

T.C.
MARMARA ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
EKONOMETRİ ANABİLİM DALI
EKONOMETRİ BİLİM DALI

SEMİPARAMETRİK GEÇİŞ MODELLERİ VE BİR UYGULAMA

Doktora Tezi

ENGİN BEKAR

İstanbul, 2018

T.C.
MARMARA ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
EKONOMETRİ ANABİLİM DALI
EKONOMETRİ BİLİM DALI

SEMİPARAMETRİK GEÇİŞ MODELLERİ VE BİR UYGULAMA

Doktora Tezi

ENGİN BEKAR

Danışman: PROF. DR. SELAHATTİN GÜRİŞ

İstanbul, 2018

MARMARA ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

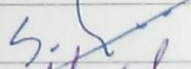
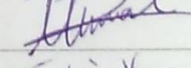
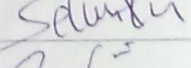
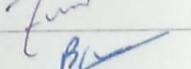
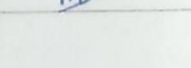
TEZ ONAY BELGESİ

EKONOMETRİ Anabilim Dalı EKONOMETRİ Bilim Dalı DOKTORA öğrencisi ENGİN BEKAR'nın SEMİPARAMETRİK GEÇİŞ MODELLERİ VE BİR UYGULAMA adlı tez çalışması, Enstitümüz Yönetim Kurulunun 22.03.2018 tarih ve 2018-8/33 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Savunma Tarihi 18 / 04 / 2018

Öğretim Üyesi Adı Soyadı

İmzası

1.	Tez Danışmanı	Prof. Dr. SELAHATTİN GÜRİŞ	
2.	Jüri Üyesi	Prof. Dr. MUSTAFA KEMAL BEŞER	
3.	Jüri Üyesi	Doç. Dr. SELİN DEVRİM ÖZDEMİR	
4.	Jüri Üyesi	Dr. Öğr. Üyesi TURGUT ÜN	
5.	Jüri Üyesi	Prof. Dr. BURAK GÜRİŞ	

GENEL BİLGİLER

İsim ve Soyadı	: Engin Bekar
Anabilim Dalı	: Ekonometri
Programı	: Ekonometri
Tez Danışmanı	: Prof. Dr. Selahattin Güriş
Tez Türü ve Tarihi	: Doktora - Nisan 2018
Anahtar Kelimeler	: Doğrusal Olmayan Zaman Serisi, Semiparametrik Yaklaşım, Rejim Geçiş Modelleri, Enflasyon, Öngörü

ÖZET

SEMİPARAMETRİK GEÇİŞ MODELLERİ VE BİR UYGULAMA

Rejimler arası geçiş modelleri, doğrusal olmayan serilerin modellenmesinde sıklıkla kullanılmaktadır. Son yıllara kadar çoğunlukla, rejim geçişlerinin iyi tanımlanmış matematiksel fonksiyonlarla yaklaştırıldığı parametrik yaklaşımın kullanıldığı görülmektedir. Son iki yıldır geçiş modellerine, parametrik olmayan ve semi parametrik yaklaşımlar da uygulanmaya başlamıştır. Bu durumda, geçiş fonksiyonu parametrik olmayan bir biçimde belirlenmektedir ve belli bir kalıba zorlanmamaktadır. Çalışmada, 1995 Ocak - 2008 Aralık dönemi için TÜFE(1987=100) bazlı enflasyon serisi, parametrik geçiş modelinin yanı sıra semiparametrik geçiş modeli ile de tahmin edilmiştir ve her iki modelin öngörü başarıları karşılaştırılmıştır.

GENERAL KNOWLEDGE

Name and Surname	: Engin Bekar
Field	: Econometrics
Programme	: Econometrics
Supervisor	: Professor Selahattin Güriş
Degree Awarded and Date	: Ph.D. - April 2018
Keywords	: Nonlinear Time Series, Semiparametric Approach, Transition Models, Inflation, Forecasting

ABSTRACT

SEMIPARAMETRIC TRANSITION MODELS AND AN APPLICATION

Transition models are frequently used in the modeling of nonlinear series. Until recent years, it is seen that the parametric approach in which regime transitions are approximated with well-defined mathematical functions is often used. Over the last two years, nonparametric and semiparametric approaches have also been introduced into the transition models. In this case, the transition function is estimated in a nonparametric manner. In this study, the inflation series based on TUFE (1987 = 100) for the period January 1995 - December 2008, is also estimated via semi parametric transition model in addition to the parametric approach and their forecasting performances are compared.

ÖNSÖZ

Geçmişten bugüne kadar, öğrettikleriyle, örnek tutum ve davranışlarıyla gelişimimize katkı sağlayan tüm hocalarımıza ayrı ayrı şükranlarımı sunarım. Her türlü desteği için değerli oda arkadaşım Arş. Gör. Şaban Kızılarıslan'a teşekkür eder ve doktora çalışmasını en kısa zamanda başarıyla tamamlamasını dilerim. Ayrıca bu çalışmanın gerçekleştirilmesine, gerek teorik gerekse uygulamalı çalışma yaparak literatür oluşturmak suretiyle geçmişten bugüne katkı sağlayan tüm bilim insanlarına ayrı ayrı teşekkür ederim. Her türlü destekleri için ise aileme çok teşekkür ederim ve bu çalışmanın konuyla ilgili herkese faydalı olmasını dilerim.

İstanbul, 2018

Engin BEKAR

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No.
TABLO LİSTESİ	ix
ŞEKİL LİSTESİ	x
KISALTMALAR	xi
1. GİRİŞ	1
2. GEÇİŞ VE REJİM DEĞİŞİM MODELLERİ	3
2.1. Doğrusal Dışılık ve Doğrusallık Testleri	3
2.1.1. Grafik Yöntemler	4
2.1.2. McLeod - Li Testi	5
2.1.3. BDS Doğrusal Dışılık Testi	6
2.1.4. Ramsey RESET Testi	7
2.2. Eşik Otoregresif Modeller (TAR)	8
2.2.1. TAR ve SETAR Modelleri	8
2.2.1.1. Model Tahmininde Tsay Yaklaşımı (1989)	9
2.2.1.2. Model Tahmininde Hansen Yaklaşımı (1996)	11
2.2.2. TAR ve SETAR Modellerinde Doğrusallık Testi ve Parametre Tahmini	15
2.2.2.1. TAR Modelinin Doğrusallığa Karşı Testi	15
2.2.2.2. Gecikme Parametresinin Seçimi	16
2.2.2.3. Eşik Parametresinin Seçimi	17
2.2.2.4. Parçalı Doğrusal Otoregresif Parametrelerin Tahmini ..	20
2.3. Yumuşak Geçişli Otoregresif Modeller (STAR)	21
2.3.1. Lojistik Yumuşak Geçişli Otoregresif Model (LSTAR)	22
2.3.2. Üssel Yumuşak Geçişli Otoregresif Model (ESTAR)	23

2.3.3. STAR Modellemesinin Basamakları	24
2.3.3.1. Belirlenme	25
2.3.3.1.1. STAR Modellerinde Doğrusal Dışılık Testleri	26
2.3.3.1.2. LSTAR ve ESTAR Modelleri Arasında	
Seçim Testi	28
2.3.3.2. Tahmin	30
2.3.3.3. Değerlendirme	34
2.3.3.3.1. STAR Modellerinin Yanlış Belirlenme Testleri	34
2.3.4. TAR ve STAR Süreci İzleyen Serilerde Birim Kök Testleri....	36
2.4. Markov Rejim Değişim Modelleri	41
2.4.1. Markov Sürecine Genel Bir Bakış	41
2.4.2. Model Parametrelerinin En Çok Benzerlik Tahmini	45
2.4.2.1. Beklenti -Maksimizasyon Algoritması	46
2.4.3. Durum Değişkeninin Çıkarsamasında Kullanılan	
Rejim Olasılıkları	47
2.4.4. Filtrelenmiş ve Düzgünleştirilmiş Rejim Olasılık Tahminleri ...	48
2.4.5. Yanlış Belirleme Testi	50
2.4.6. Hall - Psaradakis - Sola Birim Kök Testi	51

3. GEÇİŞ MODELLERİ ÇERÇEVESİNDE PARAMETRİK OLMAYAN

VE SEMİPARAMETRİK YAKLAŞIM

3.1. Parametrik Olmayan Ekonometri	53
3.2. Düzgünleştirme Parametresinin Seçimi ve Parametrik Olmayan Regresyon	55

Sayfa No.

3.2.1. Düzgünleştirme (Bant Genişliği) Parametresinin Seçimi	56
3.2.1.1. Normal Referans Yaklaşımı	56

3.2.1.2. Plug - in Yaklaşımı	56
3.2.1.3. Çapraz Geçerlilik Seçicisi ve Leave - On - Out Çapraz Geçerlilik Fonksiyonu	58
3.2.2. Parametrik Olmayan Regresyon	59
3.2.2.1. Kernel Düzgünleştirilmesi	59
3.2.2.2. K - En Yakın Komşu Tahminleri	62
3.2.2.3. Kama Düzgünleştiricisi	63
3.2.3. Parametrik Olmayan Yaklaşımda Ağırlıklandırma	64
3.3. Zaman Serilerinde Parametrik Olmayan Modelleme ve Model Türleri .	66
3.3.1. Pencereleme ile Beyazlatma Yöntemi	67
3.3.2. Model Derecesinin Belirlenmesi	69
3.3.3. Anlamlı Gecikmeleri Belirlemek İçin Adım Adım Nihai Tahmin Hatası (FPE)	70
3.3.4. Fonksiyonel Katsayılı AR (FAR) Modeli Yaklaşımı	72
3.3.4.1. FAR Modeli İçin Belirlenme Prosedürü	79
3.3.4.1.1. Düzenlenmiş Lokal Regresyon	80
3.3.5. Adaptif Fonksiyonel Katsayılı Otoregresif Modeller (AFKOR)	82
3.3.6. Lokal Polinomiyal Tahmin	84
3.3.6.1. Lokal Regresyonun Bileşenleri	86
3.3.7. Global Kama Yaklaştırması	87
3.3.8. Polinomiyal Kama Yöntemi	88
3.3.9. Kuadratik Olmayan Cezalı Kamalar	90
3.4. Semiparametrik Zaman Serisi Regresyon Modelleri	91

Sayfa No.

3.4.1. Toplamsal AR Modeli	93
3.4.1.1. Geri Uydurma Algoritması ile Toplamsal Model Tahmini	94
3.4.2. Kısmi Doğrusal Modeller	96
3.4.2.1. Profil EKK Tahmini	101
3.4.3. Tek İndeks Modelleri	102
3.4.4. Çoklu İndeks Modelleri	102
3.4.5. Semiparametrik Geçiş Modelleri	103
3.4.5.1. Model Tahmini	103
3.4.5.1.1. β Vektörünün Başlangıç Tahmincisi	106
3.4.5.1.2. $w(\cdot, \beta)$ 'nin Lokal Doğrusal Tahmincisi	107
3.4.5.1.3. $\beta(w)$ 'nin EKK Tahmincisi	115
3.4.6. Model Seçim Testleri	118
3.4.6.1. Genelleştirilmiş Benzerlik Oranı Testleri	118
3.4.6.2. Parametrik Olmayan Modellere Karşı Oto regresif Modeller	119
3.4.6.3. Fonksiyonel Katsayılı Model Alternatiflerinin Test Edilmesi	120
3.4.6.4. Değişken Katsayılı Modellere Karşı Eşik Modeller ...	121
3.4.6.5. Semiparametrik - Parametrik Olmayan Form İçin Belirleme Testleri	121

Sayfa No.

4. ENFLASYON SERİSİNİN PARAMETRİK VE SEMİPARAMETRİK GEÇİŞ MODELİ İLE ANALİZİ	124
---	------------

4.1. Enflasyon Serisinin Model Kurma Öncesi Analizi	125
4.2. Model Tahminleri	129
4.2.1. Parametrik Geçiş Modeli Tahmini	130
4.2.2. Semiparametrik Geçiş Modeli Tahmini	131
4.2.3. Parametrik ve Semiparametrik Modellerin Öngörü Başarılarının Karşılaştırılması	135
5. SONUÇ	138
EKLER	140
KAYNAKÇA	147

TABLO LİSTESİ

	Sayfa No.
Tablo 1 : Enflasyon Serisinin Kırılmalı Birim Kök Testi Sonuçları	126
Tablo 2 : Enflasyon Serisinin BDS Testi Sonuçları	126
Tablo 3 : Uygun Gecikme Dereceli AR Modelinin EKK Tahmini	127
Tablo 4 : Artıkların BDS Testi Sonucu	129
Tablo 5 : TAR Modeli Tahmin Sonuçları	130
Tablo 6 : Parasal Daralma (1. Rejim) ve Genişleme (2. Rejim) İçin Parametre Başlangıç Tahminleri	131
Tablo 7 : Değişken Katsayılı Modelin İlk Tahmini	132
Tablo 8 : Güncellenmiş Parametre Tahminleri	133
Tablo 9 : Değişken Katsayılı Modelin Güncellenmiş Tahmini	134
Tablo 10 : İkinci Defa Güncellenmiş Parametre Tahminleri	135
Tablo 11 : Parametrik ve Semiparametrik Modelin Öngörü Başarı Kriterleri	136

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa No.
Şekil 1 : Lojistik ve Üssel Geçiş Fonksiyonları	22
Şekil 2 : Kernel Yoğunluk Tahmininin Nokta Yığınlarnı Yeniden Dağıtması	60
Şekil 3 : Sıklıkla Kullanılan Kernel Fonksiyonları	65
Şekil 4 : Enflasyon Serisinin Zaman Yolu Grafiğı	125
Şekil 5 : Enflasyon Serisinin Korelogramı	125
Şekil 6 : AR (5) Modelinin Artıklarının Korelogramı	127
Şekil 7 : Artıkların Karelerinin Korelogramı	128
Şekil 8 : Artıkların Mutlak Değerlerinin Korelogramı	128
Şekil 9 : Değişken Katsayılı Model Grafiğı ve Parametrik Olmayan Geçiş Fonksiyonu	132
Şekil 10 : Değişken Katsayılı Model Grafiğı ve Güncellenmiş Parametrik Olmayan Geçiş Fonksiyonu	134
Şekil 11 : Parametrik Tahmine Dayalı Benzetim Grafiğı	136
Şekil 12 : Semiparametrik Tahmine Dayalı Benzetim Grafiğı	136

KISALTMALAR

ADF	Augmented Dickey Fuller (Arttırılmış Dickey Fuller)
AFKOR	Adaptif Fonksiyonel Katsayılı Otoregresif
AIC	Akaike Information Criterion (Akaike Bilgi Kriteri)
AKK	Artık Kareler Kriteri
AKT	Artık Kareler Toplamı
ANÖH	Asimptotik Nihai Öngörü Hatası
AOAK	Ağırlıklı Ortalama Artık Kareler (Weighted Residual Mean Squares)
ARCH	Autoregressive Conditional Heteroskedasticity
AVE	Average (Ortalama)
BIC	Bayesian Information Criterion (Bayesyen Bilgi Kriteri)
ÇG	Çapraz Geçerlilik
DLR	Düzenlenmiş Lokal Regresyon
DW	Durbin - Watson
EÇB	En Çok Benzerlik
EKK	En Küçük Kareler
EM	Expectation - Maximisation (Beklenti - Maksimizasyon)
EXP	Üssel
EYK	En Yakın Komşu
FPE	Final Prediction Error (Nihai Öngörü Hatası)
GBO	Genelleştirilmiş Benzerlik Oranı

GÇG	Genelleştirilmiş Çapraz Geçerlilik
i.i.d.	independently - identically distributed (bağımsız ve özdeş dağılmış)
J.B.	Jarque - Bera
KKT	Kalıntı Kareler Toplamı
LM	Lagrange Multiplier (Lagrange Çarpanı)
LR	Likelihood Ratio (Benzerlik Oranı)
LSTR	Logistic Smooth Transition Regression (Lojistik Yumuşak Geçiş Regresyonu)
MÇG	Modifiye Edilmiş Çapraz Geçerlilik
MS	Markov Switching (Markov Değişim)
NLS	Nonlinear Least Squares
NÖH	Nihai Öngörü Hatası
OBKH	Ortalama Bütünleşik Kareli Hata
OEKK	Olağan En Küçük Kareler
OHK	Ortalama Hata Kare
PACF	Partial Autocorrelation Function
Quasi - ML	Maksimum Benzerlik Benzeri
RLS	Recursive Least Squares (Ardışık En Küçük Kareler)
SETAR	Self Excited Threshold Autoregression
SUP	Supremum
TAR	Threshold Autoregression
TÜFE	Tüketici Fiyat Endeksi

1. GİRİŞ

Ekonomik ilişkilere bakıldığında yüksek oranda doğrusal dışlıkların egemen olduğu ve ekonomi incelendiğinde temel olarak iki durumun geçerli olduğu görülmektedir. Bunlar; daralma ve genişleme olarak ifade edilebilir. İncelenen zaman dönemi boyunca gerçekleşen bu farklı durumlar doğrusal modellerle açıklanamamaktadır. Geçmişte bir çok ekonomist, ekonomik olayları açıklamak ve öngörmek için doğrusal modelleri kullanmışlardır çünkü doğrusal yaklaşımlar geçmişte ekonomistlere gerçek ilişkiye yaklaşmak adına yol gösterici olmuştur. Günümüzde rejim değişimleri, doğrusal olmayan modeller ile daha doğru açıklanır hale gelmiştir. Doğrusal dışlıklar; asimetrik ayarlama maliyetleri, işlem maliyetleri, bütçe kısıtları vb. varlığında önemli olmaktadır. Savaşlar, finansal panikler, hükümet politikasındaki anlamlı değişimler, piyasa katılıkları ekonomik seri davranışlarında önemli değişikliklere sebep olmaktadır.

