



T.C.
GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**SOYUT LİNEER OPERATÖRLE ETKİLENMİŞ
BİR SÜREKSİZ STURM-LIOUVİLLE
PROBLEMİNİN ÖZDEĞERLERİ**

Kadriye AYDEMİR

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU
2010**

Her hakkı saklıdır

T.C.
GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**SOYUT LİNEER OPERATÖRLERLE ETKİLENMİŞ BİR SÜREKSİZ
STURM-LIOUVILLE
PROBLEMİNİN ÖZDEĞERLERİ**

Kadriye AYDEMİR

TOKAT
2010

Her hakkı saklıdır

Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU danışmanlığında, Kadriye AYDEMİR tarafından hazırlanan bu çalışma 15/01/2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU

İmza:

Üye: Doç. Dr. Eşref ORUÇOV

İmza:

Üye: Yrd. Doç. Dr. Zülfigar AKDOĞAN

İmza:

Yukarıdaki sonucu onaylarım
(İmza)

Prof. Dr. Metin YILDIRIM
Enstitü Müdürü
/.../2010

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlâk kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

İmza

Kadriye AYDEMİR

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SOYUT LİNEER OPERATÖRLE ETKİLENMİŞ BİR SÜREKSİZ STURM-LIOUVILLE PROBLEMİNİN ÖZDEĞERLERİ

Kadriye AYDEMİR

Gaziosmanpaşa Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU

Bu tezde sınır şartlarından birinde özdeğer parametresi bulunduran bir diferansiyel-operatör sınır-değer-geçiş probleminin bazı spektral özelliklerini araştırdık. Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, araştırılan konunun güncelliği, uygulama alanları, teorik ve pratik önemi hakkında kısa bilgiler verdik. İkinci bölümünde tez konumuzla ilgili yapılmış olan çalışmalar hakkında bilgi verdik. Üçüncü bölümde çalışmamız için gerekli olan bazı temel tanım ve teoremleri verdik. Dördüncü bölümde problemimizle ilgili olan yardımcı başlangıç-değer problemlerini inceleyerek, problemimiz için temel çözüm fonksiyonlarını tanımladık ve bu fonksiyonlar için asimptotik formüller elde ettik. Daha sonra bu formüllerden yararlanarak özdeğerler için asimptotik formüller bulduk. Son bölüm tezimizin orjinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde denklemde soyut lineer operatör bulunduran sınır-değer-geçiş probleminin özdeğerleri için asimptotik formüller bulduk.

2010, 121 sayfa

Anahtar kelimeler: : Sturm-Liouville problemleri, sınır şartları, özdeğer, özfonksiyon, diferansiyel operatör, Green fonksiyonu.

ABSTRACT

Undergraduate Thesis

EIGENVALUES OF ONE DISCONTINUOUS STURM-LIOUVILLE PROBLEM PERTURBATED By ABSTRACT LINEAR OPERATOR

Kadriye AYDEMİR

Gaziosmanpasa University
Faculty of Arts and Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU

In this thesis, we investigated some spectral properties of one differential-operator boundary-value-transmission problem which contain eigenvalue parameter in one of boundary conditions. This thesis are arranged in five chapters. In the first chapter, we indicated a brief explanation about current interest, application areas, theoretical and practical importance. In the second chapter, we gave information about studies which related to the investigated problem this thesis study. In Chapter 3, we explained some basic definitions and theorems which are used through the thesis study. In Chapter 4, by examining some auxiliary initial-value problems we define fundamental solutions for our problem and found asymptotic formulas for these solutions. Then by using these formulas we establish asymptotic formulas for eigenvalues. The last section is original part of the thesis, in which we found asymptotic formulas for eigenvalues of boundary-value-transmission problems for the case when the equation contain abstract linear operator.

2010, 121 pages

Key words: : Sturm Liouville problems, boundary conditions , eigenvalue, eigenfunction, differential operator, Green function.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında bilgisini, desteğini, emeğini hiçbir zaman esirgemeyen ve her türlü sıkıntıda daima yanımda olan değerli hocam Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU' na en içten saygı ve sevgilerimi sunarım.

Ayrıca tez çalışmam boyunca karşılaştığım sorunlarda zamanını ve fikirlerini benimle paylaşan Araştırma görevlisi arkadaşlarıma, bölümdeki tüm hocalarıma ve çalışmam boyunca ortak fikir alış verişinde bulunduğum Arş. Gör. Hayati OLĞAR'a teşekkür ederim.

Lisans ve yüksek lisans öğrenimim boyunca daima bana güvenen, benden maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen başta canım annem olmak üzere tüm aileme ve adını zikretmediğim ama sevgilerini daima yüreğimde hissettiğim diğer tüm arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Bu tez, 2009/39 nolu Bilimsel Araştırma Projesi olarak Gaziosmanpaşa Üniversitesi tarafından desteklenmiştir. Gaziosmanpaşa Üniversitesine verdiği finansal destekten dolayı teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
1. GİRİŞ	1
2. LİTERATÜR ÖZETİ	2
3. GENEL BİLGİLER	4
3.1 Sturm-Liouville Denklemleri	4
3.1.1 Regüler Sturm-Liouville Problemi	4
3.2 Lineer Diferansiyel İfade ve Sınır Şartları	5
3.3 Lineer Operatörlerin Özdeğer ve Özfonksiyonları	6
3.4 $L_2[a, b]$ Uzayı	7
3.5 Hilbert Uzaylarında Simetrik ve Kendine Eşlenik Operatörler	7
3.6 Mutlak Sürekli Fonksiyonlar	11
3.7 Kompleks Fonksiyonların Sıfır Yerlerinin Sayısı	11
3.8 Parametreye Bağlı Sınır-Değer Probleminin Çözümünün Varlığı, Tekliği ve Parametreye Göre Tamlik Teoremi	12
3.9 Asimptotik İfadeler	13
3.10 Green Fonksiyonu	15
3.11 Rezolvent Operatörü, Sınırlı ve Kompakt Operatörler, Kompakt Gömülmeler	16
3.12 Sobolev Uzayları	18
3.13 Diskret Spektrumlu Operatörler	19
4. METOTLAR	21
5. BULGULAR	22
5.1 Sınır Değer Probleminin İfadesi, Özdeğerlerinin Reelliği ve Özfonksiyonlarının Ortogonalitesi	22
5.2 Verilmiş Problemle İlgili Bazı Yardımcı Başlangıç-Değer Problemlerinin Temel Çözümleri Ve bu Temel Çözümlerle İlgili Önermeler	28

5.2.1	Bazı Yardımcı Başlangıç Değer Problemleri	28
5.2.2	Temel Çözümler ile Eşdeğer Olan İntegral Denklemler	38
5.3	$\Phi(x, \lambda)$ ve $\chi(x, \lambda)$ Temel Çözümlerinin Asimptotik Davranışları	45
5.4	Temel Çözümler, Karakteristik Fonksiyon ve Karakteristik Fonksiyonun Asimptotik Davranışı	58
5.4.1	Temel Çözümler ve Karakteristik Fonksiyon	58
5.4.2	Karakteristik Fonksiyonun Asimptotik Davranışları	66
5.5	Özdeğerler İçin Asimptotik Davranışlar	68
5.6	Verilen Sınır-Değer-Geçiş Problemi ile AynıÖzdeğerlere Sahip Olan Lineer Diferansiyel Operatörün Kurulması	72
5.7	Sınır-Değer-Geçiş Probleminin Rezolventinin ve Green Fonksiyonunun Kurulması	78
5.7.1	Sınır-Değer-Geçiş Probleminin Rezolventi ve Green Fonksiyonu	78
5.7.2	Rezolvent Operatörü	87
5.8	Diferansiyel-Operatör Sınır-Değer-Geçiş Probleminin İfadesi, İzomorfluğu, Rezolventinin Normunun Değerlendirilmesi, Spektrumu ve Özdeğerlerinin Asimptotiği	92
5.8.1	Giriş	92
5.8.2	Sınır-Değer-Geçiş Probleminin İzomorfluğu	93
5.8.3	Esas Diferansiyel Kısımına Göre Kompakt Olan Operatörle Etkilenmiş Sınır-Değer-Geçiş Probleminin Özdeğerlerinin Asimptotiği	99
6.	SONUÇ VE ÖNERİLER	106
	KAYNAKLAR	107
	ÖZGEÇMİŞ	112

1. GİRİŞ

Bilindiği gibi bir çok matematiksel fizik problemlerinin çözümü için uygulanan bazı yöntemler, uygun adi diferansiyel denklemler için sınır değer problemlerinin spektral özelliklerinin araştırılmasını gerektirmektedir. Bu özelliklere örnek olarak özdeğerler ve özfonksiyonların asimptotiğinin bulunması, Green fonksiyonunun inşa edilmesi, rezolvent operatörünün kurulması v.b. özellikler gösterilebilir.

Birçok matematiksel fizik probleminin, değişkenlerine ayırma yöntemiyle incelenebilmesi için Sturm-Liouville tipinde problemlerin özelliklerinin incelenmesi gerekmektedir. Bu tür problemlerin önemi matematiksel fizik problemlerinin çözümünde etkin biçimde uygulanabilmesidir. Ancak çağdaş mekanik ve fiziğin talepleri yeni ve standart (alışılmış) olmayan sınır-değer problemlerinin incelenmesi ihtiyacını ortaya koymuştur.

Bu tez çalışmasının esas konusu bir diferansiyel operatör sınır-değer-geçiş problemi için yukarıda bahsettiğimiz özelliklerin incelenmesidir. Tez çalışmasında incelenen problemin ifadesi klasik Sturm-Liouville problemlerin ifadesinden aşağıdaki farkları bulundurmaktadır.

1) Denklemden soyut (genel) lineer operatör bulunmaktadır.

2) Verilen aralıkta süreksizlik noktası vardır ve süreksizlik noktasında problem geçiş şartlarıyla birlikte verilmiştir.

3) Ayrıca sınır şartlarından bir tanesinde özdeğer parametresi bulunmaktadır.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

Matematik fiziğin problemleri genelde kısmi diferansiyel denklemlerin bazı başlangıç ve sınır şartlarını sağlayan çözümlerin bulunmasına indirgenmektedir. Böyle problemlerin incelenmesi için çok farklı yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemlerin bir kısmının, örneğin; özellikle Fourier yönteminin(değişkenlere ayırma yönteminin) esaslandırılması adi diferansiyel denklemler için sınır değer problemlerinin spektral özelliklerinin incelenmesini gerektirmektedir. Böyle sınır değer problemlerinden biri olan Sturm-Liouville problemleri ilk olarak 19. yüzyılın ortalarında ısı ve madde iletimi problemleri araştırılırken Sturm ve Liouville tarafından tanımlanmış ve incelenmiştir.

Daha sonra bu tip problemlerde Birkoff (1908) özdeğer parametresine bağlı adi diferansiyel denklemlerin temel çözümleri için asimptotik eşitlikler elde etmiş, regüler sınır şartlarını tanımlamış ve regüler sınır-değer problemleri için özfonksiyonlar ve özfonksiyonlara bağlı fonksiyonlar sisteminin tamlığı ile ilgili teoremler ispatlamıştır.

Tamarkin (1917)'in çalışmalarında parametreye bağlı lineer diferansiyel denklemler için temel çözüm fonksiyonlarının asimptotiği bulunmuş, regüler ve güçlü regüler sınır şartları tanımlanmıştır. Bu çalışmalarda regüler sınır-değer problemleri için Green fonksiyonu değerlendirilmiş ve tanım bölgesindeki fonksiyonların verilmiş sınır değer problemlerinin özfonksiyonları ve özfonksiyonlarına bağlanmış fonksiyonlar sistemi üzerine seriye açılım formülleri elde edilmiş, ayrıca sınır şartlarının güçlü regüler olduğu durumda özdeğerler için asimptotik formüller bulunmuştur.

Daha sonraki yıllarda ister soyut teoremin iç talepleri, isterse de matematik fiziğin özellikle kuantum mekaniğinin, ortaya koyduğu yeni yeni somut problemlerin araştırılma ihtiyaçları diferansiyel operatörlerin spektral teorisinin hızlı bir şekilde gelişmesine neden olmuştur. Yüzlerce kitap ve makale yayınlanmasına rağmen Sturm-Liouville problemleri hem diferansiyel denklemler teorisinin hem de uygulamalı matematiğin en önemli ve en güncel konusu olmaya devam etmektedir. Bununda esas nedeni matematik fiziğin ortaya koyduğu yeni ve güncel problemlerdir. Böyle yeni problemler klasik Sturm-Liouville problemlerinin farklı yönlerden genelleştirilmesi ve araştırma yöntemlerinin geliştirilmesi

ihtiyacını ortaya çıkarmaktır. Örneğin, farklı fiziksel özelliklere sahip olan maddeler arasındaki ısı ve madde iletimi problemleri sınır şartlarının yanı sıra geçiş şartları da içeren Sturm-Liouville problemlerinin incelenmesini gerektirmektedir. Son yıllarda Sturm-Liouville problemlerinin farklı yönlerde genelleştirilmeleri yaygın olarak araştırılmaktadır. Sınır şartlarında özdeğer parametresi bulunduran bazı kendine eşlenik sınır-değer problem leri kaynaklar kısmında yer alan Walter (1973), Schneider (1974), Fulton (1977), Hinton (1970) tarihli çalışmalarda incelenmiştir.

Russakovskiy' in 1975' deki çalışmasında özdeğer parametresi sınır şartlarına polinomal şekilde dahil olduğu için uygun lineer A operatörü $L_2(a, b)$ yerine $L_2(a, b) \oplus \mathbb{C}^N$ şeklinde uzaylarda tanımlanmıştır.

Shkalikov'un, 1983' deki ve onu takip eden birkaç çalışmasında ise özdeğer parametresinin hem diferansiyel denkleminin katsayı fonksiyonlarında, hem de sınır şartlarında polinomal şekilde içeren kendine eşlenik olmayan sınır-değer problemlerinin araştırılması için yeni yorum ve lineerleştirme yöntemi geliştirmiştir.

Muhtarov'un, 1988' deki çalışmasında sınır şartlarında özdeğer parametresi bulundurmayan, ancak denkleminde soyut lineer operatör bulunduran ve esas kısmı kendine eşlenik olan sınır-değer probleminin özdeğerlerinin asimptotiği bulunmuştur. Altınışik' ın, 1998 yılında yazdığı "sınır şartlarında özdeğer parametresi bulunduran süreksiz katsayılı sınır-değer problemi" başlıklı Doktora Tezi'n de ise sınır şartlarında özdeğer parametresi bulunduran süreksiz katsayılı sınır-değer probleminin spektral özellikleri araştırılmıştır. Demir' in 1999 yılında yazdığı "bir diferansiyel-operatör denklem için sınır-değer problemi" başlıklı Doktora Tezi' n de ise hem sınır şartlarında özdeğer parametresi bulunduran hem de denkleminde soyut linner operatör bulunduran ve esas kısmı kendine eşlenik olan sınır-değer probleminin özdeğerlerinin asimptotiği araştırılmıştır.

Son yıllarda ise bu alanda en önemli sonuçlar Yakubov ve Yakubov'un çalışmalarında elde edilmiştir (Yakubov, Y., 1993; 1994; 1998 and Yakubov and Yakubov, 1999; 2000). Yakubov' un , 1994' de yayımlanan kitabında reguler diferansiyel operatörlerin genel teorisi kurulmuş ve bu teori de yeni yöntemler geliştirilmiştir. Yakubov' un son yıllardaki çalışmalarında ise irregüler sınır-değer problemlerinin spektral özellikleri araştırılarak elde edilen sonuçlar bir çok fiziksel problemlere uygulanmıştır. Yakubov (1995;1998)' un çalışmaları örnek olarak verilebilir.

3. GENEL BİLGİLER

3.1 Sturm-Liouville Denklemleri

Sınır-değer problemleri arasında Sturm-Liouville problemlerinin önemli bir yeri vardır. Sturm-Liouville problemini ifade etmeden önce herhangi ikinci mertebeden

$$-u'' + p(x)u' + r(x)u = \lambda s(x)u \quad (3.1.1)$$

bir diferansiyel denklemin $(s(x))$ ikinci mertebeden, $p(x)$ ise birinci mertebeden sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar ise ve $s(x) > 0$ ise)

$$-v'' + q(y)v = \lambda v \quad (3.1.2)$$

biçiminde denkleme indirgenebileceğini belirtelim. Bunun için x ve $u = u(x)$ değişkenlerinden

$$y = \frac{1}{c} \int_a^x \sqrt{s(t)} dt, \quad c = \frac{1}{\pi} \int_a^b \sqrt{s(t)} dt \quad (3.1.3)$$

$$v(y) = \sqrt[4]{s(x)} \exp\left(\frac{1}{2} \int_a^x p(t) dt\right) u(x) \quad (3.1.4)$$

dönüşümleri ile yeni y ve $v = v(y)$ değişkenlerine geçmek yeterlidir. Bu durumda $[a, b]$ aralığı $[0, \pi]$ aralığına dönüşür. Bu dönüşüm, Liouville dönüşümü olarak adlandırılır (Titchmarsh, 1962).

3.1.1 Regüler Sturm-Liouville Problemi

Genel olarak regüler Sturm-Liouville problemi $L_2[a, b]$ ($-\infty < a < b < +\infty$) Hilbert uzayında verilmiş

$$Lu =: -u'' + q(x)u = \lambda u, \quad x \in [a, b] \quad (3.1.5)$$

denkleminin ve bazı sınır şartlarının oluşturduğu sınır değer problemleri olarak tanımlanmaktadır. Böyle sınır şartlarından biri de ,

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0 \quad (3.1.6)$$

$$\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0 \quad (3.1.7)$$

sınır şartlarından oluşmaktadır. Burada $q(x)$ verilen aralıkta reel değerli sürekli bir fonksiyon, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ reel sabitler, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0, \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ ise x den bağımsız parametredir.

Eğer herhangi $\lambda = \lambda_0$ değeri için bu problemin aşikar olmayan $u_0 \in W_2^2[a, b]$ ($u_0 \neq 0$) çözümü bulunursa, λ_0 sayısına verilmiş problemin özdeğeri, $u = u_0(x)$ fonksiyonuna ise bu özdeğere uygun özfonksiyon denir.

3.1.5–3.1.7 Sturm Liouville probleminde $[a, b]$ aralığı sonlu ve bu aralıkta $q(x)$ fonksiyonu integrallenebilirse bu tip problemlere regüler Sturm-Liouville problemler aksi taktirde yani $[a, b]$ aralığı sonsuzsa veya $q(x)$ fonksiyonu bu aralıkta integrallenemezse veya her iki şart sağlanıyorsa, (yani hem aralık sonsuz, hemde $q(x)$ fonksiyonu bu aralıkta integrallenemezse) bu tip problemlere singüler Sturm-Liouville problemleri denir. $p(a) = p(b)$ olmak üzere eğer 3.1.5 diferansiyel denklemi

$$u(a) = u(b) \quad (3.1.8)$$

$$u'(a) = u'(b) \quad (3.1.9)$$

sınır şartlarıyla verilmişse bu tip problemlere de periyodik Sturm-Liouville problemi denir.

3.2 Lineer Diferansiyel İfade ve Sınır Şartları

$p_i(x) : R \longrightarrow R$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$\ell(y) := p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y, \quad x \in (a, b) \quad (3.2.1)$$

biçimindeki ifadeye n -mertebeden lineer diferansiyel ifade denir. Genel olarak her x için $p_0(x) \neq 0$ olduğu kabul edilir.

$$U(y) := \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) + \dots + \alpha_{n-1} y^{(n-1)}(a) + \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) + \dots + \beta_{n-1} y^{(n-1)}(b) \quad (3.2.2)$$

biçimindeki ifadeye ise sınır değer ifadesi denir. $U_i(y), i = 1, 2, \dots, m$ ifadeleri sınır değer ifadeleri olduğunda

$$U_i(y) = 0, i = 1, 2, \dots, m \quad (3.2.3)$$

biçimindeki eşitlikler sınır şartları olarak adlandırılır.

Bilindiği gibi $C[a, b]$ ile, $[a, b]$ aralığında tanımlı ve sürekli olan fonksiyonların lineer uzayı gösterilir.

$$\{f \in C[a, b] \mid f', f'', \dots, f^{(n)} \in C[a, b]\}$$

lineer uzayı ise $C^{(n)}[a, b]$ biçiminde gösterilir. $L : C[a, b] \longrightarrow C[a, b]$

$$D(L) = D = \{y \in C[a, b] \mid y \in C^{(n)}[a, b], U_i(y) = 0, i = 1, 2, \dots, m\}$$

$$L(y) = \ell(y) = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y$$

eşitlikleri ile tanımlanan L -lineer operatörüne lineer diferansiyel operatör veya $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi ile

$$U_i(y) = 0, i = 1, 2, \dots, m$$

sınır şartlarının ürettiği lineer diferansiyel operatör denir (Naimark, 1967).

3.3 Lineer Operatörlerin Özdeğer ve Özfonksiyonları

H kompleks lineer uzayında tanım bölgesi $D(A)$ olan $A : H \longrightarrow H$ lineer operatörü ve λ kompleks parametresi verilsin. Eğer $\lambda = \lambda_0$ için

$$Ay = \lambda_0 y \quad (3.3.1)$$

operatör denkleminin $y_0 \neq 0$ çözümü varsa, λ_0 sayısına A operatörünün özdeğeri, $y_0 \in D(A)$ elemanına ise bu özdeğere uygun özfonksiyonu denir (Kreyszig, 1989).

3.4 $L_2[a, b]$ Uzayı

Verilmiş $[a, b]$ aralığında tanımlı ve Lebesgue anlamında ölçülebilir olan $f(x)$ fonksiyonu için $|f(x)|^2$ fonksiyonu bu aralıkta Lebesgue anlamında integrallenebilir ise $f(x)$ fonksiyonuna $[a, b]$ aralığında karesi integrallenebilir fonksiyon denir (Naimark, 1967). Karesi integrallenebilir fonksiyonların lineer uzayında

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx \quad (3.4.1)$$

ile gösterilen bu formül bir iç çarpım tanımlar (Birbiriyle eşdeğer olan (yani h.h.h. eşit olan) fonksiyonları eşit fonksiyonlar olarak kabul ediyoruz. Bu durumda sıfır olarak h.h.h. sıfıra eşit olan bütün fonksiyonlar sınıfını kabul ediyoruz.). Bu şekilde tanımlanan iç çarpım uzayının bir Hilbert uzayı olduğu bilinmektedir. Bu uzay $L_2[a, b]$ ile gösterilir. $[a, b]$ aralığı sonlu olduğu durumda $L_2(a, b)$ 'den olan her bir fonksiyonun (a, b) aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilir olacağı açıktır.

3.5 Hilbert Uzaylarında Simetrik ve Kendine Eşlenik Operatörler

Tanım 3.5.1. H Hilbert uzayında tanım bölgesi $D(A) \subset H$ olan $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ lineer operatörü verilsin. Eğer her $x, y \in D(A)$ için

$$\langle Ax, y \rangle_H = \langle x, Ay \rangle_H$$

eşitliği sağlanıyorsa, A operatörüne simetrik operatör denir (Naimark, 1967).

Tanım 3.5.2. H Hilbert uzayında $\overline{D(A)} = H$ olacak şekilde (yani tanım bölgesi her yerde yoğun olacak şekilde) $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ lineer operatörü verilsin.

Eğer herhangi $y \in H$ elemanı için öyle $z_y \in H$ elemanı varsa ki,

$$\langle Ax, y \rangle_H = \langle x, z_y \rangle_H$$

eşitliği bütün $y \in D(A)$ elemanları için sağlansın, o halde $y \longrightarrow z_y : H \longrightarrow H$ dönüşümüne A operatörünün eşleneği denir (Naimark, 1967) ve A^* ile gösterilir. Bu özelliğe sahip olan bütün $y \in H$ elemanları kümesi A^* operatörünün tanım bölgesi olarak kabul edilir ve $D(A^*)$ ile gösterilir.

Sonuç 3.5.1. A^* operatörü bir lineer operatördür ve her $x \in D(A)$, $y \in D(A^*)$ için

$$\langle Ax, y \rangle_H = \langle x, A^*y \rangle_H$$

eşitliği sağlanır.

Sonuç 3.5.2. Her $A : H \longrightarrow H$ simetrik operatörü için $D(A) \subset D(A^*)$ ' dir ve her $x \in D(A)$ için

$$A^*x = Ax$$

eşitliği sağlanır. Yani, her simetrik operatörün eşleneği bu operatörün bir genişlemesidir (devamıdır).

Simetrik operatörlerle eşlenikleri arasındaki çok önemli bir bağıntıyı verebilmek için önce aşağıdaki tanımları verelim.

H Hilbert uzayı verilsin. $H \times H := \{(x, y) | x \in H, y \in H\}$ kümesi alışılmış yöntemle lineer uzaya dönüştürülebilir. Bu lineer uzayda $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in H \times H$ elemanları için

$$\langle x, y \rangle_{H \oplus H} := \langle x_1, y_1 \rangle_H + \langle x_2, y_2 \rangle_H$$

eşitliği bir iç çarpım tanımlıyor ve bu iç çarpıma göre

$$H \oplus H := (H \times H, \langle \cdot, \cdot \rangle_{H \oplus H})$$

bir Hilbert uzayıdır (Kreyszig, 1989).

Tanım 3.5.3. A lineer operatörü verilsin. Eğer

$$\Gamma_A := \{(x, y) \in H \oplus H \mid x \in D(A), y = Ax\}$$

kümesi $H \oplus H$ Hilbert uzayında kapalı bir küme ise o halde A operatörüne kapalı operatör denir. Γ_A ' ya bu operatörün grafiği denir.

H Hilbert uzayında $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ lineer operatörü ve $\lambda \in \mathbb{C}$ kompleks sayısı verilsin. $A + \lambda I$ operatörünün değer bölgesini

$$R(A + \lambda I) := \{Ax + \lambda x \mid x \in D(A)\}$$

ile gösterelim. Ayrıca $M \subset H$ alt kümesi verildiğinde $M^\perp$ ile M kümesinin ortogonal tümleyenini gösterelim:

$$M^\perp = \{x \in H \mid y \in M \Rightarrow \langle x, y \rangle_H = 0\}$$

Şimdi aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz (Kreyszig, 1989).

Teorem 3.5.1. H Hilbert uzayında tanım bölgesi her yerde yoğun olan simetrik A lineer operatörü verilsin. Eğer A kapalı operatör ise o halde $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ olacak şekilde her $\lambda \in \mathbb{C}$ kompleks sayısı ve her $y \in D(A^*)$ elemanı için

$$z = x + y_1 + y_2, x \in D(A), y_1 \in (R(A + \lambda I))^\perp, y_2 \in (R(A + \bar{\lambda} I))^\perp$$

olacak şekilde (x, y_1, y_2) üçlüsü var ve tektir.

Bu anlamda $D(A^*)$ tanım bölgesi

$$D(A^*) = D(A) + (R(A + \lambda I))^\perp + (R(A + \bar{\lambda} I))^\perp$$

biçiminde gösterilebilir (Debnath ve Mikusinski, 2005).

Sonuç 3.5.3. H Hilbert uzayında tanım bölgesi her yerde yoğun olan kapalı ve simetrik $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ lineer operatörü için

$$\overline{(R(A + \lambda I))} = H \text{ ve } \overline{(R(A + \bar{\lambda}I))} = H$$

olacak şekilde $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $\text{Im}\lambda \neq 0$ sayısı mevcut ise A operatörü kendine eşleniktir, yani $A^* = A$ dır.

H Hilbert uzayında verilmiş A simetrik operatörünün kendine eşlenik olması için $D(A^*) = D(A)$ olmasının gerek ve yeter şart olduğu açıktır (Debnath ve Mikusinski, 2005).

Teorem 3.5.2. H Hilbert uzayında A simetrik operatörü verilsin. Eğer $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısı varsa ki $(A - \lambda I)$ ve $(A - \bar{\lambda}I)$ operatörlerin değer bölgeleri H uzayı ile çakışsın, o halde A operatörü kendine eşleniktir (Debnath ve Mikusinski, 2005).

İspat: Herhangi bir $y \in D(A^*)$ elemanını alalım. O halde $x \in D(A)$ için

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, y^* \rangle$$

eşitliği sağlanır. Buradan

$$\langle (A - \bar{\lambda}I)x, y \rangle = \langle Ax, y \rangle - \langle \bar{\lambda}x, y \rangle = \langle x, y^* \rangle - \langle x, \lambda y \rangle = \langle x, y^* - \lambda y \rangle \quad (3.5.1)$$

eşitliği elde edilir. $A - \lambda I$ operatörünün değerleri bütün H uzayı ile çakıştığı için

$$\langle A - \lambda I \rangle z = y^* - \lambda y \quad (3.5.2)$$

olacak şekilde $z \in D(A)$ elemanı bulunur. A operatörü simetrik olduğu için

$$\langle x, y^* - \lambda y \rangle = \langle x, (A - \lambda I)z \rangle = \langle (A - \bar{\lambda}I)x, z \rangle \quad (x \in D(A)) \quad (3.5.3)$$

eşitliği sağlanır. 3.5.1, 3.5.2 ve 3.5.3 eşitliklerinden

$$\langle (A - \bar{\lambda}I)x, y \rangle = \langle (A - \bar{\lambda}I)x, z \rangle \quad (3.5.4)$$

eşitliği bütün $x \in D(A)$ için sağlanır. $(A - \bar{\lambda}I)$ operatörünün değer bölgesi bütün H uzayı ile çakışık olacağından sonuncu eşitlikten

$$y = z \in D(A)$$

elde edilir. Böylece $D(A) \subset D(A^*)$ olduğu ispatlanmış oldu. İspat bitti.

3.6 Mutlak Sürekli Fonksiyonlar

Tanım 3.6.1. $[a, b]$ aralığında tanımlı f fonksiyonu verilsin. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için öyle $\delta > 0$ sayısı varsa ki

$$\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$$

her sonlu sayıda ayrık $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$ aralıkları için

$$| \sum_k f(b_k) - f(a_k) | < \varepsilon$$

olsun, o zaman bu f fonksiyonuna $[a, b]$ aralığında mutlak süreklidır denir (burada $n \in \mathbb{N}$; $(a_k, b_k) \subset [a, b]$, $k = 1, 2, \dots, n$) (Balcı, 2000).

Teorem 3.6.1. f fonksiyonu $[a, b]$ de mutlak sürekli ise $[a, b]$ nin hemen-hemen her noktasında türevlenebilirdir ve f' integrallenebilirdir (Balcı, 2000).

3.7 Kompleks Fonksiyonların Sıfır Yerlerinin Sayısı

Tanım 3.7.1. $D \subset \mathbb{C}$ bir bölge olsun. $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ve $z_0 \in D$ olsun. Eğer f fonksiyonu z_0 'ın enaz bir komşuluğunda diferansiyellenebilir ise f fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir.

Tanım 3.7.2. $D \subset \mathbb{C}$ bir bölge olsun. Eğer $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ bütün D bölgesinde diferansiyellenebilir ise f fonksiyonuna D bölgesinde analitiktir denir.

Tanım 3.7.3. Eğer $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ bütün $\mathbb{C}$ düzleminde diferansiyellenebilir ise f

fonksiyonuna tam fonksiyon denir.

Sıfırdan farklı olan tam fonksiyonun sıfır yerlerinin sonlu veya sayılabilir sayıda olduğu ve de sonlu yığılma noktasının bulunmadığı (veya hiç olmadığı) kompleks analizden iyi bilinmektedir. $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ile tanımlı $f(z)$ fonksiyonu ve $z_0 \in \mathbb{C}$ noktası verildiğinde

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0, f^{(k)}(z_0) \neq 0$$

ise bu durumda $z = z_0$ noktasına $f(z)$ fonksiyonunun k katlı sıfır yeri denir. Sıfırdan farklı tam fonksiyonların herbir sıfır yerinin sonlu katlı olduğu kompleks analizden iyi bilinmektedir.

Teorem 3.7.1. (Rouche Teoremi)

Eğer $f(z)$ ve $\varphi(z)$ kompleks fonksiyonları kapalı düzlenebilir Jordan eğrisi olan Γ üzerinde ve içinde analitiklerse ve her $z \in \Gamma$ için,

$$|f(z)| > |\varphi(z)|$$

şartı sağlanıyorsa; o halde Γ eğrisinin içinde $f(z) + \varphi(z)$ fonksiyonunun sıfır yerlerinin sayısı ile $f(z)$ fonksiyonunun sıfır yerlerinin sayısı (her sıfır yeri katı sayıda hesaplanmak üzere) eşittir (Ulucay, 1971).

