

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI LİNEER OLMAYAN KİSMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN
PERİYODİK DALGA ÇÖZÜMLERİ

DOKTORA TEZİ
Yavuz UĞURLU

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Doğan KAYA

ŞUBAT-2010

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN
PERİYODİK DALGA ÇÖZÜMLERİ

DOKTORA TEZİ
Yavuz UĞURLU
(05121201)

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Doğan KAYA

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 02.02.2010

ŞUBAT-2010

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN
PERİYODİK DALGA ÇÖZÜMLERİ

DOKTORA TEZİ
Yavuz UĞURLU
(05121201)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 02.02.2010

Tezin Savunulduğu Tarih:19.02.2010

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Doğan KAYA (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Etibar PENAHLI (F.Ü)

Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY (İ.Ü)

Yrd. Doç. Dr. İbrahim Enam İNAN (F.Ü)

Yrd. Doç. Dr. Hasan BULUT (F.Ü)

ŞUBAT-2010

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın planlanması ve yürütülmesinde, çalışmalarım süresince benden destek ve ilgilerini esirgemeyen, bilgi ve hoşgörülerinden yararlandığım sayın hocam Prof. Dr. Doğan KAYA'ya ve manevi olarak her zaman desteğini hissettiğim hocam Prof. Dr. Doğan KAYA'nın muhterem eşlerine de şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Ayrıca çalışmalarım boyunca çeşitli sorularımı yanıtlayan ve benden yardımlarını, desteğini, sabrını ve bilgisini esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. İbrahim Enam İNAN hocama da teşekkür ederim.

Yavuz UĞURLU
ELAZIĞ-2010

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET.....	V
SUMMARY.....	VI
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	VII
TABLolar LİSTESİ.....	VIII
SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	IX
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Temel Tanımlar.....	8
2. LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN PERİYODİK DALGA ÇÖZÜMLERİ İÇİN BAZI ANALİTİK METOTLAR.....	13
2.1. Analitik Metotların Analizi.....	13
2.1.1. Tanh Metot.....	14
2.1.2. Otomatik Tanh Metot.....	15
2.1.3. Genişletilmiş Tanh Metot.....	15
2.1.4. Değiştirilmiş Genişletilmiş Tanh Metot.....	16
2.1.5. Genelleştirilmiş Genişletilmiş Tanh Metot.....	17
2.1.6. Geliştirilmiş Tanh Metot.....	17
2.1.7. Genelleştirilmiş Jakobi Eliptik Fonksiyon Metot.....	19
2.1.8. Üstel Fonksiyon Metot.....	22
2.1.9. $\frac{G'}{G}$ -Açılım Metot.....	23
3. LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN PERİYODİK DALGA ÇÖZÜMLERİ İÇİN BAZI UYGULAMALAR.....	24
3.1. SRLW Denklemin Genelleştirilmiş Jakobi Eliptik Fonksiyon Metodunun Uygulanması.....	24
3.2. (1+1) Boyutlu Saçılma Terimli Uzun Dalga Denklemin Genelleştirilmiş Jakobi Eliptik Fonksiyon Metodunun Uygulanması.....	29
4. LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN PERİYODİK DALGA ÇÖZÜMLERİ İÇİN BAZI YARI ANALİTİK METOTLAR.....	38
4.1. Bazı Yarı Analitik Metotlar ve Analizleri.....	38
4.1.1. Adomian Ayrışım Metot.....	38
4.1.2. Homotopi Analiz Metot.....	39
4.1.3. Homotopi Perturbasyon Metot.....	41
5. YARI ANALİTİK METOTLARIN LİNEER OLMAYAN BAZI KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERE UYGULANMASI.....	42
5.1. SRLW Denklemin ADM' unun Uygulanması.....	42
5.2. SRLW Denklemin HAM' unun Uygulanması.....	44

	<u>Sayfa No</u>
5.3. SRLW Denklemine HPM' unun Uygulanması.....	46
5.4. (1+1) Boyutlu Saçılma Terimli Uzun Dalga Denklemine ADM' unun Uygulanması.....	48
5.5. (1+1) Boyutlu Saçılma Terimli Uzun Dalga Denklemine HAM' unun Uygulanması.....	51
5.6. (1+1) Boyutlu Saçılma Terimli Uzun Dalga Denklemine HPM' unun Uygulanması.....	54
6. YARI ANALİTİK METOTLARIN SAYISAL SONUÇLARININ İRDELENMESİ.....	57
6.1. Sayısal Sonuçların Değerlendirilmesi.....	57
7. SONUÇ.....	68
KAYNAKLAR.....	71
ÖZGEÇMİŞ.....	

ÖZET

Bu çalışma yedi bölüm halinde oluşturulmuştur.

Birinci bölümde temel tanımlar verilmiştir.

İkinci bölümde, lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin periyodik dalga çözümlerini elde etmek için kullanılan bazı metotların tarihsel olarak analizi yapılmıştır. Bu metotların hepsi göz önüne alınan denklemde en yüksek mertebeden lineer olan terim ile en yüksek mertebeden lineer olmayan terimin dengelenmesiyle dengeleme terimini bulma esasına dayanır. Bu yüzden bu metotlar sadece lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlere uygulanabilir. Ayrıca, bu metotlar bir kısmi diferensiyel denklemi bir adi diferensiyel denkleme dönüştürür. Böylece çözüme daha kolay ulaşılabilir.

Üçüncü bölümde, ikinci bölümde analizleri yapılan metotlardan biri ile bazı lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin periyodik dalga çözümleri elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, lineer ve lineer olmayan diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanılan bazı yarı analitik metotların analizi yapılmıştır.

Beşinci bölümde, dördüncü bölümde analizleri yapılan yarı analitik metotlar kullanılarak üçüncü bölümde göz önüne alınan denklemler için seri çözümler elde edilmiştir.

Altıncı bölümde, beşinci bölümde elde edilen seri çözümlerin sayısal sonuçları irdelenmiştir.

Yedinci bölümde, bu çalışmada elde edilen sonuçlar literatürde bulunan çalışmalar ile desteklenerek genel bir değerlendirme yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Solitary dalgalar, Solitonlar, Jakobi eliptik fonksiyon, Dengeleme terimi, Analitik çözüm, Periyodik çözüm, Tanh metot, Jakobi eliptik fonksiyon metot, $\left(\frac{G'}{G}\right)$ açılım metot, Üstel fonksiyon metot, SRLW denklemi, (1+1) boyutlu saçılma terimli uzun dalga denklemi, Yarı analitik metotlar, Seri çözüm, Adomian ayrışım metot, Homotopi analiz metot, Homotopi perturbasyon metot.

SUMMARY

Periodic Wave Solutions of Some Nonlinear Partial Differential Equations

This study is constructed in seven chapters.

In chapter one, some fundamental definitions are given.

In chapter two, it is made a historical analyze of some methods to obtain periodic wave solutions of nonlinear partial differential equations. All of these methods are based on finding balance term with balancing of the highest order linear and nonlinear term. So, these methods can be only applied to nonlinear partial differential equation. Moreover, these methods convert a nonlinear partial differential equation to an ordinary differential equation. Therefore, solution can be obtained easily.

In chapter three, it is obtained periodic solutions of some nonlinear partial differential equations by using one of the methods whose analysis is made in chapter two.

In chapter four, it is made analyze of some semi analytical methods which are used to solve linear and nonlinear equations.

In chapter five, it is obtained series solutions for equations which are considered in third chapter by using semi analytical methods whose analysis are made in chapter four.

In chapter six, it is discussed numerical results of series solutions which are obtained in chapter five.

In chapter seven, it is made a generalized assessment by supporting results which are obtained in this study with some studies in literature.

Keywords: Solitary waves, Solitons, Jacobi elliptic function, Balance term, Analytical solution, Periodic solution, Tanh method, Jacobi elliptic function method, $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method, Exp-function method, SRLW equation, (1+1) dimensional dispersive long wave equation, Semi analytical methods, Series solution, Adomian decomposition method, Homotopy analysis method, Homotopy perturbation method.

ŞEKİLLER LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1. Gerilmiş bir ip üzerinde ilerleyen enine dalga.....	2
Şekil 2. Bir boyutta dalga atmasının sağa doğru v hızı ile ilerlemesi.....	3
Şekil 3. Bir solitary dalga.....	4
Şekil 4. İki soliton etkileşimi.....	6
Şekil 5. SRLW denkleminin (3.26) çözümü için üç boyutlu periyodik dalga görünümü.28	
Şekil 6. SRLW denkleminin (3.26) çözümü için iki boyutlu periyodik dalga grafiği.....	29
Şekil 7. (1+1) boyutlu saçılma terimli uzun dalga denkleminin (3.54) için sırası ile $u(x,t)$ ve $v(x,t)$ çözümleri için üç boyutlu periyodik dalga görünümü.....	36
Şekil 8. (1+1) boyutlu saçılma terimli uzun dalga denkleminin (3.54) için $u(x,t)$ çözümünün iki boyutlu periyodik dalga grafiği.....	36
Şekil 9. (1+1) boyutlu saçılma terimli uzun dalga denkleminin (3.54) için $v(x,t)$ çözümünün iki boyutlu periyodik dalga grafiği.....	37
Şekil 10. SRLW denkleminin analitik çözümü ve yaklaşık çözümünün üç boyutlu görünümü.....	58
Şekil 11. SRLW denkleminin $\phi_4(x,t)$ için h eğrisinin grafiği.....	59
Şekil 12. SRLW denkleminin analitik çözümü ile ADM, HAM ve HPM ile elde edilen yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....	60
Şekil 13. (1+1) boyutlu saçılma terimli uzun dalga denkleminin $u(x,t)$ analitik çözüm ile yaklaşık çözümünün üç boyutlu görünümü.....	61
Şekil 14. (1+1) boyutlu saçılma terimli uzun dalga denkleminin $v(x,t)$ analitik çözüm ile yaklaşık çözümünün üç boyutlu görünümü.....	62
Şekil 15. (1+1) boyutlu saçılma terimli uzun dalga denkleminin $u(x,t)$ çözümünün $\phi_5(x,t)$ için h eğrisinin grafiği.....	64
Şekil 16. (1+1) boyutlu saçılma terimli uzun dalga denkleminin $v(x,t)$ çözümünün $\phi_5(x,t)$ için h eğrisinin grafiği.....	65
Şekil 17. (1+1) boyutlu saçılma terimli uzun dalga denkleminin $u(x,t)$ analitik çözümü ile ADM, HAM ve HPM ile elde edilen yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....	65
Şekil 18. (1+1) boyutlu saçılma terimli uzun dalga denkleminin $v(x,t)$ analitik çözümü ile ADM, HAM ve HPM ile elde edilen yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....	66

TABLÖLAR LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 1. ADM kullanılarak SRLW denkleminin mutlak hatası.....	58
Tablo 2. HAM kullanılarak SRLW denkleminin mutlak hatası.....	58
Tablo 3. HPM kullanılarak SRLW denkleminin mutlak hatası.....	59
Tablo 4. h keyfi parametresinin farklı değerleri için SRLW denkleminin mutlak hatası.....	59
Tablo 5a. ADM kullanılarak (5.19) denklemi için $u(x, t)$ çözümünün mutlak hatası.....	62
Tablo 5b. ADM kullanılarak (5.19) denklemi için $v(x, t)$ çözümünün mutlak hatası.....	62
Tablo 6a. HAM kullanılarak (5.19) denklemi için $u(x, t)$ çözümünün mutlak hatası.....	63
Tablo 6b. HAM kullanılarak (5.19) denklemi için $v(x, t)$ çözümünün mutlak hatası.....	63
Tablo 7a. HPM kullanılarak (5.19) denklemi için $u(x, t)$ çözümünün mutlak hatası.....	63
Tablo 7b. HPM kullanılarak (5.19) denklemi için $v(x, t)$ çözümünün mutlak hatası.....	64
Tablo 8. h keyfi parametresinin farklı değerlerinde (5.19) denklemi için $u(x, t)$ çözümünün mutlak hatası.....	64
Tablo 9. h keyfi parametresinin farklı değerlerinde (5.19) denklemi için $v(x, t)$ çözümünün mutlak hatası.....	65

SİMGELER LİSTESİ

M	: Dengeleme terimi
L	: Lineer Operatör
L^{-1}	: İntegral Operatörü
A_n	: Adomian Polinomları
ϕ_n, φ_n	: n – terim yaklaşımı
h	: Keyfi bir parametre
$H(x, t)$	: Keyfi bir fonksiyon
p	: Küçük bir parametre

KISALTMALAR

SRLW	: Simetrik düzenlenmiş uzun dalga (symmetric regularized long wave) denklemi
ADM	: Adomian Ayrışım (Decomposition) Metot
HAM	: Homotopi Analiz Metot
HPM	: Homotopi Perturbasyon Metot

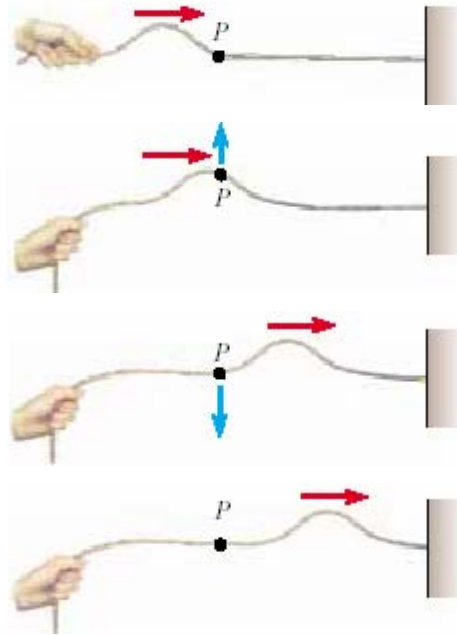
1. GİRİŞ

İçinde yaşadığımız dünyada hayatımızı etkileyen ve yaşamımıza yön veren birçok olay dalga kavramı ile açıklanır. Deprem esnasında yeryüzündeki hareketler ve bu hareketlenme ile okyanuslarda meydana gelen büyük su dalgaları (tusunami), radyo, televizyon ve cep telefonları gibi hayatımızı kolaylaştıran elektronik cihazların doğasında bulunan elektromanyetik dalgalar, insanlar ve diğer canlılar ile iletişim kurmak için var olan ses dalgaları gibi dalgalar örnek verilebilir. Yukarıda bahsedilen olayların hepsinin matematiksel modellemesi diferensiyel denklemler ile açıklanabilir. Bu diferensiyel denklemlerin çözümleri, modellemesi yapılan olayların doğası hakkında insanlara çok büyük katkılar sağlar. Bu yüzden diferensiyel denklemlerin çözümlerine olan ilgi hiçbir zaman azalmamıştır. Bu ilgi ile birlikte diferensiyel denklemlerin çözümlerinde kullanılan birçok teknik ve metot geliştirilmiştir.

Dalga kavramı oldukça soyut bir kavram olarak karşımıza çıkar. Su yüzeyine bakılırken, aslında su dalgası olarak adlandırılıp görülen olay, su yüzeyinin yeni bir düzene geçmesi olarak tarif edilebilir. Bir cisim veya ortamdaki sarsıntıya karşılık gelen olay *dalga* olarak adlandırılabilir. Su dalgası gözlemlendiği zaman, su yüzeyinin yeniden düzenlendiği görülebilir. Eğer su olmasa dalgada olmayacaktır. Sarmal yay olmasa, üzerinde ilerleyen bir dalga olmayacaktır. Ses dalgalarının hava içerisinde bir noktadan diğer bir noktaya ilerlemesi basınç değişimi sonucunda ortaya çıkar. Bu nedenle, bir dalgaya sarsıntının hareketi olarak bakılabilir. Sarsıntının hareketi (yani dalganın kendisi ya da ortamın durumu), parçacıkların hareketi ile karıştırılmamalıdır. Bir havuza bir çakıl taşı atıldığında çakıl taşının oluşturduğu sarsıntı küçük su dalgaları meydana getirir. Bu dalgalar dışarıya doğru hareket ederek havuzun kenarında son bulur. Eğer sarsıntının yakınında yüzen bir yaprağın hareketi dikkatlice izlenirse, onun ilk konumu etrafında aşağı-yukarı hareket ettiği, fakat sarsıntı kaynağından asla uzaklaşmadığı veya ona yaklaşmadığı izlenebilir. Yani, su dalgaları (ya da sarsıntı) bir yerden başka bir yere hareket ederken su onunla birlikte sürüklenmez.

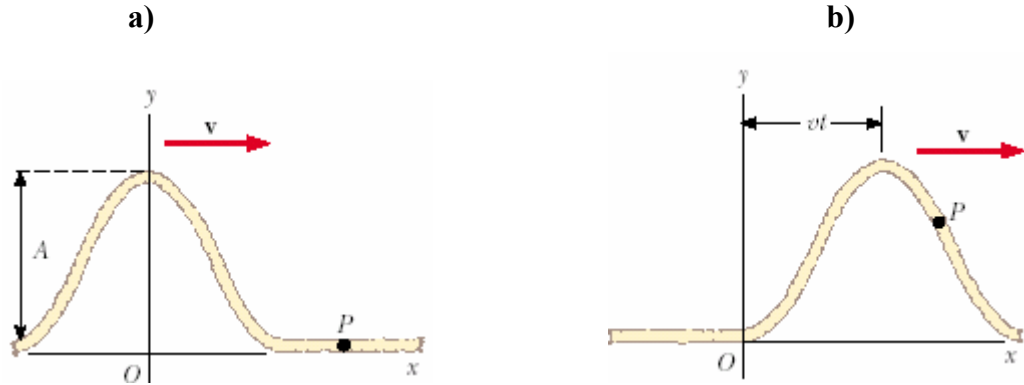
Dalga olayının açıklanmasında kullanılan matematiksel ifadelerin hepsi bütün dalgalarda ortaktır. Dalgaların tanımlanmasında üç fiziksel büyüklük önemli rol oynar. Bunlar dalga boyu, frekans ve dalganın hızıdır. Bir *dalga boyu*, dalga üzerinde özdeş olarak davranan herhangi iki nokta arasındaki minimum uzaklıktır. Örneğin, su

dalgalarında dalga boyu, komşu tepeler ya da komşu çukurlar arasındaki uzaklıktır. Doğadaki olayların çoğu periyodiktir. Böyle periyodik dalgaların frekansı, sarsıntının kendini tekrarlama hızıdır. Her dalga içinde bulunduğu ortamın özelliklerine bağlı olarak özel bir hızla ilerler ya da yayılır. Örneğin, ses dalgaları havada 20°C de 344 m/s hız ile yayılır, hâlbuki katıların çoğunda 344 m/s den daha büyük hızla yayılmaktadır. Yayılmak için bir ortama ihtiyaç duymayan bir dalga elektromanyetik dalgalardır. Bu dalgalar boşlukta $3 \times 10^8\text{ m/s}$ büyüklüğünde bir hız ile yayılırlar.



Şekil 1. Gerilmiş bir ip üzerinde ilerleyen enine dalga

Dalga hareketini göstermenin bir yolu Şekil 1 de görüldüğü gibi; gerilmiş ve bir ucu bir yere sabitlenmiş uzun bir ipin diğer ucunu ani olarak hareket ettirmektir. Bu durumda tek bir dalga atması meydana gelir ve belli bir hız ile sağa doğru hareket eder. Bu tip sarsıntıya *ilerleyen dalga* denir. Dalga atması ip boyunca ilerlerken sarsılan ipin her parçası dalga hareketine dik doğrultuda titreşir. Ortamın sarsılan parçacıkları, dalga hızına dik olarak hareket ettiğinde, bu tip ilerleyen dalgaya *enine dalga* denir. Dalgaların başka bir tipine ise *boyuna dalgalar* denir. Bu dalgalarda ortamın parçacıkları, dalganın hareket doğrultusuna paralel bir doğrultuda yer değiştirme yapar.



Şekil 2. Bir boyutta dalga atmasının sağa doğru v hızı ile ilerlemesi (a) $t = 0$ da atmanın ifadesi (b) t süre sonra şekil değişmez ve yer değiştirme $f(x - vt)$ ile verilir

Şekil 2 de görüldüğü gibi gerilmiş bir ipin üzerinde sabit v hızı ile sağa doğru ilerleyen bir dalga göz önüne alındığında, atma x eksenine boyunca hareket eder ve ipin enine yer değiştirmesi y koordinatı ile ölçülür. Şekil 2a da $t = 0$ anında atmanın konumu ve şekli gösterilmektedir. Bu anda, atmanın şekli ne olursa olsun $y = f(x)$ ifadesi ile temsil edilir. Yani y , x in tanımlı bir fonksiyonudur. Maksimum yer değiştirme $A = y_m$, dalga genliği adını alır. Dalga atmasının hızı v olduğundan; $t = 0$ anından herhangi bir t zamanına kadar sağa doğru vt uzunluğunda yol alır (Şekil 2b).

Dalga atmasının şekli zamanla değişmez ise, orijini O da olan durgun bir referans sisteminde ölçülen yer değiştirme, bütün zamanlar için y ile temsil edilir. Yani,

$$y = f(x - vt)$$

olur. Benzer şekilde, dalga atması sola doğru ilerler ise, yer değiştirme

$$y = f(x + vt)$$

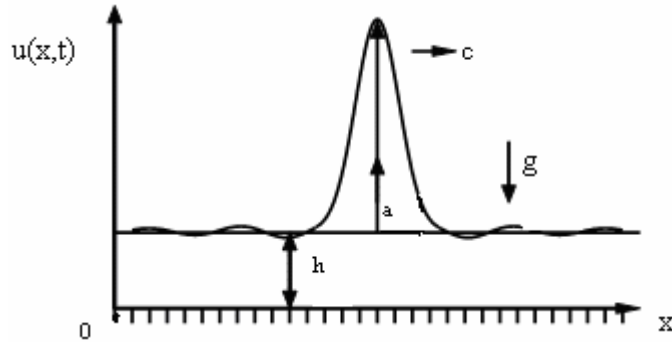
şeklinde yazılır. Bazen dalga fonksiyonu adı verilen y yer değiştirmesi x ve t gibi iki değişkene bağlıdır. Bu nedenle çoğu kez $y(x, t)$ şeklinde yazılır ve “ y , x ile t nin fonksiyonu” şeklinde okunur [1].

Bir kısmi diferensiyel denklemde bulunan bağımlı u değişkeni, bir dalga su yüzeyinden itibaren yüksekliğini veya bir elektromanyetik dalga boyu gibi fiziksel bir niceliğe karşılık geldiği zaman bağımlı u değişkeninin özelliklerini veya üretimini çalışmak oldukça önemlidir. Bu durum, evlasyon veya dalga denklemlerinin analitik olarak çözülmesi için metotların çalışılmasına yol açmıştır. Buradaki amaç hareket eden dalga çözümlerini bulmaktır. Eğer çözümler üretim esnasında şekillerini değiştirmiyorlar ise bu dalgalara *solitary dalgalar* denir.

Solitary dalgalar ilk olarak John Scott Russell tarafından 1834 yılında gözlemlenmiştir. Russell, Edinburg-Glasgow kanalında dalganın şeklinde herhangi bir değişiklik olmaksızın yavaş bir şekilde hareket eden suyun çıkışını gözlemlemiştir. “Harika dalga aktarımı” olarak nitelendirdiği bu su çıkışını Russell şu şekilde anlatmaktadır: “Ben çift beygir gücüyle giden bir botun, dar bir kanaldan geçerken hareketini gözlemliyordum. Bot aniden durunca kanalda hareketli olan su kütlesinin botun uç kısmının etrafında biriktiğini gördüm. Daha sonra bu su kütlesi arkaya doğru yayıldı. Büyük bir hızla öne doğru tek başına bir su dalgasının meydana geldiğini fark ettim. Bu yuvarlanmış su kütlesinin hızının azalmadan ve formunu değiştirmeden kanal boyunca ilerleyişine devam ettiğini gördüm. Onu at sırtında takip ettim. Ona yetiştiğim zaman saatte yaklaşık 8–9 mil hızla ilerlediğini gördüm. Onu 1–2 mil takip ettikten sonra kanalın dönüşünde kaybettim. Böylece 1834’ün Ağustos ayında Translasyon Dalgası olarak adlandırdığım ilk görüşümü tanıtmaya şansım oldu” [2]. Dikkate değer bu keşif solitary dalgaları çalışmak ve fiziksel laboratuvar deneylerini yapmak için Russell’i motive etmiştir. Russell, deneysel olarak

$$c^2 = g(h + a)$$

ilişkisini ortaya çıkarmıştır. Burada Şekil 3 de görüldüğü gibi c solitary dalganın hızı, a su yüzeyi üzerinde dalganın genliği, h sonlu bir derinliği ve g yerçekimi ivmesini göstermektedir. Solitary dalgalar bundan dolayı yerçekimi dalgaları olarak da adlandırılır.



Şekil 3. Bir solitary dalga

Solitary dalgaların tarihi 1844 yılında John Scott Russell tarafından yapılan deney ve gözlemlerin detaylı bir şekilde rapor edilmesi ile başlar. Başlangıçta John Scott Russell’ın çalışmaları bazı çelişkiler taşısa da 1870 yılında Boussinesq ve Rayleigh tarafından yapılan teorik çalışma ile Korteweg ve de Vries tarafından 1895 yılında yayınlanan makale Russell’ın çalışmalarını doğrulamıştır. 1895 yılında Diederik Johannes Korteweg ve doktora öğrencisi Gustav de Vries, KdV denklemi olarak bilinen ve solitary dalgaların

varlığında sıg su yüzeyinin yüksekliğini modellemek için lineer olmayan bir kısmi diferensiyel denklemini türetmişlerdir. Ortaya atılan bu KdV denklemini daha sonra birçok fiziksel olayın açıklanmasında kullanılmıştır. En basit bir biçimde tanımlanan KdV denklemini

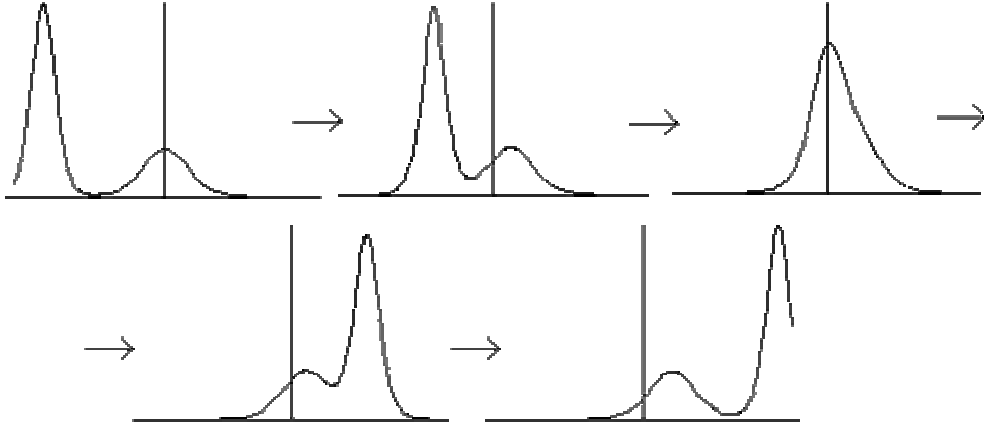
$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 ,$$

şeklinde yazılabilir. Burada uu_x terimi non-lineerliği ve u_{xxx} terimi ise lineer dağılımı temsil eder. KdV denklemini fizik ve mühendisliğin pek çok dalında zayıf bir şekilde lineer olmayan uzun dalgaların tarifi için bir paradigma olarak yaygın bir şekilde bilinir. Bu denklem pek çok sıvı akışı durumu için uygun bir model olarak kullanılır. Burada; $u(x,t)$ dalga genliğini tanımlayan uygun alan değişkenini, t zamanı, x ise dalganın yayılım yönündeki uzay koordinatını göstermektedir. KdV denklemini

$$u(x,t) = a \text{Sech}^2(\gamma(x-Vt)) , \quad V = 2a = 4\gamma^2$$

şeklinde solitary dalga çözümlerinin ailesi tarafından karakterize edilir. Burada γ dalga sayısını, V dalganın hızını, a dalganın genliğini göstermektedir.

1960 yıllarına kadar solitary dalgalar gereken ilgiyi görmemiştir. Ancak 1965 yılında Zabusky ve Kruskal [3] solitary dalgaların birbirleriyle etkileşimini incelemişlerdir. Zabusky ve Kruskal, KdV denklemini için yaptıkları sayısal çalışmalar ve bu denklemin integrallenebileceğini göstermeleri ile solitary dalgalara olan ilgiyi tekrar arttırmışlardır. Aynı yıl içerisinde Zabusky ve Kruskal, solitary dalgaların birbirleriyle etkileşim içinde olduğunu keşfetmişlerdir. Bunlara ilaveten, şeklini ve genliğini muhafaza eden bu dalgalar bu etkileşimden ortaya çıktığı gözlemlenmiştir. Kimliklerini koruyan ve karakterlerini küçük parçalarına aktarabilen solitary dalgaların keşfi, Zabusky ve Kruskal'ı bu solitary dalgalara solitonlar demek için cesaretlendirmiştir. Bu bilim adamları, solitonlar kavramının doğuşuna damgalarını vurmuşlardır. Aynı zamanda Schrödinger denklemini gibi lineer olmayan dalga denklemleri ile birlikte soliton çözümleri bu alanda yapılan çalışmalarda önemli bir rol oynamıştır. Solitonlar ve integrallenebilir sistemlerin modern teorisi matematiğin büyük bir alanı olma yolunda gelişmektedir. Ayrıca soliton teorisi [4,5] pek çok fiziksel alanlarda da uygulama sahasına sahiptir.