Ekonomide rejim geçişlerinin olduğu seriler doğrusal olmayan modeller aracılığıyla analiz edilmektedir. Rejimler arası geçişlerde düzeyler arası farklılık olduğunda kullanılan başlıca parametrik modeller TAR, STAR ve Markov Rejim Değişim Modelleri olmaktadır. TAR modeli, rejimler arası geçişin keskin olduğu tek değişkenli bir modeldir. STAR modeli ise, geçişin yumuşak olduğu serilerin analizinde sıklıkla kullanılmaktadır. Bu iki modelde de geçiş değişkeni adı verilen değişken deterministik olarak belirlenmektedir ve gözlemlerin rejimlere atamaları bu değişkene göre yapılmaktadır. Markov Rejim Değişim Modelinde ise bu iki modelden farklı olarak geçiş değişkeni Markov süreci izlemektedir ve olasılıklı bir yapıdadır.

Çalışmanın birinci bölümünde, öncelikle doğrusal dışılık kavramının ne olduğu ve hangi görsel araçlarla ya da istatistiksel testlerle çıkarsamasının yapılabileceği üzerinde durulmaktadır. Sonrasında parametrik TAR, STAR ve Markov Rejim Değişim Modellerinin belirlenme, tahmin ve değerlendirme süreçleri üzerinde ayrıntılı olarak durulmaktadır.

Çalışmanın ikinci bölümünde ilk olarak parametrik olmayan ekonometrik yaklaşımın kapsamına giren düzgünleştirme parametresinin seçimi, ağırlıklandırma gibi temel kavramlar ve türleri üzerinde durulmaktadır. Daha sonra zaman serileri özelinde parametrik olmayan ve semiparametrik model türleri ele alınıp irdelenmektedir. Ayrıca, çalışmanın yöntemini oluşturan semiparametrik geçiş modelinin iteratif tahmin algoritmasıyla tahmini bu bölümde ele alınan bir diğer önemli alt başlığı oluşturmaktadır.

Çalışmanın üçüncü ve son bölümünde ise, TÜFE (1987=100) bazlı enflasyon serisinin 1995 Ocak - 2008 Aralık tarihleri arasında analizini yapıp öngörü başarılarını değerlendirmek amacıyla öncelikle parametrik geçiş modeli tahmini yapılmıştır ve çıkan sonuçlar yorumlanmıştır. Daha sonra literatürde oldukça yeni olan Cizek ve Koo (2015) iteratif algoritması ile semiparametrik geçiş modelinin tahmini yapıp, parametrik ve parametrik olmayan kısımlar ayrı ayrı değerlendirilmiştir. Nihai olarak ise, parametrik ve semiparametrik yaklaşımla elde edilen geçiş modellerinin öngörü performansları değerlendirilmiştir.

2. GEÇİŞ ve REJİM DEĞİŞİM MODELLERİ

Ekonomik ilişkilere bakıldığında yüksek oranda doğrusal dışılıkların egemen olduğu ve ekonomi incelendiğinde temel olarak iki durumun geçerli olduğu görülmektedir. Bunlar; daralma ve genişleme olarak ifade edilebilir. İncelenen zaman dönemi boyunca gerçekleşen bu farklı durumlar doğrusal modellerle açıklanamamaktadır. Geçmişte bir çok ekonomist, ekonomik olayı açıklamak ve öngörmek için doğrusal modelleri kullanmışlardır çünkü doğrusal yaklaşımlar geçmişte ekonomistlere gerçek ilişkiye yaklaşmak adına yol gösterici olmuştur. Günümüzde rejim değişimleri, doğrusal olmayan modeller ile daha doğru açıklanır hale gelmiştir. Bu modellerde ortalamada doğrusal dışılık incelenmektedir. İlgili modellere geçmeden önce, uygun bir doğrusal model kurulup, ilişkide doğrusal olup olmama durumu test edilmelidir. Doğrusallık reddedildiği takdirde doğrusal olmayan modellere geçiş yapılmalıdır.

2.1. Doğrusal Dışılık ve Doğrusallık Testleri

Doğrusallık testlerinin iki kategoriye ayrılması mümkündür. İlki, alternatif model belirlemeksizin doğrusal modelden sapmaları test eden 'portmanto testleri', ikincisi ise belirli alternatiflere karşı oluşturulmuş testlerdir. Doğrusallık hipotezi altında, doğru belirlenmiş modelin artıkları bağımsız olmalıdır. Çeşitli doğrusal dışılık testlerinin arkasında yatan temel fikir budur. Pür stokastik bir zaman serisi x_t ,

$$x_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i a_{t-i}$$

olarak yazılabilirse doğrusal olmaktadır. Burada μ sabit, ψ_i reel sayılar ve $\{a_t\}$ iyi tanımlanmış bir dağılım fonksiyonuna sahip bağımsız ve özdeş dağılmış (i.i.d.) rassal değişkenler dizisidir. Yukarıdaki eşitliğin koşulunu sağlamayan herhangi bir stokastik süreç doğrusal dışı olmaktadır. Doğrusal dışı modellerde koşullu ortalama μ_t , parametrik doğrusal olmayan bir fonksiyona bağlı olarak zaman içerisinde değişim göstermektedir (Tsay, 2002, ss.126-127).

Doğrusal dışlıklar; asimetrik ayarlama maliyetleri, işlem maliyetleri, bütçe kısıtları vb. varlığında önemli olmaktadır. Savaşlar, finansal panikler, hükümet politikasındaki anlamlı değişimler, piyasa katılıkları ekonomik seri davranışlarında önemli değişikliklere sebep olmaktadır.

Doğrusal dışılığın tipi hakkında az bilgiye sahip olunduğunda parametrik olmayan bir testle yola başlanabilir. Doğrusal olmayan doğru alternatif belirlendiğinde ise parametrik testler daha güçlü olmaktadır ancak bu durumda bile H_0 reddedilemediğinde farklı tipte bir doğrusal dışılık olup olmadığını görmek için parametrik olmayan bir testle sonuç desteklenebilir (Terasvirta, Tjostheim ve Granger, 2008, s.97).

2.1.1. Grafik Yöntemler

Bir ilişkinin ya da değişkenin doğrusallığı hakkında ön fikir sahibi olabilmek için formel olmayan görsel araçlara başvurulabilmektedir. Bu araçların, doğrusal dışılığın tespitinde yol gösterici olmalarına karşılık, çıkarsama yapabilmek için istatistiksel testlerle desteklenmeleri gerekmektedir. Bu alt başlıkta, uygulamada sıklıkla kullanılan grafiksel yöntemlerden bazılarına değinmek yararlı olacaktır (www.itl.nist.gov/div898/handbook, 2012).

- **Bihistogram:** Konum, ölçek ya da dağılımda herhangi bir değişiklik olup olmadığının değerlendirildiği bir araçtır. Tüm dağılımsal özellikler (konum, ölçek, çarpıklık, aşırı değer vb.) tek bir çizimde görülebilmektedir. Temeli histogram'a dayanmaktadır. Çan şekline sahip bir histogram verinin doğrusal olduğuna işaret etmektedir.

- **Gecikme Çizimi:** Zaman serisinin rassal olup olmadığının kontrol edildiği bir çizimdir. Rassal bir veri, gecikme çiziminde herhangi bir belirli örüntü yapısı göstermez. Değişkenin grafiğinin çizileceği gecikme sayısı isteğe bağlı olarak seçilebilmektedir. Bu çizimden; verinin rassal olup olmadığı, veride otokorelasyon bulunup bulunmadığı, veriye uygun modelin ne olduğu ve veride aşırı değerler bulunup bulunmadığı sorularına yanıtlar bulunabilmektedir.

- **Kantil - Kantil Çizimi:** İki veri setinin ortak dağılıma sahip anakütlelerden gelip gelmediğinin belirlendiği grafiksel bir tekniktir. Birinci verinin kantil çizimine karşı ikinci verinin kantil çizimi yapılmaktadır. İki veri setinin de aynı dağılıma sahip anakütleden gelmesi durumunda noktalar yaklaşık olarak 45 derecelik referans çizgisi boyunca saçılmalıdır. Bu çizim için, her iki veri setinin de örneklem hacimlerinin aynı olmasını gerektirmeme ve dağılımsal şekil özelliklerinin eşanlı olarak görülebilmesi avantaj olarak sayılabilir.

2.1.2. McLeod – Li Testi

McLeod ve Li (1983), modelin uygunluğunu kontrol etmek amacıyla ARMA(p,q) modelinin kareli artıklarına Ljung-Box istatistiğini uygulamışlardır. Kareli artık otokorelasyonları, ARMA modeli artıklarında doğrusal olmayan istatistiksel bağımlılık türlerini tespit etmede yararlıdır. Test istatistiği,

$$Q(m) = n(n+2) \sum_{i=1}^m \frac{\sum_{t=1}^n \hat{\rho}_i^2(a_t^2)}{n-i}$$

olmaktadır. Burada n, örneklem hacmi iken m, testte kullanılan seçilmiş en büyük otokorelasyon derecesini ifade etmektedir. a_t , artık serisi olup $\hat{\rho}_i(a_t^2)$, a_t^2 'nin i. gecikme otokorelasyon fonksiyonudur. İlgili model uygun modelse, $Q(m) \stackrel{asimp.}{\sim} \chi^2_{(m-p-q)}$ olmaktadır (McLeod ve Li, 1983, s.270). Testte kullanılan yardımcı regresyon,

$$a_t^2 = \beta_0 + \beta_1 a_{t-1}^2 + \dots + \beta_m a_{t-m}^2 + e_t, \quad t = m+1, \dots, T$$

olarak gösterilebilmektedir. Burada sıfır hipotezi, $H_0: \beta_1 = \dots = \beta_m = 0$ olarak yazılmaktadır. İstatistik, artıklardan hesaplandığı için serbestlik derecesi (m-p-q) olmaktadır. Sıfır hipotezinin reddedilmesi, doğrusal olmayan bağımlılığa işaret etmektedir (Tsay, 2002, s.153).

Testin dezavantajlarından bahsedilirse, m'nin seçimi tamamıyla araştırmacının sürecin hafızası hakkındaki bilgisine dayanmaktadır. Test, a_t^2 'nin otokorelasyon varlığını yalnızca alternatif hipotez altında yoklamaktadır. Bu durum, verinin normal

dağıldığı ve durağan olduğu varsayımına bağlıdır. Bu varsayımlardan biri ya da ikisi geçerli değilse testin gücü azalmaktadır (Koller ve Fischer, 2002, s.197).

2.1.3. BDS Doğrusal Dışılık Testi

BDS doğrusal dışılık testi; Brock, Dechert ve Scheinkman'ın 1987 yılında yayınladıkları makale ile ortaya atılan genel bir bağımsızlık testidir. Birçok doğrusal olmayan model alternatifine karşı güçlü bir test olduğundan popüler bir doğrusal dışılık testidir ve kökleri 'Kaos Teorisi'ne dayanmaktadır. Bu test tahmin edilmiş doğrusal bir zaman serisi modelinin artıklarına uygulandığında geriye kalan bağımlılığı ve ihmal edilmiş doğrusal olmayan yapının varlığını tespit etmek için kullanılmaktadır. Doğrusal olmamanın tipi hakkında bir ön bilgi yoksa, zaman serisinin kendisinde veya doğrusal modelin artıklarında doğrusal olmamanın varlığını test etmek için BDS testi kullanılabilir. BDS testi doğrusal ve doğrusal olmayan bütün bağımlılıkları yakaladığından öncelikle doğrusal bağımlılığın uygun bir modelle ortadan kaldırılması, doğrusal dışı bağımlılığın yakalanabilmesi açısından önemlidir. Değişkenin bağımsız ve özdeş dağıldığını ifade eden sıfır hipotezi reddedildiğinde, doğrusal modelin yanlış belirlendiği sonucuna varılabilmektedir.

BDS test istatistiğinde temel kavram 'korelasyon integrali'dir. Korelasyon integrali, geçici örüntülerin veride tekrar edildiği frekansın ölçüsüdür. x_t ve x_s farklı iki değişken vektörü olsun. Burada $t=1,2,...,T$ ve $s < t$ olmaktadır. x_t 'nin m uzunluğundaki geçmiş değerleri ise $x_t^m = (x_t, x_{t-1}, ..., x_{t-m+1})$ olarak gösterilsin. Bu durumda gömme m boyutundaki korelasyon integrali,

$$C_{m,\varepsilon} = \frac{2}{T_m(T_m-1)} \sum_{m \leq s < t \leq T} \sum I(x_t^m, x_s^m; \varepsilon)$$

formülüyle tahmin edilebilmektedir. Burada; $T_m = T-m+1$ ve $I(x_t^m, x_s^m; \varepsilon)$, $|x_{t-i} - x_{s-i}| < \varepsilon$ iken bir, diğer durumlarda ise sıfır değerini alan bir gösterge fonksiyonudur. Burada $i = 0,1,...,m-1$ olmaktadır. Korelasyon integrali sezgisel olarak, iki tane m boyutlu noktanın birbirinden ε uzaklığında olmaları olasılığını tahmin

etmektedir. ε seçimi genellikle verinin $0.5 - 1.5$ standart sapması arasında bir değer verilerek yapılmaktadır. m 'nin seçimi ise, test edilmek istenen bağımlılığın gecikmesine bağlıdır ve pratikte 2 ile 15 arasında bir değer almaktadır. Tahmin edilen bu ortak olasılık,

$$\Pr(|x_t - x_s| < \varepsilon, |x_{t-1} - x_{s-1}| < \varepsilon, \dots, |x_{t-m+1} - x_{s-m+1}| < \varepsilon)$$

olarak gösterilebilmektedir. $x_t \sim i.i.d.$ ¹ olduğunda bu olasılık, $C_{1,\varepsilon}^m = \Pr(|x_t - x_s| < \varepsilon)^m$ şeklinde ifade edilebilmektedir. Nihayetinde BDS test istatistiği,

$$V_{m,\varepsilon} = \sqrt{T} \frac{C_{m,\varepsilon} - C_{1,\varepsilon}^m}{S_{m,\varepsilon}}$$

olarak hesaplanmaktadır. Burada $S_{m,\varepsilon}$, $\sqrt{T}(C_{m,\varepsilon} - C_{1,\varepsilon}^m)$ ifadesinin standart sapmasıdır (Brock, Hsieh ve LeBaron, 1991, s.7). Kararlılık koşulları altında BDS istatistiği dağılımda standart normale yakınsamaktadır. Bu sebepten, %5 anlamlılık düzeyinde ve $\left(\frac{T-m+1}{m}\right) > 200$ koşuluyla, $|V_{m,\varepsilon}| > 1.96$ olduğunda sıfır hipotezi reddedilmektedir (Zivot ve Wang, 2005, ss.652-653).

2.1.4. Ramsey RESET Testi

Ramsey'in 1969 yılındaki makalesinde ortaya koyduğu ve yaygın olarak kullanılan regresyon tanımlama hatası testlerinden birisidir. Spesifik bir doğrusal olmayan alternatif olan polinomiyal alternatife karşı yapılan bir testtir. Model tahmininden elde edilen $\hat{Y}$ değişkeninin karesi, kübü, dördüncü kuvveti vb. test edilmek istenen modele eklenir ve yardımcı regresyon modeli tahmin edilir. Yardımcı regresyon modeli,

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k + \delta_1 \hat{Y}^2 + \delta_2 \hat{Y}^3 + u$$

olarak yazılabilir. Eklenen kuvvetlerin modelde birlikteliği F testi ile test edilir.

¹ i.i.d.: independently and identically distributed, bağımsız ve özdeş dağılmış

Test edilecek hipotezler,

$$H_0: \delta_1 = \delta_2 = 0$$

$$H_1: \delta_1 \neq 0 \text{ ve / veya } \delta_2 \neq 0$$

olarak kurulmaktadır. H_0 'ın reddedilmesi, modelde tanımlama hatasının varlığına yani doğrusal modelin doğru model olmadığına işaret etmektedir. Büyük örneklemelerde F testi yerine LM versiyonu kullanılabilir (Ramsey, 1969, ss.361-362).