3.8 Parametreye Bağlı Sınır-Değer Probleminin Çözümünün Varlığı , Tekliği ve Parametreye Göre Tamlık Teoremi

Teorem 3.8.1. Kabul edelim ki $q : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyondur. O halde

$$-u'' + q(x)u = \lambda u, \quad x \in [a, b]$$

diferansiyel denkleminin

$$u(a) = \sin \alpha, \quad u'(a) = -\cos \alpha \quad \alpha \in [0, \pi)$$

sınır şartlarını sağlayan bir tek $u(x, \lambda)$ çözümü vardır, tekdir ve bu çözüm her $x \in [a, b]$ için $\lambda \in \mathbb{C}$ parametresinin tam fonksiyonudur (Titchmarsh, 1939).

3.9 Asimptotik İfadeler

Kompleks düzlemin herhangi $G \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı olan $f(z)$, $g(z)$ ve $h(z)$ fonksiyonları verilsin. Eğer

$$|f(z)| \leq M |g(z)|, \quad z \in G \cap \{z : |z| > R\}$$

olacak şekilde $R > 0$, $M > 0$ sayıları mevcutsa

$$f(z) = O(g(z)), \quad z \in G, \quad z \longrightarrow \infty \quad (3.9.1)$$

şeklinde yazılır. Bu ifadeye asimptotik eşitlik denir. Eğer,

$$f(z) - h(z) = O(g(z)), \quad z \in G, \quad z \longrightarrow \infty$$

ise o halde

$$f(z) = h(z) + O(g(z)), \quad z \in G, \quad z \longrightarrow \infty \quad (3.9.2)$$

yazılır. $z_0 \in G$ verilsin. Eğer $f(z) = g(z)\alpha(z)$ ve

$$\lim_{z \rightarrow z_0, z \in G} \alpha(z) = 0$$

olacak biçimde $\alpha(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu varsa

$$f(z) = o(g(z)), \quad z \in G, \quad z \longrightarrow z_0 \quad (3.9.3)$$

yazılır ve $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının yakın komşuluğunda $g(z)$ 'ye göre sonsuz küçüktür denir. $\frac{f(z)}{g(z)}$ fonksiyonu z_0 noktasının herhangi komşuluğunda sınırlı ise, yani eğer z_0 -ın öyle komşuluğu ve öyle $M > 0$ varsa ki bu komşulukta

$|f(z)| \leq M |g(z)|$ olsun. O halde

$$f(z) = O(g(z)), \quad z \in G, \quad z \longrightarrow z_0 \quad (3.9.4)$$

yazılır. Eğer

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 1$$

ise

$$f(z) \sim g(z), \quad z \in G, \quad z \longrightarrow z_0 \quad (3.9.5)$$

yazılır. Hangi G bölgesinden bahsedildiği açık şekilde bilinirse bazen $z \in G$ ifadesi yazılmaz.

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ve $\{c_n\}$ reel veya kompleks sayı dizileri verildiğinde $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ve $\exists M > 0$ varsa ki $\forall n \geq n_0$ için $|a_n| \leq M |b_n|$ olsun, o halde

$$a_n = O(b_n) \quad (3.9.6)$$

yazılır. $a_n - c_n = O(b_n)$ olduğunda ise bu durum

$$a_n = c_n + O(b_n) \quad (3.9.7)$$

şeklinde gösterilir. Eğer $a_n = \alpha_n b_n$, $\alpha_n \rightarrow 0$ olacak biçimde (α_n) dizisi mevcutsa

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \text{ ise} \right)$$

bu durum

$$a_n = o(b_n) \quad (3.9.8)$$

şeklinde gösterilir. $a_n - c_n = o(b_n)$ olduğunda ise bu durum

$$a_n = c_n + o(b_n) \quad (3.9.9)$$

şeklinde gösterilir. 3.9.1 – 3.9.9 şeklindeki formüllere asimptotik formüller denir (Titchmars, 1962).

3.10 Green Fonksiyonu

Sırasıyla 3.2.1 ve 3.2.3 ile tanımlı $\ell(y)$ diferansiyel ifadesinin ve $U_i(y) = 0$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ sınır şartlarının ürettiği L lineer operatörü için $Ly=0$ denkleminin bir tek $y=0$ aşıkâr çözümünün bulunduğunu kabul edelim.

Bu halde $\ell(y) = 0$ denkleminin her bir $y_1, y_2, \dots, y_n$ lineer bağımsız çözüm sistemi için

$$\det|U_i(y_j)|_{i,j=1,2,\dots,n} \neq 0$$

olacağından L operatörünün L^{-1} ters operatörü olacak ve bu ters operatörün

$$L^{-1}f = \int_a^b G(x,t)f(t)dt \quad (3.10.1)$$

biçiminde ifade edilebileceği bilinmektedir. Bu durumda 3.10.1 integral operatörünün $G(x,t)$ çekirdeğine L lineer diferansiyel operatörünün Green fonksiyonu denir (Naimark, 1967).

Green fonksiyonunun bulunması için aşağıdaki Teorem yaygın bir şekilde uygulanmaktadır.

Teorem 3.10.1. Eğer $Ly = 0$ sınır-değer probleminin sadece $y = 0$ aşıkâr çözümü varsa, o halde L lineer diferansiyel operatörünün bir tek $G(x,t)$ Green fonksiyonu var ve bu fonksiyon aşağıdaki şartları sağlıyor:

1. $G(x,t)$ fonksiyonu her $t \in [a,b]$ için süreklidir ve x -değişkenine göre bütün $[a,b]$ aralığında $(n-2)$. mertebeye kadar $(n-2$ 'ci mertebe de dahil olmak üzere) sürekli diferansiyellenebilir.

2. $G(x,t)$ fonksiyonu her $t \in (a,b)$ için $[a,t]$ ve $(t,b]$ aralıklarının her birinde x -değişkenine göre $(n-1)$. mertebeden $(n-1$ 'ci mertebe de dahil olmak üzere) sürekli diferansiyellenebilir ve $(n-1)$. mertebeden türev fonksiyonu $x = t$ noktasında süreksizdir ve $\frac{1}{p_0(t)}$ sıçramasına sahiptir, yani

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(t+0,t) - \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(t-0,t) = \frac{1}{p_0(t)}$$

3. $[a, t]$ ve $(t, b]$ aralıklarının her birinde $G(x, t)$ fonksiyonu x -değişkenine göre $\ell(y) = 0$ diferansiyel denklemini ve $U_i(y) = 0, i = 1, 2, 3, \dots, n$ sınır şartlarını sağlıyor.

Bunun terside doğrudur. Yani, teoremin şartları altında (1.) – (3.) şartlarını sağlayan bir tek $G(x, t)$ fonksiyonu var ve bu fonksiyon L operatörü için Green fonksiyonudur (Naimark, 1967).

3.11 Rezolvent Operatörü, Sınırlı ve Kompakt Operatörler, Kompakt Gömülmeler

Tanım 3.11.1. Özdeğer olmayan her $\lambda \in \mathbb{C}$ için $L - \lambda I$ operatörünün $G(x, t; \lambda)$ Green fonksiyonu vardır ve her $f \in C[a, b]$ için $(L - \lambda I)y = f$ sınır-değer probleminin bir tek

$$y(x) = \int_a^b G(x, t; \lambda) f(t) dt \quad (3.11.1)$$

çözümü bulunur. Bu çözüme

$$\ell(y) = \lambda y \quad (3.11.2)$$

$$U_i y = 0, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.11.3)$$

sınır-değer probleminin Rezolventi,

$$(L - \lambda I)^{-1} f = \int_a^b G(x, t; \lambda) f(t) dt$$

ters operatörüne ise L operatörünün veya (3.11.2), (3.11.3) sınır-değer probleminin Rezolvent operatörü denir ve $R(\lambda, L)$ ile gösterilir:

$$R(\lambda, L) = (L - \lambda I)^{-1}$$

(Naimark, 1960)

Not: Bazı kaynaklarda $(\lambda I - L)^{-1}$ operatörüne Rezolvent operatörü denir.

Eğer verilmiş $\lambda \in \mathbb{C}$ kompleks sayısı için $\lambda I - L$ operatörünün sınırlı ters operatörü varsa λ sayısına L operatörünün regüler değeri denir.

L operatörünün regüler değeri olmayan bütün kompleks sayılar kümesine L operatörünün spektrumu denir ve $\sigma(L)$ ile gösterilir. L operatörünün regüler değerler kümesi ise $\rho(L)$ ile gösterilir (Triebel, 1978).

Tanım 3.11.2. X metrik uzayında $E \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer E kümesinin elemanlarından oluşmuş her dizinin yakınsak altdizisi varsa bu kümeye kompakt küme denir. Eğer bu altdizilerin limitleri E -nin elemanı ise E -ye kendi içinde kompakt küme denir, aksi halde ise E -ye X -e göre kompakt küme veya E -ye X -de kompakt (bazen önkompakt) küme denir. X kümesinin kendisi kompakt ise X metrik uzayına kompakt denir.

Tanım 3.11.3. X ve Y Banach uzayı ve $A : X \longrightarrow Y$ lineer operatörü verilsin. A operatörünün tanım bölgesini $D(A)$, değer bölgesini $R(A)$ ile gösterelim. Eğer $D(A) = X$ ise ve istenilen her $u \in X$ için

$$\|Au\|_Y \leq C \|u\|_X$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sayısı varsa A operatörüne $X \longrightarrow Y$ 'ye sınırlı operatör denir. (Yakubov, 1994).

Bütün sınırlı $A : X \longrightarrow Y$ operatörler kümesini $L(X, Y)$ ile, $L(X, X)$ ' i ise kısaca $L(X)$ ile göstereceğiz (Yakubov, 1994).

Eğer $D(A) = X$ ise ve her $M \subset X$ sınırlı kümesinin $A(M) \subset Y$ görüntüsü Y 'de önkompakt ise A operatörüne X 'den Y 'ye giden kompakt operatör denir (Kreyszig, 1989).

Tanım 3.11.4. X Banach uzayından Y Banach uzayına giden bire-bir ve cebirsel işlemleri koruyan $J : X \longrightarrow Y$ dönüşümü verilmişse, o halde X, Y 'ye gömülmüştür denir. Bu halde $J(X)$ ile X aynı uzaylar olarak kabul edilir ve $X \subset Y$ olarak gösterilir. J operatörüne ise gömülme operatörü denir (Kreyszig, 1989).

$J : X \longrightarrow Y$ gömülme operatörü sürekli ise $X \subset Y$ gömülmesi de sürekli gömülme olarak adlandırılır (Triebel, 1978).

$J : X \longrightarrow Y$ gömülme operatörü kompakt ise $X \subset Y$ gömülmesi de kompakt gömülme olarak adlandırılır (Triebel, 1978).

Eğer $J(X)$ görüntü kümesi, Y ' de her yerde yoğun ise $X \subset Y$ gömülmesi de her yerde yoğundur denir (Triebel, 1978) .

Lemma 3.11.1. Aşağıdaki üç şartın sağlandığını kabul edelim.

- 1) X ve Y bazları bulunan birer Banach uzaylarıdır ve X yansımalıdır.
- 2) $X \subset Y$ gömülmesi de her yerde yoğun ve süreklidir.
- 3) $B : X \longrightarrow Y$ operatörü kompakttır. O halde her $\varepsilon > 0$ ve bütün $u \in X$ için

$$\|Bu\|_Y \leq \varepsilon \|u\|_X + C(\varepsilon) \|u\|_Y$$

olacak şekilde $C(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır (Yakubov, 1994).

3.12 Sobolev Uzayları

(a, b) aralığında tanımlı ve lokal integrallenebilir olan $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonları verilsin. Eğer sonsuz mertebeden diferansiyellenebilir ve

$$\text{supp } \varphi = \overline{\{x \mid \varphi(x) \neq 0\}} \subset (a, b)$$

şartını sağlayan her $\varphi(x)$ fonksiyonu için

$$\int_a^b u(x) \varphi^{(n)}(x) dx = (-1)^n \int_a^b v(x) \varphi(x) dx$$

eşitliğini sağlıyorsa $v(x)$ fonksiyonuna $u(x)$ fonksiyonunun n ($n \in \mathbb{N}$) mertebeden genelleştirilmiş türevi denir (Triebel, 1978).

$(a, b) \subset \mathbb{R}$ aralığı $q > 1$ reel sayısı ve $m > 0$ tamsayısı verildiğinde $W_q^m(a, b)$ ile (a, b) aralığında Lebesgue anlamında ölçülebilir ve $u'(x), u''(x), \dots, u^{(m)}(x)$ genelleşmiş türevleri bulunan ve her $k = 1, 2, \dots, m$ için $u^{(k)} \in L_2(a, b)$ olan fonksiyonların lineer uzayını göstereceğiz. Bu uzayda

$$\langle u, v \rangle_{W_2^m(a,b)} = \left(\sum_{k=0}^m \langle u^{(k)}, v^{(k)} \rangle_{L_2(a,b)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

formülü bir iç çarpım tanımlıyor. Bu uzaylara Sobolev uzayları denir. Bu uzayların Hilbert uzayları olduğu biliniyor (Triebel, 1978).

İleride, literatürde de olduğu gibi $L_2(a, b)$ yerine bazen $W_2^0(a, b)$ yazacağız.

3.13 Diskret Spektrumlu Operatörler

H Hilbert uzayı verilsin ve $A : H \longrightarrow H$ operatörü kapalı olsun (hatırlatalım ki, eğer $u_n \in D(A)$ ($n \in \mathbb{N}$), $u_n \longrightarrow u$, $Au_n \longrightarrow v$ şartlarını sağlayan her u_n ($n \in \mathbb{N}$) dizisi için $u \in D(A)$ ve $Au = v$ ise A operatörüne H ' da kapalı operatör denir).

$A : H \longrightarrow H$, $D(A)$ H-da heryerde yoğun yani $\overline{D(A)} = H$ olacak biçide sınırlı olmayan A lineer kapalı operatörü verilsin . Eğer en az bir $\lambda = \lambda_0$ için $R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1}$ mevcut ve kompakt ise A-ya diskret spektrumlu operatör denir (Kato).

Böyle operatör için $N(r, A)$ ile A operatörünün $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq r\}$ kapalı yuvarında bulunan özdeğerlerin katlarının toplamını göstereceğiz. $N(r, A)$ fonksiyonuna A operatörünün özdeğerlerinin dağılım fonksiyonu denir. $\phi \subset \mathbb{C}$ herhangi küme olduğunda

$$N(r, \phi, A) = \sum_{|\lambda_j(A)| \leq r, \lambda \in \phi} 1 \quad (3.13.1)$$

gösterimini kullanacağız.

$$\Psi_{\alpha}^{\pm} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\pm\lambda)| < \alpha\}$$

olduğunda $N(r, \Psi_{\alpha}^{\pm}, A)$ yerine $N_{\pm}(r, \alpha, A)$ yazacağız. R_+ ve R_- uygun olarak pozitif ve negatif reel sayılar kümesini gösterdiğinde $N(r, R_{\pm}, A)$ yerine sadece $N_{\pm}(r, A)$ yazacağız.

A operatörü diskret spektrumlu olduğunda onun özdeğerlerinin $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3| \leq \dots$ şeklinde mutlak değerlerinin azalmayan sırasına göre sıralandığını kabul edeceğiz (bu durumda her özdeğerin katı sayıda yazıldığını da kabul ediyoruz). Her bir $m_{\lambda_i}(A) \subset H$ kök linealinde baz vektörleri seçelim ve bütün bu baz vektörlerinden $f_i \in m_{\lambda_i}(A)$, $i = 1, 2, \dots$ olmak üzere $\{f_i\}$, $i = 1, 2, \dots$ vektörler sistemini oluşturalım. Bu sisteme A operatörünün kök vektörler sistemi (öz ve şerik vektörler sistemi) denir.

Tanım 3.13.1. Eğer $A : H \longrightarrow H$ lineer operatörünün hiç olmazsa bir tane λ regular değeri mevcutsa ve $D(B) \supset D(A)$ olacak şekilde $B : H \longrightarrow H$ lineer operatörü için $BR(\lambda, A)$ operatörü kompakt ise o halde B operatörüne A operatörüne göre(nazaran) kompakt operatör denir.

Teorem 3.13.1. Eğer S diskret spektrumlu kendine eşlenik operatör ise, o halde S' ye göre kompakt olan her lineer B operatörü için $S + B$ de diskret spektrumludur (Gohberg ve Krein , 1969).

Teorem 3.13.2. S kendine eşlenik diskret spektrumlu lineer opeatörü ve S' ye göre kompakt olan B lineer operatörü olsun. Eğer S operatörünün sonsuz sayıda pozitif özdeğeri mevcut ise ve

$$\lim_{\substack{r \longrightarrow \infty \\ \varepsilon \longrightarrow 0}} \frac{N_+(r(1+\varepsilon), S)}{N_+(r, S)} = 1$$

ise o halde $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ olacak şekilde her α sayısı için

$$\lim_{r \longrightarrow \infty} \frac{N_+(r, \alpha, S + B)}{N_+(r, S)} = 1$$

dir (Markus ve Matsayev , 1982).

4. METOTLAR

Çağdaş mekanik ve fiziğin talepleri gereği, son yıllarda özdeğer parametresini hem diferansiyel denkleminde hem de sınır şartlarında içeren sınır-değer problemlerine ilgi gittikçe artmaktadır.

Bu çalışmada klasik Sturm-Liouville problemlerinden üç esas farkı olan ve sadece esas kısmı diferansiyel operatör olan bir sınır-değer-geçiş probleminin spektral özellikleri (özdeğerler ve özfonksiyonların asimptotik ifadelerinin bulunması, Green fonksiyonunun inşa edilmesi, rezolvent operatörünün kurulması, özelliklerinin incelenmesi ve normunun değerlendirilmesi v.b.) incelenmiştir. Bu farklar aşağıdaki biçimde sıralanabilir.

İlk olarak özdeğer parametresinin sadece diferansiyel denklemde değil aynı zamanda sınır şartlarının bir tanesinde de bulunmasıdır. İkinci olarak verilen aralıkta süreksizlik noktası mevcuttur ve bu süreksizlik noktasında problem geçiş şartlarıyla birlikte verilmiştir. Sonuncusu ve bizim için en önemlisi olan denklemde soyut (genel) lineer operatör bulunmasıdır.

Tez çalışmamızda literatürden bilinen aşağıdaki materyal ve metotlardan yararlanılmıştır. Diferansiyel operatörler teorisinden regüler Sturm-Liouville teorisi ve yöntemleri ; fonksiyonel analizden bazı temel tanımlar ve simetrik operatörlerin bazı temel özellikleri Kompleks analizden tam fonksiyonların sıfır yerleri ile ilgili olan Rouche teoremi ; Lineer diferansiyel denklemler teorisi Lineer integral denklemlerin çözümlerinin asimptotiğini bulma yöntemleri ; asimptotik değerlendirmelerle ilgili yöntemler ile birlikte Sturm-Liouville teorisi yöntemleri ve kaynaklar kısmında yer alan çalışmalardan özellikle yararlanılmış olup gösterilmiş yöntemlerden faydalanılmıştır.

5. BULGULAR

Tez çalışmamızın esas konusu; Denkleminde soyut lineer operatör bulunduran

$$u''(x) + q(x)u(x) + (Bu)(x) = \lambda u(x), \quad x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$$

diferansiyel denkleminde,

$$u(-1) = 0$$

$$u'(1) = \lambda u(1)$$

sınır şartlarından ve de $x = 0$ süreksizlik noktasındaki

$$u(+0) = \delta u(-0)$$

$$u'(+0) = \gamma u'(-0)$$

geçiş şartlarından oluşan sınır-değer-geçiş probleminin bazı spektral özelliklerinin incelenmesidir. Biz ilk önce aşağıdaki 5.1.1 – 5.1.5 Sturm-Liouville problemini ele aldık.

5.1 Sınır Değer Probleminin İfadesi, Özdeğerlerinin Reelliği ve Özfonksiyonlarının Ortogonalliği

Bu bölümde ,

$$Lu := -u'' + q(x)u = \lambda u, \quad x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \quad (5.1.1)$$

diferansiyel (Sturm-Liouville) denkleminde bir tanesi λ özdeğer parametresine bağlı olan

$$u(-1) = 0 \quad (5.1.2)$$

$$\lambda u(1) - u'(1) = 0 \quad (5.1.3)$$

sınır şartlarından ve $x = 0$ süreksizlik noktasındaki

$$u(+0) - \delta u(-0) = 0 \quad (5.1.4)$$

$$u'(+0) - \gamma u'(-0) = 0 \quad (5.1.5)$$

geçiş şartlarından oluşan Sturm-Liouville probleminin bazı spektral özellikleri incelenecektir. Burada $q(x)$; $[-1, 0)$ ve $(0, 1]$ aralıklarında sürekli, $x = 0$ noktasında ise sonlu $q(\pm 0)$ limit değerlerine sahip olan bir fonksiyon, λ kompleks özdeğer parametresi ve δ, γ reel katsayılarıdır. Bundan sonra her yerde $\delta\gamma > 0$ olduğunu kabul edeceğiz.

Teorem 5.1.1. 5.1.1 – 5.1.5 eşitlikleri ile verilmiş sınır - değer - geçiş probleminin bütün özdeğerleri reeldir.

İspat: 5.1.1 – 5.1.5 sınır-değer-geçiş probleminin λ özdeğerine uygun özfonksiyonu u olsun. $\bar{u}$, u' nun ve $\bar{\lambda}$, λ' nin eşleneği olmak üzere, 5.1.1 – 5.1.5 ve

$$-\bar{u}'' + q(x)\bar{u} = \bar{\lambda}\bar{u} \quad (5.1.6)$$

$$\bar{u}(-1) = 0 \quad (5.1.7)$$

$$\bar{u}'(1) = \bar{\lambda}\bar{u}(1) \quad (5.1.8)$$

$$\bar{u}(+0) = \delta\bar{u}(-0) \quad (5.1.9)$$

$$\bar{u}'(+0) = \gamma\bar{u}'(-0) \quad (5.1.10)$$

eşitlikleri sağlanır. 5.1.1 denklemini $\bar{u}$ ile 5.1.6 denklemini de u ile çarpılıp taraf tarafa çıkartılırsa,

$$u\bar{u}'' - \bar{u}u'' = (\lambda - \bar{\lambda})u\bar{u} \quad (5.1.11)$$

eşitliği elde edilir. $u\bar{u}'' - \bar{u}u'' = (u\bar{u}' - \bar{u}u')'$ olduğundan

$$(u\bar{u}' - \bar{u}u')' = (\lambda - \bar{\lambda})u\bar{u} \quad (5.1.12)$$

yazılabilir. 5.1.12 eşitliği -1 ' den 0 ' a integralenirse

$$\int_{-1}^0 (u\bar{u}' - \bar{u}u')' dx = (\lambda - \bar{\lambda}) \int_{-1}^0 u\bar{u} dx$$

$$(u\bar{u}' - \bar{u}u')|_{-1}^0 = (\lambda - \bar{\lambda}) \int_{-1}^0 u\bar{u} dx$$

$$\begin{aligned}
u(-0)\bar{u}'(-0) - \bar{u}(-0)u'(-0) &= u(-1)\bar{u}'(-1) + \bar{u}(-1)u'(-1) \\
&= (\lambda - \bar{\lambda}) \int_{-1}^0 u\bar{u}dx
\end{aligned} \tag{5.1.13}$$

elde edilir. Diğer taraftan 5.1.2 ve 5.1.7 sınır şartları sağlandığı için

$$\bar{u}(-1)u'(-1) - u(-1)\bar{u}'(-1) = 0 \tag{5.1.14}$$

bulunur. 5.1.14' de elde ettiğimiz ifade 5.1.13' te yerine yazılırsa

$$u(-0)\bar{u}'(-0) - \bar{u}(-0)u'(-0) = (\lambda - \bar{\lambda}) \int_{-1}^0 u\bar{u}dx \tag{5.1.15}$$

elde edilir. Aynı şekilde 5.1.12 ifadesi 0' dan 1' e integrallenirse;

$$\int_0^1 (u\bar{u}' - \bar{u}u')'dx = (\lambda - \bar{\lambda}) \int_0^1 u\bar{u}dx$$

$$(u\bar{u}' - \bar{u}u')|_0^1 = (\lambda - \bar{\lambda}) \int_0^1 u\bar{u}dx$$

$$\begin{aligned}
u(1)\bar{u}'(1) - \bar{u}(1)u'(1) &= u(+0)\bar{u}'(+0) + \bar{u}(+0)u'(+0) \\
&= (\lambda - \bar{\lambda}) \int_0^1 u\bar{u}dx
\end{aligned} \tag{5.1.16}$$

elde edilir. 5.1.3 ve 5.1.8' deki

$$u'(1) = \lambda u(1) \quad \text{ve} \quad \bar{u}'(1) = \bar{\lambda} \bar{u}(1)$$

sınır şartları 5.1.16' da yerine yazılırsa

$$\bar{\lambda}u(1)\bar{u}(1) - \lambda u(1)\bar{u}(1) - \{u(+0)\bar{u}'(+0) - \bar{u}(+0)u'(+0)\} = (\lambda - \bar{\lambda}) \int_0^1 u\bar{u}dx$$

$$(\bar{\lambda} - \lambda)u(1)\bar{u}(1) - \{u(+0)\bar{u}'(+0) - \bar{u}(+0)u'(+0)\} = (\lambda - \bar{\lambda}) \int_0^1 u\bar{u}dx \tag{5.1.17}$$

ifadesi elde edilir. 5.1.3 – 5.1.4 ve 5.1.9 – 5.1.10 geçiş şartları kullanılarak

$$\begin{aligned} u(-0) &= \frac{1}{\delta} u(+0) \\ u'(-0) &= \frac{1}{\gamma} u'(+0) \\ \bar{u}(-0) &= \frac{1}{\delta} \bar{u}(+0) \\ \bar{u}'(-0) &= \frac{1}{\gamma} \bar{u}'(+0) \end{aligned} \quad (5.1.18)$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitlikler 5.1.15' de yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{\delta\gamma} \left[u(+0)\bar{u}'(+0) - \bar{u}(+0)u'(+0) \right] = (\lambda - \bar{\lambda}) \int_{-1}^0 u\bar{u}dx$$

elde edilir. Bu son eşitlik 5.1.17' de yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$(\bar{\lambda} - \lambda)u(1)\bar{u}(1) - \delta\gamma(\lambda - \bar{\lambda}) \int_{-1}^0 u\bar{u}dx = (\lambda - \bar{\lambda}) \int_0^1 u\bar{u}dx$$

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \left[\delta\gamma \int_{-1}^0 u\bar{u}dx + \int_0^1 u\bar{u}dx + u(1)\bar{u}(1) \right] = 0$$

eşitliği bulunur. $\delta\gamma > 0$ ve u özfonksiyonu sıfırdan farklı olduğundan dolayı parantez içindeki ifade sıfırdan farklıdır. O halde sonuncu eşitlikten

$$\lambda = \bar{\lambda}$$

elde edilir. İspat bitti.

Not Bundan sonra her yerde $\delta\gamma > 0$ olduğunu kabul edeceğiz.

Teorem 5.1.2. 5.1.1 – 5.1.5 sınır-değer-geçiş probleminin iki farklı λ_m ve λ_n özdeğerlerine uygun özfonksiyonları u_m ve u_n olsun. Bu durumda

$$\delta\gamma \int_{-1}^0 u_m(x)u_n(x)dx + \int_0^1 u_m(x)u_n(x)dx + u_m(1)u_n(1) = 0 \quad (5.1.19)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: u_m ve u_n sırasıyla λ_m ve λ_n özdeğerlerine uygun özfonksiyonlar olduğundan

$$-u_m'' + q(x)u_m = \lambda_m u_m \quad (5.1.20)$$

$$-u_n'' + q(x)u_n = \lambda_n u_n \quad (5.1.21)$$

eşitlikleri sağlanır. 5.1.20 eşitliği u_n ve 5.1.21 eşitliği u_m ile çarpılıp taraf tarafa çıkarılırsa

$$u_m u_n'' - u_n'' u_m = (\lambda_m - \lambda_n) u_m u_n \quad (5.1.22)$$

elde edilir. Bu son eşitlik ilk olarak -1 ' den 0 ' a integrallenirse,

$$\int_{-1}^0 (u_m u_n' - u_n' u_m)' dx = (\lambda_m - \lambda_n) \int_{-1}^0 u_m u_n dx$$

$$(u_m u_n' - u_n' u_m)|_{-1}^0 = (\lambda_m - \lambda_n) \int_{-1}^0 u_m u_n dx$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u_m(-0)u_n'(-0) - u_n'(-0)u_m(-0) &= u_m(-1)u_n'(-1) + u_n'(-1)u_m(-1) \\ &= (\lambda_m - \lambda_n) \int_{-1}^0 u_m u_n dx \end{aligned} \quad (5.1.23)$$

elde edilir. Problemimizde verilmiş olan 5.1.2 sınır şartı u_m ve u_n özfonksiyonları için geçerli olduğundan,

$$u_m(-1) = 0 \text{ ve } u_n(-1) = 0$$

eşitlikleri sağlanır. Bu değerler 5.1.23' te yerine yazılırsa,

$$u_m(-0)u_n'(-0) - u_n'(-0)u_m(-0) = (\lambda_m - \lambda_n) \int_{-1}^0 u_m u_n dx \quad (5.1.24)$$

elde edilir. Aynı şekilde 5.1.22 eşitliği 0 ' dan 1 ' e integrallenip

$$u_m'(1) = \lambda_m u_m(1) \text{ ve } u_n'(1) = \lambda_n u_n(1)$$

sınır şartları uygulanırsa,

$$\begin{aligned} (\lambda_n - \lambda_m) u_m(1) u_n(1) &= [u_m(+0)u_n'(+0) - u_n'(+0)u_m(+0)] \\ &= (\lambda_m - \lambda_n) \int_0^1 u_m u_n dx \end{aligned} \quad (5.1.25)$$

eşitliği elde edilir. Yine 5.1.3 – 5.1.4 geçiş şartları kullanılarak

$$\begin{aligned}
 u_m(-0) &= \frac{1}{\delta} u_m(+0) \\
 u'_m(-0) &= \frac{1}{\gamma} u'_m(+0) \\
 u_n(-0) &= \frac{1}{\delta} u_n(+0) \\
 u'_n(-0) &= \frac{1}{\gamma} u'_n(+0)
 \end{aligned} \tag{5.1.26}$$

eşitlikleri yazılabilir . Bu ifadeler 5.1.24' de yerine yazılırsa

$$[u_m(+0)u'_n(+0) - u'_m(+0)u_n(+0)] = (\lambda_m - \lambda_n) \delta\gamma \int_{-1}^0 u_m u_n dx$$

elde edilir. Elde ettiğimiz bu son eşitlik 5.1.25' te yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$(\lambda_m - \lambda_n) \left[\delta\gamma \int_{-1}^0 u_m u_n dx + \int_0^1 u_m u_n dx + u_m(1)u_n(1) \right] = 0$$

elde edilir. $\lambda_m \neq \lambda_n$ olduğundan dolayı,

$$\delta\gamma \int_{-1}^0 u_m u_n dx + \int_0^1 u_m u_n dx + u_m(1)u_n(1) = 0$$

bulunur.

Not: Bu teorem ve klasik Sturm-Liouville teorisindeki uygun teorem dikkate alınır, problemimize özgü olan yeni bir ortogonallık kavramı tanımlamamız gerektiği kolayca anlaşılabilir. O halde 5.1.19 eşitliğini sağlayan u_n ve u_m özfonksiyonlarına ortogonaldır dememiz gerekir. ileride problemimize özgü olarak kuracağımız Hilbert uzayı ve ortagonellik kavramı tanımlanacaktır.

5.2 Verilmiş Problemle İlgili Bazı Yardımcı Başlangıç-Değer Problemlerinin Temel Çözümleri Ve bu Temel Çözümlerle İlgili Önergeler

5.2.1 Bazı Yardımcı Başlangıç Değer Problemleri

Bu bölümde araştırdığımız 5.1.1 - 5.1.5 sınır-değer-geçiş problemi ile yakından ilgili olan ve sadece $[-1, 0]$ veya $[0, 1]$ alt aralıklarında (esas $[-1, 1]$ aralığının alt aralıklarında) verilmiş bazı yardımcı başlangıç-değer problemlerinin çözümlerinin mevcut olduğu ve bu çözümlerin λ kompleks özdeğer parametresine göre bütün kompleks düzlemde analitik (tam fonksiyon) olduğu ispat edilecektir. Daha sonra bu çözümlerden yararlanarak 5.1.1 denkleminin 5.1.1 - 5.1.5 sınır-değer-geçiş problemi için temel olacak çözümleri tanımlanacaktır.

