

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

SONLU ULAŞILABİLİR KATEGORİLERDE PÜR-İNJEKTİFLİK

Mustafa Kemal BERKTAŞ

DANIŞMAN

Doç.Dr. Semra DOĞRUÖZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN 2010

ONAY SAYFASI

Doç. Dr. Semra DOĞRUÖZ danışmanlığında Mustafa Kemal BERKTAŞ tarafından hazırlanan "Sonlu Ulaşılabilir Kategorilerde Pür İnjektiflik" başlıklı bu çalışma, lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 28.06.2010 tarihinde aşağı daki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Ünvanı , Adı , SOYADI

İmza

Başkan Prof. Dr. Rafail ALİZADE

Danışman Doç. Dr. Semra DOĞRUÖZ

Üye Prof. Dr. Nurcan ARGAC

Üye Prof. Dr. Gonca GÜNGÖROĞLU

Üye Doç. Dr. Emine ALBAŞ

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
...../...../..... tarih ve
...../..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Rıdvan ÜNAL
Enstitü Müdürü

İçindekiler

ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	v
1 GİRİŞ	1
2 ÖN BİLGİLER	4
2.1 Temel Kavramlar	4
2.2 Örtü ve Zarflar	7
2.3 Eş-burulma Teorisi ve Pür-İnjektiflik	8
2.4 Funktor Kategorileri	11
2.5 Grothendieck Kategoriler	15
2.6 Sonlu Ulaşılabilir Kategoriler	16
3 $\text{Func}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ KATEGORİSİNDE PÜR-İNJEKTİFLİK	21
3.1 $\text{Func}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ ve $\text{Flat}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ Kategorileri	21
3.2 Pür-İnjektiflik	24
3.3 Quasi-Limitler	27
4 AYRIŞTIRILAMAZ NESNELER	30
4.1 Alt Funktorlar	30
4.2 Ayrıştırılabilir Nesneler	33
KAYNAKLAR	38
DİZİN	41

ÖZET

Doktora Tezi

SONLU ULAŞILABİLİR KATEGORİLERDE PÜR İNJEKTİFLİK

Mustafa Kemal BERKTAŞ

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç.Dr. Semra DOĞRUÖZ

Bu çalışmada, bir toplamsal sonlu ulaşılabilir kategorinin sonlu temsil edilebilir nesnelerinin izomorfizm sınıfından Abel gruplara tanımlı bütün kontravariant toplamsal fonktorların sınıfında pür injektiflik incelendi. Bir toplamsal sonlu ulaşılabilir kategoride bir pür-injektif nesnenin endomorfizmaları halkasının bir eş-burulmalı halka olduğu gösterildi.

Toplamsal sonlu ulaşılabilir kategoriler tam değildir. Ancak bu çalışmada yeni bir kavram olarak fonktorların quasi-limiti tanımlanarak, toplamsal sonlu ulaşılabilir kategorilerin her zaman quasi-tam olduğu gösterildi. Ayrıca, her toplamsal sonlu ulaşılabilir kategorinin bir pür eş-üretece sahip olduğu gösterildi. Son olarak, herhangi bir düz fonktorun ayrıştırılmaz pür-injektif fonktorların quasi-limiti içine pür olarak gömülebileceği ispatlandı.

2010, 42 sayfa

Anahtar Kelimeler: Eş-burulmalı halka, Sonlu ulaşılabilir kategori, Pür nesne, Düz nesne, Sonlu temsil edilebilir nesne, Düz örtü, Quasi-limit.

ABSTRACT

PhD Thesis

PURE INJECTIVITY IN FINITELY ACCESSIBLE CATEGORIES

Mustafa Kemal BERKTAŞ

Afyon Kocatepe University
Graduate School of the Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof.Dr. Semra DOĞRUÖZ

In this study, we investigate pure injectivity in the category of all additive contravariant functors from the set of all isomorphism classes of finitely presentable objects of an additive finitely accessible category to the category of Abelian groups. We demonstrate that endomorphism ring of any pure injective object in an additive finitely accessible category is cotorsion.

Additive finitely accessible categories do not need being complete. However, we show that these categories always quasi-complete by defining a new concept namely, quasi-limits of functors. In addition, we prove that every additive finitely accessible category has a cogenerator. Finally, we prove that any flat functor may be purely embedded in a quasi-limit of indecomposable pure injective functors.

2010, 42 pages

Key Words : Cotorsion ring, Finitely accessible category, Pure object, Flat object, Finitely presentable objects, Flat cover, Quasi-limit.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşarak zamanını ve desteğini esirgemeyen saygıdeğer Hocam Doç. Dr. Semra DOĞRUÖZ'e teşekkür ederim.

Ayrıca, Murcia Üniversitesi Matematik Bölümünde bulunduğum bir yıl boyunca tez çalışmamın hazırlanmasında desteklerini esirgemeyen Prof. Dr. Pedro A. GUIL ASENSIO başta olmak üzere, Murcia Üniversitesi Matematik Bölümüne, Tez İzleme Komisyonu sınavları boyunca sabır, anlayış ve yardımlarından dolayı değerli Hocalarım Prof. Dr. Rafail ALİZADE ve Doç. Dr. Emine ALBAŞ'a teşekkür ederim.

Mustafa Kemal BERKTAŞ

AFYONKARAHİSAR, Haziran 2010

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

R	: Birimli ve birleşmeli bir halka
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar halkası
$R\text{--Mod}$	: Sol R -modüllerin kategorisi
$\text{Mod--}R$	: Sağ R -modüllerin kategorisi
$\text{Flat--}R$	: Sağ düz R -modüllerin kategorisi
$R\text{--Flat}$	: Sol düz R -modüllerin kategorisi
Ab	: Abel gruplar kategorisi
$\text{Func}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$	: $\mathcal{A}_0$ kategorisinden Abel gruplara tanımlı bütün kontravariant toplamsal fonktörlerin kategorisi
$\text{Flat}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$	: $\text{Func}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ nin tüm düz nesnelerinin alt kategorisi
$\text{Ind}(\mathcal{C})$	: $\text{Func}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ kategorisinin bütün ayrıştırılmaz düz pür-injektif nesnelerinin kümesi
$\text{Hom}(M, N)$	: M den N ye tanımlı R -modül homomorfizmalarının kümesi
$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')$	: $\mathcal{C}$ kategorisinin C nesnesinden C' nesnesine tanımlı bütün morfizmaların kümesi
$\text{Ext}_R^1(M, N)$	: Hom fonktörü ile türetilmiş homoloji grupları
$M \otimes_R N$	: M sağ R -modülü ile N sol R -modülünün tensör çarpımı
$\text{Ker}(f)$	: f dönüşümünün çekirdeği
$\text{Im}(f)$	: f dönüşümünün görüntüsü
$\text{Coker}(f)$	: f dönüşümünün eş-çekirdeği
$\varprojlim F$	: F fonktörünün limiti
$\varprojlim^q H$	: H fonktörünün quasi limiti
$ X $	: X kümesinin kardinalitesi
$M \cong N$	: M, N' ye İzomorftur

1 GİRİŞ

Modül kategorisinde modüllerin injektif zarflarının varlığı Eckman ve Schopf tarafından ellili yılların ortalarında ispatlandıktan sonra, modüllerde örtü (cover) ve zarf (envelope) kavramları, halka teorisinde ve genel olarak değişmeli olmayan cebirde önemli rol oynamıştır (Eckman Schopf 1953). E. Enochs düz örtü savı (flat cover conjecture) olarak da bilinen 1981 de yayınladığı çalışmasında, herhangi bir birimli ve birleşmeli R halkası üzerinde her R -modülün bir düz örtüye sahip olduğunu ortaya koydu (Enochs 1981).

Altmışlı yıllarda Abel Gruplar kategorisinde benzer genelleme ve karakterizasyonlar bölünebilirlik (divisibility) kavramıyla ele alındı. Yine aynı tip problemler bağımsız olarak, Auslander tarafından grup temsilleri ve Artin Cebirlerin homolojik özelliklerinin çalışmasındaki temel teknikler kullanılarak çalışılmıştır. Düz örtü savının yakın zamandaki diğer bir gösterimi, Bican, El Bashir ve Enochs tarafından ele alındı (Bican et al. 2001). Savın bu gösterimi eş-burulma teorisinin temel kavram ve teknikleri ile verilmiştir. Bican'ın bu anlamdaki çalışması son yıllarda Abel gruplar, halka ve cebirlerin homolojik çalışmasında temel oluşturmuştur.

R birimli ve birleşmeli bir halka olsun. Herhangi bir sağ düz R -modül F için $\text{Ext}_R^1(F, M) = 0$ ise M sağ R -modülüne eş-burulmalı (cotorsion) modül denir. Abel grupların homolojik genellemeleri için gerekli olan bu modüller ilk olarak D. K. Harrison tarafından sunulmuştur (Harrison 1959). Ayrıca düz örtü savının bir çözümü de eş-burulmalı zarfın varlığı durumuna denktir (Xu 1996). Bir Abel grup yada genel olarak bir sağ R -modül, pür kısa tam dizilere göre injektif ise bu sağ R -modüle pür-injektif modül denir. Bilindiği gibi üçüncü terimi düz modül olan her kısa tam dizi pür tam olduğundan her pür-injektif modül eş-burulmalı modüldür.

Birimli ve birleşmeli bir R halkası üzerinde sağ düz R -modüllerin kategorisi üreteç kümesi sonlu temsil edilmiş (finitely presented) modüller olan bir sonlu ulaşılabilir kategoridir (Dung Garcia 2001). Böylece sonlu ulaşılabilir kategorilerde elde edilen sonuçlar düz modül kategorisinin bir genellemesi olarak görülür.

P.A. Guil Asensio ve Ivo Herzog bir sağ R -modülün düz olması için gerek ve yeter koşulun bu sağ R -modülün ayrıştırılmaz düz eş-burulmalı modüllerin bir quasi direk çarpımının bir pür alt modülü olduğunu göstermişlerdir (Guil Herzog 2006). Yine P.A. Guil Asensio ve Ivo Herzog diğer bir çalışmada, düz modüller kategorisinin direk limitler ve eş-burulmalı zarflar altında kapalı bir alt kategorisindeki her düz modülün ayrıştırılmaz düz eş-burulmalı modüllerin bir direk çarpımı içine pür olarak gömülebileceğini gösterdiler (Guil Herzog 2007). Burada ayrıştırılmaz düz eş-burulmalı modüllerin quasi direk çarpımı bu modüllerin aynı zamanda bir düz örtüsüdür.

Bu çalışmada, P.A. Guil Asensio ve Ivo Herzog'un yukarıda bahsedilen düz R -modüllerin kategorisinde elde ettikleri sonuç sonlu ulaşılabilir kategorilere genelleştirilmiştir. $\mathcal{A}$ bir toplamsal sonlu ulaşılabilir kategori ve $\mathcal{A}_0$ bu kategorinin sonlu temsil edilebilir (finitely presentable) nesnelerinin bir izomorfizm sınıfı olmak üzere, $\mathcal{A}_0$ dan Abel gruplara tanımlı bütün düz kontravariant toplamsal fonktorların sınıfı, $\mathcal{A}$ toplamsal sonlu ulaşılabilir kategorisine denktir ve $\mathcal{A}_0$ dan Abel gruplara tanımlı bütün kontravariant toplamsal fonktorların sınıfı bir Grothendieck kategoridir. Sonlu ulaşılabilir kategoriler ve Grothendieck kategoriler bazı şartlar altında düz örtüye sahiptir (Crivei et al. 2010) ve (El Bashir 2006). Bu çalışmada, yukarıda belirttiğimiz kontravariant fonktor kategorilerindeki teknikler kullanılarak, Guil ve Ivo Herzog'un düz modüller kategorisinde elde ettiği sonuçlar sonlu ulaşılabilir kategorilere genelleştirilmiştir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümü olarak düzenlenmiştir.

İkinci bölümde, tezin okunabilirliğini kolaylaştırmak için gerekli olacak halka ve modüller teorisi, homoloji cebiri ve kategori teorisi ile ilgili bazı temel kavram ve sonuçlar ispatsız olarak verilmiştir.

Üçüncü bölümde, ilk olarak $\mathcal{A}$ bir toplamsal sonlu ulaşılabilir kategori ve $\mathcal{A}_0$ bu kategorinin sonlu temsil edilebilir nesnelerinin izomorfizma sınıfı olmak üzere $\mathcal{A}_0$ dan Abel gruplara tanımlı bütün kontravariant toplamsal fonktorların sınıfında eş-burulma teorisi incelenmiştir. Özgün bir sonuç olarak, bir toplamsal sonlu ulaşılabilir kategoride bir pür-injektif nesnenin endomorfizma halkasının bir eş-burulmalı halka olduğu gösterildi.