Şekil 4. İki soliton etkileşimi

Şekil 4’ te görüldüğü gibi çarpışma esnasında şekillerini koruyan solitary dalgalara *solitonlar* denir. Solitary dalgalar ve solitonlar üretim ve lineer olmayanlık arasında kritik bir dengeden dolayı ortaya çıkmıştır. Soliton kavramı bilimin pek çok alanında bir gerçek olmadan önce dar anlamda lineer olmayanlık çerçevesinde ortaya çıkmıştır. Araştırmacılar, soliton kavramını dünya çapında bilimsel alanın değişik dallarına yaymışlardır. Soliton kavramı plazma fiziği, astrofizik, akışkanlar dinamiği gibi bilimin değişik alanlarındaki rolünden dolayı çalışmaların büyük bir kısmını etkilemiştir.

Diğer taraftan, bir soliton aşağıdaki özellikleri taşıyan bir lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemin bir çözümü olarak tanımlanabilir.

- i) Çözüm, sürekli bir dalga formunda olmalıdır.
- ii) Çözüm sınırlandırılır, yani; KdV denkleminde elde edilen solitonlar gibi çözüm üstel olarak sifıra doğru bozulur veya Sine-Gordon denkleminde verilen solitonlar gibi çözüm sonsuzda bir sabite yakınsar.
- iii) Soliton, karakterini koruyan diğer solitonlar ile iç etkileşim içinde bulunur.

KdV denklemi ve diğer benzer denklemlerin tek soliton çözümü genellikle tek dalga olarak kullanılır, eğer birden fazla soliton çözüm varsa solitonlar olarak adlandırılır. Diğer bir ifade ile bir soliton diğer bir solitondan sonsuz olarak ayrılıyorsa bir tek dalgadır. Ayrıca, KdV denkleminin başka denklemler için tek dalga çözümü sech^2 fonksiyonu olmayabilir fakat sech veya $\tan^{-1}(e^{ax})$ olabilir. Soliton kavramına 1960 yıllarında giriş yapılmasına rağmen solitonların bilimsel araştırmaları 19. yüzyılda John Scott Russell’ın Edinburg kanalında solitary dalgaları keşfi ile başlamıştır. Scott Russell’ın zamanında

solitary dalgaların bu tür bir varlığı hakkında birçok tartışma vardı. Fakat günümüzde pek çok lineer olmayan diferensiyel denklemlerin soliton çözümlere sahip olduğu bilinir.

Son zamanlarda soliton kavramı çok yaygın olarak kullanılmaktadır. Hirota [6] bilinear forma indirgeyerek evulasyon denklemlerinin N -soliton çözümlerini oluşturmuştur. Bilinear formulasyonu Hirota tarafından ortaya atılmış ve bu formulasyon lineer olmayan denklemlerin çalışılmasında önemli açılımlar sağlamıştır. Nimmo ve Freeman [7], N -soliton çözümlerinin formulasyonuna alternatif olarak N -fonksiyonların Wronskian determinantına giriş yapmışlardır.

Bu tezde, bazı lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin periyodik dalga çözümlerini elde etmek için kullanılan ve literatürde var olan analitik metotların tarihsel olarak analizi yapılmış olup bu metotlardan biri kullanılarak simetrik düzenlenmiş uzun dalga (symmetric regularized long wave) denklemi (SRLW) [8] ve (1+1) boyutlu saçılma terimli (dispersive) uzun dalga denkleminin [9] hareket eden dalga çözümleri elde edilmiş ve bu çözümler içerisinde periyodik olan çözümler ayrıca belirtilmiştir. Daha sonra kısmi diferensiyel denklemlerin sayısal irdelenmesinde kullanılan birkaç yarı analitik metotların analizi yapılarak SRLW denklemi ve (1+1) boyutlu saçılma terimli uzun dalga denklemi için bazı sayısal sonuçlar alınmıştır.

$$u_{tt} + u_{xx} + uu_{xt} + u_x u_t + u_{xxt} = 0, \quad (1.1)$$

şeklinde tanımlanan SRLW denklemi, zayıf bir şekilde lineer olmayan iyon-akustik dalgaları ve uzay yük (space-charge) dalgalarını tanımlamak için kullanılır [8]. Bu denklem x ve t ye göre simetriktir ve aynı zamanda matematiksel fiziğin diğer lineer olmayan problemlerinde ortaya çıkar [10,11]. Sayısal araştırmalar bu denklemin solitary dalgalarının birbirleri ile etkileşiminin elastik olmadığını gösterir [12]. Buna göre SRLW denkleminin solitary dalgaları soliton değildir. Son zamanlarda genelleştirilmiş SRLW denklemlerinin yörünge kararlılık ve kararsızlığı tartışılmıştır [13]. Bo-ling [14], SRLW denklemlerinin bir sınıfının, periyodik başlangıç değer problemi için spektral metotları sunmuştur. Jia-dong [15], genelleştirilmiş SRLW ve SRLW denkleminin çözümü için yarı spektral collocation metodunu sunmuştur. Bo-ling [16], çok boyutlu SRLW denklemleri için blow-up ve çözümün global varlığını çalışmıştır. Ya-dong ve Zhi-shen [17], çok boyutlarda genelleştirilmiş SRLW denklemlerinin periyodik başlangıç değer problemi için Fourier spektral metotları incelemişlerdir. Ayrıca

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + v_x &= 0 \\ v_t + u_x v + uv_x + \frac{1}{3}u_{xxx} &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

olarak tanımlanan (1+1) boyutlu saçılma terimli uzun dalga denklemi akışkanlar dinamiğinin temel denklemlerinden biridir. Burada $v-1$ su dalgasının yüksekliğini, u ise x eksenini boyunca suyun yüzey hızını göstermektedir. Bu denklem kıyı kenarlarındaki dalgaları modellemek için kullanılır [18].

1.1. Temel Tanımlar

Tanım 1. 1 Bir bilinmeyen fonksiyon ve bu fonksiyonun muhtelif türevlerini içeren matematiksel denklemlere *diferansiyel denklemler* denir. Bir denklemde belirli bir değişkene göre türev alınıyorsa, o değişkene *bağımsız değişken*, denklemde türevi alınan değişkene ise *bağımlı değişken* denir.

Bir tek bağımsız değişken içeren diferansiyel denkleme *adi diferansiyel denklem* denir ve genel olarak *n. mertebeden adi bir diferansiyel denklem*;

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1.3)$$

şeklinde gösterilir.

İki veya daha fazla bağımsız değişken ihtiva eden diferansiyel denkleme *kısmi diferansiyel denklem* denir ve *n. mertebeden bir kısmi diferansiyel denklem*

$$F\left(x, y, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right) = 0, \quad (1.4)$$

olarak yazılır.

Tanım 1. 2 Bir diferansiyel denklem lineer veya lineer olmayan olmak üzere iki şekilde sınıflandırılır. Eğer bir diferansiyel denklemde bağımlı değişken ve türevlerinin katsayıları bağımsız değişken ihtiva ediyor ise bu diferansiyel denkleme *lineer diferansiyel denklem* denir. Eğer bir diferansiyel denklemde bağımlı değişken kendisi veya türevleri ile çarpım ya da bölüm durumunda ise veya bağımlı değişken üstel, trigonometrik ya da logaritmik olarak bulunuyor ise veya bağımlı değişkenin herhangi bir türevinin derecesi iki ve ikiden büyük ise bu tür diferansiyel denklemlere *lineer olmayan diferansiyel denklem* denir.

Tanım 1. 3 Bir $a < x < b$ aralığında tanımlı bir Φ fonksiyonu $a < x < b$ aralığında bulunan her x için tanımlı ve ilk n . mertebeden türeve sahip fonksiyonu

$$F(x, \Phi(x), \Phi'(x), \dots, \Phi^{(n)}) = 0, \quad (1.5)$$

ise Φ fonksiyonuna (1.3) denkleminin *çözümüdür* denir. Bir adi diferensiyel denklemin genel çözümü, diferensiyel denklemin mertebesi kadar sabit içerir. Çözüm fonksiyonundaki sabitlere verilen her bir değere karşılık bulunan çözüme de *özel çözüm* denir. Bir adi diferensiyel denklemin çözümü eğri ailesine karşılık gelmesine karşın, bir kısmi diferensiyel denklemin çözümü yüzey ailesine karşılık gelir.

Özel olarak, ikinci mertebeden bir diferensiyel denklem göz önüne alındığında bu tip denklemlerin çözümleri iki sabit içerdiğinden bu sabitleri bulmak için iki ek şart verilmelidir. Eğer şartlar; bağımlı değişken ve türevleri üzerinde bağımsız değişkenin aynı değeri için verilen şartlar ise *başlangıç şartları*, bağımsız değişkenin farklı değerleri için verilen şartlar şeklinde ise *sınır şartları* ile tanımlanır. Bir diferensiyel denklemin başlangıç şartları ile incelenmesine *başlangıç değer problemi*, sınır şartları ile incelenmesine *sınır değer problemi* denir.

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \quad (1.6)$$

(1.3) ve (1.6) ile birlikte verilen bir problem başlangıç değer veya Cauchy Problemi olarak bilinir. Diğer taraftan

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1, \dots, y(x_n) = y_n, \quad (1.7)$$

(1.3) ve (1.7) ile birlikte verilen denkleme sınır değer problemi denir.

Diferensiyel denklem bir fiziksel olayın modeli olduğundan kolaylık olması açısından genellikle ikinci mertebeden sabit katsayılı bir kısmi diferensiyel denklem alınarak sınıflandırmaya gidilmiştir, ikinci mertebeden bir kısmi diferensiyel denklemin genel hali;

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu + g = 0, \quad (1.8)$$

şeklinde yazılabilir. Burada a, b, c, d, e, f ve g sabitler ve $\Delta = b^2 - 4ac$ olmak üzere;

$\Delta = 0$ ise denklem Parabolik (Difüzyon Denklemi),

$\Delta > 0$ ise denklem Hiperbolik (Dalga Denklemi),

$\Delta < 0$ ise denklem Eliptik (Laplace Denklemi),

olarak sınıflandırılmaktadır. Parabolik tipteki bir kısmi diferensiyel denkleme örnek olarak; difüzyon (ısı) denklemi, hiperbolik tipteki bir kısmi diferensiyel denklem; dalga denklemi, eliptik tipteki bir kısmi diferensiyel denkleme ise Laplace denklemi verilebilir.

$$u_t + c^2 u_{xx} = 0 \text{ Difüzyon Denklemi,}$$

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \text{ Dalga Denklemi,}$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ Laplace Denklemi,}$$

örneğin;

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1.9)$$

denklemini göz önüne alalım. (1.9) ile verilen Laplace denkleminin çözümleri harmonik fonksiyonlardır. Yukarıda göz önüne alınan (1.9) denklemi

$$u(x, 0) = f(x) \text{ ve } u_x(x, 0) = g(x), \quad (1.10)$$

başlangıç şartları ile verilmiş ise probleme *Cauchy problemi*,

$$u(0, t) = p(t) \text{ ve } u(\ell, t) = q(t), \quad (1.11)$$

(1.9) denklemi (1.11) şartları ile verildiğinde, probleme *Dirichlet Problemi*, eğer çözüm bölgesinin dışında dış normal boyunca çözüm aranıyorsa yani;

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f(t), \quad (1.12)$$

şartı ile verilen (1.9) denklemine ise *Neumann Problemi* denir.

Tanım 1. 4 $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. k pozitif bir reel sayı olmak üzere $\forall x \in A$ için

$$f(x + k) = f(x),$$

eşitliği sağlanıyor ise f fonksiyonuna *periyodiktir* denir ve k ya da f fonksiyonunun periyodudur denir.

Tanım 1. 5 Kompleks düzlemde iki yönde periyodik olan fonksiyonlara *eliptik fonksiyon* denir. Eliptik fonksiyon, eliptik integrallerin ters fonksiyonları olarak da tanımlanabilir. w herhangi bir kompleks sayı olmak üzere kompleks düzlemdeki bütün z sayıları için $f(z + w) = f(z)$ olacak şekilde f fonksiyonuna periyodiktir denir ve w ise f fonksiyonunun periyodu olarak adlandırılır. a ve b iki esas periyot olmak üzere $w = ma + nb$ olarak yazılabilir. Böylece her eliptik fonksiyon bir çift esas periyoda sahiptir.

Tanım 1. 6 Jakobi eliptik fonksiyonlar eliptik fonksiyonların standart formudur. Bu fonksiyonlar, k eliptik modül olmak üzere $cn(u, k)$, $dn(u, k)$, $sn(u, k)$ olacak şekilde üç temel fonksiyon ile gösterilir. Bu üç temel fonksiyon

$$u = F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}}, \quad 0 < k^2 < 1,$$

şeklinde verilen birinci tip eliptik integralin versiyonundan ortaya çıkar. Burada $k = \text{mod } u$ ve $\varphi = \text{am}(u, k) = \text{am}(u)$ olmak üzere Jakobi genliktir ve ayrıca $\varphi = F^{-1}(u, k) = \text{am}(u, k)$ ile tanımlanır. Bu açıklamalardan sonra

$$\sin(\varphi) = \sin(\text{am}(u, k)) = \text{sn}(u, k),$$

$$\cos(\varphi) = \cos(\text{am}(u, k)) = \text{cn}(u, k),$$

$$\sqrt{1-k^2 \sin^2(\varphi)} = \sqrt{1-k^2 \sin^2(\text{am}(u, k))} = \text{dn}(u, k),$$

eşitlikleri yazılabilir. Burada $k \rightarrow 0$ ve $k \rightarrow 1$ iken sırası ile bu fonksiyonlar

$$\text{sn}(u, 0) = \sin(u) \quad \text{sn}(u, 1) = \tanh(u),$$

$$\text{cn}(u, 0) = \cos(u) \quad \text{cn}(u, 1) = \text{sech}(u),$$

$$\text{dn}(u, 0) = 1 \quad \text{dn}(u, 1) = \text{sech}(u),$$

olarak tanımlanır. Ayrıca Jakobi eliptik fonksiyonlar üzerinde türev

$$\frac{d}{du}(\text{sn}(u)) = \text{cn}(u) \text{dn}(u),$$

$$\frac{d}{du}(\text{cn}(u)) = -\text{sn}(u) \text{dn}(u),$$

$$\frac{d}{du}(\text{dn}(u)) = -k^2 \text{sn}(u) \text{cn}(u),$$

eşitlikleri ile açıklanır. Jakobi eliptik fonksiyonların bu özelliklerinin yanı sıra bu fonksiyonlar arasında

$$\text{sn}^2(u) + \text{cn}^2(u) = 1,$$

$$k^2 \text{sn}^2(u) + \text{dn}^2(u) = 1,$$

bağıntıları vardır.

Tanım 1. 7 Lineer olmayan herhangi bir adi diferensiyel denklemde en yüksek mertebeden lineer olan terim $\frac{d^q u}{d\xi^q}$ ve en yüksek mertebeden lineer olmayan terim

$u^p \left(\frac{d^r u}{d\xi^r} \right)^s$ ile verilsin. M dengeleme terimi olmak üzere $M + q = Mp + s(M + r)$ eşitliği

yazılabilir.

Tanım 1. 8 X ve Y iki uzay ve $I\{t|0 \leq t \leq 1\}$ aralığında tanımlı olsun. Eğer $\phi: X \times I \rightarrow Y$ sürekli bir dönüşümü $\forall x \in X$ için $\phi(x, 0) = f(x)$ ve $\phi(x, 1) = g(x)$ oluyor ise $f, g: X \rightarrow Y$ dönüşümlerine *homotopiktirler* denir ve $f \simeq g$ ile gösterilir. $\phi: f \simeq g$ ise ϕ, f 'den g 'ye bir *homotopi* kurar şeklinde ifade edilir.

2. LİNEER OLMAYAN KİSMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN PERİYODİK DALGA ÇÖZÜMLERİ İÇİN BAZI ANALİTİK METOTLAR

Lineer olmayan evulasyon denklemleri ve dalga denklemleri birinci veya ikinci mertebeden zamana bağlı türevler içeren kısmi diferensiyel denklemlerdir. Lineer olmayan bu denklemlerin analitik veya sayısal çözümlerini bulmak için bazı metotlar son yıllarda yoğun bir şekilde çalışılmaktadır. Karmaşık ve sıkıcı cebirsel hesaplamalarda araştırmacılara kolaylık sağlayan Maple veya Mathematica gibi sembolik bilgisayar programlarının kullanılmasıyla lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek giderek ilgi çekici hale gelmiştir. Lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin analitik çözümlerini bulmak *soliton* teorisinde [4] büyük bir öneme sahiptir. Çünkü bu denklemler; mühendislik, kimya, biyoloji, mekanik ve fizikte ortaya çıkan karmaşık fiziksel olayların matematiksel modelleridir. Bu fiziksel modellerin mekanizmasını daha iyi anlamak için fizikçilere ve mühendislere yardımcı olmak veya fiziksel problemlere ve uygulamalarına daha iyi bilgi sağlamak için birçok etkili metot geliştirilmiştir.

Bu bölümde kısmi diferensiyel denklemlerin periyodik dalga çözümlerinin elde edilmesinde kullanılan bazı analitik metotların analizleri verilecektir.

2.1. Analitik Metotların Analizi

Fiziksel sistemlerin matematiksel modellemesi genellikle lineer olmayan evulasyon denklemleri ile açıklanır. Bu gibi denklemlerin analitik çözümleri büyük bir öneme sahiptir. Çünkü bir denklemin analitik çözümü o denklemin yapısı ve karakteri hakkında bilgi verir. Özellikle kısmi diferensiyel denklemlerin hareket eden dalga çözümleri ve periyodik dalga çözümlerine olan ilgi son zamanlarda giderek artmaktadır. Bu tip çözümleri elde etmek için birkaç standart metot vardır. Bu metotlardan bazılarını şöyle sıralayabiliriz: Hirota'nın bağımlı değişken metodu [19], Bäcklund dönüşümü [20], Cole-hopf dönüşümü [21], genelleştirilmiş Miura dönüşümü [22], ters saçılma metodu [23], darboux dönüşümü [24], painleve açılım metodu [25], homojen balans metodu [26], benzerlik indirgeme metodu [27], sine-cosine metodu [28].

Ayrıca pek çok lineer olmayan evulasyon denklemlerin hareket eden dalga çözümleri *tanh* fonksiyon terimleri ile ifade edilebilir [29,30]. Tanh fonksiyon terimleri orijinal olarak 1990 ve 1991 yıllarında bir *ad hoc* temeli üzerine kullanıldı [31,32].

2.1.1. Tanh Metot

1992 yılında ilk olarak Malfliet [33] tarafından *tanh metot* formülize edilmiş olup bu metot, ısı yayılımı, difüzyon reaksiyonu, plazma fiziği, türbülans teorisi, okyanus dinamiği ve biyofizik gibi doğa olaylarını tanımlayan kısmi diferensiyel denklemlerin analitik çözümlerini bulmak için önemli bir rol oynar. Bu teknik ile elde edilen çözümler kapalı *tanh* fonksiyonu formundadır. Malfliet bu metot ile

$$H(u, u_t, u_x, u_{xx}, \dots) = 0, \quad (2.1)$$

şeklinde verilen bir kısmi diferensiyel denklemin hareket eden dalga çözümünü bulmak için $\xi = c(x - vt)$ gibi bir koordinat göz önüne alarak bu koordinata göre (2.1) denklemini adi diferensiyel denkleme dönüştürerek yeniden yazmıştır. Burada v dalga hızını ve c ise $L = c^{-1}$ genişlikli durağan bir dalgayı ifade eder. Genelliği bozmaksızın $c > 0$ olarak tanımlanır. Adi diferensiyel denklem elde edildikten sonra $Y = \tanh(\xi)$ gibi yeni bir bağımsız değişkene giriş yapılır. Bu yeni değişkene göre türevler

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} &\rightarrow (1 - Y^2) \frac{d}{dY}, \\ \frac{d^2}{d\xi^2} &\rightarrow (1 - Y^2) \left(-2Y \frac{d}{dY} + (1 - Y^2) \frac{d^2}{dY^2} \right), \\ \frac{d^3}{d\xi^3} &\rightarrow -2Y(1 - Y^2) \left(-2Y \frac{d}{dY} + (1 - Y^2) \frac{d^2}{dY^2} \right) + (1 - Y^2)^2 \left(-2 \frac{d}{dY} - 2Y \frac{d^2}{dY^2} + (1 - Y^2) \frac{d^3}{dY^3} \right), \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir, ayrıca daha yüksek mertebeden türevler benzer şekilde hesaplanabilir. Bu türevler ile birlikte (2.1) denklemini için aranan

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^M a_m Y^m, \quad (2.2)$$

çözümü, elde edilen adi diferensiyel denklemde yerlerine yazılmasıyla Y^m ($m = 0, 1, 2, \dots, M$) katsayıları yok edilerek cebirsel denklem sistemi bulunur. Bulunan bu cebirsel denklem sisteminde a_m ($m = 0, 1, 2, \dots, M$) katsayıları elde edilir ve bu katsayılar

(2.2) serisinde yerlerine yazılarak (2.1) denkleminin dalga çözümü bulunmuş olur. Burada M en yüksek mertebeden lineer olan terim ile lineer olmayan terimlerin dengelenmesiyle bulunabilen parametredir. Normal olarak analitik çözümün elde edilebilmesi için M parametresinin pozitif bir aralık içerisinde olması beklenir. Ancak M parametresinin negatif değer aldığı bir örnek bulunabilir. Örnek olarak $(-1 \leq Y \leq 1)$ durumunda $Y \rightarrow 0$ tekilliğinden kaçınmak için (2.2) serisi değiştirilmelidir. Bunun için (2.2) serisi

$$\left(\sum_{m=0}^{M'} a_m Y^m \right)^{-1}, \quad M' = -M (> 0), \quad (2.3)$$

şeklinde yazılır. [34–36] çalışmalarında bu metot kullanarak bazı kısmi diferansiyel denklemlerin periyodik dalga çözümleri elde edilmiştir.

2.1.2. Otomatik Tanh Metot

1996 yılında Parkes ve Duffy [37], Malfliet tarafından sunulan *tanh* metot üzerine *otomatik tanh fonksiyon metodu* geliştirmişlerdir. Malfliet tarafından 1992 yılında sunulan *tanh* metot her ne kadar diğer analitik metotlardan daha açık ve doğrudan çözüme ulaşmayı sağlıyor olsa bile el ile yapılan işlemlerin sıkıcılığı ve metodun sadece çözümü *tanh* formunda olan denklemlere uygulanabilmesi bu metodun bir çıkmazı olarak görülebilir. 1996 yılında Parkes ve Duffy *tanh* metot ile birlikte el ile yapılan cebirsel işlemlerin sıkıcılığını ve hesaplamadaki zorluğu ortadan kaldırmak için Mathematica bilgisayar programını kullanarak *otomatik tanh fonksiyon metodu* geliştirmişlerdir. Örneğin metot gereği bulunması gereken M dengeleme teriminin negatif olması durumunda yapılacak işlemler hem zor hem de zaman alacağından otomatik *tanh* fonksiyon metodu bu açıdan büyük kolaylık sağlamıştır.

2.1.3. Genişletilmiş Tanh Metot

2000 yılında Fan [38] *tanh* metot ve otomatik *tanh* metot üzerine çalışarak *genişletilmiş tanh fonksiyon metodu* sunmuştur. Bu metodun işleyişi Malfliet tarafından sunulan *tanh* metot ile aynıdır. Ancak farklı olan tarafı *tanh* metot ile (2.1) denklemi için sadece $Y = \tanh(\xi)$ formunda hareket eden dalga çözümleri elde edilir iken Fan [38] bu metot ile

$$F' = b + F^2, \quad (2.4)$$

Riccati diferensiyel denkleminin çözümleri olarak elde edilen

$$\begin{cases} F = -\sqrt{-b} \tanh[\sqrt{-b}\xi] \\ F = -\sqrt{-b} \coth[\sqrt{-b}\xi] \end{cases}, \quad b < 0 \text{ ise} \quad (2.5)$$

$$F = -\frac{1}{\xi}, \quad b = 0 \text{ ise} \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} F = \sqrt{b} \tan[\sqrt{b}\xi] \\ F = -\sqrt{b} \cot[\sqrt{b}\xi] \end{cases}, \quad b > 0 \text{ ise} \quad (2.7)$$

fonksiyonları ile (2.1) denkleminin hareket eden dalga çözümlerini elde etmiştir. Burada b nin durumuna göre hareket eden dalga çözümünün tipi (2.5–2.7) eşitliklerinde görüldüğü gibi belirlenebilir.

2.1.4. Değiştirilmiş Genişletilmiş Tanh Metot

2002 yılında Elwakil ve arkadaşları [39] *değiştirilmiş genişletilmiş tanh fonksiyon metodunu* literatüre kazandırmışlardır. Bu metodun yukarıda bahsedilen *tanh* metotlarından farklı olan tek tarafı (2.1) denkleminin çözümü için (2.2) ile verilen çözüm yerine

$$u(x, t) = a_0 + \sum_{i=1}^M a_i F^i + b_i F^{-i}, \quad (2.8)$$

çözümünün seçilmesidir. Burada a_0, a_i, b_i ($i = 1, 2, \dots, M$) sabitlerdir. Bu farklılık dışında bu metotta kullanılan Riccati denklemi ve bu denkleminin çözümleri sırasıyla (2.5–2.7) eşitliklerinde verilen ifadeler ile aynıdır. Elwakil ve arkadaşları bu çalışma ile diğer *tanh* metotlar ile elde edilemeyen yeni tam çözümler elde etmişlerdir. Ayrıca bu metot ile (2.1) denklemi için çözüm olarak kabul edilen (2.8) eşitliğinde F^{-i} terimi bulunduğundan elde edilen çözümler singüler çözüm ve blow-up davranışı gösterirler. Zhang ve arkadaşları [40] çalışmalarında değiştirilmiş genişletilmiş tanh fonksiyon metodunu kullanarak Konopelchenko–Dubrovsky denkleminin periyodik dalga çözümlerini elde etmiştir.

2.1.5. Genelleştirilmiş Genişletilmiş Tanh Metot

2003 yılında Zheng ve arkadaşları [41] yukarıda açıkladığımız sırasıyla *tanh metot*, *genişletilmiş tanh fonksiyon metot* ve *değiştirilmiş genişletilmiş tanh fonksiyon metot* üzerine çalışarak bu metotlar ile elde edilen çözümleri de kapsayan daha genel çözümler ile birlikte bu metotlar ile elde edilemeyen yeni çözümler bularak *genelleştirilmiş genişletilmiş tanh metodunu* sunmuşlardır. Bu metodun bahsedilen diğer metotlardan farklı olan tarafı (2.1) denklemi için kabul edilen çözümün

$$u_i(\xi) = a_{i0} + \sum_{j=1}^{M_i} \left\{ a_{ij}F^j + b_{ij}F^{-j} + c_{ij}F^{j-1}\sqrt{b+F^2} + d_{ij}\frac{\sqrt{b+F^2}}{F^j} \right\}, (i, j = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (2.9)$$

olarak seçilmesidir. Bu fark dışında metodun işleyişi tamamen diğer *tanh* metotları ile aynıdır. Burada j sayısı i yinci denklemi ve n ise denklemlerin sayısını gösterir. $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}$ ($i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, M_i$) ve b daha sonra belirlenebilen sabitlerdir. Gerçekten, (2.9) eşitliğinde $b_{ij} = c_{ij} = d_{ij} = 0$, ($i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, M_i$) alınır ise 2000 yılında Fan [38] tarafından sunulan *genişletilmiş tanh fonksiyon metot* elde edilir. Eğer $c_{ij} = d_{ij} = 0$, ($i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, M_i$) alınır ise 2002 yılında Elwakil [39] tarafından sunulan *değiştirilmiş genişletilmiş tanh fonksiyon metot* elde edilir. Görüldüğü gibi 2003 yılında Zheng ve arkadaşları tarafından literatüre kazandırılan *genelleştirilmiş genişletilmiş tanh fonksiyon metot*, sırası ile *genişletilmiş tanh fonksiyon metot* ve *değiştirilmiş genişletilmiş tanh fonksiyon metot*ları kapsayan bir metottur.

2.1.6. Geliştirilmiş Tanh Metot

2004 yılında Chen ve Zhang [42], (2.1) denkleminin hareket eden dalga çözümlerini elde etmek için yukarıda bahsedilen *tanh* metotlarında kullanılan Riccati diferensiyel denklemlerinden farklı olarak

$$\frac{dF}{d\xi} = A + BF + CF^2, \quad (2.10)$$

şeklinde bir Riccati diferensiyel denklemi olarak *geliştirilmiş tanh fonksiyon metodunu* sunmuşlardır. (2.10) denkleminin çözümleri olarak göz önüne alınan

1. Durum:

$$A = C = 1, B = 0 \text{ ise } F = \tan z, \quad (2.11)$$

2. Durum:

$$A = \frac{1}{2}, B = 0, C = -\frac{1}{2} \text{ ise } F = \coth z \pm \csc hz \text{ veya } F = \tanh z \pm i \sec hz, \quad (2.12)$$

3. Durum:

$$A = C = \pm \frac{1}{2}, B = 0 \text{ ise } F = \sec z \pm \tan z \text{ veya } F = \csc z \pm \cot z, \quad (2.13)$$

4. Durum:

$$A = 1, B = 0, C = -1 \text{ ise } F = \tanh z \text{ veya } F = \coth z, \quad (2.14)$$

5. Durum:

$$A = C = -1, B = 0 \text{ ise } F = \cot z, \quad (2.15)$$

6. Durum:

$$C = 0, B \neq 0 \text{ ise } F = \frac{(\exp(Bz) - A)}{B}, \quad (2.16)$$

7. Durum:

$$A = B = 0, C \neq 0 \text{ ise } F = -\frac{1}{(Cz + c_0)}, \quad (2.17)$$

fonksiyonları ile (2.1) denkleminin hareket eden dalga çözümleri yazılabilir. Bu metot ile (2.1) denklemi için aranan çözüm

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^M a_i F^i(\xi), \quad (2.18)$$

şeklinde yazılır. Bu metot yardımı ile El-Wakil ve arkadaşları [43] çalışmalarında lineer olmayan fiziksel bir model için periyodik dalga çözümleri elde etmişlerdir.

