{8} \approx 2.83, \\
\omega_{13} = \omega_{31} &= \sqrt{10} \approx 3.16, & \omega_{23} = \omega_{32} &= \sqrt{13} \approx 3.61, \\
\omega_{33} &= \sqrt{18} \approx 4.24, & & \dots
\end{aligned}$$

olacaktır. Buradan görülür ki, bu frekanslar $w_1 = \sqrt{2} \approx 1.41$ taban frekansının tamsayı katları değildir. Bu, titreşen dikdörtgensel zarın sesinin düzenli olmamasının ve buna göre de genellikle müzik sesinden ziyade bir gürültüyü anımsatmasının nedenini açıklamaktadır.

Örnek 4.5.2.

Örnek 4.5.1 deki zar kare şeklinde bir tel olup $t=0$ anında tuğla bir duvara çarpan hızlı bir kamyonette dikey ve çapraz olarak yerleştirilmiş olsun. Bu durumda zar sıfır başlangıç yer değişimi ve sabit başlangıç hızıyla hareket haline getirilmiş olur. Böylece, başlangıç koşulları $u(x, y, 0) = 0$, $u_t(x, y, 0) = v_0$ şeklinde olacaktır. Bu durumda

$$u(x, y, t) = \frac{16v_0}{\pi^2} \sum_{m \text{ tek}} \sum_{n \text{ tek}} \frac{\sin \gamma_{mn} ct}{mn \gamma_{mn}} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \text{ çözümünü elde edilir.}$$

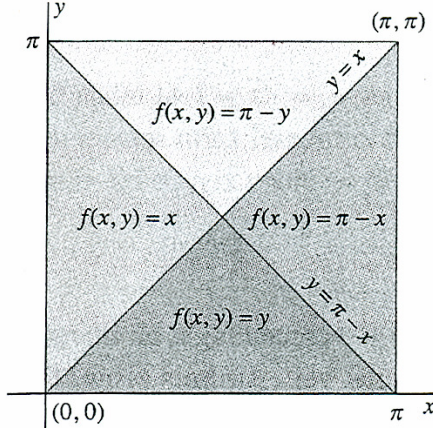


Şekil 4.8. $u = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$ yüzeyleri

Örnek 4.5.3.

Kare şekilli $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$ zar merkez noktasından çekilmiş olsun ve

$$u(x, y, 0) = f(x, y) = \min\{x, y, \pi - y\} \quad (4.26)$$



Şekil 4.9. Çadır fonksiyonunun parçalı biçimde tanımı

başlangıç konum fonksiyonu olmak üzere, duraklama durumundan hareketli hale getirilmiş olsun. Başlangıç konum fonksiyonunun $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$ karesi üzerindeki grafiği, tabanı kare olan ve $\pi/2$ yüksekliğine sahip çadır veya piramide benzemektedir. Böylece $f(x, y)$ “çadır fonksiyonu” iyi bilinen tek boyutlu üçgen fonksiyonunun iki boyutlu benzeridir. Bu fonksiyon Şekil 4.9 da gösterildiği gibi parçalı olarak da tanımlanabilir.

Maple veya Mathematica gibi cebirsel hesaplama sistemlerini kullanılarak (4.18) formülündeki iki katlı integrali hesaplayıp $m \neq n$ için $c_{mn} = 0$ ve

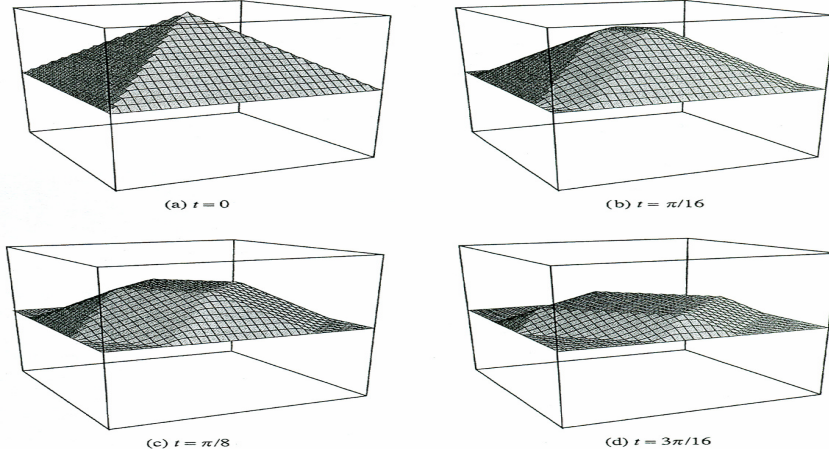
$$c_{mn} = \frac{2[1 - (-1)^n]}{\pi n^2} = \begin{cases} \frac{4}{\pi n^2}, & n \text{ tek} \\ 0, & n \text{ çift} \end{cases}$$