Toplamsal sonlu ulaşılabilir kategorilerin tam olmadığı bilinen bir gerçektir. Örneğin sol coherent olmayan bir R halkası üzerinde düz sağ R -modüllerin kategorisi direkt çarpımlar altında kapalı değildir. Aynı zamanda düz sağ R -modüllerin kategorisi her zaman bir Abel kategori olmayabileceğinden dolayı bir Grothendieck kategori de değildir. Yine bu bölümde, fonktorların quasi-limiti tanımlanarak, toplamsal sonlu ulaşılabilir kategorilerin her zaman quasi-tam olduğu gösterildi. Aynı zamanda bu bölümde, bir toplamsal sonlu ulaşılabilir kategorinin bir pür eş-üretece sahip olduğu gösterildi.

Son olarak dördüncü bölümde, öncelikle bir toplamsal sonlu ulaşılabilir kategorinin ayrıştırılmaz pür injektif nesneleri sınıfının bir küme oluşturduğu gösterildi. Buradan hareketle herhangi bir düz fonktorun bu kümenin elemanlarının, yani ayrıştırılmaz pür injektif nesnelerinin limiti içine pür olarak gömülebileceği ispatlandı. Ayrıca, bir toplamsal sonlu ulaşılabilir kategorinin bir pür eş-üreteç kümesine sahip olduğu gösterilmiştir.

2 ÖN BİLGİLER

Bu bölüm tezde yer alan bazı temel kavram ve gösterimlerin genel hatlarıyla ispatsız olarak tanıtılmasına ayrılmıştır. Halka ve modüller teorisi, homoloji cebiri, kümeler teorisi ve kategori teorisinin bu ve diğer bölümlerde kullanılacak olan genel ve temel kavramları için (Freyd 1964), (Stenström 1975), (Rotman 1979), (Wisbauer 1991), (Anderson Fuller 1992), (Adamek Rosicky 1994), (Xu 1996), (Alizade Pancar 1999), (Hrbacek Jech 1999), (Enochs Jenda 2000) ve (Prest 2009) kaynakları referans verilebilir.

Bu tez boyunca özel olarak belirtilmedikçe, tüm halkalar birimli ve birleşmeli halkalar, modüller ise birimsel (unitary) sol R -modüller olarak kabul edilecektir.

2.1 Temel Kavramlar

R bir halka, M ve N R -modüller olsun. M modülünden N modülüne tanımlı R -homomorfizmalarının kümesi $\text{Hom}(M, N)$ bir Abel gruptur.

$\{M_n | n \in \mathbb{Z}\}$ modüller topluluğundan ve bunların $f_n : M_n \rightarrow M_{n-1}$ homomorfizmalarından oluşan

$$\cdots \longrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

dizisinde her $n \in \mathbb{Z}$ için, $\text{Im}(f_{n+1}) = \text{Ker}(f_n)$ ise bu diziye *tam (exact) dizi* denir. Özel olarak A , B ve C modülleri için;

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

dizisi tam ise f bir monomorfizma ve g bir epimorfizmadır. Bu diziye *kısa tam dizi* denir.

Değişmeli diagram için biçimsel bir tanım olmamakla birlikte, bir diagramda herhangi iki modül arasındaki olası tüm yollar aynı dönüşümü tanımlıyorsa bu diagrama *değişmeli (commutative) diagram* denir.

P bir modül olsun. Her $f : A \rightarrow B$ epimorfizması ve her bir $g : P \rightarrow B$ homomorfizması için

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \longrightarrow & 0 \\ & \nwarrow^h & \uparrow^g & & \\ & & P & & \end{array}$$

diagramını değişmeli kılan, $g = f \circ h$ olacak şekilde bir $h : P \rightarrow A$ homomorfizması varsa P ye *projektif modül* denir.

I bir modül olsun. Her $f : A \rightarrow B$ monomorfizması ve her bir $g : A \rightarrow I$ homomorfizması için

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B \\ & & \downarrow^g & \swarrow^h & \\ & & I & & \end{array}$$

diagramı değişmeli kılan, $g = h \circ f$ olacak şekilde bir $h : B \rightarrow I$ homomorfizması varsa I ye *injektif modül* denir.

Projektif modüllerin herhangi direkt toplamı projektiftir ancak dual olarak injektif modüllerin herhangi direkt çarpımı injektif olur.

Bundan başka, R -modüllerin herhangi bir

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisine M nin L ile bir *genişlemesi (extension)* denir. Bu genişlemede eğer $h \circ f = 1_M$ olacak şekilde bir $h : N \rightarrow M$ homomorfizması varsa bu genişlemeye *parçalanmış (split) kısa tam dizi* denir. Bu koşula denk olarak $g \circ k = 1_L$ olacak şekilde bir $k : L \rightarrow N$ homomorfizması varsa bu dizi parçalanandır. Bir P modülünün projektif olması için gerek ver yeter koşul A ve B birer R -modül olmak üzere;

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

şeklindeki her dizinin parçalanmış dizi olmasıdır. M , N ve X R -modüller olmak üzere

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow X \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisinin parçalanmış olması için gerek ve yeter koşul $\text{Ext}_R^1(M, N) = 0$ olmasıdır. Burada Ext , Hom fonktoru ile türetilmiş homoloji grubunu göstermektedir.

I bir kısmi sıralı küme olsun. Eğer her $i, j \in I$ çifti için $i \leq k$ ve $j \leq k$ olacak şekilde $k \in I$ varsa, I ya *yönlendirilmiş (directed) küme* denir. I bir yönlendirilmiş indis kümesi ve $i \leq j$ olacak şekilde $i, j \in I$ olmak üzere $\varphi_{ij} : M_i \longrightarrow M_j$ R -modül homomorfizmaları için $\{M_i, \varphi_{ij}\}$ kümesi R -modüllerin bir direkt sistemi olsun. Bu sistemin direkt limiti; S , $\{\lambda_j \varphi_{ji}(a_i - \lambda_i(a_i))\}$ elemanlarıyla üretilmiş bir alt modül ve $\lambda_i : M_i \rightarrow \oplus M_i$ doğal injeksiyon olmak üzere, $\oplus M_i / S$ ye izomorftur.

M , N ve F , R -modüller olmak üzere R -modüllerin standart tensör çarpımı ile her $0 \longrightarrow M \longrightarrow N$ tam dizisi için,

$$0 \longrightarrow M \otimes_R F \longrightarrow N \otimes_R F$$

dizisi de tam ise F ye *düz (flat) modül* denir. Her projektif modül düz alt modüldür fakat tersi her zaman doğru değildir.

M bir R -modül olsun. Eğer $M = Rx_1 + Rx_2 + \dots + Rx_n$ olacak şekilde sonlu sayıda $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$ elemanları varsa M ye *sonlu üretilmiş (finitely generated) modül* denir. Her düz modül sonlu üretilmiş projektif modüllerin bir direkt limitidir. Ayrıca, düz modüllerin direk limiti yine bir düz modül olur.

M bir R -modül olmak üzere m, n pozitif tam sayıları için

$$R^{(m)} \longrightarrow R^{(n)} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

tam dizisi var ise M ye *sonlu temsil edilmiş (finitely presented) modül* denir.

2.2 Örtü ve Zarflar

R -modüllerin bir $\mathcal{X}$ sınıfı ile sıfır modülünü de içeren ve izomorfizmalar altında kapalı R -modüllerin bir koleksiyonu kastedilecektir.

Tanım 2.2.1 (*Xu 1996*) $\mathcal{X}$, R -modüllerin bir sınıfı ve M bir R -modül olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanacak şekilde bir $\varphi : M \rightarrow X$ homomorfizması varsa $X \in \mathcal{X}$ modülüne M nin $\mathcal{X}$ -zarfı ($\mathcal{X}$ -envelope) denir.

- $X' \in \mathcal{X}$ olmak üzere her $\varphi' : M \rightarrow X'$ homomorfizması için, $\varphi' = f \circ \varphi$ olacak şekilde bir $f : X \rightarrow X'$ homomorfizması vardır. Diğer bir deyişle herhangi bir $X' \in \mathcal{X}$ için $\text{Hom}(X, X') \rightarrow \text{Hom}(M, X') \rightarrow 0$ dizisi tamdır.
- Eğer $f : X \rightarrow X$ dönüşümü $\varphi = f \circ \varphi$ olacak şekilde X in bir endomorfizması ise f bir otomorfizmadır.

Eğer sadece tanımda yer alan birinci şart sağlamıyorsa $\varphi : M \rightarrow X$ ye bir $\mathcal{X}$ -önzarf ($\mathcal{X}$ -preenvelope) denir.

Tanım 2.2.2 (*Xu 1996*) $\mathcal{X}$, R -modüllerin bir sınıfı ve M bir R -modül olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanacak şekilde bir $\varphi : X \rightarrow M$ homomorfizması varsa $X \in \mathcal{X}$ modülüne M nin $\mathcal{X}$ -örtüsü ($\mathcal{X}$ -cover) denir.

- $X' \in \mathcal{X}$ olmak üzere her $\varphi' : X' \rightarrow M$ homomorfizması için, $\varphi' = \varphi \circ f$ olacak şekilde bir $f : X' \rightarrow X$ homomorfizması vardır. Diğer bir deyişle herhangi bir $X' \in \mathcal{X}$ için $\text{Hom}(X', X) \rightarrow \text{Hom}(X', M) \rightarrow 0$ dizisi tamdır.
- Eğer $f : X \rightarrow X$ dönüşümü $\varphi = \varphi \circ f$ olacak şekilde X in bir endomorfizması ise f bir otomorfizmadır.

Eğer sadece tanımda yer alan birinci şart sağlanıyorsa $\varphi : X \rightarrow M$ ye bir $\mathcal{X}$ -önörtü ($\mathcal{X}$ -precover) denir.

$\mathcal{F}$ bütün düz sol modüllerin bir sınıfı olsun. Bir M , R -modülünün $\mathcal{F}$ -örtüsüne M nin düz örtüsü denir.

Enochs Savı: Herhangi birimli ve birleşmeli R halkası üzerinde her R -modül bir düz örtüye sahiptir (Enochs 1981).

Bu savın varlığı bazı şartlar altında injektif zarfın varlığının dualidir. Bir çok modül sınıfına göre bu sav doğru olmasına rağmen, genelde bu sav halen bir açık problemdir. Ancak (Bican et al 2001) makalesinde bu sav bazı şartlar altında çözülmüştür.

$\mathcal{X}$ modüllerin bir sınıfı olsun. Eğer R -modüllerin her

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisi için $M, L \in \mathcal{X}$ olduğunda $N \in \mathcal{X}$ ise $\mathcal{X}$ sınıfına *genişlemeler altında kapalıdır* denir. Örneğin; projektif, injektif ve düz modüller sınıfı genişlemeler altında kapalıdır.

Aşağıdaki iki sonuç "Wakamatsu Lemmaları" olarak bilinir:

Lemma 2.2.3 $\mathcal{X}$ genişlemeler altında kapalı bir sınıf ve $\varphi : X \rightarrow M$, M nin bir $\mathcal{X}$ -örtüsü olsun. Bu durumda her $X' \in \mathcal{X}$ için $\text{Ext}_R^1(X', \ker \varphi) = 0$ dir.

Lemma 2.2.4 $\mathcal{X}$ genişlemeler altında kapalı bir sınıf ve $\varphi : M \rightarrow X$, M nin bir $\mathcal{X}$ -zarfı olsun. Bu durumda her $X' \in \mathcal{X}$ için $\text{Ext}_R^1(\text{coker } \varphi, X') = 0$ dir.

2.3 Eş-burulma Teorisi ve Pür-İnjektiflik

$\mathcal{L}$, R -modüllerin bir sınıfı olsun.

$$\mathcal{L}^\perp = \{X \in R\text{-Mod} \mid \text{Ext}_R^1(L, X) = 0, \text{ her } L \in \mathcal{L} \text{ için } \}$$

$${}^\perp \mathcal{L} = \{X \in R\text{-Mod} \mid \text{Ext}_R^1(X, L) = 0, \text{ her } L \in \mathcal{L} \text{ için } \}$$

sınıflarını tanımlayalım. $\mathcal{L}^\perp$ ye $\mathcal{L}$ nin *sağ dik sınıfı*, ${}^\perp\mathcal{L}$ ye de $\mathcal{L}$ nin *sol dik sınıfı* denir.

Projektif modüllerin sınıfını $\mathcal{P}$ ve injektif modüllerin sınıfını $\mathcal{I}$ ile gösterelim. Bu durumda $\mathcal{P}^\perp = R\text{-Mod}$ ve ${}^\perp(\mathcal{P}^\perp) = \mathcal{P}$ ve benzer biçimde $\mathcal{I}^\perp = R\text{-Mod}$ ve ${}^\perp(\mathcal{I}^\perp) = \mathcal{I}$ dir.

Önerme 2.3.1 (*Xu 1996*) $\mathcal{X}$, R modüllerin herhangi bir sınıfı olmak üzere, $X \in \mathcal{X}$ için $\varphi : X \rightarrow M$ örten ve $\ker \varphi \in \mathcal{X}^\perp$ olsun. Bu durumda X , M nin bir $\mathcal{X}$ -önörtüsüdür. Bu önörtüye özel (*special*) önörtü denir.