Yukarıda bahsedilen ve kısmi diferensiyel denklemlerin hareket eden dalga çözümlerini ve periyodik dalga çözümlerini veren *tanh* metotlarının yanı sıra aynı zamanda eliptik fonksiyonların yardımı ile kısmi diferensiyel denklemlerin periyodik dalga çözümlerini veren metotlarda vardır. Bu metotlar sırası ile 2001 yılında *Jakobi eliptik fonksiyon metot* [44], 2003 yılında *değiştirilmiş jakobi eliptik fonksiyon metot* [45] ve 2004 yılında *genelleştirilmiş jakobi eliptik fonksiyon metot* [46] olmak üzere bilim adamları tarafından literatüre kazandırılmıştır. Bu kısımda, yukarıda bahsedilen eliptik fonksiyon metotlardan sadece genelleştirilmiş jakobi eliptik fonksiyon metodunun analizi yapılacaktır. Diğer metotlara verilen referanslardan bakılabilir.

2.1.7 Genelleştirilmiş Jakobi Eliptik Fonksiyon Metot

2004 yılında Chen ve Zhang [46] tarafından sunulan bu metodu açıklamak için (2.1) kısmi diferensiyel denklemini göz önüne alalım. (2.1) denkleminin $u(x, t) = u(\xi)$, $\xi = kx + wt$ dönüşümü yapıldığında

$$Q'(u', u'', u''', \dots) = 0, \quad (2.19)$$

şeklinde adi diferensiyel denklem haline dönüşür. (2.1) denkleminin periyodik dalga çözümlerini bulmak için

$$(F')^2 = A + BF^2 + CF^4, \quad (2.20)$$

şeklinde diferensiyel denklemi göz önüne alınır. Burada $F' = \frac{dF}{d\xi}$ ve A, B, C sabitlerdir.

(2.1) diferensiyel denklemi için

$$u(x, t) = a_0 + \sum_{i=1}^M [a_i F^i(\xi) + b_i F^{-i}(\xi)], \quad (2.21)$$

formunda bir çözüm arandığı kabul edilir. Burada M (2.19) denkleminde en yüksek mertebeden lineer olan terim ile lineer olmayan terimin dengelenmesi sonucu bulunan sabit bir sayıdır. Bu çözüm üzerinden gerekli türevler alınarak (2.19) diferensiyel denkleminde yerine yazılır. Daha sonra elde edilen denklemde F^i ve F^{-i} terimlerinin katsayıları sıfıra eşitlenerek cebirsel denklem sistemi yazılır. Elde edilen cebirsel denklem sistemi çözülerek a_0, a_i, b_i sabitleri bulunur. Bulunan bu sabitler, (2.20) eliptik diferensiyel denklemin çözümleri olarak bilinen ve Chen ve Zhang [46] tarafından hesaplanan

$$i) \begin{cases} A = 1 \\ B = -(1 + m^2) \\ C = m^2 \end{cases}, \quad F(\xi) = \operatorname{sn} \xi, \operatorname{cd} \xi \quad (2.22)$$

$$ii) \begin{cases} A = 1 - m^2 \\ B = 2m^2 - 1 \\ C = -m^2 \end{cases}, \quad F(\xi) = \operatorname{cn} \xi \quad (2.23)$$

$$iii) \begin{cases} A = m^2 - 1 \\ B = 2 - m^2 \\ C = -1 \end{cases}, \quad F(\xi) = \operatorname{dn} \xi \quad (2.24)$$

$$iv) \begin{cases} A = -m^2(1-m^2) \\ B = 2m^2 - 1 \\ C = 1 \end{cases}, \quad F(\xi) = ds\xi \quad (2.25)$$

$$v) \begin{cases} A = 1 - m^2 \\ B = 2 - m^2 \\ C = 1 \end{cases}, \quad F(\xi) = cs\xi \quad (2.26)$$

$$vi) \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = \frac{m^2 - 2}{2} \\ C = \frac{m^2}{4} \end{cases}, \quad F(\xi) = \frac{sn\xi}{1 \pm dn\xi} \quad (2.27)$$

$$vii) \begin{cases} A = \frac{m^2}{4} \\ B = \frac{m^2 - 2}{2} \\ C = \frac{m^2}{4} \end{cases}, \quad F(\xi) = sn\xi \pm icn\xi, \frac{dn\xi}{i\sqrt{1-m^2}sn\xi \pm cn\xi} \quad (2.28)$$

$$viii) \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = \frac{1-2m^2}{2} \\ C = \frac{1}{4} \end{cases}, \quad F(\xi) = \frac{dn\xi}{mcn\xi \pm i\sqrt{1-m^2}}, \quad msn\xi \pm idn\xi, \frac{sn\xi}{1 \pm cn\xi}, \quad \frac{cn\xi}{\sqrt{1-m^2}sn\xi \pm dn\xi}, \quad (2.29)$$

$$ix) \begin{cases} A = \frac{m^2 - 1}{4} \\ B = \frac{m^2 + 1}{2} \\ C = \frac{m^2 - 1}{4} \end{cases}, \quad F(\xi) = \frac{dn\xi}{1 \pm msn\xi} \quad (2.30)$$

$$x) \begin{cases} A = \frac{1-m^2}{4} \\ B = \frac{m^2+1}{2} \\ C = \frac{1-m^2}{4} \end{cases}, \quad F(\xi) = \frac{cn\xi}{1 \pm sn\xi} \quad (2.31)$$

$$xi) \begin{cases} A = -\frac{(1-m^2)^2}{4} \\ B = \frac{m^2+1}{2} \\ C = -\frac{1}{4} \end{cases}, \quad F(\xi) = mc n\xi \pm dn\xi \quad (2.32)$$

$$xii) \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = \frac{m^2+1}{2} \\ C = \frac{(1-m^2)^2}{4} \end{cases}, \quad F(\xi) = \frac{sn\xi}{dn\xi \pm cn\xi} \quad (2.33)$$

$$xiii) \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = \frac{m^2-2}{2} \\ C = \frac{m^4}{4} \end{cases}, \quad F(\xi) = \frac{cn}{\sqrt{1-m^2} \pm dn\xi} \quad (2.34)$$

fonksiyonlarda yerlerine yazılarak (2.1) diferensiyel denklemi için periyodik dalga çözümler elde edilebilir.

Yukarıda bahsedilen eliptik fonksiyon metotları üzerine çalışmalar yapılarak 2004 yılında *Jakobi eliptik rasyonel açılım metot* [47], 2006 yılında *Weierstrass jakobi eliptik fonksiyon açılım metot* [48] literatüre kazandırılarak lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin periyodik dalga çözümleri elde edilmiştir. Periyodik dalga çözümler elde etmek için yukarıda analizleri yapılan *tanh* fonksiyon metotları ve eliptik fonksiyon metotlarından farklı olarak üstel fonksiyonlar kullanılarak 2006 yılında He [49] tarafından sunulan *üstel fonksiyon metot*, 2008 yılında Wang ve arkadaşları [50] tarafından sunulan

$\frac{G'}{G}$ *açılım metot* gibi metotlar lineer olmayan diferensiyel denklemlerin bilimsel

çalışmalarına büyük katkılar sağlamıştır. Bu metot üzerine çalışmalar yapılarak 2010 yılında Guo ve Zhou [54] tarafından *genişletilmiş* $\frac{G'}{G}$ *açılım metot* ve arkasından Lü ve arkadaşları [55] tarafından *genelleştirilmiş* $\frac{G'}{G}$ *açılım metot* literatüre kazandırılmıştır.

2.1.8. Üstel Fonksiyon Metot

He [49] tarafından 2006 yılında literatüre kazandırılan bu metodu açıklamak için (2.1) ile verilen iki değişkenli lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemini göz önüne alalım. (2.1) denklemini $u(x, t) = u(\xi)$, $\xi = kx + \omega t$ dönüşümü ile

$$Q'(u', u'', u''', \dots) = 0, \quad (2.35)$$

şeklinde adi diferensiyel denklem haline dönüşür. (2.35) denkleminin çözümü

$$u(\xi) = \frac{\sum_{n=-c}^d a_n \exp(n\xi)}{\sum_{m=-p}^q b_m \exp(m\xi)}, \quad (2.36)$$

formunda kabul edilir. Burada c, d, p ve q daha sonra belirlenebilen pozitif tamsayılardır. a_n ve b_m bilinmeyen sabitlerdir. (2.35) denkleminin çözümü olarak kabul edilen (2.36) eşitliği daha açık olarak

$$u(\xi) = \frac{a_c \exp(c\xi) + \dots + a_{-d} \exp(-d\xi)}{a_p \exp(p\xi) + \dots + a_{-q} \exp(-q\xi)}, \quad (2.37)$$

şeklinde yazılabilir. Burada p, c, d ve q pozitif tam sayıları (2.35) denklemindeki en yüksek mertebeden lineer olmayan terim ile lineer terimin dengelenmesiyle belirlenebilir. Daha sonra (2.36) çözümü ve gerekli türevleri (2.35) denkleminde yerlerine yazılarak $\exp(\xi)$ ye bağlı olan denklem elde edilir. Bu denklemde $\exp(\xi)$ fonksiyonunun kuvvetlerine göre katsayıları sıfıra eşitlenerek cebirsel denklem sistemi bulunur. Bu cebirsel denklemin çözülmesi ile a_n ve b_m sabitleri bulunur. Bulunan bu sabitler (2.36) eşitliğinde yerlerine yazıldığı zaman (2.1) denkleminin hareket eden dalga çözümleri bulunmuş olur. Elde edilen bu çözümlerde özel olarak $k = iK, (i^2 = -1)$ dönüşümü yapılırsa (2.1) denkleminin periyodik dalga çözümleri bulunur. Burada K keyfi bir

parametre olarak kabul edilir. Bu metot yardımı ile periyodik dalga çözümü elde edilen çalışmalara [50–52] referanslarından ulaşılabilir.

2.1.9 $\frac{G'}{G}$ -Açılım Metot

2008 yılında ilk olarak Wang ve arkadaşları tarafından sunulan metodun [53] yukarıda bahsedilen *tanh* metotlarından farklı olan tarafı Riccati diferensiyel denkleminin yerine $G = G(\xi)$ olmak üzere

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0 \quad (2.38)$$

şeklinde ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer bir diferensiyel denklemin seçilebilmesidir. Ayrıca (2.1) denklemini için (2.2) şeklinde aranan çözüm yerine burada

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^M a_m \left(\frac{G'}{G} \right)^m \quad (2.39)$$

olacak şekilde çözüm aranır. (2.39) çözümü yazılırken $\frac{G'}{G}$ fonksiyonunun değeri (2.38) denkleminin çözümünde hesaplanan G çözüm fonksiyonu yardımıyla elde edilir.

3. LİNEER OLMAYAN KİSMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN PERİYODİK DALGA ÇÖZÜMLERİ İÇİN BAZI UYGULAMALAR

Bu bölümde, ikinci bölümde analizleri yapılan ve lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin periyodik dalga çözümlerini veren metotlardan genelleştirilmiş jakobi eliptik fonksiyon metodu kullanılarak SRLW denklemi ve (1+1) boyutlu saçılma terimli uzun dalga denklemi için periyodik dalga çözümler elde edilecektir.

3.1. SRLW Denkleminin Genelleştirilmiş Jakobi Eliptik Fonksiyon Metodunun Uygulanması

$$u_{tt} + u_{xx} + uu_{xt} + u_x u_t + u_{xxt} = 0, \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanan SRLW denklemini göz önüne alalım. (3.1) denklemi için $u(x, t) = u(\xi)$, $\xi = kx + wt$ dönüşümü yapıldığında (3.1) denklemi

$$w^2 u'' + k^2 u'' + kwu'' + kw(u')^2 + w^2 k^2 u^{(4)} = 0, \quad (3.2)$$

haline dönüşür. (3.2) denkleminin her iki tarafı integre edilirse

$$w^2 u' + k^2 u' + kwu' + k^2 w^2 u''' = 0, \quad (3.3)$$

olarak yazılabilir. Burada integrasyon sabiti sıfır olarak alınmıştır. (3.3) denkleminde en yüksek mertebeden lineer olan u''' terimi ile lineer olmayan uu' terimlerinin dengelenmesi ile (2.21) eşitliğinde bulunması gereken M değeri $M = 2$ olarak bulunur. Böylece (3.3) denklemi için

$$u = a_0 + a_1 F + a_2 F^2 + \frac{b_1}{F} + \frac{b_2}{F^2}, \quad (3.4)$$

şeklinde bir çözüm aranabilir. Bu çözümde (3.3) denkleminde bulunan gerekli türevler alınarak yerlerine yazıldığında ve elde edilen denklemde F, F^2, F^{-1}, F^{-2} terimlerinin katsayıları sıfıra eşitlendiği zaman

$$a_1 k^2 + a_0 a_1 kw + a_2 b_1 kw + a_1 w^2 + a_1 B k^2 w^2 = 0,$$

$$-2b_2 kB - 24Ab_2 k^2 w^2 = 0,$$

$$-3b_1 b_2 kw - 6Ab_1 k^2 w^2 - 2b_2 k^2 - b_1^2 kw - 2a_0 b_2 kw - 2b_2 w^2 - 8Bb_2 k^2 w^2 = 0,$$

$$-b_1 k^2 - a_0 b_1 k w - a_1 b_2 k w - b_1 w^2 - B b_1 k^2 w^2 = 0, \quad (3.5)$$

$$2a_2 k^2 + a_1^2 k w + 2a_0 a_2 k w + 2a_2 w^2 + 8a_2 B k^2 w^2 = 0,$$

$$3a_1 a_2 k w + 6a_1 C k^2 w^2 = 0,$$

$$2a_2^2 k w + 24a_2 C k^2 w^2 = 0,$$

olacak şekilde cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemi Mathematica bilgisayar programı yardımı ile çözüldüğünde

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{k}{w} - \frac{w}{k} - 4Bkw, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -12Ckw, \quad b_1 = 0, \\ b_2 &= -12Akw, \quad k \neq 0, \quad w \neq 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

olarak istenilen sabitler bulunmuş olur. Bulunan bu sabitler (2.22)-(2.34) eşitliklerinde verilen fonksiyonlarda göz önüne alınarak (3. 4) eşitliğinde yerlerine yazıldığı zaman (3. 1) diferensiyel denkleminin tam çözümleri aşağıdaki gibi yazılır.

$$i) \quad A = 1, \quad B = -(1 + m^2), \quad C = m^2$$

$$u_1 = -\frac{k}{w} - \frac{w}{k} - 4Bkw - 12Ckwsn^2(kx + wt) - 12Akw \left(\frac{1}{sn^2(kx + wt)} \right). \quad (3.7)$$

$$u_2 = -\frac{k}{w} - \frac{w}{k} - 4Bkw - 12Ckw \left(\frac{cn(kx + wt)}{dn(kx + wt)} \right)^2 - 12Akw \left(\frac{dn(kx + wt)}{cn(kx + wt)} \right)^2. \quad (3.8)$$

$$ii) \quad A = 1 - m^2, \quad B = 2m^2 - 1, \quad C = -m^2$$

$$u_3 = -\frac{k}{w} - \frac{w}{k} - 4Bkw - 12Ckwc n^2(kx + wt) - 12Akw \left(\frac{1}{cn^2(kx + wt)} \right). \quad (3.9)$$

$$iii) \quad A = m^2 - 1, \quad B = 2 - m^2, \quad C = -1.$$

$$u_4 = -\frac{k}{w} - \frac{w}{k} - 4Bkw - 12Ckwdn^2(kx + wt) - 12Akw \left(\frac{1}{dn^2(kx + wt)} \right). \quad (3.10)$$

$$iv) \quad A = -m^2(1 - m^2), \quad B = 2m^2 - 1, \quad C = 1$$

$$u_5 = -\frac{k}{w} - \frac{w}{k} - 4Bkw - 12Ckw \left(\frac{dn(kx + wt)}{sn(kx + wt)} \right)^2 - 12Akw \left(\frac{sn(kx + wt)}{dn(kx + wt)} \right)^2. \quad (3.11)$$

$$v) \quad A = 1 - m^2, \quad B = 2 - m^2, \quad C = 1.$$

$$u_6 = -\frac{k}{w} - \frac{w}{k} - 4Bkw - 12Ckw \left(\frac{cn(kx + wt)}{sn(kx + wt)} \right)^2 - 12Akw \left(\frac{sn(kx + wt)}{cn(kx + wt)} \right)^2. \quad (3.12)$$

$$vi) A = \frac{1}{4}, B = \frac{m^2 - 2}{2}, C = \frac{m^2}{4}.$$

$$u_7 = -\frac{k}{w} - \frac{w}{k} - 4Bkw - 12Ckw \left(\frac{sn(kx + wt)}{1 \pm dn(kx + wt)} \right)^2 - 12Akw \left(\frac{1 \pm dn(kx + wt)}{sn(kx + wt)} \right)^2. \quad (3.13)$$

$$vii) A = \frac{m^2}{4}, B = \frac{m^2 - 2}{2}, C = \frac{m^2}{4}.$$

$$u_8 = -\frac{k}{w} - \frac{w}{k} - 4Bkw - 12Ckw (sn(kx + wt) \pm icn(kx + wt))^2 - 12Akw \left(\frac{1}{sn(kx + wt) \pm icn(kx + wt)} \right)^2. \quad (3.14)$$

$$u_9 = -\frac{k}{w} - \frac{w}{k} - 4Bkw - 12Ckw \left(\frac{dn(kx + wt)}{i\sqrt{1-m^2}sn(kx + wt) \pm cn(kx + wt)} \right)^2 - 12Akw \left(\frac{i\sqrt{1-m^2}sn(kx + wt) \pm cn(kx + wt)}{dn(kx + wt)} \right)^2. \quad (3.15)$$

$$viii) A = \frac{1}{4}, B = \frac{1-2m^2}{2}, C = \frac{1}{4}$$

$$u_{10} = -\frac{k}{w} - \frac{w}{k} - 4Bkw - 12Ckw (msn(kx + wt) \pm idn(kx + wt))^2 - 12Akw \left(\frac{1}{msn(kx + wt) \pm idn(kx + wt)} \right)^2. \quad (3.16)$$

$$u_{11} = -\frac{k}{w} - \frac{w}{k} - 4Bkw - 12Ckw \left(\frac{dn(kx + wt)}{mcn(kx + wt) \pm i\sqrt{1-m^2}} \right)^2 - 12Akw \left(\frac{mcn(kx + wt) \pm i\sqrt{1-m^2}}{dn(kx + wt)} \right)^2. \quad (3.17)$$

$$u_{12} = -\frac{k}{w} - \frac{w}{k} - 4Bkw - 12Ckw \left(\frac{sn(kx + wt)}{1 \pm cn(kx + wt)} \right)^2 - 12Akw \left(\frac{1 \pm cn(kx + wt)}{sn(kx + wt)} \right)^2. \quad (3.18)$$

$$u_{13} = -\frac{k}{w} - \frac{w}{k} - 4Bkw - 12Ckw \left(\frac{cn(kx + wt)}{\sqrt{1-m^2} sn(kx + wt) \pm dn(kx + wt)} \right)^2 -$$

$$-12Akw \left(\frac{\sqrt{1-m^2} sn(kx + wt) \pm dn(kx + wt)}{cn(kx + wt)} \right)^2. \quad (3.19)$$

$$ix) A = \frac{m^2 - 1}{4}, B = \frac{m^2 + 1}{2}, C = \frac{m^2 - 1}{4}$$

$$u_{14} = -\frac{k}{w} - \frac{w}{k} - 4Bkw - 12Ckw \left(\frac{dn(kx + wt)}{1 \pm msn(kx + wt)} \right)^2 -$$

$$-12Akw \left(\frac{1 \pm msn(kx + wt)}{dn(kx + wt)} \right)^2. \quad (3.20)$$

$$x) A = \frac{1-m^2}{4}, B = \frac{m^2 + 1}{2}, C = \frac{1-m^2}{4}$$

$$u_{15} = -\frac{k}{w} - \frac{w}{k} - 4Bkw - 12Ckw \left(\frac{cn(kx + wt)}{1 \pm sn(kx + wt)} \right)^2 - 12Akw \left(\frac{1 \pm sn(kx + wt)}{cn(kx + wt)} \right)^2. \quad (3.21)$$

$$xi) A = -\frac{(1-m^2)^2}{4}, B = \frac{m^2 + 1}{2}, C = -\frac{1}{4}$$

$$u_{16} = -\frac{k}{w} - \frac{w}{k} - 4Bkw - 12Ckw (mcn(kx + wt) \pm dn(kx + wt))^2 -$$

$$-12Akw \left(\frac{1}{mcn(kx + wt) \pm dn(kx + wt)} \right)^2. \quad (3.22)$$

$$xii) A = \frac{1}{4}, B = \frac{m^2 + 1}{2}, C = \frac{(1-m^2)^2}{4}$$

$$u_{17} = -\frac{k}{w} - \frac{w}{k} - 4Bkw - 12Ckw \left(\frac{sn(kx + wt)}{dn(kx + wt) \pm cn(kx + wt)} \right)^2 -$$

$$-12Akw \left(\frac{dn(kx + wt) \pm cn(kx + wt)}{sn(kx + wt)} \right)^2. \quad (3.23)$$

$$xiii) A = \frac{1}{4}, B = \frac{m^2 - 2}{2}, C = \frac{m^4}{4}$$

$$u_{18} = -\frac{k}{w} - \frac{w}{k} - 4Bkw - 12Ckw \left(\frac{cn(kx + wt)}{\sqrt{1-m^2} \pm dn(kx + wt)} \right)^2 - 12Akw \left(\frac{\sqrt{1-m^2} \pm dn(kx + wt)}{cn(kx + wt)} \right)^2. \quad (3.24)$$

Yukarıda elde edilen çözümler dikkate alındığında $m \rightarrow 0$ için (3.1) denkleminin periyodik dalga çözümleri

$$u(x, t) = -\frac{k}{w} - \frac{w}{k} + 4kw - 12kw \frac{1}{\sin^2(kx + wt)}, \quad (3.25)$$

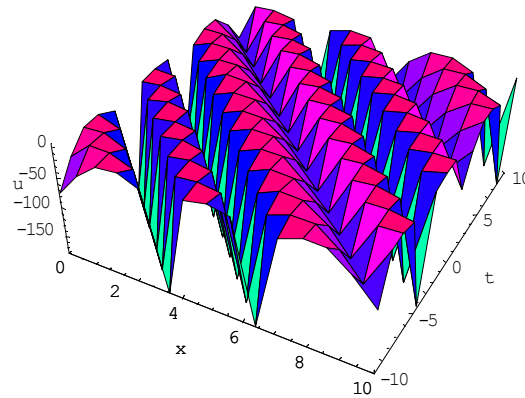
$$u(x, t) = -\frac{k}{w} - \frac{w}{k} + 4kw - 12kw \frac{1}{\cos^2(kx + wt)}, \quad (3.26)$$

$$u(x, t) = -\frac{k}{w} - \frac{w}{k} - 8kw - 12kw (\cot^2(kx + wt) + \tan^2(kx + wt)), \quad (3.27)$$

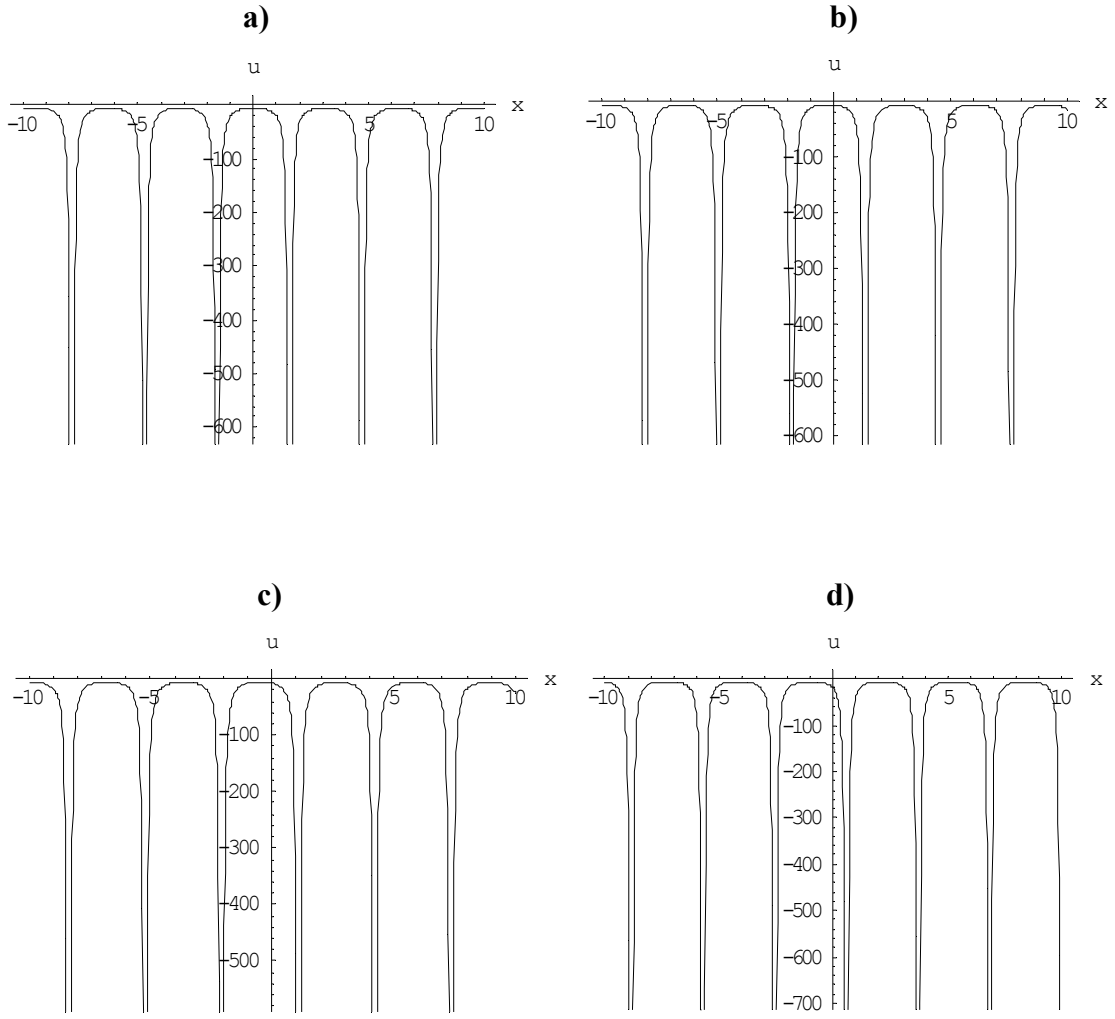
$$u(x, t) = -\frac{k}{w} - \frac{w}{k} - 2kw - 3kw \left(\frac{\sin^2(kx + wt)}{(1 \pm \cos(kx + wt))^2} + \frac{(1 \pm \cos(kx + wt))^2}{\sin^2(kx + wt)} \right), \quad (3.28)$$

$$u(x, t) = -\frac{k}{w} - \frac{w}{k} - 2kw - 3kw \left(\frac{\cos^2(kx + wt)}{(\sin(kx + wt) \pm 1)^2} + \frac{(\sin(kx + wt) \pm 1)^2}{\cos^2(kx + wt)} \right), \quad (3.29)$$

olarak bulunmuş olur.



Şekil 5. SRLW denkleminin (3.26) çözümü için üç boyutlu periyodik dalga görünümü, $k = 1, w = 0.5$



Şekil 6. SRLW denkleminin (3.26) çözümü için iki boyutlu periyodik dalga grafiği, **a)** $t = 0$, **b)** $t = 0.5$, **c)** $t = 1$, **d)** $t = 2$, ($k = 1, w = 0.5$)

Yukarıda Şekil 6 da görüldüğü gibi zaman ilerledikçe SRLW denkleminin (3.26) çözümü için sola doğru hareket eden periyodik dalga grafikleri görülmektedir.