Teorem 5.2.1. Her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), \quad x \in [-1, 0] \quad (5.2.1)$$

$$u(-1) = 0 \quad (5.2.2)$$

$$u'(-1) = -1 \quad (5.2.3)$$

eşitlikleri ile tanımlı başlangıç-değer probleminin bir tek $\Phi_1(x, \lambda)$ çözümü bulunur ve bu çözüm her bir $x \in [-1, 0]$ değeri için λ değişkenine göre bütün kompleks düzlemde analitiktir. Yani her $x \in [-1, 0]$ için λ parametresinin tam fanksiyonudur (Titchmarsh, 1962).

Teorem 5.2.2. Her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), \quad x \in [0, 1] \quad (5.2.4)$$

$$u(0) = \delta \Phi_1(0, \lambda) \quad (5.2.5)$$

$$u'(0) = \gamma \Phi_1'(0, \lambda) \quad (5.2.6)$$

eşitlikleri ile tanımlı başlangıç-değer probleminin bir tek $\Phi_2(x, \lambda)$ çözümü bulunur ve bu çözüm her bir $x \in [0, 1]$ değeri için λ değişkenine göre bütün kompleks düzlemde analitiktir (yani λ değişkeninin tam fonksiyonudur).

İspat: Öncelikle

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x)$$

denklemini

$$u''(x) = (q(x) - \lambda)u(x)$$

biçiminde yazalım. Bu ifade ard arda iki kere integrallenirse,

$$u'(x) = \int_0^x (q(t) - \lambda)u(t)dt + c_0(\lambda), x \in [0, 1] \quad (5.2.7)$$

$$u(x) = \int_0^x ds \int_0^s (q(t) - \lambda)u(t)dt + c_0(\lambda)x + c_1(\lambda), x \in [0, 1] \quad (5.2.8)$$

bulunur. Bu son ifadedeki integral sırası değiştirilir, gerekli işlemler yapılırsa,

$$u(x) = \int_0^x (x - t)(q(t) - \lambda)u(t)dt + c_0(\lambda)x + c_1(\lambda) \quad (5.2.9)$$

eşitliği elde edilir. $c_0(\lambda)$ ve $c_1(\lambda)$ ifadelerini elde etmek için 5.2.5 - 5.2.6 başlangıç şartlarını 5.2.7 ve 5.2.9' da yerine koyarsak

$$u(0) = c_1(\lambda) = \delta\Phi_1(0, \lambda)$$

$$u'(0) = c_0(\lambda) = \gamma\Phi_1'(0, \lambda)$$

bulunur. $c_0(\lambda)$ ve $c_1(\lambda)$ değerleri 5.2.9' da yerlerine yazılırsa

$$u(x) = \int_0^x (x - t)(q(t) - \lambda)u(t)dt + \gamma\Phi_1'(0, \lambda)x + \delta\Phi_1(0, \lambda) \quad (5.2.10)$$

elde edilir. 5.2.10 integral denklemi 5.2.4 – 5.2.6 başlangıç-değer problemi ile eşdeğerdir. $\Phi_2(x, \lambda)$ ' nın 5.2.4 – 5.2.6 başlangıç-değer probleminin bir tek çözümü olduğu ve $\forall x \in [0, 1]$ için $\lambda \in \mathbb{C}$ kompleks değişkeninin tam fonksiyonu olduğunu ispatlamak için yani $\Phi_2(x, \lambda)$ fonksiyonuna yakınsayan fonksiyon dizisinin inşa edilmesi için ardışık

yaklaşımlar metodundan yararlanılacaktır.

$$u_0(x, \lambda) = \gamma \Phi_1'(0, \lambda)x + \delta \Phi_1(0, \lambda) \quad (5.2.11)$$

$$u_n(x, \lambda) = \int_0^x (x-t)(q(t) - \lambda)u_{n-1}(t)dt + u_0(x, \lambda) \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.2.12)$$

biçiminde tanımlanmış $\{u_n(x, \lambda)\}$ fonksiyonlar dizisini oluşturalım. Bu diziyi kullanarak

$$u_0(x, \lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_{n-1}(x)] \quad (5.2.13)$$

serisi oluşturulur. $N > 0$ için, $|\lambda| \leq N$ olduğunu kabul edelim. $0 \leq x \leq 1$ için, $q(x)$ ve $u(x)$ fonksiyonları sürekli olduklarından ve de sonlu $q(\pm 0)$ limit değerleri mevcut olduğundan $|q(x)| \leq M$ ve $|u(x)| \leq K$ olacak biçimde $M > 0$ ve $K > 0$ sayıları mevcuttur.

Bu durumda, $|u_n(x) - u_{n-1}(x)|$ ifadesini gözönüne alalım. $n = 1$ için,

$$\begin{aligned} |u_1(x) - u_0(x)| &= \left| \int_0^x (x-t)(q(t) - \lambda)u_0(t)dt + u_0(x) - u_0(x) \right| \\ &\leq \int_0^x |q(t) - \lambda| |u_0(t)| |x-t|dt \\ &\leq \int_0^x (|q(t)| + |\lambda|) |u_0(t)| |x-t|dt \\ &\leq \int_0^x (N + M)K(x-t)dt = (N + M)K \int_0^x (x-t)dt \\ &= (N + M)K \left[xt - \frac{t^2}{2} \right]_0^x = (N + M)K \left[x^2 - \frac{x^2}{2} \right] \\ \Rightarrow |u_1(x) - u_0(x)| &\leq (N + M)K \frac{x^2}{2!} \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

bulunur. $n = 2$ için,

$$\begin{aligned}
|u_2(x) - u_1(x)| &= \left| \int_0^x (x-t)(q(t) - \lambda)u_1(t)dt - \int_0^x (x-t)(q(t) - \lambda)u_0(t)dt \right| \\
&= \left| \int_0^x (q(t) - \lambda) (u_1(t) - u_0(t)) (x-t)dt \right| \\
&\leq \int_0^x |q(t) - \lambda| |u_1(t) - u_0(t)| |x-t|dt \\
&\leq \int_0^x (|q(t)| + |\lambda|) (N+M)K \frac{t^2}{2} (x-t)dt \\
&\leq \frac{1}{2} \int_0^x (N+M)^2 K t^2 (x-t)dt \\
&= \frac{(N+M)^2 K}{2} \int_0^x [t^2 x - t^3] dt \\
&= \frac{1}{2} (N+M)^2 K \frac{x^4}{12} \\
\Rightarrow |u_2(x) - u_1(x)| &\leq (N+M)^2 K \frac{x^4}{4!} \tag{5.2.15}
\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç itibariyle $n > 0$ için Tümevarım yöntemini kullanarak,

$$|u_n(x) - u_{n-1}(x)| \leq (N+M)^n K \frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{5.2.16}$$

eşitsizliği kolayca bulunabilir.

$x \in [0, 1]$ olduğundan $0 \leq x^{2n} \leq 1$ ve buna bağlı olarak,

$$|u_n(x) - u_{n-1}(x)| \leq \frac{(N+M)^n K}{(2n)!} \tag{5.2.17}$$

elde edilir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(N+M)^n K}{(2n)!}$$

sayısal serisi yakınsak olduğundan, 5.2.13 serisi $x \in [0, 1]$ ve $N > 0$ için, $|\lambda| \leq N$ şartlarıyla birlikte mutlak ve düzgün yakınsaktır. Diğer taraftan 5.2.13 serisi $N > 0$ ve $|\lambda| \leq N$ ile tanımlanmış bölgede analitik olduğu için, $\Phi_2(x, \lambda)$ kısmi toplamlar dizisinde analitiktir. Diğer taraftan serinin yakınsak olduğu durumda $\{u_n(x, \lambda)\}$ fonksiyonlar dizisinin limiti, serinin kısmi toplamlar dizisinin limiti olduğundan 5.2.13' de $n \rightarrow \infty$

için limit almakla,

$$\begin{aligned}\Phi_2(x, \lambda) &= u_0(x, \lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_{n-1}(x)] \\ &= \int_0^x (x-t)(q(t) - \lambda)\Phi_2(t, \lambda)dt + \gamma\Phi_1'(0, \lambda)x + \delta\Phi_1(0, \lambda)\end{aligned}\quad (5.2.18)$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca 5.2.12 ile tanımlanan $\{u_n(x, \lambda)\}$ fonksiyonlar dizisinin

$$u_n'(x) - u_{n-1}'(x) = \int_0^x (q(t) - \lambda)\{u_{n-1}(t) - u_{n-2}(t)\}$$

$$u_n''(x) - u_{n-1}''(x) = (q(x) - \lambda)\{u_{n-1}(x) - u_{n-2}(x)\}$$

birinci ve ikinci türevleri mevcut olduğu için 5.2.18 serisi x değişkenine göre terim terim diferansiyellenebilir ve de

$$\begin{aligned}\Phi_2''(x, \lambda) &= \sum_{n=1}^{\infty} [u_n''(x) - u_{n-1}''(x)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \{q(x) - \lambda\}\{u_{n-1}(x) - u_{n-2}(x)\} \\ &= \{q(x) - \lambda\} \{u_0(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \{u_{n-1}(x) - u_{n-2}(x)\}\} \\ \implies \Phi_2''(x, \lambda) &= \{q(x) - \lambda\}\Phi_2(x, \lambda)\end{aligned}\quad (5.2.19)$$

eşitliği sağlanır. Bu sonuç $\Phi_2(x, \lambda)$ 'nın aynı zamanda 5.2.1 denkleminin bir çözümü olduğunu gösterir. İspat bitti.

Sonuç 5.2.1. $\forall \lambda \in \mathbb{C}$

$$\Phi(x, \lambda) = \begin{cases} \Phi_1(x, \lambda), & x \in [-1, 0) \\ \Phi_2(x, \lambda), & x \in (0, 1] \end{cases}$$

ile tanımlı $\Phi(x, \lambda)$ fonksiyonu,

$$-u'' + q(x)u = \lambda u, \quad x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \quad (5.2.20)$$

diferansiyel denkleminin birinci sınır şartı olan,

$$u(-1) = 0 \quad (5.2.21)$$

şartını ve de

$$u(+0) = \delta u(-0) \quad (5.2.22)$$

$$u'(+0) = \gamma u'(-0) \quad (5.2.23)$$

geçiş şartlarının her ikisini sağlar.

İspat: Her $\lambda \in \mathbb{C}$ teorem 5.2.1' den dolayı, $x \in [-1, 0)$ için

$$\Phi(x, \lambda) = \Phi_1(x, \lambda)$$

olduğundan ve de 5.2.2 sınır şartı sağlandığından dolayı,

$$\Phi(-1, \lambda) = \Phi_1(-1, \lambda) = 0$$

bulunur. Böylece $\Phi(x, \lambda)$ fonksiyonu 5.2.21 sınır şartını sağlamış olur. Şimdi geçiş şartlarını sağladığını gösterelim. 5.2.5 başlangıç şartından dolayı,

$$\Phi_2(0, \lambda) = \delta \Phi_1(0, \lambda)$$

olduğu açıktır. Bu yüzden de

$$\Phi_2(0, \lambda) - \delta \Phi_1(0, \lambda) = \Phi_2(+0, \lambda) - \delta \Phi_1(-0, \lambda) = \Phi(+0, \lambda) - \delta \Phi(-0, \lambda) = 0$$

$$\implies \Phi(+0, \lambda) = \delta \Phi(-0, \lambda)$$

elde edilir. Yine aynı şekilde 5.2.4 – 5.2.6 başlangıç-değer probleminin 5.2.6 şartından dolayı

$$\Phi'_2(0, \lambda) = \gamma \Phi'_1(0, \lambda)$$

olup buradan,

$$\Phi'(+0, \lambda) = \Phi'_2(0, \lambda) = \gamma \Phi'_1(0, \lambda) = \gamma \Phi'(-0, \lambda)$$

yazılır. Yani

$$\Phi'(+0, \lambda) = \gamma \Phi'(-0, \lambda)$$

eşitliği elde edilir.

Böylece $\Phi(x, \lambda)$ fonksiyonunun 5.2.20 denklemini, 5.2.21 sınır şartını ve de 5.2.22 – 5.2.23 geçiş şartlarının her ikisini de sağladığı ispatlanmış olur.

Teorem 5.2.3. Her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), \quad x \in [0, 1] \quad (5.2.24)$$

$$u(1) = 1 \quad (5.2.25)$$

$$u'(1) = \lambda \quad (5.2.26)$$

eşitlikleri ile tanımlı başlangıç-değer probleminin bir tek $\chi_2(x, \lambda)$ çözümü bulunur ve bu çözüm her bir $x \in [0, 1]$ değeri için λ değişkenin tam fonksiyonudur. Yani $\forall x \in [0, 1]$ için λ kompleks parametresine göre tüm kompleks düzlemde analitik fonksiyondur (Titchmarsh, 1962).

Teorem 5.2.4. Her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), \quad x \in [-1, 0] \quad (5.2.27)$$

$$u(0) = \frac{1}{\delta} \chi_2(0, \lambda) \quad (5.2.28)$$

$$u'(0) = \frac{1}{\gamma} \chi_2'(0, \lambda) \quad (5.2.29)$$

başlangıç-değer probleminin bir tek $\chi_1(x, \lambda)$ çözümü bulunur ve bu çözüm her bir $x \in [-1, 0]$ değeri için λ değişkeninin tam fonksiyonudur. Yani $\forall x \in [0, 1]$ için λ kompleks parametresine göre tüm kompleks düzlemde analitik fonksiyondur.

İspat: 5.2.27 denklemi için Teorem 5.2.2' de ki yöntem kullanılarak 5.2.9 integral denkleminin aynısı yazılabilir. Yani

$$u(x) = \int_x^0 (t - x)(q(t) - \lambda)u(t)dt + c_0(\lambda)x + c_1(\lambda) \quad (5.2.30)$$

eşitliği yazılır. Şimdi c_0 ve c_1 ifadelerini elde etmek için 5.2.28 – 5.2.29 başlangıç şartlarını uygulayalım. Bu taktirde

$$u(0) = c_1(\lambda) = \frac{1}{\delta} \chi_2(0, \lambda)$$

olur. 5.2.30 eşitliği x ' e göre türevlenirse

$$u'(x) = \int_x^0 (q(t) - \lambda)u(t)dt + c_0(\lambda) \quad (5.2.31)$$

elde edilir. Bu son denklemde 5.4.29 başlangıç şartı uygulanırsa,

$$u'(0) = c_0(\lambda) = \frac{1}{\gamma} \chi_2'(0, \lambda)$$

bulunur. $c_0(\lambda)$ ve $c_1(\lambda)$ değerleri 5.2.30' integral denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$u(x) = \int_x^0 (t - x)(q(t) - \lambda)u(t)dt + \frac{1}{\delta} \chi_2(0, \lambda) + \frac{1}{\gamma} \chi_2'(0, \lambda)x \quad (5.2.32)$$

elde edilir. 5.2.32 integral denklemi 5.2.27 – 5.2.29 başlangıç-değer problemi ile eşdeğerdir. $\chi_1(x, \lambda)$ ' nin 5.2.27 – 5.2.29 başlangıç-değer probleminin bir tek çözümü olduğu ve $\forall x \in [-1, 0]$ için $\lambda \in \mathbb{C}$ kompleks değişkeninin tam fonksiyonu olduğunu ispatlamak için, yani $\chi_1(x, \lambda)$ fonksiyonuna yakınsayan fonksiyon dizisinin inşa edilmesi için ardışık yaklaşımlar metodundan yararlanılacaktır. Teorem 5.2.2' nin ispatına benzer şekilde,

$$u_0(x, \lambda) = \frac{1}{\delta} \chi_2(0, \lambda) + \frac{1}{\gamma} \chi_2'(0, \lambda)x \quad (5.2.33)$$

$$u_n(x, \lambda) = \int_x^0 (t - x)(q(t) - \lambda)u_{n-1}(t)dt + u_0(x, \lambda) \quad (5.2.34)$$

biçiminde $\{u_n(x, \lambda)\}$ fonksiyonlar dizisi oluşturulur ve bu diziyi kullanarak,

$$u_0(x, \lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_{n-1}(x)] \quad (5.2.35)$$

serisi oluşturulabilir. $N > 0$ için $|\lambda| \leq N$,

$$M := \max_{x \in [-1, 0]} |q(x)|, \quad K := \max_{x \in [-1, 0]} |u_0(x, \lambda)|$$

olmak üzere 5.2.33 – 5.2.34 eşitliklerinin mutlak değerleri incelenecektir. Bu durumda yine Teorem 5.2.2' nin ispatıyla benzer biçimde,

$$\begin{aligned} |u_1(x) - u_0(x)| &\leq (N + M) K \frac{x^2}{2!} \\ |u_2(x) - u_1(x)| &\leq (N + M)^2 K \frac{x^4}{4!} \end{aligned}$$

eşitsizlikleri ve $n \geq 2$ için tümevarım yöntemi kullanılarak,

$$|u_n(x) - u_{n-1}(x)| \leq (N + M)^n K \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (5.2.36)$$

eşitsizlikleri elde edilir. $x \in [-1, 0]$ olduğundan $0 < x^{2n} \leq 1$ olup bir önceki eşitsizlikten,

$$|u_n(x) - u_{n-1}(x)| \leq \frac{(N + M)^n K}{(2n)!} \quad (5.2.37)$$

elde edilir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(N + M)^n K}{(2n)!}$$

sayısal serisi yakınsak olduğundan 5.2.35 serisi $x \in [-1, 0]$ ve $N > 0$ için, $|\lambda| \leq N$ şartları dahilinde mutlak ve düzgün yakınsaktır. Ayrıca 5.2.35 serisi $N > 0$ ve $|\lambda| \leq N$ ile tanımlanmış bölgede serinin her terimi analitik olduğu için, $\chi_1(x, \lambda)$ kısmi toplamlar dizisinde analitiktir. Ayrıca serinin yakınsak olduğu durumda $\{u_n(x, \lambda)\}$ fonksiyonlar dizisinin limiti ile serinin kısmi toplamlar dizisi aynı olduğundan 5.2.34' de $n \rightarrow \infty$ için limit almakla,

$$\chi_1(x, \lambda) = \int_x^0 (t - x)(q(t) - \lambda)\chi_1(t, \lambda)dt + \frac{1}{\delta}\chi_2(0, \lambda) + \frac{1}{\gamma}\chi_2'(0, \lambda)x \quad (5.2.38)$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca,

$$\chi_1(x, \lambda) = u_0(x, \lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_{n-1}(x)] \quad (5.2.39)$$

ifadesi x' e göre düzgün yakınsak olduğu için ve de $n \geq 2$ için 5.2.33 – 5.2.34 ile tanımlanan $\{u_n(x, \lambda)\}$ fonksiyonlar dizisinin,

$$\begin{aligned} u'_n(x) - u'_{n-1}(x) &= \int_x^0 (q(t) - \lambda) \{u_{n-1}(t) - u_{n-2}(t)\} dt \\ u''_n(x) - u''_{n-1}(x) &= (q(x) - \lambda) \{u_{n-1}(x) - u_{n-2}(x)\} \end{aligned}$$

birinci ve ikinci türevleri mevcut olduğundan 5.2.35 serisi x değişkenine göre terim terim diferansiyellenebilir ve de

$$\begin{aligned} \chi''_1(x, \lambda) &= \sum_{n=1}^{\infty} [u''_n(x) - u''_{n-1}(x)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \{q(x) - \lambda\} \{u_{n-1}(x) - u_{n-2}(x)\} \\ &= \{q(x) - \lambda\} \{u_0(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \{u_{n-1}(x) - u_{n-2}(x)\}\} \\ \implies \chi''_1(x, \lambda) &= \{q(x) - \lambda\} \chi_1(x, \lambda) \end{aligned} \quad (5.2.40)$$

eşitliği sağlanır. Bu sonuç $\chi_1(x, \lambda)$ ' nin aynı zamanda 5.2.27 denkleminin bir çözümü olduğunu gösterir. Buda ispatı tamamlar.

Sonuç 5.4.2. $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ için

$$\chi(x, \lambda) = \begin{cases} \chi_1(x, \lambda), & x \in [-1, 0) \\ \chi_2(x, \lambda), & x \in (0, 1] \end{cases}$$

ile tanımlı $\chi(x, \lambda)$ fonksiyonu

$$-u'' + q(x)u = \lambda u, \quad x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \quad (5.2.41)$$

diferansiyel denklemini,

$$u'(1) = \lambda u(1) \quad (5.2.42)$$

ikinci sınır şartını ve de

$$u(+0) = \delta u(-0) \quad (5.2.43)$$

$$u'(+0) = \gamma u'(-0) \quad (5.2.44)$$

geçiş şartlarını sağlar.

İspat: Sonuç 5.4.1 ile benzer şekilde yapılır.

5.2.2 Temel Çözümler ile Eşdeğer Olan İntegral Denklemler

Önceki bölümde $\Phi_i(x, \lambda)$ ve $\chi_i(x, \lambda)$ ($i = 1, 2$) fonksiyonlarının λ kompleks parametresine göre bütün kompleks düzlemde analitik fonksiyon oldukları ispatlanmıştı. Bu bölümde yardımcı başlangıç problemlerinin eşdeğer oldukları integral ve integral-diferansiyel denklemler bulunacak ve ileride her yerde $\lambda = s^2$ gösteriminden yararlanılacaktır.

Teorem 5.2.5. $\forall x \in \mathbb{C}$ için, $\lambda = s^2$ olmak üzere 5.2.1 – 5.2.3 başlangıç değer problemi

$$u(x) = -\frac{1}{s} \sin s(x+1) + \frac{1}{s} \int_{-1}^x \sin s(x-y)u(y)q(y)dy \quad (5.2.45)$$

$$u'(x) = -\cos s(x+1) + \int_{-1}^x \cos s(x-y)u(y)q(y)dy \quad (5.2.46)$$

integral denklemleriyle eşdeğerdir.

İspat: 5.2.1 denklemini

$$-u'' + \lambda u = q(x)u \quad (5.2.47)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemini çözmek için denklem homojen lineer diferansiyel denklem gibi kabul edilerek,

$$u'' + \lambda u = 0$$

denkleminin çözümlerinden hareket edilir. Son yazdığımız denklemin genel çözümü,

$$u(x) = c_0(x) \cos \sqrt{\lambda}x + c_1(x) \sin \sqrt{\lambda}x$$

$$u(x) = c_0(x) \cos sx + c_1(x) \sin sx \quad (5.2.48)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $c_0(x) = c_0(x, \lambda)$ ve $c_1(x) = c_1(x, \lambda)$ yeni bilinmeyen fonksiyonlardır. Bu yeni bilinmeyen fonksiyonları bulmak için iki tane denklem kurulacaktır.

Bu denklemlerden bir tanesin de $c_0(x)$, $c_1(x)$ fonksiyonlarını öyle seçilecek ki

$$c_0'(x) \cos sx + c_1'(x) \sin sx = 0 \quad (5.2.49)$$

eşitliği sağlansın. 5.2.48 eşitliğinin her iki yanında x' e göre türevi alınırsa,

$$u'(x) = -sc_0(x) \sin sx - sc_0'(x) \cos sx + c_1'(x) \sin sx + sc_1(x) \cos sx$$

elde edilir. 5.2.49 eşitliği bu son bulduğumuz ifadede yerine yazılırsa,

$$u'(x) = -sc_0(x) \sin sx + sc_1(x) \cos sx \quad (5.2.50)$$

elde edilir. Tekrar x' e göre türev alınırsa,

$$u''(x) = -sc_0'(x) \sin sx - s^2 c_0(x) \cos sx + sc_1'(x) \cos sx - s^2 c_1(x) \sin sx \quad (5.2.51)$$

eşitliği bulunur. 5.2.50 ve 5.2.51 eşitlikleri 5.2.47' de yerine yazılırsa,

$$-sc_0'(x) \sin sx + sc_1'(x) \cos sx = q(x)u \quad (5.2.52)$$

eşitliği elde edilir. Şimdi 5.2.49 ve 5.2.52 eşitliklerini bir arada düşünerek, $c_0'(x)$ ve $c_1'(x)$ değişkenlerine göre lineer denklem sistemi gibi çözersek $s \neq 0$ için,

$$c_0'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin sx \\ q(x)u & s \cos sx \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos sx & \sin sx \\ -s \sin sx & s \cos sx \end{vmatrix}} = \frac{-\sin sx \, q(x)u}{s} \quad (5.2.53)$$

bulunur. Bu eşitlik integrallenirse,

$$c_0(x) = -\frac{1}{s} \int_{-1}^x \sin sy \, q(y) \, u(y) dy + c_0(\lambda) \quad (5.2.54)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$c_1'(x) = \frac{\cos sx \, q(x) u}{s} \quad (5.2.55)$$

bulunur. Son eşitlik integrallenirse,

$$c_1(x) = \frac{1}{s} \int_{-1}^x \cos sy \, q(y) u(y) dy + c_1(\lambda) \quad (5.2.56)$$

bulunur. Burada $c_0(\lambda)$ ve $c_1(\lambda)$ keyfi sabitlerdir. Bulduğumuz 5.2.54 ve 5.2.56 ifadeleri 5.2.48' de yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} u(x) = & - \frac{1}{s} \cos sx \int_{-1}^x \sin sy \, q(y) u(y) dy + c_0(\lambda) \cos sx \\ & + \frac{1}{s} \sin sx \int_{-1}^x \cos sy \, q(y) u(y) dy + c_1(\lambda) \sin sx \end{aligned}$$

elde edilir. Son ifade düzenlenirse,

$$\begin{aligned} u(x, \lambda) = & - \frac{1}{s} \int_{-1}^x \sin s(x-y) \, q(y) u(y) dy + c_0(\lambda) \cos sx \\ & + c_1(\lambda) \sin sx \end{aligned} \quad (5.2.57)$$

bulunur. Benzer yöntemle 5.2.54 ve 5.2.56 eşitlikleri 5.2.50' de yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} u'(x) = & \int_{-1}^x \cos s(x-y) \, q(y) u(y) dy - sc_0(\lambda) \sin sx \\ & + sc_1(\lambda) \cos sx \end{aligned} \quad (5.2.58)$$

bulunur. Bu durumda 5.2.48 denklemi 5.2.57 integral denklemine indirgenmiş olur. O halde 5.2.57 ve 5.2.58 ifadeleri 5.2.2 – 5.2.3 başlangıç şartlarını sağlar. Bu başlangıç şartları uygulanırsa,

$$\begin{aligned} u(-1) &= c_0(\lambda) \cos s - c_1(\lambda) \sin s = 0 \\ u'(-1) &= sc_0(\lambda) \sin s + sc_1(\lambda) \cos s = -1 \end{aligned} \quad (5.2.59)$$

lineer denklem sistemi bulunur. $c_1(\lambda)$ ve $c_2(\lambda)$ sabitlerini bulmak için bu lineer denklem sistemini çözelim. Bunun için $c_1'(x, \lambda)$ ve $c_2'(x, \lambda)$ fonksiyonlarının çözümleri

bulunurken yapılan işlemler tekrarlanılırsa,

$$c_0(\lambda) = -\frac{1}{s} \sin s \quad (5.2.60)$$

$$c_1(\lambda) = -\frac{1}{s} \cos s \quad (5.2.61)$$

elde edilir. Bu c_0 ve c_1 değerleri 5.3.13 integral denkleminde yerine yazılırsa ve düzenlenirse,

$$u(x) = -\frac{1}{s} \sin s(x+1) + \frac{1}{s} \int_{-1}^x \sin s(x-y) u(y) q(y) dy \quad (5.2.62)$$

integral denklemini elde edilir.

Böylece 5.2.1 – 5.2.3 ile verilen başlangıç değer problemi 5.2.62 integral denkleminde indirgenmiş olur.

Aynı şekilde c_0 ve c_1 değerleri 5.2.58 integral denkleminde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa 5.2.46 eşitliğinin de sağlandığı kolayca gösterilebilir.

Sonuç 5.2.3. $\Phi_1(x, \lambda)$ fonksiyonu aşağıdaki integral ve integral-diferansiyel denklemleri sağlar.

$$\Phi_1(x, \lambda) = -\frac{1}{s} \sin s(x+1) + \frac{1}{s} \int_{-1}^x \sin s(x-y) \Phi_1(y, \lambda) q(y) dy \quad (5.2.63)$$

$$\Phi_1'(x, \lambda) = -\cos s(x+1) + \int_{-1}^x \cos s(x-y) \Phi_1(y, \lambda) q(y) dy \quad (5.2.64)$$

İspat: Önce 5.2.63 eşitliğini ispat edelim. $\Phi_1(x, \lambda)$ fonksiyonu $[-1, 0]$ aralığında 5.2.1 denklemini sağladığı için,

$$q(y) \Phi_1(y, \lambda) = \Phi_1''(y, \lambda) + \lambda \Phi_1(y, \lambda)$$

eşitliği sağlanır. Buradan,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^x \sin s(x-y) \Phi_1(y, \lambda) dy &= \int_{-1}^x \sin s(x-y) (\Phi_1''(y, \lambda) + \lambda \Phi_1(y, \lambda)) dy \\ &= \lambda \int_{-1}^x \sin s(x-y) \Phi_1(y, \lambda) dy \\ &+ \int_{-1}^x \sin s(x-y) \Phi_1''(y, \lambda) dy \end{aligned} \quad (5.2.65)$$

eşitlikleri bulunur. Eşitliğin sağ tarafındaki ikinci integrale iki kere ard arda kısmi integrasyon uygulanırsa ve 5.2.1 – 5.2.3 probleminin

$$\Phi_1(-1, \lambda) = 0 \quad \text{ve} \quad \Phi_1'(-1, \lambda) = -1$$

başlangıç değerlerinden yararlanılıp gerekli düzenlemeler yapılsa,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^x \sin s(x-y) \Phi_1''(y, \lambda) q(y) dy &= \sin s(x-y) \Phi_1'(y, \lambda) \Big|_{-1}^x + s \int_{-1}^x \cos s(x-y) \Phi_1'(y, \lambda) dy \\ &= -\sin s(x+1) \Phi_1'(-1, \lambda) + s \cos s(x-y) \Phi_1(y, \lambda) \Big|_{-1}^x \\ &\quad - s^2 \int_{-1}^x \sin s(x-y) \Phi_1(y, \lambda) dy \\ &= \sin s(x+1) + s \Phi_1(x, \lambda) \\ &\quad - s^2 \int_{-1}^x \sin s(x-y) \Phi_1(y, \lambda) dy \end{aligned}$$

son eşitlik 5.2.65' de yerine yazılırsa,

$$\int_{-1}^x \sin s(x-y) \Phi_1(y, \lambda) q(y) dy = \sin s(x+1) + s \Phi_1(x, \lambda)$$

elde edilir. Buradan gerekli düzenlemeler yapılsa,

$$\Phi_1(x, \lambda) = -\frac{1}{s} \sin s(x+1) + \frac{1}{s} \int_{-1}^x \sin s(x-y) \Phi_1(y, \lambda) q(y) dy \quad (5.2.66)$$

bulunur. Böylece 5.2.63 eşitliği ispatlanmış olur. Bu eşitliğin her iki tarafında x ' e göre türev alınırsa 5.2.64 eşitliğinin de sağlandığı kolayca ispatlanabilir.

Teorem 5.2.6. $\forall x \in \mathbb{C}$ için, $\lambda = s^2$ olmak üzere 5.2.4 – 5.2.6 başlangıç değer problemi,

$$\begin{aligned} u(x, \lambda) &= \delta \Phi_1(0, \lambda) \cos sx + \frac{1}{s} \gamma \Phi_1'(0, \lambda) \sin sx \\ &\quad + \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x-y) q(y) u(y, \lambda) dy \end{aligned} \quad (5.2.67)$$

$$\begin{aligned} u'(x, \lambda) &= -s \delta \Phi_1(0, \lambda) \sin sx + \gamma \Phi_1'(0, \lambda) \cos sx \\ &\quad + \int_0^x \cos s(x-y) q(y) u(y, \lambda) dy \end{aligned} \quad (5.2.68)$$

integral denklemleriyle eşdeğerdir.

İspat: Teorem 5.2.5' in ispatına benzer şekilde yapılır.