2.2. Eşik Otoregresif (TAR) Modeller

Global olarak doğrusal olmayan ancak belli bir durum uzayındaki eşik ya da eşiklere göre parçalı olan doğrusal modellere 'Eşikli Otoregresif Model (TAR)' ya da 'Kendinden Uyarımlı Eşikli Otoregresif Model (SETAR)' adı verilmektedir. Serinin ortalamada doğrusal olmadığı ve rejimler arası geçişin sert durumlara uygun eşik modellerinde öncelikle doğrusallık hipotezinin bu model sınıfına karşı testi yapılarak uygun sürecin eşik modeli ile modellenmesi gerektiği sonucuna varılmalıdır. Aksi halde doğrusal bir sürecin doğrusal olmayan bir modelle analizi yanlış sonuçlar elde edilmesine sebebiyet vermektedir. Eşik model tahmininden önce ise, gecikme parametresinin ve eşik parametresinin doğru seçimi model tahmini için önem arz etmektedir. Eşik modellerinin tahmininde farklı yaklaşımlar söz konusudur. Bu bölümün alt başlıklarında model tahmin sürecinde izlenmesi gereken süreç analiz edilmektedir.

2.2.1. TAR ve SETAR Modelleri

Bu modeller sınıfının en büyük özellikleri; limit çevrimleri ve sıçrama olayını modellemesidir. TAR modeli limit çevrime sahip olabilir ve bu sebeple periyodik zaman serilerinin modellemesinde kullanılabilir ve bu model, doğrusal zaman serisi modellerinde yakalanamayan asimetriklik ve sıçrama olayını yakalayabilmektedir. Y_t , kendinden uyarımlı eşik otoregresif süreç izlesin. Bu durumda TAR (k;p,d) modeli,

$$Y_t = \phi_0^{(j)} + \sum_{i=1}^p \phi_i^{(j)} Y_{t-i} + a_t^{(j)}, \quad r_{j-1} \leq Y_{t-d} \leq r_j, \quad j = 1, \dots, k$$

olarak ifade edilebilmektedir. Burada; d, gecikme parametresini ifade eden pozitif bir tamsayı, k, rejim sayısı, p, AR derecesi ve eşikler $-\infty = r_0 < r_1 < \dots < r_k = \infty$ olmaktadır. Eşikler, geçiş değişkeninin alanını yani tanım kümesini k farklı rejime bölmektedir ve her farklı rejimde Y_t farklı bir AR(p) süreci izlemektedir. TAR modelinde koşullu ortalama denkleminin daha iyi bir yaklaşırtmasını elde etmek için parçalı doğrusal modeller kullanılmaktadır. Geleneksel parçalı doğrusal model zaman uzayında değişimlere imkan verirken TAR modeli doğrusal yaklaşırtmayı geliştirmek amacıyla eşik uzayını kullanmaktadır. Bu model Tong (1978, 1983) ve Tong-Lim (1980) tarafından önerilmiştir. TAR modelindeki AR derecesi olan p rejimden rejime değişebilmektedir. Rejimden rejime hata varyansları ($\sigma_j^2 = \text{var}(a_t^{(j)})$) değiştiği takdirde TAR modeli homojen olmayan doğrusal AR modeli olmaktadır. TAR modeli, lokal doğrusal bir model olarak da tanımlanabilmektedir. Bu sebepten, EKK teknikleri bu sürecin analizinde kullanılabilmektedir (Tsay, 1989, ss.231-232).

2.2.1.1. Model Tahmininde Tsay Yaklaşımı (1989)

Tsay yaklaşımının orijinalliği, zararlı parametre olan eşikten kurtulmayı sağlamasında yatmaktadır. Tsay, geçiş değişkeninin tüm gözlemlerini küçükten büyüğe sıralamak suretiyle alternatif doğrusallık testi önermektedir. Sıralı regresyon eşik değerinin altındaki geçiş değişken değerlerine uyan tüm gözlemlerin doğrusal regresyonu olmaktadır. İkinci regresyon ise diğer rejim için oluşturulmaktadır. Buradaki doğrusallık testi, her iki regresyonda birbirine karşılık gelen parametrelerin eşitliğinin test edilmesi şeklinde olmaktadır. En büyük değerini alan istatistiğe karşılık gelen gecikme parametresi ve dolayısıyla da geçiş değişkeni belirlenmektedir. Grafiksel yöntemle eşik değerinin yeri tespit edilmektedir. Ardışık olarak tahmin edilmiş katsayıların ve student-t değerlerinin sıralanmış geçiş değişkenine göre grafikleri çizilmektedir ve bu şekilde eşiklerin konumlandırılması yapılmaktadır. Sıralanmış regresyonun ardışık olarak tahmin edilmesi, bu yöntemin birinci rejimdeki gözlem sayısının ve eşik değerinin bilinmesini gerektirmemesi ile açıklanabilmektedir. Gözlemler eşik değerinin altında oldukça model doğrusal olmakta ve katsayı anlamlı ise katsayının t oranı gözlem ilave edildikçe belli bir değere yakınsamaktadır. Eşik değere ulaşıldığında, tahminler ve t istatistikleri değişmektedir hatta bazen eşik değere t

istatistiği işaret bile değiştirebilmektedir. Katsayının geçiş değişkenine göre analizinde ise eşik konumlandırılmakta ve geçiş fonksiyonunun yapısı tespit edilebilmektedir. Veride negatif işaretli aşırı değerler bulunması durumunda ise eşik seçim süreci bu durumdan etkilenmektedir. Eşik değer, ardışık tahminlerin yapılması için başlangıçta gerekli gözlemler arasında yer alıyorsa, Tsay yöntemi ilgili eşik değerini tespit edememektedir. Bu durum, eşik değer çok yüksek olduğunda yani bozulmadan önceki gözlem sayısı çok yüksek olduğunda da karşılaşılan bir durumdur. Çözüm olarak, gözlemler Tsay'in önerisinin aksine büyükten küçüğe doğru sıralanıp süreç bu şekilde yeniden izlenebilmektedir. Son aşamada ise modelin tahmini yapılmaktadır (Ben Salem ve Perraudin, 2001, s.162). Bu metodolojide kullanılan doğrusallık testi hipotezleri,

$$H_0 : \text{Değişken, SETAR}(1) \text{ süreci izlemektedir}$$

$$H_1 : \text{Değişken, SETAR}(j) \text{ süreci izlemektedir, } j > 1$$

Burada j , rejim sayısıdır. Eşiklerin yalnızca alternatif hipotez altında belirlenmesi problemine karşılık eşiklerle doğrudan temas etmemek için Tsay, yardımcı regresyona dayalı bir F testi önermektedir. Test istatistiği, zararlı parametre olan eşik değerden bağımsız olup standart F dağılımı izlemektedir. Buna karşılık test istatistiği, test esnasında sabit varsayılan gecikme parametresi (d)'ne ve regresör sayısı (m)'na bağlı olmaktadır. Burada ardışık en küçük kareler yöntemi ile tahmin edilen 'düzenlenmiş otoregresyonlar' söz konusudur. Eşik değerler genellikle bilinmediğinden, $t = \max(d,p)+1, \dots, n$ için düzenlenmiş regresyonlar oluşturulmaktadır. Düzenlenmiş regresyonların katsayılarının ardışık en küçük kareler (RLS) tahminlerinden elde edilen standartlaştırılmış öngörü artıkları ($\widehat{e}_{\pi_i}$) 'nın bağımsız değişkenler üzerine regresyonu kurulur ve F testi yapılır. Yardımcı regresyon,

$$\widehat{e}_{\pi_i} = X'_{\pi_i} \Psi + u_{\pi_i}$$

olarak yazılmaktadır. $H_0 : \Psi = 0$ şeklindeki doğrusallık hipotezi test edilerek eşik doğrusal dışılığın var olup olmadığına karar verilmektedir. H_0 reddedilirse, SETAR modeli tahmin edilebilmektedir. Gecikme parametresi ve eşikler belirlendikten sonra

bilinmeyen parametreler EKK yöntemi ile hesaplanabilmektedir. Her rejimde yeterli sayıda gözlem bulunması durumunda EKK parametre tahminleri tutarlı sonuçlar vermektedir (Ben Salem ve Perraudin, 2001, s.162).

Rejim sayısı belirlenirken de benzer bir test süreci izlenmektedir. Farklı rejim sayısındaki iki modelin artık varyansları, σ_j^2 ile σ_k^2 hesaplanır. Hipotezler,

$$H_0 : SETAR(j) \text{ modeli uygun modeldir}$$

$$H_1 : SETAR(k) \text{ modeli uygun modeldir}$$

olarak oluşturulmaktadır. j ve k, farklı rejim sayılarını ifade etmektedir. İlgili test istatistiği ise,

$$F = n \left(\frac{\sigma_j^2 - \sigma_k^2}{\sigma_k^2} \right)$$

olarak hesaplanmaktadır. Sıfır hipotezinin reddedilmesi durumunda uygun model, SETAR(k) modeli olmaktadır. Rejim sayılarının ardışık olarak test edilmesi şartı yoktur (Hansen, 1999, s.554). İstatistik, çok baskın gözlemlerden dolayı çok rejim bulmuş olabilmektedir. Bu sebeple testin yanı sıra iktisadi açıklama da önem kazanmaktadır.

2.2.1.2. Model Tahmininde Hansen Yaklaşımı (1996)

Bu yöntemin avantajı, eşiklerin diğer model parametreleriyle birlikte tahmin edilebilmesi ve tahmin edilen eşikler için geçerli güven aralıkları oluşturulabilmesidir. Doğrusallık hipotezi altında belirlenemeyen zararlı parametrelerin varlığına karşı Hansen, gecikme parametresini sabit kabul ederek doğrusallık testi oluşturmaktadır. Yalnızca doğrusal modelin tahminini gerektirdiği için Hansen, LM istatistik ilkesine göre testini oluşturmaktadır. Geçiş değişkenin tüm değerleri için bir dizi LM istatistiği hesaplanmaktadır. En büyük LM istatistiğine karşılık gelen gözlem eşik değeri seçilmektedir. Davies (1977)'de LM istatistiğinin, eşik parametresinin monoton bir

fonksiyonu olması sebebiyle LM istatistikler kümesinin supremumunu² (SupLM(s)) almayı tavsiye etmektedir. Burada s, eşik değer olmaktadır. SupLM(s), γ 'dan bağımsız olup, doğrusallık sıfır hipotezi (H_0)'nin reddedilemediği en büyük LM istatistik değerini ifade etmektedir. Andrews ve Ploberger (1994), H_0 altında belirlenememiş zararlı parametrelerin varlığı durumunda optimal testlerin ortalama üssel bir şekle sahip olduğunu göstermektedir. Kullanılan doğrusallık testleri; Sup(LM), s'ye göre bütünleştirme yapılarak elde edilmiş LM(s) istatistikler dizisinin ortalaması olan AveLM ve $\exp\left(\frac{1}{2}LM(s)\right)$ işlemiyle dönüştürülmüş LM(s) istatistikleri dizisinin ortalamasının logaritması yani ExpLM olmaktadır. Geçiş değişkeni, bu istatistikleri maksimum yapacak şekilde belirlenmektedir (Perraudin, 2002, s.11). Geçiş değişkeninin tüm değerleri arasından, tahmin edilen eşik modelinin artık varyansını minimize eden eşik değer bulunur. Son aşamada ise modelin tahmini yapılmaktadır. LM istatistiklerinin asimptotik dağılımları bilinmediğinden Hansen, çıkarsamada bootstrap yöntemi ile elde edilen kritik değerlerin kullanılmasını tavsiye etmiştir (Ben Salem, Perraudin, 2001, ss.163-164). Bootstrap yönteminde, modelin artıklar kümesinden özel bir çekimle asimptotik dağılımın bir noktası hesaplanmaktadır ve buradaki artıkların bağımsız ve özdeş dağıldığı varsayılmaktadır. Süreç yinelenerek asimptotik dağılımın tahmini ve ilgili test olasılıkları elde edilmektedir. Bu olasılıklar, belli sayıda (örneğin 1000) iterasyon ile elde edilmiş test istatistikleri arasından dikkate alınan istatistiğin tahmin edilen değerini aşanların oranı hesaplanarak elde edilmektedir.

Tsay (1989) ve Hansen (1996) yöntemleri, test istatistiklerinin oluşturulması sırasında zararlı yani doğrusallık hipotezi altında hesaplanamayan parametrelere bakışları açısından farklılaşmaktadır. Eşik modeli,

$$Y_t = \begin{cases} \phi_0^{(1)} + \phi^{(1)} X_t + \varepsilon_t^{(1)}, & Z_t \leq s \\ \phi_0^{(2)} + \phi^{(2)} X_t + \varepsilon_t^{(2)}, & Z_t > s \end{cases}$$

² Supremum: Üstten sınırlı olması koşuluyla bir kümenin üst sınırlarının en küçüğüdür.

olarak gösterilebilirken $\varepsilon_t^{(j)}, j=1,2, t=1,\dots,n$ beyaz gürültü süreci izlemektedir. $X_t = (Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p}, V_1, \dots, V_k)'$, bağımsız değişken vektörü ve $\phi^{(j)} = (\phi_1^{(j)}, \dots, \phi_m^{(j)})$ parametre vektörü olmaktadır. $X_t = (Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p})'$ olduğunda, 'Kendinden Uyarımlı Eşikli Otoregresif Model'den söz edilmektedir. Burada geçiş değişkeni (Z_t), gecikmeli içsel değişken (Y_{t-d})'lerden biri olmaktadır. d ise, gecikme parametresini ifade etmektedir. s parametresi, sistemin durum değişimini ifade eden eşik değerdir. SETAR modelinin gösterge fonksiyonu kullanılarak bir diğer şekilde yazılışı,

$$Y_t = (\phi_0^{(1)} + \phi^{(1)} X_t) I\{Z_t \leq s\} + (\phi_0^{(2)} + \phi^{(2)} X_t) I\{Z_t > s\} + \varepsilon_t$$

olmaktadır. Burada ε_t , i.i.d. beyaz gürültü dizisi olmaktadır. Doğrusal olmayan belirlenmiş bir alternatife karşı doğrusallık testi yapılırken, H_0 altında belirlenemeyen mümkün zararlı parametrelerin varlığı araştırmacıyı, H_1 altındaki modelin belli yaklaştırılmasının kullanımına götürmektedir. H_0 doğrusallık hipotezinin reddedilememesi, sürecin doğrusallığını ifade ettiği gibi alternatif modelin yanlış belirlenmesini de ifade ediyor olabilir. Bu sebeple, H_1 altındaki doğrusal olmayan modelin doğru belirlenmesi de doğru sonuca ulaşma bakımından önem arz etmektedir. Sıfır hipotezi,

$$H_0: \phi_i^{(1)} = \phi_i^{(2)}, i = 0, \dots, m$$

olarak oluşturulmaktadır. Zararlı parametreler, benzerlik fonksiyonunu değiştirmeksizin farklı farklı değerler alabilmektedir. Ayrıca her iki rejimdeki hata varyansının da aynı olduğu varsayıldığında, doğrusal modelin benzerlik değeri bu parametrelere bağlı olmamaktadır. Bu sebepten, Wald, LR, LM istatistikleri uygulanamaz hale gelmektedir. Bu duruma çare olarak Tsay ve Hansen yöntemleri uygulamaya konulmaktadır. Bu yöntemlerde, geçiş değişkene yaklaşım aynı iken, eşik değere yaklaşım farklı olmaktadır (Perraudin, 2002, ss.3-6).

Hansen belirleme süreci basamaklar halinde incelenecek olursa aşağıdaki sıralama takip edilir (Perraudin, 2002, s.12):

1. Doğrusal model,

$$Y_t = \phi_0 + \phi X_t + \varepsilon_t, \quad X_t = (Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p}, V_1, \dots, V_k)'$$

çerçevesinde bağımsız değişkenlerin seçimi

2. Geçiş değişkeninin mümkün tüm değerleri yani tüm gözlemleri için, LM(s) doğrusallık test istatistikleri dizisi oluşturulması

$$LM(s) = S_n(s)' M_n(s) S_n(s)$$

Burada $S_n(s) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t \hat{\varepsilon}_t(s)$, H_0 altında tahmin edilen eşik modelinin skoru olmaktadır. $M_n(s)$ ise, H_0 altında tahmin edilmiş, değişen varyansa karşı düzeltilmiş ya da düzeltilmemiş Fisher bilgi matrisidir. SupLM, ExpLM, AveLM istatistiklerinin ve olasılıklarının bootstrap yöntemi ile elde edilmesinde olasılıklar,

$$\hat{p}_n = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J I \left\{ g(LM(s)) \leq g(LM(s))^j \right\}, \quad g(.) = \{Sup, Ave, Exp\}$$

olarak hesaplanmaktadır. Burada j, benzetilmiş test istatistiklerinin sayısıdır.