olduğunu gösterilir. Böylece, (4.36) formülünden zarın

$$u(x, y, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ tek}} \frac{\sin nx \sin ny \cos nt \sqrt{2}}{n^2} \quad (4.27)$$

yer değişimin fonksiyonu elde edilir. (4.27) serisinin her bir toplamı $m \neq n$ şeklindeki terimleri içermemesi sebebiyle $u(x, y, t)$ fonksiyonunun t değişkenine göre $\pi\sqrt{2}$ periyodlu periyodik bir fonksiyon olduğu açıktır. (4.26) Çadır fonksiyonunun kare şeklindeki zarda “müziksel” titreşimler

oluşturması gerçeği ilk kez olarak John Polking tarafından belirtilmiştir. Şekil 4.10 de bu titreşimlerin bazı tipik enstantane fotoğrafları gösterilmiştir.



Şekil 4.10. Kare şekilli $p = \pi\sqrt{2}$ periyotlu titreşimleri

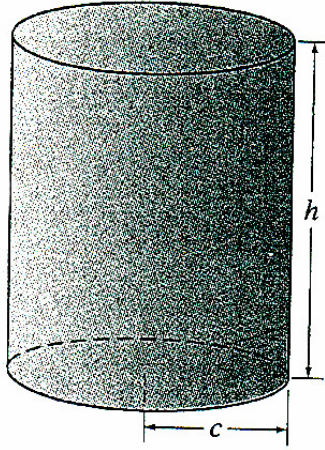
4.6. Kutupsal Koordinatlı Uygulamalar

Düzlemde orijine (veya uzayda dikey z eksenine) göre dairesel simetriye sahip bölgeleri içeren problemlere kutupsal (veya silindirik) koordinatların uygulanması kolaylık sağlar. Önceden iki boyutlu Laplace denkleminin $x=r\cos\theta$ olmak üzere ve $y=r\sin\theta$ olmak üzere, (r, θ) kutupsal koordinatları ifadesini hatırlatmak gerekir.

$u(r, \theta, z)$ fonksiyonu için üç boyutlu Laplace silindirik koordinatları

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (4.28)$$

şeklindedir. Eğer u fonksiyonu ya θ değişkeninden ya da z değişkeninden bağımsız ise (4.28) un sağ tarafında bu değişkene karşılık gelen ikinci türev yok olur.



Şekil 4.11. Uygun katı silindir

Örnek 4.6.1.

Yukarıdaki Şekil 4.11 , $0 \leq r \leq c$, $0 \leq z \leq h$ katı silindiri ısı yayılım katsayısı k olan homojen bir malzemeden yapılmış olsun. Silindir θ dan bağımsız yani eksensel simetrik $u(r, z, 0) = f(r, z)$ başlangıç sıcaklığına sahip olsun. Bu silindirin $r = c$ düşey silindirik yüzeyinden ve dairesel alt ve üst tabanlardan oluşmuş olan sınırı sıfır sıcaklığına tutulmuş ise (mesela, $t = 0$ anında silindir buzun içine konulabilir.), bu durumda silindirde meydana gelen $u(r, z, t)$ uygun koşulları sağlar.

Bu araştırmaları silindirik yüzeyi ve alt tabanı sıfır sıcaklığında tutulan, fakat üst tabanı yalıtılmış olan silindir için yapılabilir. Bu durumda (4.28) sınır koşullarının yerini $u(c, z, t) = u(r, 0, t) = u_z(r, h, t) = 0$ koşulları alır.

$$u(r, z, t) = \frac{8u_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda_{mn} kt) J_0\left(\frac{\gamma_m r}{c}\right) \sin \frac{(2n-1)\pi z}{2h}}{(2n-1)\gamma_m J_1(\gamma_m)} \quad (4.29)$$

elde edilir. Burada $\lambda_{mn} = \frac{\gamma_m^2}{c^2} + \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4h^2}$ dir. Şimdi silindirin maksimum sıcaklığının her zaman üst tabanının merkezinde gerçekleşmesi mümkün müdür? Böyle bir tahminin mümkün olup-olmamasını uygun grafiksel incelemelerin yardımı ile ispatlanabilir.