Sonuç 5.2.4. $\Phi_2(x, \lambda)$ fonksiyonu aşağıdaki integral ve integral-diferansiyel denklemleri sağlar.

$$\begin{aligned}\Phi_2(x, \lambda) &= \delta\Phi_1(0, \lambda) \cos sx + \frac{1}{s}\gamma \Phi_1'(0, \lambda) \sin sx \\ &+ \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x-y)q(y)\Phi_2(y, \lambda)dy\end{aligned}\quad (5.2.69)$$

$$\begin{aligned}\Phi_2'(x, \lambda) &= -s\delta\Phi_1(0, \lambda) \sin sx + \gamma \Phi_1'(0, \lambda) \cos sx \\ &+ \int_0^x \cos s(x-y)q(y)\Phi_2(y, \lambda)dy\end{aligned}\quad (5.2.70)$$

İspat: Sonuç 5.2.3' in ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 5.2.7. $\forall x \in \mathbb{C}$ için, $\lambda = s^2$ olmak üzere 5.2.24 – 5.2.26 başlangıç değer problemi,

$$\begin{aligned}u(x, \lambda) &= \cos s(x-1) + s \sin s(x-1) \\ &+ \frac{1}{s} \int_x^1 \sin s(x-y)q(y)u(y, \lambda)dy\end{aligned}\quad (5.2.71)$$

$$\begin{aligned}u'(x, \lambda) &= -s \sin s(x-1) + s^2 \cos s(x-1) \\ &+ \int_x^1 \cos s(x-y)q(y)u(y, \lambda)dy\end{aligned}\quad (5.2.72)$$

integral denklemleriyle eşdeğerdir.

İspat: Teorem 5.2.5' in ispatına benzer şekilde yapılır.

Sonuç 5.2.5. $\chi_2(x, \lambda)$ fonksiyonu aşağıdaki integral ve integral-diferansiyel denklemleri sağlar.

$$\begin{aligned}\chi_2(x, \lambda) &= \cos s(x-1) + s \sin s(x-1) \\ &+ \frac{1}{s} \int_x^1 \sin s(x-y)q(y)\chi_2(y, \lambda)dy\end{aligned}\quad (5.2.73)$$

$$\begin{aligned}\chi_2'(x, \lambda) &= -s \sin s(x-1) + s^2 \cos s(x-1) \\ &+ \int_x^1 \cos s(x-y)q(y)\chi_2(y, \lambda)dy\end{aligned}\quad (5.2.74)$$

İspat: Sonuç 5.2.3' ün ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 5.2.8. $\forall x \in \mathbb{C}$ için, $\lambda = s^2$ olmak üzere 5.2.27 – 5.2.29 başlangıç değer problemi,

$$\begin{aligned}u(x, \lambda) &= \frac{1}{\delta} \chi_2(0, \lambda) \cos sx + \frac{1}{s\gamma} \chi_2'(0, \lambda) \sin sx \\ &+ \frac{1}{s} \int_x^0 \sin s(x-y)q(y)u(y, \lambda)dy\end{aligned}\quad (5.2.75)$$

$$\begin{aligned}u'(x, \lambda) &= -s \frac{1}{\delta} \chi_2(0, \lambda) \sin sx + \frac{1}{\gamma} \chi_2'(0, \lambda) \cos sx \\ &+ \int_x^0 \cos s(x-y)q(y)u(y, \lambda)dy\end{aligned}\quad (5.2.76)$$

integral denkelemleriyle eşdeğerdir.

İspat: Teorem 5.2.5' in ispatına benzer şekilde yapılır.

Sonuç 5.2.6. $\chi_1(x, \lambda)$ fonksiyonu aşağıdaki integral ve integral-diferansiyel denklemleri sağlar.

$$\begin{aligned}\chi_1(x, \lambda) &= \frac{1}{\delta} \chi_2(0, \lambda) \cos sx + \frac{1}{s\gamma} \chi_2'(0, \lambda) \sin sx \\ &+ \frac{1}{s} \int_x^0 \sin s(x-y)q(y)\chi_1(y, \lambda)dy\end{aligned}\quad (5.2.77)$$

$$\begin{aligned}\chi_1'(x, \lambda) &= -s \frac{1}{\delta} \chi_2(0, \lambda) \sin sx + \frac{1}{\gamma} \chi_2'(0, \lambda) \cos sx \\ &+ \int_x^0 \cos s(x-y)q(y)\chi_1(y, \lambda)dy\end{aligned}\quad (5.2.78)$$

İspat: Sonuç 5.2.3' ün ispatına benzer şekilde yapılır.

5.3 $\Phi(x, \lambda)$ ve $\chi(x, \lambda)$ Temel Çözümlerinin Asimptotik Davranışları

Bu kesimde $\Phi_i(x, \lambda)$ ve $\chi_i(x, \lambda)$ ($i = 1, 2$) temel çözümlerinin önceki bölümde ispatladığımız eşdeğer olduğu integral denklemleri kullanarak, bunların λ parametresine göre $|\lambda| \rightarrow \infty$ için asimptotik formülleri elde edilecektir.

Teorem 5.3.1. $\lambda = s^2$, $s = \sigma + it$, $Im s = t$ olmak üzere, $\Phi_1(x, \lambda)$ fonksiyonu için $-1 \leq x \leq 0$ aralığında

$$\Phi_1(x, \lambda) = O\left(\frac{1}{|s|} e^{|t|(x+1)}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (5.3.1)$$

$$\Phi_1'(x, \lambda) = O\left(e^{|t|(x+1)}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (5.3.2)$$

$$\Phi_1(x, \lambda) = -\frac{1}{s} \sin s(x+1) + O\left(\frac{1}{|s|^2} e^{|t|(x+1)}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (5.3.3)$$

$$\Phi_1'(x, \lambda) = -\cos s(x+1) + O\left(\frac{1}{|s|} e^{|t|(x+1)}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (5.3.4)$$

asimptotik eşitlikleri sağlanır.

İspat: (Titchmarsh (1962) Lemma 1.7(ii)).

Teorem 5.3.2. $\lambda = s^2$, $s = \sigma + it$, $Im s = t$ olmak üzere, $\Phi_2(x, \lambda)$ fonksiyonu için $0 \leq x \leq 1$ aralığında aşağıdaki asimptotik eşitlikler sağlanır.

$$\Phi_2(x, \lambda) = O\left(\frac{1}{|s|} e^{|t|(x+1)}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (5.3.5)$$

$$\Phi_2'(x, \lambda) = O\left(e^{|t|(x+1)}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (5.3.6)$$

İspat:

$$F(x, \lambda) := e^{-|t|(x+1)} \Phi_2(x, \lambda) \quad (5.3.7)$$

ile gösterelim. $\Phi_2(x, \lambda)$ için daha önce göstermiş olduğumuz sonuç 5.2.46' deki integral denklemini üstteki eşitlikte yerine yazalım.

$$\begin{aligned} F(x, \lambda) &= e^{-|t|(x+1)} \left[\delta \Phi_1(0, \lambda) \cos sx + \frac{1}{s} \gamma \Phi_1'(0, \lambda) \sin sx \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x-y) q(y) \Phi_2(y, \lambda) dy \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x, \lambda) &= \delta \Phi_1(0, \lambda) \cos sxe^{-|t|(x+1)} + \frac{1}{s} \gamma \Phi_1'(0, \lambda) \sin sxe^{-|t|(x+1)} \\ &\quad + \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x-y) q(y) \Phi_2(y, \lambda) e^{-|t|(x+1)} dy \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

5.3.1 ve 5.3.2 asimptotik eşitlikleri dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} \Phi_1(0, \lambda) = O\left(\frac{1}{|s|} e^{|t|}\right) &\implies |\Phi_1(0, \lambda)| \leq M_1 \frac{1}{|s|} e^{|t|} \\ \Phi_1'(0, \lambda) = O(e^{|t|}) &\implies |\Phi_1'(0, \lambda)| \leq M_2 e^{|t|} \end{aligned}$$

bulunur. Bu son iki eşitsizlikte bulunan değerler 5.3.8 eşitliğinde yerine yazılırsa ve

$$|\sin z| \leq e^{|Imz|} \quad \text{ve} \quad |\cos z| \leq e^{|Imz|}$$

ifadelerinden yararlanılırsa,

$$\begin{aligned} |F(x, \lambda)| &\leq M_1 \delta \frac{1}{|s|} e^{|t|} e^{|t|x} e^{-|t|(x+1)} + M_2 \gamma \frac{1}{|s|} e^{|t|} e^{|t|x} e^{-|t|(x+1)} \\ &\quad + \frac{1}{|s|} \int_0^x |\sin[s(x-y)]| |q(y)| |F(y, \lambda)| e^{|t|(y+1)} e^{-|t|(x+1)} dy \\ &= \frac{1}{|s|} \left[\delta M_1 + \gamma M_2 + \int_0^x e^{|t|(x-y)} |q(y)| |F(y, \lambda)| e^{-|t|(x-y)} dy \right] \\ &= \frac{1}{|s|} \left[\delta M_1 + \gamma M_2 + \int_0^x |q(y)| |F(y, \lambda)| dy \right] \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

elde edilir. 5.3.9 eşitsizliğinde,

$$F_1 := \max_{x \in [0,1]} |F(x, \lambda)| \quad , \quad q_1 := \max_{x \in [0,1]} \int_0^1 |q(y)| dy$$

ile tanımlayalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned} |F(x, \lambda)| &\leq \frac{1}{|s|} \left[\delta M_1 + \gamma M_2 + \int_0^x |q(y)| |F(y, \lambda)| dy \right] \\ &\leq \frac{1}{|s|} [\delta M_1 + \gamma M_2 + F_1 q_1] \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

$$M := \delta M_1 + \gamma M_2 + F_1 q_1$$

ile gösterirsek,

$$\begin{aligned} |F(x, \lambda)| &\leq \frac{1}{|s|} M \implies |e^{-|t|(x+1)} \Phi_2(x, \lambda)| \leq \frac{1}{|s|} M \\ \implies |\Phi_2(x, \lambda)| &\leq \frac{1}{|s|} M e^{|t|(x+1)} \end{aligned}$$

Elde ettiğimiz bu son eşitsizlikten,

$$\Phi_2(x, \lambda) = O\left(\frac{1}{|s|} e^{|t|(x+1)}\right), \quad |\lambda| \longrightarrow \infty$$

asimptotik eşitliği elde edilir. Böylece istenilen ilk asimptotik eşitliğin sağlandığı gösterildi.

Şimdi 5.3.6 asimptotik eşitliğini ispatlayalım. Daha önce,

$$\begin{aligned} \Phi_2'(x, \lambda) &= -\delta s \Phi_1(0, \lambda) \sin sx + \gamma \Phi_1'(0, \lambda) \cos sx \\ &\quad + \int_0^x \cos s(x-y) q(y) \Phi_2(y, \lambda) dy \end{aligned}$$

olduğu gösterilmişti. Şimdi bu integral denklemini gözönüne alarak istenilen asimptotik eşitliğin sağlandığını gösterelim. Daha önceden bilindiği gibi

$$\begin{aligned} \Phi_1(0, \lambda) = O\left(\frac{1}{|s|} e^{|t|}\right) &\implies |\Phi_1(0, \lambda)| \leq M_1 \frac{1}{|s|} e^{|t|} \\ \Phi_1'(0, \lambda) = O(e^{|t|}) &\implies |\Phi_1'(0, \lambda)| \leq M_2 e^{|t|} \end{aligned}$$

idi. Bu ifadelerden yararlanılarak,

$$| -s\delta\Phi_1(0, \lambda) \sin sx | \leq M_1 \delta |s| \frac{1}{|s|} e^{|t|} e^{|t|x}$$

olup buradan,

$$-s\delta\Phi_1(0, \lambda) \sin sx = O(e^{|t|(x+1)}) \quad (5.3.11)$$

asimptotik eşitliği elde edilir. Aynı şekilde,

$$|\gamma\Phi_1'(0, \lambda) \cos sx| \leq M_2\gamma e^{|t|}e^{|t|x}$$

olup yine buradan asimptotik eşitlik tanım gereği,

$$\gamma\Phi_1'(0, \lambda) \cos sx = O(e^{|t|(x+1)}) \quad (5.3.12)$$

yazılır.

$$\Phi_2(x, \lambda) = O\left(\frac{1}{|s|} e^{|t|(x+1)}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty$$

asimptotik eşitliği gözönüne alınırsa ve

$$q_1 := \max_{x \in [0,1]} \int_0^1 |q(y)| dy$$

ile tanımlanırsa, aşağıdaki integral denklem için,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x \cos s(x-y) q(y) \Phi_2(y, \lambda) dy \right| &\leq \frac{1}{|s|} \int_0^x |e^{|t|(x-y)}| |q(y)| e^{|t|(y+1)} dy \\ &\leq q_1 \frac{1}{|s|} e^{|t|(x+1)} \\ &\leq M_3 e^{|t|(x+1)} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$\int_0^x \cos s(x-y) q(y) \Phi_2(y, \lambda) dy = O(e^{|t|(x+1)}) \quad (5.3.13)$$

yazılır. 5.3.11 - 5.3.13 ifadeleri $\Phi_2'(x, \lambda)$ integral denkleminde yerine yazılırsa,

$$\Phi_2'(x, \lambda) = (e^{|t|(x+1)})$$

asimptotik eşitliği elde edilir.

Teorem 5.3.3. $\lambda = s^2$, $s = \sigma + it$, $Im s = t$ olmak üzere, $\Phi_2(x, \lambda)$ fonksiyonu için $0 \leq x \leq 1$ aralığında

$$\begin{aligned}\Phi_2(x, \lambda) &= -\delta \frac{1}{s} \sin s \cos sx + \gamma \frac{1}{s} \cos s \sin sx \\ &+ O\left(\frac{1}{|s|^2} e^{|t|(x+1)}\right), \quad |\lambda| \longrightarrow \infty\end{aligned}\quad (5.3.14)$$

$$\begin{aligned}\Phi_2'(x, \lambda) &= \delta \sin s \sin sx - \gamma \cos s \cos sx \\ &+ O\left(\frac{1}{|s|} e^{|t|(x+1)}\right), \quad |\lambda| \longrightarrow \infty\end{aligned}\quad (5.3.15)$$

asimptotik eşitlikleri sağlanır.

İspat: Önce 5.3.14 asimptotik eşitliğini ispatlayalım. Bu ifadeyi ispatlamak için $\Phi_2(x, \lambda)$ için sonuç 5.2.4' de bulduğumuz

$$\begin{aligned}\Phi_2(x, \lambda) &= \delta \Phi_1(0, \lambda) \cos sx + \gamma \frac{1}{s} \Phi_1'(0, \lambda) \sin sx \\ &+ \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x-y) q(y) \Phi_2(y, \lambda) dy\end{aligned}$$

integral denkleminin sağ tarafındaki terimlerin asimptotik eşitleri ayrı ayrı değerlendirilecektir. Teorem 5.3.1'deki 5.3.3 ve 5.3.4 eşitliklerinden,

$$\begin{aligned}\Phi_1(0, \lambda) &= -\frac{1}{s} \sin s + O\left(\frac{1}{|s|^2} e^{|t|}\right), \quad |\lambda| \longrightarrow \infty \\ \Phi_1'(0, \lambda) &= -\cos s + O\left(\frac{1}{|s|} e^{|t|}\right), \quad |\lambda| \longrightarrow \infty\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\Phi_1(0, \lambda) \cos sx &= \cos sx \left[-\frac{1}{s} \sin s + O\left(\frac{1}{|s|^2} e^{|t|}\right) \right] \\ &= -\frac{1}{s} \sin s \cos sx + O\left(\frac{1}{|s|^2} e^{|t|}\right) O(e^{|t|(x)}) \\ &= -\frac{1}{s} \sin s \cos sx + O\left(\frac{1}{|s|^2} e^{|t|(x+1)}\right)\end{aligned}\quad (5.3.16)$$

$$\begin{aligned}
\Phi_1'(0, \lambda) \sin sx &= \sin sx \left[-\cos s + O\left(\frac{1}{|s|} e^{|t|}\right) \right] \\
&= -\cos s \sin sx + O\left(\frac{1}{|s|} e^{|t|}\right) O(e^{|t|(x)}) \\
&= -\cos s \sin sx + O\left(\frac{1}{|s|} e^{|t|(x+1)}\right)
\end{aligned} \tag{5.3.17}$$

Şimdi üstte $\Phi_2(x, \lambda)$ için yazdığımız integral denklemdeki integral ifade değerlendirilecektir. $\Phi_2(x, \lambda)$ için daha önce bulduğumuz 5.3.5 asimptotik eşitliği gereği,

$$|\Phi_2(x, \lambda)| \leq M \frac{1}{|s|} e^{|t|(x+1)}$$

olacak şekilde x ve λ ' dan bağımsız $M > 0$ sabiti mevcuttur. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x-y) q(y) \Phi_2(y, \lambda) dy \right| &\leq \frac{1}{|s|^2} \int_0^x |\sin s(x-y)| |q(y)| |\Phi_2(y, \lambda)| dy \\
&\leq \frac{1}{|s|^2} \int_0^x e^{|t|(x-y)} |q(y)| M e^{|t|(y+1)} dy \\
&\leq M \frac{1}{|s|^2} e^{|t|(x+1)} \int_0^1 |q(y)| dy
\end{aligned}$$

yazılır. $q_1 := \max_{y \in [0,1]} \int_0^1 |q(y)| dy$ ile tanımlanırsa,

$$\left| \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x-y) q(y) \Phi_2(y, \lambda) dy \right| \leq M q_1 \frac{1}{|s|^2} e^{|t|(x+1)}$$

eşitsizliği bulunur. Buradan asimptotik eşitlik tanımı gereği,

$$\frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x-y) q(y) \Phi_2(y, \lambda) dy = O\left(\frac{1}{|s|^2} e^{|t|(x+1)}\right) \tag{5.3.18}$$

eşitliği bulunur. 5.3.16 – 5.3.18 asimptotik ifadeleri $\Phi_2(x, \lambda)$ integral denkleminde yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\Phi_2(x, \lambda) &= -\delta \frac{1}{s} \sin s \cos sx + \delta O\left(\frac{1}{|s|^2} e^{|t|(x+1)}\right) - \gamma \frac{1}{s} \cos s \sin sx \\
&+ \frac{1}{|s|} \gamma O\left(\frac{1}{|s|} e^{|t|(x+1)}\right) + O\left(\frac{1}{|s|^2} e^{|t|(x+1)}\right) \\
&= -\delta \frac{1}{s} \sin s \cos sx - \gamma \frac{1}{s} \cos s \sin sx + O\left(\frac{1}{|s|^2} e^{|t|(x+1)}\right)
\end{aligned}$$

asimptotik eşitliği bulunur. Böylece 5.3.14 asimptotik eşitliğinin sağlandığı ispatlandı. Şimdi 5.3.15 asimptotik eşitliğini ispatlayalım. Bunun için,

$$\begin{aligned}\Phi_2'(x, \lambda) &= -\delta s \Phi_1(0, \lambda) \sin sx + \gamma \Phi_1'(0, \lambda) \cos sx \\ &+ \int_0^x \cos s(x-y) q(y) \Phi_2(y, \lambda) dy\end{aligned}$$

integral denkleminin sağ tarafındaki sağ tarafındaki terimlerin asimptotik ifadeleri ayrı ayrı değerlendirilecektir.

$$\begin{aligned}-\delta s \Phi_1(0, \lambda) \sin sx &= \sin sx \left[(-s) \left(-\frac{1}{s} \sin s \right) + (-s) O \left(\frac{1}{|s|^2} e^{|t|} \right) \right] \\ &\leq \sin s \sin sx + O \left(\frac{1}{|s|} e^{|t|} \right) O \left(e^{|t|(x)} \right) \\ &= \sin s \sin sx + O \left(\frac{1}{|s|} e^{|t|(x+1)} \right)\end{aligned}\quad (5.3.19)$$

$$\begin{aligned}\Phi_1'(0, \lambda) \cos sx &= \cos sx \left[-\cos s + O \left(\frac{1}{|s|} e^{|t|} \right) \right] \\ &\leq -\cos s \cos sx + O \left(\frac{1}{|s|} e^{|t|} \right) O \left(e^{|t|(x)} \right) \\ &= -\cos s \cos sx + O \left(\frac{1}{|s|} e^{|t|(x+1)} \right)\end{aligned}\quad (5.3.20)$$

Şimdi $\Phi_2'(x, \lambda)$ integral denklemindeki integral içeren ifadeyi inceleyelim.

$$\begin{aligned}\left| \int_0^x \cos s(x-y) q(y) \Phi_2(y, \lambda) dy \right| &\leq \int_0^x |\cos s(x-y)| |q(y)| |\Phi_2(y, \lambda)| dy \\ &\leq \frac{1}{|s|} \int_0^x e^{|t|(x-y)} |q(y)| M e^{|t|(y+1)} dy \\ &\leq M \frac{1}{|s|} e^{|t|(x+1)} \int_0^1 |q(y)| dy\end{aligned}$$

bulunur. $q_1 := \max_{x \in [0,1]} \int_0^1 |q(y)| dy$ ile tanımlanırsa,

$$\left| \int_0^x \cos s(x-y) q(y) \Phi_2(y, \lambda) dy \right| \leq M q_1 \frac{1}{|s|} e^{|t|(x+1)}$$

eşitsizliği bulunur. Asimptotik eşitlik tanımı gereği son ifadede,

$$\int_0^x \cos s(x-y)q(y)\Phi_2(y, \lambda)dy = O\left(\frac{1}{|s|} e^{|t|(x+1)}\right) \quad (5.3.21)$$

yazılır. 5.3.16 – 5.3.18 asimptotik ifadeleri $\Phi_2(x, \lambda)$ integral denkleminde yazılırsa,

$$\begin{aligned} \Phi_2'(x, \lambda) &= \delta \sin s \sin sx + \delta O\left(\frac{1}{|s|} e^{|t|(x+1)}\right) - \gamma \cos s \cos sx \\ &+ \gamma O\left(\frac{1}{|s|} e^{|t|(x+1)}\right) + O\left(\frac{1}{|s|} e^{|t|(x+1)}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son ifadede gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} \Phi_2'(x, \lambda) &= \delta \sin s \sin sx - \gamma \cos s \cos sx \\ &+ O\left(\frac{1}{|s|} e^{|t|(x+1)}\right), \quad |\lambda| \longrightarrow \infty \end{aligned}$$

asimptotik eşitliği bulunur. Böylece 5.3.15 asimptotik eşitliğinin sağlandığıda gösterildi.

Böylece $\Phi_1(x, \lambda)$ ve $\Phi_2(x, \lambda)$ fonksiyonları için gerekli asimptotik formüller bulundu. Şimdi bu formüller $\chi_1(x, \lambda)$ ve $\chi_2(x, \lambda)$ fonksiyonları için bulunacaktır. $\chi_1(x, \lambda)$ fonksiyonu $\chi_2(x, \lambda)$ fonksiyonu aracılığı ile tanımlandığı için bu formüllerin öncelikle $\chi_2(x, \lambda)$ fonksiyonu için bulunması gerekir. Ancak $\chi_2(x, \lambda)$ fonksiyonu için geçerli olan asimptotik formüller ispatsız olarak verilecektir. İspatı, Titchmarsh (1962) kaynağındaki Lemma 1.7 (ii)'nin ispatına tıpatıp benzerdir.

Teorem 5.3.4. $\lambda = s^2$, $s = \sigma + it$, $Im s = t$ olmak üzere, $\chi_2(x, \lambda)$ fonksiyonu için $0 \leq x \leq 1$ aralığında

$$\chi_2(x, \lambda) = O\left(|s| e^{|t|(1-x)}\right), \quad |\lambda| \longrightarrow \infty \quad (5.3.22)$$

$$\chi_2'(x, \lambda) = O\left(|s|^2 e^{|t|(1-x)}\right), \quad |\lambda| \longrightarrow \infty \quad (5.3.23)$$

$$\chi_2(x, \lambda) = s \sin s(x-1) + O\left(e^{|t|(1-x)}\right), \quad |\lambda| \longrightarrow \infty \quad (5.3.24)$$

$$\chi_2'(x, \lambda) = s^2 \cos s(x-1) + O\left(|s| e^{|t|(1-x)}\right), \quad |\lambda| \longrightarrow \infty \quad (5.3.25)$$

asimptotik eşitlikleri sağlanır.

Teorem 5.3.5. $\lambda = s^2$, $s = \sigma + it$, $Im s = t$ olmak üzere, $\chi_1(x, \lambda)$ fonksiyonu için $-1 \leq x \leq 0$ aralığında

$$\chi_1(x, \lambda) = O(|s| e^{|t|(1-x)}), \quad |\lambda| \longrightarrow \infty \quad (5.3.26)$$

$$\chi_1'(x, \lambda) = O(|s|^2 e^{|t|(1-x)}), \quad |\lambda| \longrightarrow \infty \quad (5.3.27)$$

asimptotik eşitlikleri sağlanır.

İspat: Teorem 5.3.4' deki asimptotik eşitlikler gözönüne alınırsa,

$$\chi_2(x, \lambda) = O(|s| e^{|t|(1-x)}) \implies |\chi_2(x, \lambda)| \leq M_1 |s| e^{|t|(1-x)}$$

$$\chi_2'(x, \lambda) = O(|s|^2 e^{|t|(1-x)}) \implies |\chi_2'(x, \lambda)| \leq M_2 |s|^2 e^{|t|(1-x)}$$

yazılır.

$$F(x, \lambda) := \chi_1(x, \lambda) e^{-|t|(1-x)} \quad (5.3.28)$$

ile gösterelim. O halde $F(x, \lambda)$ fonksiyonu için,

$$\begin{aligned} F(x, \lambda) &= e^{-|t|(x+1)} \left[\frac{1}{\delta} \chi_2(0, \lambda) \cos sx + \frac{1}{\gamma s} \chi_2'(0, \lambda) \sin sx \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x-y) q(y) \chi_1(y, \lambda) dy \right] \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Bu durumda son eşitlikte,

$$|\sin z| \leq e^{|Im z|} \quad \text{ve} \quad |\cos z| \leq e^{|Im z|}$$

ifadelerinden yararlanılırsa,

$$\begin{aligned} |F(x, \lambda)| &\leq \frac{1}{\delta} M_1 e^{|t|} e^{-|t|x} e^{-|t|(1-x)} + \frac{1}{\gamma |s|} M_2 |s|^2 e^{|t|} e^{-|t|x} e^{-|t|(1-x)} \\ &\quad + \frac{1}{|s|} \int_0^x e^{|t|(y-x)} |q(y)| e^{|t|(1-y)} |F(y, \lambda)| e^{-|t|(1-x)} dy \\ &\leq \frac{1}{\delta} M_1 |s| + \frac{1}{\gamma} M_2 |s| + \frac{1}{|s|} \int_0^x |q(y)| |F(y, \lambda)| dy \end{aligned}$$

$$F_1(x, \lambda) := \max_{x \in [-1, 0]} |F(x, \lambda)| \quad , \quad q_1 := \max_{x \in [-1, 0]} \int_0^1 |q(y)| dy$$

alınırsa,

$$\begin{aligned} |F(x, \lambda)| &\leq |s| \left[\frac{1}{\delta} M_1 + \frac{1}{\gamma} M_2 + q_1 \frac{1}{|s|^2} F_1(x, \lambda) \right] \\ &\leq M_0 |s| \end{aligned}$$

buradan,

$$|\chi_1(x, \lambda) e^{-|t|(1-x)}| \leq M_0 |s| \implies |\chi_1(x, \lambda)| \leq M_0 |s| e^{|t|(1-x)}$$

eşitsizliği bulunur. Buradan,

$$\chi_1(x, \lambda) = O(|s| e^{|t|(1-x)})$$

asimptotik eşitliği bulunur. Böylece 5.3.26 asimptotik eşitliğinin sağlandığı gösterildi.

Şimdi 5.3.27 asimptotik eşitliğini ispatlayalım.

$$\begin{aligned} \chi_1'(x, \lambda) &= -\frac{1}{\delta} s \chi_2(0, \lambda) \sin sx + \frac{1}{\gamma} \chi_2'(0, \lambda) \cos sx \\ &+ \int_x^0 \cos s(x-y) q(y) \chi_1(y, \lambda) dy \end{aligned}$$

integral denklemini gözönüne alalım. Yine Teorem 5.3.4' deki

$$\chi_2(x, \lambda) = O(|s| e^{|t|(1-x)})$$

$$\chi_2'(x, \lambda) = O(|s|^2 e^{|t|(1-x)})$$

asimptotik eşitlikleri gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \left| -\frac{1}{\delta} s \chi_2(0, \lambda) \sin sx \right| &\leq \frac{1}{\delta} M_1 |s| |s| e^{|t|} e^{-|t|x} \\ &= \frac{1}{\delta} M_1 |s|^2 e^{|t|(1-x)} \end{aligned}$$

elde edilir. O halde asimptotik eşitlik tanımı gereği,

$$-\frac{1}{\delta} s \chi_2(0, \lambda) \sin sx = O(|s|^2 e^{|t|(1-x)}) \quad (5.3.29)$$

yazılır.

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\gamma} \chi_2'(0, \lambda) \cos sx \right| &\leq \frac{1}{\gamma} M_2 |s|^2 e^{|t|} e^{-|t|x} \\ &= \frac{1}{\gamma} M_2 |s|^2 e^{|t|(1-x)} \end{aligned}$$

buradanda,

$$\frac{1}{\gamma} \chi_2'(0, \lambda) \cos sx = O(|s|^2 e^{|t|(1-x)}) \quad (5.3.30)$$

yazılır. Şimdi,

$$\chi_1(x, \lambda) = O(|s| e^{|t|(1-x)})$$

asimptotik eşitliği ve

$$q_1 := \max_{x \in [-1, 0]} \int_0^1 |q(y)| dy$$

şeklinde tanımlanan ifade gözönüne alınırsa aşağıdaki integral denklem için,

$$\begin{aligned} \left| \int_x^0 \cos s(x-y) q(y) \chi_1(y, \lambda) dy \right| &\leq |s| \int_0^x e^{|t|(y-x)} |q(y)| e^{|t|(1-y)} dy \\ &\leq \frac{|s|^2}{|s|} q_1 e^{|t|(1-x)} \\ &= M |s|^2 e^{|t|(1-x)}, M = \frac{q_1}{|s|} \end{aligned}$$

olup buradan,

$$\int_x^0 \cos s(x-y) q(y) \chi_1(y, \lambda) dy = O(|s|^2 e^{|t|(1-x)}) \quad (5.3.31)$$

asimptotik eşitliği elde edilir. 5.3.30–5.3.32 ifadeleri $\chi_1'(x, \lambda)$ 'nin integral denkleminde yerine yazılırsa,

$$\chi_1(x, \lambda) = O(|s|^2 e^{|t|(1-x)}) \quad (5.3.32)$$

asimptotik eşitliği elde edilir. Buda ispatı tamamlar.

Teorem 5.3.6. $\lambda = s^2$, $s = \sigma + it$, $Im s = t$ olmak üzere, $\chi_1(x, \lambda)$ fonksiyonu için $-1 \leq x \leq 0$ aralığında

$$\begin{aligned}\chi_1(x, \lambda) &= -\frac{1}{\delta} s \sin s \cos sx + \frac{1}{\gamma} s \cos s \sin sx \\ &+ O(e^{|t|(1-x)}), \quad |\lambda| \rightarrow \infty\end{aligned}\quad (5.3.33)$$

$$\begin{aligned}\chi_1'(x, \lambda) &= \frac{1}{\delta} s^2 \sin s \sin sx + \frac{1}{\gamma} s^2 \cos s \cos sx \\ &+ O(|s| e^{|t|(1-x)}), \quad |\lambda| \rightarrow \infty\end{aligned}\quad (5.3.34)$$

asimptotik eşitlikleri sağlanır.