3. SupLM, ExpLM, AveLM istatistiklerini maksimize eden geçiş değişkeninin seçimi

4. Geçiş değişkeninin mümkün tüm değerleri arasından, Ardışık EKK ile tahmin edilmiş eşik modelinin artık varyansını minimize eden eşik değer tahmininin elde edilmesi

5. Bağımsız değişken sayısı, geçiş değişkeni ve eşik değer tespit edildikten sonra modelin tahmini

2.2.2. TAR ve SETAR Modellerinde Doğrusallık Testi ve Parametre Tahmini

Ortalamada doğrusal olmayan modellerden olan tek değişkenli TAR modeli ve geçiş değişkeni bağımlı değişkenin gecikmesi olan SETAR modeli parçalı doğrusal modellerin eşik noktalarında birleşimiyle oluşan, lokal olarak doğrusal ancak global olarak doğrusal dışı modellerdendir. İlişkinin TAR modeliyle incelenebileceği hususunda bir ön bilgiye sahip olduğunda doğrusal modele karşı TAR modelini test etmek ve doğru modelin TAR model olduğu sonucuna varıldığında modeli tahmin etmek doğru olmaktadır.

2.2.2.1. TAR Modelinin Doğrusallığa Karşı Testi

Bu testte düzenlenmiş otoregresyon kavramı ön plana çıkmaktadır. Düzenlenmiş otoregresyon, belli bir bağımsız değişkenin aldığı değerlere dayanan otoregresyondur. TAR modelinde düzenleme, geçiş değişkenine göre yapılırsa düzenlenmiş otoregresyon söz konusu olmaktadır. Düzenlenmiş otoregresyon yardımıyla, her gruptaki gözlemlerin tümünün aynı doğrusal AR modelini izleyeceği şekilde tüm veri noktaları gruplandırılmaktadır. Gruplara ayırma işlemi, eşik değerin bilinmesini gerektirmemektedir, yalnızca her gruptaki gözlem sayısı eşik değere bağlı olmaktadır. Düzenlenmiş otoregresyon,

$$\begin{aligned} Y_{\pi_i+d} &= \Phi_0^{(1)} + \sum_{v=1}^p \Phi_v^{(1)} Y_{\pi_i+d-v} + a_{\pi_i+d}^{(1)}, \quad i \leq s \\ &= \Phi_0^{(2)} + \sum_{v=1}^p \Phi_v^{(2)} Y_{\pi_i+d-v} + a_{\pi_i+d}^{(2)}, \quad i > s \end{aligned}$$

olarak gösterilebilmektedir. Geçiş değişkeni Y_{t-d} , $\{Y_h, \dots, Y_{n-d}\}$ değerlerini alabilmektedir. Burada, $h = \max\{1, p+1-d\}$ olmaktadır. π_i ise, $\{Y_h, \dots, Y_{n-d}\}$ dizisinin en küçük i . gözleminin zaman indeksi olmaktadır. Eşik doğrusal dışılığın test edilmesi için, düzenlenmiş otoregresyonun öngörü artıklarının bağımsız değişkenler üzerine regresyonu kurularak söz konusu regresyonun F istatistiği kullanılabilir. Ardışık EKK yöntemi ile tahminler etkin olarak yapılmaktadır ve öngörü artıkları ile standartlaştırılmış öngörü artıkları elde edilmektedir. Standartlaştırılmış öngörü artıkları daha çok küçük örneklerde tercih edilmektedir. Büyük örneklerde EKK öngörü

artıkları hesaplama kolaylığı sağlamaktadır. Öngörü artıkları çeşitli saçılım diyagramları yardımıyla eşik değerlerin elde edilmesinde kullanılabilir. Sabitlenmiş bir p ve d için, düzenlenmiş otoregresyonlarda kullanılacak etkin gözlem sayısı (n-d-h+1) olmaktadır. Ardışık otoregresyonların b gözlem ile başladığı varsayılırsa, (n-d-b-h+1) sayıda öngörü artığı söz konusudur. Öngörü artıklarının elde edilmesiyle birlikte,

$$\widehat{e}_{\pi_i+d} = \omega_0 + \sum_{v=1}^p \omega_v Y_{\pi_i+d-v} + \varepsilon_{\pi_i+d}, \quad i = b+1, \dots, n-d-h+1$$

regresyonu kurulmaktadır. F istatistiği ise,

$$\hat{F}(p,d) = \frac{(\sum \widehat{e}_t^2 - \sum \varepsilon_t^2)/(p+1)}{\sum \varepsilon_t^2/(n-d-b-p-h)}$$

olarak hesaplanmaktadır. Burada $\sum \widehat{e}_t^2$, düzenlenmiş otoregresyondan ardışık EKK ile elde edilen ardışık artıkların kareleri toplamı iken $\sum \varepsilon_t^2$, ardışık artıkların regresörler üzerine regresyonundan EKK yöntemi ile elde edilen artıkların kareleri toplamı olmaktadır (Tsay, 1989, s.233).

Bu test, yalnızca sıralama yordamı ve doğrusal regresyon yöntemi gerektirdiğinden kolaylıkla uygulanabilmektedir. BDS testinde H_0 reddedilirken, burada reddedilemezse TAR modeli uygun bir model değildir sonucuna varılır ve başka doğrusal olmayan modeller denenebilir. Zararlı (nuisance) parametreler durumunda 'Davies Testi' yapılabilir.

2.2.2.2. Gecikme Parametresinin Seçimi

Veri bir TAR süreci ve AR derecesi (p) için gecikme parametresinin seçimi aşağıdaki yardımcı regresyonların F istatistikleri hesaplanıp maksimumu seçilerek elde edilir. Bu işlem notasyonel olarak,

$$\widehat{e}_{\pi_i} = X'_{\pi_i} \Psi + u_{\pi_i}$$

$$\hat{F}(p,d_p) = \operatorname{argmax}_{v \in S} \{ \hat{F}(p,v) \}$$

gösterilebilmektedir. Burada, d 'nin alt imi olan p , d 'nin tahmininin p 'ye bağlı olabileceğini ifade etmektedir. S , önceden belirlenmiş pozitif tamsayılar kümesi yani d 'nin mümkün tüm değerlerinin kümesidir. v ise, gecikme parametresini ifade etmektedir. Serbestlik dereceleri farklı olduğunda F istatistiklerinin olasılık değerleri (p) hesaplanıp en küçük p değerine sahip d_p seçilebilmektedir. d , otoregresif dereceye göre değişebileceğinden AR derecesinin (p) seçimi önem arz etmektedir. Burada öncelikle ilgili değişken için kısmi otokorelasyon fonksiyonu gibi belirleyici istatistiklerle uygun bir AR derecesi seçilip daha sonra gerekirse bu derece iyileştirilebilmektedir (Tsay, 1989, s.235).

TAR modelinde geçiş değişkeninin seçimi ya da gecikme parametresinin tahmini bilindik yöntemlerle yapılamamaktadır. Örneğin benzerlik fonksiyonu gecikme parametresine göre türevlenememektedir. Bu sebepten, geçiş değişkeninin seçimi doğrusallık testi sonuçlarına dayanmaktadır. Buradaki fikir, eşik model iyi belirlendiğinde doğrusallığın güçlü bir şekilde reddedilmesidir. Doğrusallık testleri geçiş değişkenine göre yapıldığından ve geçiş değişkeni de önceden bilinmediğinden mümkün tüm aday geçiş değişkenleri için doğrusallık testleri yapılmaktadır. Bağımsız değişkenler kümesi veya TAR modeli durumunda $1 \leq d \leq p$ koşulunu sağlayacak olan tüm gecikme değerleri için doğrusallık testleri yapılmaktadır. Sonrasında ise doğrusallığın en kuvvetli şekilde reddedildiği yani test (kuyruk) olasılığını minimize eden geçiş değişkeni seçilmektedir (Perraudin, 2002, ss.6-7). $\hat{d}$, süper tutarlı olduğundan az sayıda gözlemle de elde edilebilmektedir. Daha hızlı yakınsama daha az gözlemle çalışmaya imkan vermektedir. Eşik değer, her rejimin örneklemin minimum %15'ini içereceği şekilde seçilmektedir.

2.2.2.3. Eşik Parametresinin Seçimi

Örnekleme yüzdelikleri, eşik değerlerinin nokta tahminleri olarak kullanılabilir. Tek sınırlama, eşik değerin sıfırıncı ya da yüzüncü yüzdelik dilime çok yakın olmamasıdır. Bu uç noktalar için, etkin bir tahminin elde edilebileceği kadar gerekli gözlem bulunmamaktadır. Geçiş değişkeninin her bir gerçekleşmesi eşik değer olarak kabul edilip gösterge fonksiyonu bu potansiyel eşik değere göre kurulur ve SETAR

modelleri tahmin edilir. Farklı SETAR modelleri arasından en küçük artık kareler toplamını veren regresyon denklemi eşik tutarlı tahminini vermektedir.

Sıralı regresyon çerçevesinde ilk r sıralı gözleme ilişkin süreç doğrusal olmaktadır. Eşik değer gözlemlere ilave edildiğinde süreç iki regresyonun kombinasyonu haline almaktadır ve ardışık artıkların ve diğer istatistiklerin grafiği eşik düzeyinde bozulmaktadır. Bu sebepten eşik konumlandırması, sıralı geçiş değişkeni cinsinden ardışık farklı istatistiklerin grafiksel analizi ile yapılabilmektedir. Student-t oranlarına bakıldığı zaman, eşik değerden küçük gözlemler olduğunda süreç doğrusal olmakta ve anlamlı katsayıların t istatistikleri, gözlem ilave edildikçe belli bir değere yakınsamaktadır. Eşik değer ilave edildiğinde ise tahminler ve t istatistikleri, bazen eşik değer için işaret değişikliğine varan değişimler göstermektedir. Bu yöntemle yalnızca eşik değer değil aynı zamanda geçişin doğası hakkında da (sert geçiş, yumuşak geçiş, lojistik ve üssel geçiş) bilgi edinilebilmektedir. Aşırı değerlerin varlığı durumunda, ardışık istatistikler sapmalı olabilmektedir. Yalnızca negatif işaretli aşırı değerler eşik seçim prosedürünü etkilemektedir. Eşik değer, ardışık regresyonların tahminine başlarken kullanılan gözlemler arasında yer alırsa Tsay metodu, eşik değeri tespit edememektedir. Bu problem, eşik değer çok yüksek olup bozulmadan önceki gözlem sayısı büyük olduğunda da karşılaşılan bir problemdir. Bu durumda gözlemler geçiş değişkenine göre artan sırada değil de azalan sırada sıralanabilmektedir ancak Tsay bu sıralamayı küçükten büyüğe doğru yapmaktadır (Perraudin, 2002, ss.9-10).

Farklı bir yöntem olarak eşikleri konumlandırmak için, belirlenmiş geçiş değişkenine karşı çeşitli istatistiklerin saçılım diyagramları da kullanılabilmektedir. Bu diyagramlar, Y_{t-d_p} 'ye karşı standartlaştırılmış öngörü artıkları ya da EKK öngörü artıklarının çizimi şeklinde veya yine Y_{t-d_p} 'ye karşı bu kez AR katsayısı ardışık tahminlerinin t oranlarının çizimi şeklinde oluşturulmaktadır. Düzenlenmiş otoregresyon çerçevesinde bakıldığında TAR modeli, her bir eşik değerde (r_j) ortaya çıkan çeşitli model değişimlerinden ibarettir. Bu sebepten, öngörü artıkları eşik değerlerde sapmalı olmaktadır. Dolayısıyla, standartlaştırılmış öngörü artıklarının geçiş değişkenine karşı saçılım diyagramı TAR modelinin eşik değerlerinin konumlandırılmasını sağlamaktadır. AR katsayısının ardışık t oranlarının geçiş

değişkenine göre saçılım diyagramı kullanıldığında, doğrusal zaman serisi ile analize başlamak en doğrusudur. Bu durumda t oranı, ilgili AR katsayısının anlamlılığını gösterirken katsayının anlamlı olması durumunda t oranları bootstrap (özyineleme) devam ettikçe kademeli ve düzgün bir şekilde sabit bir değere yakınsamaktadır. Sıralanmış Y_{t-d} eşit olarak konumlandırılmadığından nispi olarak büyük değerlere sahip veri noktaları saçılım diyagramlarında ihmal edilebilmektedir. Bu durumda $(\frac{n}{10}) + p$ sayısınınca sondaki gözlem veri setinden çıkarılabilmektedir (Tsay, 1989, s.236).

Bu süreçte izlenebilecek adımlar şöyle sıralanabilir (Tsay, 1989, s.236):

Adım 1. AR derecesi (p) ve mümkün tüm eşik gecikmelerinin kümesi (S) seçilir. Burada p'nin seçiminde değişkenin kısmi otokorelasyon fonksiyonu (PACF) veya AIC gibi bilgi kriterleri kullanılabilir. Kısmi otokorelasyon fonksiyonunun incelenmesi, süreç gerçekte doğrusal dışı olduğunda daha doğru yol gösterdiğinden ve p'nin de iyileştirilmesine katkı sağladığından bilgi kriterlerine kıyasla daha çok tercih edilmektedir ancak TAR modelinin doğrusal doğası sebebiyle bilgi kriterleri de p'nin ve eşik değerlerin iyileştirilmesinde kullanılabilir.

Adım 2. S kümesinin elemanı olan her bir gecikme parametresi (d) ve veri p değeri için düzenlenmiş otoregresyonlar kurulur ve eşik doğrusal dışılık testi yapılır. Sürecin doğrusal dışılığı tespit edilirse d_p gecikme parametresi seçilir. Mümkün eşik gecikmelerinin kümesi olan S, veri bir p değeri için, $\{1, \dots, p\}$ olarak gösterilebilmektedir. Süreçte mevsimsellik olduğunda, mevsimsel gecikmeler de modele dahil edilebilmektedir. Düzenlenmiş otoregresyon için EKK ve EÇB tahminleri aynı olduğundan, EKK yöntemi kullanım kolaylığı açısından tercih edilmektedir.

Adım 3. Veri p ve d_p için saçılım diyagramları kullanılarak eşik değerler konumlandırılır. Bu diyagramlarda yalnızca anlamlı olan AR katsayılarının t oranlarına bakılması bilgi verici olacaktır.

Adım 4. Gerekli olduğu takdirde her bir rejimde doğrusal otoregresyon teknikleri kullanılarak p ve eşik değerler iyileştirilebilir.

2.2.2.4. Parçalı Doğrusal Otoregresif Parametrelerin Tahmini

TAR Modeli,

$$y_t = \phi_1' x_t I[y_{t-d} \leq c] + \phi_2' x_t I[y_{t-d} > c] + \varepsilon_t$$

olarak yazılabilmektedir. Burada $\phi_j = (\phi_{0,j}, \phi_{1,j}, \dots, \phi_{p,j})'$, $j = 1, 2$ ve $x_t = (1, y_{t-1}, \dots, y_{t-p})'$ olmaktadır. Eşik değeri c sabit tutulduğunda, model geriye kalan parametrelerde doğrusal olmaktadır. Bu sebeple $\phi = (\phi_1', \phi_2')$ parametre vektörü EKK yöntemiyle tahmin edilebilmektedir. Tahminler,

$$\hat{\phi}(c) = \left(\sum_{t=1}^n x_t(c) x_t(c)' \right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^n x_t(c) y_t \right)$$

formülü ile elde edilebilmektedir. Burada $x_t(c) = (x_t' I[y_{t-1} \leq c], x_t' I[y_{t-1} > c])'$ iken $\hat{\phi}(c)$, c 'ye koşullu ϕ tahminini ifade etmektedir. c 'nin EKK tahmini, artık varyansı minimize edilerek,

$$\hat{c} = \arg \min_{c \in C} \hat{\sigma}^2(c)$$

şebeke arama (grid search) ile tahmin edilmektedir. Burada C , mümkün tüm eşik değerlerin kümesi olmaktadır. Mümkün eşik değerler kümesi (C), AR parametrelerinin güvenilir tahminlerini üretmek amacıyla yukarıda tanımlanan tahminci için her rejimin yeterli gözlem sayısına sahip olacağı şekilde olmalıdır. Uçlara gidildiğinde c parametresinin tahmini için elde az veri kalmakta olduğundan bu durum kırpma (trimming) ile ortadan kaldırılabilir. Uçlara doğru $\hat{c}$ doğru olarak elde edilememektedir (Franses ve Dijk, 2003, s.84).

Eşik parametresi, gecikme parametresi ve AR derecesi bilinmediğinden, veri gruplara ayrılarak her rejimin parametreleri EKK yöntemiyle tahmin edilememektedir ve kareler toplamı fonksiyonu ilgili parametrelere göre türevlenemediğinden standart 'Doğrusal Olmayan EKK' algoritması da kullanılamamaktadır. d ve p için her seçimde

EKK tahminini yinelemek kolayken, eşik parametre durumunda sonlu sayıda seçim için kareler toplamı tahmin edilmektedir (Potter, 1999, s.512).