Her sağ R -modül A için

$$0 \longrightarrow A \otimes_R M \longrightarrow A \otimes_R N \longrightarrow A \otimes_R L \longrightarrow 0$$

dizisi tam ise R -modüllerin

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisine *pür tam* (*pure-exact*) dizi denir. Burada M ye N nin *pür alt modülü*, N ye de M nin *pür genişlemesi* denir. Her parçalanan kısa tam dizi pür-tamdır fakar tersi her zaman doğru değildir. Bir B'' sol R -modülünün düz olması için gerek ve yeter koşul R -modüllerin her tam

$$0 \longrightarrow B' \longrightarrow B \longrightarrow B'' \longrightarrow 0$$

dizisinin pür tam olmasıdır. M , N ve P herhangi R -modülleri için pür tam satırlı her

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & M & \longrightarrow & L \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & \swarrow & & & \\ & & P & & & & \end{array}$$

diagramı bir $g : M \rightarrow P$ homomorfizması ile değişmeli üçgene tamamlanabilirse P ye *pür-injektif modül* denir. Diğer bir deyişle, N , M nin pür alt modülü olmak üzere

$$\text{Hom}(M, P) \longrightarrow \text{Hom}(N, P) \longrightarrow 0$$

dizisi tamdır.

Bütün injektif modüller pür-injektiftir. Pür-injektif modüllerin sınıfını $\mathcal{PE}$ ile gösterelim. Bir R -modül M nin bir $\mathcal{PE}$ -zarfına M nin *pür-injektif zarfı* denir ve $PE(M)$ ile gösterilir. $\mathcal{PE}$ sınıfı ne genişlemeler ne de direk limitler altında kapalıdır. Her modül bir injektif modül içine gömülebilir ve her injektif modül pür-injektif olduğundan $\varphi : M \rightarrow PE(M)$ injektiftir. Ayrıca her R -modül bir pür-injektif zarfa sahiptir. (Xu 1996)

Tanım 2.3.2 (Xu 1996) Her düz sol R -modül F için, $\text{Ext}_R^1(F, C) = 0$, yani $C \in \mathcal{F}^\perp$ ise, C sol R -modülüne *eş-burulmalı (cotorsion) modül* denir.

Eş-burulmalı modüllerin sınıfı, pür-injektif modüllerin sınıfını ve dolayısıyla injektif modüllerin sınıfını kapsar.

C bir eş-burulmalı modül ve F bir düz modül olmak üzere

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisi için eğer G bir düz modül ise

$$\text{Hom}(G, F) \longrightarrow \text{Hom}(G, M) \longrightarrow \text{Ext}_R^1(G, C) = 0$$

dizisi tamdır. Buradan $F \rightarrow M$ bir düz önörtüdür. Böylece eş-burulmalı modüller düz örtülerin çekirdekleridir. Eş-burulmalı modüllerin sınıfı genişlemeler, direkt çarpımlar, sonlu direkt toplamalar ve direkt toplananlar altında kapalıdır.

$\mathcal{C} = \mathcal{F}^\perp$ bütün eş-burulmalı sol R -modüllerin sınıfı olsun. Bir M sol R -modülünün bir $\mathcal{C}$ -zarfı $\varphi : M \rightarrow C$ ye M nin *eş-burulmalı zarfı* denir. Burada φ nin injektif olduğu açıktır.

Lemma 2.3.3 (Xu 1996) ${}^\perp\mathcal{C} = \mathcal{F}$, yani ${}^\perp(\mathcal{F}^\perp) = \mathcal{F}$ dir.

Teorem 2.3.4 (Xu 1996) $\varphi : M \rightarrow C$ bir eş-burulmalı zarf olsun. Bu durumda, $D = C/\varphi(M)$ düz modüldür. Eğer M düz modül ise C de düz modüldür.

2.4 Funktor Kategorileri

I bir *küçük (small) kategori*, yani, nesneleri bir küme olan kategori ve $\mathcal{C}$ herhangi bir kategori olsun. Nesneleri I dan $\mathcal{C}$ ye funktorlar ve morfizmaları bu funktorlar arasındaki doğal dönüşümler (natural transformations) olarak alınırsa $\text{Func}(I, \mathcal{C})$ funktor kategorisi tanımlanmış olur. Bu kategoride bu morfizmalar arasındaki bileşke işlemi doğal dönüşümlerin bileşkesi olmak üzere bileşke işlemi birleşme özelliğine sahiptir. Her $T : I \rightarrow \mathcal{C}$ funktoru için $1_T : T \rightarrow T$ birim dönüşümü vardır. İki funktor arasındaki doğal dönüşümler her zaman bir küme oluşturur. S ve T funktorlar olmak üzere S den T ye tanımlı morfizmlerin kümesini $N(S, T)$ ile gösterelim. I bir küçük kategori olduğundan sadece bir küme olarak düşünülebilir. Bu nedenle doğal dönüşümlerin kümesi her $i \in I$ için $\text{Hom}(S(i), T(i))$ kümelerinin çarpımının (product) bir alt kümesi olarak görülebilir.

$\mathcal{C}$ bir kategori, C, C' ve C'' , $\mathcal{C}$ nin herhangi nesneleri olmak üzere eğer $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')$ kümesi bir abel grup ve $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C', C'') \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C') \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C'')$ bileşke dönüşümleri bilineer ise $\mathcal{C}$ kategorisine bir *öntoplamsal (preadditive) kategori* denir. $\mathcal{B}$ ve $\mathcal{C}$ öntoplamsal kategoriler ise $\alpha, \alpha' : C \rightarrow C'$ olmak üzere $T(\alpha + \alpha') = T(\alpha) + T(\alpha')$ özelliğini sağlayan $T : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ funktora bir *toplamsal (additive) funktor* denir.

Tanım 2.4.1 $\mathcal{C}$ bir kategori olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $\mathcal{C}$ bir *Abel kategoridir* denir.

- $\mathcal{C}$ öntoplamsaldır.
- $\mathcal{C}$ deki nesnelerin her sonlu ailesi bir çarpıma sahiptir.
- $\mathcal{C}$ deki her morfizma bir çekirdek ve bir eş-çekirdeğe sahiptir.
- Her α morfizması için $\beta : \text{Coker}(\ker \alpha) \rightarrow \text{Ker}(\text{coker} \alpha)$ bir izomorfizmadır.

Önerme 2.4.2 I bir küçük kategori ve $\mathcal{C}$ bir öntoplamsal kategori ise $\text{Func}(I, \mathcal{C})$ kategorisi de öntoplamsal kategoridir. Bundan başka, $\mathcal{C}$ bir Abel kategori ise $\text{Func}(I, \mathcal{C})$ kategorisi de bir Abel kategoridir.

İspat. [(Stenström 1975), Proposition IV.7.1] $\square$

Herbir $\mathcal{C}$ kategorisi için bir $\mathcal{C}^{op}$ dual kategorisini tanımlayabiliriz. Bu kategoride nesneler kümesi $\mathcal{C}$ kategorisi ile aynıdır fakat

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C') = \text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(C', C)$$

ve " $*$ ", $\mathcal{C}^{op}$ kategorisindeki bileşke işlemi ve " $\cdot$ ", $\mathcal{C}$ kategorisindeki bileşke işlemi olmak üzere $\alpha * \beta = \beta \cdot \alpha$ dır. $\mathcal{C}$ kategorisinde geçerli olan kavram ve karakterizasyonların duali $\mathcal{C}^{op}$ kategorisinde de geçerlidir.

Her bir $B \in \mathcal{B}$ nesnesi için $\text{Hom}(-, B) : \mathcal{B}^{op} \rightarrow \text{Ab}$ fonktörünü h_B ile gösterelim. Aşağıdaki önerme "Yoneda Lemma" olarak bilinir.

Önerme 2.4.3 $\mathcal{B}$ bir küçük öntoplamsal kategori olsun. $\mathcal{B}$ nin her B nesnesi ve her toplamsal $T : \mathcal{B}^{op} \rightarrow \text{Ab}$ fonktörü için

$$N(h_B, T) \cong T(B)$$

izomorfizması vardır.

İspat. [(Stenström 1975), Proposition IV.7.3] $\square$

Bu önermede $h_{B'} = \text{Hom}(-, B') : \mathcal{B}^{op} \rightarrow \text{Ab}$ olmak üzere T yerine $h_{B'}$ alınırsa $N(h_B, h_{B'}) \cong \text{Hom}(B, B')$ doğal izomorfizması elde edilir. Böylece $B \mapsto h_B$ fonktörü $\mathcal{B}$ nin $\text{Hom}(\mathcal{B}^{op}, \text{Ab})$ içine full gömülmesidir. Buradan $\text{Hom}(\mathcal{B}^{op}, \text{Ab})$ içinde

$$0 \longrightarrow T' \longrightarrow T \longrightarrow T'' \longrightarrow 0$$

dizisinin tam olması için gerek ve yeter koşul, $\mathcal{B}$ kategorisinin bir B nesnesi için

$$0 \longrightarrow T'(B) \longrightarrow T(B) \longrightarrow T''(B) \longrightarrow 0$$

dizisinin de tam olmasıdır.

$\mathcal{C}$ bir Abel kategori olsun. $\mathcal{C}$ nin bir C nesnesi için eğer $\text{Hom}(C, -) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ab}$ fonktoru tam ise C ye *projektif nesne* denir. $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki Abel kategori ve $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ bir toplamsal fonktor olsun. $\mathcal{C}$ de sıfırdan farklı her α morfizması için $T(\alpha) \neq 0$ ise T ye *sadık (faithful) fonktor* denir.

Önerme 2.4.4 *Bir T fonktorunun sadık olması için gerek ve yeter koşul sıfırdan farklı her C nesnesi için $T(C) \neq 0$ olmasıdır.*

İspat. [(Stenström 1975), Proposition IV.6.1] $\square$

$\mathcal{C}$ herhangi bir kategori ve $C, \mathcal{C}$ nin bir nesnesi olsun. Eğer $\text{Hom}(C, -)$ sadık ise C ye $\mathcal{C}$ için bir *üreteç (generator)* denir.

Önerme 2.4.5 *Bir P projektif nesnesinin bir üreteç olması için gerek ve yeter koşul sıfırdan farklı her bir C nesnesi için sıfırdan farklı bir $P \rightarrow C$ morfizmasının var olmasıdır.*

İspat. [(Stenström 1975), Proposition IV.6.3] $\square$

Sonuç 2.4.6 *$\mathcal{B}$ bir küçük öntoplamsal kategori olsun. Bu durumda $\{h_B\}_{B \in \mathcal{B}}$ ailesi $\text{Hom}(\mathcal{B}^{\text{op}}, \text{Ab})$ nin projektif üreteçlerinin ailesidir.*

İspat. [(Stenström 1975), Proposition IV.7.5] $\square$

$\mathcal{C}$ bir öntoplamsal kategori, I bir küçük kategori ve $F : I \rightarrow \mathcal{C}$ bir fonktor olsun. $X, \mathcal{C}$ nin bir nesnesi ve I nin her bir i nesnesi için bir $\alpha_i : X \rightarrow F(i)$ morfizması verilsin. Eğer I kategorisindeki her $\lambda : i \rightarrow j$ morfizmaları için $\alpha_j = F(\lambda)\alpha_i$ sağlanıyorsa $\{\alpha_i\}$ ailesine *uyumlu (compatible)* aile denir.

Tanım 2.4.7 (Stenström 1975) $\mathcal{C}$ bir öntoplamsal kategori, I bir küçük kategori ve $F : I \rightarrow \mathcal{C}$ bir fonktor olsun. I nin her bir i nesnesi ve $\mathcal{C}$ nin bir L nesnesi için, $\{\pi_i : L \rightarrow F(i)\}$ morfizmaların bir uyumlu ailesi ile $\{\xi_i : X \rightarrow F(i)\}$ uyumlu ailesi için, $\pi_i \xi = \xi_i$ olacak şekilde bir tek $\xi : X \rightarrow L$ morfizması varsa L ye $F : I \rightarrow \mathcal{C}$ fonktorunun bir *limiti* denir ve $L = \varprojlim F$ ile gösterilir. Burada bir F fonktorunun limiti izomorfizma altında tektir.

I bir küçük kategori olsun. $\mathcal{C}$ herhangi bir kategori olmak üzere her $F : I \rightarrow \mathcal{C}$ fonktörünün limiti varsa $\mathcal{C}$ kategorisine *tam kategori (complete)* denir. Eğer $\mathcal{C}$ bir tam kategori ve I bir küçük kategori olmak üzere $L = \varprojlim F$, $\text{Func}(I, \mathcal{C})$ den $\mathcal{C}$ ye bir fonktor olarak düşünülebilir. Bundan başka bir F fonktörünün eş-limiti (co-limit) dual olarak tanımlanır ve $\varinjlim F$ ile gösterilir. Bu durumda $\mathcal{C}$ kategorisinde her F fonktörünün eş-limiti varsa $\mathcal{C}$ ye *eş-tam (co-complete) kategori* denir. I bir ayrık (discrete) kategori, yani, morfizmaları sadece birim morfizmalar olsun. Bu durumda $\varprojlim F = \prod F(i)$ ve $\varinjlim F = \bigoplus F(i)$ olur. Eğer I bir yönlendirilmiş küme ise $F : I \rightarrow \mathcal{C}$ direkt sisteminin eş-limiti *direkt limit* ve $F : I^{op} \rightarrow \mathcal{C}$ sisteminin limiti ise *ters (inverse)* limittir.