İspat: Yukarıdaki istenilen eşitlikleri göstermek için,

$$\begin{aligned}\chi_1(x, \lambda) &= \frac{1}{\delta} \chi_2(0, \lambda) \cos sx + \frac{1}{s\gamma} \chi_2'(0, \lambda) \sin sx \\ &+ \frac{1}{s} \int_x^0 \sin s(x-y) q(y) \chi_1(x, \lambda) dy\end{aligned}$$

integral denkleminin sağ tarafındaki ifadeler ayrı ayrı değerlendirilecektir. Daha önce $\chi_2(x, \lambda)$ için yazılan asimptotik eşitliklerden,

$$\begin{aligned}\chi_2(0, \lambda) &= -s \sin s + O(e^{|t|}) \\ \chi_2'(0, \lambda) &= s^2 \cos s + O(|s| e^{|t|})\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}\chi_2(0, \lambda) \cos sx &= \cos sx \left[-s \sin s + O(e^{|t|}) \right] \\ &= -s \sin s \cos sx + O(e^{|t|}) O(e^{-|t|x}), \quad x \in [-1, 0] \\ &= -s \sin s \cos sx + O(e^{|t|(1-x)})\end{aligned}\quad (5.3.35)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{s} \chi_2'(0, \lambda) \sin sx &= \frac{1}{s} s^2 \cos s \sin sx + \frac{1}{s} O(|s| e^{|t|}) \cos sx \\ &= s \cos s \sin sx + O(|s| e^{|t|}) O(e^{-|t|x}), \quad x \in [-1, 0] \\ &= s \cos s \sin sx + O(e^{|t|(1-x)})\end{aligned}\quad (5.3.36)$$

şimdi denklemdeki integral içeren ifade değerlendirilirse, $\chi_1(x, \lambda)$ için bir önceki teorem gereği,

$$|\chi_1(x, \lambda)| \leq M|s|e^{|t|(1-x)}$$

olacak şekilde x ve λ ' dan bağımsız $M > 0$ sayısı vardır.

$$q_1 := \max_{x \in [-1, 0]} \int_0^1 |q(y)| dy$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{s} \int_x^0 \sin s(x-y) q(y) \chi_1(x, \lambda) dy \right| &\leq \frac{1}{|s|} \int_x^0 |\sin s(x-y)| |q(y)| |\chi_1(x, \lambda)| dy \\ &\leq \frac{1}{|s|} M \int_x^0 e^{|t|(y-x)} |q(y)| |s| e^{|t|(1-y)} dy \\ &\leq M q_1 e^{|t|(1-x)} \end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Buradan tanım gereği,

$$\frac{1}{s} \int_x^0 \sin s(x-y) q(y) \chi_1(x, \lambda) dy = O(e^{|t|(1-x)}) \quad (5.3.37)$$

olduğu kolayca görülür. 5.3.35 – 5.3.37 ifadeleri $\chi_1(x, \lambda)$ integral denkleminde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} \chi_1(x, \lambda) &= -\frac{1}{\delta} s \sin s \cos sx + \frac{1}{\gamma} s \cos s \sin sx \\ &+ O(e^{|t|(1-x)}), \quad |\lambda| \longrightarrow \infty \end{aligned} \quad (5.3.38)$$

asimptotik eşitliği bulunur. Böylece istenilen ilk asimptotik eşitlik ispatlanmış olur. Benzer yöntemle üstte yaptığımız işlemler $\chi_1'(x, \lambda)$ ' nın integral denklemi için uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \chi_1'(x, \lambda) &= \frac{1}{\delta} s^2 \sin s \sin sx + \frac{1}{\gamma} s^2 \cos s \cos sx \\ &+ O(|s| e^{|t|(1-x)}), \quad |\lambda| \longrightarrow \infty \end{aligned} \quad (5.3.39)$$

asimptotik eşitliği bulunur. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

5.4 Temel Çözümler, Karakteristik Fonksiyon ve Karakteristik Fonksiyonun Asimptotik Davranışı

5.4.1 Temel Çözümler ve Karakteristik Fonksiyon

Bu kesimde

$$Lu : = -u'' + q(x)u = \lambda u, \quad x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \quad (5.4.1)$$

$$L_1u : = u(-1) = 0 \quad (5.4.2)$$

$$L_2u : = \lambda u(1) - u'(1) = 0 \quad (5.4.3)$$

$$L_3u : = u(+0) - \delta u(-0) = 0 \quad (5.4.4)$$

$$L_4u : = u'(+0) - \gamma u'(-0) = 0 \quad (5.4.5)$$

Sınır- değer- geçiş probleminin özdeğer ve özfonksiyonları arasındaki bazı temel bağıntıları incelenecektir. Önceki bölümlerde, $\Phi_1(x, \lambda)$ ve $\chi_1(x, \lambda)$ fonksiyonlarının $\forall x \in [-1, 0]$ için $\Phi_2(x, \lambda)$ ve $\chi_2(x, \lambda)$ fonksiyonlarının ise $\forall x \in [0, 1]$ için λ parametresine göre bütün kompleks düzlemde analitiktik (yani λ parametresinin tam fonksiyonu) olduğunu ispatlamıştık. Bu fonksiyonların $[-1, 1]$ aralığında sıfırla devamlarına uygun olarak $\tilde{\Phi}_i(x, \lambda)$ ve $\tilde{\chi}_i(x, \lambda)$ ile gösterelim. Yani

$$\tilde{\Phi}_1 = \begin{cases} \Phi_1, & x \in [-1, 0) \\ 0, & x \in (0, 1] \end{cases}$$

$$\tilde{\Phi}_2 = \begin{cases} 0, & x \in [-1, 0) \\ \Phi_2, & x \in (0, 1] \end{cases}$$

$$\tilde{\chi}_1 = \begin{cases} \chi_1, & x \in [-1, 0) \\ 0, & x \in (0, 1] \end{cases}$$

$$\tilde{\chi}_2 = \begin{cases} 0, & x \in [-1, 0) \\ \chi_2, & x \in (0, 1] \end{cases}$$

ile gösterelim. $\Phi_i(x, \lambda)$ ve $\chi_i(x, \lambda)$ ($i=1,2$) olmak üzere, bu çözüm fonksiyonların wronskiyeni,

$$\omega_i(\lambda) = W(\Phi_i(x, \lambda), \chi_i(x, \lambda)) = \Phi_i(x, \lambda)\chi_i'(x, \lambda) - \Phi_i'(x, \lambda)\chi_i(x, \lambda)$$

ile tanımlıdır. $\omega_1(\lambda)$ ile $\Phi_1(x, \lambda)$ ve $\chi_1(x, \lambda)$ çözüm fonksiyonlarının wronskiyeni, $\omega_2(\lambda)$ ile $\Phi_2(x, \lambda)$ ve $\chi_2(x, \lambda)$ çözüm fonksiyonlarının wronskiyeni gösterilecektir. Ayrıca $W(\Phi_1(x, \lambda), \chi_1(x, \lambda))$ ve $W(\Phi_2(x, \lambda), \chi_2(x, \lambda))$ wronskiyenleri uygun olarak $x \in [-1, 0]$ ve $x \in [0, 1]$ değişkenlerinden bağımsız oldukları için ve $\tilde{\Phi}_i(x, \lambda)$ ve $\tilde{\chi}_i(x, \lambda)$ ($i = 1, 2$) her bir x için λ parametresinin tam fonksiyonu olduklarından dolayı,

$$\omega_1(\lambda) := W(\Phi_1(x, \lambda), \chi_1(x, \lambda)) \quad (5.4.6)$$

$$\omega_2(\lambda) := W(\Phi_2(x, \lambda), \chi_2(x, \lambda)) \quad (5.4.7)$$

fonksiyonları λ parametresinin tam fonksiyonlarıdır.

Lemma 5.4.1. $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ için

$$\omega(\lambda) = \omega_1(\lambda) = \frac{1}{\delta\gamma} \omega_2(\lambda) \quad (5.4.8)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: 5.4.6 – 5.4.7 eşitlikleri x değişkeninden bağımsız olduklarından,

$$\begin{aligned} W(\Phi_2(x, \lambda), \chi_2(x, \lambda)) &= \Phi_2(x, \lambda)\chi_2'(x, \lambda) - \Phi_2'(x, \lambda)\chi_2(x, \lambda) \\ &= \Phi_2(0, \lambda)\chi_2'(0, \lambda) - \Phi_2'(0, \lambda)\chi_2(0, \lambda) \end{aligned} \quad (5.4.9)$$

eşitliği sağlanır. Diğer taraftan $\Phi_i(x, \lambda)$ ve $\chi_i(x, \lambda)$ ($i = 1, 2$) çözümlerinin tanımları gereği,

$$\begin{aligned}
\Phi_2(0, \lambda) &= \delta\Phi_1(0, \lambda) \\
\Phi_2'(0, \lambda) &= \gamma\Phi_1'(0, \lambda) \\
\chi_2(0, \lambda) &= \delta\chi_1(0, \lambda) \\
\chi_2'(0, \lambda) &= \gamma\chi_1'(0, \lambda)
\end{aligned}$$

eşitlikleri de sağlanır. Bu değerler 5.4.9' da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\omega_2(\lambda) &= \delta\Phi_1(0, \lambda)\gamma\chi_1'(0, \lambda) - \gamma\Phi_1'(0, \lambda)\delta\chi_1(0, \lambda) \\
&= \delta\gamma(\Phi_1(0, \lambda)\chi_1'(0, \lambda) - \Phi_1'(0, \lambda)\chi_1(0, \lambda)) \\
&= \delta\gamma\omega_1(\lambda)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 5.4.1. $\omega_1(\lambda)$ ve $\omega_2(\lambda)$ tam fonksiyonlarının sıfır yerleri çakışıktır. Şimdi $[-1, 0) \cup (0, 1]$ ' de tanımlı olan $\Phi(x, \lambda)$ ve $\chi(x, \lambda)$ fonksiyonlarını

$$\begin{aligned}
\Phi(x, \lambda) &= \begin{cases} \Phi_1(x, \lambda), & x \in [-1, 0) \\ \Phi_2(x, \lambda), & x \in (0, 1] \end{cases} \\
\chi(x, \lambda) &= \begin{cases} \chi_1(x, \lambda), & x \in [-1, 0) \\ \chi_2(x, \lambda), & x \in (0, 1] \end{cases}
\end{aligned}$$

eşitlikleri ile tanımlanırsak, Lemma 5.4.1' den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.4.2. $\Phi(x, \lambda)$ ve $\chi(x, \lambda)$ fonksiyonlarının wronskiye $[-1, 0) \cup (0, 1]$ aralıklarının her birinde x değişkeninden bağımsızdır ve x değişkeninin her bir $x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$ değerinde, λ parametresinin tam fonksiyonudur.

$$\omega(\lambda) = W(\Phi(x, \lambda), \chi(x, \lambda))$$

ile gösterelim. O halde

$$\omega(\lambda) = W(\Phi(x, \lambda), \chi(x, \lambda)) = \begin{cases} \omega_1(\lambda), & x \in [-1, 0) \\ \frac{1}{\delta\gamma} \omega_2(\lambda), & x \in (0, 1] \end{cases}$$

formülü elde edilir. Bu durumda Lemma 5.5.1 gereği

$$\omega(\lambda) = \omega_1(\lambda) = \frac{1}{\delta\gamma} \omega_2(\lambda) \quad (5.4.10)$$

eşitliği yazılır. Bundan sonraki bölümlerde her yerde Lemma 5.4.1 dikkate alınarak 5.4.10 gösteriminden yararlanılacaktır.

Teorem 5.4.1. 5.4.1 -5.4.5 sınır değer probleminin özdeğerleri ancak ve ancak $\omega(\lambda)$ fonksiyonun sıfır yerlerinden ibarettir.

İspat: $(\Rightarrow)$: $\lambda = \lambda_0$ sayısı $\omega(\lambda)$ ' nın sıfırı olsun. Yani $\omega(\lambda_0) = 0$ olsun. Bu durumda λ_0 sayısının özdeğer olduğunu göstermeliyiz. 5.4.10 eşitliği gereği,

$$\omega_1(\lambda_0) = 0 \text{ ve } \omega_2(\lambda_0) = 0$$

olur. $\omega_1(\lambda_0) = 0$ ise $\omega_1(\lambda)$ ' nın tanımından,

$$W(\Phi_1(x, \lambda), \chi_1(x, \lambda)) = 0$$

yazılır. Bu durumda $\Phi_1(x, \lambda)$ ve $\chi_1(x, \lambda)$ fonksiyonları diferansiyel denklemler teorisinden iyi bilinen " $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots, y_n(x)$ fonksiyonları n . mertebeden diferansiyel denklemin lineer bağımlı çözümleri ise o halde bu fonksiyonların wronskiyeni bütün noktalarda sıfırdır." teoreminin sonucu olarak lineer bağımlıdır. Yani,

$$\chi_1(x, \lambda_0) = k\Phi_1(x, \lambda_0), \quad x \in [-1, 0] \quad (5.4.11)$$

olacak biçimde $k \neq 0$ sayısı mevcuttur. 5.4.11 ve $\Phi_1(x, \lambda)$ ' nın tanımından dolayı,

$$\chi_1(-1, \lambda_0) = k\Phi_1(-1, \lambda_0) = 0$$

elde edilir. $\Phi_1(-1, \lambda_0)$ ' nın çözümünden dolayı

$$\chi(-1, \lambda_0) = 0$$

bulunur. Bu sonuç $\chi(-1, \lambda_0)$ fonksiyonunun 5.4.2 sınır şartını sağladığını gösterir. $\chi(-1, \lambda_0)$ aynı zamanda 5.4.3 başlangıç şartını ve 5.4.4 – 5.4.5 geçiş şartlarını da sağladığından dolayı 5.4.1 – 5.4.5 probleminin çözümü olur. Bu durumda $\chi(-1, \lambda_0)$ fonksiyonu λ_0 özdeğerine uygun özfonksiyon olur. Bu ise $\lambda = \lambda_0$ sayısının özdeğer olduğunu gösterir.

($\Leftarrow$) : Şimdi ise tersine $\lambda = \lambda_0$ sayısı 5.4.1 – 5.4.5 probleminin özdeğeri olsun bu durumda

$$\omega(\lambda_0) = 0$$

olduğunu gösterilecektir. Kabul edelim ki λ_0 5.4.1 – 5.4.5 probleminin özdeğeri ve $\omega(\lambda_0) \neq 0$ olsun. Bu durumda 5.4.10 eşitliğinden $\omega_1(\lambda_0) \neq 0$ ve $\omega_2(\lambda_0) \neq 0$ olur. Buradan

$$W(\Phi_1(x, \lambda_0), \chi_1(x, \lambda_0)) \neq 0 \text{ ve } W(\Phi_2(x, \lambda_0), \chi_2(x, \lambda_0)) \neq 0$$

elde edilir. Bu durumda, $\Phi_1(x, \lambda_0)$ fonksiyonu $\chi_1(x, \lambda_0)$ fonksiyonuyla, $\Phi_2(x, \lambda_0)$ fonksiyonu $\chi_2(x, \lambda_0)$ fonksiyonuyla lineer bağımsız olacaktır. Böylece 5.5.1 denkleminin genel çözümü,

$$u(x, \lambda) = c_1 \tilde{\Phi}_1(x, \lambda) + c_2 \tilde{\chi}_1(x, \lambda) + c_3 \tilde{\Phi}_2(x, \lambda) + c_4 \tilde{\chi}_2(x, \lambda)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda, λ_0 özdeğerine uygun olan her $u_0(x)$ özfonksiyonu için,

$$u_0(x) = k_1 \tilde{\Phi}_1(x, \lambda_0) + k_2 \tilde{\chi}_1(x, \lambda_0) + k_3 \tilde{\Phi}_2(x, \lambda_0) + k_4 \tilde{\chi}_2(x, \lambda_0) \quad (5.4.12)$$

olacak şekilde enaz biri sıfırdan farklı olan k_1, k_2, k_3, k_4 reel sayıları bulunur. 5.4.12 eşitliği ile verilen $u_0(x)$ özfonksiyonu 5.4.2 - 5.4.5 sınır ve geçiş şartlarını sağladığından,

$$\begin{aligned}
L_1(\tilde{\Phi}_1(x, \lambda_0))k_1 + L_1(\tilde{\chi}_1(x, \lambda_0))k_2 + L_1(\tilde{\Phi}_2(x, \lambda_0))k_3 + L_1(\tilde{\chi}_2(x, \lambda_0))k_4 &= 0 \\
L_2(\tilde{\Phi}_1(x, \lambda_0))k_1 + L_2(\tilde{\chi}_1(x, \lambda_0))k_2 + L_2(\tilde{\Phi}_2(x, \lambda_0))k_3 + L_2(\tilde{\chi}_2(x, \lambda_0))k_4 &= 0 \\
L_3(\tilde{\Phi}_1(x, \lambda_0))k_1 + L_3(\tilde{\chi}_1(x, \lambda_0))k_2 + L_3(\tilde{\Phi}_2(x, \lambda_0))k_3 + L_3(\tilde{\chi}_2(x, \lambda_0))k_4 &= 0 \\
L_4(\tilde{\Phi}_1(x, \lambda_0))k_1 + L_4(\tilde{\chi}_1(x, \lambda_0))k_2 + L_4(\tilde{\Phi}_2(x, \lambda_0))k_3 + L_4(\tilde{\chi}_2(x, \lambda_0))k_4 &= 0
\end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir. k_i katsayılarının en az biri en az bir sıfırdan farklı olduğundan dolayı,

$$\begin{vmatrix}
L_1(\tilde{\Phi}_1(x, \lambda_0)) & L_1(\tilde{\chi}_1(x, \lambda_0)) & L_1(\tilde{\Phi}_2(x, \lambda_0)) & L_1(\tilde{\chi}_2(x, \lambda_0)) \\
L_2(\tilde{\Phi}_1(x, \lambda_0)) & L_2(\tilde{\chi}_1(x, \lambda_0)) & L_2(\tilde{\Phi}_2(x, \lambda_0)) & L_2(\tilde{\chi}_2(x, \lambda_0)) \\
L_3(\tilde{\Phi}_1(x, \lambda_0)) & L_3(\tilde{\chi}_1(x, \lambda_0)) & L_3(\tilde{\Phi}_2(x, \lambda_0)) & L_3(\tilde{\chi}_2(x, \lambda_0)) \\
L_4(\tilde{\Phi}_1(x, \lambda_0)) & L_4(\tilde{\chi}_1(x, \lambda_0)) & L_4(\tilde{\Phi}_2(x, \lambda_0)) & L_4(\tilde{\chi}_2(x, \lambda_0))
\end{vmatrix} = 0 \quad (5.4.13)$$

elde edilir. Şimdi bu elemanların determinantını hesaplayalım: $\tilde{\Phi}_i(x, \lambda)$ ve $\tilde{\chi}_i(x, \lambda)$ ($i = 1, 2$) fonksiyonlarının tanımı gereği,

$$L_1(\tilde{\Phi}_1(x, \lambda_0)) = \tilde{\Phi}_1(-1, \lambda_0) = \Phi_1(-1, \lambda_0) = 0 \quad (5.4.14)$$

$$\begin{aligned}
L_1(\tilde{\chi}_1(x, \lambda_0)) &= \tilde{\chi}_1(-1, \lambda_0) = \chi_1(-1, \lambda_0) \\
&= \Phi_1(-1, \lambda_0)\chi_1'(-1, \lambda_0) - \Phi_1'(-1, \lambda_0)\chi_1(-1, \lambda_0) \\
&= W(\Phi_1(x, \lambda_0), \chi_1(x, \lambda_0))|_{x=-1} \\
&= \omega_1(\lambda_0)
\end{aligned} \quad (5.4.15)$$

$$L_1(\tilde{\Phi}_2(x, \lambda_0)) = \tilde{\Phi}_2(-1, \lambda_0) = 0 \quad (5.4.16)$$

$$L_1(\tilde{\chi}_2(x, \lambda_0)) = \tilde{\chi}_2(-1, \lambda_0) = 0 \quad (5.4.17)$$

$$\begin{aligned}
L_2(\tilde{\Phi}_1(x, \lambda_0)) &= \lambda \tilde{\Phi}_1(1, \lambda_0) - \tilde{\Phi}_1'(1, \lambda_0) \\
&= \lambda \Phi_1(1, \lambda_0) - \Phi_1'(1, \lambda_0) \\
&= \lambda 0 - 0 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{5.4.18}$$

$$\begin{aligned}
L_2(\tilde{\chi}_1(x, \lambda_0)) &= \lambda \tilde{\chi}_1(1, \lambda_0) - \tilde{\chi}_1'(1, \lambda_0) \\
&= \lambda \chi_1(1, \lambda_0) - \chi_1'(1, \lambda_0) \\
&= \lambda 0 - 0 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{5.4.19}$$

$$\begin{aligned}
L_2(\tilde{\Phi}_2(x, \lambda_0)) &= \lambda \tilde{\Phi}_2(1, \lambda_0) - \tilde{\Phi}_2'(1, \lambda_0) \\
&= \lambda \Phi_2(1, \lambda_0) - \Phi_2'(1, \lambda_0) \\
&= \chi_2'(1, \lambda_0) \Phi_2(1, \lambda_0) - \chi_2(1, \lambda_0) \Phi_2'(1, \lambda_0) \\
&= W(\Phi_2(x, \lambda_0), \chi_2(x, \lambda_0))|_{x=1} \\
&= \omega_2(\lambda_0)
\end{aligned} \tag{5.4.20}$$

$$\begin{aligned}
L_2(\tilde{\chi}_2(x, \lambda_0)) &= \lambda \tilde{\chi}_2(1, \lambda_0) - \tilde{\chi}_2'(1, \lambda_0) \\
&= \lambda \chi_2(1, \lambda_0) - \chi_2'(1, \lambda_0) \\
&= \chi_2'(1, \lambda_0) \chi_2(1, \lambda_0) - \chi_2'(1, \lambda_0) \chi_2(1, \lambda_0) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{5.4.21}$$

$$\begin{aligned}
L_3(\tilde{\Phi}_1(x, \lambda_0)) &= \delta \Phi_1(-0, \lambda_0) - \Phi_1(+0, \lambda_0) \\
&= \delta \Phi_1(-0, \lambda_0)
\end{aligned} \tag{5.4.22}$$

$$\begin{aligned}
L_3(\tilde{\chi}_1(x, \lambda_0)) &= \delta \chi_1(-0, \lambda_0) - \chi_1(+0, \lambda_0) \\
&= \delta \chi_1(-0, \lambda_0)
\end{aligned} \tag{5.4.23}$$

$$\begin{aligned}
L_3(\tilde{\Phi}_2(x, \lambda_0)) &= \delta \Phi_2(-0, \lambda_0) - \Phi_2(+0, \lambda_0) \\
&= -\Phi_2(+0, \lambda_0)
\end{aligned} \tag{5.4.24}$$

$$\begin{aligned}
L_3(\tilde{\chi}_2(x, \lambda_0)) &= \delta \chi_2(-0, \lambda_0) - \chi_2(+0, \lambda_0) \\
&= -\chi_2(+0, \lambda_0)
\end{aligned} \tag{5.4.25}$$

$$\begin{aligned}
L_4(\tilde{\Phi}_1(x, \lambda_0)) &= \gamma \Phi'_1(-0, \lambda_0) - \Phi'_1(+0, \lambda_0) \\
&= \gamma \Phi'_1(-0, \lambda_0)
\end{aligned} \tag{5.4.26}$$

$$\begin{aligned}
L_4(\tilde{\chi}_1(x, \lambda_0)) &= \gamma \chi'_1(-0, \lambda_0) - \chi'_1(+0, \lambda_0) \\
&= \gamma \chi'_1(-0, \lambda_0)
\end{aligned} \tag{5.4.27}$$

$$\begin{aligned}
L_4(\tilde{\Phi}_2(x, \lambda_0)) &= \gamma \Phi'_2(-0, \lambda_0) - \Phi'_2(+0, \lambda_0) \\
&= -\Phi'_2(+0, \lambda_0)
\end{aligned} \tag{5.4.28}$$

$$\begin{aligned}
L_4(\tilde{\chi}_2(x, \lambda_0)) &= \gamma \chi'_2(-0, \lambda_0) - \chi'_2(+0, \lambda_0) \\
&= -\chi'_2(+0, \lambda_0)
\end{aligned} \tag{5.4.29}$$

elde edilir. Şimdi bulunan 5.4.14 - 5.4.29 eşitlikleri 5.4.13 determinantında yerlerine yazılırsa,

$$\begin{vmatrix}
0 & \omega_1(\lambda_0) & 0 & 0 \\
0 & 0 & \omega_2(\lambda_0) & 0 \\
\delta\Phi_1(-0, \lambda_0) & \delta\chi_1(-0, \lambda_0) & -\Phi_2(+0, \lambda_0) & -\chi_2(+0, \lambda_0) \\
\gamma\Phi'_1(-0, \lambda_0) & \gamma\chi'_1(-0, \lambda_0) & -\Phi'_2(+0, \lambda_0) & -\chi'_2(+0, \lambda_0)
\end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \omega_1(\lambda_0)\omega_2(\lambda_0) \begin{vmatrix} \delta\Phi_1(-0, \lambda_0) & -\chi_2(+0, \lambda_0) \\ \gamma\Phi'_1(-0, \lambda_0) & -\chi'_2(+0, \lambda_0) \end{vmatrix} = 0$$

elde edilir. Kabülümüz gereği $\omega_1(\lambda_0) \neq 0$ ve $\omega_2(\lambda_0) \neq 0$ eşitliklerini dikkate alınırsa son eşitlikteki determinant sıfır olur. O halde,

$$\gamma \chi_2(+0, \lambda_0) \Phi'_1(-0, \lambda_0) - \Phi_1(-0, \lambda_0) \chi'_2(+0, \lambda_0) = 0 \tag{5.4.30}$$

eşitliği bulunur. 5.4.3 ve 5.4.4 geçiş şartları gereği,

$$\chi_2(+0, \lambda_0) = \delta\chi_1(-0, \lambda_0) \text{ ve } \chi'_2(+0, \lambda_0) = \gamma \chi'_1(-0, \lambda_0)$$

yazılabilir. Bunlar 5.4.39' da yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$-\delta\gamma \omega_1(\lambda_0) = 0 \tag{5.4.31}$$

elde edilir. 5.4.10' dan ve $\delta, \gamma > 0$ olduğundan dolayı 5.4.31 eşitliğinden,

$$\omega(\lambda_0) = 0 \quad (5.4.32)$$

eşitliği elde edilir.

Bu ise $\omega(\lambda_0) \neq 0$ olduğu kabulüyle çelişir. Bu durumda verilen sınır-değer-geçiş probleminin özdeğerleri $\omega(\lambda)$ fonksiyonun sıfır yerlerinden ibarettir.

5.4.2 Karakteristik Fonksiyonun Asimptotik Davranışları

Bölüm 5.5.1' de araştırılan problemin özdeğerleri $\omega(\lambda)$ fonksiyonunun sıfır yerlerinden ibaret olduğu için öncelikle $\omega(\lambda)$ fonksiyonunun asimptotik davranışı incelenecek ve daha sonra bu asimptotik ifadeden yararlanarak problemimizin özdeğerleri için asimptotik formüller elde edilecektir.

Teorem 5.4.2. $\lambda = s^2$, $s = \sigma + it$, $Im s = t$ olmak üzere $\omega(\lambda)$ karakteristik fonksiyonu için aşağıdaki asimptotik eşitlik sağlanır.

$$\omega(\lambda) = -\frac{1}{2} (\delta + \gamma) s \sin(2s) + O(e^{2|t|}) \quad (5.4.33)$$

İspat: $\omega(\lambda)$ fonksiyonunu x değişkeninden bağımsız olduğu için,

$$\begin{aligned} \omega(\lambda) &= \omega_2(\lambda) = W(\Phi_2(x, \lambda), \chi_2(x, \lambda)) \\ &= W(\Phi_2(1, \lambda), \chi_2(1, \lambda)) \\ &= \Phi_2(1, \lambda) \chi_2'(1, \lambda) - \Phi_2'(1, \lambda) \chi_2(1, \lambda) \end{aligned} \quad (5.4.34)$$

biçiminde yazılabilir. $\chi_2(x, \lambda)$ fonksiyonu çözümü olduğu problemin başlangıç şartlarını sağladığından dolayı,

$$\chi_2(1, \lambda) = 1 \quad (5.4.35)$$

$$\chi_2'(1, \lambda) = \lambda = s^2 \quad (5.4.36)$$

sağlanır. Bulunan bu değerler ve $\Phi_2(1, \lambda)$ ile $\Phi_2(1, \lambda)'$ nin asimptotik ifadelerinden elde edilen,

$$\begin{aligned}\Phi_2(1, \lambda) &= -\frac{1}{s}\delta \sin s \cos s - \frac{1}{s}\gamma \cos s \sin s \\ &+ O\left(\frac{1}{|s|^2} e^{2|t|}\right), \quad |\lambda| \longrightarrow \infty\end{aligned}\quad (5.4.37)$$

$$\begin{aligned}\Phi_2'(1, \lambda) &= \delta \sin^2 s - \gamma \cos^2 s \\ &+ O\left(\frac{1}{|s|} e^{2|t|}\right), \quad |\lambda| \longrightarrow \infty\end{aligned}\quad (5.4.38)$$

ifadeleri 5.4.34' de yerine koyulursa,

$$\begin{aligned}\omega(\lambda) &= (\Phi_2(1, \lambda)\chi_2'(1, \lambda) - \Phi_2'(1, \lambda)\chi_2(1, \lambda)) \\ &= s^2 \left[-\delta \frac{1}{s} \sin s \cos s + \gamma \frac{1}{s} \cos s \sin s \right] + O\left(\frac{1}{|s|^2} e^{2|t|}\right) \\ &- \left[\delta \sin^2 s - \gamma \cos^2 s + O\left(\frac{1}{|s|} e^{2|t|}\right) \right]\end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlik düzenlenirse,

$$\begin{aligned}\omega(\lambda) &= [-s [\delta \sin s \cos s + \gamma \sin s \cos s] + O(e^{2|t|})] \\ &- \left[\delta \sin^2 s - \gamma \cos^2 s + O\left(\frac{1}{|s|} e^{2|t|}\right) \right]\end{aligned}\quad (5.4.39)$$

elde edilir.

$$- [\sin^2(s) - \gamma \cos^2(s)] = O(e^{2|t|})$$

yazılabilir. Bu durumda 5.4.39 eşitliği

$$\omega(\lambda) = -\frac{1}{2}(\delta + \gamma)s \sin 2s + O(e^{2|t|})$$

şeklinde yazılabilir. Böylece $\omega(\lambda)$ sınır fonksiyonunun asimptotik eşitliği elde edilir.

Teorem 5.4.3. 5.4.1 – 5.4.5 sınır-değer-geçiş probleminin özdeğerleri için $\lambda_n \geq K$, $n = 0, 1, 2, \dots$ olacak şekilde K reel sayısı vardır. Yani özdeğerler aşağıdan sınırlıdır.

İspat: 5.4.33 asimptotik eşitliği için durumu araştıralım. Bu durumda 5.4.33 ifadesinde $s = it$, ($t > 0$) yazılırsa,

$$\omega(-t^2) = (\delta + \gamma)t \sinh t \cosh t + O(e^{2t}) \quad (5.4.40)$$

eşitliği elde edilir. $\delta\gamma > 0$ (aynı işaretli) olduğundan dolayı 5.4.40 eşitliğinden,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(-t^2) = \infty \quad (5.4.41)$$

olduğu açıkça görülebilir. Bundan dolayı $t > t_0$ olduğunda $\omega(-t^2) \neq 0$ olacak şekilde $t_0 > 0$ sayısı bulunur. Dolayısıyla $\lambda < -t_0^2$ için $\omega(\lambda) \neq 0$ olacaktır. Buna göre $K = t_0^2$ olmak üzere $\lambda_n > K$ dır. Buda ispatı tamamlar.