2.3. Yumuşak Geçişli Otoregresif (STAR) Modeller

TAR modelinin koşullu ortalama denklemi sürekli değildir. Eşik değerler, koşullu ortalama fonksiyonunun süreksizlik noktalarıdır. Bu problemi aşmak için STAR modeline geçiş yapılmaktadır. Burada TAR modelinin türevlenemezlik problemi aşmakta fakat geçiş parametreleri zor tahmin edilmektedir (Tsay, 2002, s.34).

TAR modelinde, geçiş değişkeni belli bir eşik değerini geçtiğinde rejim değişimi olmaktadır. Eşiklerin süreksizliği yumuşak geçiş fonksiyonu ile ikame edilirse STAR modeli söz konusu olmaktadır. STAR Modeli,

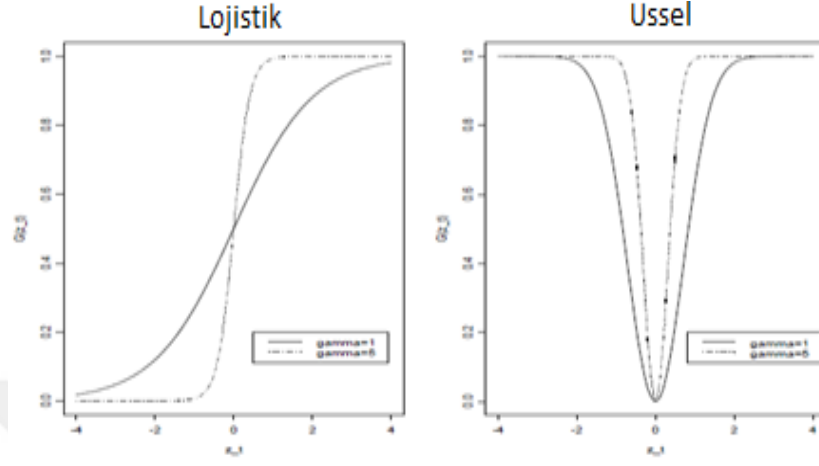
$$y_t = X_t \phi^{(1)} (1 - G(z_t)) + X_t \phi^{(2)} G(z_t) + \varepsilon_t, \quad 0 < G(z_t) < 1 \quad (1)$$

şeklinde yazılabilmektedir. Burada z_t , geçiş değişkeni olmaktadır. STAR Modelleri, herbiri $G(z_t)$ 'nin farklı bir değeriyle ilişkili rejim sürekliliğine izin vermektedir. Standart yumuşak geçiş regresyon modeli,

$$\begin{aligned} y_t &= \overbrace{\phi' z_t}^{\text{doğrusal kısım}} + \overbrace{\theta' z_t G(\gamma, c, s_t)}^{\text{doğrusal olmayan kısım}} + u_t \\ &= \{\phi + \theta G(\gamma, c, s_t)\}' z_t + u_t \end{aligned} \quad (2)$$

olarak da yazılabilmektedir. Burada $z_t = (w_t', x_t')'$, açıklayıcı değişkenler vektörü, $w_t' = (1, y_{t-1}, \dots, y_{t-p})'$ ve $x_t = (x_{1t}, \dots, x_{kt})'$ ise egzojen değişkenler vektörüdür. Ayrıca $\phi = (\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_m)'$ ve $\theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_m)'$ ise $((m+1) \times 1)$ boyutlu parametre vektörleridir. $u_t \sim iid(0, \sigma^2)$ olmaktadır. Geçiş fonksiyonu $G(\gamma, c, s_t)$, s_t 'nin her değeri için parametre uzayının her yerinde sürekli olan s_t sürekli geçiş değişkeninin sınırlandırılmış bir fonksiyonudur. γ , eğim parametresi ve $c = (c_1, \dots, c_K)'$ konum

parametreleri vektörüdür. Konum parametreleri arasında, $c_1 \leq \dots \leq c_k$ sıralaması geçerlidir (Teräsvirta, 2004, s.223).



Şekil 1: Lojistik ve Üssel Geçiş Fonksiyonları

2.3.1. Lojistik Yumuşak Geçişli Otoregresif (LSTAR) Model

LSTAR modeli, daralma ve genişleme dönemlerinin farklı dinamiklere sahip olduğu fakat iki uç rejim arasındaki geçişin yumuşak gerçekleştiği durumları tasvir etmektedir. İki rejim arasında K geçişe izin veren lojistik geçiş fonksiyonu,

$$G(z_t; \gamma, c) = \frac{1}{1 + \exp \left\{ -\gamma \prod_{k=1}^K (z_t - c_k) \right\}} , \quad \gamma > 0 \quad (3)$$

olarak ifade edilmektedir. K genellikle bir ya da iki değerini almaktadır. K=1 olduğunda, $\phi + \theta G(\gamma, c, s_t)$ parametreleri ϕ 'den $\phi + \theta$ 'ya geçiş değişkeninin bir fonksiyonu olarak monoton değişmektedir. K=2 olduğunda ise parametreler, lojistik fonksiyonun minimum değerine ulaştığı $\frac{(c_1 + c_2)}{2}$ orta noktası etrafında simetrik olarak değişme göstermektedir. Lojistik fonksiyonun minimum değeri, 0 ile 1/2 arasında uzanmaktadır. $\gamma \rightarrow \infty$ iken minimum değer sıfıra ulaşırken, $c_1 = c_2$ ve $\gamma < \infty$ iken ise 1/2 değerine eşit olmaktadır. K=1 durumundaki lojistik yumuşak geçiş modeli, asimetrik davranışı karakterize edebilmektedir. İş çevrimi modellemesi bu duruma örnek olarak

verilebilmektedir. $K=2$ olması durumunda sürecin lokal dinamik davranışı ise, s_t 'nin büyük ve küçük değerlerinde benzer, orta değerlerinde farklı olmaktadır. $\gamma = 0$ olduğunda $G(\gamma, c, s_t) \equiv \frac{1}{2}$ olmaktadır ve (2) numaralı yumuşak geçiş regresyon modeli doğrusal modele dönüşmektedir. $\gamma \rightarrow \infty$ olduğunda ise, $K=1$ durumundaki LSTR modeli, eşit varyanslara sahip iki rejimli değişim regresyonuna yakınsamaktadır. $\gamma \rightarrow \infty$ iken $K=2$ durumundaki LSTR modelinde ise, uç rejimlerin özdeş, ortanca rejimin diğer iki rejimden farklı olduğu üç rejimli değişim regresyon modeline yakınsama olmaktadır. $K=2$ durumundaki LSTR modeline ESTR modeli alternatif oluşturmaktadır (Teräsvirta, 2004, s.223).

$F(Z_t; \gamma, s) = [1 + \exp(-\gamma(Z_t - s))]^{-1}$ iken $|Z_t - s|$ büyük ve $Z_t < s$ ise, geçiş fonksiyonu sıfıra doğru yakınsamaktadır. Süreç, bir resesyon dönemini tasvir etmektedir. Bu durumda doğrusal otoregresif model,

$$Y_t = \phi_0^{(1)} + \phi^{(1)'} X_t + \varepsilon_t$$

olarak yazılabilmektedir. $|Z_t - s|$ ifadesi büyük bir değer alıp, $Z_t > s$ olduğunda, geçiş fonksiyonu bire yakınsar ve süreç genişleme dönemini tasvir eder. Bu durumda doğrusal otoregresif model,

$$Y_t = \phi_0^{(2)} + \phi^{(2)'} X_t + \varepsilon_t$$

olarak yazılabilmektedir. Z_t geçiş değişkeninin orta değerleri, modeli uç modellerin kombinasyonlarına götürmektedir. LSTAR modeli, daralma ve genişleme dönemlerinin farklı dinamiklere sahip olup iki uç rejim arasındaki geçişin yumuşak olduğu durumları tasvir etmektedir. Bu model aynı zamanda asimetrik gerçekleştirmeleri de yakalayabilmektedir (Perraudin, 2002, s.15).

2.3.2. Üssel Yumuşak Geçişli Otoregresif (ESTAR) Model

ESTAR modeli, daralmaların ve genişlemelerin orta rejim dinamiğinden farklı olarak benzer dinamiklere sahip olduğu durumlarda kullanılabilen bir modeldir. Bu

model, yüksek büyüme oranından normal büyüme oranına geçişin, negatif büyümeden orta büyümeye geçişle aynı şekilde olduğu durumu temsil etmektedir. Böyle bir model, başlangıç koşullarından bağımsız, asimptotik olarak periyodik ‘limit çevrim’ adı verilen salınımlar da üretebilmektedir. (2) numaralı denklemin geçiş fonksiyonu ESTR modelinde,

$$G_E(\gamma, c, s_t) = 1 - \exp\left\{-\gamma(s_t - c_1^*)^2\right\}, \gamma > 0$$

olmaktadır. Bu fonksiyon, $s_t = c_1^*$ çevresinde simetrik olmaktadır ve her ne kadar minimum değeri (sıfır) (3) numaralı geçiş fonksiyonunun minimum değerinden farklı olsa da eğim parametresi γ 'nın düşük ve orta değerlerinde aynı şekle sahiptir. Bu fonksiyon K=2 durumundaki LSTR modeline göre bir parametre daha az içerdiğinden ilgili lojistik fonksiyona bir alternatif olabilmektedir fakat dezavantaj olarak $\gamma \rightarrow \infty$ iken ve $c_2 - c_1$ sıfıra yakinken ESTR modeli, K=2 durumundaki LSTR modeline iyi bir yakınsama sağlamamaktadır. (2) numaralı modelde x_t vektörü yer almadığında ve $s_t = y_{t-d}$ ya da $s_t = \Delta y_{t-d}$, $d > 0$ olduğunda STR modeli, tek değişkenli STAR modeline dönüşmektedir (Teräsvirta, 2004, s.224).

2.3.3. STAR Modellemesinin Basamakları

Bir regresyon modelinin politika belirleme ya da öngörü amacıyla kullanılabilmesi için ilk olarak doğru belirlenmesi yani fonksiyonel kalıbının ve değişkenlerinin doğru tespit edilmesi gerekmektedir. İkinci olarak, kurulan modelin uygun tahmin yöntemiyle tahmin edilmesi doğru parametre değerlerinin elde edilmesi açısından önemlidir. Üçüncü olarak ise, kurulan doğru belirlenmiş ve uygun yöntemle tahmin edilmiş modelin artıklarının istatistiksel testlerle analizi, modelin politika belirleme ya da öngörü amaçlı kullanılıp kullanılamayacağının kararını vermek için kaçınılmazdır. Bu üç basamaklı süreç tüm modeller için geçerli olup, 'Yumuşak Geçişli Ototregresif Model' de 'Belirlenme, Tahmin ve Değerlendirme' olmak üzere üç aşamada incelenmektedir.

2.3.3.1. Belirlenme

Doğrusallık testi önceden belirlenmiş bir geçiş değişkenine göre yapılmaktadır ancak iktisat teorisi bu değişken hakkında araştırmacıya açık bir fikir vermiyorsa bu durumda önceden belirlenmiş mümkün geçiş değişkenleri kümesindeki her değişken için test tekrar edilmektedir. Doğrusal modelin doğru belirlenmesi, model doğrusallık testinin sıfır hipotezini oluşturduğundan oldukça önemlidir. Akaike (AIC), Bayesyen (BIC), HANNAN gibi bilgi kriterlerine, portmanto testine veya regresyondaki en yüksek gecikmenin anlamlılık testine dayalı olarak regresörler seçilebilmektedir. Terasvirta (1994)'te STAR modeli çerçevesinde belirtildiği gibi otoregresif gecikmenin aşırı belirlenmesi testin gücü üzerinde olumsuz bir etkiye sahipken, eksik belirlenmesi doğrusallık testlerini sapmalı yapmaktadır ve sonuç olarak da H_0 yanlış bir şekilde reddedilmektedir yani 1.tip hata yapılmaktadır (Perraudin, 2002, s.6). AR modelinde kullanılan gecikme derecesinin, mutlaka STAR modelinde de uygun gecikme derecesi olması gerekmez.

LSTAR ve ESTAR Modelleri arasında benzerlik olmasına karşılık bu fonksiyonlar farklı geçiş tiplerine imkan vermektedir. Bu özellikler maddeler halinde aşağıdaki şekilde sıralanabilmektedir (Zivot ve Wang, 2005, s.678):

1. γ küçük olduğunda hem lojistik hem de üssel geçiş fonksiyonları 0 ile 1 arasında çok düzgünce ve yavaşça değişmektedir. γ büyük olduğunda daha hızlı bir değişim söz konusudur.

2. $\gamma \rightarrow \infty$ iken iki geçiş fonksiyonu da iki değerli hale gelmektedir. Lojistik fonksiyon, $I(z_t > c)$ gösterge fonksiyonuna yaklaşır ve LSTAR modeli TAR modeline dönüşür. Üssel geçiş fonksiyonu ise, $I(z_t = c)$ gösterge fonksiyonuna yaklaşır.

3. Lojistik fonksiyon monotondur ve LSTAR modeli iki rejim arasında z_t 'nin c 'den daha küçük ya da daha büyük olmasına göre yumuşakça geçiş yapar.

4. Üssel fonksiyon simetriktir ve z_t 'nin c'den ne kadar uzakta olduğuna göre iki rejim arasında yumuşakça geçiş yapar. LSTAR modeli için hem z_t ile c arasındaki mesafe hem de mesafenin işareti etkilidir. ESTAR modeli içinse yalnızca z_t ile c arasındaki mesafe etkilidir, burada işaretin herhangi bir etkisi yoktur.

2.3.3.1.1. STAR Modellerinde Doğrusal Dışılık Testleri

STAR modellerinde doğrusallık testleri ve belirleme testleri doğru modelin kurulması açısından önem arz etmektedir. STAR modellerinin doğrusal model karşısında test edilip uygun model olması durumunda belirleme testlerine geçilmelidir.

- **Sabit Varyanslı Hatalarla STAR Doğrusal Dışılık Testi:** $H_0 : \gamma = 0$ olduğunda, belirlenemeyen zararlı parametre problemi sebebiyle test istatistiği dağılımı standart olamamaktadır. H_0 altında belirlenmemiş STAR modeli parametrelerinin sebep olduğu karmaşık problemleri önlemek için Luukkonen, Saikkonen ve Terasvirta (1988), geçiş fonksiyonunun yerine onun $\gamma=0$ komşuluğunda uygun bir Taylor serisi yaklaştırmasını ikame etmeyi önermişlerdir. Bu yolla, fonksiyonlar arası yaklaştırma yapılabilmektedir. LSTAR modelinin geçiş fonksiyonu, LSTAR modelinde 3.derece Taylor açılımıyla ikame edilirse,

$$y_t = X_t\beta_0 + X_tZ_t\beta_1 + X_tZ_t^2\beta_2 + X_tZ_t^3\beta_3 + \varepsilon_t \quad (4)$$

regresyonu elde edilmektedir. Burada; β_i , katsayı vektörleri olup orijinal model parametresi olan ϕ 'lerin fonksiyonudur ve sıfır hipotezi $H_0 : \beta_j = 0$, $j=1,2,3$ olarak kurulmaktadır (Zivot ve Wang, 2005, s.678). Testin basamakları şöyledir:

1. y_t 'nin X_t üzerine regresyonu kurulur ve doğrusal model EKK yöntemiyle tahmin edilir. Modelin artık kareler toplamı (AKT1) hesaplanır.

2. (4) numaralı regresyon kurulur ve artık kareler toplamı (AKT2) elde edilir.

3. $LM_3 = \frac{T.(AKT_1 - AKT_2)}{AKT_1} \xrightarrow{asimp.} \chi^2(3p)$ istatistiği hesaplanmaktadır.