I nesneleri $\{i, j, k\}$ kümesi ve morfizmalarının kümesi de, $i \rightarrow k, j \rightarrow k$ morfizmalara ve birim morfizmalar olan bir kategori olsun. $F : I \rightarrow \mathcal{C}$ fonktörünün limiti, gerçekte aşağıdaki gibi bir *pullback* diagramıdır. Böylece pullback diagramları limitlerin özel halidirler.

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim F & \longrightarrow & F(i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(j) & \longrightarrow & F(k) \end{array}$$

Sonuç 2.4.8 *Bir Abel kategorinin tam olması için gerek ve yeter koşul çarpımlara sahip olmasıdır.*

İspat. [(Stenström 1975), Corollary IV.8.3] $\square$

$\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ öntoplamsal kategoriler, I bir küçük kategori ve her $F : I \rightarrow \mathcal{C}$ fonktörü için $\varprojlim F$ var olsun. Eğer $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ fonktörü, $T(\varprojlim F) = \varprojlim TF$ ve $\varprojlim F \rightarrow F(i)$ morfizmalarını $\varprojlim TF \rightarrow TF(i)$ morfizmalarının içine taşıyor ise T fonktörüne *limitleri koruyor* denir. Bir $\mathcal{C}$ öntoplamsal kategorisi için C ve C' , $\mathcal{C}$ kategorisinin nesneleri olmak üzere $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, -) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ab}$ ve $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C') : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Ab}$ fonktorlarının her ikisi de limitleri korur. Yani $\mathcal{C}$ nin her bir C_i ve D_i nesneleri için

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \varprojlim D_i) = \varprojlim \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D_i) \text{ ve } \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\varinjlim C_i, D) = \varinjlim \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C_i, D)$$

sağlanır.

2.5 Grothendieck Kategoriler

Tanım 2.5.1 (*Stenström 1975*) Bir eş-tam Abel $\mathcal{C}$ kategorisinde direkt limitler tam ve $\mathcal{C}$ bir üretece sahipse, bu kategoriye *Grothendieck kategori* denir.

Önerme 2.5.2 *Grothendieck kategoriler tamdır.*

İspat. [(Stenström 1975), Corollary X.4.4] $\square$

Sonuç 2.5.3 *Her Grothendieck kategori çarpımlara sahiptir.*

İspat. Sonuç 2.4.8 den açıktır. $\square$

Bir R halkası için $\text{Mod-}R$ kategorisinde direkt limitler tam fonktörler olduğundan bir Grothendieck kategoridir. Üstelik $\mathcal{B}$ bir küçük öntoplamsal kategori olmak üzere $\mathcal{C} = \text{Hom}(\mathcal{B}^{\text{op}}, \text{Ab})$ kategorisi bir Grothendieck kategoridir. Burada $\mathcal{B}$ kategorisinin nesneleri, $\mathcal{C}$ kategorisinin projektif üreteçlerinin ailesidir.

Tanım 2.5.4 (*Carceles 2008*) $\mathcal{A}$ direkt toplamalar altında kapalı bir Abel kategori olsun. Bu kategorideki her $\bigoplus_{i \in I} X_i : \longrightarrow Y$ epimorfizması için $\bigoplus_{i \in F} X_i : \longrightarrow Y$ bir epimorfizma olacak şekilde sonlu bir $F \subset I$ alt kümesi varsa Y nesnesine *sonlu üretilmiş (finitely generated) nesne* denir.

$\mathcal{C}$ bir Grothendieck kategori olsun. Yukarıdaki tanıma denk olarak, $C = \sum C_i$ eşitliğini sağlayan $\mathcal{C}$ kategorisinin C_i direkt alt nesnelerinin ailesi için $C = C_{i_o}$ olacak şekilde bir $i_o \in I$ varsa C nesnesine sonlu üretilmiş nesne denir. Burada $C = \sum C_i$ nesnesine C_i alt nesnelerinin *direkt bileşimi (direct union)* denir.

Tanım 2.5.5 (*Carceles 2008*) $\mathcal{A}$ direk limitlere sahip bir toplamsal kategori ve P , $\mathcal{A}$ nın bir nesnesi olsun. Eğer $\text{Hom}(P, -)$ fonktörü direk limitleri koruyor ise P nesnesine *sonlu temsil edilebilir (finitely presentable) nesne* denir.

Tanım 2.5.6 (*Carceles 2008*) Eğer bir $\mathcal{C}$ kategorisi sonlu temsil edilebilir üreteçler ailesine sahip ise, $\mathcal{C}$ kategorisine *yerel sonlu temsil edilmiş (locally finitely presented) kategori* denir. Yerel sonlu temsil edilmiş kategoriler ilk olarak (Crawley-Boevey 1994) de ele alınmıştır.

Önerme 2.5.7 *Bir yerel sonlu temsil edilmiş Grothendieck kategorideki her nesne sonlu temsil edilebilir nesnelerin direkt limitidir.*

İspat. [(Wisbauer 1991), Proposition 34.2] $\square$

$\mathcal{C}$ bir yerel sonlu temsil edilmiş Grothendieck kategori olsun. Bu kategorideki bir

$$0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisi için X' ve X'' sonlu temsil edilebilir nesneler ise X de bir sonlu temsil edilebilir nesnedir.

2.6 Sonlu Ulaşılabilir Kategoriler

Tanım 2.6.1 (*Adamek Rosicky 1994*) $\mathcal{A}$ direkt limitlere sahip bir toplamsal kategori olsun. $\mathcal{A}$ kategorisindeki her nesne bu kategorinin sonlu temsil edilebilir nesnelerinin bir direkt limiti olacak şekilde sonlu temsil edilebilir nesnelerin bir kümesine sahip ise $\mathcal{A}$ kategorisine *sonlu ulaşılabilir (finitely accessible) kategori* denir.

Bir sonlu ulaşılabilir kategorinin her nesnesi sonlu temsil edilebilir nesnedir. Ayrıca sonlu ulaşılabilir kategoriler her zaman tam olmak zorunda değildir.

Her yerel sonlu temsil edilmiş kategori, sonlu ulaşılabilir kategoridir fakat tersi her zaman doğru değildir. Örneğin; küçük kategoriler, morfizmaları bire-bir fonksiyonlar olmak üzere, sonlu ulaşılabilir kategorilerdir, fakat yerel sonlu temsil edilmiş kategori değildirler.

Tanım 2.6.2 (*Borceux Rosicky 2007*) $\mathcal{A}$ bir sonlu ulaşılabilir kategori, $f : A \rightarrow B$ bu kategoride bir morfizma ve A', B' nesneleri $\mathcal{A}$ nın sonlu temsil edilebilir nesneleri olsun. Her bir

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{f'} & B' \\ u \downarrow & & \downarrow \varphi \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

değişmeli diagramı için $u = \bar{u}f'$ olacak şekilde bir $\bar{u} : B' \rightarrow A$ morfizması varsa f ye *pür-morfizma* denir.

Parçalanmış (split) monomorfizmalar pür monomorfizmalardır. Pür morfizmaların bileşkesi de pür morfizmadır ve eğer $f \circ g$ pür ise g de pür morfizmadır. Bir sonlu ulaşılabilir $\mathcal{A}$ kategorisi içindeki herhangi pür tam

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

dizisi parçalanmış ise $\mathcal{A}$ nın bir X nesnesine *pür-injektif nesne* denir.

Bundan başka pür morfizma tanımları direkt limitler veya Hom fonktor yardımı ile aşağıdaki biçimde yapılabilir.

$\mathcal{A}$ bir sonlu ulaşılabilir toplamsal kategori ve $u : A \rightarrow A'$, $\mathcal{A}$ da bir morfizma ve u morfizması $\mathcal{A}$ içinde $\{u_i : A_i \rightarrow A'_i\}$ morfizmalarının direkt sisteminin bir direk limiti olsun. Eğer her bir u_i parçalanmış monomorfizma olmak üzere $\{f_{ij} : A_i \rightarrow A_j\}_{i \leq j}$ ve $\{g_{ij} : A'_i \rightarrow A'_j\}_{i \leq j}$ morfizmaların direkt sistemleri varsa u ya *pür-monomorfizma* denir. Ayrıca eğer her bir u_i parçalanmış epimorfizma olmak üzere $\{f_{ij} : A_i \rightarrow A_j\}_{i \leq j}$ ve $\{g_{ij} : A'_i \rightarrow A'_j\}_{i \leq j}$ morfizmaların direkt sistemleri varsa u ya *pür-epimorfizma* denir.

Böylece $\mathcal{A}$ kategorisinde, her pür-monomorfizma $\mathcal{A}$ da bir eş-çekirdeğe (co-kernel) ve benzer biçimde her pür-epimorfizma $\mathcal{A}$ da bir çekirdeğe sahiptir. Bu çekirdek u_i morfizmalarının çekirdeklerinin direk limiti ve bu eş-çekirdek de u_i morfizmalarının eş-çekirdeklerinin bir direkt limitidir.

$\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}$ kategorisinin sonlu temsil edilebilir nesnelerinin tüm izomorf sınıflarının kümesi olsun. $\mathcal{A}_0$ ın herhangi A_0 nesnesi için $\text{Hom}(A_0, -)$ direkt limitleri koruduğundan, $\mathcal{A}_0$ daki projektif nesnelerinin bulunması $\mathcal{A}$ kategorisindeki pür epimorfizmalara bağlıdır. Bundan başka, $\mathcal{A}$ kategorisindeki her nesne $\mathcal{A}_0$ kategorisindeki nesnelerin direkt limiti olduğundan, bir $p : A \rightarrow A'$ morfizmasının pür-epimorfizma olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{A}_0$ kategorisindeki nesnelerin projektif olmasıdır.

Tanım 2.6.3 $\mathcal{A}$ kategorisindeki herhangi bir u pür-monomorfizması için eğer $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(u, A)$, Ab kategorisinde bir epimorfizma ise $\mathcal{A}$ ın A nesnesine *pür-injektif nesne* denir. Ayrıca, $\mathcal{A}$ kategorisindeki herhangi bir p pür-epimorfizması için $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, p)$, Ab kategorisinde bir epimorfizma ise $\mathcal{A}$ ın A nesnesine *pür-projektif nesne* denir.

Tanım 2.6.4 (*Makkai Pare 1989*) $\mathcal{C}$ bir sonlu ulaşılabilir Grothendieck kategori olsun. Eğer bu kategoride her

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisi pür ise F ye *düz (flat) nesne* denir.

Her düz fonktor, sonlu temsil edilebilir fonktorların bir limitidir ve ayrıca her düz fonktor limitleri korur.

Tanım 2.6.5 (*Garcia 1999*) $\mathcal{F}$, bir $\mathcal{A}$ Abel kategorisindeki nesnelerin herhangi bir sınıfı ve X , $\mathcal{A}$ kategorisinde bir nesne olsun. F ve F' , $\mathcal{F}$ sınıfının nesneleri olmak üzere her bir $X \rightarrow F'$ morfizması için

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & F \\ \downarrow & & \\ F' & & \end{array}$$

diagramı değişmeli olacak şekilde bir $\phi : X \rightarrow F$ homomorfizması varsa F ye bir $\mathcal{F}$ -*önzarf* denir.

Eğer

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & F \\ \downarrow & & \\ F & & \end{array}$$

diagramı sadece otomorfizmalarla değişmeli olabiliyorsa $\phi : X \rightarrow F$ ye bir $\mathcal{F}$ -zarf denir.

$\mathcal{F}$ -örtüler dual olarak aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 2.6.6 (*Garcia 1999*) $\mathcal{F}$, bir $\mathcal{A}$ Abel kategorisindeki nesnelerin herhangi bir sınıfı ve X , $\mathcal{A}$ kategorisinde bir nesne olsun. F ve F' , $\mathcal{F}$ sınıfının nesneleri olmak üzere her bir $F' \rightarrow X$ morfizması için

$$\begin{array}{ccc} & F' & \\ & \downarrow & \\ F & \xrightarrow{\phi} & X \end{array}$$

diagramı değişmeli olacak şekilde bir $\phi : F \rightarrow X$ homomorfizması varsa F ye bir $\mathcal{F}$ -önörtü denir.

Eğer

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ & \downarrow & \\ F & \longrightarrow & X \end{array}$$

diagramı sadece otomorfizmalarla değişmeli olabiliyorsa $\phi : F \rightarrow X$ ye bir $\mathcal{F}$ -örtü denir.