5.5 Özdeğerler İçin Asimptotik Davranışlar

Bir önceki bölümde $\omega(\lambda)$ sınır fonksiyonun asimptotik davranışı incelenmişti. Bu bölümde 5.4.1 – 5.4.5 probleminin özdeğerleri ile $\omega(\lambda)$ sınır fonksiyonun sıfır yerleri çakışık olduğundan $\omega(\lambda)$ sınır fonksiyonun sıfır yerlerinin asimptotiği araştırılacaktır. Bunun için daha önce elde ettiğimiz,

$$\omega(\lambda) = -\frac{1}{2}(\delta + \gamma)s \sin 2s + O(e^{2|t|})$$

asimptotik ifadedeki ilk terim $\widetilde{\omega}_1(\lambda)$ ile, ikinci terim ise $\widetilde{\omega}_2(\lambda)$ ile gösterilirse,

$$\widetilde{\omega}_1(\lambda) = -\frac{1}{2}(\delta + \gamma)s \sin(2s) \quad (5.5.1)$$

$$\widetilde{\omega}_2(\lambda) = \omega(\lambda) - \widetilde{\omega}_1(\lambda) = O(e^{2|t|}) \quad (5.5.2)$$

yazılabilir. Buradan,

$$\omega(\lambda) = \widetilde{\omega}_1(\lambda) + \widetilde{\omega}_2(\lambda) \quad (5.5.3)$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Kompleks analizden iyi bilinen Rouché Teoreminden yararlanmakla $\widetilde{\omega}_1(\lambda)$ fonksiyonunun

sıfır yeri katı sayıda yazılırsa, $\widetilde{\omega}_1(\lambda) = \widetilde{\omega}_1(s^2)$ fonksiyonunun sıfırları s -değişkeninin fonksiyonu olarak

$$\dots, -\frac{3\pi}{2}, -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \dots \quad (5.5.4)$$

şeklinde sıralanır. Kompleks s-düzleminde,

$$\left\{ s = \sigma + it \in \mathbb{C} : |\sigma| \leq \frac{\pi}{2}(n + \frac{1}{2}), |t| \leq \frac{\pi}{2}(n + \frac{1}{2}), n = 0, 1, 2, \dots \right\} \quad (5.5.5)$$

bölgesinin sınırını Γ_n ile gösterilsin. Kompleks analizden iyi bilinen,

$$|\sin s| = \sqrt{\sinh^2 t + \sin^2 \sigma}$$

eşitliğinden ve bu eşitlikten elde edilen

$$\sqrt{\sinh^2 t + 1} \geq |\sin s| \geq |\sin ht|$$

ve

$$|\sin s| \sim \frac{1}{2} e^{|t|}, |t| \longrightarrow \infty$$

özelliklerinden yararlanmakla,

$$|\widetilde{\omega}_1(\lambda)| = \left| -\frac{1}{2} (\delta + \gamma) s \sin 2s \right|$$

$$|\widetilde{\omega}_1(\lambda)| \sim \frac{1}{4} |\delta + \gamma| |t| e^{2|t|}, |t| \longrightarrow \infty \quad (5.5.6)$$

elde edilir. Ayrıca en az bir $M > 0$ vardır öyleki,

$$|\widetilde{\omega}_2(\lambda)| \leq M e^{2|t|}$$

yazılabilir. Burada n 'nin yeteri kadar büyük değerlerinde ($n \geq n_0$ için) $s \in \Gamma_n$ olduğunda,

$$|\widetilde{\omega}_1(\lambda)| > |\widetilde{\omega}_2(\lambda)|, s \in \Gamma_n, n \geq n_0 \quad (5.5.7)$$

eşitsizliği sağlanır. O halde $n \geq n_0$ için $s \in \Gamma_n$ olmak üzere $|\widetilde{\omega}_1(\lambda)| > |\widetilde{\omega}_2(\lambda)|$ eşitsizliğini sağlayan $\widetilde{\omega}_1(\lambda)$ ve $\widetilde{\omega}_2(\lambda)$ fonksiyonlarına Rouché teoremi uygulanarak bu teoremin gereği,

$$\widetilde{\omega}_0(\lambda) = \widetilde{\omega}_1(\lambda) + \widetilde{\omega}_2(\lambda)$$

fonksiyonunun Γ_n eğrisi içinde kalan sıfır yerlerinin sayısıyla, $\widetilde{\omega}_1(\lambda)$ fonksiyonunun Γ_n eğrisi içinde kalan sıfır yerlerinin sayısı eşittir. 5.5.4 ifadesinden de anlaşılacabileceği gibi $\widetilde{\omega}_1(\lambda)$ fonksiyonunun Γ_n eğrisi içinde kalan sıfır yerlerinin sayısının $2(n+1) = 2n+2$ sayıda sıfır yeri olduğu açıktır.

$\widetilde{\omega}_1(\lambda) = \widetilde{\omega}_1(s^2)$ ve $\widetilde{\omega}(\lambda) = \widetilde{\omega}(s^2)$ fonksiyonların herbiri $|s|$ - değişkeninin çift fonksiyonları olduğundan, $\widetilde{\omega}(\lambda)$ fonksiyonunun her sıfır yerine karşılık $\widetilde{\omega}(s^2)$ fonksiyonunun iki tane sıfır yeri oluşacağından ve ayrıca $\widetilde{\omega}(s^2)$ ve $\widetilde{\omega}_1(s^2)$ fonksiyonlarının bütün sıfır yerleri reel eksen üzerinde olduğundan sadece pozitif reel eksende yerleşen sıfır yerlerini incelemek yeterli olur. $\widetilde{\omega}_1(s^2)$ fonksiyonunun pozitif reel eksen üzerindeki sıfır yerleri,

$$\widetilde{s}_0 = 0, \widetilde{s}_1 = \frac{\pi}{2}, \widetilde{s}_2 = \pi, \widetilde{s}_3 = \frac{3\pi}{2}, \dots, \widetilde{s}_n = \frac{n\pi}{2} \quad (5.5.8)$$

şeklinde sıralansın. $\widetilde{\omega}(s^2)$ fonksiyonunun pozitif reel eksendeki sıfır yerleri ise, $s_0 < s_1 < s_2 < s_3 < s_4 < \dots$ şeklinde sıralansın. Rouché Teoremi gereği $n \geq n_0$ için,

$$\frac{\pi}{2}(n - \frac{1}{2}) < s < \frac{\pi}{2}(n + \frac{1}{2}) \quad (5.5.9)$$

aralıklarının her birinde $\widetilde{\omega}(s^2)$ fonksiyonunun bir tek s_n - sıfır yeri bulunur. Yani, $n \geq n_0$ için

$$\frac{\pi}{2}(n - \frac{1}{2}) < s_n < \frac{\pi}{2}(n + \frac{1}{2}) \quad (5.5.10)$$

sağlanır. 5.5.8 ve 5.5.10 ifadelerinden; $n \geq n_0$ için

$$|s_n - \widetilde{s}_n| < \frac{\pi}{4} \quad (5.5.11)$$

elde edilir.

$$\delta_n := s_n - \widetilde{s}_n$$

gösteriminden yararlanırsa, $n \geq n_0$ için

$$s_n = \frac{n\pi}{2} + \delta_n, \quad |\delta_n| < \frac{\pi}{4} \quad (5.5.12)$$

bulunur. Şimdi $\{\delta_n\}$ dizisini asimptotik olarak değerlendirelim. 5.4.33 ifadesinde s yerine s_n yazılırsa,

$$s_n \sin(2s_n) = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (5.5.13)$$

elde edilir. Diğer taraftanda 5.5.12 eşitliğinden dolayıda,

$$s_n = O(n)$$

olduğu açıktır. 5.5.12 ve 5.5.13' den,

$$\sin(2s_n) = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (5.5.14)$$

elde edilir. 5.5.12 ifadesi 5.5.14' de yerine yazılırsa,

$$\sin(n\pi + 2\delta_n) = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (5.5.15)$$

asimptotik eşitliği bulunur. Bilinen bazı trigonometrik özdeşliklerden yararlanarak

$$\sin(n\pi + 2\delta_n) = (-1)^n \sin(2\delta_n) \quad (5.5.16)$$

olduğu görülür. Son iki eşitlikten,

$$\sin(2\delta_n) = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (5.5.17)$$

asimptotik eşitliği elde edilir. $|\delta_n| < \frac{\pi}{4}$ olduğu için $|2\delta_n| < \frac{\pi}{2}$ yazılır. Buradan sonuncu eşitlikte $n \rightarrow \infty$ almakla limite geçerse,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2\delta_n) = 0 \quad (5.5.18)$$

elde edilir. Burada $|\delta_n| < \frac{\pi}{4}$ olduğu dikkate alınarak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0 \quad (5.5.19)$$

bulunur. Bu son iki ifadeden,

$$\sin(2\delta_n) \sim \delta_n, \quad n \longrightarrow \infty \quad (5.5.20)$$

elde edilir. 5.5.17 ve 5.5.20' den

$$\delta_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (5.5.21)$$

olduğu kolayca görülür. Bu son eşitlik 5.7.12' de yazılırsa

$$s_n = \frac{n\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (5.5.22)$$

asimptotik eşitliği bulunur.

Teorem 5.5.1. 5.4.1 – 5.4.5 probleminin özdeğerleri için,

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{4} + O(1) \quad (5.5.23)$$

asimptotik formülü geçerlidir.

5.6 Verilen Sınır-Değer-Geçiş Problemi ile Aynı Özdeğerlere Sahip Olan Lineer Diferansiyel Operatörün Kurulması

Bu bölümde 5.5.1 – 5.1.5 sınır-değer-geçiş problemine uygun Hilbert Uzayı ve bu uzayda özdeğerleri ile uygun özfonksiyonları araştırılan 5.1.1 – 5.1.5 probleminin özdeğerleri ve uygun özfonksiyonları ile çakışan lineer diferansiyel operatör kurulacaktır.

$L_2(-1, 0) \oplus L_2(0, 1)$ Hilbert uzayı ile kompleks sayıların Hilbert uzayı $\mathbb{C}$ ile gösterilsin.

$f(x) \in L_2(-1, 0) \oplus L_2(0, 1)$, $f_1 \in \mathbb{C}$ olmak üzere $F = \begin{pmatrix} f(x) \\ f_1 \end{pmatrix}$ iki bileşenli elamanların lineer uzayını ise $H = L_2(-1, 0) \oplus L_2(0, 1) \oplus \mathbb{C}$ ile gösterelim.

$$H = \left\{ F = \begin{pmatrix} f(x) \\ f_1 \end{pmatrix} : f(x) \in L_2(-1, 0) \oplus L_2(0, 1), f_1 \in \mathbb{C} \right\} \quad (5.6.1)$$

biçiminde olan direkt toplamdaki iç çarpımı aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$F = \begin{pmatrix} f(x) \\ f_1 \end{pmatrix} \in H, \quad G = \begin{pmatrix} g(x) \\ g_1 \end{pmatrix} \in H \quad \text{ve} \quad \delta, \gamma > 0 \quad \text{olmak üzere}$$

$$\langle F, G \rangle = \delta \gamma \int_{-1}^0 f(x) \overline{g(x)} dx + \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx + f_1 \overline{g_1} \quad (5.6.2)$$

eşitliği ile tanımlayalım. O halde H iç çarpım uzayının bir Hilbert Uzayı olacağı açıktır. Şimdi 5.1.1 – 5.1.5 probleminin özdeğerleri ve uygun özfonksiyonları ile çakışan A lineer operatörünü aşağıdaki biçimde tanımlayalım.

$$A : H \longrightarrow H \quad (5.6.3)$$

lineer operatörünün tanım kümesi

$$D(A) = \left\{ F = \begin{pmatrix} f(x) \\ f_1 \end{pmatrix} \in H : f(x) \text{ ve } f'(x) \text{ fonksiyonları } [-1, 0) \text{ ve } (0, 1] \right.$$

aralıklarında mutlak süreklidirler ve sonlu $f(\pm 0)$ ve $f'(\pm 0)$ limit

değerleri mevcuttur. $-f'' + q(x)f \in L_2(-1, 0) \oplus L_2(0, 1)$

$$f(-1) = 0, f(+0) = \delta f(-0), f'(+0) = \gamma f'(-0), f_1 = f(1) \} \quad (5.6.4)$$

olmak üzere

$$AF = \begin{pmatrix} -f'' + q(x)f \\ f'(1) \end{pmatrix} \quad (5.6.5)$$

eşitliğiyle tanımlansın. Burada $F = \begin{pmatrix} f(x) \\ f(1) \end{pmatrix} \in D(A)$ ve

$$AF = -f'' + q(x)f \quad (5.6.6)$$

dır. Bu durumda 5.1.1 – 5.1.5 ile verilen sınır-değer-geçiş problemi H uzayında

$$AF = \lambda F \quad (5.6.7)$$

operatör denklem biçiminde yazılabilir.

Gerçekten $F = \begin{pmatrix} f(x) \\ f(1) \end{pmatrix}$ ve $AF = \begin{pmatrix} -f'' + q(x)f \\ f'(1) \end{pmatrix}$ olduğundan

$$AF = \lambda F \implies \begin{pmatrix} -f'' + q(x)f \\ f'(1) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} f(x) \\ f(1) \end{pmatrix} \quad (5.6.8)$$

şeklinde yazılır. 5.6.8 eşitliği,

$$-f'' + q(x)f = \lambda f \quad (5.6.9)$$

$$f'(1) = \lambda f(1) \quad (5.6.10)$$

eşitlikleri biçiminde yazılabilir. Ayrıca $F = \begin{pmatrix} f(x) \\ f(1) \end{pmatrix} \in D(A)$ olduğu için,

$$f(-1) = 0 \quad (5.6.11)$$

$$f(+0) - \delta f(-0) = 0 \quad (5.6.12)$$

$$f'(+0) - \gamma f'(-0) = 0 \quad (5.6.13)$$

eşitlikleri sağlanır. 5.6.9 – 5.6.13 eşitlikleri birarada yazılırsa, 5.6.7 eşitliği ile eşdeğer olan aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$-f'' + q(x)f = \lambda f$$

$$f'(1) = \lambda f(1)$$

$$f(-1) = 0 \quad (5.6.14)$$

$$f(+0) - \delta f(-0) = 0$$

$$f'(+0) - \gamma f'(-0) = 0$$

Demek ki araştırdığımız 5.1.1 – 5.1.5 sınır-değer-geçiş problemi,

$$F = \begin{pmatrix} f(x) \\ f(1) \end{pmatrix} \implies AF = \lambda F \quad (5.6.15)$$

şeklinde yazılabilir. Bu nedenle A operatörün özdeğerleri ve uygun özfonksiyonları sırası ile 5.1.1 – 5.1.5 probleminin özdeğerleri ve özfonksiyonları olarak adlandırılır.

Teorem 5.6.1. $H := L_2(-1, 0) \oplus L_2(0, 1) \oplus \mathbb{C}$ Hilbert uzayında 5.6.4 – 5.6.5 eşitlikleri ile tanımlı A operatörü simetriktir.

İspat: $\forall F, G \in D(A) \subset H, F = \begin{pmatrix} f(x) \\ f_1 = f(1) \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} g(x) \\ g_1 = g(1) \end{pmatrix} \in H$ için

$$\langle AF, G \rangle_H = \langle F, AG \rangle_H \quad (5.6.16)$$

olduğu gösterilmelidir. Gerçekten H 'daki iç çarpım tanımına göre

$$\begin{aligned} \langle AF, G \rangle_H &= \delta\gamma \int_{-1}^0 (-f''(x) + q(x)f(x))\overline{g(x)}dx + \int_0^1 (-f''(x) + q(x)f(x))\overline{g(x)}dx \\ &\quad + f'(1)\overline{g(1)} \\ &= -\delta\gamma \int_{-1}^0 f''(x)\overline{g(x)}dx + \delta\gamma \int_{-1}^0 q(x)f(x)\overline{g(x)}dx \\ &\quad - \int_0^1 f''(x)\overline{g(x)}dx + \int_0^1 q(x)f(x)\overline{g(x)}dx + f'(1)\overline{g(1)} \end{aligned} \quad (5.6.17)$$

şeklinde yazılabilir.

$$\delta\gamma \int_{-1}^0 (-f''(x) + q(x)f(x))\overline{g(x)}dx = -\delta\gamma \int_{-1}^0 f''(x)\overline{g(x)}dx + \delta\gamma \int_{-1}^0 q(x)f(x)\overline{g(x)}dx$$

Herhangi aralıkta diferansiyellenebilir iki $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının Wronskiye'n'i

$$W(f, g; x) = f(x)g'(x) - g(x)f'(x)$$

tanımını kullanarak son eşitliğin sağ tarafındaki ilk integrale ard arda iki kere kısmi integrasyon uygulanıp işlemlere devam edilirse,

$$\begin{aligned}
&= -\delta\gamma \{f'(x)\bar{g}(x) \big|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 f'(x)\bar{g}'(x)dx\} + \delta\gamma \int_{-1}^0 q(x)f(x)\bar{g}(x)dx \\
&= \delta\gamma \int_{-1}^0 f'(x)\bar{g}'(x)dx + \delta\gamma \int_{-1}^0 q(x)f(x)\bar{g}(x)dx - \delta\gamma (f'(x)\bar{g}(x) \big|_{-1}^0) \\
&= \delta\gamma \{f(x)\bar{g}'(x) \big|_{-1}^0 - \delta\gamma \int_{-1}^0 f(x)\bar{g}''(x)dx\} + \delta\gamma \int_{-1}^0 q(x)f(x)\bar{g}(x)dx - \delta\gamma (f'(x)\bar{g}(x) \big|_{-1}^0) \\
&= \delta\gamma \int_{-1}^0 f(x)\bar{g}''(x)dx + \delta\gamma \int_{-1}^0 q(x)f(x)\bar{g}(x)dx + \delta\gamma \{f(-0)\bar{g}'(-0) - f(-1)\bar{g}'(-1)\} \\
&\quad - \delta\gamma \{f'(-0)\bar{g}(-0) - f'(-1)\bar{g}(-1)\} \\
&= -\delta\gamma \int_{-1}^0 f(x)\bar{g}''(x)dx + \delta\gamma \int_{-1}^0 q(x)f(x)\bar{g}(x)dx + \delta\gamma W(f, \bar{g}; -0) \\
&\quad - \delta\gamma W(f, \bar{g}; -1) \\
&= \delta\gamma \int_{-1}^0 f(x)(-\bar{g}''(x) + q(x)\bar{g}(x))dx + \delta\gamma W(f, \bar{g}; -0) - \delta\gamma W(f, \bar{g}; -1) \tag{5.6.18}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\int_0^1 (-f''(x) + q(x)f(x))\bar{g}(x)dx = - \int_0^1 f''(x)\bar{g}(x)dx + \int_0^1 q(x)f(x)\bar{g}(x)dx$$

benzer şekilde eşitliğin sağındaki ilk terime iki kere arda arda kısmi integrasyon uygulanıp gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
&= -\{f'(x)\bar{g}(x) \big|_0^1 - \int_0^1 f'(x)\bar{g}'(x)dx\} + \int_0^1 q(x)f(x)\bar{g}(x)dx \\
&= \int_0^1 f'(x)\bar{g}'(x)dx + \int_0^1 q(x)f(x)\bar{g}(x)dx - (f'(x)\bar{g}(x) \big|_0^1) \\
&= \{f(x)\bar{g}'(x) \big|_0^1 - \int_0^1 f(x)\bar{g}''(x)dx\} + \int_0^1 q(x)f(x)\bar{g}(x)dx - (f'(x)\bar{g}(x) \big|_0^1) \\
&= - \int_0^1 f(x)\bar{g}''(x)dx + \int_0^1 q(x)f(x)\bar{g}(x)dx + \{f(1)\bar{g}'(1) - f(+0)\bar{g}'(+0)\} \\
&\quad - \{f'(1)\bar{g}(1) - f'(+0)\bar{g}(+0)\} \\
&= - \int_0^1 f(x)\bar{g}''(x)dx + \int_0^1 q(x)f(x)\bar{g}(x)dx + f(1)\bar{g}'(1) - f'(1)\bar{g}(1) - W(f, \bar{g}; +0) \\
&= \int_0^1 f(x)(-\bar{g}''(x) + q(x)\bar{g}(x))dx + f(1)\bar{g}'(1) - f'(1)\bar{g}(1) - W(f, \bar{g}; +0) \tag{5.6.19}
\end{aligned}$$

bulunur. 5.6.18 ve 5.6.19 , 5.6.17' de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\langle AF, G \rangle_H &= \delta\gamma \int_{-1}^0 f(x)(-g''(x) + q(x)g(x))dx + \int_0^1 f(x)(-g''(x) + q(x)g(x))dx \\
&+ f(1)\overline{g'(1)} - W(f, \bar{g}; +0) + \delta\gamma W(f, \bar{g}; -0) \\
&- \delta\gamma W(f, \bar{g}; -1)
\end{aligned} \tag{5.6.20}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\langle F, AG \rangle_H &= \delta\gamma \int_{-1}^0 f(x)(-g''(x) + q(x)g(x))dx + \int_0^1 f(x)(-g''(x) + q(x)g(x))dx \\
&+ f(1)\overline{g'(1)}
\end{aligned} \tag{5.6.21}$$

yazılabilir. Buradan 5.6.20 ve 5.6.21 ifadeleri taraf tarafa çıkartılırsa,

$$\begin{aligned}
\langle AF, G \rangle_H - \langle F, AG \rangle_H &= \delta\gamma W(f, \bar{g}; -0) - \delta\gamma W(f, \bar{g}; -1) \\
&- W(f, \bar{g}; +0)
\end{aligned} \tag{5.6.22}$$

eşitliği bulunur.

A operatörünün simetrik olduğunu söyleyebilmek için 5.6.22 eşitliğinin sağ tarafının sıfıra eşit olduğunu göstermemiz gerekir. Bunun için $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları A operatörünün tanım bölgesinin elemanları olduklarından sınır şartlarını kullanarak

$$W(f, \bar{g}; -1) = 0 \text{ ve } W(f, \bar{g}; +0) = \delta\gamma W(f, \bar{g}; -0)$$

ifadeleri bulunur. Bu ifadeler 5.6.22' de yerine yazılırsa sağ tarafın sıfıra eşit olduğu görülür. Sonuç itibariyle

$$\langle AF, G \rangle_H = \langle F, AG \rangle_H \tag{5.6.23}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu da bize A operatörünün simetrik olduğunu gösterir. Bu ise ispatı tamamlar.

5.7 Sınır-Değer-Geçiş Probleminin Rezolventinin ve Green Fonksiyonunun Kurulması

5.7.1 Sınır-Değer-Geçiş Probleminin Rezolventi ve Green Fonksiyonu

Bu kesimde verilmiş 5.1.1 – 5.1.5 sınır-değer-geçiş problemine uygun olan rezolventi kurulacaktır. Bunun için

$$L(u) := -u'' + [q(x) - \lambda]u = f(x), \quad x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \quad (5.7.1)$$

homojen olmayan diferansiyel denkleminin

$$L_1(u) := u(-1) = 0 \quad (5.7.2)$$

$$L_2(u) := \lambda u(1) - u'(1) = 0 \quad (5.7.3)$$

$$L_3(u) := u(+0) - \delta u(-0) = 0 \quad (5.7.4)$$

$$L_4(u) := u'(+0) - \gamma u'(-0) = 0 \quad (5.7.5)$$

homojen sınır-değer-geçiş şartlarını sağlayan çözümü (bu çözüm rezolvent olarak adlandırılır) bulunacaktır. Bunun için önce aşağıdaki Lemma ispat edilecektir.

Lemma 5.7.1. Eğer $\lambda = \lambda_0 \in \mathbb{C}$ sayısı 5.1.1 – 5.1.5 sınır-değer-geçiş probleminin özdeğeri değilse, o halde 5.7.1 – 5.7.5 probleminin $\lambda = \lambda_0$ için çözümü varsa tektir.

İspat: Aksini kabul edelim. Yani kabul edelim ki, $u_1(x, \lambda_0)$ ve $u_2(x, \lambda_0)$ fonksiyonları 5.7.1 – 5.7.5 probleminin $\lambda = \lambda_0$ değerine uygun farklı çözümleri olsun. O halde

$$u_0(x, \lambda_0) := u_1(x, \lambda_0) - u_2(x, \lambda_0) \neq 0$$

fonksiyonunun uygun homojen 5.1.1 – 5.1.5 sınır-değer-geçiş probleminin çözümü olacağı açıktır. Buna göre $u_0(x, \lambda_0)$ fonksiyonu 5.1.1 – 5.1.5 sınır-değer-geçiş probleminin özfonksiyonudur. Bu ise $\lambda = \lambda_0$ sayısının özdeğer olduğu anlamına gelir. Bu ise kabülle çelişir. Buda ispatı tamamlar.

Şimdi $f \in L_2(-1, 0) \oplus L_2(0, 1)$ ve özdeğer olmayan λ için 5.7.1 – 5.7.5 probleminin $u(x, \lambda)$ çözümünü, $\Phi(x, \lambda)$ ve $\chi(x, \lambda)$ çözümleri ile ifade eden formül çıkarılacaktır. Bunun için aşağıdaki yardımcı önerme verilecektir.

Lemma 5.7.2. $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısı özdeğer değilse o halde 5.1.1 diferansiyel denkleminin 5.1.4 – 5.1.5 geçiş şartlarını sağlayan her $u(x, \lambda)$ çözümü

$$u(x, \lambda) = c_1 \Phi(x, \lambda) + c_2 \chi(x, \lambda) \quad (5.7.6)$$

biçiminde ifade edilebilir. Yani, 5.1.1, 5.1.4, 5.1.5 probleminin genel çözümü 5.7.6 biçimindedir. (Burada c_1 ve c_2) katsayıları keyfi sabitlerdir.

İspat: λ özdeğer olmadığı için ($i = 1, 2$) olmak üzere

$$\omega_i(\lambda) = W(\Phi_i(x, \lambda), \chi_i(x, \lambda)) \neq 0, \quad i = 1, 2$$

Wronskiyenleri sıfırdan farklı olduğu için $\Phi_i(x, \lambda)$ ve $\chi_i(x, \lambda)$ fonksiyonları lineer bağımsızdır. Bu nedenle 5.1.1 denkleminin genel çözümü c_1, c_2, d_1, d_2 katsayıları keyfi sabitler olmak üzere

$$u(x, \lambda) = \begin{cases} c_1 \Phi_1(x, \lambda) + c_2 \chi_1(x, \lambda), & x \in [-1, 0) \\ d_1 \Phi_2(x, \lambda) + d_2 \chi_2(x, \lambda), & x \in (0, 1] \end{cases} \quad (5.7.7)$$

biçiminde yazılabilir. Bu ifade 5.1.4 – 5.1.5 geçiş şartlarında yazılırsa,

$$\begin{aligned} \delta(c_1 \Phi_1(0, \lambda) + c_2 \chi_1(0, \lambda)) &= d_1 \Phi_2(0, \lambda) + d_2 \chi_2(0, \lambda) \\ \gamma(c_1 \Phi_1'(0, \lambda) + c_2 \chi_1'(0, \lambda)) &= d_1 \Phi_2'(0, \lambda) + d_2 \chi_2'(0, \lambda) \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. $\Phi_i(x, \lambda)$ ve $\chi_i(x, \lambda)$, $i = 1, 2$ fonksiyonlarının 5.1.4 – 5.1.5 geçiş şartlarını sağladıkları dikkate alınırsa son iki eşitlikten,

$$\begin{aligned} (c_1 - d_1) \Phi_2(0, \lambda) + (c_2 - d_2) \chi_2(0, \lambda) &= 0 \\ (c_1 - d_1) \Phi_2'(0, \lambda) + (c_2 - d_2) \chi_2'(0, \lambda) &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikler $(c_1 - d_1)$ ve $(c_2 - d_2)$ değişkenlerine göre lineer denklem sistemidir. Bu sistem de

$$W(\Phi_2(0, \lambda), \chi_2(0, \lambda)) = \omega_2(\lambda) \neq 0$$

olduğu için bir tek

$$(c_1 - d_1) = 0, (c_2 - d_2) = 0$$

çözümü bulunur. Şimdi 5.7.7' de $c_1 = d_1 =: C$, $c_2 = d_2 =: D$ yazarsak,

$$u(x, \lambda) = C\Phi(x, \lambda) + D\chi(x, \lambda), \quad x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Şimdi

$$\omega(x, \lambda) = W(\Phi(x, \lambda), \chi(x, \lambda)) = \begin{cases} \omega_1(\lambda), & x \in [-1, 0) \\ \frac{1}{\delta\gamma} \omega_2(\lambda), & x \in (0, 1] \end{cases} \quad (5.7.8)$$

gösterimini dahil ederek aşağıdaki teoremi ispat edelim.

Teorem 5.7.1. Özdeğer olmayan her $\lambda \in \mathbb{C}$ için 5.7.1 – 5.7.5 homojen olmayan sınır-değer-geçiş probleminin çözümü vardır ve tektir. Ayrıca bu çözüm için

$$\begin{aligned} u(x, \lambda) &= \frac{\chi(x, \lambda)}{\omega(\lambda)} \int_{-1}^x \Phi(y, \lambda) f(y) dy + \frac{\Phi(x, \lambda)}{\omega(\lambda)} \int_x^1 \chi(y, \lambda) f(y) dy \\ &+ \begin{cases} \frac{1}{\delta\gamma} \frac{\Phi_1(x, \lambda)}{\omega(\lambda)} \int_0^1 \chi_2(y, \lambda) f(y) dy, & x \in [-1, 0) \\ \frac{\chi_2(x, \lambda)}{\omega(\lambda)} \int_{-1}^0 \Phi_1(y, \lambda) f(y) dy, & x \in (0, 1] \end{cases} \end{aligned} \quad (5.7.9)$$

formülü geçerlidir.

İspat: Özdeğerlerden farklı olan $\forall \lambda \in \mathcal{C}$ için 5.1.1 diferansiyel denkleminin $\Phi_i(x, \lambda), \chi_i(x, \lambda)$ çözümleri lineer bağımsız olduklarından bu denklemin genel çözümü,

$$u(x, \lambda) = \begin{cases} c_1 \Phi_1(x, \lambda) + d_1 \chi_1(x, \lambda), & x \in [-1, 0) \\ c_2 \Phi_2(x, \lambda) + d_2 \chi_2(x, \lambda), & x \in (0, 1] \end{cases} \quad (5.7.10)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada c_1, c_2, d_1, d_2 keyfi sabitlerdir.

Sabitin değişimi yöntemini kullanarak homojen olmayan

$$-u'' + q(x)u = \lambda u - f(x) \quad (5.7.11)$$

diferansiyel denkleminin genel çözümünü,

$$u(x, \lambda) = \begin{cases} c_1 \Phi_1(x, \lambda) + d_1 \chi_1(x, \lambda), & x \in [-1, 0) \\ c_2 \Phi_2(x, \lambda) + d_2 \chi_2(x, \lambda), & x \in (0, 1] \end{cases} \quad (5.7.12)$$

şeklinde arayalım. Sabitin değişimi yöntemi gereği sırasıyla, $c_1(x, \lambda)$ ve $d_1(x, \lambda)$ fonksiyonları $x \in [-1, 0)$ için,

$$\begin{cases} c_1'(x, \lambda) \Phi_1(x, \lambda) + d_1'(x, \lambda) \chi_1(x, \lambda) = 0 \\ c_1'(x, \lambda) \Phi_1'(x, \lambda) + d_1'(x, \lambda) \chi_1'(x, \lambda) = f(x) \end{cases} \quad (5.7.13)$$

denklem sisteminin, $c_2(x, \lambda)$ ve $d_2(x, \lambda)$ fonksiyonları da $x \in (0, 1]$ için,

$$\begin{cases} c_2'(x, \lambda) \Phi_2(x, \lambda) + d_2'(x, \lambda) \chi_2(x, \lambda) = 0 \\ c_2'(x, \lambda) \Phi_2'(x, \lambda) + d_2'(x, \lambda) \chi_2'(x, \lambda) = f(x) \end{cases} \quad (5.7.14)$$

denklem sisteminin çözümünden bulunacaktır. λ özdeğer olmadığından,

$$W(\Phi_1(\lambda), \chi_1(\lambda); x) = \begin{vmatrix} \Phi_1(x, \lambda) & \chi_1(x, \lambda) \\ \Phi_1'(x, \lambda) & \chi_1'(x, \lambda) \end{vmatrix} \neq 0$$

ve

$$W(\Phi_2(\lambda), \chi_2(\lambda); x) = \begin{vmatrix} \Phi_2(x, \lambda) & \chi_2(x, \lambda) \\ \Phi_2'(x, \lambda) & \chi_2'(x, \lambda) \end{vmatrix} \neq 0$$

olur. O halde 5.7.13 ve 5.7.14 denklem sistemlerinin herbiri tek çözüme sahiptir. Bu çözümler $x \in [-1, 0)$ için c_1 ve d_1 , $x \in (0, 1]$ için c_2 ve d_2 olmak üzere,

$$\begin{aligned} c_1'(x, \lambda) &= -\frac{1}{\omega_1(\lambda)} f(x)\chi_1(x, \lambda) \implies c_1(x, \lambda) = \frac{1}{\omega_1(\lambda)} \int_x^0 f(y)\chi_1(y, \lambda)dy + c_1(\lambda) \\ d_1'(x, \lambda) &= \frac{1}{\omega_1(\lambda)} f(x)\Phi_1(x, \lambda) \implies d_1(x, \lambda) = \frac{1}{\omega_1(\lambda)} \int_{-1}^x f(y)\Phi_1(y, \lambda)dy + d_1(\lambda) \\ c_2'(x, \lambda) &= -\frac{1}{\omega_2(\lambda)} f(x)\chi_2(x, \lambda) \implies c_2(x, \lambda) = \frac{1}{\omega_2(\lambda)} \int_x^1 f(y)\chi_2(y, \lambda)dy + c_2(\lambda) \\ d_2'(x, \lambda) &= \frac{1}{\omega_2(\lambda)} f(x)\Phi_2(x, \lambda) \implies d_2(x, \lambda) = \frac{1}{\omega_2(\lambda)} \int_0^x f(y)\Phi_2(y, \lambda)dy + d_2(\lambda) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bulduğumuz bu değerler 5.7.12' de yerine yazılırsa,

$$u(x, \lambda) = \begin{cases} \frac{\Phi_1(x, \lambda)}{\omega_1(\lambda)} \int_x^0 f(y)\chi_1(y, \lambda)dy + \frac{\chi_1(x, \lambda)}{\omega_1(\lambda)} \int_{-1}^x f(y)\Phi_1(y, \lambda)dy \\ \quad + c_1(\lambda)\Phi_1(x, \lambda) + d_1(\lambda)\chi_1(x, \lambda), & x \in [-1, 0) \\ \frac{\Phi_2(x, \lambda)}{\omega_2(\lambda)} \int_x^1 f(y)\chi_2(y, \lambda)dy + \frac{\chi_2(x, \lambda)}{\omega_2(\lambda)} \int_0^x f(y)\Phi_2(y, \lambda)dy \\ \quad + c_2(\lambda)\Phi_2(x, \lambda) + d_2(\lambda)\chi_2(x, \lambda), & x \in (0, 1] \end{cases} \quad (5.7.15)$$

homojen olmayan 5.7.11 diferansiyel denkleminin genel çözümü elde edilmektedir.