3.2. (1+1) Boyutlu Saçılma Terimli Uzun Dalga Denklemine Genelleştirilmiş Jakobi Eliptik Fonksiyon Metodunun Uygulanması

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + v_x &= 0 \\ v_t + u_x v + uv_x + \frac{1}{3}u_{xxx} &= 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

şeklinde tanımlanan (1+1) boyutlu saçılma terimli uzun dalga denklemini göz önüne alalım. (3.30) denklemini için $u(x, t) = u(\xi), v(x, t) = v(\xi), \xi = kx + wt$ dönüşümü yapıldığında (3.30) denklemini

$$\begin{aligned}
wu' + ku'u' + kv' &= 0, \\
wv' + k(uv)' + \frac{1}{3}k^3u''' &= 0.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

olarak yazılır. (3.31) denkleminin her iki tarafı integre edilirse

$$\begin{aligned}
wu + \frac{k}{2}u^2 + kv &= 0, \\
wv + kuv + \frac{1}{3}k^3u'' &= 0.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

şeklinde elde edilir. Burada integrasyon sabiti sıfır olarak alınmıştır. (3.32) denkleminde en yüksek mertebeden lineer olan u'' terimi ile lineer olmayan uv terimlerinin ve lineer olan v terimi ile lineer olmayan u^2 teriminin dengelenmesi ile $M_1=1$ ve $M_2=2$ olarak bulunur. Böylece (3.32) denklemini için

$$\begin{cases} u = a_0 + a_1F + \frac{b_1}{F} \\ v = c_0 + c_1F + \frac{d_1}{F} + c_2F^2 + \frac{d_2}{F^2} \end{cases} \tag{3.33}$$

olacak şekilde bir çözüm aranabilir. (3.33) eşitliğinde gerekli türevleri alınıp (3.32) denkleminde yerlerine yazıldığında ve elde edilen denklemde F, F^2, F^{-1}, F^{-2} terimlerinin katsayıları sıfıra eşitlendiği zaman

$$\begin{aligned}
a_0c_0k + b_1c_1k + a_1d_1k + c_0w &= 0, \\
b_1d_2k + \frac{2Ab_1k^3}{3} &= 0, \quad b_1d_1k + a_0d_2k + d_2w = 0, \\
b_1c_0k + a_0d_1k + a_1d_2k + \frac{Bb_1k^3}{3} + d_1w &= 0, \\
a_1c_0k + a_1c_1k + b_1c_2k + \frac{1}{3}a_1Bk^3 + c_1w &= 0, \\
a_1c_1k + a_0c_2k + c_2w &= 0, \quad a_1c_2k + \frac{2}{3}a_1Ck^3 = 0, \\
\frac{a_0^2k}{2} + a_1b_1k + c_0k + a_0w &= 0, \quad \frac{b_1^2k}{2} + d_2k = 0, \quad a_0b_1k + d_1k + b_1w = 0, \\
a_0a_1k + c_1k + a_1w &= 0, \quad \frac{1}{2}a_1^2k + c_2k = 0. \quad C \neq 0, \quad k \neq 0.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

şeklinde elde edilen cebirsel denklem sistemi Mathematica bilgisayar programı yardımı ile çözüldüğü zaman

$$\begin{aligned}
a_0 &= -\sqrt{-\frac{2Bk^2}{3} - 4\sqrt{A}\sqrt{C}k^2}, \quad a_1 = -\frac{2\sqrt{C}k}{\sqrt{3}}, \quad b_1 = \frac{2\sqrt{A}k}{\sqrt{3}} \\
c_0 &= \frac{1}{3}\left(-Bk^2 - 2\sqrt{A}\sqrt{C}k^2\right), \quad c_1 = 0, \quad c_2 = -\frac{2Ck^2}{3}, \quad d_1 = 0, \\
d_2 &= -\frac{2Ak^2}{3}, \quad w = k\sqrt{-\frac{2Bk^2}{3} - 4\sqrt{A}\sqrt{C}k^2}
\end{aligned} \tag{3.35}$$

elde edilir. Bulunan bu sabitler (2.22)-(2.34) eşitliklerinde verilen fonksiyonlarda göz önüne alınarak (3.33) eşitliğinde yerlerine yazıldığı zaman (3.30) diferensiyel denkleminin analitik çözümleri aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned}
i) \quad A &= 1, \quad B = -(1+m^2), \quad C = m^2, \quad \xi = kx + k\sqrt{-\frac{2Bk^2}{3} - 4\sqrt{A}\sqrt{C}k^2}t, \\
\begin{cases} u_1 = -\sqrt{-\frac{2Bk^2}{3} - 4\sqrt{A}\sqrt{C}k^2} - \frac{2\sqrt{C}k}{\sqrt{3}}\operatorname{sn}(\xi) + \frac{2\sqrt{A}k}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\operatorname{sn}(\xi)}\right) \\ v_1 = \frac{1}{3}\left(-Bk^2 - 2\sqrt{A}\sqrt{C}k^2\right) - \frac{2Ck^2}{3}\operatorname{sn}^2(\xi) - \frac{2Ak^2}{3}\left(\frac{1}{\operatorname{sn}(\xi)}\right)^2 \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}
\begin{cases} u_2 = -\sqrt{-\frac{2Bk^2}{3} - 4\sqrt{A}\sqrt{C}k^2} - \frac{2\sqrt{C}k}{\sqrt{3}}\left(\frac{\operatorname{cn}(\xi)}{\operatorname{dn}(\xi)}\right) + \frac{2\sqrt{A}k}{\sqrt{3}}\left(\frac{\operatorname{dn}(\xi)}{\operatorname{cn}(\xi)}\right) \\ v_2 = \frac{1}{3}\left(-Bk^2 - 2\sqrt{A}\sqrt{C}k^2\right) - \frac{2Ck^2}{3}\left(\frac{\operatorname{cn}(\xi)}{\operatorname{dn}(\xi)}\right)^2 - \frac{2Ak^2}{3}\left(\frac{\operatorname{dn}(\xi)}{\operatorname{cn}(\xi)}\right)^2 \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}
ii) \quad A &= (1-m^2), \quad B = 2m^2 - 1, \quad C = -m^2, \quad \xi = kx + k\sqrt{-\frac{2Bk^2}{3} - 4\sqrt{A}\sqrt{C}k^2}t, \\
\begin{cases} u_3 = -\sqrt{-\frac{2Bk^2}{3} - 4\sqrt{A}\sqrt{C}k^2} - \frac{2\sqrt{C}k}{\sqrt{3}}\operatorname{cn}(\xi) + \frac{2\sqrt{A}k}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\operatorname{cn}(\xi)}\right) \\ v_3 = \frac{1}{3}\left(-Bk^2 - 2\sqrt{A}\sqrt{C}k^2\right) - \frac{2Ck^2}{3}\operatorname{cn}^2(\xi) - \frac{2Ak^2}{3}\left(\frac{1}{\operatorname{cn}(\xi)}\right)^2 \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}
iii) \quad A &= (m^2 - 1), \quad B = (2 - m^2), \quad C = -1, \quad \xi = kx + k\sqrt{-\frac{2Bk^2}{3} - 4\sqrt{A}\sqrt{C}k^2}t, \\
\begin{cases} u_4 = -\sqrt{-\frac{2Bk^2}{3} - 4\sqrt{A}\sqrt{C}k^2} - \frac{2\sqrt{C}k}{\sqrt{3}}\operatorname{dn}(\xi) + \frac{2\sqrt{A}k}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\operatorname{dn}(\xi)}\right) \\ v_4 = \frac{1}{3}\left(-Bk^2 - 2\sqrt{A}\sqrt{C}k^2\right) - \frac{2Ck^2}{3}\operatorname{dn}^2(\xi) - \frac{2Ak^2}{3}\left(\frac{1}{\operatorname{dn}(\xi)}\right)^2 \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}
iv) \quad & A = -m^2(1-m^2), \quad B = (2m^2-1), \quad C = 1, \quad \xi = kx + k\sqrt{-\frac{2Bk^2}{3} - 4\sqrt{A}\sqrt{C}k^2}t, \\
& \begin{cases} u_5 = -\sqrt{-\frac{2Bk^2}{3} - 4\sqrt{A}\sqrt{C}k^2} - \frac{2\sqrt{C}k}{\sqrt{3}}\left(\frac{dn(\xi)}{sn(\xi)}\right) + \frac{2\sqrt{A}k}{\sqrt{3}}\left(\frac{sn(\xi)}{dn(\xi)}\right) \\ v_5 = \frac{1}{3}\left(-Bk^2 - 2\sqrt{A}\sqrt{C}k^2\right) - \frac{2Ck^2}{3}\left(\frac{dn(\xi)}{sn(\xi)}\right)^2 - \frac{2Ak^2}{3}\left(\frac{sn(\xi)}{dn(\xi)}\right)^2 \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}
v) \quad & A = (1-m^2), \quad B = (2-m^2), \quad C = 1, \quad \xi = kx + k\sqrt{-\frac{2Bk^2}{3} - 4\sqrt{A}\sqrt{C}k^2}t, \\
& \begin{cases} u_6 = -\sqrt{-\frac{2Bk^2}{3} - 4\sqrt{A}\sqrt{C}k^2} - \frac{2\sqrt{C}k}{\sqrt{3}}\left(\frac{cn(\xi)}{sn(\xi)}\right) + \frac{2\sqrt{A}k}{\sqrt{3}}\left(\frac{sn(\xi)}{cn(\xi)}\right) \\ v_6 = \frac{1}{3}\left(-Bk^2 - 2\sqrt{A}\sqrt{C}k^2\right) - \frac{2Ck^2}{3}\left(\frac{cn(\xi)}{sn(\xi)}\right)^2 - \frac{2Ak^2}{3}\left(\frac{sn(\xi)}{cn(\xi)}\right)^2 \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}
vi) \quad & A = \frac{1}{4}, \quad B = \frac{m^2-2}{2}, \quad C = \frac{m^2}{4}, \quad \xi = kx + k\sqrt{-\frac{2Bk^2}{3} - 4\sqrt{A}\sqrt{C}k^2}t, \\
& \begin{cases} u_7 = -\sqrt{-\frac{2Bk^2}{3} - 4\sqrt{A}\sqrt{C}k^2} - \frac{2\sqrt{C}k}{\sqrt{3}}\left(\frac{sn(\xi)}{1 \pm dn(\xi)}\right) + \frac{2\sqrt{A}k}{\sqrt{3}}\left(\frac{1 \pm dn(\xi)}{sn(\xi)}\right) \\ v_7 = \frac{1}{3}\left(-Bk^2 - 2\sqrt{A}\sqrt{C}k^2\right) - \frac{2Ck^2}{3}\left(\frac{sn(\xi)}{1 \pm dn(\xi)}\right)^2 - \frac{2Ak^2}{3}\left(\frac{1 \pm dn(\xi)}{sn(\xi)}\right)^2 \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned}
vii) \quad & A = C = \frac{m^2}{4}, \quad B = \frac{m^2-2}{2}, \quad \xi = kx + k\sqrt{-\frac{2Bk^2}{3} - 4\sqrt{A}\sqrt{C}k^2}t, \\
& \begin{cases} u_8 = -\sqrt{-\frac{2Bk^2}{3} - 4\sqrt{A}\sqrt{C}k^2} - \frac{2\sqrt{C}k}{\sqrt{3}}(sn(\xi) \pm icn(\xi)) + \frac{2\sqrt{A}k}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{(sn(\xi) \pm icn(\xi))}\right) \\ v_8 = \frac{1}{3}\left(-Bk^2 - 2\sqrt{A}\sqrt{C}k^2\right) - \frac{2Ck^2}{3}(sn(\xi) \pm icn(\xi))^2 - \frac{2Ak^2}{3}\left(\frac{1}{(sn(\xi) \pm icn(\xi))}\right)^2 \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.43}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} u_9 = -\sqrt{-\frac{2Bk^2}{3} - 4\sqrt{A}\sqrt{C}k^2} - \frac{2\sqrt{C}k}{\sqrt{3}}\left(\frac{dn(\xi)}{i\sqrt{1-m^2}sn(\xi) \pm cn(\xi)}\right) + \frac{2\sqrt{A}k}{\sqrt{3}}\left(\frac{i\sqrt{1-m^2}sn(\xi) \pm cn(\xi)}{dn(\xi)}\right) \\ v_9 = \frac{1}{3}\left(-Bk^2 - 2\sqrt{A}\sqrt{C}k^2\right) - \frac{2Ck^2}{3}\left(\frac{dn(\xi)}{i\sqrt{1-m^2}sn(\xi) \pm cn(\xi)}\right)^2 - \frac{2Ak^2}{3}\left(\frac{i\sqrt{1-m^2}sn(\xi) \pm cn(\xi)}{dn(\xi)}\right)^2 \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned}
\text{viii)} \quad A &= C = \frac{1}{4}, \quad B = \frac{1-2m^2}{2}, \quad \xi = kx + k\sqrt{-\frac{2Bk^2}{3} - 4\sqrt{A}\sqrt{C}k^2}t, \\
\begin{cases} u_{10} = -\sqrt{-\frac{2Bk^2}{3} - 4\sqrt{A}\sqrt{C}k^2} - \frac{2\sqrt{C}k}{\sqrt{3}}(msn(\xi) \pm idn(\xi)) + \frac{2\sqrt{A}k}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{(msn(\xi) \pm idn(\xi))}\right) \\ v_{10} = \frac{1}{3}(-Bk^2 - 2\sqrt{A}\sqrt{C}k^2) - \frac{2Ck^2}{3}(msn(\xi) \pm idn(\xi))^2 - \frac{2Ak^2}{3}\left(\frac{1}{(msn(\xi) \pm idn(\xi))}\right)^2 \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned}
\begin{cases} u_{11} = -\sqrt{-\frac{2Bk^2}{3} - 4\sqrt{A}\sqrt{C}k^2} - \frac{2\sqrt{C}k}{\sqrt{3}}\left(\frac{dn(\xi)}{mcn(\xi) \pm i\sqrt{1-m^2}}\right) + \frac{2\sqrt{A}k}{\sqrt{3}}\left(\frac{mcn(\xi) \pm i\sqrt{1-m^2}}{dn(\xi)}\right) \\ v_{11} = \frac{1}{3}(-Bk^2 - 2\sqrt{A}\sqrt{C}k^2) - \frac{2Ck^2}{3}\left(\frac{dn(\xi)}{mcn(\xi) \pm i\sqrt{1-m^2}}\right)^2 - \frac{2Ak^2}{3}\left(\frac{mcn(\xi) \pm i\sqrt{1-m^2}}{dn(\xi)}\right)^2 \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned}
\begin{cases} u_{12} = -\sqrt{-\frac{2Bk^2}{3} - 4\sqrt{A}\sqrt{C}k^2} - \frac{2\sqrt{C}k}{\sqrt{3}}\left(\frac{sn(\xi)}{1 \pm cn(\xi)}\right) + \frac{2\sqrt{A}k}{\sqrt{3}}\left(\frac{1 \pm cn(\xi)}{sn(\xi)}\right) \\ v_{12} = \frac{1}{3}(-Bk^2 - 2\sqrt{A}\sqrt{C}k^2) - \frac{2Ck^2}{3}\left(\frac{sn(\xi)}{1 \pm cn(\xi)}\right)^2 - \frac{2Ak^2}{3}\left(\frac{1 \pm cn(\xi)}{sn(\xi)}\right)^2 \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}
\begin{cases} u_{13} = -\sqrt{-\frac{2Bk^2}{3} - 4\sqrt{A}\sqrt{C}k^2} - \frac{2\sqrt{C}k}{\sqrt{3}}\left(\frac{cn(\xi)}{\sqrt{1-m^2}sn(\xi) \pm dn(\xi)}\right) + \frac{2\sqrt{A}k}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{1-m^2}sn(\xi) \pm dn(\xi)}{cn(\xi)}\right) \\ v_{13} = \frac{1}{3}(-Bk^2 - 2\sqrt{A}\sqrt{C}k^2) - \frac{2Ck^2}{3}\left(\frac{cn(\xi)}{\sqrt{1-m^2}sn(\xi) \pm dn(\xi)}\right)^2 - \frac{2Ak^2}{3}\left(\frac{\sqrt{1-m^2}sn(\xi) \pm dn(\xi)}{cn(\xi)}\right)^2 \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.48}$$

$$\begin{aligned}
\text{ix)} \quad A &= C = \frac{m^2-1}{4}, \quad B = \frac{m^2+1}{2}, \quad \xi = kx + k\sqrt{-\frac{2Bk^2}{3} - 4\sqrt{A}\sqrt{C}k^2}t, \\
\begin{cases} u_{14} = -\sqrt{-\frac{2Bk^2}{3} - 4\sqrt{A}\sqrt{C}k^2} - \frac{2\sqrt{C}k}{\sqrt{3}}\left(\frac{dn(\xi)}{1 \pm msn(\xi)}\right) + \frac{2\sqrt{A}k}{\sqrt{3}}\left(\frac{1 \pm msn(\xi)}{dn(\xi)}\right) \\ v_{14} = \frac{1}{3}(-Bk^2 - 2\sqrt{A}\sqrt{C}k^2) - \frac{2Ck^2}{3}\left(\frac{dn(\xi)}{1 \pm msn(\xi)}\right)^2 - \frac{2Ak^2}{3}\left(\frac{1 \pm msn(\xi)}{dn(\xi)}\right)^2 \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.49}$$

$$\text{x)} \quad A = C = \frac{1-m^2}{4}, \quad B = \frac{1+m^2}{2}, \quad \xi = kx + k\sqrt{-\frac{2Bk^2}{3} - 4\sqrt{A}\sqrt{C}k^2}t,$$

$$\begin{cases} u_{15} = -\sqrt{-\frac{2Bk^2}{3}-4\sqrt{A}\sqrt{C}k^2} - \frac{2\sqrt{C}k}{\sqrt{3}} \left(\frac{cn(\xi)}{1 \pm sn(\xi)} \right) + \frac{2\sqrt{A}k}{\sqrt{3}} \left(\frac{1 \pm sn(\xi)}{cn(\xi)} \right) \\ v_{15} = \frac{1}{3} \left(-Bk^2 - 2\sqrt{A}\sqrt{C}k^2 \right) - \frac{2Ck^2}{3} \left(\frac{cn(\xi)}{1 \pm sn(\xi)} \right)^2 - \frac{2Ak^2}{3} \left(\frac{1 \pm sn(\xi)}{cn(\xi)} \right)^2 \end{cases} \quad (3.50)$$

$$xi) \quad A = -\frac{(1-m^2)^2}{4}, \quad B = \frac{1+m^2}{2}, \quad C = -\frac{1}{4}, \quad \xi = kx + k\sqrt{-\frac{2Bk^2}{3}-4\sqrt{A}\sqrt{C}k^2}t,$$

$$\begin{cases} u_{16} = -\sqrt{-\frac{2Bk^2}{3}-4\sqrt{A}\sqrt{C}k^2} - \frac{2\sqrt{C}k}{\sqrt{3}} (mcn(\xi) \pm dn(\xi)) + \frac{2\sqrt{A}k}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{(mcn(\xi) \pm dn(\xi))} \right) \\ v_{16} = \frac{1}{3} \left(-Bk^2 - 2\sqrt{A}\sqrt{C}k^2 \right) - \frac{2Ck^2}{3} (mcn(\xi) \pm dn(\xi))^2 - \frac{2Ak^2}{3} \left(\frac{1}{(mcn(\xi) \pm dn(\xi))} \right)^2 \end{cases} \quad (3.51)$$

$$xii) \quad A = \frac{1}{4}, \quad B = \frac{1+m^2}{2}, \quad C = \frac{(1-m^2)^2}{4}, \quad \xi = kx + k\sqrt{-\frac{2Bk^2}{3}-4\sqrt{A}\sqrt{C}k^2}t,$$

$$\begin{cases} u_{17} = -\sqrt{-\frac{2Bk^2}{3}-4\sqrt{A}\sqrt{C}k^2} - \frac{2\sqrt{C}k}{\sqrt{3}} \left(\frac{sn(\xi)}{dn(\xi) \pm cn(\xi)} \right) + \frac{2\sqrt{A}k}{\sqrt{3}} \left(\frac{dn(\xi) \pm cn(\xi)}{sn(\xi)} \right) \\ v_{17} = \frac{1}{3} \left(-Bk^2 - 2\sqrt{A}\sqrt{C}k^2 \right) - \frac{2Ck^2}{3} \left(\frac{sn(\xi)}{dn(\xi) \pm cn(\xi)} \right)^2 - \frac{2Ak^2}{3} \left(\frac{dn(\xi) \pm cn(\xi)}{sn(\xi)} \right)^2 \end{cases} \quad (3.52)$$

$$xiii) \quad A = \frac{1}{4}, \quad B = \frac{m^2-2}{2}, \quad C = \frac{m^4}{4}, \quad \xi = kx + k\sqrt{-\frac{2Bk^2}{3}-4\sqrt{A}\sqrt{C}k^2}t,$$

$$\begin{cases} u_{18} = -\sqrt{-\frac{2Bk^2}{3}-4\sqrt{A}\sqrt{C}k^2} - \frac{2\sqrt{C}k}{\sqrt{3}} \left(\frac{cn(\xi)}{\sqrt{1-m^2} \pm dn(\xi)} \right) + \frac{2\sqrt{A}k}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{1-m^2} \pm dn(\xi)}{cn(\xi)} \right) \\ v_{18} = \frac{1}{3} \left(-Bk^2 - 2\sqrt{A}\sqrt{C}k^2 \right) - \frac{2Ck^2}{3} \left(\frac{cn(\xi)}{\sqrt{1-m^2} \pm dn(\xi)} \right)^2 - \frac{2Ak^2}{3} \left(\frac{\sqrt{1-m^2} \pm dn(\xi)}{cn(\xi)} \right)^2 \end{cases} \quad (3.53)$$

Yukarıda (3.30) denklemi için elde edilen çözümler dikkate alındığında $m \rightarrow 0$ için (3.30) denkleminin periyodik dalga çözümleri

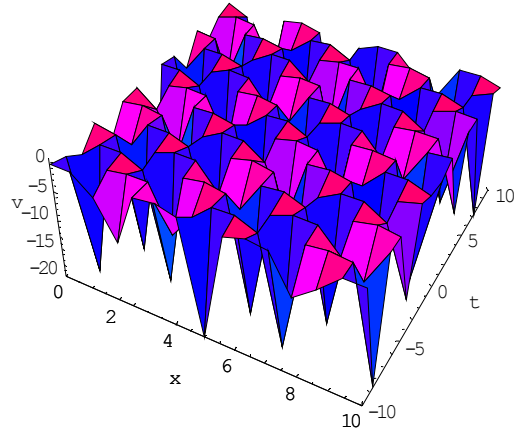
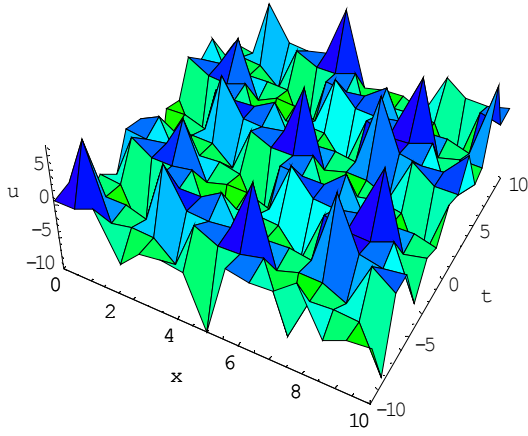
$$\left\{ \begin{array}{l} u(x,t) = -\sqrt{\frac{2k^2}{3}} - \frac{2k}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sin\left(kx + k\sqrt{\frac{2k^2}{3}}t\right)} \\ v(x,t) = \frac{k^2}{3} - \frac{2k^2}{3} \frac{1}{\sin\left(kx + k\sqrt{\frac{2k^2}{3}}t\right)^2} \end{array} \right. \quad (3.54)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x,t) = -\sqrt{-\frac{16k^2}{3}} - \frac{2k}{\sqrt{3}} \cot\left(kx + k\sqrt{-\frac{16k^2}{3}}t\right) + \frac{2k}{\sqrt{3}} \tan\left(kx + k\sqrt{-\frac{16k^2}{3}}t\right) \\ v(x,t) = \frac{1}{3}(-4k^2) - \frac{2k^2}{3} \cot^2\left(kx + k\sqrt{-\frac{16k^2}{3}}t\right) - \frac{2k^2}{3} \tan^2\left(kx + k\sqrt{-\frac{16k^2}{3}}t\right) \end{array} \right. \quad (3.55)$$

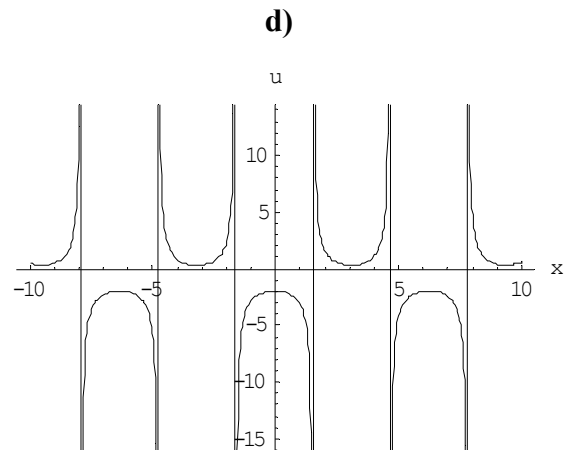
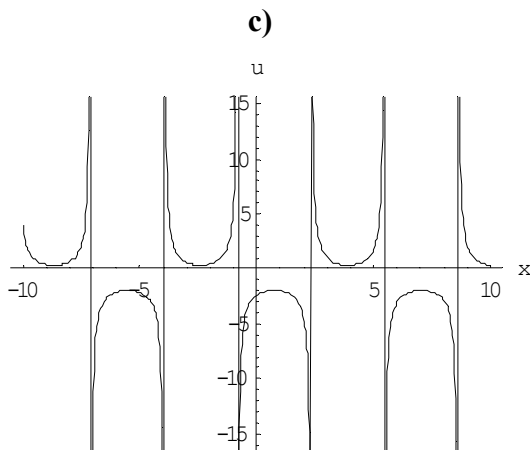
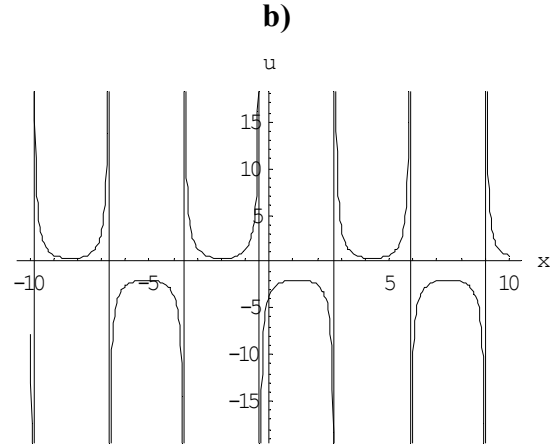
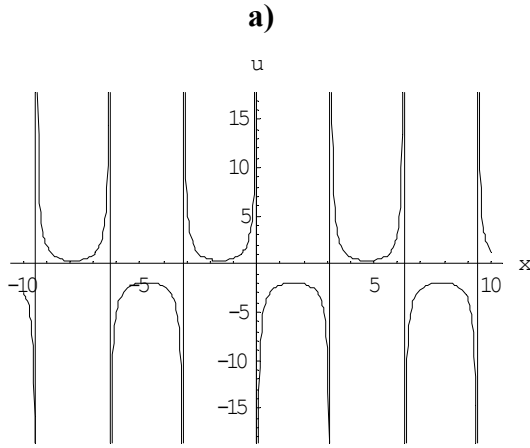
$$\left\{ \begin{array}{l} u(x,t) = -\sqrt{-\frac{4k^2}{3}} - \frac{k}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sin\left(kx + k\sqrt{-\frac{4k^2}{3}}t\right)}{1 \pm \cos\left(kx + k\sqrt{-\frac{4k^2}{3}}t\right)} \right) + \frac{k}{\sqrt{3}} \left(\frac{1 \pm \cos\left(kx + k\sqrt{-\frac{4k^2}{3}}t\right)}{\sin\left(kx + k\sqrt{-\frac{4k^2}{3}}t\right)} \right) \\ v(x,t) = -\frac{1}{3}(k^2) - \frac{k^2}{6} \left(\frac{\sin\left(kx + k\sqrt{-\frac{4k^2}{3}}t\right)}{1 \pm \cos\left(kx + k\sqrt{-\frac{4k^2}{3}}t\right)} \right)^2 - \frac{k^2}{6} \left(\frac{1 \pm \cos\left(kx + k\sqrt{-\frac{4k^2}{3}}t\right)}{\sin\left(kx + k\sqrt{-\frac{4k^2}{3}}t\right)} \right)^2 \end{array} \right. \quad (3.56)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x,t) = -\sqrt{-\frac{4k^2}{3}} - \frac{k}{\sqrt{3}} \left(\frac{\cos\left(kx + k\sqrt{-\frac{4k^2}{3}}t\right)}{1 \pm \sin\left(kx + k\sqrt{-\frac{4k^2}{3}}t\right)} \right) + \frac{k}{\sqrt{3}} \left(\frac{1 \pm \sin\left(kx + k\sqrt{-\frac{4k^2}{3}}t\right)}{\cos\left(kx + k\sqrt{-\frac{4k^2}{3}}t\right)} \right) \\ v(x,t) = -\frac{1}{3}(k^2) - \frac{k^2}{6} \left(\frac{\cos\left(kx + k\sqrt{-\frac{4k^2}{3}}t\right)}{1 \pm \sin\left(kx + k\sqrt{-\frac{4k^2}{3}}t\right)} \right)^2 - \frac{k^2}{6} \left(\frac{1 \pm \sin\left(kx + k\sqrt{-\frac{4k^2}{3}}t\right)}{\cos\left(kx + k\sqrt{-\frac{4k^2}{3}}t\right)} \right)^2 \end{array} \right. \quad (3.57)$$

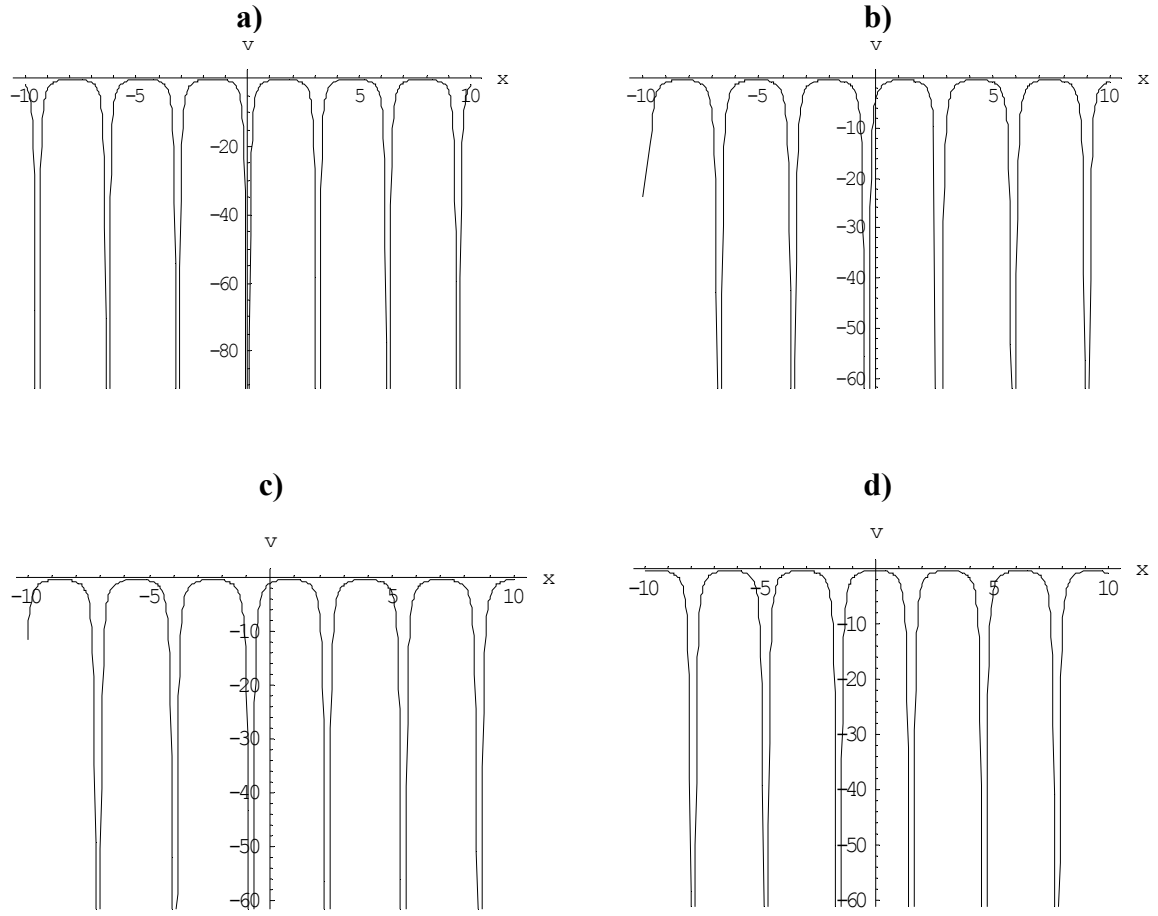
şeklinde bulunur.