Şimdi a yarıçaplı düzgün bir dairesel zarın titreşimlerini incelensin. Eğer zarın başlangıç yer değişim ve hız fonksiyonları r ve θ kutupsal koordinatlarının her ikisine de bağlı ise (4.26) dalga denklemini kutupsal koordinatlar biçiminde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \quad (4.30)$$

şeklinde yazılabilir. $t = 0$ anında zar hareketsiz durumundan çıkartılsın ve ondan sonra zarın sınırı sabit tutulsun (buna göre $r = a$ çemberi üzerinde u yer değişimi her zaman sıfıra eşit olacaktır). Bu durumda zarın $u(r, \theta, t)$ yer değişim fonksiyonu (4.30) denklemini ve

$$u(a, \theta, t) = 0 \quad (\text{sınır sabitlenmiştir}), \quad (4.31)$$

$$u(r, \theta, 0) = f(r, \theta) \quad (\text{verilen başlangıç yer değişimi}), \quad (4.32)$$

$$u_t(r, \theta, 0) = 0 \quad (\text{başlangıç hızı sıfırdır}) \quad (4.33)$$

sınır koşullarını sağlar. (4.33) denkleminde $u(r, \theta, t) = R(r) \Theta(\theta) T(t)$ koyup ve değişkenleri

$$\frac{T''}{c^2 T} = -\frac{R'' + \frac{1}{r} R'}{R} + \frac{\Theta''}{r^2 \Theta} = -\alpha^2 \quad (\text{sabit}) \quad (4.34)$$

biçiminde ayırırsak (α sabittir).

$$T'' + \alpha^2 c^2 T = 0, \quad T'(0) = 0 \quad (4.35)$$

bulunur. Böylece, sabit çarpan dikkate alınmadan, $T(t) = \cos \alpha c t$ dir. Daha sonra, (4.35) eşitliğinin sağ tarafından

$$\frac{r^2 R'' + r R'}{R} + \alpha^2 r^2 + \frac{\Theta''}{\Theta} = 0 \quad (4.36)$$

elde edilir. Buradan β sabit olmak üzere,

$$\frac{\Theta''}{\Theta} = -\beta^2 \quad (4.37)$$

bulunur. $\Theta'' + \beta^2 \Theta = 0$ denkleminin 2π periyotlu bir $\Theta(\theta)$ periyodik çözümüne sahip olması için β parametresinin bir tamsayı olması gerekir. Buna göre θ çözümleri

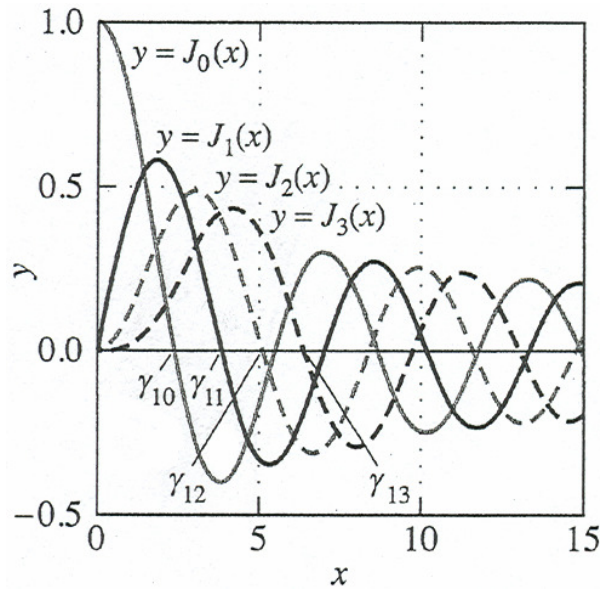
$$\Theta_n(\theta) = \begin{cases} \cos n\theta, \\ \sin n\theta, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.38)$$

şeklinde olur. (4.36) de $\Theta''/\Theta = -n^2$ alınırsa n. mertebeli parametrik Bessel denklemi

$$r^2 R'' + rR' + (\alpha^2 r^2 - n^2)R = 0 \quad (4.39)$$

elde edilir. Bilindiği gibi bu denklemin sınırlı çözümü $J_n(\alpha r)$ fonksiyonudur. (4.31) sınır koşulundan $J_n(\alpha a) = 0$ elde edilir. Böylece, Şekil 4.12 deki tablodaki Durum 1 e göre r-öz fonksiyonları

$$R_{mn}(r) = J_n\left(\frac{\gamma_{mn} r}{a}\right) \quad (m = 1, 2, 3, \dots; n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.40)$$