Escrignano ve Jorda (1999), bazı durumlarda bu prosedürün tek eşikli LSTR (LSTR1) modelinin seçimini kolaylaştırdığını göstermişlerdir çünkü (4) numaralı regresyonda LSTR1 hakkında bilgi sağlayan iki vektör varken, iki eşikli LSTR (LSTR2) hakkında bilgi sağlayan tek vektör vardır ve dolayısıyla dördüncü derece polinomu da (4) numaralı regresyona eklemek gerekmektedir ancak dördüncü derece Taylor açılımı çok fazla sayıda kısıta sahip olduğundan serbestlik derecesi kaybına neden olmaktadır ve genellikle tercih edilmemektedir. Ayrıca büyük örneklem durumunda χ^2 dağılımı tercih edilirken küçük örneklemelerde F dağılımı tercih edilmektedir. Bazı aşırı değerlerin olması durumunda, H_0 gereğinden fazla reddedilebileceğinden 'anlamlılık bozulması (size distortion)' olmaktadır ve ayrıca güç problemi de ortaya çıkabilmektedir. Bu durumda modelde kuklalar da kullanılıp test yapılabilmektedir ve böylelikle testin dağılımı da bozulmamış olmaktadır. Taylor yaklaşımı, genellikle parametrelerin H_0 altındaki değerleri etrafında yapılmaktadır ancak gerçek parametreler H_0 'dan uzaklaştıkça yaklaşım daha kötü bir hal aldığından, Taylor açılımı değişken komşuluğunda da yapılabilmektedir. Böylelikle değişkenin sonlu varyansına bağlı olarak yaklaşım hatalarını sınırlandırmak mümkün olmaktadır. SupLM, bootstrap hesapları ve grid taramalar gerektirdiğinden ve standart olmayan asimptotik dağılımlara sahip olduğundan Taylor açılımı daha tercih edilir olmaktadır. Bu testler otokorelasyondan ve değişen varyanstan fazla etkilenmemektedir. Alternatif hipotez altındaki polinom terimler bu sorunları önemli ölçüde çözmektedir. Benzer şekilde ESTAR modelindeki geçiş fonksiyonu 2.derece Taylor seri açılımıyla ikame edilirse,

$$y_t = X_t\beta_0 + X_tZ_t\beta_1 + X_tZ_t^2\beta_2 + X_tZ_t^3\beta_3 + X_tZ_t^4\beta_4 + \varepsilon_t \quad (5)$$

regresyonu elde edilmektedir. İlgili sıfır hipotezi, $H_0: \beta_j=0$, $j=1,2,3,4$ olarak kurulmaktadır (Zivot ve Wang, 2005, s.679). LM_4 test istatistiğinin dağılımı asimptotik olarak $\chi^2(4p+1)$ olmaktadır. Birinci dereceden Taylor açılımı kullanılarak elde edilen yardımcı regresyon iki dönüm noktasını yakalayamadığından Escrignano ve Jorda (1999)

tarafından önerilen üssel geçiş fonksiyonunun ikinci dereceden Taylor açılımı yardımcı regresyon olarak kullanılmaktadır.

Pratikte, (4) numaralı regresyona dayalı LSTAR modeli için LM testi, ESTAR alternatifine karşı da güçlüdür. Bu sebeple cimrilik prensibi gereği yalnızca (4) numaralı regresyona dayalı LM testi, STAR tipi doğrusal dışılığı test etmede hesaplanmaktadır. Küçük örneklerde ise asimptotik χ^2 dağılımı yerine LM testinin F versiyonu tercih edilmektedir.

- **Değişen Varyanslı Hatalarla STAR Doğrusal Dışılık Testi:** Davidson ve Mackinnon (1985), Granger ve Terasvirta (1993), değişen varyanslı hatalara karşı dirençli LM doğrusal dışılık testi önermişlerdir. Testin adımları aşağıdaki şekildedir (Zivot ve Wang, 2005, s.680):

1. y_t 'nin X_t üzerine regresyonu kurulur ve EKK artıkları olan $\hat{\varepsilon}_t$ elde edilir.
2. $X_t z_t^j$ 'nin X_t üzerine regresyonu kurulur ve $\widehat{R}_t$ artıkları elde edilir.
3. Birim vektörün, $\widehat{R}_t \hat{\varepsilon}_t$ üzerine regresyonu kurulur ve bu regresyondan açıklanmış kareler toplamı olarak LM istatistiği hesaplanır.

2.3.3.1.2. LSTAR ve ESTAR Modelleri Arasında Seçim Testi

LM Testi yapılarak STAR modelinin fonksiyonel biçimi belirlenebilmektedir. Test denklemi,

$$y_t = Z_{1t}\beta_1 + \sum_{j=1}^p \beta_{2j} y_{t-j} s_t + \sum_{j=1}^p \beta_{3j} y_{t-j} s_t^2 + \sum_{j=1}^p \beta_{4j} y_{t-j} s_t^3 + \varepsilon_t$$

olarak yazılabilmektedir. LSTAR alternatifine karşı doğrusallık öne süren sıfır hipotezi,

$$H_0 : \beta_{2j} = \beta_{3j} = \beta_{4j} = 0, j=1, \dots, p$$

olarak kurulmaktadır. Test farklı d değerleri için yapılmaktadır ve en küçük olasılık değerine sahip d değeri tercih edilmektedir. Kısıtlı ve kısıtsız modelin artık kareleri toplamı kullanılarak hesaplanan Lagrange Çarpanı (LM) istatistiği,

$$LM = \frac{(SSR_0 - SSR_1)}{\hat{\sigma}_0^2} \sim \chi^2(3p)$$

olmaktadır. Burada SSR_0 , kısıtlı modelin artık kareler toplamı iken SSR_1 , kısıtsız modelin artık kareler toplamıdır. $\hat{\sigma}_0^2$ ise, kısıtlı modelin hata varyansı tahminidir (Terasvirta, Tjostheim ve Granger, 2008, s.398).

ESTAR alternatifine karşı yapılan testte de yardımcı regresyon yukarıdaki gibi olmakla birlikte test edilen hipotezler farklılık göstermektedir. Burada üç farklı yuvalanmış alternatif hipotez söz konusudur. Bunlar,

$$H_{04} : \beta_{4j} = 0, j=1, \dots, p \quad (F_3)$$

$$H_{03} : \beta_{3j} = 0 / \beta_{4j} = 0, j=1, \dots, p \quad (F_2)$$

$$H_{02} : \beta_{2j} = 0 / \beta_{3j} = \beta_{4j} = 0, j=1, \dots, p \quad (F_1)$$

olarak yazılabilmektedir. H_{03} 'ü red için p değeri diğer iki testinkinden küçükse ESTAR ya da LSTR2 modeli tercih edilmektedir. Aksi halde LSTAR1 modeli ile analize devam edilebilir. H_{04} reddedilebiliyorsa LSTAR, reddedilemiyorsa ESTAR modeli tercih edilmektedir. H_{03} red ise ESTAR, reddedilemiyorsa LSTAR modeli tercih edilmektedir. H_{04} ve H_{03} reddediliyorsa ve H_{02} reddedilemiyorsa LSTAR modeli tercih edilmektedir (Terasvirta, Tjostheim ve Granger, 2008, ss.400-401).

Escribano ve Jorda (1999), (5) numaralı yardımcı regresyonu kullanarak uygun geçiş fonksiyonu için farklı hipotezler kullanarak test yapmaktadır. Hipotezler,

$$H_{0E} : \beta_2 = \beta_4 = 0 \quad (F_E)$$

$$H_{0L} : \beta_1 = \beta_3 = 0 \quad (F_L)$$

olarak yazılmaktadır. Burada, hesaplanan F istatistiklerinden minimum olasılık değerine sahip olanı seçilmektedir. $c \neq 0$ iken test etkinliğini korumaktadır. $c = 0$ iken doğrusal ve kübik terimler sıfır olursa ESTR modeli tercih edilir. $c = 0$ iken kuadratik ve dördüncü derece terimler sıfır olursa LSTR modeli tercih edilir. $c = 0$ iken H_{0L} reddedilir, H_{0E} reddedilemezse LSTR, tersi durumda ise ESTR modeli tercih edilir (Escribano, Jorda, 1999, s.14).

2.3.3.2. Tahmin

Model parametreleri, koşullu EÇB yöntemiyle tahmin edilmektedir. Log-benzerlik nümerik olarak maksimize edilmektedir. Algoritma için doğru başlangıç değerleri belirlenmesi önemli bir noktadır. (3) numaralı geçiş fonksiyonundaki γ ve c sabit olduğunda STR modeli parametrelerde doğrusal olmaktadır. Bu durumda şebeke (grid) oluşturulabilmektedir. Geriye kalan ϕ ve θ parametreleri $K=2$ durumunda, (γ, c_1) veya (γ, c_1, c_2) 'ye koşullu olarak tahmin edilebilmekte ve modellerin artık kareler toplamları (AKT) hesaplanabilmektedir. Parametrelerin farklı kombinasyonları için süreç devam etmektedir ve AKT 'yi minimize eden parametre değerleri seçilmektedir. Şebeke yalnızca iki ya da üç boyutlu olduğundan süreç hesap yoğunluğu açısından yönetilebilirdir. Şebeke oluşturulurken γ , ölçek bağımsız bir parametre olmadığından geçiş fonksiyonunun üssü, geçiş değişkeninin örneklem standart sapmasının $(\hat{\sigma}_s)$ K. kuvveti ile bölünerek standartlaştırılmaktadır. Bu durumda geçiş fonksiyonu,

$$G(\gamma, c, s_t) = \left(1 + \exp \left\{ - \left(\frac{\gamma}{\sigma_s} \right) \prod_{k=1}^K (s_t - c_k) \right\} \right)^{-1}, \quad \gamma > 0$$

olmaktadır. Burada γ parametresi ölçekten bağımsız olmaktadır ve etkin bir şebeke oluşturmak daha kolay hale gelmektedir. STAR modellerinin tahmininde öncelikle geçiş değişkeninin belirlenip geçiş fonksiyon tipinin seçilmiş olması gerekmektedir. LSTAR ve ESTAR arasında, spesifik geçiş davranışı dikkate alınarak ya da farklı bilgi

kriterleri karşılaştırılarak karar verilebilmektedir (Terasvirta, Tjostheim ve Granger, 2008, ss.402-403).

LSTAR modelinin tahmin aşamasında önce AR derecesinin belirlenmesi ve geçiş değişkeninin seçilmesi ile tahmin sürecine başlanır. LSTAR Modeli, doğrusal olmayan en küçük kareler (NLS) yöntemi ile tahmin edilebilmektedir. Bu aşamada,

$$\tilde{X}_t = \begin{bmatrix} X_t(1-G(z_t;\gamma,c)) \\ X_t G(z_t;\gamma,c) \end{bmatrix}, \quad \hat{\Phi} = \begin{bmatrix} \hat{\Phi}^{(1)} \\ \hat{\Phi}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \hat{\varepsilon}_t = y_t - \tilde{X}_t \hat{\Phi}$$

$$\hat{\theta} = \underset{\gamma,c}{argmin} \sum_t \hat{\varepsilon}_t^2$$

artık kareler toplamı (AKT)'nı minimize eden $\hat{\theta}$ tahminci vektörü elde edilmektedir. Bu durumda tahminci,

$$\hat{\Phi} = \begin{bmatrix} \hat{\Phi}^{(1)} \\ \hat{\Phi}^{(2)} \end{bmatrix} = \left[\sum_t (\tilde{X}_t' \tilde{X}_t) \right]^{-1} \left[\sum_t \tilde{X}_t' y_t \right]$$

olarak yazılabilmektedir. Doğrusal Olmayan EKK (NLS) amaç fonksiyonunun minimizasyonu yalnızca γ ve c için işletilmiştir çünkü bunlar bilindiğinde $\hat{\Phi}^{(1)}$ ve $\hat{\Phi}^{(2)}$ EKK yöntemi ile elde edilebilir hale gelmektedir. Hataların normal dağıldığı varsayımı altında NLS tahmini, En Çok Benzerlik (ML) tahminine denk olmaktadır. Aksi halde NLS tahminleri, quasi-ML tahminleri gibi yorumlanabilmektedir (Zivot, Wang, 2005, s.681). LSTAR modelinde geçiş değişkeni eşik değerine soldan yaklaşırsa grafiğin uzatılmış S şekli yok olur. Geçiş değişkeni eşik değerden çok uzaksa ya da büyükse grafik bu kez bire doğru yakınsar (Garcon, 2012, s.10).

γ 'nın kesin tahminini yapmak zordur. γ 'nın büyük değerleri için lojistik fonksiyonun şekli az değişmektedir. $\hat{\gamma}$ için eşik değer çevresinde çok gözleme ihtiyaç vardır. Bu durum genellikle gerçekleşmediğinden, $\hat{\gamma}$ genelde belirsiz ve t değerine göre anlamsızdır. Bu anlamsızlık STAR tipi doğrusal dışılığa karşı kanıt olarak yorumlanmamalıdır (Franses ve Dijk, 2003, s.91).

γ tahmini yüksek olduğunda ve özellikle eşik değeri s de aynı zamanda küçük olduğunda algoritmanın yakınsama sağlaması zorlaşmaktadır. Bu sebeple de nümerik bir yöntem takip edilmektedir. Tahminin birinci aşamasında 'simpleks yöntemi' kullanılmaktadır. Bu yöntem gradyan yöntemlerden daha yavaş bir yakınsama sağlamaktadır. Kesin sonuçlar, gradyan yöntemlerin uygulanmasından sonra elde edilmektedir. Terasvirta (1994), LSTAR modelinde düzgünleştirme parametresini geçiş değişkeninin standart sapmasına bölerek normalleştirmeyi önermektedir. Bu normalleştirme olmaksızın, düzgünleştirme parametresi muazzam bir değişim göstermektedir. Bu durum da başlangıç koşulunun seçimini zorlaştırmaktadır (Perraudin, 2002, s.22).

ESTAR modelinde ise, γ ile $\phi^{(2)}$ tahmincileri arasındaki kuvvetli negatif korelasyon sebebiyle parametreler vektörü eşanlı olarak tahmin edilememektedir. Bu durumda da düzgünleştirme parametresi serinin varyansına bölünebilmektedir. Bu normalleştirme, düzgünleştirme parametresi için başlangıç değeri bulmayı kolaylaştıracaktır (1 genellikle tatmin edici bir başlangıç değeridir). Diğer parametrelerin başlangıç değerlerini bulmak için ise doğrusal otoregresif model tahmin edilmektedir. Bu otoregresif parametreler $\gamma=1$ ile kısıtlanmış STAR modeli tahmini için başlangıç koşulları olarak kabul edilmektedir. Bu tahminler, doğrusal olmayan modelin global tahmini için başlangıç koşullarını oluşturmaktadır. Düzgünleştirme parametresinin yakınsaması ise yavaş olabilmekte ve bu parametrenin standart hatası sıklıkla yüksek çıkabilmektedir. Bu durum, bu parametrenin değerinin büyük olduğunu ve rejimler arası geçişin yeterince hızlı olduğunu göstermektedir (Perraudin, 2002, s.23).

STAR Modellerinin tahmininde γ parametresi büyük değer alabilir ve bu durum optimizasyonda sayısal problemlere sebebiyet verebilir. Bu sebepten ESTAR modelinde orijinal üssel fonksiyon yerine,

$$G(z_t; \tilde{\gamma}, c) = 1 - \exp \left\{ -e^{\tilde{\gamma}} \frac{(z_t - c)^2}{\sigma_z^2} \right\}$$

fonksiyonu tahmin edilmektedir. Burada σ_z^2 , z_t geçiş değişkeninin örneklem varyansı

olmaktadır. Yeni $\tilde{\gamma}$ parametresi, orijinal γ parametresine, $\gamma = \frac{e^{\tilde{\gamma}}}{\sigma_z^2}$ aracılığıyla dönüştürülebilmektedir. Bu dnştrmn sayısal özellikleri şunlardır (Zivot ve Wang, 2005, s.684):

1. z_t ile c arasındaki uzaklığın karesi, z_t 'nin varyansı ile ölçeklendirilmiştir yani ölçekten bağımsızlık söz konusu olmaktadır.

2. γ 'nın $(0, \infty)$ aralığı boyunca uzanması, γ açısından kısıtlı optimizasyon gerektirmektedir. Yeni parametre $\tilde{\gamma}$ ise $(-\infty, +\infty)$ aralığı boyunca uzanmakta ve kısıtsızdır.

3. $\tilde{\gamma}$, γ 'nın logaritmasının doğrusal fonksiyonu olup γ 'ya göre titreşimi daha fazla azaltılmıştır.

Üssel fonksiyon grafiğine bakıldığında, grafiğin U biçiminde olduğu grlmektedir çünkü üssel fonksiyon eşik değere yakın y_{t-d} değerleri için ortadan kalkmakta ve y_{t-d} eşikten uzaklaştığa bire eşit olmaktadır. Dolayısıyla burada, yüksek ve düşük y_{t-d} değerlerine bağlı aynı dinamiğe sahip iki dış rejim ve c 'ye yakın y_{t-d} değerleri için merkezi bir rejim olacaktır. Bu durumda orta rejimin dinamiğine zıt olarak uç rejimler özdeş olmaktadır. Örneğin reel döviz kuru modellemesi için lojistik fonksiyon en makul olan fonksiyon değildir çünkü lojistik fonksiyon satın alma gücü paritesine göre negatif ve pozitif sapmalara karşı simetrik değildir. Buna karşılık üssel fonksiyon, rejimler arasında yumuşak geçişe ve denge değerinin altındaki ve üstündeki sapmalar için simetrik uyarlamalara izin vermektedir (Garcon, 2012, s.11). ESTAR modelinde dış rejim evreleri benzer dinamik izlerken, merkezi rejim farklı dinamik izlemektedir. ESTAR modeli uzunluk etkisine, LSTAR modeli ise işaret etkisine sahip olmaktadır. Özetlenecek olursa, STAR modeli kurma basamakları aşağıdaki gibidir (Tersvirta, 1994, s.210):

1. AR(p) modelinin belirlenmesi
2. Farklı geçiş değişkenleri (y_{t-d}) için, $1 < d < p$ kısıtına uyularak, STAR modeli alternatifine karşı doğrusallık hipotezinin test edilmesi
3. ESTAR ve LSTAR modelleri arasında seçim için test yapılması

2.3.3.3. Değerlendirme

Model değerlendirmesinde eşik değerin serinin ölçeğine ait olup olmadığı ve γ hariç tahmin edilen parametrelerin standart hatalarının çok büyük olmaması kontrol edilmelidir. JB Normallik testi, ARCH, McLeod-Li, hataların bağımsızlığı, kalan doğrusallık ve parametrelerin kararlılık testleri model değerlendirme aşamasında yapılması gerekli önemli testlerdendir (Perraudin, 2002, s.23).