Şekil 7. (1+1) boyutlu saçılma terimli uzun dalga denkleminin (3.54) için sırası ile $u(x,t)$ ve $v(x,t)$ çözümleri için üç boyutlu periyodik dalga görünümü, ($k=1$)



Şekil 8. (1+1) boyutlu saçılma terimli uzun dalga denkleminin (3.54) için $u(x,t)$ çözümünün iki boyutlu periyodik dalga grafiği, **a)** $t = 0$, **b)** $t = 0.5$, **c)** $t = 1$, **d)** $t = 2$, ($k=1$)



Şekil 9. (1+1) boyutlu saçılma terimli uzun dalga denkleminin (3.54) için $v(x, t)$ çözümünün iki boyutlu periyodik dalga grafiği, **a)** $t = 0$, **b)** $t = 0.5$, **c)** $t = 1$, **d)** $t = 2$, ($k=1$)

Yukarıda Şekil 8–9 da görüldüğü gibi zaman ilerledikçe (1+1) boyutlu saçılma terimli uzun dalga denkleminin (3.54) için $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ çözümlerinin sola doğru hareket eden periyodik dalga grafikleri görülmektedir.

4. LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN PERİYODİK DALGA ÇÖZÜMLERİ İÇİN BAZI YARI ANALİTİK METOTLAR

Bu bölümde, lineer ve lineer olmayan adi ve kısmi diferensiyel denklemlerin seri çözümlerinin elde edilmesinde kullanılan Adomian ayrışım (Decomposition) metodu (ADM), homotopi analiz metodu (HAM) ve homotopi perturbasyon metodu (HPM) olarak bilinen yarı analitik metotların analizleri yapılacaktır.

4.1. Bazı Yarı Analitik Metotlar ve Analizleri

4.1.1. Adomian Ayrışım Metot

Ayrışım yöntemi bir seri metodu olduğu ve birçok cebirsel, lineer veya lineer olmayan diferensiyel denklemlere başarılı bir şekilde uygulandığı bilinmektedir [56–61]. Bu metodu açıklamak için F hem lineer hem de lineer olmayan terimleri içeren bir genel lineer olmayan adi diferensiyel operatör olmak üzere aşağıdaki

$$Fu(x, t) = g(x, t), \quad (4.1)$$

denklemini göz önüne alalım. Burada L ; verilen diferensiyel denklemin en yüksek mertebeden türevini R ; lineer operatörden kalan kısmı ve N ; diferensiyel denklemde lineer olmayan terimi göstermek üzere (4.1) denklemi

$$Lu + Ru + Nu = g, \quad (4.2)$$

şeklinde yazılır. L tersi mevcut olan ve özel olarak ikinci mertebeden türevlenebilir lineer bir operatör olsun. (4.2) eşitliğinin her iki tarafı L^{-1} operatörü ile sol taraftan işleme konursa

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu, \quad (4.3)$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitlikte gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra

$$u(x, t) = u(x, 0) + tu_t(x, 0) + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu, \quad (4.4)$$

çözüm fonksiyonu bulunur. (4.4) eşitliğindeki Nu lineer olmayan terimdir ve $Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$

şeklinde yazılır. Burada A_n Adomian polinomları özel polinomlardır ve

$$A_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} \Phi \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k u_k \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n \geq 0, \quad (4.5)$$

olarak hesaplanabilir. (4.4) eşitliğindeki u ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonudur. Bu çözüm fonksiyonunun u_0 başlangıç değeri $u_0 = u(x, 0) + tu_t(x, 0)$ ile bulunur. Daha sonra u_0 başlangıç değeri kullanılarak $u_1, u_2, \dots$ terimleri elde edilerek (4.1) denkleminin ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonu

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t), \quad (4.6)$$

şeklinde yazılır.

4.1.2. Homotopi Analiz Metot

Bu metot ilk kez 1992 yılında Liao [62] tarafından doktora tezi olarak sunulurken, 2003 yılında yine Liao tarafından yazılan bir kitapta [63] bu metodun fen ve mühendislik alanlarındaki uygulamaları ve diğer analitik teknikler ile arasındaki ilişkileri ortaya koyulmuştur. HAM'u pek çok lineer ve lineer olmayan adi ve kısmi diferensiyel denklemlere [64–66] başarılı bir şekilde uygulanmıştır. Bu tekniklerin çoğu Taylor serisine dayanmaktadır. Eğer başlangıç fonksiyonu iyi seçilirse serinin birkaç teriminde çok iyi yaklaşımlar elde edilebilir. Metodu açıklamak için

$$N[u(x, t)] = 0, \quad (4.7)$$

olacak şekilde lineer olmayan bir diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Burada N hem lineer hem de lineer olmayan terimleri içeren genel bir lineer olmayan adi diferensiyel operatör, x, t bağımsız değişkenler, $u(x, t)$ denklemin çözümüdür. Ayrıca

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Phi(x, t; p) = u_0(x, t) = u(x, 0), \quad (4.8)$$

şeklinde bir $\Phi(x, t; p)$ fonksiyonu tanımlanır. Burada $p \in [0, 1]$ ve $u_0(x, t)$ ise başlangıç veya sınır şartlarını gerçekleyen tahmini bir başlangıç fonksiyonudur. Eğer genel homotopi tekniği kullanılarak

$$\lim_{p \rightarrow 1} \Phi(x, t; p) = u(x, t), \quad (4.9)$$

şeklinde bir eşitlik yazılırsa Liao'nun sıfıncı mertebeden bozulma (deformasyon) denklemi

$$(1-p)L[\Phi(x, t; p) - u_0(x, t)] = h p H(x, t) N[\Phi(x, t; p)], \quad (4.10)$$

olarak yazılır. Burada h yakınsaklık aralığını belirlemede kullanılan keyfi bir parametre, $H(x, t)$ keyfi bir fonksiyon, L lineer bir operatördür. HAM'unu diğer sayısal metotlar arasında önemli bir yere koyan ve geçerli kılan sebep, h parametresinin ve $H(x, t)$ fonksiyonunun araştırmacılar tarafından özgür bir şekilde seçilebilmesidir. Eğer p , 0 dan 1 e artarsa $\Phi(x, t; p)$ çözümü $u_0(x, t)$ başlangıç şartı ve $u(x, t)$ çözümü arasında değişir. $\Phi(x, t; p)$ fonksiyonunun p ye göre Taylor seri açılımı

$$\Phi(x, t; p) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(x, t) p^m, \quad (4.11)$$

olarak yazılır. Burada

$$u_m(x, t) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^{m-1} \Phi(x, t; p)}{\partial p^{m-1}} \right|_{p=0}, \quad (4.12)$$

şeklinde yazılır. Eğer $p \rightarrow 1$ ise

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(x, t), \quad (4.13)$$

olarak yazılır. (4.10) ile verilen sıfıncı mertebeden deformasyon denklemi p ye göre m kez diferensiyellenir, $m!$ ile bölünür ve sonuçta $p = 0$ alınır ise

$$L[u_m(x, t) - \chi_m u_{m-1}(x, t)] = h H(x, t) R_m[u_{m-1}(x, t)], \quad (4.14)$$

olacak şekilde deformasyon denklemi yeniden yazılabilir. Burada

$$R_m(\vec{u}_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{\partial^{m-1} N[\Phi(x, t; p)]}{\partial p^{m-1}} \right|_{p=0}, \quad (4.15)$$

ve

$$\chi_m = \begin{cases} 0 & m \leq 1 \\ 1 & m > 1 \end{cases}, \quad (4.16)$$

şeklinde tanımlanır.

4.1.3. Homotopi Perturbasyon Metot

Bu metodun [67] temel fikrini açıklamak için

$$A(u) - f(r) = 0, \quad r \in \Omega, \quad (4.17)$$

lineer olmayan diferensiyel denklemini göz önüne alalım. (4.17) denkleminin sınır şartları

$$B\left(u, \frac{\partial u}{\partial n}\right) = 0, \quad r \in \Gamma, \quad (4.18)$$

şeklinde belirlenir. Burada A genel diferensiyel operatör, B sınır operatörü, f bilinen bir analitik fonksiyon, Γ ise Ω bölgesinin sınırıdır. A operatörü L ve N olmak üzere iki kısma ayrılabilir. L lineer operatör ve N lineer olmayan operatördür. Böylece (4.17) denklemi

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0, \quad (4.19)$$

şeklinde yazılır. Buna göre Homotopi tekniği [68] ile bir Homotopi oluşturulur:

$$v(r, p) : \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

olmak üzere

$$H(v, p) = (1 - p)(L(v) - L(u_0)) + p(A(v) - f(r)) = 0, \quad p \in [0, 1], r \in \Omega, \quad (4.20)$$

burada $p \in [0, 1]$ bir parametre ve u_0 ise (4.17) denkleminin bir başlangıç çözümüdür.

(4.20) eşitliği göz önüne alındığında sınır şartları

$$H(v, 0) = L(v) - L(u_0) = 0,$$

$$H(v, 1) = A(v) - f(r) = 0,$$

şeklinde belirlenir. $L(v) - L(u_0)$, $A(v) - f(r)$ ifadeleri homotopik olarak adlandırılır. Bu metod gereğince p küçük bir parametre olarak kabul edilir ve (4.20) denkleminin çözümü

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n, \quad (4.21)$$

olacak şekilde p parametresinin kuvvet serisi olarak yazılır. $p=1$ alınarak (4.17) denkleminin çözümü

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} (v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n, \quad (4.22)$$

şeklinde elde edilir. Bu metod ile yapılan bazı çalışmalar [69–71] referanslarında görülebilir.

5. YARI ANALİTİK METOTLARIN LİNEER OLMAYAN BAZI KİSMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERE UYGULANMASI

Bu bölümde, dördüncü bölümde analizleri yapılan ADM, HAM ve HPM kullanılarak, SRLW ve (1+1) boyutlu saçılma terimli uzun dalga denklemlerinin seri çözümleri elde edilecektir.

5.1. SRLW Denkleminin ADM' unun Uygulanması

$$u_{tt} + u_{xx} + uu_{xt} + u_x u_t + u_{xxtt} = 0, \quad (5.1)$$

$$u(x, 0) = -\frac{k}{w} - \frac{w}{k} + 4kw - 12kw \frac{1}{\cos^2(kx)}, \quad (5.2)$$

$$u_t(x, 0) = -24kw^2 \sec^2(kx) \tan(kx),$$

başlangıç şartları ile verilmiş olan SRLW denklemini göz önüne alalım. (5.1) denklemini aşağıdaki gibi

$$L_{tt}u + L_{xx}u + N(u) + L_{xxtt}u = 0, \quad (5.3)$$

operatör formunda yazılır. Burada $L_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, $L_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $L_{xxtt} = \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2}$ ve

$N(u) = uu_{xt} + u_x u_t$ olacak şekilde lineer olmayan terimleri ifade etmektedir. L_{tt}^{-1} ters

operatörünün var olduğu kabul edilir ve $L_{tt}^{-1} = \int_0^t \int_0^t (.) dt dt$ şeklinde tanımlanarak (5.3)

denkleminin her iki tarafına uygulanırsa

$$L_{tt}^{-1}(L_{tt}u) + L_{tt}^{-1}(L_{xx}u) + L_{tt}^{-1}(N(u)) + L_{tt}^{-1}(L_{xxtt}u) = 0 \quad (5.4)$$

elde edilir. Buradan

$$u(x, t) - u(x, 0) - tu_t(x, 0) = -L_{tt}^{-1}(L_{xx}u) - L_{tt}^{-1}(N(u)) - L_{tt}^{-1}(L_{xxtt}u) \quad (5.5)$$

olur. Burada $N(u) = uu_{xt} + u_x u_t = \sum_{n=0}^{\infty} A_n + \sum_{n=0}^{\infty} B_n$ şeklinde tanımlanarak A_n ve B_n Adomian

polinomlarının bazı terimleri (4.5) genel formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}
A_0 &= u_0(u_0)_{xt}, \\
A_1 &= u_1(u_0)_{xt} + u_0(u_1)_{xt}, \\
A_2 &= u_2(u_0)_{xt} + u_1(u_1)_{xt} + u_0(u_2)_{xt}, \\
A_3 &= u_3(u_0)_{xt} + u_2(u_1)_{xt} + u_1(u_2)_{xt} + u_0(u_3)_{xt}, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}
B_0 &= (u_0)_x(u_0)_t, \\
B_1 &= (u_1)_t(u_0)_x + (u_0)_t(u_1)_x, \\
B_2 &= (u_2)_t(u_0)_x + (u_1)_t(u_1)_x + (u_0)_t(u_2)_x, \\
B_3 &= (u_3)_t(u_0)_x + (u_2)_t(u_1)_x + (u_1)_t(u_2)_x + (u_0)_t(u_3)_x, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{5.7}$$

olarak yazılabilir. (5.5) denklemi için aşağıdaki gibi bir rekürans bağıntısı yazılabilir.

$$\begin{cases} u_0 = u(x, 0) + tu_t(x, 0) \\ u_{k+1} = -L_{tt}^{-1}(L_{xx}u_k) - L_{tt}^{-1}(A_k + B_k) - L_{tt}^{-1}(L_{xxt}u_k) \end{cases}, \quad k \geq 0, \tag{5.8}$$

(5.8) eşitliği ile verilen rekürans bağıntısı kullanılarak (4.6) ile ifade edilen ayrışım serisinin terimlerinin bazıları

$$\begin{aligned}
u_1 &= -L_{tt}^{-1}(L_{xx}u_0) - L_{tt}^{-1}(A_0 + B_0) - L_{tt}^{-1}(L_{xxt}u_0) \\
u_2 &= -L_{tt}^{-1}(L_{xx}u_1) - L_{tt}^{-1}(A_1 + B_1) - L_{tt}^{-1}(L_{xxt}u_1) \\
u_3 &= -L_{tt}^{-1}(L_{xx}u_2) - L_{tt}^{-1}(A_2 + B_2) - L_{tt}^{-1}(L_{xxt}u_2) \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{5.9}$$

şeklinde yazılır. Buradan (5.2) ile verilen başlangıç şartları ve (5.9) ile verilen eşitlikler kullanıldığında

$$\begin{aligned}
u_0 &= -\frac{k}{w} - \frac{w}{k} + 4kw - 12kw \frac{1}{\cos^2(kx)} - 24kw^2 t \sec^2(kx) \tan(kx) \\
u_1 &= -3kt^2 w^3 (3 + 132k^2 + 2\cos(2kx) - 104k^2 \cos(2kx) - \cos(4kx) + 4k^2 \cos(4kx)) \sec^6(kx) - \\
&\quad - 2k^3 t^3 w^2 (-9 + 192w^2 - 8\cos(2kx) - 96w^2 \cos(2kx) + \cos(4kx)) \sec^6(kx) \tan(kx) \\
u_2 &= \frac{1}{80} kt^2 w \sec^8(kx) (-240k^2 w^2 (-40 - 4832k^2 + 3(-5 + 1588k^2) \cos(2kx) + \\
&\quad + (24 - 480k^2) \cos(4kx) - \cos(6kx) + 4k^2 \cos(6kx)) + 5k^2 t^2 (95k^2 + 190w^2 + \\
&\quad + 5000k^2 w^2 - 4800w^4 - 372480k^2 w^4 + 2(86w^2 - 240w^4 + k^2(43 + 376w^2 + \\
&\quad + 212928w^4)) \cos(2kx) - 32(2w^2 - 120w^4 + k^2(1 + 118w^2 + 2208w^4)) \cos(4kx) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -22k^2 \cos(6kx) - 44w^2 \cos(6kx) + 464k^2 w^2 \cos(6kx) - 480w^4 \cos(6kx) + \\
& + 1920k^2 w^4 \cos(6kx) + k^2 \cos(8kx) + 2w^2 \cos(8kx) - 8k^2 w^2 \cos(8kx) \sec^2(kx) - \\
& - 40tw(26k^2 + 1520k^4 + 26w^2 + 1232k^2 w^2 - 9952k^4 w^2 + 3(11w^2 + 72k^4(5 + 38w^2) + \dots \\
u_3 = & -3k^5 t^2 w^3 (1225 + 312380k^2 + 154 \cos(2kx) - 352936k^2 \cos(2kx) - 952 \cos(4kx) + \\
& + 58432k^2 \cos(4kx) + 118 \cos(6kx) - 2008k^2 \cos(6kx) - \cos(8kx) + 4k^2 \cos(8kx)) \\
& \sec^{10}(kx) + \frac{1}{64} kt^4 w (-276k^4 - 31248k^6 - 552k^2 w^2 - 73248k^4 w^2 - 2542464k^6 w^2 - \\
& - 276w^4 - 21168k^2 w^4 + 1038528k^4 w^4 + 208207104k^6 w^4 - 330k^4 \cos(2kx) - \\
& - 21672k^6 \cos(2kx) - 660k^2 w^2 \cos(2kx) - 51072k^4 w^2 \cos(2kx) + 177984k^6 w^2 \cos(2kx) - \\
& - 330w^4 \cos(2kx) - 14952k^2 w^4 \cos(2kx) - \dots \\
& \vdots
\end{aligned}$$

terimleri bulunur. Bulunan bu terimler (4.6) eşitliğinde yazılarak (5.1) ve (5.2) ile verilen problem için bir yaklaşık çözüm elde edilmiş olur.

5.2. SRLW Denkleminde HAM' unun Uygulanması

(5.1)-(5.2) ile verilen SRLW denkleminde HAM' unu uygulamak için (4.14) ile verilen

$$L[u_m(x, t) - \mathcal{H}_m u_{m-1}(x, t)] = h H(x, t) R_m[u_{m-1}(x, t)], m \geq 1 \quad (5.10)$$

n . mertebeden deformasyon denklemini yeniden göz önüne alalım. Burada $R_m[u_{m-1}(x, t)]$ ifadesi (5.1) denklemi için

$$R_m[u_{m-1}(x, t)] = \frac{\partial^2 u_{m-1}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u_{m-1}}{\partial x^2} + \sum_{i=0}^{m-1} u_i \frac{\partial^2 u_{m-1-i}}{\partial x \partial t} + \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial u_{m-1-i}}{\partial t} + \frac{\partial^4 u_{m-1}}{\partial x^2 \partial t^2} \quad (5.11)$$

olacak şekilde yazılır.

$$u(x, 0) = f(x),$$

$$u_t(x, 0) = g(x),$$

olmak üzere $u_0(x, t) = f(x) + tg(x)$ şeklinde alınarak;

$$m = 1, H(x, t) = 1 \text{ ve (4.16)-(5.11) eşitlikleri ile}$$

$$\begin{aligned}
L[u_1(x,t)] &= h R_1[u_0(x,t)] \\
&= h \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \sum_{i=0}^{m-1} u_i \frac{\partial^2 u_{m-1-i}}{\partial x \partial t} + \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial u_{m-1-i}}{\partial t} + \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^2 \partial t^2} \right) \\
&= h \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + u_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial t} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^2 \partial t^2} \right) \\
u_1(x,t) &= L^{-1} \left(h \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + u_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial t} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^2 \partial t^2} \right) \right)
\end{aligned}$$

olarak yazılır.

$$m = 2, H(x, t) = 1 \text{ için}$$

$$\begin{aligned}
L[u_2(x,t) - u_1(x,t)] &= h R_2[u_1(x,t)] \\
&= h \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \sum_{i=0}^{m-1} u_i \frac{\partial^2 u_{m-1-i}}{\partial x \partial t} + \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial u_{m-1-i}}{\partial t} + \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^2 \partial t^2} \right) \\
&= h \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + u_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial t} + u_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial t} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^2 \partial t^2} \right) \\
u_2(x,t) &= u_1(x,t) + L^{-1} \left(h \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + u_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial t} + u_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial t} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^2 \partial t^2} \right) \right)
\end{aligned}$$

benzer şekilde $u_3(x,t)$ terimi de yazılarak gerekli işlemler yapıldığı zaman

$$u_0 = -\frac{k}{w} - \frac{w}{k} + 4kw - 12kw \frac{1}{\cos^2(kx)} - 24ktw^2 \sec^2(kx) \tan(kx),$$

$$\begin{aligned}
u_1 &= h \left(3kt^2 w^3 \left(3 + 132k^2 + 2 \cos(2kx) - 104k^2 \cos(2kx) - \cos(4kx) + 4k^2 \cos(4kx) \right) \right. \\
&\quad \left. \sec^6(kx) + 2k^3 t^3 w^2 \left(-9 + 192w^2 - 8 \cos(2kx) - 96w^2 \cos(2kx) + \cos(4kx) \right) \right. \\
&\quad \left. \sec^6(kx) \tan(kx) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2 &= u_1 + h \left(-\frac{3}{4} hkt^2 w^3 \left(-8 - 320k^2 - 19328k^4 - 9 \cos(2kx) - 120k^2 \cos(2kx) + 19056k^4 \cos(2kx) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 192k^2 \cos(4kx) - 1920k^4 \cos(4kx) + \cos(6kx) - 8k^2 \cos(6kx) + 16k^4 \cos(6kx) \right) \sec^8(kx) \right. \\
&\quad \left. + \dots \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_3 &= u_2 - \frac{1}{16} h k^3 t^4 w \left(-95k^2 - 190w^2 - 5000k^2 w^2 + 1920w^4 + 107520k^2 w^4 - 86k^2 \cos(2kx) - \right. \\
&\quad \left. - 172w^2 \cos(2kx) - 752k^2 w^2 \cos(2kx) + 192w^4 \cos(2kx) - 120576k^2 w^4 \cos(2kx) + \right.
\end{aligned}$$

$$+32k^2 \cos(4kx) + 64w^2 \cos(4kx) + 3776k^2 w^2 \cos(4kx) - \dots$$

olacak şekilde u_0, u_1, u_2, u_3 terimleri elde edilir. Benzer şekilde diğer terimler de bulunabilir. Bulunan bu değerler (4.13) eşitliğinde yazılarak (5.1) ile verilen problem için şeklinde yaklaşık bir çözüm yazılabilir.

5.3. SRLW Denkleminde HPM' unun Uygulanması

HPM'unun (5.1) ve (5.2) ile verilen SRLW denkleminde nasıl uygulandığını göstermek için (4.20) eşitliği yardımı ile (5.1) denklemi için aşağıdaki gibi bir homotopi oluşturalım:

$$(1-p) \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \right) + p \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + Y \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial t} + \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial^4 Y}{\partial x^2 \partial t^2} \right) = 0 \quad (5.12)$$

(5.1) denklemi için

$$Y = Y_0 + pY_1 + p^2Y_2 + p^3Y_3 + \dots \quad (5.13)$$

şeklinde bir çözüm aradığımızı kabul edelim. Bu çözümde (5.12) eşitliğinde gerekli olan türevler alınır ve yerlerine yazılır ise

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 Y_0}{\partial t^2} + p \frac{\partial^2 Y_1}{\partial t^2} + p^2 \frac{\partial^2 Y_2}{\partial t^2} + p^3 \frac{\partial^2 Y_3}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + p \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + p \frac{\partial^2 Y_0}{\partial x^2} + p^2 \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x^2} + p^3 \frac{\partial^2 Y_2}{\partial x^2} + \\ & + p^4 \frac{\partial^2 Y_3}{\partial x^2} + pY_0 \frac{\partial^2 Y_0}{\partial x \partial t} + p^2 Y_0 \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x \partial t} + p^3 Y_0 \frac{\partial^2 Y_2}{\partial x \partial t} + p^4 Y_0 \frac{\partial^2 Y_3}{\partial x \partial t} + p^2 Y_1 \frac{\partial^2 Y_0}{\partial x \partial t} + p^3 Y_1 \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x \partial t} + \\ & + p^4 Y_1 \frac{\partial^2 Y_2}{\partial x \partial t} + p^3 Y_2 \frac{\partial^2 Y_0}{\partial x \partial t} + p^4 Y_2 \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x \partial t} + p^4 Y_3 \frac{\partial^2 Y_0}{\partial x \partial t} + p \frac{\partial Y_0}{\partial x} \frac{\partial Y_0}{\partial t} + p^2 \frac{\partial Y_0}{\partial x} \frac{\partial Y_1}{\partial t} + p^3 \frac{\partial Y_0}{\partial x} \frac{\partial Y_2}{\partial t} + \\ & + p^4 \frac{\partial Y_0}{\partial x} \frac{\partial Y_3}{\partial t} + p^2 \frac{\partial Y_1}{\partial x} \frac{\partial Y_0}{\partial t} + p^3 \frac{\partial Y_1}{\partial x} \frac{\partial Y_1}{\partial t} + p^4 \frac{\partial Y_1}{\partial x} \frac{\partial Y_2}{\partial t} + p^3 \frac{\partial Y_2}{\partial x} \frac{\partial Y_0}{\partial t} + p^4 \frac{\partial Y_2}{\partial x} \frac{\partial Y_1}{\partial t} + \\ & + p^4 \frac{\partial Y_3}{\partial x} \frac{\partial Y_0}{\partial t} + p \frac{\partial^4 Y_0}{\partial^2 x \partial t^2} + p^2 \frac{\partial^4 Y_1}{\partial^2 x \partial t^2} + p^3 \frac{\partial^4 Y_2}{\partial^2 x \partial t^2} + p^4 \frac{\partial^4 Y_3}{\partial^2 x \partial t^2} + \dots = 0 \end{aligned}$$

olacak şekilde cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sisteminde polinom eşitliği özelliği kullanılarak p nin kuvvetlerine göre aşağıdaki gibi bir ayrışım yapılabilir:

$$p^0 : \frac{\partial^2 Y_0}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = 0 \quad (5.14)$$

$$p^1 : \frac{\partial^2 Y_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 Y_0}{\partial x^2} + Y_0 \frac{\partial^2 Y_0}{\partial x \partial t} + \frac{\partial Y_0}{\partial x} \frac{\partial Y_0}{\partial t} + \frac{\partial^4 Y_0}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \quad (5.15)$$

$$p^2 : \frac{\partial^2 Y_2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x^2} + Y_0 \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x \partial t} + Y_1 \frac{\partial^2 Y_0}{\partial x \partial t} + \frac{\partial Y_0}{\partial x} \frac{\partial Y_1}{\partial t} + \frac{\partial Y_1}{\partial x} \frac{\partial Y_0}{\partial t} + \frac{\partial^4 Y_1}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \quad (5.16)$$

$$p^3 : \frac{\partial^2 Y_3}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 Y_2}{\partial x^2} + Y_0 \frac{\partial^2 Y_2}{\partial x \partial t} + Y_1 \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x \partial t} + Y_2 \frac{\partial^2 Y_0}{\partial x \partial t} + \frac{\partial Y_0}{\partial x} \frac{\partial Y_2}{\partial t} + \frac{\partial Y_1}{\partial x} \frac{\partial Y_1}{\partial t} + \frac{\partial Y_2}{\partial x} \frac{\partial Y_0}{\partial t} + \frac{\partial^4 Y_2}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \quad (5.17)$$

⋮

(5.14)-(5.17) eşitlikleri $u_0(x, t) = f(x) + tg(x)$ başlangıç şartı ile çözüldüğü zaman

$Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, \dots$ terimleri

$$Y_0 = -\frac{k}{w} - \frac{w}{k} + 4kw - 12kw \frac{1}{\cos^2(kx)} - 24ktw^2 \sec^2(kx) \tan(kx),$$

$$Y_1 = -12k^3 t^2 w (-2 + \cos(kx)) \sec^4(kx) - 3kt^2 w (3k^2 + 3w^2 + 132k^2 w^2 + 2k^2 \cos(2kx) + 2w^2 \cos(2kx) - 104k^2 w^2 \cos(2kx) - k^2 \cos(4kx) - w^2 \cos(4kx) + 4k^2 w^2 \cos(4kx)) \sec^6(kx) - 4k^3 t^3 w^2 \sec^5(kx) (-11 \sin(kx) + \sin(3kx)) + 96k^3 t^3 w^4 \sec^7(kx) (-5 \sin(kx) + \sin(3kx)),$$

$$Y_2 = -3k^3 t^2 w^3 (-40 - 4832k^2 - 15 \cos(2kx) + 4764k^2 \cos(2kx) + 24 \cos(2kx) - 480k^2 \cos(4kx) - \cos(6kx) + 4k^2 \cos(6kx)) \sec^8(kx) - \frac{1}{4} k^3 t^4 w^3 (-40 - 4832k^2 - 15 \cos(2kx) + 4764k^2 \cos(2kx) + 24 \cos(2kx) - 480k^2 \cos(4kx) - \cos(6kx) + 4k^2 \cos(6kx)) \sec^8(kx) - \dots$$

$$Y_3 = -3k^5 t^2 w^3 (1225 + 312380k^2 + 154 \cos(2kx) - 352936k^2 \cos(2kx) - 952 \cos(4kx) + 58432k^2 \cos(4kx) + 118 \cos(6kx) - 2008k^2 \cos(6kx) - \cos(8kx) + 4k^2 \cos(8kx)) \sec^{10}(kx) - \frac{1}{4} k^5 t^4 w^3 (1225 + 312380k^2 + 154 \cos(2kx) - 352936k^2 \cos(2kx) - 952 \cos(4kx) + 58432k^2 \cos(4kx) + 118 \cos(6kx) - 2008k^2 \cos(6kx) - \cos(8kx) + 4k^2 \cos(8kx)) \sec^{10}(kx) - \dots$$

⋮

olarak bulunur. Böylece (4.22) eşitliği ve yukarıda elde edilen $Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, \dots$ değerleri kullanılarak

$$u(x, t) = \lim_{p \rightarrow 1} Y = Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots \quad (5.18)$$

olacak şekilde (5.1) denkleminin yaklaşık çözümü yazılabilir.