Modül sınıflarında bahsettiğimiz "Wakamatsu Lemmaları" Grothendieck kategoriler için de geçerlidir. Bundan başka, sonlu ulaşılabilir ve Grothendieck kategorilerde aşağıdaki bilinen özellikler vardır.

Teorem 2.6.7 $\mathcal{C}$ bir toplamsal yerel sonlu temsil edilmiş kategori ve X bu kategoride bir nesne olsun. X nesnesinin pür monomorfizma olan bir pür injektif $\eta : X \rightarrow PE(X)$ zarfı vardır.

İspat. [(Herzog 2003), Theorem 6] $\square$

Teorem 2.6.8 *Bir $\mathcal{G}$ Grothendieck kategorinin nesnelerinin direkt eş-limitler ve eş-çarpımlar altında kapalı bir sınıfı $\mathcal{F}$ olsun. $\mathcal{F}$ nin her bir nesnesi $\mathcal{F}$ nin bir $\mathcal{S}$ alt kümesinin nesnelerinin bir direkt limiti ise $\mathcal{G}$ kategorisinin her bir nesnesi bir $\mathcal{F}$ -örtüye sahiptir.*

İspat. [(El Bashir 2006), Theorem 3.2] $\square$

Bundan başka, $\mathcal{F}$ nin bir F nesnesinin bir pür alt nesnesi P olmak üzere F/P , $\mathcal{F}$ nin bir nesnesidir.

Teorem 2.6.9 *$\mathcal{C}$ bir toplamsal sonlu ulaşılabilir kategori ve $\mathcal{C}_0$ bu kategorinin direkt limitler ve pür epimorfik görüntüler altında kapalı bir sınıfı olsun. Bu durumda $\mathcal{C}$ nin her nesnesi bir $\mathcal{C}_0$ -örtüye sahiptir.*

İspat. [(Crivei et al. 2010), Theorem 2.6] $\square$

Böylece, özel olarak bir toplamsal sonlu ulaşılabilir Grothendieck kategoride her bir düz nesne bir düz örtüye sahiptir.

3 $\text{Func}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ KATEGORİSİNDE PÜR-İNJEKTİFLİK

Bu bölümde, ilk olarak $\mathcal{A}$ bir toplamsal sonlu ulaşılabilir kategori ve $\mathcal{A}_0$ bu kategorinin sonlu temsil edilebilir nesnelerinin izomorfizma sınıfı olmak üzere $\mathcal{A}_0$ dan Abel gruplara tanımlı bütün kontravariant toplamsal fonktorların sınıfında "eş-burulma teorisi" incelenmiştir. Özgün bir sonuç olarak, bir toplamsal sonlu ulaşılabilir kategoride bir pür-injektif nesnenin endomorfizma halkasının bir eş-burulmalı halka olduğu gösterilmiştir. Böylece bu pür-injektif nesnenin endomorfizmaları halkası (von Neumann) regüler olur.

Toplamsal sonlu ulaşılabilir kategorilerin tam olmadığı bilinen bir gerçektir. Örneğin sol coherent olmayan bir R halkası üzerinde düz sağ R -modüllerin kategorisi direkt çarpımlar altında kapalı değildir. Aynı zamanda düz sağ R -modüllerin kategorisi her zaman bir Abel kategori olmayabileceğinden dolayı bir Grothendieck kategori de değildir (Garcia Martinez 1995). Yine bu bölümde, fonktorların quasi-limitini tanımlayarak, toplamsal sonlu ulaşılabilir kategorilerin her zaman quasi-tam olduğu elde edildi.

Aynı zamanda bu bölümde, bir toplamsal sonlu ulaşılabilir kategorinin bir pür eş-üretece sahip olduğu gösterildi.

3.1 $\text{Func}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ ve $\text{Flat}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ Kategorileri

$\mathcal{A}$ bir toplamsal sonlu ulaşılabilir kategori ve $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}$ kategorisinin sonlu temsil edilebilir nesnelerinin izomorf sınıfı olsun. $\mathcal{A}_0$ dan Abel gruplara tanımlı bütün kontravariant toplamsal fonktorların sınıfını $\text{Func}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ ile gösterelim. $\mathcal{A}$ bir küçük kategori olduğundan, $\text{Func}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$, nesneleri kontravariant toplamsal fonktorlar ve morfizmaları bu fonktorlar arasındaki doğal dönüşümler olan bir kategori tanımlar. (Stenstrom 1975) de bu kategorinin tam ve eş-tam olduğu gösterilmiştir. $\mathcal{A}$ bir küçük kategori ve $\text{Func}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ kategorisinin nesneleri Abel kategorilere tanımlı fonktorlar olduğundan, $\text{Func}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ kategorisi bir Abel kategoridir.

$\text{Func}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ kategorisi kontravariant toplamsal fonktorların sınıfı olduğundan bir toplamsal kategoridir. Bundan başka $\text{Func}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ bir Grothendieck kategoridir. Aynı zamanda $\text{Func}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ kategorisi elemanları sonlu temsil edilebilir ve projektif olan bir

$$\{\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, A) \mid A \in \mathcal{A}_0\}$$

üreteç kümesine sahiptir. Böylece bu kategorinin projektif üreteçlerinin kümesi $\{\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, A) \mid A \in \mathcal{A}_0\}$ olduğundan direkt limitlerin tam olduğunu görmek kolaydır. Sonuç olarak, $\text{Func}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ bir yerel sonlu temsil edilmiş kategori ve dolayısıyla bir toplamsal sonlu ulaşılabilir kategoridir.

Bu çalışmada $\text{Func}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ kategorisinin tüm düz nesnelerinin alt kategorisini $\text{Flat}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ ile göstereceğiz.

Önerme 3.1.1 *$\mathcal{A}$ bir toplamsal sonlu ulaşılabilir kategori ve $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}$ kategorisinin sonlu temsil edilebilir nesnelerinin izomorf sınıfı olsun. Buradan $\mathcal{A}$ kategorisi, $\text{Func}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ kategorisinin bütün düz nesnelerinin alt kategorisi $\text{Flat}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ kategorisine denktir.*

İspat.

$$T : \mathcal{A} \longrightarrow \text{Func}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$$

$$\begin{aligned} A &\longmapsto T(A) : \mathcal{A}_0 \rightarrow \text{Ab} \\ A_0 &\mapsto \text{Hom}(A_0, A) \end{aligned}$$

funktorunu göz önüne alalım . "Yoneda Lemma" dan T fonktoru $\mathcal{A}$ ve $\text{Im}(T)$ arasında bir denklik tanımlar [(Adamek Rosicky 1994), sayfa 3].

Diğer taraftan $\mathcal{A}_0$ ın herhangi bir A_0 nesnesi için, her bir A_0 sonlu temsil edilebilir olduğundan her $\text{Hom}(A_0, -)$ direkt limitleri korur. Böylece bir $\mathcal{A}_0$ ın bir A_i nesnesi için $\text{Hom}(-, A)$, $\text{Im}(T)$ nin $\text{Hom}(-, A_i)$ fonktorlarının bir direkt limitidir. Burada $\mathcal{A}_0$ ın herhangi A_i nesnesi için $\text{Hom}(-, A_i)$, $\text{Func}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ kategorisinde bir sonlu temsil edilebilir projektif nesnedir.

Böylece, $\text{Im}(T)$ sonlu temsil edilebilir projektif fonktorların bütün direkt limitlerinin kategorisi olan $\text{Flat}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ kategorisidir. $\square$

Yukardaki önerme gereğince T fonktoru $\mathcal{A}$ ve $\text{Flat}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ kategorileri arasında bir denklik gösterdiğinden, bir A nesnesinin $\mathcal{A}$ da pür-injektif yada pür-projektif olması için gerek ve yeter koşul $T(A)$ nın $\text{Flat}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ kategorisinde pür-injektif yada pür-projektif olmasıdır. Özel olarak, A nın pür-projektif olması için gerek ve yeter koşul A nın $\mathcal{A}_0^{\text{op}}$ kategorisindeki nesnelerin bir direkt toplamının, bir direkt toplananı olmasıdır. Ayrıca A nın pür-injektif olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir F düz fonktoru için

$$\text{Ext}_{\text{Func}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})}^1(F, T(A)) = 0$$

olmasıdır.

Diğer taraftan, $\text{Func}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ kategorisinin bütün düz fonktorlarının sınıfı olan $\mathcal{F} = \text{Flat}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ yi göz önüne alalım. Bu sınıf

$$\{\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, A) \mid A \in \mathcal{A}_0\}$$

kümesinin direkt limitler altındaki kapanışdır. Ayrıca $\text{Flat}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ genişlemeler altında kapalıdır. Böylece [(El Basir 2006) Teorem 3.2] den, $\text{Func}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ kategorisindeki herhangi bir nesne $\text{Flat}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ kategorisinde bir örtüye sahiptir.

Her F düz fonktoru için $\text{Ext}_{\text{Func}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})}^1(F, C) = 0$ olacak şekildeki $\text{Func}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ nin nesnesi olan bütün C fonktorlarının sınıfını $\mathcal{C}$ ile gösterelim. (Enochs et al. 2004) ten $\text{Func}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ kategorisindeki herhangi bir H fonktoru $\mathcal{C}$ de bir zarfa sahiptir ve $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ bir eş-burulma teorisidir. O halde herhangi bir $\text{Flat}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ -örtünün çekirdeği $\mathcal{C}$ ye aittir ve herhangi bir $\mathcal{C}$ -zarfın eş-çekirdeği de $\mathcal{F}$ ye aittir. Özel olarak $\text{Flat}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ kısa tam dizilere göre genişlemeler altında kapalı olduğundan $\text{Flat}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ sınıfındaki bir fonkturun $\mathcal{C}$ -örtüsü de $\text{Flat}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ sınıfında olur (Aldrich et al. 2001).

3.2 Pür-İnjektiflik

Aşağıdaki Önerme $\text{Flat}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ sınıfında $\mathcal{C}$ -örtü ve pür-injektiflik arasında güçlü bir bağıntı verir. Ayrıca bu bağıntıyı dördüncü bölümde kullanacağız.

Her F düz fonktoru için $\text{Ext}_{\text{Func}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})}^1(F, C) = 0$ olacak şekildeki $\text{Func}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ nin nesnesi olan bütün C fonktörlerinin sınıfını $\mathcal{C}$ ile göstereyim.

Önerme 3.2.1 $F, \text{Flat}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ kategorisinde bir fonktor ve $u : F \rightarrow C$ morfizması de F nin $\mathcal{C}$ -zarfı olsun. Bu durumda u bir pür-monomorfizmadır. Ayrıca C pür-injektif nesnedir.

İspat. $\text{Coker}(u)$ nesnesinin $\mathcal{F}$ kategorisinin bir nesnesi olduğunu biliyoruz. O zaman $\text{Coker}(u)$, $\mathcal{A}_0$ ın A_i nesneleri için projektif $\text{Hom}(-, A_i)$ fonktörlerinin bir direkt limitidir. Buradan pullback diagramı oluşturularak $\text{Coker}(u)$ parçalanmış morfizmaların direkt limiti ve u da parçalanmış monomorfizmaların bir direkt limiti olur ve buradan u bir pür-monomorfizmadır.

Diğer taraftan $v : F \rightarrow F'$, $\mathcal{F}$ de bir pür-monomorfizma olsun. Bu durumda $\text{Coker}(v)$, $\mathcal{F}$ nin bir nesnesi ve böylece $\text{Ext}^1(\text{Coker}(v), C) = 0$ olur ki buradan herhangi $f : F \rightarrow C$ morfizması aşağıdaki diagramı değişmeli yapacak şekilde bir $h : F' \rightarrow C$ morfizmasına genişletilebilir,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F & \xrightarrow{v} & F' & \longrightarrow & \text{Coker}(v) \longrightarrow 0 \\ & & f \downarrow & \swarrow & h & & \\ & & C & & & & \end{array}$$

Böylece C pür-injektif olur. $\square$

Önerme 3.2.1 ile $\text{Flat}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ kategorisindeki nesnelerin $\mathcal{C}$ -zarfları yine bu kategorideki pür-injektif zarflardır. Şimdi $\mathcal{A}$ ve $\text{Flat}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ kategorileri arasındaki T denkliği kullanılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.2 $\mathcal{A}$ bir sonlu ulaşılabilir kategori olsun. $\mathcal{A}$ daki her nesne A da bir $u : A \rightarrow E$ pür-injektif zarfa sahiptir. Bundan başka, $T(u)$ da $T(A)$ ın $\text{Func}(\mathcal{A}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ kategorisindeki $\mathcal{C}$ -zarfıdır.

Giriş bölümünde belirttiğimiz gibi, bu tezdeki temel amaçlardan birisi de pür-injektif zarfların varlığını kullanarak sonlu ulaşılabilir kategorilerin yapısını incelemektir.

Bilindiği gibi, R bir halka olmak üzere herhangi bir sağ R -modül C ve her düz F sağ R -modülü için $\text{Ext}_R^1(F, C) = 0$ ise C modülüne *eş-burulmalı modül* denir. (Guil Herzog 2004) te gösterildiği gibi herhangi sağ eş-burulmalı halka (von Neumann) regülerdir. Böylece, aşağıdaki önerme toplamsal sonlu ulaşılabilir kategorilerde pür-injektif nesneler için güzel bir sonuçtur.