Şekil 4.12. İlk birkaç Bessel fonksiyonunun grafikleri ve başlangıç kökleri

biçiminde bulunur. Burada γ_{mn} ile $J_n(x) = 0$ denkleminin m . Pozitif kökü gösterilmiştir. γ_{mn} sayılarının sayısal değerlerini yaklaşık olarak bulmak için önce, Şekil 4.12 de olduğu gibi, $J_n(x)$ fonksiyonunun grafiği incelenerek birinci kökün $r_1 \approx \gamma_{1n}$, yaklaşık değeri bulunur ve daha sonra “

FindRoot [BesselJ[n,x] == 0, {r, r1 + (m - 1)*Pi}] ” Mathematica komutunun yardımıyla diğer γ_{mn} değerleri de bulunur.

Son olarak, (4.48) de $\alpha_{mn} = (\gamma_{mn})/a$ alınırsa,

$$T_{mn}(t) = \cos \frac{\gamma_{mn} ct}{a} \quad (4.41)$$

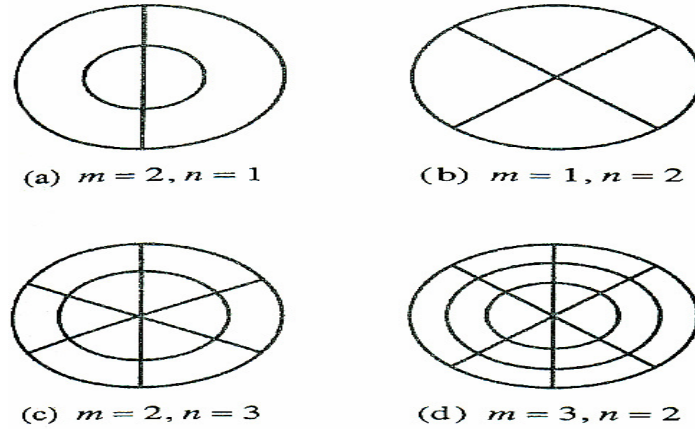
t - fonksiyonu elde edilir. Böylece, (4.39), (4.40) ve (4.41) formüllerini bir araya getirmekle hareketsiz durumda iken titreştirilen dairesel zar ile ilgili sınır değer probleminin

$$(r, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} J_n \left(\frac{\gamma_{mn} r}{a} \right) (a_{mn} \cos n\theta + b_{mn} \sin n\theta) \cos \frac{\gamma_{mn} ct}{a} \quad (4.42)$$

biçimsel seri çözümüne sahip olduğu görülebilir. Buna göre titreşen dairesel zarın sıfır başlangıç hızına sahip salınımının tipik doğal modu

$$u_{mn}(r, \theta, t) = J_n \left(\frac{\gamma_{mn} r}{a} \right) \cos n\theta \cos \frac{\gamma_{mn} ct}{a} \quad (4.43)$$

veya $\cos n\theta$ yerine $\sin n\theta$ konulması ile elde edilen benzer ifade şeklindedir. Bu moda zar ($r = a$ sınırına ilaveten) $m - 1$ tane $r_{jn} = \frac{\gamma_{jn} a}{\gamma_{mn}}$, $J = 1, 2, \dots, m - 1$



Şekil 4.13. Titreşen dairesel zarın hareketsiz çemberleri ve yarıçapları

Yarıçaplı sabitlenmiş hareketsiz (düğüm: nodal) çemberleri ile birlikte titreşimler yapmaktadır. Ayrıca, aralarındaki açı π/n olmak üzere birincisinin açı ölçüsü $\theta = \pi/2n$ olan $2n$ tane sabitlenmiş hareketsiz (nodal) yarıçap mevcuttur. Şekil 4.13 de bu hareketsiz çember ve yarıçapların bazı tipik görünüşleri verilmiştir. Bu hareketsiz çember ve yarıçaplar zar dairesini halka şeklinde daire dilimlerine bölmektedir. Zar titreşimce bu dilimler sırasıyla yukarıya ve aşağıya doğru hareketlenir. Titreşen dairesel zarlar ile ilgi uygulamalarda (4.42) serisinin katsayılarının bilinmesi çoğu hallerde gerekli değildir. Bu nedenle (4.42) serisi için olan katsayı formüllerine genellikle ihtiyaç yoktur. (4.43)