5.4. (1+1) Boyutlu Saçılma Terimli Uzun Dalga Denklemine ADM' unun Uygulanması

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + v_x &= 0 \\ v_t + u_x v + uv_x + \frac{1}{3} u_{xxx} &= 0 \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= -\sqrt{\frac{2k^2}{3}} - \frac{2k}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sin(kx)}, \\ v(x, 0) &= \frac{k^3}{3} - \frac{2k^2}{3} \frac{1}{\sin^2(kx)}, \end{aligned} \quad (5.20)$$

başlangıç şartları ile verilmiş olan (1+1) boyutlu saçılma terimli uzun dalga denklemini göz önüne alalım. (5.19) denklemi aşağıdaki gibi

$$\begin{aligned} L_t u + N(u) + L_x v &= 0 \\ L_t v + M(u, v) + R(u, v) + \frac{1}{3} L_{xxx} u &= 0 \end{aligned} \quad (5.21)$$

operatör formunda yazılır. Burada $L_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $L_{xxx} = \frac{\partial^3}{\partial x^3}$ türev operatörlerinin ve $N(u) = uu_x$, $M(u, v) = u_x v$, $R(u, v) = uv_x$ olacak şekilde lineer olmayan terimleri ifade etmektedir. L_t^{-1} ters operatörünün var olduğu kabul edilir ve $L_t^{-1} = \int_0^t (\cdot) dt$ şeklinde

tanımlanarak (5.21) denkleminin her iki tarafına uygulanırsa

$$\begin{aligned} L_t^{-1} (L_t u) + L_t^{-1} (N(u)) + L_t^{-1} (L_x v) &= 0 \\ L_t^{-1} (L_t v) + L_t^{-1} (M(u, v)) + L_t^{-1} (R(u, v)) + L_t^{-1} \left(\frac{1}{3} L_{xxx} u \right) &= 0 \end{aligned} \quad (5.22)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u(x, 0) - L_t^{-1} (N(u)) - L_t^{-1} (L_x v) \\ v(x, t) &= v(x, 0) - L_t^{-1} (M(u, v)) - L_t^{-1} (R(u, v)) - L_t^{-1} \left(\frac{1}{3} L_{xxx} u \right), \end{aligned} \quad (5.23)$$

olur. Burada $N(u) = uu_x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$, $M(u, v) = u_x v = \sum_{n=0}^{\infty} B_n$, $R(u, v) = uv_x = \sum_{n=0}^{\infty} C_n$ şeklinde tanımlanarak A_n, B_n ve C_n Adomian polinomlarının bazı terimleri (4.5) genel formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}
A_0 &= u_0(u_0)_x, \\
A_1 &= u_1(u_0)_x + u_0(u_1)_x, \\
A_2 &= u_2(u_0)_x + u_1(u_1)_x + u_0(u_2)_x, \\
A_3 &= u_3(u_0)_x + u_2(u_1)_x + u_1(u_2)_x + u_0(u_3)_x, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{5.24}$$

$$\begin{aligned}
B_0 &= (u_0)_x v_0, \\
B_1 &= (u_0)_x v_1 + (u_1)_x v_0, \\
B_2 &= (u_0)_x v_2 + (u_1)_x v_1 + (u_2)_x v_0, \\
B_3 &= (u_0)_x v_3 + (u_1)_x v_2 + (u_2)_x v_1 + (u_3)_x v_0, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{5.25}$$

$$\begin{aligned}
C_0 &= u_0(v_0)_x, \\
C_1 &= u_1(v_0)_x + u_0(v_1)_x, \\
C_2 &= u_2(v_0)_x + u_1(v_1)_x + u_0(v_2)_x, \\
C_3 &= u_3(v_0)_x + u_2(v_1)_x + u_1(v_2)_x + u_0(v_3)_x, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{5.26}$$

olarak yazılabilir. (5.23) denklemini için aşağıdaki gibi bir rekürans bağıntısı yazılabilir.

$$\begin{cases} u_0 = u(x, 0) \\ u_{n+1} = -L_t^{-1}(A_n) - L_t^{-1}(L_x v_n) \end{cases}, \tag{5.27a}$$

$$\begin{cases} v_0 = v(x, 0) \\ v_{n+1} = -L_t^{-1}(B_n) - L_t^{-1}(C_n) - L_t^{-1}\left(\frac{1}{3}L_{xxx}u_n\right), \end{cases} \quad n \geq 0, \tag{5.27b}$$

(5.27a) ve (5.27b) eşitlikleri ile verilen rekürans bağıntıları kullanılarak (4.6) ile ifade edilen ayrışım serisinin terimlerinin bazıları

$$\begin{aligned}
u_1 &= -L_t^{-1}(A_0) - L_t^{-1}(L_x v_0) \\
u_2 &= -L_t^{-1}(A_1) - L_t^{-1}(L_x v_1) \\
u_3 &= -L_t^{-1}(A_2) - L_t^{-1}(L_x v_2) \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{5.28a}$$

$$\begin{aligned}
v_1 &= -L_t^{-1}(B_0) - L_t^{-1}(C_0) - L_t^{-1}\left(\frac{1}{3}L_{xxx}u_0\right) \\
v_2 &= -L_t^{-1}(B_1) - L_t^{-1}(C_1) - L_t^{-1}\left(\frac{1}{3}L_{xxx}u_1\right) \\
v_3 &= -L_t^{-1}(B_2) - L_t^{-1}(C_2) - L_t^{-1}\left(\frac{1}{3}L_{xxx}u_2\right) \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{5.28b}$$

şeklinde yazılır. Buradan (5.20) ile verilen başlangıç şartları ve (5.28a) ve (5.28b) ile verilen eşitlikler kullanıldığında

$$\begin{aligned}
u_0 &= -\sqrt{\frac{2k^2}{3}} - \frac{2k}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sin(kx)}, \\
u_1 &= \frac{2}{3}\sqrt{2}(k^2)^{3/2}t \cot(kx) \csc(kx), \\
u_2 &= -\frac{1}{3\sqrt{3}}k^5t^2(3 + \cos(2kx))\csc^3(kx), \\
u_3 &= \frac{1}{27\sqrt{2}}k^6\sqrt{k^2}t^3(23\cos(kx) + \cos(3kx))\csc^4(kx), \\
u_4 &= -\frac{1}{216\sqrt{3}}k^9t^4(115 + 76\cos(2kx) + \cos(4kx))\csc^5(kx), \\
&\vdots \\
v_0 &= \frac{k^3}{3} - \frac{2k^2}{3} \frac{1}{\sin^2(kx)}, \\
v_1 &= \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}k^3\sqrt{k^2}t \cot(kx) \csc^2(kx), \\
v_2 &= -\frac{4}{9}k^6t^2(2 + \cos(2kx))\csc^4(kx), \\
v_3 &= \frac{4}{27}\sqrt{\frac{2}{3}}k^7\sqrt{k^2}t^3(11\cos(kx) + \cos(3kx))\csc^5(kx), \\
v_4 &= -\frac{2}{81}k^{10}t^4(33 + 26\cos(2kx) + \cos(4kx))\csc^6(kx), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

değerleri bulunur. Bulunan bu değerler (4.6) eşitliğinde yazılarak (5.19) ve (5.20) ile verilen problem için bir yaklaşık çözüm bulunmuş olur.

5.5. (1+1) Boyutlu Saçılma Terimli Uzun Dalga Denklemine HAM' unun Uygulanması

(5.19)-(5.20) ile verilen (1+1) boyutlu saçılma terimli uzun dalga denklemine HAM' unu uygulamak için (4.14) ile verilen

$$\begin{aligned} L[u_m(x,t) - \chi_m u_{m-1}(x,t)] &= h H(x,t) R_m[u_{m-1}(x,t)] \\ L[v_m(x,t) - \chi_m v_{m-1}(x,t)] &= h H(x,t) R_m[v_{m-1}(x,t)] \end{aligned}, \quad m \geq 1 \quad (5.29)$$

n . mertebeden deformasyon denklemini yeniden göz önüne alalım. Burada $R_m[u_{m-1}(x,t)]$ ve $R_m[v_{m-1}(x,t)]$ ifadeleri (5.19) denklemini için

$$R_m[u_{m-1}(x,t)] = \frac{\partial u_{m-1}}{\partial t} + \sum_{i=0}^{m-1} u_i \frac{\partial u_{m-1-i}}{\partial x} + \frac{\partial v_{m-1}}{\partial x}, \quad (5.30a)$$

$$R_m[v_{m-1}(x,t)] = \frac{\partial v_{m-1}}{\partial t} + \sum_{i=0}^{m-1} v_i \frac{\partial u_{m-1-i}}{\partial x} + \sum_{i=0}^{m-1} u_i \frac{\partial v_{m-1-i}}{\partial x} + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 u_{m-1}}{\partial x^3}, \quad (5.30b)$$

olacak şekilde yazılır. $m=1$, $H(x,t)=1$ ve (4.16), (5.30a) ile (5.30b) eşitlikleri göz önüne alındığı zaman

$$\begin{aligned} L[u_1(x,t)] &= h R_1[u_0(x,t)] \\ L[u_1(x,t)] &= h \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} + \sum_{i=0}^{m-1} u_i \frac{\partial u_{m-1-i}}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \\ L[u_1(x,t)] &= h \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \\ u_1(x,t) &= L^{-1} \left(h \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right) \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned} L[v_1(x,t)] &= h R_1[v_0(x,t)] \\ L[v_1(x,t)] &= h \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} + \sum_{i=0}^{m-1} v_i \frac{\partial u_{m-1-i}}{\partial x} + \sum_{i=0}^{m-1} u_i \frac{\partial v_{m-1-i}}{\partial x} + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} \right) \\ L[v_1(x,t)] &= h \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} \right) \\ v_1(x,t) &= L^{-1} \left(h \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} \right) \right) \end{aligned}$$

olarak yazılır.

$$m = 2, H(x, t) = 1 \text{ için}$$

$$L[u_2(x, t) - u_1(x, t)] = h R_2[u_1(x, t)]$$

$$L[u_2(x, t) - u_1(x, t)] = h \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + \sum_{i=0}^{m-1} u_i \frac{\partial u_{m-1-i}}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right)$$

$$L[u_2(x, t) - u_1(x, t)] = h \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right)$$

$$u_2(x, t) = u_1(x, t) + L^{-1} \left(h \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \right)$$

benzer biçimde

$$L[v_2(x, t) - v_1(x, t)] = h R_1[v_1(x, t)]$$

$$L[v_2(x, t) - v_1(x, t)] = h \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + \sum_{i=0}^{m-1} v_i \frac{\partial u_{m-1-i}}{\partial x} + \sum_{i=0}^{m-1} u_i \frac{\partial v_{m-1-i}}{\partial x} + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} \right)$$

$$L[v_2(x, t) - v_1(x, t)] = h \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + u_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} \right)$$

$$v_2(x, t) = v_1(x, t) + L^{-1} \left(h \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + u_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} \right) \right)$$

olacak şekilde $u_3(x, t)$ ve $v_3(x, t)$ terimleri de yazılarak gerekli işlemler yapıldığı zaman

$$u_0 = -\sqrt{\frac{2k^2}{3}} - \frac{2k}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sin(kx)},$$

$$u_1 = -\frac{2}{3} \sqrt{2} h (k^2)^{3/2} t \cot(kx) \csc(kx),$$

$$u_2 = -\frac{1}{9} h t \csc^3(kx) \left(\sqrt{3} h k^5 t \cos(2x) + 3 \left(\sqrt{3} h k^5 t + \sqrt{2} (1+h) (k^2)^{3/2} \sin(2x) \right) \right),$$

$$u_3 = -\frac{1}{54} h t \csc^4(kx) \left(\sqrt{2} (k^2)^{3/2} (9 + 18h + h^2 (9 + 23k^4 t^2)) \cos(kx) + \right. \\ \left. + \sqrt{2} (k^2)^{3/2} (-9 - 18h + h^2 (-9 + k^4 t^2)) \cos(3kx) + 6\sqrt{3} h (1+h) k^5 t (5 \sin(kx) + \sin(3kx)) \right),$$

$$u_4 = -\frac{1}{648} h t \csc^5(kx) \left(270\sqrt{3} h k^5 t + 540\sqrt{3} h^2 k^5 t + 270\sqrt{3} h^3 k^5 t + 115\sqrt{3} h^3 k^9 t^3 + \right. \\ \left. + 4\sqrt{3} h k^5 t (-54 - 108h + h^2 (-54 + 19k^4 t^2)) \cos(2kx) + \sqrt{3} h k^5 t (-54 - 108h + h^2 (-54 + k^4 t^2)) \right)$$

$$\begin{aligned}
& \cos(4kx) + 108\sqrt{2}(k^2)^{3/2} \sin(2kx) + 324\sqrt{2}h(k^2)^{3/2} \sin(2kx) + 324\sqrt{2}h^2(k^2)^{3/2} \sin(2kx) + \\
& + 108\sqrt{2}h^3(k^2)^{3/2} \sin(2kx) + 396\sqrt{2}h^2k^6\sqrt{k^2}t^2 \sin(2kx) + 396\sqrt{2}h^3k^6\sqrt{k^2}t^2 \sin(2kx) - \\
& - 54\sqrt{2}(k^2)^{3/2} \sin(4kx) - 162\sqrt{2}h(k^2)^{3/2} \sin(4kx) - 162\sqrt{2}h^2(k^2)^{3/2} \sin(4kx) - \\
& - 54\sqrt{2}h^3(k^2)^{3/2} \sin(4kx) + 18\sqrt{2}h^2k^6\sqrt{k^2}t^2 \sin(4kx) + 18\sqrt{2}h^3k^6\sqrt{k^2}t^2 \sin(4kx) \Big), \\
& \vdots \\
v_0 &= \frac{k^3}{3} - \frac{2k^2}{3} \frac{1}{\sin^2(kx)}, \\
v_1 &= -\frac{4}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} k^3 h \sqrt{k^2} t \cot(kx) \csc^2(kx), \\
v_2 &= -\frac{2}{9} h k^3 t \csc^4(kx) \left(4h k^3 t + 2h k^3 t \cos(2kx) + \sqrt{6}(1+h) \sqrt{k^2} \sin(2kx) \right), \\
v_3 &= h \left(-\frac{4}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} h(1+h) k^3 \sqrt{k^2} t \cot(kx) \csc^2(kx) - \frac{4}{9} h(1+2h) k^6 t^2 (2 + \cos(2kx)) \csc^4(kx) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{4}{27} \sqrt{\frac{2}{3}} h^2 k^7 \sqrt{k^2} t^3 (11 \cos(kx) + \cos(3kx)) \csc^5(kx) \right) - \frac{2}{9} h k^3 t \csc^4(kx) \left(4h k^3 t + 2h k^3 t \cos(2kx) + \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{6}(1+h) \sqrt{k^2} \sin(2kx) \right), \\
v_4 &= \frac{2}{81} h k^3 t \csc^4(kx) \left(-108 h k^3 t - 216 h^2 k^3 t - 108 h^3 k^3 t - 3\sqrt{6}h(1+h) \sqrt{k^2} (6 + h(3 + 22k^4 t^2) - \right. \\
& \quad \left. - 3(2+h) \cos(2kx)) \cot(kx) - 6\sqrt{6}h^2 k^4 \sqrt{k^2} t^2 \cos(3kx) \csc(kx) - 6\sqrt{6}h^3 k^4 \sqrt{k^2} t^2 \right. \\
& \quad \left. \cos(3kx) \csc(kx) - 33h^3 k^7 t^3 \csc^2(kx) - h^3 k^7 t^3 \cos(4kx) \csc^2(kx) - 2h k^3 t \cos(kx) \right. \\
& \quad \left. (27(1+h)^2 + 13h^2 k^4 t^2 \csc^2(kx)) - 9\sqrt{6} \sqrt{k^2} \sin(2kx) - 9\sqrt{6}h \sqrt{k^2} \sin(2kx) \right), \\
& \vdots
\end{aligned}$$

olacak şekilde u_0, u_1, u_2, u_3 ve v_0, v_1, v_2, v_3 terimleri elde edilir. Benzer şekilde diğer terimler de bulunabilir. Bulunan bu değerler (4.13) eşitliğinde yazılarak (5.19) ile verilen problem için yaklaşık bir çözüm yazılabilir.

5.6. (1+1) Boyutlu Saçılma Terimli Uzun Dalga Denklemine HPM' unun Uygulanması

HPM' unun (5.19) ve (5.20) ile verilen (1+1) boyutlu saçılma terimli uzun dalga denklemine nasıl uygulandığını göstermek için (4.20) eşitliği yardımı ile (5.19) denklemini için

$$\begin{aligned} (1-p) \left(\frac{\partial Y}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) + p \left(\frac{\partial Y}{\partial t} + Y \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) &= 0 \\ (1-p) \left(\frac{\partial W}{\partial t} - \frac{\partial v_0}{\partial t} \right) + p \left(\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial x} W + Y \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 Y}{\partial x^3} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (5.31)$$

biçiminde bir homotopi oluşturalım. (5.19) denklemini için

$$Y = Y_0 + pY_1 + p^2Y_2 + p^3Y_3 + \dots \quad (5.32a)$$

$$W = W_0 + pW_1 + p^2W_2 + p^3W_3 + \dots \quad (5.32b)$$

şeklinde bir çözüm aradığımızı kabul edelim. Bu çözümde (5.31) eşitliğinde gerekli olan türevler alınır ve yerlerine yazılır ise

$$\begin{aligned} &\frac{\partial Y_0}{\partial t} + p \frac{\partial Y_1}{\partial t} + p^2 \frac{\partial Y_2}{\partial t} + p^3 \frac{\partial Y_3}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} + p \frac{\partial u_0}{\partial t} + pY_0 \frac{\partial Y_0}{\partial x} + p^2Y_0 \frac{\partial Y_1}{\partial x} + p^3Y_0 \frac{\partial Y_2}{\partial x} + \\ &+ p^4Y_0 \frac{\partial Y_3}{\partial x} + p^2Y_1 \frac{\partial Y_0}{\partial x} + p^3Y_1 \frac{\partial Y_1}{\partial x} + p^4Y_1 \frac{\partial Y_2}{\partial x} + p^3Y_2 \frac{\partial Y_0}{\partial x} + p^4Y_2 \frac{\partial Y_1}{\partial x} + p^4Y_3 \frac{\partial Y_0}{\partial x} + \\ &+ p \frac{\partial W_0}{\partial x} + p^2 \frac{\partial W_1}{\partial x} + p^3 \frac{\partial W_2}{\partial x} + p^4 \frac{\partial W_3}{\partial x} + \dots = 0 \\ &\frac{\partial W_0}{\partial t} + p \frac{\partial W_1}{\partial t} + p^2 \frac{\partial W_2}{\partial t} + p^3 \frac{\partial W_3}{\partial t} - \frac{\partial v_0}{\partial t} + p \frac{\partial v_0}{\partial t} + pW_0 \frac{\partial Y_0}{\partial x} + p^2W_1 \frac{\partial Y_0}{\partial x} + p^3W_2 \frac{\partial Y_0}{\partial x} + \\ &+ p^4W_3 \frac{\partial Y_0}{\partial x} + p^2W_0 \frac{\partial Y_1}{\partial x} + p^3W_1 \frac{\partial Y_1}{\partial x} + p^4W_2 \frac{\partial Y_1}{\partial x} + p^3W_0 \frac{\partial Y_2}{\partial x} + p^4W_1 \frac{\partial Y_2}{\partial x} + p^4W_0 \frac{\partial Y_3}{\partial x} + \\ &+ pY_0 \frac{\partial W_0}{\partial x} + p^2Y_0 \frac{\partial W_1}{\partial x} + p^3Y_0 \frac{\partial W_2}{\partial x} + p^4Y_0 \frac{\partial W_3}{\partial x} + p^2Y_1 \frac{\partial W_0}{\partial x} + p^3Y_1 \frac{\partial W_1}{\partial x} + p^4Y_1 \frac{\partial W_2}{\partial x} + \\ &+ p^3Y_2 \frac{\partial W_0}{\partial x} + p^4Y_2 \frac{\partial W_1}{\partial x} + p^4Y_3 \frac{\partial W_0}{\partial x} + \frac{1}{3} p \frac{\partial^3 Y_0}{\partial x^3} + \frac{1}{3} p^2 \frac{\partial^3 Y_1}{\partial x^3} + \frac{1}{3} p^3 \frac{\partial^3 Y_2}{\partial x^3} + \frac{1}{3} p^4 \frac{\partial^3 Y_3}{\partial x^3} + \dots = 0 \end{aligned}$$

olacak şekilde cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sisteminde polinom eşitliği özelliği kullanılarak p nin kuvvetlerine göre aşağıdaki gibi bir ayrışım yapılabilir:

$$p^0 : \frac{\partial Y_0}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} = 0, \quad (5.33)$$

$$p^1 : \frac{\partial Y_1}{\partial t} + \frac{\partial u_0}{\partial t} + Y_0 \frac{\partial Y_0}{\partial x} + \frac{\partial W_0}{\partial x} = 0, \quad (5.34)$$

$$p^2 : \frac{\partial Y_2}{\partial t} + Y_0 \frac{\partial Y_1}{\partial x} + Y_1 \frac{\partial Y_0}{\partial x} + \frac{\partial W_1}{\partial x} = 0, \quad (5.35)$$

$$p^3 : \frac{\partial Y_3}{\partial t} + Y_0 \frac{\partial Y_2}{\partial x} + Y_1 \frac{\partial Y_1}{\partial x} + Y_2 \frac{\partial Y_0}{\partial x} + \frac{\partial W_2}{\partial x} = 0, \quad (5.35)$$

⋮

$$p^0 : \frac{\partial W_0}{\partial t} - \frac{\partial v_0}{\partial t} = 0, \quad (5.36)$$

$$p^1 : \frac{\partial W_1}{\partial t} + \frac{\partial v_0}{\partial t} + W_0 \frac{\partial Y_0}{\partial x} + Y_0 \frac{\partial W_0}{\partial x} + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 Y_0}{\partial x^3} = 0, \quad (5.37)$$

$$p^2 : \frac{\partial W_2}{\partial t} + W_1 \frac{\partial Y_0}{\partial x} + W_0 \frac{\partial Y_1}{\partial x} + Y_0 \frac{\partial W_1}{\partial x} + Y_1 \frac{\partial W_0}{\partial x} + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 Y_1}{\partial x^3} = 0, \quad (5.38)$$

$$p^3 : \frac{\partial W_3}{\partial t} + W_2 \frac{\partial Y_0}{\partial x} + W_1 \frac{\partial Y_1}{\partial x} + W_0 \frac{\partial Y_2}{\partial x} + Y_0 \frac{\partial W_2}{\partial x} + Y_1 \frac{\partial W_1}{\partial x} + Y_2 \frac{\partial W_0}{\partial x} + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 Y_2}{\partial x^3} = 0, \quad (5.39)$$

⋮

(5.33)-(5.39) eşitlikleri (5.20) ile verilen $u(x, 0) = u_0$ ve $v(x, 0) = v_0$ başlangıç şartları ile çözüldüğü zaman $Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, \dots, W_0, W_1, W_2, W_3, \dots$ terimleri

$$Y_0 = -\sqrt{\frac{2k^2}{3}} - \frac{2k}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sin(kx)},$$

$$Y_1 = \frac{2}{3} \sqrt{2} (k^2)^{3/2} t \cot(kx) \csc(kx),$$

$$Y_2 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} k^5 t^2 (3 + \cos(2kx)) \csc^3(kx),$$

$$Y_3 = \frac{1}{27\sqrt{2}} k^6 \sqrt{k^2} t^3 (23 \cos(kx) + \cos(3kx)) \csc^4(kx),$$

$$Y_4 = -\frac{1}{216\sqrt{3}} k^9 t^4 (115 + 76 \cos(2kx) + \cos(4kx)) \csc^5(kx),$$

⋮

$$W_0 = \frac{k^3}{3} - \frac{2k^2}{3} \frac{1}{\sin^2(kx)},$$

$$W_1 = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} k^3 \sqrt{k^2} t \cot(kx) \csc^2(kx),$$

$$W_2 = -\frac{4}{9}k^6 t^2 (2 + \cos(2kx)) \csc^4(kx),$$

$$W_3 = \frac{4}{27} \sqrt{\frac{2}{3}} k^7 \sqrt{k^2 t^3} (11 \cos(kx) + \cos(3kx)) \csc^5(kx),$$

$$W_4 = -\frac{2}{81} k^{10} t^4 (33 + 26 \cos(2kx) + \cos(4kx)) \csc^6(kx),$$

⋮

olarak bulunur. Böylece (4.22) eşitliği ve yukarıda elde edilen $Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, \dots$ ve $W_0, W_1, W_2, W_3, \dots$ değerleri kullanılarak

$$u(x, t) = \lim_{p \rightarrow 1} Y = Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots, \quad (5.40a)$$

$$v(x, t) = \lim_{p \rightarrow 1} W = W_0 + W_1 + W_2 + W_3 + \dots, \quad (5.40b)$$

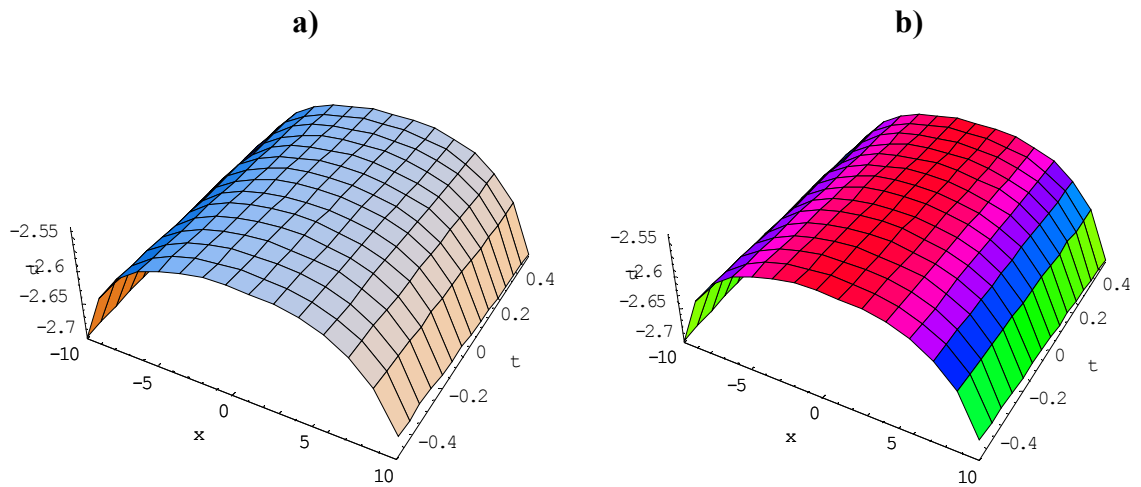
olacak şekilde (5.19) denkleminin yaklaşık çözümü yazılabilir.