Bulduğuz bu son ifade diferansiyellenirse,

$$u'(x, \lambda) = \begin{cases} \frac{\Phi_1'(x, \lambda)}{\omega_1(\lambda)} \int_x^0 f(y)\chi_1(y, \lambda)dy + \frac{\chi_1'(x, \lambda)}{\omega_1(\lambda)} \int_{-1}^x f(y)\Phi_1(y, \lambda)dy \\ \quad + c_1(\lambda)\Phi_1'(x, \lambda) + d_1(\lambda)\chi_1'(x, \lambda), & x \in [-1, 0) \\ \frac{\Phi_2'(x, \lambda)}{\omega_2(\lambda)} \int_x^1 f(y)\chi_2(y, \lambda)dy + \frac{\chi_2'(x, \lambda)}{\omega_2(\lambda)} \int_0^x f(y)\Phi_2(y, \lambda)dy \\ \quad + c_2(\lambda)\Phi_2'(x, \lambda) + d_2(\lambda)\chi_2'(x, \lambda), & x \in (0, 1] \end{cases} \quad (5.7.16)$$

ifadesi bulunur. Son iki eşitliği kullanmakla $Li(u)$, $i = 1, 2, 3, 4$ için aşağıdaki eşitlikler elde edilir. $i = 1$ için,

$$\begin{aligned} L_1(u) &= u(-1) \\ &= \frac{\Phi_1(-1, \lambda)}{\omega_1(\lambda)} \int_{-1}^0 f(y)\chi_1(y, \lambda)dy \\ &\quad + c_1(\lambda)\Phi_1(-1, \lambda) + d_1(\lambda)\chi_1(-1, \lambda) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} u(-1) &= \Phi_1(-1, \lambda) = 0 \\ u'(-1) &= -1 \implies \Phi_1'(-1, \lambda) = -1 \end{aligned}$$

olup bu değerler bir üstteki eşitlikte yerine yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} L_1(u) &= d_1(\lambda)\chi_1(-1, \lambda) \\ &= d_1(\lambda)(\Phi_1(-1, \lambda)\chi_1'(-1, \lambda) - \Phi_1'(-1, \lambda)\chi_1(-1, \lambda)) \\ &= d_1(\lambda)\omega_1(\lambda) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5.7.17}$$

bulunur. $\omega_1(\lambda) \neq 0$ olduğundan,

$$d_1(\lambda) = 0 \tag{5.7.18}$$

bulunur.

Benzer şekilde $i = 2$ için,

$$\begin{aligned} L_2(u) &= \lambda u(1) - u'(1) \\ &= \frac{1}{\omega_2(\lambda)} \{ \lambda \chi_2(1, \lambda) - \chi_2'(1, \lambda) \} \int_0^1 f(y) \Phi_2(y, \lambda) dy \\ &+ c_2(\lambda) \{ \lambda \Phi_2(1, \lambda) - \Phi_2'(1, \lambda) \} \\ &+ d_2(\lambda) \{ \lambda \chi_2(1, \lambda) - \chi_2'(1, \lambda) \} \end{aligned} \tag{5.7.19}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} u(1) &= 1 \implies \chi_2(1, \lambda) = 1 \\ u'(1) &= \lambda \implies \chi_2'(1, \lambda) = \lambda \end{aligned}$$

eşitliklerinden dolayı $\Phi_2(x, \lambda)$ ve $\chi_2(x, \lambda)$ aşağıdaki denklemleri sağlar.

$$\lambda \chi_2(1, \lambda) - \chi_2'(1, \lambda) = 0 \tag{5.7.20}$$

$$\lambda \Phi_2(1, \lambda) - \Phi_2'(1, \lambda) = \omega_2(\lambda) \tag{5.7.21}$$

5.7.20 – 5.7.21 eşitlikleri 5.7.19’ da yerine yazılırsa,

$$L_2(u) = c_2(\lambda)\omega_2(\lambda) = 0 \quad (5.7.22)$$

formülü bulunur. $\omega_2(\lambda) \neq 0$ olduğundan

$$c_2(\lambda) = 0 \quad (5.7.23)$$

bulunur. Yine benzer şekilde $i = 3, 4$ için,

$$\begin{aligned} L_3(u) &= u(+0) - \delta u(-0) \\ &= \frac{\Phi_2(+0, \lambda)}{\omega_2(\lambda)} \int_0^1 f(y)\chi_2(y, \lambda)dy + c_2(\lambda)\Phi_2(+0, \lambda) + d_2(\lambda)\chi_2(+0, \lambda) \\ &\quad - \delta \left\{ \frac{\chi_1(-0, \lambda)}{\omega_1(\lambda)} \int_{-1}^0 f(y)\Phi_1(y, \lambda)dy - c_1(\lambda)\Phi_1(-0, \lambda) - d_1(\lambda)\chi_1(-0, \lambda) \right\} \\ &= \frac{\Phi_2(+0, \lambda)}{\omega_2(\lambda)} \int_0^1 f(y)\chi_2(y, \lambda)dy - \frac{\chi_1(-0, \lambda)}{\omega_1(\lambda)} \int_{-1}^0 f(y)\Phi_1(y, \lambda)dy \\ &\quad - c_1(\lambda)\Phi_1(-0, \lambda) + d_2(\lambda)\chi_2(+0, \lambda) \end{aligned} \quad (5.7.24)$$

$$\begin{aligned} L_4(u) &= u'(+0) - \gamma u'(-0) \\ &= \frac{\Phi_2'(+0, \lambda)}{\omega_2(\lambda)} \int_0^1 f(y)\chi_2(y, \lambda)dy + d_2(\lambda)\chi_2'(+0, \lambda) \\ &\quad - \gamma \left\{ \frac{\chi_1'(-0, \lambda)}{\omega_1(\lambda)} \int_{-1}^0 f(y)\Phi_1(y, \lambda)dy - \gamma c_1(\lambda)\Phi_1'(-0, \lambda) \right\} \end{aligned} \quad (5.7.25)$$

bulunur. Bulduğumuz bu $L_i(u) = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$ eşitlikleri dikkate alınırsa $c_1(\lambda)$ ve $d_2(\lambda)$ sabitlerini bulmak için aşağıdaki lineer denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} \delta c_1(\lambda)\Phi_1(-0, \lambda) - d_2(\lambda)\chi_2(+0, \lambda) &= \frac{\Phi_2(+0, \lambda)}{\omega_2(\lambda)} \int_0^1 f(y)\chi_2(y, \lambda)dy \\ &\quad - \delta \frac{\chi_1(-0, \lambda)}{\omega_1(\lambda)} \int_{-1}^0 f(y)\Phi_1(y, \lambda)dy \\ \gamma c_1(\lambda)\Phi_1'(-0, \lambda) - d_2(\lambda)\chi_2'(+0, \lambda) &= \frac{\Phi_2'(+0, \lambda)}{\omega_2(\lambda)} \int_0^1 f(y)\chi_2(y, \lambda)dy \\ &\quad - \gamma \frac{\chi_1'(-0, \lambda)}{\omega_1(\lambda)} \int_{-1}^0 f(y)\Phi_1(y, \lambda)dy \end{aligned}$$

$\phi_i(x, \lambda)$ ve $\chi_i(x, \lambda)$ ($i=1,2$) çözüm fonksiyonlarının tanımından yararlanılırsa lineer denklem sisteminin determinanı için

$$\begin{vmatrix} \delta \Phi_1(-0, \lambda) & -\chi_2(+0, \lambda) \\ \gamma \Phi_1'(-0, \lambda) & -\chi_2'(+0, \lambda) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Phi_2(+0, \lambda) & -\chi_2(+0, \lambda) \\ \Phi_2'(+0, \lambda) & -\chi_2'(+0, \lambda) \end{vmatrix} = -\omega_2(\lambda) \neq 0$$

eşitliği bulunur. Bu determinant sıfırdan farklı olduğu için lineer denklem sisteminin bir tek çözümü bulunur. Bu sistem çözülürse, $c_1(\lambda)$ ve $d_2(\lambda)$ katsayıları için,

$$c_1(\lambda) = \frac{1}{\omega_2(\lambda)} \int_0^1 f(y) \chi_2(y, \lambda) dy \quad (5.7.26)$$

$$d_2(\lambda) = \frac{1}{\omega_1(\lambda)} \int_{-1}^0 f(y) \Phi_1(y, \lambda) dy \quad (5.7.27)$$

denklemler elde edilir. Sonuç itibariyle 5.7.18, 5.7.23, 5.7.26, 5.7.27 değerleri 5.7.15' de yerine yazılırsa,

$$u(x, \lambda) = \begin{cases} \frac{\Phi_1(x, \lambda)}{\omega_1(\lambda)} \int_x^0 f(y) \chi_1(y, \lambda) dy + \frac{\chi_1(x, \lambda)}{\omega_1(\lambda)} \int_{-1}^x f(y) \Phi_1(y, \lambda) dy \\ \quad + \frac{\Phi_1(x, \lambda)}{\omega_2(\lambda)} \int_0^1 f(y) \chi_2(y, \lambda) dy, & x \in [-1, 0) \\ \frac{\Phi_2(x, \lambda)}{\omega_2(\lambda)} \int_x^1 f(y) \chi_2(y, \lambda) dy + \frac{\chi_2(x, \lambda)}{\omega_2(\lambda)} \int_0^x f(y) \Phi_2(y, \lambda) dy \\ \quad + \frac{\chi_2(x, \lambda)}{\omega_1(\lambda)} \int_{-1}^0 f(y) \Phi_1(y, \lambda) dy, & x \in (0, 1] \end{cases} \quad (5.7.28)$$

formülü bulunur.

Buradan,

$$\Phi(x, \lambda) = \begin{cases} \Phi_1(x, \lambda), & x \in [-1, 0) \\ \Phi_2(x, \lambda), & x \in (0, 1] \end{cases}$$

$$\chi(x, \lambda) = \begin{cases} \chi_1(x, \lambda), & x \in [-1, 0) \\ \chi_2(x, \lambda), & x \in (0, 1] \end{cases}$$

tanımlarını kullanarak 5.7.28 formülü aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir.

$$\begin{aligned}
 u(x, \lambda) &= \frac{\chi(x, \lambda)}{\omega(\lambda)} \int_{-1}^x \Phi(y, \lambda) f(y) dy + \frac{\Phi(x, \lambda)}{\omega(\lambda)} \int_x^1 \chi(y, \lambda) f(y) dy \\
 &+ \begin{cases} \frac{1}{\delta\gamma} \frac{\Phi_1(x, \lambda)}{\omega(\lambda)} \int_0^1 \chi_2(y, \lambda) f(y) dy, & x \in [-1, 0) \\ \frac{\chi_2(x, \lambda)}{\omega(\lambda)} \int_{-1}^0 \Phi_1(y, \lambda) f(y) dy, & x \in (0, 1] \end{cases}
 \end{aligned} \tag{5.7.29}$$

Böylece sınır-değer-geçiş probleminin rezolventi elde edilir. 5.7.29 formülünden Green fonksiyonu kolayca bulunabilir. Yani;

$$G(x, y; \lambda) = \begin{cases} \frac{\chi(x, \lambda) \Phi(y, \lambda)}{\omega(\lambda)}, & -1 \leq y \leq x \leq 1, x.y > 0 \\ \frac{\chi_2(x, \lambda) \Phi_1(y, \lambda)}{\omega(\lambda)}, & -1 \leq y \leq x \leq 1, x.y < 0 \\ \frac{\Phi(x, \lambda) \chi(y, \lambda)}{\omega(\lambda)}, & -1 \leq x \leq y \leq 1, x.y > 0 \\ \frac{1}{\delta\gamma} \frac{\Phi_1(x, \lambda) \chi_2(y, \lambda)}{\omega(\lambda)}, & -1 \leq x \leq y \leq 1, x.y < 0 \end{cases} \tag{5.7.30}$$

ile gösterilirse $u(x, \lambda)$ rezolventi

$$u(x, y) = \int_{-1}^1 G(x, y; \lambda) f(y) dy \tag{5.7.31}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece Green fonksiyonunun 5.7.30 formülü ile ifade edilebileceği gösterilmiş oldu.

5.7.2 Rezolvent Operatörü

Bu kesimde her yerde $\lambda \in \mathbb{C}$ parametresinin özdeğer olmadığı kabul edilecektir. Ayrıca bu kesimde 5.1.1–5.1.5 sınır-değer-geçiş probleminin ürettiği ve 5.6.3–5.6.5 eşitlikleri ile tanımlı

$$A : H \longrightarrow H$$

simetrik operatörünün rezolventi olan

$$R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1} : H \longrightarrow H$$

operatörü kurulacaktır. Bunun için $F = \begin{pmatrix} f(x) \\ f_1 \end{pmatrix} \in H$ elemanı için

$$(\lambda I - A)U = F \quad (5.7.32)$$

operatör denkleminin her $F \in H$ için $V = \begin{pmatrix} v(x) \\ v(1) \end{pmatrix} \in D(A)$ çözümünün mevcut olup olmadığını, mevcut ise tek olup olmadığını, çözümün mevcut ve tek olduğu durumda ise $R(\lambda, A) : H \longrightarrow H$ rezolvent operatörünün sınırlı olup olmadığının araştırılması gerekir. 5.7.32 operatör denklemi ile hem denklemi, hem de sınır şartları homojen olmayan,

$$L(u) := -u'' + q(x)u = \lambda u - f(x), \quad x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \quad (5.7.33)$$

$$L_1(u) := u(-1) = 0 \quad (5.7.34)$$

$$L_2(u) := u'(1) - \lambda u(1) = f_1 \quad (5.7.35)$$

$$L_3(u) := u(+0) - \delta u(-0) = 0 \quad (5.7.36)$$

$$L_4(u) := u'(+0) - \gamma u'(-0) = 0 \quad (5.7.37)$$

sınır-değer-geçiş problemi eşdeğerdir. Önceki kesimde 5.7.33 denkleminin genel çözümünün 5.7.15 formülü ile verildiği ispatlanmıştı. 5.7.33–5.7.37 sınır-değer-geçiş probleminin çözümünü bulmak için 5.7.15 ifadesini 5.7.34–5.7.37 sınır ve geçiş şartlarında yerine yazarak, 5.7.17, 5.7.19, 5.7.24 ve 5.7.25 formüllerinden yararlanılarak bir önceki kesime benzer şekilde $c_1(\lambda)$, $d_1(\lambda)$, $c_2(\lambda)$, $d_2(\lambda)$ sabitleri bulunur. $L_1(u) = 0$

sınır şartından 5.7.18 gereği

$$d_1(\lambda) = 0 \quad (5.7.38)$$

$L_2(u) = f_1$ sınır şartından 5.7.22 gereği

$$c_2(\lambda)\omega_2(\lambda) = f_1 \implies c_2(\lambda) = \frac{f_1}{\omega_2(\lambda)} \quad (5.7.39)$$

bulunur. Bulunan son iki eşitliği 5.7.15' de yerine yazıp, 5.7.24–5.7.25 formüllerinden de yararlanılırsa, $c_1(\lambda)$ ve $d_2(\lambda)$ katsayıları için aşağıdaki lineer denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} \delta c_1(\lambda)\Phi_1(-0, \lambda) - d_2(\lambda)\chi_2(+0, \lambda) &= \frac{\Phi_2(+0, \lambda)}{\omega_2(\lambda)} \int_0^1 f(y)\chi_2(y, \lambda)dy \\ &- \frac{\chi_1(-0, \lambda)}{\omega_1(\lambda)} \int_{-1}^0 f(y)\Phi_1(y, \lambda)dy + \frac{f_1}{\omega_2(\lambda)} \frac{\Phi_2(0, \lambda)}{\omega_2(\lambda)} \\ \gamma c_1(\lambda)\Phi_1'(-0, \lambda) - d_2(\lambda)\chi_2'(+0, \lambda) &= \frac{\Phi_2'(+0, \lambda)}{\omega_2(\lambda)} \int_0^1 f(y)\chi_2(y, \lambda)dy \\ &- \gamma \frac{\chi_1'(-0, \lambda)}{\omega_1(\lambda)} \int_{-1}^0 f(y)\Phi_1(y, \lambda)dy + \frac{f_1}{\omega_2(\lambda)} \frac{\Phi_2'(0, \lambda)}{\omega_2(\lambda)} \end{aligned}$$

Bu lineer denklem sisteminin determinanı,

$$\begin{vmatrix} \delta\Phi_1(-0, \lambda) & -\chi_2(+0, \lambda) \\ \gamma\Phi_1'(-0, \lambda) & -\chi_2'(+0, \lambda) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Phi_2(+0, \lambda) & -\chi_2(+0, \lambda) \\ \Phi_2'(+0, \lambda) & -\chi_2'(+0, \lambda) \end{vmatrix} = -\omega_2(\lambda) \neq 0$$

sıfırdan farklı olduğundan çözümü vardır ve tektir. Eğer bu lineer denklem sistemi, bölüm 5.7.1' dekine benzer şekilde çözülürse, $c_1(\lambda)$ ve $d_2(\lambda)$ katsayıları için aşağıdaki denklemler

$$c_1(\lambda) = \frac{1}{\omega_2(\lambda)} \int_0^1 f(y)\chi_2(y, \lambda)dy + \frac{f_1}{\omega_2(\lambda)} \quad (5.7.40)$$

$$d_2(\lambda) = \frac{1}{\omega_1(\lambda)} \int_{-1}^0 f(y)\Phi_1(y, \lambda)dy \quad (5.7.41)$$

bulunur. $c_1(\lambda)$, $d_1(\lambda)$, $c_2(\lambda)$ ve $d_2(\lambda)$ katsayıları 5.7.15' de yerlerine yazılırsa 5.7.33 – 5.7.37 problemin çözümünün mevcut olduğu, tek olduğu ve

$$v(x, \lambda) = \begin{cases} \frac{\Phi_1(x, \lambda)}{\omega_1(\lambda)} \int_x^0 f(y) \chi_1(y, \lambda) dy + \frac{\chi_1(x, \lambda)}{\omega_1(\lambda)} \int_{-1}^x f(y) \Phi_1(y, \lambda) dy \\ + \frac{\Phi_1(x, \lambda)}{\omega_2(\lambda)} \int_0^1 f(y) \chi_2(y, \lambda) dy + \frac{f_1 \Phi_1(x, \lambda)}{\omega_2(\lambda)}, & x \in [-1, 0) \\ \frac{\Phi_2(x, \lambda)}{\omega_2(\lambda)} \int_x^1 f(y) \chi_2(y, \lambda) dy + \frac{\chi_2(x, \lambda)}{\omega_2(\lambda)} \int_0^x f(y) \Phi_2(y, \lambda) dy \\ + \frac{\chi_2(x, \lambda)}{\omega_1(\lambda)} \int_{-1}^0 f(y) \Phi_1(y, \lambda) dy + \frac{f_1 \Phi_2(x, \lambda)}{\omega_2(\lambda)}, & x \in (0, 1] \end{cases} \quad (5.7.42)$$

biçiminde ifade edilebileceği gösterilmiş olur. 5.7.29 ve 5.7.31 ifadeleri dikkate alınarak sonuncu eşitlik

$$V(x, \lambda) = \int_{-1}^1 G(x, y; \lambda) f(y) dy + \frac{f_1}{\omega_2(\lambda)} \Phi(x, \lambda) \quad (5.7.43)$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 5.7.2. Eğer λ özdeğer değilse her $F \in H$ için 5.7.32 operatör denkleminin bir tek

$$R(\lambda; A)F = V = \begin{pmatrix} v(x) \\ v(1) \end{pmatrix} \in D(A)$$

çözümü bulunur ve her $F \in D(A)$ için

$$R(\lambda, A) (\lambda I - A) F = F \quad (5.7.44)$$

eşitliği sağlanır.

Lemma 5.7.3. Her $F \in H$ ve $Im \lambda \neq 0$ olan her reel olmayan λ sayısı için

$$R(\lambda; A) : H \longrightarrow H$$

operatörünün $D(R(\lambda, A))$ tanım bölgesi bütün H uzayıdır. $Im \lambda \neq 0$ olan her λ için bu operatör sınırlıdır ve

$$\|R(\lambda; A)F\| \leq |Im \lambda|^{-1} \|F\| \quad (5.7.45)$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat: $Im\lambda \neq 0$ olsun. Bir önceki teorem gereği $R(\lambda; A)$ operatörünün tanım bölgesi bütün H uzayıdır. Keyfi $F \in H$ alalım ve

$$V = R(\lambda; A) F \quad (5.7.46)$$

ile gösterelim. O halde

$$\lambda V - AV = F \implies AV = \lambda V - F$$

eşitliği sağlanacaktır. Buradan

$$\langle AV, V \rangle_H = \langle \lambda V - F, V \rangle_H = \lambda \langle V, V \rangle_H - \langle F, V \rangle_H$$

$$\langle V, AV \rangle_H = \langle V, \lambda V - F \rangle_H = \bar{\lambda} \langle V, V \rangle_H - \langle V, F \rangle_H$$

eşitlikleri elde edilir.

A operatörünün simetrik olduğunu dikkate alarak sonuncu iki eşitlik taraftara çıkarılırsa,

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \langle V, V \rangle_H = \langle F, V \rangle_H - \langle V, F \rangle_H$$

elde edilir. Buradan

$$|Im\lambda| \|V\|_H^2 = |Im\langle F, V \rangle_H| \quad (5.7.47)$$

yazılır. Diğer taraftan Cauchy-Schwartz eşitsizliği gereği,

$$\begin{aligned} |Im\langle F, V \rangle_H| &\leq |\langle F, V \rangle_H| \\ &\leq \|F\|_H \|V\|_H \end{aligned} \quad (5.7.48)$$

elde edilir. 5.7.47 ve 5.7.48' den

$$\|R(\lambda, A)F\|_H = \|V\|_H \leq \frac{1}{|Im\lambda|} \|F\|_H$$

eşitsizliği bulunur. Böylece 5.7.45 ifadesi ispatlanmış olur.

Lemma 5.7.4. 5.1.1 – 5.1.5 sınır-değer-geçiş problemine uygun olan ve 5.6.4 – 5.6.6 eşitlikleri ile tanımlı olan

$$A : H \longrightarrow H$$

operatörü kendine eşleniktir.

İspat: Bir önceki Lemma 5.7.5’ de $Im\lambda \neq 0$ olacak şekilde her $\lambda \in \mathbb{C}$ kompleks sayısının A operatörünün regüler değeri olacağı gösterilmişti. O halde $\lambda = \pm i$ için $(iI - A)$ ve $(-iI - A)$ operatörlerinin değer bölgeleri olan $R(iI - A)$ ve $R(-iI - A)$ lineer alt uzayları bütün H Hilbert uzayı ile çakışacak. Dolayısıyla

$$N_i := (R(iI - A))^\perp, \quad N_{-i} := (R(-iI - A))^\perp$$

ortogonal tümleyenlerinin her biri sadece ve sadece $0 \in H$ sıfır elemanından ibaret olacak. Dolayısıyla A^* eşlenik operatörünün $D(A^*)$ tanım kümesi için Teorem 3.5.1 gereği

$$D(A^*) = D(A)$$

eşitliği sağlanır. Böylece A operatörünün kendine eşlenik olduğu ispatlanmış oldu.

5.8 Diferansiyel-Operatör Sınır-Değer-Geçiş Probleminin İfadesi, İzomorfluğu, Rezolventinin Normunun Değerlendirilmesi, Spektrumu ve Özdeğerlerinin Asimptotiği

5.8.1 Giriş

Bu bölümde $B : L_2(-1, 0) \oplus L_2(0, 1) \longrightarrow L_2(-1, 0) \oplus L_2(0, 1)$ soyut lineer operatör olmak üzere,

$$-u''(x) + q(x)u(x) + (Bu)(x) = \lambda u(x), \quad x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \quad (5.8.1)$$

diferansiyel operatör denkleminde,

$$u(-1) = 0 \quad (5.8.2)$$

$$u'(1) = \lambda u(1) \quad (5.8.3)$$

sınır şartlarından ve

$$u(+0) = \delta u(-0) \quad (5.8.4)$$

$$u'(+0) = \gamma u'(-0) \quad (5.8.5)$$

geçiş şartlarından oluşan sınır-değer-geçiş problemi incelenecektir. Burada $q(x)$ $[-1, 0)$ ve $(0, 1]$ aralıklarının herbirinde sürekli fonksiyon, B ise soyut (genel) lineer operatördür. Özel olarak seçtiğimiz sınıflardan alınan B operatörleri için bu problemin diskret spektrumlu olduğu gösterilecek, spektrumu içeren açılar bulunacak, kompleks düzlemin

bu açılarda dışında kalan bölgesinde verilmiş 5.8.1 – 5.8.5 probleminin rezolventinin normu değerlendirilecek ve ayrıca bu problemin özdeğerlerinin asimptotiği bulunacaktır. Bu problemin klasik Sturm-Liouville Problemlerinden üç esas farkı vardır;

- 1) Verilen denklem sadece diferansiyel ifadeleri değil ayrıca B soyut (genel) lineer operatörünü içermektedir.
- 2) Verilen aralıkta süreksizlik noktasının bulunması ve bu süreksizlik noktasında problemin geçiş şartlarına birlikte verilmesidir.
- 3) λ kompleks özdeğer parametresinin sadece denklemde değil aynı zamanda sınır şartlarının birinde de bulunmasıdır.

5.8.2 Sınır-Değer-Geçiş Probleminin İzomorfluğu

$D(B) \supset W_2^2(-1, 0) \oplus W_2^2(0, 1)$ olduğunu kabul ederek, verilmiş problemin $H = L_2(-1, 0) \oplus L_2(0, 1) \oplus \mathbb{C}$ Hilbert uzayında ürettiği operatörü A ile gösterelim. Yani

$$A : H \longrightarrow H$$

$$\begin{aligned} D(A) = \{ U = \begin{pmatrix} u(x) \\ u_1 \end{pmatrix} : u(x) \in W_2^2(-1, 0) \oplus W_2^2(0, 1), \\ u(-1) = 0, u(+0) = \delta u(-0), \\ u'(+0) = \gamma u'(-0), u_1 = u(1) \} \end{aligned} \quad (5.8.6)$$

olmak üzere

$$AU = \begin{pmatrix} -u'' + qu + Bu \\ u'(1) \end{pmatrix} \quad (5.8.7)$$

eşitlikleriyle tanımlayalım. $F = \begin{pmatrix} f(x) \\ f_1 \end{pmatrix} \in H$ olmak üzere

$$(\lambda I - A)\Phi = F \quad (5.8.8)$$

denklemini göz önüne alalım ve bu denklem için ileride kullanılacak olan

$$\begin{aligned}
 H_1 = \{ U = \begin{pmatrix} u(x) \\ u_1 \end{pmatrix} : u(x) \in W_2^2(-1, 0) \oplus W_2^2(0, 1), \\
 u(-1) = 0, u(+0) = \delta u(-0), \\
 u'(+0) = \gamma u'(-0), u_1 = u(1) \}
 \end{aligned} \tag{5.8.9}$$

lineer uzayını tanımlayalım. Bu uzayda

$$U = \begin{pmatrix} u(x) \\ u(1) \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} v(x) \\ v(1) \end{pmatrix} \in H_1$$

elemanlarının iç çarpımını

$$\langle U, V \rangle_{H_1} = \langle u, v \rangle_{W_2^2(-1,0)} + \langle u, v \rangle_{W_2^2(0,1)} \tag{5.8.10}$$

ile tanımlayalım.

Lemma 5.8.1. H_1 bir Hilbert uzayıdır.

İspat: Önce 5.8.10 formülünün gerçekten bir iç çarpım olduğunu gösterelim. Bunun için iç çarpım aksiyomlarından sadece

$$\langle U, U \rangle_{H_1} = 0 \implies U = 0$$

aksiyomunun sağlandığını göstermek yeterlidir. (İç çarpımın diğer aksiyomlarının sağlandığı açıktır.)

$$\begin{aligned}
 \langle U, U \rangle_{H_1} = 0 &\implies \langle u, u \rangle_{W_2^2(-1,0)} + \langle u, u \rangle_{W_2^2(0,1)} = 0 \\
 &\implies \langle u, u \rangle_{W_2^2(-1,0)} = 0 \wedge \langle u, u \rangle_{W_2^2(0,1)} = 0 \\
 &\implies u(x) \equiv 0 \wedge u(x) \equiv 0 \\
 &\implies u(-1) = 0 \wedge u(1) = 0 \implies U = 0
 \end{aligned}$$

Şimdi H_1 iç çarpım uzayının Hilbert uzayı olduğu gösterilecektir. Bunun için H_1 uzayından alınan keyfi bir Cauchy dizisinin yakınsak olduğunu göstermek gerekir. O halde keyfi $\{U_n\}$, $n = 1, 2, \dots$ cauchy dizisi alalım ve bu dizinin yakınsak olduğunu gösterelim.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n, m > n_0(\varepsilon)$ için,

$$\begin{aligned} \|U_n - U_m\|_{H_1}^2 &= \langle U_n - U_m, U_n - U_m \rangle_{H_1} \\ &= \langle u_n - u_m, u_n - u_m \rangle_{W_2^2(-1,0)} + \langle u_n - u_m, u_n - u_m \rangle_{W_2^2(0,1)} \\ &= \|u_n - u_m\|_{W_2^2(-1,0)}^2 + \|u_n - u_m\|_{W_2^2(0,1)}^2 \end{aligned}$$

olur. $\{U_n\}$ cauchy dizisi olduğundan dolayı,

$$\|U_n - U_m\|_{H_1}^2 \longrightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty)$$

olup buradan,

$$\|u_n - u_m\|_{W_2^2(-1,0)}^2 \longrightarrow 0 \quad \text{ve} \quad \|u_n - u_m\|_{W_2^2(0,1)}^2 \longrightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty)$$

elde edilir. Bu ise $\{U_n\} \in H_1$, $n = 1, 2, \dots$ cauchy dizisinin $W_2^2(-1, 0)$ ve $W_2^2(0, 1)$ Hilbert uzaylarında da bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. $W_2^2(-1, 0)$ ve $W_2^2(0, 1)$ Hilbert uzayı olduklarından,

$$\|u_n - u_0^*\|_{W_2^2(-1,0)}^2 \longrightarrow 0 \quad \text{ve} \quad \|u_n - u_0^{**}\|_{W_2^2(0,1)}^2 \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

olacak şekilde $u_0^* \in W_2^2(-1, 0)$ ve $u_0^{**} \in W_2^2(0, 1)$ fonksiyonları mevcuttur.

$$W_2^2(-1, 0) \subset C[-1, 0] \quad \text{ve} \quad W_2^2(0, 1) \subset C[0, 1]$$

gömülmeleri sürekli olduğundan dolayı,

$$\|u_n - u_0^*\|_{C[-1,0]}^2 \longrightarrow 0 \quad \text{ve} \quad \|u_n - u_0^{**}\|_{C[0,1]}^2 \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

olur. Buradan da

$$\|U_n - U_m\|_{H_1}^2 = \|u_n - u_0^*\|_{C[-1,0]}^2 + \|u_n - u_0^{**}\|_{C[0,1]}^2 \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

yazılır.

$$u_0 =: \begin{cases} u_0^*, & x \in [-1, 0) \\ u_0^{**}, & x \in (0, 1] \end{cases} \quad (5.8.11)$$

ile tanımlanırsa,

$$\begin{aligned} u_n(-1) &\longrightarrow u_0(-1) = 0 \\ u_n(1) &\longrightarrow u_0(1) \quad (n \rightarrow \infty) \\ u_n(+0) - \delta u_n(-0) &\longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \\ u_n'(+0) - \gamma u_n'(-0) &\longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

yazılır. Buna göre $u_0(-1) = 0$,

$$U_0 = \begin{pmatrix} u_0(x) \\ u_0(1) \end{pmatrix} \in H_1 \text{ ve } \|U_n - U_0\|_{H_1} \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (5.8.12)$$

elde edilir. Buda ispatı tamamlar.