Önerme 3.2.3 *E bir $\mathcal{A}$ toplamsal sonlu ulaşılabilir kategoride bir pür injektif nesne ve $R = \text{End}_{\mathcal{A}}(E)$ olsun. Bu durumda E nesnesinin endomorfizmalar halkası R , bir eş-burulmalı halkadır.*

İspat. F bir düz sağ R -modül olsun. Burada sağ R -modüller sınıfında herhangi bir

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{v} X \xrightarrow{q} F \rightarrow 0$$

genişlemesinin parçalanmış olduğunu göstermek ispat için yeterlidir.

Şimdi

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(E, -) : \mathcal{A} \longrightarrow \text{Mod-}R$$

funktorunu göz önüne alalım. [(Freyd 1964), sayfa 84] den $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(E, -)$ Adjoint Funktor Teoreminin hipotezini sağlar. Böylece $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(E, -)$ fonktoru

$$E \cong G \circ \text{Hom}_{\mathcal{A}}(E, E)$$

olacak şekilde bir $G : \text{Mod-}R \rightarrow \mathcal{A}$ sol adjoint fonktora sahiptir.

Diğer taraftan, F bir düz R -modül olduğundan, sonlu temsil edilmiş projektif modüllerin bir direkt limiti olarak yazılabilir. $F = \varinjlim P_i$ olsun. Pullback diagramı oluşturularak

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{v} X \xrightarrow{q} F \rightarrow 0$$

kısa tam dizisi

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{v} & X & \xrightarrow{q} & F & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ o & \longrightarrow & R & \xrightarrow{v_i} & X_i & \xrightarrow{q_i} & P_i & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

diagramı ile

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{v_i} X_i \xrightarrow{q_i} P_i \rightarrow 0$$

parçalanmış kısa tam dizilerinin bir direkt limiti olur.

Şimdi, G fonktoru direkt limitleri koruduğundan $G(v) : G(R) \rightarrow G(X)$, $\mathcal{A}$ da $G(v_i) : G(R) \rightarrow G(X_i)$ parçalanmış monomorfizmaların direkt limitidir. O zaman $E \cong G(R)$ pür-injektif olduğundan $G(v)$ parçalanandır. Böylece $f \circ G(v) = 1_{G(R)}$ olacak şekilde bir $f : G(X) \rightarrow G(R)$ morfizması vardır. Buradan $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(E, -)$ fonktörünü f ye uygularsak

$$(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(E, -)(f)) \circ (\text{Hom}_{\mathcal{A}}(E, -)G(v)) = 1_{\text{Hom}_{\mathcal{A}}(E, -) \circ G(R)}$$

olur. Böylece,

$$\begin{array}{ccccc} R & & \xrightarrow{v} & & X \\ \downarrow 1_R & & & & \downarrow \\ \text{Hom}_{\mathcal{A}}(E, G(R)) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(E, G(X)) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(E, G(R)) \end{array}$$

değişmeli diagramını elde ederiz. Diagramdaki alt dizi parçalanmış olduğundan v de parçalanandır. $\square$

Sonuç olarak [(Stenström 1975) Proposition 5.1] den, E bir $\mathcal{A}$ toplamsal sonlu ulaşılabilir kategoride bir pür-injektif nesne olmak üzere eğer E ayrıştırılmaz nesne ise E nin endomorfizmaları halkası bir yerel (local) halka olur.

3.3 Quasi-Limitler

Sonlu ulaşılabilir kategori olan düz modüllerin kategorisi, direkt çarpımlar altında kapalı değildir. Dolayısıyla bir tam kategori değildir. Pür-injektif modüller eş-burulmalı modüldür fakat tersi her zaman doğru olmayabilir. Eğer $\text{Flat-}R$ direkt çarpımlara sahipse, her düz eş-burulmalı R -modül pür-injektiftir (Xu 1996). Bu nedenle düz modüller kategorisinin direkt çarpımlara sahip olmaması bu kategoride pür-injektifliğin incelenebilmesi açısından önemlidir.

Bu bölümde, ilk kez kategorilerde *quasi-limit* kavramını tanımlayıp, bu kavramın temel özelliklerini inceleyeceğiz. Daha sonra son bölümde göreceğimiz gibi, quasi-limit kavramı sonlu ulaşılabilir kategorilerin karakterizasyonunda önemli bir rol oynar.

Bu bölüm boyunca $\mathcal{C}$ herhangi bir kategoriye ve I bir küçük (small) kategoriye, yani nesneleri bir küme olan kategoriye gösterecektir.

Tanım 3.3.1 $H : I \rightarrow \mathcal{C}$ (kovariant) fonktoru $\mathcal{C}$ kategorisinde bir nesne olsun. Her bir $i \in I$ için $\pi_i : F \rightarrow H(i)$ morfizmaların bir uyumlu (compatible) ailesi olmak üzere;

- Her bir $\xi_i : X \rightarrow H(i)$ uyumlu ailesi için $\pi_i \xi = \xi_i$ olacak şekilde bir $\xi : X \rightarrow F$ morfizması vardır.
- Eğer her bir $i \in I$ için $\pi_i \circ h = \pi_i$ olacak şekilde bir $h : F \rightarrow F$ doğal dönüşümü varsa h bir otomorfizmadır.

özellikleri sağlanıyorsa, $F = \varprojlim H$ nesnesine H fonktörünün *quasi-limiti* denir.

Tanımda yer alan birinci şart tanımın hipoteziyle birlikte limit tanımı olduğundan, eğer varsa bir $H : I \rightarrow \mathcal{C}$ fonktörünün iki quasi-limiti izomorftur. Özel olarak, H nin quasi-limitinin bir limit olması için gerek ve yeter koşul H fonktörünün $\mathcal{C}$ kategorisinde limitinin olmasıdır.

Teorem 3.3.2 $\mathcal{C}$ bir toplamsal sonlu ulaşılabilir kategori ve $\mathcal{C}_0$ bu kategorinin sonlu temsil edilebilir nesnelerinden oluşan bir üreteç kümesi olmak üzere $H : I \rightarrow \text{Flat}(\mathcal{C}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ bir (kovariant) fonktor, H nin $\text{Func}(\mathcal{C}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ kategorisindeki limiti $(\varprojlim H, \{\pi_i : \varprojlim H \rightarrow H(i)\})$ ve $q : F \rightarrow \varprojlim H$ morfizması da $\varprojlim H$ nin bir düz örtüsü olsun. Bu durumda $(F, \{\pi_i \circ q : F \rightarrow H(i)\})$ H fonktorunun $\text{Flat}(\mathcal{C}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ kategorisinde bir quasi-limittir.

İspat. $X, \text{Flat}(\mathcal{C}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ kategorisinde sabit bir nesne ve $\xi_i : X \rightarrow H(i)$ morfizmaların bir uyumlu ailesi olsun. $(\varprojlim H, \{\pi_i\}_I)$, H fonktorunun bir limiti olduğundan her $i \in I$ için $\pi_i \circ g = \xi_i$ olacak şekilde bir $g : X \rightarrow \varprojlim H$ morfizması vardır. Hipotezden $q : F \rightarrow \varprojlim H$, H fonktorunun bir düz örtüsü olduğundan, $q \circ h = g$ olacak şekilde bir $h : X \rightarrow F$ morfizması vardır. Böylece,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\xi_i} & H(i) \\ h \downarrow & \searrow & \uparrow \pi_i \\ F & \xrightarrow{q} & \varprojlim H \end{array}$$

değişmeli diagramını elde ederiz. Buradan her $i \in I$ için, $(\pi_i \circ q) \circ h = \xi_i$ olur.

Son olarak, her $i \in I$ için $h : F \rightarrow F$ doğal dönüşümü $(\pi_i \circ q) \circ h = \pi_i \circ q$ eşitliğini sağladığını kabul edelim. Bu durumda $q : F \rightarrow \varprojlim H$ bir düz örtü olduğundan h bir otomorfizma olur. $\square$

Tanım 3.3.3 I bir küçük kategori ve $\mathcal{C}$ herhangi kategori olmak üzere I dan $\mathcal{C}$ ye tanımlı her $H : I \rightarrow \mathcal{C}$ fonktoru, $\mathcal{C}$ de bir quasi-limite sahip ise bu kategoriye *quasi-tam kategori* denir. $\square$

Daha önce de belirttiğimiz gibi toplamsal sonlu ulaşılabilir kategoriler tam olmak zorunda değildir. Örneğin, sol cohorent olmayan bir R halkası üzerinde düz sağ R -modüllerin kategorisi herhangi direkt çarpımlar altında kapalı değildir, dolayısıyla bir tam kategori değildir. Ancak, aşağıdaki sonuçta göstereceğimiz gibi bu kategoriler her zaman quasi-tam kategorilerdir.

Sonuç 3.3.4 Her toplamsal sonlu ulaşılabilir kategori quasi-tamdır.

İspat. $\mathcal{C}$ bir toplamsal sonlu ulaşılabilir kategori ve $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}$ nin sonlu temsil edilebilir nesnelerinden oluşan alt kategorisi olmak üzere $\mathcal{C}$ nin $\text{Flat}(\mathcal{C}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ kategorisine izomorf olduğunu biliyoruz. $\text{Func}(\mathcal{C}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ bir Grothendieck kategori olduğundan I bir küçük kategori olmak üzere, herhangi kovariant $H : I \rightarrow \text{Flat}(\mathcal{C}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ fonktörünün $\text{Func}(\mathcal{C}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ kategorisinde bir limiti vardır. Böylece, Teorem 3.3.2 den istenilen sonuç elde edilir. $\square$

Bir $\mathcal{C}$ kategorisinde çarpım, pullback ve çekirdek kavramları bazı özel küçük kategorilerden $\mathcal{C}$ kategorisine tanımlı fonktörlerin limitleridir. Buradan, benzer biçimde, quasi-çarpım, quasi-pullback ve quasi-çekirdek kavramları tanımlanabilir. Böylece, bir $\mathcal{C}$ kategorisinin quasi tam olması için gerek ve yeter koşul quasi-çekirdek ve quasi-çarpımının olmasıdır. Sonuç 3.3.4 den dolayı, sonlu ulaşılabilir kategoriler quasi-çekirdek ve quasi-çarpıma sahiptir.

Bu bölümü toplamsal sonlu ulaşılabilir kategorilerde eş-üreteçlerin varlığını göstererek tamamlayalım. Bilindiği gibi herhangi bir toplamsal $\mathcal{C}$ kategorisinde sıfırdan farklı her $f : A \rightarrow B$ morfizması için $g \circ f \neq 0$ olacak şekilde bir $g : B \rightarrow E$ morfizması varsa E nesnesine $\mathcal{C}$ de bir eş-üreteç (*co-generator*) denir.

Önerme 3.3.5 *Bir sonlu ulaşılabilir toplamsal kategori $\mathcal{C}$ bir eş-üretece sahiptir.*

İspat. $\text{Func}(\mathcal{C}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ bir Grothendieck kategori olduğundan bir eş-üretece sahiptir. Q bu kategoride bir eş-üreteç ve $q : E \rightarrow Q$, Q nun bir düz örtüsü olsun. O zaman $f : A \rightarrow B$ morfizması $\text{Flat}(\mathcal{C}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ kategorisinde sıfırdan farklı bir morfizma ise, $g \circ f \neq 0$ olacak şekilde bir $g : B \rightarrow Q$ morfizması vardır. Diğer taraftan, $q : E \rightarrow Q$ bir düz örtü olduğundan $q \circ h = g$ olacak şekilde bir $h : B \rightarrow E$ morfizması vardır. Böylece $q \circ h \circ f = g \circ f \neq 0$ olduğundan $h \circ f \neq 0$ elde edilir. Böylece E , $\mathcal{C}$ kategorisinin bir eş-üretecidir. $\square$

4 AYRIŞTIRILAMAZ NESNELER

Son olarak, bu bölümde öncelikle bir toplamsal sonlu ulaşılabilir kategorinin ayrıştırılmaz pür-injektif nesneler sınıfının bir küme oluşturduğu gösterildi. Buradan hareketle herhangi bir düz fonktorun bu kümenin elemanlarının, yani ayrıştırılmaz pür-injektif nesnelerinin limiti içine pür olarak gömülebileceği ispatlandı.

Ayrıca, bir toplamsal sonlu ulaşılabilir kategorinin bir pür eş-üreteç kümesine sahip olduğu gösterilmiştir. Bu sonuç, herhangi bir toplamsal sonlu ulaşılabilir $\mathcal{C}$ kategorisinin pür-injektif özellikleri ile ayrıştırılmaz düz pür-injektif nesnelerin sınıfı üzerinde bir topoloji kurulabileceğini ifade eder. Bu yöntem modül kategorilerinde Ziegler spektrumuyla kurulan topolojiye benzer bir yöntemdir.