Bu alt başlıkta, uygun bir STAR modeli kurulduktan sonra yapılması gerekli olan, parametre tahminlerinin etkinlik özelliğini etkileyen otokorelasyon varsayımının sağlanıp sağlanmadığını çıkarsamak için 'Otokorelasyon Testi', ortalamada doğrusal olmayan bir model olan STAR modeli tahmin edildikten sonra geriye kalan doğrusal dışılık olup olmadığının tespiti için 'İhmal Edilmiş Doğrusal Dışılık Testi' ve son olarak tahmin edilen STAR modeli parametrelerinin zaman içinde değişip değişmediğinin kararı için 'Parametre İstikrar Testi' anlatılmaktadır.

2.3.3.3.1. STAR Modellerinin Yanlış Belirlenme Testleri

Uygun modelin STAR tipi bir model olduğu sonucuna varıldıktan sonra modelin doğru belirlenip belirlenemediğinin tespiti için otokorelasyon testi, ihmal edilmiş doğrusal dışılık testi ve parametre istikrar testi yapılması gereklidir. Bu testleri geçen model doğru belirlenmiş olmaktadır ve politika veya öngörü amacıyla kullanılabilir (Eitrheim ve Terasvirta, 1996, ss.61-67).

- **Otokorelasyon Testi:** ' H_0 : Hata terimleri arasında otokorelasyon yoktur' ve ' H_1 : Hata terimleri arasında otokorelasyon vardır' olarak oluşturulmaktadır. LM istatistiği ise, $LM = T \cdot R^2$ olarak hesaplanmaktadır. Formülde kullanılan R^2 , STAR

modelinden elde edilen artık serisi $(\hat{\varepsilon}_t)'$ nin $\nabla F(x_t, \beta) = \frac{\partial \hat{F}(x_t, \hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}}$ üzerine regresyonundan elde edilen belirlilik katsayısıdır. Yardımcı regresyon modeli,

$$\hat{\varepsilon}_t = \sum_{i=1}^q \alpha_i \hat{\varepsilon}_{t-i} + \alpha_{q+1} \frac{\partial \hat{F}(x_t; \hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}} + u_t$$

olarak yazılmaktadır. Burada $F(x_t; \beta) = \phi_1' x_t (1 - G(s_t; \gamma, c)) + \phi_2' x_t G(s_t; \gamma, c)$ olmaktadır. Yardımcı regresyona dayalı olarak $H_0 : \alpha_1 = \dots = \alpha_{q+1} = 0$ hipotezi test edilmektedir. Burada x_t , değişkenler vektörü iken $\beta = (\phi_1, \phi_2, \gamma, c)'$ parametre vektörüdür. LM test istatistiği, $\chi^2_{(q)}$ dağılımına sahiptir. Serbestlik derecesi q, gecikmeli artık dizisinin $(\hat{\varepsilon}_{t-1}, \hat{\varepsilon}_{t-2}, \dots, \hat{\varepsilon}_{t-q})$, en büyük gecikmesini ifade etmektedir.

- **İhmal Edilmiş Doğrusal Dışılık Testi:** Geçiş değişkeninin doğru seçilmemesi, AR derecesinin yeterince yüksek olmaması gibi sebepler ilave doğrusal dışılığa sebep olabilmektedir ancak bir modele parametre eklendikçe varyanslar artacağından risk artmaktadır. Bu riske karşılık uyum iyiliğinin ne kadar düzeltilebileceği dikkate alınmalıdır. Yeterince uyum iyiliği varsa risk almaktan kaçınılabılır. Bu testte iki rejimli STAR modeli, üç rejimli STAR modeline karşı sınanmaktadır. İkinci bir geçiş fonksiyonu olan $F_2(s_t, \gamma_2, c)$ modele eklenmekte ve $\gamma_2 = 0$ çevresinde 3.dereceden Taylor açılımı $F_2(s_t, \gamma_2, c)$ geçiş fonksiyonunun yerine ikame edilmektedir. Yardımcı regresyon

$$y_t = \alpha_1' z_t + \alpha_2' z_t * F_1(s_t, \gamma_1, c_1) + \delta_0' z_t + \delta_1' z_t s_t + \delta_2' z_t s_t^2 + \delta_3' z_t s_t^3 + u_t$$

olarak yazılmaktadır. Bu yardımcı regresyona dayalı olarak $H_0 : \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$ kurulmaktadır. STAR Modeli, doğrusal olmayan EKK ile tahmin edilmektedir ve $\hat{\varepsilon}_t$ 'nin,

$\nabla F(z_t, \beta)$ üzerine regresyonu kurulup, R^2 hesaplanmaktadır. Burada, $\beta = (\alpha_2, \gamma_1, c_1)$ olmaktadır. Hesaplanan istatistik ise, $LM \sim \chi^2(3(p+1))$ olarak dağılmaktadır.

- **Parametre İstikrar Testi:** STAR Modeli parametreleri tahmin esnasında sabit varsayılmaktadır. Bu sebepten, zaman içinde parametrelerin değişip değişmediğinin test edilmesi gerekmektedir. Lin-Terasvirta (1994) ve Lundberg-Terasvirta (1998), STAR modelinin parametrelerinin içsel değişkenle aynı geçiş fonksiyonuna sahip olduğunu varsaymaktadır. Burada, geçiş değişkeni zaman olarak alınıp parametre istikrar testi yapılmaktadır. Geçiş fonksiyonu $F_2(t, \gamma, c_2)$ olsun. γ parametresi, geçiş hızını ifade etmektedir. $\beta = (\alpha_2(t), \gamma, c)'$ satır vektörüdür ve $\alpha_2(t) = \alpha_{20} + \lambda \alpha_2 F(t, \lambda \alpha_2, c \alpha_2)$ olmaktadır. Zararlı (nuisance) parametre problemi için 3.derece Taylor açılımı kullanılmıştır ve $H_0 : \gamma = 0$ olarak oluşturulmuştur. LM istatistiği ile sıfır hipotezinin reddedilip reddedilemeyeceğine karar verilmektedir. Geçiş değişkeni zaman olduğundan yardımcı regresyon,
$$Y_t = \theta_1' x_t + \theta_2' x_t G_1(s_{1t}; \gamma_1, c_1) + \beta_1' x_t t + \beta_2' x_t t^2 + \beta_3' x_t t^3 + (\beta_4' x_t t + \beta_5' x_t t^2 + \beta_6' x_t t^3) G_1(s_{1t}; \gamma_1, c_1) + e_t$$
 olmaktadır. Burada, $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = 0$ hipotezi test edilmektedir ve test istatistiği $LM \sim \chi^2(6(p+1))$ olarak dağılmaktadır.

2.3.4. TAR ve STAR Süreci İzleyen Serilerde Birim Kök Testleri

Bu alt başlıkta, ortalamada doğrusal olmayan seriler için uygulanan birim kök testlerine değinilmektedir.

- **Caner - Hansen Birim Kök Testi** (Caner ve Hansen, 2001, ss.1555-1596): Önceki istatistiksel yöntemler, birim kök ve eşiklerin ortak modelleme probleminden dolayı durağan dışılığı doğrusal dışılıktan ayıramamaktadır. Caner-Hansen birim kök testi bu soruna çözüm sunmakta ve otoregresif birim kök'e sahip iki rejimli TAR modeline dayanmaktadır. Asimptotik ve bootstrap tabanlı testler yardımıyla hem doğrusal olmama hem de durağan olmama durumları birlikte dikkate alınmaktadır.

Her bir eşik değer adayı gözleme göre tahmin edilen TAR modellerinin artık varyanslarından en küçüğünü elde etmeyi sağlayan gözlem değeri 'eşik değeri' olarak seçilmektedir ve seçilen eşik değeri yerine koyularak parametrelerin EKK tahminleri elde edilmektedir. TAR modeli aşağıdaki şekilde de yazılabilir:

$$\Delta y_t = \theta_1' x_{t-1} 1_{\{z_{t-1} < \lambda\}} + \theta_2' x_{t-1} 1_{\{z_{t-1} \geq \lambda\}} + e_t \quad (1)$$

Burada; $t = 1, \dots, T$ iken $x_{t-1} = (y_{t-1}, r_t' \Delta y_{t-1}, \dots, \Delta y_{t-k})'$ ve $1_{\{\cdot\}}$ gösterge fonksiyonu olmaktadır. e_t , bağımsız ve özdeş dağılmış hata terimi, $z_t = y_t - y_{t-m}$ ($m \geq 1$ iken), r_t , sabit ve mümkün doğrusal zaman trendini içeren deterministik bileşenler vektörüdür. e_t 'nin bağımsız dizi olduğu varsayımı, asimptotik dağılım teorisi ve bootstrap yaklaşımları için zorunlu olmaktadır. Eşik değeri λ bilinmemektedir. z_{t-1} geçiş değişkeni; önceden belirlenmiş, katı durağan ve sürekli dağılım fonksiyonu ile ergodik olmalıdır. $z_t = y_t - y_{t-m}$ seçimi durağanlığı garantilemektedir. θ_1 ve θ_2 parametre vektörlerini açık olarak yazacak olursak,

$$\theta_1 = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \beta_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \theta_2 = \begin{pmatrix} \rho_2 \\ \beta_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

olduğu görülmektedir. Burada; (ρ_1, ρ_2) , y_{t-1} 'in eğim katsayıları, (β_1, β_2) , deterministik bileşenlerin eğimleri ve (α_1, α_2) , β_1 ve β_2 , r_t vektörü ile aynı boyuta sahip vektörler ve her iki rejimdeki $(\Delta y_{t-1}, \dots, \Delta y_{t-k})$ 'nin eğim katsayıları olmaktadır. Model her bir eşik değeri için EKK yöntemiyle tahmin edilmekte ve artık varyansını minimize eden eşik değeri tahmini elde edilmektedir. Parametre tahminleri ise, eşik değeri tahmini $\hat{\lambda}$ yerine koyularak bulunur.

Burada öncelikle standart Wald test istatistiği hesaplanarak $H_0: \theta_1 = \theta_2$ bileşik hipotezi test edilir ve eşik etkinin olup olmadığına bakılır. Bu istatistik,

$$W_T(\lambda) = T \left(\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}^2(\lambda)} - 1 \right)$$

olarak hesaplanmaktadır. $\hat{\sigma}^2$, (1) numaralı modelin tahmininden elde edilen artık varyansı iken $\hat{\sigma}_0^2$, H_0 altındaki doğrusal modelin tahmininden elde edilen artık varyansıdır. $W_T(\lambda)$, $\hat{\sigma}^2(\lambda)$ 'nin azalan fonksiyonu olduğundan $W_T(\lambda) = W_T(\hat{\lambda}) = \sup_{\lambda \in \Lambda} W_T(\lambda)$ olarak yazılabilmektedir.

(1) numaralı TAR modelinde, ρ_1 ve ρ_2 parametreleri durağanlığı kontrol ettiğinden sıfır hipotezi şu şekilde yazılabilmektedir:

$$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = 0$$

Burada sıfır hipotezi reddedilemediği durumda (1) numaralı TAR modeli Δy_t değişkeninde durağan olacaktır. Alternatif hipotez ise,

$$H_1 : \rho_1 < 0 \text{ ve } \rho_2 < 0$$

olarak yazılabilmektedir. Bir de kısmi birim kök araştırması için yazacak olursak bu durumda alternatif hipotez,

$$H_2 : \begin{cases} \rho_1 < 0 \text{ ve } \rho_2 = 0 \\ \text{veya} \\ \rho_1 = 0 \text{ ve } \rho_2 < 0 \end{cases}$$

şeklinde ifade edilebilmektedir. H_2 kabul edildiği zaman, süreç bir rejimde birim köke sahipken diğer rejimde durağan olmaktadır.

Yukarıda belirtilen hipotezlerden H_0 , $\rho_1 \neq 0$ veya $\rho_2 \neq 0$ alternatif hipotezine karşı sınıldığında ilgili Wald istatistiği, $R_{2T} = t_1^2 + t_2^2$ olarak hesaplanmaktadır. Burada t_1 ve t_2 , (1) numaralı TAR modelinin EKK tahmininden elde

edilen $\widehat{\rho}_1$ ve $\widehat{\rho}_2$ tahminlerinin t oranları olmaktadır. H_1 alternatifine karşı kullanılacak test istatistiği ise, $R_{1T} = t_1^2 \mathbf{1}_{\{\widehat{\rho}_1 < 0\}} + t_2^2 \mathbf{1}_{\{\widehat{\rho}_2 < 0\}}$ olarak hesaplanmaktadır.

R_{1T} ve R_{2T} durağan durum ve kısmi birim kök durumu arasında ayırım yapamamaktadır. Bu sebepten, bireysel t_1 ve t_2 istatistikleri analiz edilerek, $-t_1$ ve $-t_2$ 'den yalnızca biri anlamlıysa bu durum kısmi birim kök durumuyla tutarlı olacaktır ve H_2 kabul edilecektir. Bu şekilde H_0 , H_1 ve H_2 alternatifleri arasında ayırım yapmak mümkün olacaktır.

- **Kapetanios - Shin - Snell (KSS) Birim Kök Testi** (Kapetanios, Shin ve Snell, 2003, ss.359-379): KSS birim kök testi, global durağan ESTAR süreci alternatif hipotezine karşı kuvvetli bir birim kök testidir. Tek değişkenli birinci derece STAR modeli,

$$y_t = \beta y_{t-1} + \gamma y_{t-1} \Theta(\theta; y_{t-d}) + \varepsilon_t, \quad t=1, \dots, T$$

olsun. Burada $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$ ve β ile γ bilinmeyen parametrelerdir. y_t 'nin sıfır ortalamalı stokastik bir süreç olduğu varsayılmaktadır. Buradaki geçiş fonksiyonu,

$$\Theta(\theta; y_{t-d}) = 1 - \exp(-\theta y_{t-d}^2)$$

olarak yazılabilmektedir. Burada $\theta \geq 0$ ve $d \geq 1$ kabul edilmektedir. Geçiş fonksiyonu, tek değişkenli STAR modelinde yerine konulduğunda elde edilen ESTAR modeli,

$$y_t = \beta y_{t-1} + \gamma y_{t-1} \left[1 - \exp(-\theta y_{t-d}^2) \right] + \varepsilon_t$$

olmaktadır. Yeniden yazacak olursak,

$$\Delta y_t = \phi y_{t-1} + \gamma y_{t-1} \left[1 - \exp(-\theta y_{t-d}^2) \right] + \varepsilon_t$$

elde edilmektedir. Burada $\phi = \beta - 1$ olmaktadır. y_t 'nin orta rejimde birim kök süreci izlediğini ifade etmek için yukarıdaki regresyona $\phi = 0$ kısıtı koyulmaktadır. Doğrusal olma ve birim kök durumunda $H_0: \phi = 0$ ve $\theta = 0$ yazılabilmektedir. $H_1: \phi = 0$ ve

$\theta > 0$ altında ise y_t , $-2 < \gamma < 0$ iken, doğrusal olmayan fakat global bir durağan süreç izlemektedir. Kolaylık olması açısından $d=1$ kabul edilmektedir. $\phi = 0$ ve $d=1$ durumunda ESTAR modeli,

$$\Delta y_t = \gamma y_{t-1} \{1 - \exp(-\theta y_{t-1}^2)\} + \varepsilon_t$$

olmaktadır. Kullanılacak hipotezler ise, $H_0: \theta = 0$ ve $H_1: \theta > 0$ olarak ifade edilmektedir. H_0 altında γ parametresi belirlenemediğinden, H_0 doğrudan test edilememektedir. Literatürde bu probleme 'Davies (1977) Problemi' adı verilmektedir. Bu problemi aşmak için Luukkonen, Saikkonen ve Teräsvirta (1988) takip edilerek t-tipi test istatistiği türetilmektedir. H_0 altında ESTAR modeline birinci derece Taylor seri yaklaşımı uygulanırsa yardımcı regresyon modeli,

$$\Delta y_t = \delta y_{t-1}^3 + hata$$

olarak yazılabilmektedir. Hata terimleri otokorelasyonlu olduğunda ise yardımcı regresyon,

$$\Delta y_t = \sum_{j=1}^p \rho_j \Delta y_{t-j} + \delta y_{t-1}^3 + hata$$

olmaktadır. $H_0: \delta = 0$, $H_1: \delta < 0$ alternatifine karşı $t = \frac{\hat{\delta}}{s.h.\hat{\delta}}$ istatistiği hesaplanarak

sınanabilmektedir. Burada $\hat{\delta}$, δ 'nın EKK tahminidir ve $s.h.\hat{\delta}$, $\hat{\delta}$ 'nın standart hatasıdır. Burada test istatistiği asimptotik standart normal dağılıma sahip değildir. Bu sebepten, ilgili parametre tahmininin t değeri, KSS kritik tablo değeriyle karşılaştırılır. H_0 red ise, 'seri yumuşak yapısal kırılmalarla durağandır' sonucuna varılmaktadır.