Teorem 5.8.1. Eğer B operatörü $W_2^2(-1, 0) \oplus W_2^2(0, 1)$ uzayından $L_2(-1, 0) \oplus L_2(0, 1)$ uzayına kompakt dönüşüm ise, o halde $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için öyle $R_\varepsilon > 0$, $C_\varepsilon > 0$ sayıları bulunur ki

$$\varepsilon < \arg \lambda < 2\pi - \varepsilon \text{ ve } |\lambda| > R_\varepsilon$$

şartlarını sağlayan her $\lambda \in \mathbb{C}$ kompleks sayısı için $\lambda I - A$ dönüşümü H_1 ile H uzayı arasında izomorfizmadır ve 5.8.8 denkleminin $\Phi = \Phi(\lambda)$ çözümleri için

$$\|\Phi\|_{H_1} + |\lambda| \|\Phi\|_H \leq C_\varepsilon \|F\|_H \quad (5.8.13)$$

Coersitiv eşitsizliği sağlanır.

İspat: $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ için $\lambda I - A : H_1 \longrightarrow H$ lineer operatörünün sürekli olduğu açıktır. Önce

$$F = \begin{pmatrix} f(x) \\ f_1 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} u(x) \\ u(1) \end{pmatrix}$$

gösterimlerinden yararlanarak 5.8.8 operatör denklemini,

$$\begin{aligned}\lambda u(x) + u''(x) - (Bu)(x) &= f(x) \\ u(-1) &= 0 \\ \lambda u(1) - u'(1) &= f(1) \\ u(+0) - \delta u(-0) &= 0 \\ u'(+0) - \gamma u'(-0) &= 0\end{aligned}$$

sınır-değer-geçiş problemi şeklinde yazalım ve $G_\varepsilon = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \varepsilon < |\arg \lambda| < 2\pi - \varepsilon\}$

$$\begin{aligned}L(\lambda)u &:= \lambda u(x) + u''(x) - (B_1 u)(x) \\ L_1(\lambda)u &:= u(-1) \\ L_2(\lambda)u &:= \lambda u(1) - u'(1) \\ L_3(\lambda)u &:= u(+0) - \delta u(-0) \\ L_4(\lambda)u &:= u'(+0) - \gamma u'(-0)\end{aligned}$$

ile gösterilim. O halde (S.Y. Yakubov ve Y.Y. Yakubov' un , 1999) makalesindeki Teorem 3.4. gereği öyle $R_\varepsilon > 0$ sayısı mevcuttur ki, $\lambda \in G_\varepsilon$ ve $|\lambda| > R_\varepsilon$ şartlarını sağlayan λ kompleks sayıları için,

$$\tilde{L}(\lambda) : u \rightarrow (L(\lambda)u, L_1(\lambda)u)$$

operatörü

$$\begin{aligned}\{u : u \in W_2^2(-1, 0) \oplus W_2^2(0, 1), u(-1) = 0, u(+0) = \delta u(-0), u'(+0) = \gamma u'(-0) \\ \|u\|_{H_1} = \|u\|_{W_2^2(-1, 0)} + \|u\|_{W_2^2(0, 1)}\}\end{aligned}$$

uzayı ile $L_2(-1, 0) \oplus L_2(0, 1) \oplus \mathbb{C}$ arasında izomorfizmadır. Buradan $\lambda I - A$ lineer dönüşümünün H_1 ile H arasında izomorfizma olduğu görülür. Yine (S.Y. Yakubov ve Y.Y. Yakubov' un , 1999) makalesindeki 3.20 eşitsizliğinden direkt olarak talep olunan 5.8.13 eşitliğide elde edilmiş olur. Bu ise Teoremin ispatını tamamlar.

Sonuç 5.8.1. $B : W_2^2(-1, 0) \oplus W_2^2(0, 1) \longrightarrow L_2(-1, 0) \oplus L_2(0, 1)$ operatörü kompakt ise, $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için öyle $R_\varepsilon > 0$, sayısı bulunur ki

$$\varepsilon < |\arg \lambda| < 2\pi - \varepsilon \quad \text{ve} \quad |\lambda| > R_\varepsilon \quad (5.8.14)$$

şartlarını sağlayan her $\lambda \in \mathbb{C}$ kompleks sayısı 5.8.7 ile tanımlı olan A operatörünün regüler değeridir ve A operatörünün $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ rezolventi için 5.8.14 bölgesinde (açısında)

$$\|R(\lambda, A)\| \leq C_\varepsilon |\lambda|^{-1} \quad (5.8.15)$$

eşitsizliği sağlanır ve $R(\lambda, A)$ rezolvent operatörü H uzayından H_1 uzayına sınırlıdır.

Teorem 5.8.2. 5.8.1 Teoreminin şartları sağlandığında verilmiş $\varepsilon > 0$ için $\lambda \in G_\varepsilon$ ve $|\lambda| > R_\varepsilon$ şartlarını sağlayan $\forall \lambda \in \mathcal{C}$ için

$$R(\lambda, A) : H \longrightarrow H$$

rezolvent operatörü kompakttır.

İspat: Önce $H_1 \subset H$ gömülmesinin kompakt olduğunu görelim.

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n(x) \\ u_n(1) \end{pmatrix} \in H_1, \quad n = 1, 2, \dots$$

keyfi sınırlı bir dizi olsun. O halde $u_n(x) \in W_2^2(-1, 0) \oplus W_2^2(0, 1)$, $n = 1, 2, \dots$ dizisi sınırlı olur.

$$W_2^2(-1, 0) \subset L_2(-1, 0) \quad \text{ve} \quad W_2^2(0, 1) \subset L_2(0, 1)$$

gömülmeleri kompakt olduğundan (S.Y. Yakubov ve Y.Y. Yakubov, 1999)

$$\delta\gamma \|u_{n_k} - u_0^*\|_{L_2(-1,0)} \longrightarrow 0 \quad \text{ve} \quad \|u_{n_k} - u_0^{**}\|_{L_2(0,1)} \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (5.8.16)$$

olacak şekilde $u_0(x) \in L_2(-1, 0) \oplus L_2(0, 1)$ fonksiyonu ve $\{u_{n_k}\}$ alt dizisi bulunur.

Diğer taraftan

$$W_2^2(-1, 0) \subset C[-1, 0] \quad \text{ve} \quad W_2^2(0, 1) \subset C[0, 1]$$

gömülmeleri sürekli olduklarından $\{u_{n_k}(1)\}$ sayısal dizisi sınırlıdır. O halde bu dizinin yakınsak olan $\{u_{n_{k_s}}(1)\}$ alt dizisi mevcuttur. Bu alt diziyi

$$\lim_{s \rightarrow \infty} u_{n_{k_s}}(1) = u_1 \quad (5.8.17)$$

ile gösterelim ve $U_0 = \begin{pmatrix} u_0(x) \\ u_1 \end{pmatrix} \in H$, $u_0(x) = \begin{pmatrix} u_0^*(x), x \in [-1, 0) \\ u_0^{**}(x), x \in (0, 1] \end{pmatrix}$ elemanını gözönüne alalım. Bu takdirde

$$\|U_{n_{k_s}} - U_0\|_H^2 = \delta\gamma \|u_{n_{k_s}} - u_0^*\|_{L_2(-1,0)}^2 + \|u_{n_{k_s}} - u_0^{**}\|_{L_2(0,1)}^2 + |u_{n_{k_s}}(1) - u_1|_{\mathbb{C}}^2$$

olduğu için 5.8.16 – 5.8.17 ifadeleri gereği

$$\|U_{n_{k_s}} - U_0\|_H^2 \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (5.8.18)$$

yazılır. Demek ki $H_1 \subset H$ gömülmesi kompaktır. Diğer taraftan (S.Y. Yakubov ve Y.Y. Yakubov ,1999) makalesindeki Teorem 3.4 gereği $R(\lambda, A)$ operatörü $\lambda \in G_\epsilon$ ve $|\lambda| > R_\epsilon$ için H - dan H_1 - ya sınırlıdır. Dolayısıyla $R(\lambda, A)$ operatörü H - dan H - a kompaktır.

Sonuç 5.8.2. 5.8.6 – 5.8.7 eşitlikleriyle tanımlı A operatörü diskret spektrumludur.

5.8.3 Esas Diferansiyel Kısımına Göre Kompakt Olan Operatörle Etkilenmiş Sınır-Değer-Geçiş Probleminin Özdeğerlerinin Asimptotiği

5.8.1 – 5.8.5 sınır-değer-geçiş problemi verilsin. Önceki kısımda olduğu gibi $H := L_2(-1, 0) \oplus L_2(0, 1) \oplus \mathbb{C}$ olmak üzere

$$A : H \longrightarrow H$$

lineer operatörünü 5.8.6 – 5.8.7 eşitlikleri ile tanımlanmıştı.

$B_1 : H \longrightarrow H$

operatörünü ise $F = \begin{pmatrix} f(x) \\ f_1 \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$D(B_1) = D(A) \quad (5.8.19)$$

$$B_1 F = \begin{pmatrix} (Bf)(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.8.20)$$

eşitlikleri ile tanımlayalım. Bu takdirde 5.8.1 – 5.8.5 sınır-değer-geçiş problemi

$$(A + B_1)u = \lambda u \quad (5.8.21)$$

eşitliği şeklinde yazılabilir. Bu durumda 5.8.1 – 5.8.5 sınır-değer-geçiş probleminin özdeğerleri ile $A + B_1$ operatörünün özdeğerleri aynı olacağından $A + B_1$ operatörünün özdeğerleri incelenecektir.

Lemma 5.8.2. Eğer B_1 lineer operatörü sınır-değer-geçiş probleminin esas kısmının ürettiği A lineer operatörüne göre kompakt ise 5.8.1 – 5.8.5 sınır-değer-geçiş probleminin spektrumu diskrettir ve bu problemin Ψ_α^+ açısı içinde kalan ve $|\lambda_{1,\alpha}| \leq |\lambda_{2,\alpha}| \leq \dots$ olacak biçimde sıralanmış (her özdeğer katı sayıda yazılmıştır) $\lambda_{n,\alpha}$ özdeğerlerinin mutlak değerleri için,

$$|\lambda_{n,\alpha}| = 4\pi^2 n^2 + o(n^2) \ , \ n \longrightarrow \infty \quad (5.8.22)$$

İspat: A operatörünün kendine eşlenik olduğu Lemma 5.7.4 de ispatlanmıştı. Şimdi A operatörü için Teorem 3.13.4' in şartlarının sağlandığı gösterilecektir.

A operatörünün özdeğerleri için Teorem 5.5.1 de elde edilen,

$$S_n = \frac{\pi n}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (5.8.23)$$

asimptotik formül gereği,

$$\lambda_n = S_n^2 = \left(\frac{\pi n}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right)^2 \implies \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{4} + O(1) \quad (\lambda = s^2)$$

bulunur. Bu durumda $\alpha < O(1) < \beta$ olmak üzere

$$\frac{\pi^2 n^2}{4} + \alpha \leq \lambda_n \leq \frac{\pi^2 n^2}{4} + \beta$$

olacak şekilde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sayıları bulunur. Buradan,

$$\sum_{\frac{\pi^2 n^2}{4} + \beta \leq r} 1 \leq N_+(r, A) \leq \sum_{\frac{\pi^2 n^2}{4} + \alpha \leq r} 1 \quad (5.8.24)$$

elde edilir. Sonuncu eşitsizlikten,

$$\left[\left\lfloor \sqrt{\frac{4(r-\beta)}{\pi^2}} \right\rfloor \right] \leq N_+(r, A) \leq \left[\left\lfloor \sqrt{\frac{4(r-\alpha)}{\pi^2}} \right\rfloor \right] \implies$$

$$\left[\left\lfloor \frac{2}{\pi} \sqrt{r-\beta} \right\rfloor \right] \leq N_+(r, A) \leq \left[\left\lfloor \frac{2}{\pi} \sqrt{r-\alpha} \right\rfloor \right]$$

bulunur. Burada $\llbracket \cdot \rrbracket$ ile reel sayının tam değeri gösterilmiştir. Diğer taraftan her $M \in \mathbb{R}$ reel sayısı ve yeteri kadar büyük r pozitif reel sayısı için,

$$\sqrt{r-M} = \sqrt{r} \sqrt{1 - \frac{M}{r}} = \sqrt{r} \left(1 + O\left(\frac{1}{r}\right) \right) = \sqrt{r} + O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \longrightarrow \infty$$

asimptotik eşitliği sağlandığından sonuç itibariyle

$$N_+(r, A) = \frac{2\sqrt{r}}{\pi} + O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \longrightarrow \infty \quad (5.8.25)$$

asimptotik eşitliği bulunur. O halde bu son ifadeden

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{r \longrightarrow \infty \\ \varepsilon \longrightarrow 0}} \frac{N_+(r(1+\varepsilon), A)}{N_+(r, A)} &= \lim_{\substack{r \longrightarrow \infty \\ \varepsilon \longrightarrow 0}} \frac{2\sqrt{r(1+\varepsilon)} + O\left(\frac{1}{\sqrt{r(1+\varepsilon)}}\right)}{2\sqrt{r} + O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)} \\
&= \lim_{\substack{r \longrightarrow \infty \\ \varepsilon \longrightarrow 0}} \frac{2\sqrt{1+\varepsilon} + O\left(\frac{1}{r}\right)}{2 + O\left(\frac{1}{r}\right)} = 1 \quad (5.8.26)
\end{aligned}$$

bulunur. O halde Teorem 3.13.4 gereği $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ olacak şekildeki her α sayısı için,

$$\lim_{r \longrightarrow \infty} \frac{N_+(r, \alpha, A + B_1)}{N_+(r, A)} = 1 \quad (5.8.27)$$

elde edilir. Buradan

$$N_+(r, \alpha, A + B_1) = N_+(r, A) + o(N_+(r, A)) = \frac{2\sqrt{r}}{\pi} + o(\sqrt{r}), \quad r \longrightarrow \infty \quad (5.8.28)$$

bulunur.

$L = A + B_1$ operatörünün spektrumu diskret olduğu için $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, yi sağlayan her α için L operatörünün Ψ_α^+ açısı içerisinde kalan özdeğerleri mutlak değerlerinin artmasına göre sıralanabilir. Yani bu özdeğerler,

$$|\lambda_{1,\alpha}| \leq |\lambda_{2,\alpha}| \leq |\lambda_{3,\alpha}| \leq \dots$$

şeklinde (her özdeğer katı sayıda yazılmak üzere) numaralandırılabilir. O halde 5.8.28 formülünden

$$n = \frac{2\sqrt{|\lambda_{n,\alpha}|}}{\pi} + o(\sqrt{|\lambda_{n,\alpha}|}) \quad (5.8.29)$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafının karesi alınıp düzenlenirse,

$$\pi^2 n^2 = 4|\lambda_{n,\alpha}| + o(|\lambda_{n,\alpha}|) \quad (5.8.30)$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\pi^2 n^2 = 4|\lambda_{n,\alpha}| + a_n |\lambda_{n,\alpha}| \quad (5.8.31)$$

olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ olacak şekilde $\{a_n\}$ reel sayılar dizisi bulunabilir. Buradan

$$|\lambda_{n,\alpha}| = \frac{\pi^2 n^2}{4 + a_n} \implies |\lambda_{n,\alpha}| = 4\pi^2 n^2 + o(n^2), \quad n \rightarrow \infty \quad (5.8.32)$$

asimptotik formülü bulunur. Böylece 5.8.22 formülü ispat edilmiş olur.

Teorem 5.8.3. Lemma 5.8.1' in şartları sağlandığında 5.8.1 – 5.8.5 sınır-değer-geçiş probleminin spektrumu diskrettir ve

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3| \leq \dots$$

olacak şekilde numaralanmış (her özdeğer katı sayıda yazılmak üzere) λ_n özdeğerleri için,

$$\lambda_n = 4\pi^2 n^2 + o(n^2), \quad n \rightarrow \infty \quad (5.8.33)$$

asimptotik formülü geçerlidir.

İspat: Teorem 5.8.2 gereği $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ şartını sağlayan her α sayısı için $A + B_1$ operatörünün Ψ_α^+ açısının dışında kalan özdeğerlerinin sayısı sonludur. Bu sayıyı K_α ile $A + B_1$ operatörünün özdeğerlerini ise $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ ile gösterirsek, $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ özdeğerlerini,

$$\lambda_{n+k_\alpha} = \lambda_{n,\alpha}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.8.34)$$

olacak şekilde sıralayabiliriz. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ olacak şekilde keyfi α_0 sayısını alarak sabitleştirirsek ve $K_0 = K_{\alpha_0}$ ile gösterirsek bir önceki teoremdeki 5.8.32' den ve 5.8.34' den $A + B_1$ operatörünün mutlak değerlerinin özdeğerleri için,

$$\begin{aligned} |\lambda_n| &= |\lambda_{n-K_0,\alpha}| = 4\pi^2(n - K_0)^2 + o((n - K_0)^2) \\ &= 4\pi^2 n^2 + o(n^2), \quad n \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (5.8.35)$$

asimptotik formülünü bulmuş oluruz.

$\{\lambda_n\}$ özdeğerlerinin asimptotiğini bulmak için önce, $Re\lambda_n$ ve $Im\lambda_n$ reel sayı dizilerinin asimptotiğini bulacağız. Yine Teorem 5.8.1 gereği $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ olacak şekilde her α için $n \geq n_\alpha$ olduğunda,

$$\frac{Re\lambda_n}{|\lambda_n|} > \cos \alpha, \quad \frac{Im\lambda_n}{|\lambda_n|} < \sin \alpha,$$

olacak şekilde n_α doğal sayısı mevcuttur. Son eşitsizlikten.

$$\cos \alpha \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \frac{Re\lambda_n}{|\lambda_n|} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{Re\lambda_n}{|\lambda_n|} \leq 1,$$

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \frac{Im\lambda_n}{|\lambda_n|} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{Im\lambda_n}{|\lambda_n|} \leq \sin \alpha$$

elde edilir. α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) sayısı keyfi olduğundan son eşitsizlikten $\alpha \rightarrow 0$ almakla limite geçerse,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Re\lambda_n}{|\lambda_n|} = 1 \quad \text{ve} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Im\lambda_n}{|\lambda_n|} = 0$$

eşitliklerini elde ederiz. Bu eşitliklerden ise sırasıyla,

$$Re\lambda_n = |\lambda_n| + o(|\lambda_n|) = 4\pi^2 n^2 + o(n^2) \quad \text{ve} \quad Im\lambda_n = o(|\lambda_n|) = o(n^2)$$

asimptotik eşitlikleri bulunur. Son iki eşitlikten kolayca

$$\lambda_n = 4\pi^2 n^2 + o(n^2), \quad n \rightarrow \infty \quad (5.8.36)$$

asimptotik formülü elde edilir.

Teorem 5.8.4. Eğer $B : L_2(-1, 0) \oplus L_2(0, 1) \rightarrow L_2(-1, 0) \oplus L_2(0, 1)$ operatörü $W_2^2(-1, 0) \oplus W_2^2(0, 1)$ uzayından $L_2(-1, 0) \oplus L_2(0, 1)$ uzayına kompakt dönüşüm ise 5.8.1 – 5.8.5 sınır-değer-geçiş probleminin spektrumu diskretdir ve $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$ olacak şekilde sıralanmış (her özdeğer katı sayıda yazılmak üzere) $\{\lambda_n\}$ özdeğerleri için,

$$\lambda_n = 4\pi^2 n^2 + o(n^2), \quad n \rightarrow \infty \quad (5.8.37)$$

asimptotik formülü geçerlidir.

İspat: Özel olarak $Bu = q(x)u$ olmak şartıyla 5.8.6 – 5.8.7 eşitliğiyle tanımlı A operatörü için 5.8.1 teoreminin şartları sağlanacağı için 5.8.2 teoremi gereği,

$$R(\lambda, A) : H \longrightarrow H_1$$

operatörü sınırlı olacaktır. Diğer taraftan,

$B : W_2^2(-1, 0) \oplus W_2^2(0, 1) \longrightarrow L_2(-1, 0) \oplus L_2(0, 1)$ operatörü kompakt olduğu için 5.8.19 – 5.8.20 eşitliğiyle tanımlı $B_1 : H_1 \longrightarrow H$ operatöründe kompaktır. O halde

$$B_1 R(\lambda, A) : H \longrightarrow H$$

operatörü kompaktır.

Yani B_1 lineer operatörü A lineer operatörüne göre kompaktır. Dolayısıyla 5.8.1 – 5.8.5 problemi için 5.8.4 Teoreminin şartları sağlanır. Bu da ispatı tamamlar.

6. SONUÇ

Bu yüksek lisans tez çalışmasında ,

$$u''(x) + q(x)u(x) + (Bu)(x) = \lambda u(x), \quad x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$$

diferansiyel-operatör denkleminde,

$$u(-1) = 0$$

$$u'(1) = \lambda u(1)$$

sınır şartlarından ve de $x = 0$ süreksizlik noktasındaki

$$u(+0) = \delta u(-0)$$

$$u'(+0) = \gamma u'(-0)$$

geçiş şartlarından oluşan sınır-değer-geçiş probleminin bazı spektral özellikleri incelenmiştir.

Matematik fiziğin farklı fiziksel yapılara sahip olan iki maddesi arasındaki bir çok iletim (ısı ve madde iletimi) problemleri incelenirken sınır şartları ile birlikte geçiş şartları da ortaya çıkmaktadır. Fakat bizim problemimizdeki en belirgin fark geçiş şartlarının yanı sıra denklemde B soyut lineer operatörün bulunmasıdır. B operatörüne örnek olarak, $Bu = p(x)u'(x) + q(x)u'(x)$,

$$Bu = p(x)u'(c_1) + q(x)u'(c_2), \quad c_1, c_2 \in [-1, 0) \cup (0, 1] \text{ verilebilir.}$$

Tezde bulunan sonuçlar teorik olmasına rağmen, giriş bölümünde de belirtildiği gibi mekanik ve fiziğin bir çok somut problemlerinin analitik ve yaklaşık çözümlerinin bulunmasında uygulanabilir.

Sonuç olarak tez çalışmamızda incelediğimiz problem bir çok yönde genelleştirilebilir.

Örneğin tezde uyguladığımız yöntemlerle yüksek mertebeden diferansiyel-operatör denklemlerden ve daha genel sınır şartlarından oluşan sınır değer problemleri de araştırılabilir.

KAYNAKLAR

- AKDOĞAN, Z., DEMİRCİ, M. AND MUKHTAROV, O.SH., 2007.** Normalized Eigenfunction of Discontinuous Sturm-Liouville Type Problem with Transmission Conditions , Applied Mathematical Sciences, Vol. 1, no.52,2573-2591.
- AKDOĞAN, Z., DEMİRCİ, M. AND MUKHTAROV, O.SH., 2005.** A Discontinuous Sturm-Liouville Problems with Eigenparameter-Dependent Boundary and Transmissions Conditions, Acta Applicandae Mathematicae, 86.329-344.
- ALTINIŞIK, N., 1998.** Sınır Şartlarında Özdeğer Parametresi Bulunduran Süreksiz Katsayılı Sınır Değer Problemi Doktora Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü , Samsun.
- ALTUNER, B., 2007.** Bir Süreksiz Sturm-Liouville Probleminin Bazı Temel Özellikleri Yüksek Lisans Tezi, Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü , Tokat.
- ATKINSON, F.V., 1964.** Discrete and Continuous Boundary Problems. Academic press, New York London.
- BINDING, P.A., BROWNE, P.J. AND WATSON, B.A., 2002.** Sturm-Liouville Problems with Eigenparameter Dependent Boundary Conditions, Proc. Royal Soc. Edinburg, 127A, 1123-1136. Appl. Math. 148, 147-168.
- BINDING, P.A. , BROWNE, P.J., 1997.** Oscillation Theory for Indefinite Sturm-Liouville Problems with Boundary Conditions Rationallay Dependent on the Eigenparameter, II, J. Comput. Appl. Math. 148, 147-168.
- BIRKHOFF, GARRETT AND ROTA, GIAN-CARLO, 1989.** Ordinary Differential Equations, Cambridge, Massachusetts.
- BIRKHOFF, G.D., 1908.** On the Asymptotic Character of the Solution of the Certain Linear Differential Equations Containing Parameter, Trans. Amer. Math. Soc. , 9, p.219-231.

- BIRKHOFF, G.D., 1908.** Boundary Value and Expansion Problems of Ordinary Linear Differential Equations, Trans. Amer. Math. Soc. , 9, p.373-395.
- DEMİR, H., 1999.** Bir Diferansiyel Operatör Denklem için Sınır Değer Problemi Doktora Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü , Samsun.
- FULTON, C.T., 1977.** Two-point Boundary Value Problems with Eigenvalue Parameter Contained in the Boundary Conditions, Proc. Roy. Soc. Edinburg, 77A, p. 293-308.
- FULTON, C.T., 1980.** Singular Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter Contained in the Boundary Conditions, Proc. Roy. Soc. Edinburg, 87A, 1.
- GOHBERG, I.C., KREIN, M.G., 1969.** "Introduction to The Theory of Linear Non-Selfadjoint Operators". Amer. Math. Soc. , Providence.
- HAYIRLIOĞLU, G., 2005.** Geçiş Şartlarında Özdeğer Parametresi Bulunduran Süreksiz Sturm-Liouville Probleminin Özdeğerleri Yüksek Lisans Tezi, Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü , Tokat.
- HINTON, D., 1970.** An Expansion Theorem for in Eigenvalue Problem with Eigenvalue Parameter Contained in the Boundary Condition, Quart. J. Math. Oxford(2), 30, 34-42.
- KADAKAL, M., 2000.** Sınır Şartlarının Birinde Özdeğer Parametresi Bulunduran Regüler Sınır-Değer-Geçiş Problemi Doktora Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü , Samsun.
- KATO, T., 1966.** "Perturbation Theory for Linear Operators", Springer-Verlag , New-York Inc.
- KOBAYHASHI, M., 1989.** Eigenvalue of Discontinuous Sturm-Liouville problems with Symmetric, potentials, computers Maths applic. Vol. 18, 357-364 Lang, S, 1983 Real Analysis (Second Edition), Addison-wesley, Reading Mass.
- KURT, A., 2005.** Sınır ve Geçiş Şartları ile Verilmiş İkinci Mertebeden Diferansiyel Operatörün Bazı Spektral Özellikleri Yüksek Lisans Tezi, Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü , Tokat.
- MARKUS, A.S., MATSAYEV, V.I., 1982.** Lineer Operatörlerin Spektrumlarının Mukayesesi ve Spektral Asimptotikler." Tr. Mosk. Mat. Ob. t.45, s. 133-181(Rusca).

- MUHTAROV, O.Ş., 1988.** "Geçiş Şartları Bulunduran ve Esas Kısmı Kendine Eşlenik Olan Sınır-Değer Probleminin Özdeğerlerinin Asimptotiği" Dep. VİNİTİ 03.06.88, No:4400-B.88, 235 , Moskova (Rusça).
- MUHTAROV, O.Ş., 1988.** "Bir Geçiş Probleminin Bazı Spektral Özellikleri", VİNİTİ, No:1773(Moskow).
- MUHTAROV, O.Ş., 1990.** "Düzgün fonksiyonların geçiş probleminin özfonksiyonları ve özfonksiyonlara bağlanmış fonksiyonları üzerine açılımı",Nekotorie voprosı teor. Nelin. Analiz.vıp II, 103-115.
- MUHTAROV, O.Ş., 1998.** "Bir Geçiş Probleminin Özdeğerlerinin Asimptotik Davranışı ", İzv.AN Az. SSR,Ser. Fız-techn. Mat.Nauk,No.3,13-17.
- MUKHTAROV, O.SH., 1998.** "Fold Completeness for Discontinuous Bondary Value Problem with Spectral Parameter in the Boundary and Transmission Conditions" Turkish Journal of Mathematics.
- MUKHTAROV, O.SH., 1994** "Discontinuous Boundary Value Problem with Spectral Parameter in Boundary Condition",Tr.J. of Mathematics,18,183-192.
- MUKHTAROV, O.SH., DEMİR, H., 1999.** "Coersiveness of the Discontinuous Initial Boundary Value Problem for Parabolic Equation". Israel Journal of Mathematics, Vol. 114, Pages 239-252.
- MUKHTAROV, O.SH., KANDEMİR, M. AND KURUOĞLU, N., 2002.** Distribution of eigenvalues for the Discontinuous boundary-value problem with functional-manypoint conditions. Israel Journal of Mathematics 129., 143-156.
- MUKHTAROV, O.SH. AND YAKUBOV, S., 2002.** Problems for Ordinary Differential Equations with Transmission Conditions, Applicable Analysis, Vol 81, 1033-1064.
- MUKHTAROV, O.SH., KADAKAL M., MUHTAROV, F.S., 2004.** On Discontinuous Sturm-Liouville Problems with Transmission Conditions, J. Math. Kyoto Univ., Vol. 44, Number 4, 779-798.
- NAIMARK, M.A., 1967.** Linear differential operators, Ungar, Newyork.

- OKUDUCU, H., 2003.** Lineer Diferansiye Denklemleri, Sınır Şartları ve Geçiş Şartlarının Ürettiği Diferansiyel Operatörün Özdeğeri, Yüksek Lisans Tezi. (Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü) .
- OLVER, F.W.J., 1974.** Introduction to asymptotics and special functions. Academic press. New York and London.
- RASULOV, M.L., 1967.** Methods of Contour Integration, North Holland Publishing Company, Amsterdam.
- RUSSAKOVSKIY, E.M., 1975.** "Sınır Şartları Özdeğer Parametresinden Polinomal Şekilde Bağımlı Olan Sınır-Değer Probleminin Operatör Yorumu", Funk. Analiz. I eqo priroj, 9, No.4 Sayfa 91-92.
- SCHNEIDER, A., 1974.** A Note on Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions , Math. Z. 136, 163-167.
- SHKALIKOV, A.A., 1983.** Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations with a Parameter in Boundary Conditions, Trudy., Sem., Imeny, I.G. Petrovsgo, 9, 190-229.
- TAMARKIN, J.D., 1928.** "Some General Problems of The Theory of Ordinary Linear Differential Equations And Expansions of An Arbitrary Function in Series of Fundamental Functions." Math. Z., 1-54,27.
- TIKHONOV, A.N. AND SAMARSKII, A.A., 1963.** Equations of Mathematical Physics, Pergamon, Oxford and New York.
- TITCHMARS, E.C., 1962.** Eigenfunctions Expansion Associated with Second Order Differential Equations I, second edn. Oxford Univ. press, London.
- TRIEBEL, H., 1978.** "Interpolation Theory. Function Spaces. Differential Operators." North-Holland , Amsterdam.
- TUNÇ, E. AND MUKHTAROV, O.SH., 2004.** Fundamental solutions and eigenvalues conditions, Applied Mathematics and Computation. Vol. 157, p. 347-355.
- ULUÇAY, C., 1971.** Fonksiyonlar Teorisi ve Riemann Yüzeyleri, A.Ü. Fen Fakültesi, Ankara.

- WALTER, J., 1973.** Regular Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions, Math. Z., 133, 301-312.
- YAKUBOV, Y., 1993.** "Coerciveness with a Defect in The Parameter of a Boundary Value Problem Arising in Stratified Fluid Wave Motion", Journal D'Analyse Mathematique, Vol.61.
- YAKUBOV, S.Y., 1994.** Completeness of Root Functions of Regular Differential Operators, Longman, Scientific and Technical.
- YAKUBOV, Y., 1998.** "Irregular Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations", Analysis, R.Oldenburger Verlag München 18, 359-402.
- YAKUBOV, S.Y. AND YAKUBOV Y.Y., 1999.** Abel Basis of Root Functions of Regular Boundary Value Problems, Math. Nachr. 197, 157-187.
- YAKUBOV, S.Y. AND YAKUBOV Y.Y., 2000.** Differential Operator Equations (Ordinary and Partial Differential Equations), Chapman and Hall/CRC, Boca Raton.
- ZETTL, A., 1968.** Adjoint and Self-adjoint Boundary Value Problems with Interface Conditions, SIAM J. Appl. Math. 16, 851-859.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Kadriye AYDEMİR
Doğum Tarihi ve Yer : 02.09.1985 Sinop
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce
Telefon : 0530 883 17 67
E-posta : kaydemir@gop.edu.tr

Eğitim:

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi	2010
Lisans	Ondokuz Mayıs Üniversitesi	2007
Lise	Üsküdar Kandilli Kız Lisesi	2002

Yayınlar:

1. Muhtaroğlu, O. and Aydemir, K., Denkleminde Lineer Operatör Bulunduran Bir Sınır-Değer-Geçiş Probleminin Özdeğerleri, XXII. Ulusal Matematik Sempozyumu, 31 Ağustos-03 Eylül 2009, Şirince Matematik Köyü İzmir.

İlgi Alanları

Gezi, sinema, kitap okumak, matematikle ilgili gelişmeleri takip etmek, yemek yapmak.