4.1 Alt Funktorlar

Tanım 4.1.1 (*Auslander 1976*) $\mathcal{C}$ bir küçük toplamsal kategori ve $F : \mathcal{C} \rightarrow Ab$ bir kontravariant fonktor olsun. $\mathcal{C}$ nin herhangi bir C nesnesi için, sıfırdan farklı sabit bir $X_C \subset \bigoplus_{C \in \mathcal{C}} F(C)$ alt kümesini alalım. $G : \mathcal{C} \rightarrow Ab$ olmak üzere;

- $\pi_C : \bigoplus_{C \in \mathcal{C}} F(C) \rightarrow F(C)$ doğal projeksiyon olmak üzere $G(C)$, $F(C)$ nin

$$\{F(f_{C'}) \circ \pi_C(X_C) \mid C' \in \mathcal{C} \text{ ve } f_{C'} : C \rightarrow C' \text{ bir morfizma}\}$$

kümesiyle üretilmiş bir Abel alt grubudur.

- Eğer $f : C \rightarrow C'$ bir morfizma ise $G(f) : G(C) \rightarrow G(C')$, $F(f)$ nin $G(C)$ ye kısıtlanmışıdır.

özellikleri sağlanıyorsa, G fonktoruna F nin X_C ile üretilmiş bir *alt fonktoru* denir.

Yukarda tanımlanan G alt fonktoru F nin $\oplus G(C)$, X_C kümesini kapsayacak şekilde en küçük toplamsal alt fonktordur. Özel olarak, F fonkturunun G alt fonktoru bir $X_C \subseteq \oplus F(C)$ sonlu alt kümesi ile üretilirse G ye *sonlu üretilmiş alt fonktor* denir.

Hiç bir alt fonktoru olmayan fonktora *basit fonktor* denir. Sıfından farklı her bir $a \in \oplus_{C \in \mathcal{C}} F(C)$ elemanı ile üretilmiş her fonktor basit fonktordur.

Bundan başka $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ab}$ bir kontravariant fonktor ve $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$, F nin alt fonktorlarının bir ailesi olsun. F nin $\oplus_{C \in \mathcal{C}} (\sum_{\alpha \in A} G_\alpha(C))$ Abel grubu tarafından üretilen alt fonktora $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *ailesi tarafından üretilen alt fonktor* denir.

Ayrıca bir toplamsal fonktor direkt limitleri koruyor ise bu fonktora *sürekli fonktor* denir (Guil Herzog 2007).

Lemma 4.1.2 $\mathcal{C}$ bir toplamsal sonlu ulaşılabilir kategori, $\mathcal{C}_0$ bu kategorinin sonlu temsil edilebilir nesnelerinden oluşan üreteç kümesi ve $\mathcal{C}_0$ kategorisinin kontravariant fonktor kategorisi $\mathcal{E} = \text{Func}(\mathcal{C}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ olsun. Eğer $u : F \rightarrow G$ morfizması $\mathcal{E}$ içinde bir morfizma ise u morfizmasının pür-monomorfizma olması için gerek ve yeter koşul her kovariant sürekli $H : \mathcal{E} \rightarrow \text{Ab}$ fonktoru için $H(u)$ nun bir monomorfizma olmasıdır.

İspat. Bir modül monomorfizmasının pür olması için gerek ve yeter koşul herhangi sonlu temsil edilmiş modül ile tensör çarpımının monomorfizma olmasıdır. Benzer biçimde $\mathcal{E} = \text{Func}(\mathcal{C}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ bir Grothendieck kategori olduğundan istenilen kolayca elde edilir. $\square$

Lemma 4.1.3 $\mathcal{C}$ bir toplamsal sonlu ulaşılabilir kategori, $\mathcal{C}_0$ bu kategorinin sonlu temsil edilebilir nesnelerinden oluşan üreteç kümesi ve $\mathcal{C}_0$ kategorisinin kontravariant fonktor kategorisi $\mathcal{E} = \text{Func}(\mathcal{C}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ olsun. $\aleph$ bir sonsuz kardinal olmak üzere, $\mathcal{E}$ kategorisindeki herhangi F fonkturunun sonlu üretilmiş herhangi G alt fonktoru için $\oplus_{C \in \mathcal{C}_0} H(C)$ nin kardinalitesi $\aleph$ ile sınırlı olacak şekilde F nin G yi içeren bir H pür alt fonktoru vardır.

İspat. G , F fonkturunun sonlu üretilmiş bir alt fonktoru ve $u : G \rightarrow F$ içirme dönüşümü olsun. F fonkturunun G alt fonktoru içeren pür alt fonktoru, doğal sayılarda indüksiyon ile oluşturacağız.

n bir doğal sayı olmak üzere

- $n = 0$ için $H_0 = G$ olarak tanımlayalım.
- $n > 0$ sabit bir doğal sayı olsun. $\aleph$, herhangi C, C' sonlu temsil edilebilir nesneleri için

$$\aleph \geq |\oplus_{C \in \mathcal{C}_0} G(C)| \text{ ve } \aleph \geq |\text{Hom}(C, C')|$$

şartlarını sağlayan sabit bir kardinal sayı olsun. $\mathcal{E}$ nin sonlu üretilmiş projektif L, L' nesneleri ve $\alpha_n : L \rightarrow H_n$ morfizması için aşağıdaki diagramı değişmeli yapan

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\xi} & L' \\ \alpha_n \downarrow & & \downarrow \beta \\ H_n & \xrightarrow{u_n} & F \end{array}$$

$\beta \circ \xi = u_n \circ \alpha_n$ olacak şekilde ξ ve β morfizmaları var olsun. Burada $\beta(L'(C))$ Abel grubunu X_{ξ, α_n} ile gösterelim. H_{n+1}, F funktorunun X_{ξ, α_n} ile üretilmiş alt funktoru olsun. L' sonlu üretilmiş projektif funktor olduğundan, $\mathcal{C}_0$ daki sonlu C_i nesneleri için L' funktoru $\oplus_I \text{Hom}(-, C_i)$ formundadır. Dolayısıyla $|\oplus_{C \in \mathcal{C}} H_n(C)| \leq \aleph$ elde edilir.

Şimdi, H_n zincirinin direkt bileşimine H diyelim. H funktorunun sonlu üretilmiş alt funktor G yi içerdiğini ve F nin bir alt funktoru olduğunu görmek kolaydır.

Son olarak, H nin bir pür alt funktor olduğunu gösterelim. Z bir sonlu temsil edilebilir funktor ve $\phi : Z \rightarrow F/H$ bir morfizma olsun. O zaman Z sonlu temsil edilebilir olduğundan $Z = \text{Coker}(\xi)$ olacak şekilde L, L' sonlu üretilmiş projektif funktörler olmak üzere $\xi : L \rightarrow L'$ morfizması vardır.

Buradan,

$$\begin{array}{ccccccc} L & \xrightarrow{\xi} & L' & \xrightarrow{p} & Z & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \phi & & \\ H & \xrightarrow{u} & F & \xrightarrow{q} & F/H & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

diagramını oluşturabiliriz. L ve L' projektif nesneler olduğundan $\beta \circ \xi = u \circ \alpha$ olacak şekilde $\beta : L' \rightarrow F$ ve $\alpha : L \rightarrow H$ morfizmaları vardır. Dolayısıyla yukarıdaki diagram değişmelidir.

L sonlu üretilmiş ve $H = \cup_n H_n$ olduğundan $Im(\alpha) \subseteq H_n$ olacak şekilde bir n doğal sayısı vardır. H nin oluşumundan $Im(\alpha) \subseteq H_{n+1}$ olur. Böylece $u \circ \delta = \beta$ olacak şekilde bir $\delta : L' \rightarrow H$ morfizması ve buradan $\eta \circ p = \beta$ olacak şekilde bir $\eta : Z \rightarrow F$ morfizması vardır. Sonuç olarak $\mathcal{E}$ kategorisinde herhangi Z sonlu temsil edilebilir fonktoru q epimorfizmine göre projektiftir. $\square$

4.2 Ayrıştırılmaz Nesneler

Eğer bir C nesnesi sıfırdan farklı iki nesnenin direkt toplamı olarak yazılamıyorsa bu C nesnesine *ayrıştırılmaz nesne* denir (Stenström 1975).

Lemma 4.2.1 $\mathcal{C}$ bir toplamsal sonlu ulaşılabilir kategori, $\mathcal{C}_0$ bu kategorinin sonlu temsil edilebilir nesnelerinden oluşan üreteç kümesi ve $\mathcal{C}_0$ kategorisinin kontravariant fonktor kategorisi ise $\mathcal{E} = \text{Func}(\mathcal{C}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ olsun. Bu durumda $\text{Flat}(\mathcal{C}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ nin herhangi ayrıştırılmaz E fonktoru için, $\bigoplus_{C \in \mathcal{C}} E(C)$ nin kardinalitesi $\aleph$ ile sınırlı olacak şekilde bir $\aleph$ kardinali vardır.

İspat. $E, \text{Flat}(\mathcal{C}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ kategorisinde bir ayrışamaz pür-injektif nesne olsun. Lemma 4.1.3 ile $\aleph'$ sabit bir kardinal olmak üzere $|\bigoplus_{C \in \mathcal{C}} H(C)| \leq \aleph'$ olacak şekilde E fonkturunun bir H pür alt fonktoru vardır. Şimdi $E(H)$, H fonkturunun $\text{Flat}(\mathcal{C}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ kategorisindeki pür-injektif zarfı olsun. H , E nin pür alt fonktoru ve E pür-injektif olduğundan $E(H)$, E nin direk toplananıdır. E ayrıştırılmaz pür-injektif nesne olduğundan $E = E(H)$ olur. Böylece E nin kardinalitesi $|E(H)|$ kardinallerinin supremumu ile sınırlıdır. $\square$

$\text{Ind}(\mathcal{E})$, $\mathcal{E}$ kategorisindeki bütün ayrıştırılmaz düz pür-injektif nesnelerden oluşan bir sınıf olsun. O halde bu sınıfın nesneleri sınırlı kardinaliteye sahiptir. Aşağıdaki sonuç $\text{Ind}(\mathcal{E})$ sınıfının her nesnesinin sınırlı kardinaliteye sahip olması ile kolayca elde edilir.

Sonuç 4.2.2 $\mathcal{C}$ bir toplamsal sonlu ulaşılabilir kategori, $\mathcal{C}_0$ bu kategorinin sonlu temsil edilebilir nesnelerinden oluşan üreteç kümesi ve $\mathcal{C}_0$ kategorisinin kontravariant fonktor kategorisi $\mathcal{E} = \text{Func}(\mathcal{C}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ olsun. Bu durumda $\text{Ind}(\mathcal{E})$ sınıfı bir kümedir.

Teorem 4.2.3 $\mathcal{C}$ bir toplamsal sonlu ulaşılabilir kategori ve $\mathcal{C}_0$ bu kategorinin sonlu temsil edilebilir nesnelerinden oluşan üreteç kümesi olsun. $F : \mathcal{C}_0 \rightarrow \text{Ab}$ bir düz kontravariant fonktor, $C, \mathcal{C}$ kategorisinin bir nesnesi ve $x, F(C)$ nin sıfırdan farklı bir elemanı olmak üzere, $\text{Func}(\mathcal{C}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ kategorisinin bir G ayrıştırılmaz düz pür-injektif fonktoru ve $\tau_C(x) \neq 0$ olacak şekilde bir $\tau : F \rightarrow G$ doğal dönüşümü vardır.

İspat. F bir düz kontravariant fonktor olsun ve $F(C)$ nin sıfırdan farklı bir x elemanını göz önüne alalım. H, F nin x ile üretilmiş pür alt fonktoru olsun. Lemma 4.1.3 den $|\oplus_{C \in \mathcal{C}} H(C)| \leq \aleph'$ olacak şekilde bir $\aleph'$ kardinal sayısı vardır. O halde, H pür alt fonktor olduğundan,

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow F \longrightarrow F/H \longrightarrow 0$$

dizisi parçalanmış bir dizi olur. Burada F/H düz funktordur. Şimdi F nin pür alt fonktorlarının

$$\{F' \leq F \mid x \notin F'(C)\}$$

kümesini düşünelim. Zorn Lemma ile bu kümenin bir en büyük elemanı vardır. Bu elemanı F_1 ile gösterelim. Böylece $\pi_1 : F \rightarrow F/F_1$ doğal dönüşümünü elde ederiz. Buradan $x \notin F_1(C)$ olduğundan $\pi_1(x) \neq 0$ olur. Ayrıca F_1 en büyük eleman olduğundan F/F_1 ayrıştırılmazdır.

Diğer taraftan, F/F_1 düz fonktor olduğundan $\text{Func}(\mathcal{C}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ kategorisinde bir eş-burulmalı zarfa sahiptir. Bu zarfı $\tau_1 : F/F_1 \rightarrow G$ ile gösterelim. Burada G eş-burulmalı zarfı F/F_1 in düz essential genişlemesi olduğundan G de ayrıştırılmazdır. Ayrıca $\pi_1(x) \neq 0$ olduğundan $\tau : F \rightarrow G$ için $\tau_C(x) \neq 0$ olduğunu görmek kolaydır. Son olarak Önerme 3.2.1 ten G pür-injektiftir.