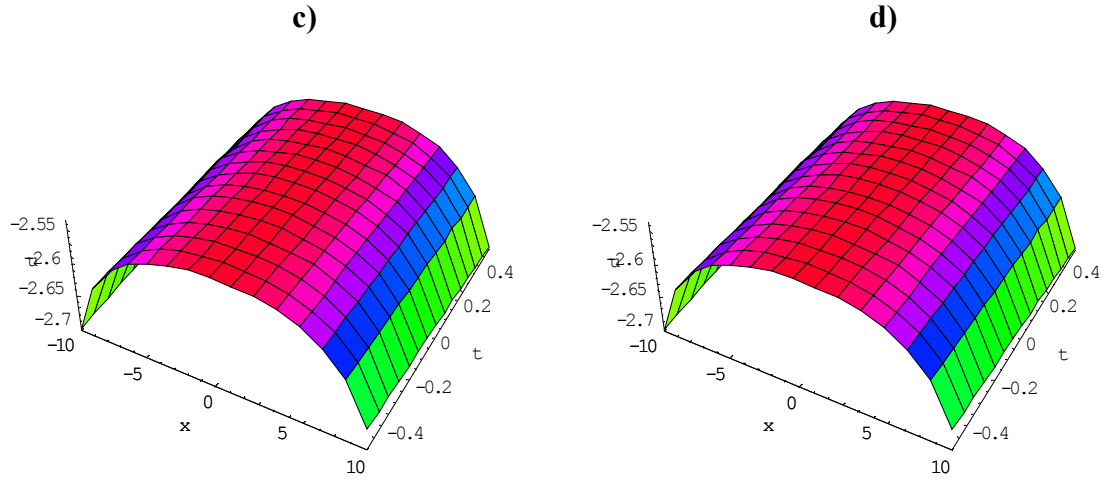
6. YARI ANALİTİK METOTLARIN SAYISAL SONUÇLARININ İRDELENMESİ

Bu bölümde, SRLW denkleminin (3.26) eşitliği ile tanımlanan $u(x,t)$ analitik çözümü ile (1+1) boyutlu saçılma terimli uzun dalga denkleminin (3.54) eşitliği ile tanımlanan $u(x,t)$ ve $v(x,t)$ çözümleri için ADM, HAM ve HPM kullanılarak elde edilen sayısal sonuçlarının üç boyutlu görünümü verilmiştir. Ayrıca bu sayısal sonuçların analitik çözüm ile arasındaki mutlak hata verileri tablolar ve grafikler üzerinde verilerek sayısal irdelenmesi yapılmıştır. Daha sonra HAM’ unda kullanılan ve elde edilen yaklaşık çözümün yakınsaklık aralığını belirlemede önemli bir rol oynayan keyfi h parametresinin grafiği çizilerek SRLW ve (1+1) boyutlu saçılma terimli uzun dalga denklemlerinin yaklaşık çözümleri için yakınsaklık aralığı belirlenmiştir. Belirlenen bu yakınsaklık aralığı içerisindeki noktalarda keyfi h parametresine değerler verilerek en iyi yaklaşımın h parametresinin hangi değerinde olduğu tablolarda gösterilmiştir.

İncelenen denklemlerin analitik çözümleri $u(x,t)$ ve $v(x,t)$ olmak üzere ADM, HAM ve HPM kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm serisi $\phi_n(x,t) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k(x,t)$ $\varphi_n(x,t) = \sum_{k=0}^{n-1} v_k(x,t)$, $n \geq 1$ şeklinde ifade edilebilir.

6.1. Sayısal Sonuçların Değerlendirilmesi





Şekil 10. SRLW denkleminin analitik çözümü ve yaklaşık çözümünün üç boyutlu görünümü **a)** SRLW denkleminin (3.26) çözüm fonksiyonu için analitik çözümün üç boyutlu görünümü, **b)** SRLW denkleminin ADM ile yaklaşık çözümünün üç boyutlu görünümü, **c)** SRLW denkleminin HAM ile yaklaşık çözümünün üç boyutlu görünümü ($h = -1$), **d)** SRLW denkleminin HPM ile yaklaşık çözümünün üç boyutlu görünümü ($k = 0.1, w = 0.05$)

Tablo 1. ADM kullanılarak SRLW denkleminin mutlak hatası ($k = 0.1, w = 0.05$)

$u(x, t) - \phi_4(x, t)$					
t_i / x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1	6.14628×10^{-9}	2.79449×10^{-8}	7.63524×10^{-8}	1.70213×10^{-7}	3.36293×10^{-7}
0.2	6.037×10^{-9}	2.69078×10^{-8}	7.26275×10^{-8}	1.60984×10^{-7}	3.17497×10^{-7}
0.3	5.95425×10^{-9}	2.59832×10^{-8}	6.91875×10^{-8}	1.52349×10^{-7}	2.99814×10^{-7}
0.4	5.89779×10^{-9}	2.51674×10^{-8}	6.60185×10^{-8}	1.44272×10^{-7}	2.8317×10^{-7}
0.5	5.86753×10^{-9}	2.44576×10^{-8}	6.31079×10^{-8}	1.36721×10^{-7}	2.67497×10^{-7}

Tablo 2. HAM kullanılarak SRLW denkleminin mutlak hatası ($k = 0.1, w = 0.05, h = -1$)

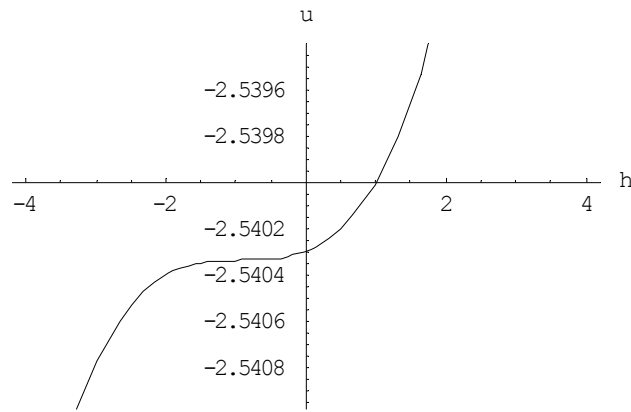
$u(x, t) - \phi_4(x, t)$					
t_i / x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1	6.14628×10^{-9}	2.79449×10^{-8}	7.63524×10^{-8}	1.70213×10^{-7}	3.36293×10^{-7}
0.2	6.037×10^{-9}	2.69078×10^{-8}	7.26275×10^{-8}	1.60984×10^{-7}	3.17497×10^{-7}
0.3	5.95425×10^{-9}	2.59832×10^{-8}	6.91875×10^{-8}	1.52349×10^{-7}	2.99814×10^{-7}
0.4	5.89779×10^{-9}	2.51674×10^{-8}	6.60185×10^{-8}	1.44272×10^{-7}	2.8317×10^{-7}
0.5	5.86753×10^{-9}	2.44576×10^{-8}	6.31079×10^{-8}	1.36721×10^{-7}	2.67497×10^{-7}

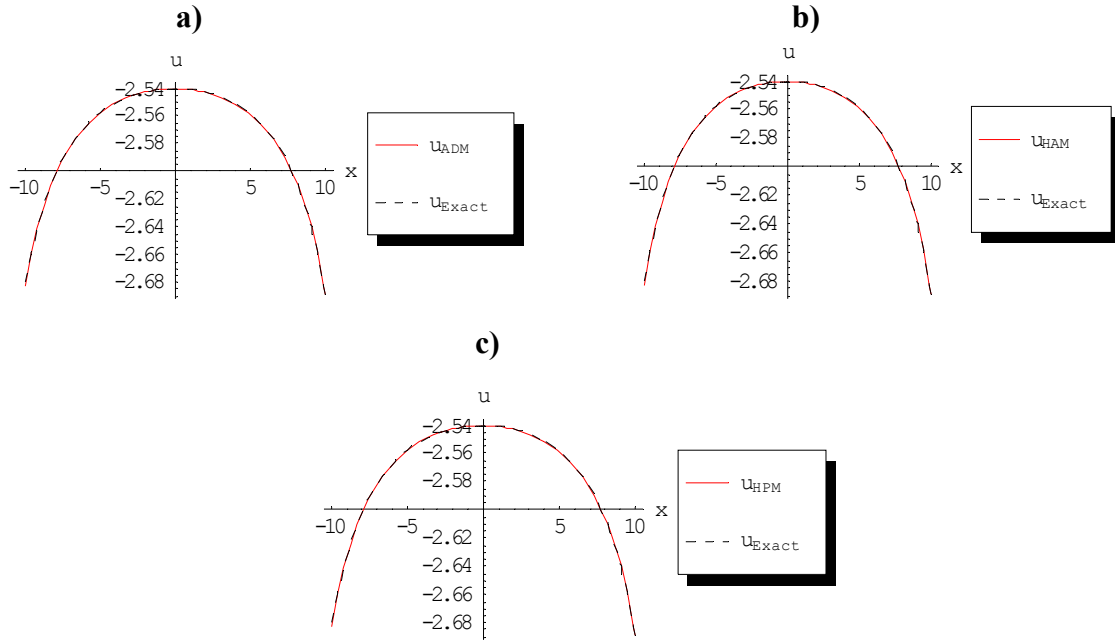
Tablo 3. HPM kullanılarak SRLW denkleminin mutlak hatası ($k = 0.1, w = 0.05$)

$u(x, t) - \phi_4(x, t)$					
t_i / x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1	6.14628×10^{-9}	2.79449×10^{-8}	7.63524×10^{-8}	1.70213×10^{-7}	3.36293×10^{-7}
0.2	6.037×10^{-9}	2.69078×10^{-8}	7.26275×10^{-8}	1.60984×10^{-7}	3.17497×10^{-7}
0.3	5.95425×10^{-9}	2.59832×10^{-8}	6.91875×10^{-8}	1.52349×10^{-7}	2.99814×10^{-7}
0.4	5.89779×10^{-9}	2.51674×10^{-8}	6.60185×10^{-8}	1.44272×10^{-7}	2.8317×10^{-7}
0.5	5.86753×10^{-9}	2.44576×10^{-8}	6.31079×10^{-8}	1.36721×10^{-7}	2.67497×10^{-7}

Tablo 4. h keyfi parametresinin farklı değerleri için SRLW denkleminin mutlak hatası ($x=0.5, k=0.1, w=0.05$)

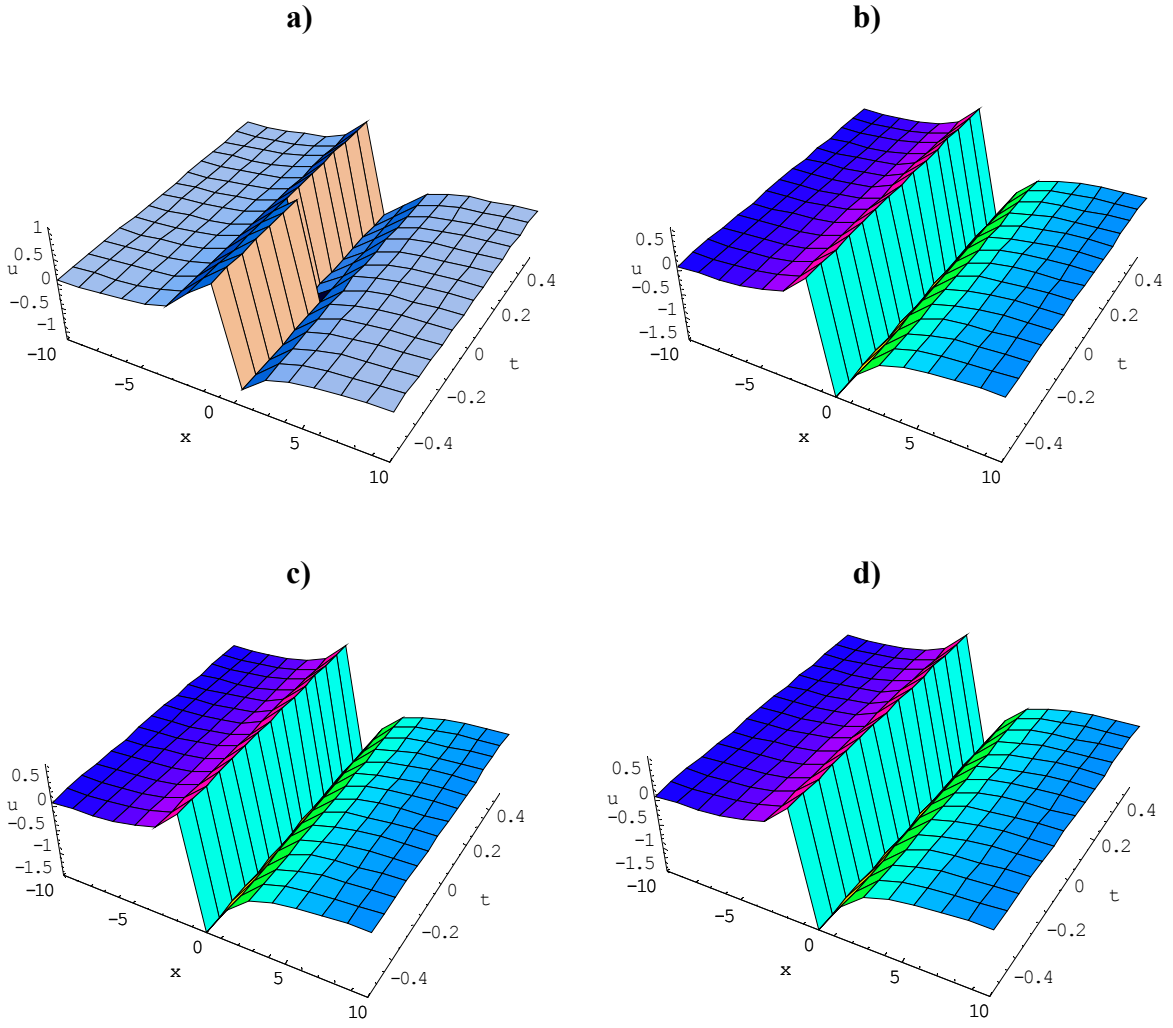
t	$h = -1.4$	$h = -1.2$	$h = -1$	$h = -0.8$	$h = -0.6$
0.1	7.29309×10^{-6}	2.04421×10^{-6}	3.36293×10^{-7}	1.8686×10^{-7}	1.88144×10^{-6}
0.2	7.07509×10^{-6}	1.96146×10^{-6}	3.17497×10^{-7}	1.93032×10^{-7}	1.90638×10^{-6}
0.3	6.86981×10^{-6}	1.88322×10^{-6}	2.99814×10^{-7}	1.99173×10^{-7}	1.9325×10^{-6}
0.4	6.67668×10^{-6}	1.80926×10^{-6}	2.8317×10^{-7}	2.05298×10^{-7}	1.95984×10^{-6}
0.5	6.49521×10^{-6}	1.73936×10^{-6}	2.67497×10^{-7}	2.11423×10^{-7}	1.98843×10^{-6}

**Şekil 11.** SRLW denkleminin $\phi_4(x, t)$ için h eğrisinin grafiği

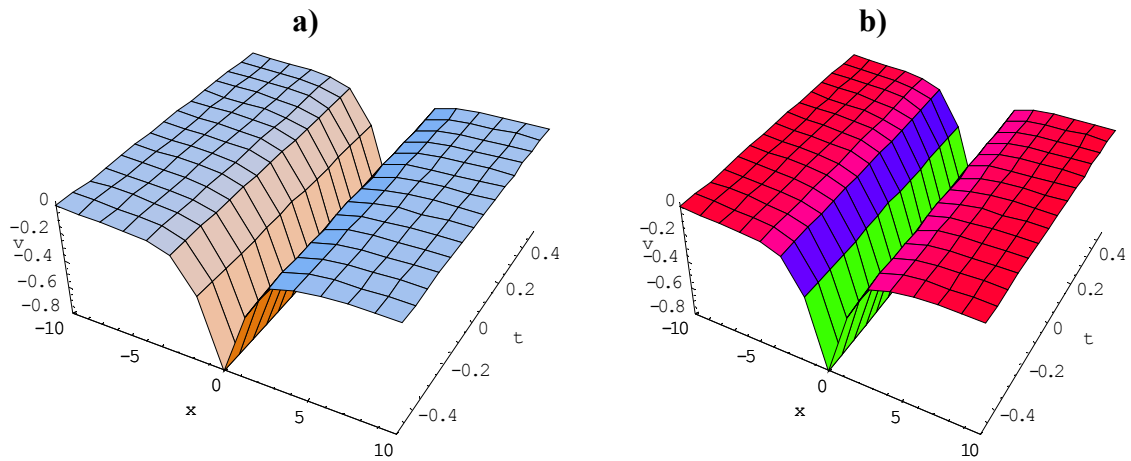


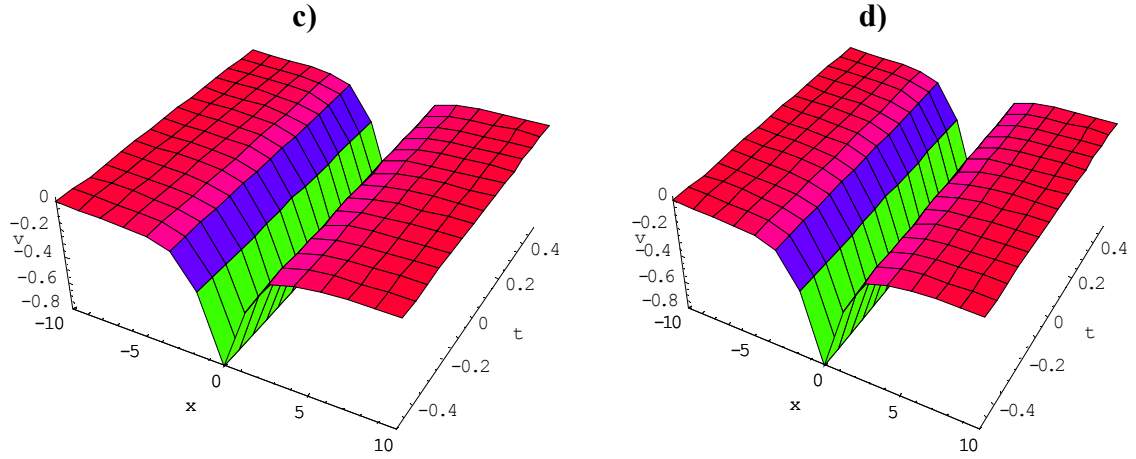
Şekil 12. SRLW denkleminin analitik çözümü ile ADM, HAM ve HPM ile elde edilen yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

(5.1) ve (5.2) eşitlikleri ile verilen SRLW denkleminin ADM, HAM ve HPM ile elde edilen sayısal sonuçları Şekil 10, Tablo 1–4 ve Şekil 12 de verilmiştir. Tablo 1–3 de görüldüğü gibi SRLW denkleminin $u(x, t)$ seri çözümünün sadece beş teriminde bile gerçek çözüme çok yakın değerler elde edilmiştir. Burada k ve w nın daha küçük seçilmesiyle çok daha yakın değerler elde edilebilir. Tablo 2 de görüldüğü gibi HAM ile hesaplanan sayısal sonuçlar için $h = -1$, $H(x, t) = 1$ alınmıştır. Keyfi h parametresinin bu şekilde seçimi ADM ve HPM ile elde edilen sayısal sonuçların, HAM ile elde edilen değerler ile örtüştüğü sonucuna ulaşılmıştır. Bu durum Tablo 1–3 ten görülebilir. Ayrıca HAM ile elde edilen seri çözümlerde gerçek çözüme en iyi yakınsamayı sağlamak için keyfi h parametresinin grafiği çizilerek seri çözümün yakınsaklık aralığı bulunabilir. Şekil 11 de (5.1) ve (5.2) ile verilen SRLW denklemi için HAM' u uygulanarak elde edilen seri çözümüne göre keyfi h parametresinin eğrisi çizilmiştir. Şekil 11 de görüldüğü gibi seri çözümün yakınsaklık aralığı yaklaşık olarak $-1.4 \leq h \leq -0.4$ aralığındadır. Bu aralık içerisinde h parametresine değerler verilerek en iyi yaklaşımın hangi noktada olabileceği hesaplanabilir. Bu durum Tablo 4 te verilmiştir. Bu tablolardan da anlaşılacağı üzere $h = -0.8$ değerinde gerçek çözüme en iyi yakınsama görülmüştür.



Şekil 13. (1+1) boyutlu saçılma terimli uzun dalga denkleminin $u(x, t)$ analitik çözüm ile yaklaşık çözümünün üç boyutlu görünümü, **a)** (1+1) boyutlu saçılma terimli uzun dalga denkleminin (3.54) $u(x, t)$ analitik çözümünün üç boyutlu görünümü, **b)** ADM ile yaklaşık çözümünün üç boyutlu görünümü, **c)** HAM ile yaklaşık çözümünün üç boyutlu görünümü ($h = -1$), **d)** HPM ile yaklaşık çözümünün üç boyutlu görünümü ($k = 0.05$)





Şekil 14. (1+1) boyutlu saçılma terimli uzun dalga denkleminin $v(x, t)$ analitik çözüm ile yaklaşık çözümünün üç boyutlu görünümü, **a)** (1+1) boyutlu saçılma terimli uzun dalga denkleminin (3.54) $v(x, t)$ analitik çözümünün üç boyutlu görünümü, **b)** ADM ile yaklaşık çözümünün üç boyutlu görünümü, **c)** HAM ile yaklaşık çözümünün üç boyutlu görünümü ($h = -1$), **d)** HPM ile yaklaşık çözümünün üç boyutlu görünümü ($k = 0.05$)

Tablo 5a. ADM kullanılarak (5.19) denklemleri için $u(x, t)$ çözümünün mutlak hatası ($k=0.05$)

$u(x, t) - \phi_5(x, t)$					
t_i / x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1	1.2581×10^{-6}	3.87396×10^{-5}	2.83479×10^{-4}	1.15266×10^{-3}	3.39836×10^{-3}
0.2	2.0051×10^{-8}	6.29048×10^{-7}	4.68495×10^{-6}	1.93698×10^{-5}	5.8017×10^{-5}
0.3	1.77212×10^{-9}	5.59566×10^{-8}	4.19365×10^{-7}	1.74439×10^{-6}	5.25564×10^{-6}
0.4	3.16462×10^{-10}	1.00255×10^{-8}	7.53771×10^{-8}	3.14524×10^{-7}	9.5053×10^{-7}
0.5	8.3126×10^{-11}	2.63868×10^{-9}	1.98778×10^{-8}	8.31025×10^{-8}	2.51619×10^{-7}

Tablo 5b. ADM kullanılarak (5.19) denklemleri için $v(x, t)$ çözümünün mutlak hatası ($k=0.05$)

$v(x, t) - \phi_5(x, t)$					
t_i / x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1	4.32968×10^{-5}	1.32509×10^{-3}	9.64143×10^{-3}	3.8995×10^{-2}	1.14397×10^{-1}
0.2	3.46135×10^{-7}	1.08242×10^{-5}	8.03653×10^{-5}	3.31274×10^{-4}	9.89373×10^{-4}
0.3	2.04169×10^{-8}	6.43278×10^{-7}	4.81076×10^{-6}	1.99692×10^{-5}	6.00425×10^{-5}
0.4	2.73602×10^{-9}	8.65338×10^{-8}	6.49553×10^{-7}	2.70605×10^{-6}	8.16522×10^{-6}
0.5	5.7514×10^{-10}	1.82323×10^{-8}	1.37168×10^{-7}	5.72716×10^{-7}	1.73187×10^{-6}

Tablo 6a. HAM kullanılarak (5.19) denklemleri için $u(x, t)$ çözümünün mutlak hatası ($k = 0.05, h = -1$)

$u(x, t) - \phi_5(x, t)$					
t_i / x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1	1.2581×10^{-6}	3.87396×10^{-5}	2.83479×10^{-4}	1.15266×10^{-3}	3.39836×10^{-3}
0.2	2.0051×10^{-8}	6.29048×10^{-7}	4.68495×10^{-6}	1.93698×10^{-5}	5.8017×10^{-5}
0.3	1.77212×10^{-9}	5.59566×10^{-8}	4.19365×10^{-7}	1.74439×10^{-6}	5.25564×10^{-6}
0.4	3.16462×10^{-10}	1.00255×10^{-8}	7.53771×10^{-8}	3.14524×10^{-7}	9.5053×10^{-7}
0.5	8.3126×10^{-11}	2.63868×10^{-9}	1.98778×10^{-8}	8.31025×10^{-8}	2.51619×10^{-7}

Tablo 6b. HAM kullanılarak (5.19) denklemleri için $v(x, t)$ çözümünün mutlak hatası ($k = 0.05, h = -1$)

$v(x, t) - \varphi_5(x, t)$					
t_i / x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1	4.32968×10^{-5}	1.32509×10^{-3}	9.64143×10^{-3}	3.8995×10^{-2}	1.14397×10^{-1}
0.2	3.46135×10^{-7}	1.08242×10^{-5}	8.03653×10^{-5}	3.31274×10^{-4}	9.89373×10^{-4}
0.3	2.04169×10^{-8}	6.43278×10^{-7}	4.81076×10^{-6}	1.99692×10^{-5}	6.00425×10^{-5}
0.4	2.73602×10^{-9}	8.65338×10^{-8}	6.49553×10^{-7}	2.70605×10^{-6}	8.16522×10^{-6}
0.5	5.7514×10^{-10}	1.82323×10^{-8}	1.37168×10^{-7}	5.72716×10^{-7}	1.73187×10^{-6}

Tablo 7a. HPM kullanılarak (5.19) denklemleri için $u(x, t)$ çözümünün mutlak hatası ($k = 0.05$)

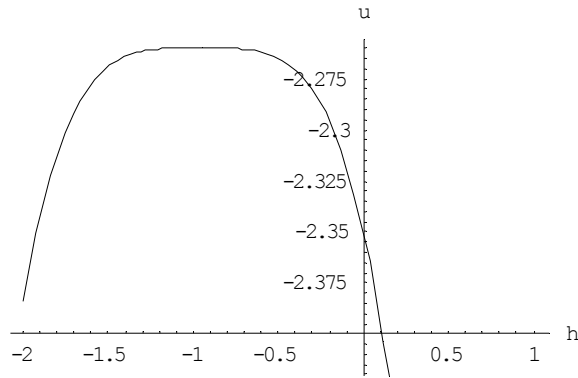
$u(x, t) - \phi_5(x, t)$					
t_i / x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1	1.2581×10^{-6}	3.87396×10^{-5}	2.83479×10^{-4}	1.15266×10^{-3}	3.39836×10^{-3}
0.2	2.0051×10^{-8}	6.29048×10^{-7}	4.68495×10^{-6}	1.93698×10^{-5}	5.8017×10^{-5}
0.3	1.77212×10^{-9}	5.59566×10^{-8}	4.19365×10^{-7}	1.74439×10^{-6}	5.25564×10^{-6}
0.4	3.16462×10^{-10}	1.00255×10^{-8}	7.53771×10^{-8}	3.14524×10^{-7}	9.5053×10^{-7}
0.5	8.3126×10^{-11}	2.63868×10^{-9}	1.98778×10^{-8}	8.31025×10^{-8}	2.51619×10^{-7}

Tablo 7b. HPM kullanılarak (5.19) denklemi için $v(x,t)$ çözümünün mutlak hatası ($k = 0.05$)

$v(x,t) - \phi_5(x,t)$					
t_i / x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1	4.32968×10^{-5}	1.32509×10^{-3}	9.64143×10^{-3}	3.8995×10^{-2}	1.14397×10^{-1}
0.2	3.46135×10^{-7}	1.08242×10^{-5}	8.03653×10^{-5}	3.31274×10^{-4}	9.89373×10^{-4}
0.3	2.04169×10^{-8}	6.43278×10^{-7}	4.81076×10^{-6}	1.99692×10^{-5}	6.00425×10^{-5}
0.4	2.73602×10^{-9}	8.65338×10^{-8}	6.49553×10^{-7}	2.70605×10^{-6}	8.16522×10^{-6}
0.5	5.7514×10^{-10}	1.82323×10^{-8}	1.37168×10^{-7}	5.72716×10^{-7}	1.73187×10^{-6}

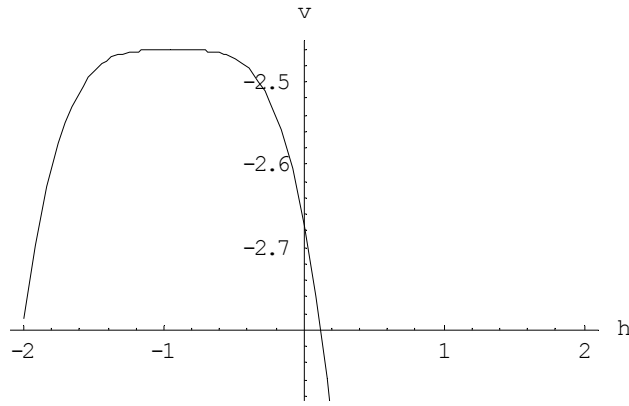
Tablo 8. h keyfi parametresinin farklı değerlerinde (5.19) denklemi için $u(x,t)$ çözümünün mutlak hatası ($x=0.5, k=0.05$)

t	$h = -1.4$	$h = -1.2$	$h = -1$	$h = -0.8$	$h = -0.6$
0.1	4.32928×10^{-1}	7.67244×10^{-2}	3.39836×10^{-3}	3.53561×10^{-6}	1.16117×10^{-2}
0.2	4.64443×10^{-2}	5.782×10^{-3}	5.8017×10^{-5}	1.04884×10^{-4}	7.04149×10^{-3}
0.3	1.4752×10^{-2}	1.543×10^{-3}	5.25564×10^{-6}	1.10083×10^{-4}	4.08067×10^{-3}
0.4	6.92358×10^{-3}	6.52767×10^{-4}	9.5053×10^{-7}	8.99609×10^{-5}	2.60907×10^{-3}
0.5	3.95614×10^{-3}	3.48139×10^{-4}	2.51619×10^{-7}	7.10151×10^{-5}	1.80073×10^{-3}