şeklindeki öz fonksiyonların uygun lineer birleşimlerinin grafiği çizerek zarın mümkün olabilecek titreşimleri için araştırmalar yapma mümkün olabilir. Mesela, $c = 1$ olmak üzere $a = 1$ yarıçaplı dairesel zar için

$$u(r, \theta, t) = J_1(\gamma_{21}r) \cos \theta \cos \gamma_{21}t + J_2(\gamma_{32}r) \cos 2\theta \cos \gamma_{32}t \quad (4.44)$$

şeklindeki bir salınımın anlık görüntüsü elde edilebilir. Eğer bilgisayar ortamı da varsa böyle salınımların filmi oluşturabilir.

4.7. Küresel Koordinatlı Uygulamalar

Uzayda orijine göre simetriğe sahip bölgeleri içeren problemlerde belirtilen küresel koordinatların kullanılması elverişli olmaktadır. Küresel koordinatlarla ifade edilmiş bir $u(\rho, \phi, \theta)$ fonksiyonu için üç boyutlu Laplace denklemi

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} \sin \phi \right) + \frac{1}{\sin^2 \phi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right] \quad (4.45)$$

biçimindedir. Burada $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, noktasının orijine (O) olan uzaklığını, ϕ pozitif z – ekseni ile OP arasındaki açıyı, ve θ xy – düzleminde kutupsal koordinatlar açısını göstermektedir. Bazen ϕ ve θ açılarının rolleri değişik olabilir, yani z ekseni ile OP arasındaki açı θ , kutupsal açı ise ϕ olarak tanımlanabilir. Özel olarak, eğer u fonksiyonu ρ, ϕ veya θ değişkenlerinin birinden bağımsız ise (4.45) nın sağ tarafında u nun bu değişkene göre türevlerini içeren terimi göz önüne alınmaz.

KAYNAKLAR

- Anar, İ., 2005. *Kısmi Diferansiyel Denklemler*. Palme Yayıncılık, Ankara.
- Boyce, W. E., DiPrima, R. C., 2001. *Elementary Differential Equations And Boundary Value Problems*. John Wiley & Sons Inc., New York-London-Sydney, 485s.
- Caddington, E., A., Levinson, N., 1955. *Theory of Ordinary Differential Equations*. Prentice Hall of India Private Limited, New Delhi.
- Constanda, C., 2002. *Solution Techniques For Elementary Partial Differential Equations*. (English summary) with a foreword by Peter Schiavone. Chapman & Hall/CRC Mathematics. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 253s.
- Çağlayan, M., Çelebi, O., 2002. *Kısmi Diferansiyel Denklemler*. Vipaş, Bursa.
- Dernek, A. N., 2005. *Kısmi Türevli Denklemler ve Çözümlü Problemler*. Nobel Yayınları, İstanbul.
- Fečkan, M., 1995. Periodic solutions of certain abstract wave equations. Proc. Amer. Math. Soc. 123 (), no. 2, 465--470.
- John, F., 1944. *Partial Differantial Equations*. Wineda, Dover. N.Y.
- King, A., C., Billingham, J., Otto, S., R., 2003. *Differential Equations*. Linear, Nonlinear, Adinary, Portial Cambridge.
- Lorenz, E., N., J., 1963. *Deterministic non-periodic flows*. *J. Atoms.Sci.*, **20**: 130-141.
- Penney, E., 2006. *Bilgisayar Destekli ve Matematiksel Modellemeli Diferansiyel Denklemler ve Sınır değer problemleri*. Çeviri: Ö.Akın Palme Yayıncılık.
- Pinchover, Y., Rubinnstein, J., 2005. *An Introduction to Partial Differential Equations*. Cambridge University Press.
- Sneddon, I., N., 1957. *Elements of Partial Differential Equation*. New York, Mc-Graw-Hill, N.Y.
- Vladimir, I., A., 1997. *Lectures Partial Differential Equations (Translated by Roger Cooke)*. Springer, USA.
- Weinberg, H.,F.,1965. *A First Course in Partial Differential Equations With Complex Variables and Transform Methods*. New York.

ÖZ GEÇMİŞ

1969 yılında Van'ın Muradiye İlçesi'nde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Van'da tamamladı. 1989 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı ve 1994 yılında da mezun oldu. 2005 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Yüksek Lisans eğitime başladı. Evli olup halen Milli Eğitim Bakanlığı'nda Matematik Öğretmeni olarak çalışmaktadır.