□

Sonuç 4.2.4 $\mathcal{C}$ bir toplamsal sonlu ulaşılabilir kategori ve $\mathcal{C}_0$ bu kategorinin sonlu temsil edilebilir nesnelerinden oluşan üreteç kümesi olsun. Bu durumda $\mathcal{E}$ nin herhangi düz F fonktoru için, F den $\text{Ind}(\mathcal{E})$ sınıfındaki fonktorların direkt çarpımına tanımlı bir τ monomorfizması vardır.

İspat. Teorem 4.2.3 ile herhangi bir $\bigoplus_{C \in \mathcal{C}_0} F(C)$ nin sıfırdan farklı herhangi bir x elemanı için, F den x e bağlı ayrıştırılmaz pür-injektif düz fonktor olan E_x ye tanımlı bir $\tau_x : F \rightarrow E_x$ doğal dönüşümü vardır. Buradan her bir E_x bir eş-burulmalı zarf olduğundan

$$\tau : F \rightarrow \prod_{x \in \bigoplus_{C \in \mathcal{C}_0} F(C)} E_x$$

bir monomorfizmadır. $\square$

Teorem 4.2.5 $\mathcal{C}$ bir toplamsal sonlu ulaşılabilir kategori ve $\mathcal{C}_0$ bu kategorinin sonlu temsil edilebilir nesnelerinden oluşan üreteç kümesi olsun. $\mathcal{E}$ nin herhangi bir düz fonktoru, $\text{Ind}(\mathcal{E})$ sınıfının nesnelerinin quasi-limiti içine pür olarak gömülebilir.

İspat. $F, \mathcal{E} = \text{Func}(\mathcal{C}_0^{\text{op}}, \text{Ab})$ kategorisinde bir düz fonktor olsun. Sonuç 4.2.4 den $\mathcal{E}$ kategorisinde bir

$$\tau : F \rightarrow \prod_{x \in \bigoplus_{C \in \mathcal{C}_0} F(C)} E_x$$

monomorfizması vardır. Kolaylık için $\prod_{x \in \bigoplus_{C \in \mathcal{C}_0} F(C)} E_x = A$ ile gösterelim.

Böylece,

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{\tau} A \xrightarrow{\eta} A/F \longrightarrow 0$$

dizisi tamdır.

A/F nin $\mathcal{E}$ deki düz örtüsü $\beta : FC(A/F) \rightarrow A/F$ olsun. Böylece η ve β nin pullback diagramı alınır, tam satırlı ve değişmeli

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & F & \xrightarrow{\tau'} & P & \xrightarrow{\eta'} & FC(A/F) \longrightarrow 0 \\
& & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & F & \xrightarrow{\tau} & A & \xrightarrow{\eta} & A/F \longrightarrow 0
\end{array}$$

diagramını elde ederiz. Burada F ve $FC(A/F)$ düz fonktor olduğundan P de bir düz funktordur. O halde P, A nın bir ön-örtüsüdür ve bir X fonktoru için $P = FC(A) \oplus X$ biçiminde yazılabilir. Buradan,

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & X & = & X & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & F & \xrightarrow{\tau'} & FC(A) \oplus X & \longrightarrow & FC(A/F) \longrightarrow 0 \\
\parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & F & \xrightarrow{\Phi} & FC(A) & \longrightarrow & FC(A/F)/X \longrightarrow 0 \\
& & & & \downarrow & & \downarrow \\
& & & & 0 & & 0
\end{array}$$

değişmeli diagramını elde ederiz. $FC(A/F)$ düz fonktor olduğundan τ' pür-monomorfizma olur.

Diğer taraftan,

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{\Phi} FC(A) \xrightarrow{i} FC(A) \oplus X$$

dizisi için $\tau' = i\Phi$ bir pür-monomorfizma olduğundan Φ de bir pür-monomorfizma olur. Böylece Teorem 3.3.2 den, $FC(A)$ ayrıştırılmaz pür-injektif nesnelerin bir quasi-limitidir.

□

Tanım 4.2.6 $\mathcal{C}$ bir sonlu ulaşılabilir kategori ve $\mathcal{C}', \mathcal{C}$ deki nesnelerin herhangi bir kümesi olsun. Eğer $\mathcal{C}$ nin her C nesnesi için C den $\mathcal{C}'$ nün nesnelerinin bir quasi-limitine tanımlı bir pür-monomorfizma var ise $\mathcal{C}'$ kümesine $\mathcal{C}$ kategorisinin bir *pür eş-üreteç kümesidir* denir.

Bu çalışmada son olarak, bir sonlu ulaşılabilir toplamsal kategorinin bir pür eş-üreteç kümesinin bir karakterizasyonunu ayrıştırılamaz pür-injektif nesnelerin quasi-limitine göre elde edeceğiz.

Sonuç 4.2.7 *$\mathcal{C}$ bir sonlu ulaşılabilir kategori ve $Ind(\mathcal{C})$, $\mathcal{C}$ kategorisinde ki ayrıştırılamaz düz pür-injektif nesnelerinin kümesi olsun. Bu durumda $Ind(\mathcal{C})$, $\mathcal{C}$ kategorisinin bir pür eş-üreteç kümesidir.*

İspat. Teorem 4.2.5 ve Tanım 4.2.6 den açıktır. $\square$

Bu sonuç, herhangi bir sonlu ulaşılabilir toplamsal $\mathcal{C}$ kategorisinin pür-injektif özellikleriyle $Ind(\mathcal{C})$ üzerinde bir topoloji kurulabileceğini ifade eder. Bu yöntem modül kategorilerinde Ziegler spektrumuyla kurulan topolojiye benzer bir yöntemdir.

KAYNAKLAR

- Adámek, J. and Rosický, J. 1994. Locally presentable and accessible categories. London Mathematical Society Lecture Note Series 189, Cambridge University Press, Cambridge.
- Aldrich, S.T., Enochs, E.E., Garcia Rozas J.R. and Oyonarte L. 2001. Covers and envelopes in Grothendieck categories. Journal of Algebra, 243, 615-630.
- Alizade, R. ve Pancar, A. 1999. Homoloji cebire giriş. Ondokuz Mayıs Üniversitesi Yayınları.
- Anderson, F.W. and Fuller, K.R. 1992. Rings and categories of modules. Graduate Texts in Mathematics 13, Springer-Verlag, New York.
- Auslander, M. 1976. Functors and morphisms determined by objects. Representation theory of algebras, Proceedings of the conference at Temple University.1-244.
- Bican, L., El Bashir R. and Enochs, E.E. 2001. All modules have flat covers. Bulletin of London Math. Society 33, 385-390.
- Borceux, F. and Rosicky, J. 2007. Purity in algebras, Algebra Universalis, 56(1), 17- 35.
- Carceles Medina, A.I. 2008. Inmersiones de categorías finitamente accesibles y categorías exactamente definibles. Tesis Doctoral.
- Crawley-Boevey, W.W. 1994. Locally finitely presented additive categories. Communications in Algebra 22, 1641-1674.
- Crivei, S., Prest, M. and Torrecillas, B. 2010. Covers in finitely accessible categories. Proc. American Mathematical Society 138, 1213-1221.
- Dung, N.V. and García, J.L. 2001. Additive categories of locally finite representation type, Journal of Algebra, 238, 200-238.
- Eckmann, B. and Schopf, A. 1953. Ueber injektive moduln. Archiv der Math., 4 (2), 75-78
- El Bashir, R. 2006. Covers and directed limits. Algebras and Representation Theory, 7, 423-430.

- Enochs, E.E. 1981. Injective and flat covers, envelopes and resolvents. *Israel Journal of Mathematics*, 39, no. 3, 189-209.
- Enochs, E.E., Estrada, S., García Rozas J.R. and Oyonarte, L. 2004. Flat covers in the category of quasi-coherent sheaves over the projective line, *Communications in Algebra*, 32, 1497-1508
- Enochs, E.E. and Jenda, O.M.G. 2000. *Relative homological algebra*, Walter de Gruyter, Berlin.
- Freyd, P. J. 1964. *Abelian Categories. An introduction to the theory of functors*. Harper Row.
- Garcia, J.L. and Martinez Hernandez, J. 1995. When is the category of flat modules abelian. *Fundamenta Mathematicae*, 147, 83-91.
- Garcia Rozas, J.R. 1999. *Covers and envelopes in the category of complexes of modules*. CRC 407.
- Guil Asensio, P.A. and Herzog, I. 2004. Left cotorsion rings. *Bulletin of London Mathematical Society*, 36, no. 3, 303-309.
- Guil Asensio, P.A. and Herzog, I. 2006. Pure-injectivity in the category of flat modules. *Contemporary Mathematics*, 4196, 155-165.
- Guil Asensio, P.A. and Herzog, I. 2007. Indecomposable flat cotorsion modules. *Journal of the London Mathematical Society*, (2), 76, 797-811.
- Harrison, D. K. 1959. Infinite abelian groups and homological methods. *Ann. Math.*, 69(2), 316-391.
- Herzog, I. 2003. Pure-injective envelopes. *Journal of Algebra and its Applications*, 2(4), 397_402.
- Hrbacek, K. and Jech, T. 1999. *Introduction to set theory*. Third edition. *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*, 220, Marcel Dekker Inc., New York.
- Makkai, M. and Paré, P. 1989. *Accessible categories: the foundations of categorical model theory*. *Contemporary Mathematics* 104, American Mathematical Society
- Prest, M. 2009. *Purity, Spectra and Localization*, Cambridge University Pres.
- Rotman, J.J. 1979. *An introduction to homological algebra*. Academic Press.

- Stenström, B. 1975. Rings of quotients. Springer-Verlag, New York-Heidelberg.
- Xu, J. 1996. Covers and envelopes of modules. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.
- Wisbauer, R. 1991. Foundations of module and ring theory. A handbook for study and research. Revised and translated from the 1988 German edition. Algebra, Logic and Applications, 3. Gordon and Breach Science Publishers, Philadelphia.

Dizin

$\mathcal{F}$ -önörtü, 19
 $\mathcal{F}$ -önzarf, 18
 $\mathcal{F}$ -örtü, 19
 $\mathcal{F}$ -zarf, 19
 $\mathcal{X}$ -önörtü, 7
 $\mathcal{X}$ -önzarf, 7
 $\mathcal{X}$ -örtü, 7
 $\mathcal{X}$ -zarf, 7
öntoplamsal kategori, 11
özel önörtü, 9
üreteç, 13

Abel kategori, 11
alt fonktor, 30
ayrıştırılmaz nesne, 33

basit fonktor, 31

düz örtü, 7
düz modül, 6
düz nesne, 18
değişmeli diagram, 5
direkt bileşim, 15
direkt limit, 6, 14
direkt sistem, 6

eş-üreteç, 29
eş-burulmalı modül, 10
eş-burulmalı zarf, 10
eş-tam kategori, 14
Enochs Savı, 8

genişleme, 5
Grothendieck kategori, 15

injektif modül, 5

küçük kategori, 11
kısa tam dizi, 4

limit, 13

pür alt modül, 9
pür eş-üreteç kümesi, 36
pür genişleme, 9
pür tam dizi, 9
pür-epimorfizma, 17
pür-injektif modül, 9
pür-injektif nesne, 17, 18
pür-injektif zarf, 10
pür-monomorfizma, 17
pür-morfizma, 17
pür-projektif nesne, 18
parçalanmış kısa tam dizi, 5
projektif modül, 5
projektif nesne, 13

quasi limit, 27
quasi tam kategori, 28

sürekli fonktor, 31
sağ dik sınıf, 9
sadık fonktor, 13
sol dik sınıf, 9
sonlu üretilmiş alt fonktor, 31
sonlu üretilmiş modül, 6
sonlu üretilmiş nesne, 15
sonlu temsil edilebilir nesne, 15
sonlu temsil edilmiş modül, 6

sonlu ulaşılabilir kategori, 16

tam dizi, 4

tam kategori, 14

toplamsal fonktor, 11

uyumlu aile, 13

Wakamatsu lemmaları, 8

yönlendirilmiş küme, 6

yerel sonlu temsil edilmiş kategori, 16

Yoneda Lemma, 12

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Mustafa Kemal BERKTAŞ
Doğum Yeri : Afşin/K.Maraş
Doğum Tarihi : 18.11.1979
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Isparta Gönen Anadolu Öğretmen Lisesi, 1997
Lisans : Dokuz Eylül Üniversitesi, Buca Eğitim Fakültesi,
Orta Öğretim Matematik Öğretmenliği, 2001
Yüksek Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri
Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, 2004

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

- Araştırma Görevlisi, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Uşak Fen Edebiyat Fakültesi, 2001-2004.
- Öğretim Görevlisi, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Uşak Fen Edebiyat Fakültesi, 2004-2006.
- Öğretim Görevlisi, Uşak Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, 2006-...