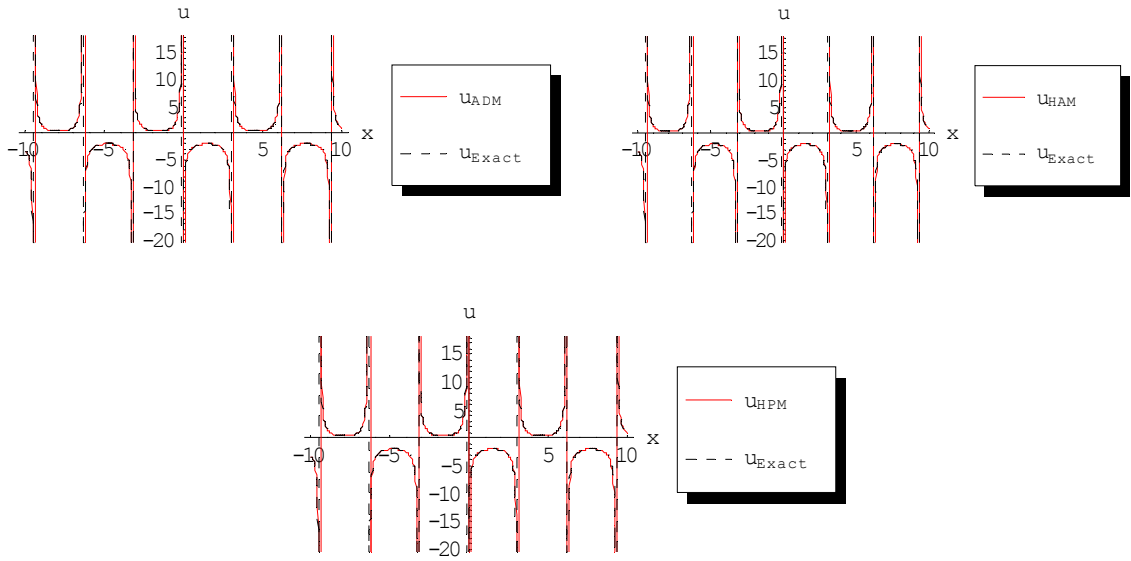
**Şekil 15.** (1+1) boyutlu saçılma terimli uzun dalga denkleminin $u(x,t)$ çözümünün $\phi_5(x,t)$ için h eğrisinin grafiği

Tablo 9. h keyfi parametresinin farklı değerlerinde (5.19) denklemi için $v(x, t)$ çözümünün mutlak hatası ($x=0.5, k=0.05$)

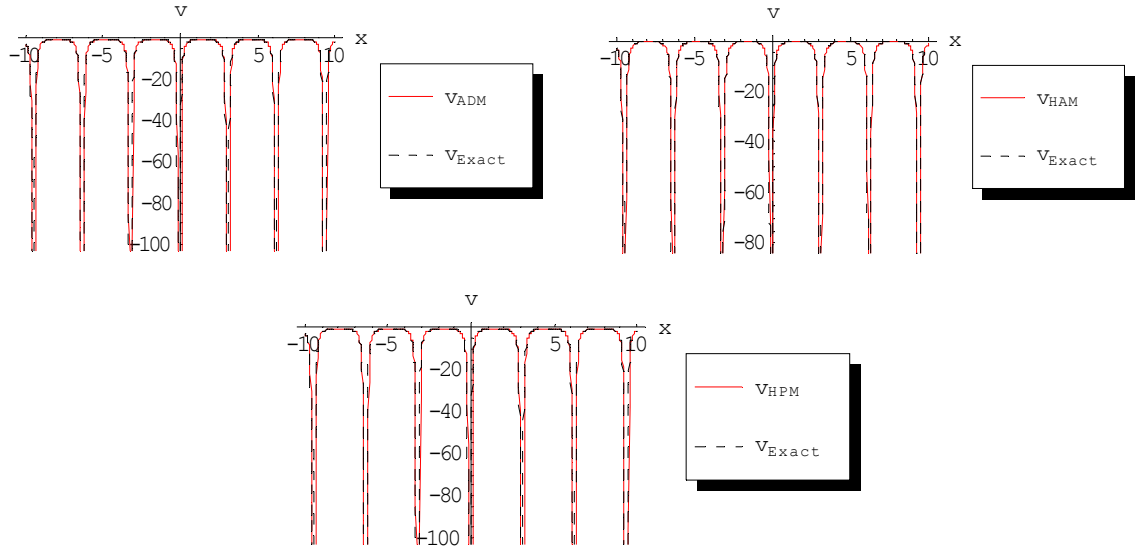
t	$h = -1.4$	$h = -1.2$	$h = -1$	$h = -0.8$	$h = -0.6$
0.1	8.74167	1.78628	1.14397×10^{-1}	3.2739×10^{-4}	4.37402×10^{-3}
0.2	3.96884×10^{-1}	5.71937×10^{-2}	9.89373×10^{-4}	2.58064×10^{-4}	2.40746×10^{-2}
0.3	7.68156×10^{-2}	9.19333×10^{-3}	6.00425×10^{-5}	9.33438×10^{-5}	1.16364×10^{-2}
0.4	2.556×10^{-2}	2.72214×10^{-3}	8.16522×10^{-6}	1.202×10^{-4}	6.10085×10^{-3}
0.5	1.12423×10^{-2}	1.10465×10^{-3}	1.73187×10^{-6}	9.67905×10^{-5}	3.535×10^{-3}



Şekil 16. (1+1) boyutlu saçılma terimli uzun dalga denkleminin $v(x, t)$ çözümünün $\varphi_5(x, t)$ için h eğrisinin grafiği



Şekil 17. (1+1) boyutlu saçılma terimli uzun dalga denkleminin $u(x, t)$ analitik çözümü ile ADM, HAM ve HPM ile elde edilen yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması



Şekil 18. (1+1) boyutlu dispersive uzun dalga denkleminin $v(x, t)$ analitik çözümü ile ADM, HAM ve HPM ile elde edilen yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

(5.19) ve (5.20) eşitlikleri ile verilen (1+1) boyutlu saçılma terimli uzun dalga denkleminin ADM, HAM ve HPM ile elde edilen sayısal sonuçları Şekil 13–18 ve Tablo 5–9 verilmiştir. Tablo 5–9 da görüldüğü gibi (1+1) boyutlu saçılma terimli uzun dalga denkleminin $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ seri çözümlerinin sadece altı terimi göz önüne alınarak analitik çözüme çok yakın değerler elde edilmiştir. Tablo 5–9 da görüleceği üzere ADM, HAM ve HPM ile elde edilen sayısal sonuçlar aynı çıkmıştır. Ancak bu durum $h = -1$ alındığı zaman gerçekleşebilen bir durumdur. Yani incelenen problem için $h = -1$ seçilirse ADM ve HPM’ unun sayısal sonuçları HAM ile bulunan değerlere yakınsar. HAM ile elde edilen seri çözümlerde gerçek çözüme en iyi yakınsamanın h keyfi parametresinin hangi noktasında olduğunu belirlemek için Şekil 15–16 da görüldüğü gibi h parametresinin grafiği çizilerek $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ seri çözümlerinin yakınsaklık aralıkları bulunmuştur. Bu şekillere göre $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ seri çözümlerinin yakınsaklık aralıkları yaklaşık olarak $-1.4 \leq h \leq -0.6$ aralığındadır. Bu aralık içerisinde h parametresine değerler verilerek en iyi yaklaşımın $h = -1$ noktasında olduğu Tablo 8-9 dan görülebilir.

Her iki örnek içinde keyfi h parametresinin bu şekilde seçilebilmesi HAM’ unun bir avantajı olarak görülebilir. Çünkü h parametresi elde edilen seri çözümün yakınsaklık aralığını belirlemede önemli bir rol oynar. Bu tespitten hareket ile gerek SRLW denkleminin gerek ise (1+1) boyutlu saçılma terimli uzun dalga denkleminin HAM ile bulunan seri çözümlerinde $h = -1$ seçilmesi ile Tablo 2–3 ve Tablo 6–7 den de görüldüğü

gibi ADM ve HPM' un aslında HAM' unun özel bir durumu olduğu söylenebilir. Bu durum [72–76] çalışmalarında da gösterilmiştir.

7. SONUÇ

Uygulamalı bilimlerde, üzerinde çalışılan olayı matematiksel olarak modelleyerek bu modelin analitik çözümleri hakkında bilgi sahibi olmak çok önemlidir. Çünkü bu çözümler modellenen olayın karakteri hakkında bilgi verir. Bu yüzden lineer veya lineer olmayan adi ve kısmi diferensiyel denklemlerin analitik çözümlerini bulmak fizik, kimya, biyoloji ve mühendislik alanlarında oldukça önemli bir yere sahiptir. Son zamanlarda özellikle uygulamalı matematik alanında çalışan bilim adamları lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin hareket eden dalga çözümleri üzerine odaklanmışlardır. Elde edilen bu dalga çözümleri, dalganın yapısı ve dalgaların birbirleri ile olan etkileşimleri gibi birçok konuda uygulama sahasında çalışan bilim adamlarına ilham vermektedir. Böyle bir ihtiyaçtan dolayı lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin analitik çözümlerini veren birçok etkili metot geliştirilmiştir. Bu metotların çoğu sadece lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlere uygulanabilir. Çünkü bu metotların işleyişi “dengeleme terimi” olarak adlandırılan ve en yüksek mertebeden lineer terim ile en yüksek mertebeden lineer olmayan terimin karşılaştırılmasına dayanır.

Lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin dalga çözümlerini bulmak için kullanılan ve ikinci bölümde analizleri yapılan metotlara bakıldığında temelde hepsi, ele alınan kısmi diferensiyel denklemin bir değişken dönüşümü altında adi bir diferensiyel denkleme dönüştürerek çözüme ulaşma esasına dayanır. Bu metotların birbirlerinden farklı olan tek tarafı seçilen Riccati diferensiyel denkleminin ve dolayısıyla kullanılan çözüm fonksiyonunun farklı olmasıdır. Ancak bazı metotlarda Riccati diferensiyel denklemin yerine farklı denklemler alınarak çözüme ulaşılmıştır. Örneğin, $\frac{G'}{G}$ açılım metodunda

Riccati diferensiyel denkleminin yerine ikinci mertebeden sabit katsayılı adi bir diferensiyel denklemin kullanılmıştır. Bu şekilde denklemin seçilmesi konusunda bilim adamlarının özgür olması, bu çalışmada bahsedilmeyen fakat literatürde *direkt cebirsel metot* [77] ve *keyfi denklem metodu* [78] olarak geçen metotların ortaya çıkmasına yol açmıştır. Bahsedilen metotların hepsi lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin hareket eden dalga çözümlerini verir. Bu çözümler içerisinde periyodik olan dalga çözümleri ayrı bir yer tutar. Bu metotların hepsi dengeleme terimini bulma esasına dayandığından dengeleme teriminin negatif olması durumunda ortaya çıkabilecek bazı güçlükler bu metotların bir

çıkamazı olarak görülebilir. Ancak bu durum ile ilgili yapılan ve yapılmakta olan çalışmalar da vardır [37].

Lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin çözümleri lineer denklemlere göre daha zordur. Bu yüzden ikinci bölümde bahsedilen metotlar ve literatürde var olan daha başka metotlar ile analitik çözümleri elde edilemeyen lineer olmayan denklemlerin, seri çözümlerinin elde edilebildiği ve dördüncü bölümde analizleri yapılan yarı analitik metotlar olarak da bilinen bazı sayısal yöntemler de vardır. Bu tür metotlarda çözüm seri formunda aranır. Yarı analitik metotlar, ele alınan problem için verilen bir başlangıç şartından hareketle serinin diğer terimlerini bulma esasına dayanır. Bu noktada karşımıza serinin yakınsaklığı kavramı çıkar. Bundan dolayı bu tip sayısal metotların yakınsaklık analizine ihtiyaç duyulur. Bu yakınsaklık analizi teorik olarak yapılacağı gibi incelenen problemin seri çözümünde bağımsız değişkenlere belirli bir aralıkta verilen değerler ile elde edilen sayısal sonuçların, problemin gerçek çözümü ile arasındaki farkın mutlak değerine bakılarak ta çözümün yakınsaklığı hakkında bilgi edinilebilir. Bazı yarı analitik metotlar ile elde edilen seri çözümlerde serinin sadece birkaç teriminde bile yakınsamanın çok iyi olduğu görülebilir. Literatürde var olan ve uygulamalı matematikçiler tarafından sıkça kullanılan ADM, HAM ve HPM bu metotlara örnek olarak verilebilir. Bu üç metot da lineer veya lineer olmayan adi ve kısmi diferensiyel denklemlere başarılı bir şekilde uygulanmıştır.

Lineer olmayan denklemlerin yarı analitik metotlar ile çözümü yapılırken denklemdaki lineer olmayan terimin sayısı ve lineer olmayanlığın kuvvetliliği çözüm esnasında bazı zorluklar çıkarabilir. Bu yüzden ADM kullanılırken bu zorlukları aşmak için adomian polinomları kullanılır. Lineer olmayanlığın kuvvetli olduğu denklemlerin sayısal çözümü yapılırken seri çözümün gerçek çözüme yakınsaması için bazen serinin birkaç teriminin hesaplanması yetmeyebilir ve daha fazla terime ihtiyaç duyulabilir. Bu durum farklı sayısal metotların doğmasına sebep olmuştur.

HAM kullanılarak yapılan seri çözümlerde keyfi bir h parametresi ve keyfi bir $H(x,t)$ fonksiyonu kullanılır. Bu durum HAM için bir avantaj olarak görülebilir. Çünkü elde edilen seri çözümün yakınsaklığı keyfi h parametresine göre yapılır. Bunun için h parametresinin grafiği çizilerek grafikte yatay doğrunun içinde bulunduğu h aralığı seri çözümün yakınsaklık aralığı olarak alınır [64]. Yani gerçek çözüme en iyi yakınsama bu aralıkta h parametresine verilen değerler ile elde edilir. Bu aralık içinde h değerinin hangi noktada en iyi yakınsamayı gösterdiğini ise bu yakınsaklık aralığında h parametresine

verilen değerler ile elde edilen sayısal sonuçların, gerçek çözüm ile farkının mutlak değeri hesaplanarak görölebilir. Bu işlemler yapılırken genellikle $H(x,t)=1$ alınır. Ancak keyfi $H(x,t)$ fonksiyonunun farklı seçimlerinde gerçek özümeye yakınsamanın nasıl olabileceği ayrıca incelenebilir. HAM' unun bir diğer avantajı ise çözüm serisinin terimlerini bulmak için L lineer operatörünün özgürce belirlenebilmesidir [79,80].

KAYNAKLAR

- [1] **Serway, R., Jewett, J.**, 2004. Physics for Scientists and Engineers, 6th Edition, Thomson, USA.
- [2] **Russell, J.S.**, 1844. Report on Waves, 14th meeting of the British Association for the Advancement of Science, London: BAAS.
- [3] **Zabusky, N.J., Kruskal, M.D.**, 1965. Interaction of solitons in collisionless plasma and the recurrence of initial states, *Physical Review Letters*, **15**, 240-243.
- [4] **Debnath L.**, 1997. Nonlinear Partial Differential Equations for Scientist and Engineers, Birkhauser, Boston, MA.
- [5] **Wazwaz, A.M.**, 2002. Partial Differential Equations: Methods and Applications, Balkema, Rotterdam.
- [6] **Hirota, R.**, 1980. Direct methods in soliton theory, In Solitons (Bullogh, R.K. and Caudrey, P.J., eds). Springer, Berlin.
- [7] **Nimmo, J.J.C., Freeman, N.C.**, 1984. The use of Bäcklund transformations in obtaining N-soliton solutions in wronskian form, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **17**, 1415-1424.
- [8] **Shang, Y., Guo, B.**, 2003. Analysis of chebyshev pseudospectral method for multi-dimensional generalized SRLW equations, *Applied Mathematics and Mechanics*, **24**, 1168-1183.
- [9] **Guo, S., Zhou, Y.**, 2010. The extended $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method and its applications to the Whitham–Broer–Kaup–Like equations and coupled Hirota–Satsuma KdV equations, *Applied Mathematics and Computation*, **215**, 3214-3221.
- [10] **Iskandar, L., Jain, P.C.**, 1980. Numerical solutions of the improved Boussinesq equation, *Proceedings of the Indian Academy of Sciences*, **89**, 171-181.
- [11] **Soerensen, M.P., Christensen, P.L. and Lomdahl P.S.**, 1984. Solitary waves on nonlinear elastic rods, *Journal of the Acoustical Society of America*, **76**, 871-879.
- [12] **Bogolubsky, J.L.**, 1977. Some examples of inelastic soliton interaction, *Computer Physics Communications*, **13**, 149-155.
- [13] **Chen, L.**, 1998. Stability and instability of solitary waves for generalized symmetric regularized long wave equations, *Physica D*, **118**, 53-68.

- [14] **Guo, B.**, 1987. The spectral method for symmetric regularized wave equations, *Journal of Computational Mathematics*, **5**, 297-306.
- [15] **Zheng, J.**, 1989. The pseudo spectral collocation method for the generalized SRLW equations, *Mathematics Numerical Sinica*, **11**, 64-72.
- [16] **Guo, B.**, 1992. The existence of global solutions and "blow up" phenomena for a system of multidimensional symmetric regularized wave equations, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, **8**, 59-72.
- [17] **Shang, Y. and Li, Z.**, 1999. The Fourier spectral methods for solving the multidimensional generalized symmetric regularized long wave equations, *Numerical Mathematics: A Journal of Chinese Universities*, **21**, 48-60.
- [18] **Zheng, X., Chen, Y. and Zhang, H.** 2003. Generalized extended tanh-function method and its application to (1+1)-dimensional dispersive long wave equation, *Applied Physics Letters A*, **311**, 145-157.
- [19] **Hu, X.B. and Ma, W.X.**, 2002. Application of Hirota's bilinear formalism to the Toeplitz lattice-some special soliton-like solutions, *Physics Letters A*, **293**, 161-165.
- [20] **Shang, Y.**, 2007. Bäcklund transformation, Lax pairs and explicit exact solutions for the shallow water waves equation, *Applied Mathematics and Computation*, **187**, 1286-1297.
- [21] **Abourabia, A.M., El Horbaty, M.M.**, 2006. On solitary wave solutions for the two-dimensional nonlinear modified Kortweg–de Vries–Burger equation, *Chaos, Solitons & Fractals*, **29**, 354-364.
- [22] **Bock, T.L., Kruskal, M.D.**, 1979. A two-parameter Miura transformation of the Benjamin-Ono equation, *Physics Letters A*, **74**, 173-176.
- [23] **Drazin, P.G., Jhonson, R.S.**, 1989. Solitons: An Introduction, Cambridge University Press, Cambridge.
- [24] **Matveev, V.B., Salle, M.A.**, 1991. Darboux transformations and solitons, Springer, Berlin.
- [25] **Cariello, F., Tabor, M.**, 1989. Painlevé expansions for nonintegrable evolution equations, *Physica D*, **39**, 77-94.
- [26] **Fan, E.**, 2000. Two new applications of the homogeneous balance method, *Physics Letters A*, **265**, 353-357.
- [27] **Clarkson, P.A.**, 1989. New Similarity Solutions for the Modified Boussinesq Equation, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **22**, 2355-2367.

- [28] **Chuntao, Y.**, 1996. A simple transformation for nonlinear waves, *Physics Letters A*, **224**, 77-84.
- [29] **Hereman, W., Korpel, A. and Banerjee, P.P.**, 1985. A general physical approach to solitary wave construction from linear solutions, *Wave Motion*, **7**, 283-289.
- [30] **Hereman, W., Takaoka, M.**, 1990. Solitary wave solutions of nonlinear evolution and wave equations using a direct method and MACSYMA, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **23**, 4805-4822.
- [31] **Lan, H., Wang, K.**, 1990. Exact solutions for two nonlinear equations, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **23**, 3923-3928.
- [32] **Lou, S., Huang, G. and Ruan, H.**, 1991. Exact solitary waves in a convecting fluid, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **24**, L587-L590.
- [33] **Malfliet, W.**, 1992. Solitary wave solutions of nonlinear wave equations, *American Journal of Physics*, **60**, 650-654.
- [34] **Wazwaz, A.**, 2005. The tanh method: Solitons and periodic solutions for the Dodd–Bullough–Mikhailov and the Tzitzeica–Dodd–Bullough equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, **25**, 55-63.
- [35] **Wazwaz, A.**, 2006. Solitons and periodic solutions for the fifth-order KdV equation, *Applied Mathematics Letters*, **19**, 1162-1167.
- [36] **Wazwaz, A.**, 2007. New solitary wave solutions to the modified Kawahara equation, *Physics Letters A*, **360**, 588-592.
- [37] **Parkes, E.J., Duffy, B.R.**, 1996. An automated tanh-function method for finding solitary wave solutions to non-linear evolution equations, *Computer Physics Communications*, **98**, 288-300.
- [38] **Fan, E.**, 2000. Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations, *Physics Letters A*, **277**, 212-218.
- [39] **Elwakil, S.A., El-labany, S.K., Zahran, M.A. and Sabry, R.**, 2002. Modified extended tanh-function method for solving nonlinear partial differential equations, *Physics Letters A*, **299**, 179-188.
- [40] **Xia T., Lü Z. and Zhang H.**, 2004. Symbolic computation and new families of exact soliton-like solutions of Konopelchenko–Dubrovsky equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, **20**, 561-566.
- [41] **Zheng, X., Chen, Y. and Zhang, H.**, 2003. Generalized extended tanh-function method and its application to (1+1)-dimensional dispersive long wave equation, *Physics Letters A*, **311**, 145-157.

- [42] **Chen, H., Zhang, H.**, 2004. New multiple soliton solutions to the general Burgers-Fisher equation and the Kuramoto-Sivashinsky equation, *Chaos, Solitons & Fractals*, **19**, 71-76.
- [43] **El-Wakil S.A., Abdou M.A.**, 2008. New exact travelling wave solutions of two nonlinear physical models, *Nonlinear Analysis*, **68**, 235–245.
- [44] **Fu, Z., Liu, S., Liu, S. and Zhao, Q.**, 2001. New Jacobi elliptic function expansion and new periodic solutions of nonlinear wave equations, *Physics Letters A*, **290**, 72-76.
- [45] **Shen S., Pan, Z.**, 2003. A note on the Jacobi elliptic function expansion method, *Physics Letters A*, **308**, 143-148.
- [46] **Chen, H.T., Hong-Qing, Z.**, 2004. New double periodic and multiple soliton solutions of the generalized (2 + 1)-dimensional Boussinesq equation, *Chaos, Solitons & Fractals*, **20**, 765-769.
- [47] **Chen, Y., Wang, Q. and Li B.**, 2004. Jacobi elliptic function rational expansion method with symbolic computation to construct new doubly periodic solutions of nonlinear evolution equations, *Zeitschrift für Naturforschung A*, **59**, 529-536.
- [48] **Chen, Y., Yan, Z.**, 2006. The Weierstrass elliptic function expansion method and its applications in nonlinear wave equations. *Chaos, Solitons & Fractals*, **29**, 948-964.
- [49] **He, J.H., Wu, X.H.**, 2006. Exp-function method for nonlinear wave equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, **30**, 700-708.
- [50] **Xu, F.**, 2008. Application of Exp-function method to Symmetric Regularized Long Wave (SRLW) equation, *Physics Letters A*, **372**, 252-257.
- [51] **Chun, C.**, 2008. Solitons and periodic solutions for the fifth-order KdV equation with the Exp-function method, *Physics Letters A*, **372**, 2760-2766.
- [52] **Wu, X.H., He, J.H.**, 2007. Solitary solutions, periodic solutions and compacton-like solutions using the Exp-function method, *Computers & Mathematics with Applications*, **54**, 966–986.
- [53] **Wang, M., Li, X. and Zhang, J.**, 2008. The $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics, *Physics Letters A*, **372**, 417-423.
- [54] **Guo, S., Zhou, Y.**, 2010. The extended $\left(\frac{G'}{G}\right)$ - expansion method and its applications to the Whitham–Broer–Kaup–Like equations and coupled Hirota–Satsuma KdV equations, *Applied Mathematics and Computation*, **215**, 3214-3221.

- [55] Lü, H.L., Liu, X.Q. and Niu, L., 2009. A generalized $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method and its applications to nonlinear evolution equations, *Applied Mathematics and Computation*, (in press).
- [56] Adomian G., 1994. Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method, Kluwer Academic Publishers, Boston, MA.
- [57] Adomian, G., 1990. A Review of the Decomposition Method and some Recent Results for Nonlinear Equations, *Mathematical and Computer Modelling*, **13**, 17-43.
- [58] Adomian, G., Rach, R., 1990. Equality of Partial Solutions in the Decomposition Method for Linear or Nonlinear Partial Differential Equations, *Computers & Mathematics with Applications*, **19**, 9-12.
- [59] Kaya, D., El-Sayed, S.M., 2003. An Application of the Decomposition Method for the Generalized KdV and RLW Equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, **17**, 869-877.
- [60] Kaya, D., El-Sayed, S.M., 2003. On a Generalized fifth Order KdV Equations, *Physics Letters A*, **310**, 44-51.
- [61] Kaya, D., Inan, I., 2001. On a Solution of a Burgers Like Nonlinear Equation by Decomposition Method, *Menemui Mathematics*, **23**, 17-22.
- [62] Liao, S.J., 1992. The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems, PhD Thesis, Shanghai Jiao Tong University.
- [63] Liao, S.J., 2003. Beyond perturbation: introduction to the homotopy analysis method, Boca Raton: Chapman Hall CRC/Press.
- [64] Wang, Z., Zou, L. and Zhang, H., 2007. Applying homotopy analysis method for solving differential-difference equation, *Physics Letters A*, **369**, 77-84.
- [65] Abbasbandy, S., 2006. The application of homotopy analysis method to nonlinear equations arising in heat transfer, *Physics Letters A*, **360**, 109–113.
- [66] Motsa, S.S., Sibanda, P. and Shateyi, S. 2009. A new spectral-homotopy analysis method for solving a nonlinear second order BVP, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, (in press).
- [67] He, J.H., 1999. Homotopy perturbation technique, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **178**, 257–262.
- [68] Liao, S.J., 1995. An approximate solution technique not depending on small parameters: A special example, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **30**, 371-380.

- [69] **He, J.H.**, 2000. A coupling method of homotopy technique and a perturbation technique for nonlinear problems, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **35**, 37–43.
- [70] **Inc, M., Ugurlu, Y.**, 2007. Numerical simulation of the regularized long wave equation by He's homotopy perturbation method, *Physics Letters A*, **369**, 173–179.
- [71] **He J.H.**, 2004. The homotopy perturbation method for nonlinear oscillators with discontinuities, *Applied Mathematics and Computation*, **151**, 287–292.
- [72] **Liang, S., Jeffrey, D.J.**, 2009. Comparison of homotopy analysis method and homotopy perturbation method through an evolution equation, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **14**, 4057-4064.
- [73] **Ellahi, R., Abbasbandy, S., Hayat, T. and Zeeshan, A.**, 2009. On Comparison of Series and Numerical Solutions for Second Painlevé Equation, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, (in press).
- [74] **Allan, F.M.**, 2007. Derivation of the Adomian decomposition method using the homotopy analysis method, *Applied Mathematics and Computation*, **190**, 6-14.
- [75] **Liao, S.**, 2005. Comparison between the homotopy analysis method and homotopy perturbation method, *Applied Mathematics and Computation*, **169**, 1186-1194.
- [76] **Bataineh, A.S., Noorani, M.S.M. and Hashim, I.**, 2007. Solutions of time-dependent Emden–Fowler type equations by homotopy analysis method, *Physics Letters A*, **371**, 72–82
- [77] **Zhang, H.**, 2009. A direct algebraic method applied to obtain complex solutions of some nonlinear partial differential equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, **39**, 1020-1026.
- [78] **Zhang, B. Liu, Z. and Mao, J.**, 2009. New exact solutions for mCH and mDP equations by auxiliary equation method, *Applied Mathematics and Computation*, (in press).
- [79] **Odibat, Z., Momani, S. and Xu, H.**, 2010. A reliable algorithm of homotopy analysis method for solving nonlinear fractional differential equations, *Applied Mathematical Modelling*, **34**, 593-600.
- [80] **Yücel, U.**, 2008. Homotopy analysis method for the sine-Gordon equation with initial conditions, *Applied Mathematics and Computation*, **203**, 387-395.

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Elazığ'da doğdum. İlk ve orta öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 1999 yılında Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne kayıt yaparak lisans öğrenimime başladım. 2003 yılında mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünün açmış olduğu Matematik Anabilim Dalının Uygulamalı Matematik programında tezli yüksek lisansa başladım ve 2005 yılı bahar döneminde mezun oldum. 2005 yılı güz döneminde Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünün açmış olduğu Matematik Anabilim Dalının Uygulamalı Matematik programında doktora başladım. 2007 yılı güz döneminde Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak göreve başladım. Halen araştırma görevlisi olarak çalışmaktayım.