2.4. Markov Rejim Değişim Modelleri

Markov rejim değişim modelleri, farklı rejimler izleyen bir bağımlı değişken söz konusu olduğunda bu değişimlerin birinci derece Markov süreci izleyen gözlemlenemeyen bir değişken tarafından yönetildiği modellerdir. Bu bölümde Markov sürecine genel bir bakıştan sonra model parametrelerinin En Çok Benzerlik tahmini sırasında izlenen süreç ve bu modellerin spesifikasyon hatası ve birim kök testleri incelenmektedir.

2.4.1. Markov Sürecine Genel Bir Bakış

Hamilton (1989) makalesiyle ortaya atılan Markov modelleri, gözlemlenemeyen dışsal ya da egzojen bir değişken tarafından yönetilmektedir. Bu modellerin avantajı, modelin değişkenler kümesinden geçiş değişkeninin seçimini gerektirmemesidir. Belirlenen rejimler, dönüm noktalarının da tespit edilmesini ve böylelikle diplerin ve dorukların genliğindeki asimetrisinin ortaya koyulabilmesini sağlamaktadır. Geçiş olasılıklarının tahmini ise, farklı rejimlerde geçirilen ortalama süreyi hesaplamak ve rejim sürelerindeki asimetriyi ortaya koymak açısından önemlidir. Rejim tarafından oluşturulan her bir yeni gözlem, ilgili rejimde kalma olasılığı hakkında yeni bir bilgi sağlamaktadır. Sonrasında ise geçiş olasılıkları, rejimde kalma olasılıklarının tahmininden çıkarılmaktadır. Durum değişkeninin olasılık dağılımını belirlemek, rejim değişimlerinin doğası ve sonuçları hakkında verilerin araştırmacıyı bilgilendirmesini sağlamaktadır (Perraudin, 2002, ss.25-26). Genel gösterimiyle bir MS-AR modeli,

$$y_t = \mu_{s_t} + X_t \phi_{s_t} + u_t, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

olarak yazılabilmektedir. Burada, $X_t = (y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-p})$ iken ϕ_{s_t} , (px1) boyutlu AR katsayılar vektörüdür. $u_t \sim N(0, \sigma_{s_t}^2)$ olarak dağılmaktadır. Gizli durum değişkeni s_t , k rejim Markov zinciri izlemektedir. Bu modellerde rejimler, kesikli durum Markov süreci yani Markov zinciri takip eden gözlenemeyen durum ya da rejim değişkeni tarafından belirlenmektedir. Bir Markov zinciri, sonlu ya da sayılabilir sayıda tam sayı

değeri alan ve şimdiki durumun yalnızca bir dönem öncesine bağlı olduğunu ifade eden stokastik bir süreçtir. Matematiksel olarak ifade edilecek olursa,

$$P\{s_{t+1} = j | s_t = i, s_{t-1} = i_{t-1}, s_1 = i_1, s_0 = i_0\} = P\{s_{t+1} = j | s_t = i\} = p_{ij}$$

olarak gösterilebilmektedir. Burada p_{ij} , i durumundan j durumuna geçiş olasılığını ifade etmektedir. Geçiş olasılıkları negatif olmama özelliğine sahip olup, bir rejimden diğer rejimlere geçiş olasılıklarının toplamı bir'e eşit olmaktadır. Bu iki özellik matematiksel olarak,

$$\Pr(s_t = j | s_{t-1} = i) = p_{ij} \geq 0, i, j = 1, 2, \dots, k$$

$$\sum_{j=1}^k \Pr(s_t = j | s_{t-1} = i) = 1$$

ile ifade edilmektedir. Burada k, mümkün olan farklı rejim sayısını ifade etmektedir. Geçiş olasılıkları matrisi (P) açık formda yazılırsa,

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{N1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1N} & \cdots & p_{NN} \end{pmatrix}$$

olarak gösterilebilmektedir. Bu olasılıklar, bir adım ileri geçiş olasılıklarıdır. Bu olasılıkları n adım ileri geçiş olasılıklarına genişletmek de mümkündür. Örneğin iki adım ileri geçiş olasılığı, $P\{s_{t+2} = j | s_t = i\}$, i durumundan tüm durumlara geçiş olasılıkları ile tüm durumlardan j durumuna geçiş olasılıklarının çarpımlarının toplamını ifade etmektedir. Matematiksel olarak,

$$\sum_{k=1}^N P\{s_{t+2} = j | s_{t+1} = k\} P\{s_{t+1} = k | s_t = i\}$$

olarak yazılabilmektedir. Daha genel olarak n adım ileri geçiş olasılıkları ise,

$$P\{s_{t+n} = j | s_t = i\} = p_{ij}^n$$

olarak ifade edilebilmektedir (Wang, 2009, ss.113-114).

İki rejimli bir Markov değişim modelinde, P_{11} ve P_{22} veriyken rejimlerin ortalama süresi tahmin edilebilir. d_t^i , sürecin i rejiminde kalma süresini temsil eden rassal değişken olsun. Başlangıç rejimi i ise d_t^i , $(1-P_{ii})$ parametrelili geometrik dağılım izlemektedir yani,

$$P(d_t^i = 1) = P_{ii}^{n-1} (1 - P_{ii}) , n \geq 0$$

eşitliği geçerli olmaktadır. Sonuç olarak i rejiminin ortalama süresi,

$$E(d_t^i) = \frac{1}{(1 - P_{ii})}$$

olarak hesaplanmaktadır (Bationo ve Hounkpodote, 2009, s.12).

P geçiş matrisi, e_i , I_N 'nin i . sütunu ve ξ_t , t zamanına kadar olan bilgiye koşullu rejim olasılıkları vektörü (durum vektörü) iken $t-1$ zamanındaki rejimin bilindiği varsayımı altında $Pe_i = P\xi_t$ olmakta ve Markov zinciri, $\xi_{t+1} = P\xi_t + v_{t+1}$ formunda ifade edilebilmektedir. $\omega_t = \{y_t, y_{t-1}, \dots, y_1\}$ iken koşullu rejim olasılıkları vektörü,

$$\hat{\xi}_{t|t} = E(\xi_t | \omega_t) = \begin{bmatrix} P(S_t = 1 | \omega_t) \\ P(S_t = 2 | \omega_t) \\ \dots\dots\dots \\ P(S_t = N | \omega_t) \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilmektedir. Bu vektör geçiş olasılıkları matrisi ile çarpıldığında,

$$E(\xi_{t+1} | \xi_t = e_i) = \begin{bmatrix} P(S_{t+1} = 1 | S_t = i) \\ P(S_{t+1} = 2 | S_t = i) \\ \dots\dots\dots \\ P(S_{t+1} = N | S_t = i) \end{bmatrix}$$

bir sonraki dönemin koşullu olasılıkları vektörü olarak, $\hat{\xi}_{t+1|t} = E(\xi_{t+1} | \omega_t) = P_{\xi_{t+1|t}}$ işleminin sonucunda elde edilmektedir. Burada, $S_t = i \rightarrow \xi_t = e_i$ olmaktadır. Bir sonraki dönemin koşullu olasılıkları vektörünün her bir elemanı,

$$P(S_{t+1} = j | \omega_t) = P_{1j}P(S_t = 1 | \omega_t) + P_{2j}P(S_t = 2 | \omega_t) + \dots + P_{Nj}P(S_t = N | \omega_t)$$

her rejimin koşullu olasılıklarının, her rejimden ilgili rejime geçiş olasılıklarıyla çarpımlarının toplamı alınarak elde edilmektedir. y_t değişkeninin koşullu olasılık yoğunlukları η_t vektörünün elemanları olarak gösterilirse, bu vektörün her bir elemanının t-1 dönemine kadar olan bilgiye koşullu rejim olasılıkları vektörü ile çarpımı sonucunda elde edilen elemanların toplamı alınarak t. gözlemin koşullu benzerliği elde edilmektedir (Hamilton, 1994, s.3064). Matris notasyonu ile ifade edilirse,

$$\eta_t = \begin{bmatrix} P(y_t | S_t = 1, \omega_{t-1}) \\ P(y_t | S_t = 2, \omega_{t-1}) \\ \dots \\ P(y_t | S_t = N, \omega_{t-1}) \end{bmatrix}, \quad P_{\hat{\xi}_{t-1|t-1}} = \begin{bmatrix} P(S_t = 1 | \omega_{t-1}) \\ P(S_t = 2 | \omega_{t-1}) \\ \dots \\ P(S_t = N | \omega_{t-1}) \end{bmatrix},$$

$$\eta_t \odot P_{\hat{\xi}_{t-1|t-1}} = \begin{bmatrix} P(y_t | S_t = 1, \omega_{t-1})P(S_t = 1 | \omega_{t-1}) \\ P(y_t | S_t = 2, \omega_{t-1})P(S_t = 2 | \omega_{t-1}) \\ \dots \\ P(y_t | S_t = N, \omega_{t-1})P(S_t = N | \omega_{t-1}) \end{bmatrix}$$

matrislerinin elde edilmesi sonucunda $\sum_{j=1}^N P(y_t, s_t = j | \omega_{t-1}) = P(y_t | \omega_{t-1})$ ile t

zamanındaki gözlemin koşullu benzerliği hesaplanmış olmaktadır. Burada $P(y_t, s_t = j | \omega_{t-1})$, y_t ve s_t 'nin bileşik yoğunluğudur. İterasyon sonucunda gözlenen

verilerin logaritmik benzerlik fonksiyonu ise, $L(y_1, \dots, y_T; \theta) = \sum_{t=1}^T \log P(y_t | \omega_{t-1})$ olarak

ifade edilmektedir. $\eta_t \odot P_{\hat{\xi}_{t-1|t-1}}$ çarpımının j. elemanı koşullu benzerlikle bölünürse filtrelenmiş olasılıklar elde edilmektedir.

$$\frac{P(y_t, s_t = j | \omega_{t-1})}{P(y_t | \omega_{t-1})} = P(s_t = j | y_t, \omega_{t-1}) = \hat{\xi}_{t|t}$$

elde edilmektedir (Hamilton, 2005, s.5).

2.4.2. Model Parametrelerinin En Çok Benzerlik Tahmini

$s = (s_{p+1}, \dots, s_n)$ durumları biliniyorsa MS-AR(p) modelinin bilinmeyen parametreleri (ϕ), yani sabit terim, AR katsayıları ve farklı rejim hata varyansları,

$$L(\phi, s) = \sum_{t=p+1}^n \log f(y_t | y_{t-1}, s_t)$$

olarak gösterilen logaritmik benzerlik fonksiyonu maksimize edilerek bulunabilmektedir. Burada y_{t-1} , (t-1) zamanındaki mevcut tüm bilgiyi ve X_j ($j \leq t$)'deki tüm gözlemleri içermektedir. MS-AR modeli, $y_t = \mu_{s_t} + X_t \phi_{s_t} + u_t$ ise bu durumda bağımlı değişkenin koşullu yoğunluk fonksiyonu,

$$f(y_t | y_{t-1}, s_t) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \log \sigma_{s_t}^2 - \frac{(y_t - \mu_{s_t} - X_t \phi_{s_t})^2}{2\sigma_{s_t}^2} \right\}$$

olarak gösterilebilmektedir ve üssel fonksiyonla orantılıdır. s genellikle gözlemlenmediğinden, veriden çıkarsanmalıdır. s bilinmediğinde, MS-AR(p) parametreleri, geçiş olasılıklarını (p) içerecek şekilde genişletilmiştir. Böylece log-benzerlik fonksiyonu,

$$L(\phi) = \sum_{t=p+1}^n \log f(y_t | y_{t-1}) = \sum_{t=p+1}^n \log \left\{ \overbrace{\sum_{j=1}^k f(y_t | y_{t-1}, s_t = j) \Pr(s_t = j | y_{t-1})}^{t.\text{gözlemin koşullu benzerliği}} \right\} \quad (1)$$

olmaktadır. Bayes teoremiyle öngörüsöl olasılık,

$$\Pr(s_t = j | y_{t-1}) = \sum_{i=1}^k \Pr(s_t = j | s_{t-1} = i, y_{t-1}) \Pr(s_{t-1} = i | y_{t-1})$$

$$= \sum_{i=1}^k p_{ij} \frac{f(y_{t-1} | y_{t-2}, s_{t-1} = i) \Pr(s_{t-1} = i | y_{t-2})}{\sum_{m=1}^k f(y_{t-1} | y_{t-2}, s_{t-1} = m) \Pr(s_{t-1} = m | y_{t-2})} \quad (2)$$

olarak yazılabilmektedir. Böylelikle her durumun başlangıç olasılık tahmini yani $\Pr(s_{p+1} = i | y_p)$, $i = 1, 2, \dots, k$ veriyken, MS-AR(p) modelinin logaritmik benzerlik fonksiyonu, (1) ve (2) numaralı eşitlikler kullanılarak iteratif olarak hesaplanabilir ve bilinmeyen ϕ parametre vektörü EÇB yöntemiyle tahmin edilebilir (Zivot ve Wang, 2005, ss.688-689). Gözlemlerin eksik veri olarak görülmesi durumunda, EÇB tahminlerinin yinelemeli olarak hesaplanması söz konusu olmaktadır. Bu durumda kullanılan algoritmanın her iterasyonunda beklenti aşamasını maksimizasyon aşaması izlediğinden bu algoritmaya 'Beklenti-Maksimizasyon Algoritması' adı verilmektedir (Dempster, Laird ve Rubin, 1977, s.1).

2.4.2.1. Beklenti - Maksimizasyon Algoritması

Model gizli değişken içerdiğinde ve böylece değişkenler kısmen gözlemlenemediğinde yani veri seti eksik olduğunda kullanılan bir algoritmadır. Gözlemler veriyken gözlemlenemeyen değişkenlerin koşullu beklentileri beklenti aşamasında tahmin edilir. Bu beklentiler kullanılarak modelin parametre tahminleri ise maksimizasyon aşamasında elde edilir. Her bir maksimizasyon aşaması, benzerliğin değerini artırır ve bu algoritma, logaritmik benzerliğin durağan bir noktasına yakınsar. Amaç, $f(Y, \theta)$ olan gözlenen değişkenlerin bileşik yoğunluğunu maksimize etmektir. Y'nin eksik bir örneklem olması nedeniyle optimizasyon problemi karmaşıktır. Marjinal yoğunluk,

$$\underbrace{f(Y, \theta)}_{\text{marjinal yoğunluk}} = \int_{s \in S} f(Y, s, \theta) ds$$

olarak hesaplanmaktadır. $f(Y, s, \theta)$ 'nın maksimizasyonu yoluyla $f(Y, \theta)$ 'yı maksimize etmek s değişkeni gözlemlenemediğinden mümkün değildir (Teräsvirta, Tjostheim ve Granger, 2008, s.343).

Markov değişim modelinin tahmininde başlangıç değerleri, rejim değişiminin olmadığı durum dikkate alınarak bulunmaktadır yani iki rejimin de aynı süreci izlediği varsayılmaktadır. Tüm gözlemlerle doğrusal model, EKK yöntemi ile tahmin edilmektedir. Daha sonra doğrusal olmayan optimizasyon (Newton-Raphson) ile modelin benzerliği değerlendirilmektedir. Beklenti aşamasında parametre tahminleri altında durum değişkeni s_t 'nin beklentisi hesaplanmakta ve her bir gözlem rejimlerden birine atanmaktadır. Maksimizasyon aşamasında ise, s_t değerlerine koşullu olarak yeni tahminler elde edilmektedir. Özetle, doğrusal model EKK yöntemi ile her rejim için tahmin edilir ve yakınsama oluncaya kadar doğrusal olmayan optimizasyon'a devam edilir (Fontdecaba, Munõz ve Sàncnez, 2009, s.17). Örneklemin tümüne koşullu rejim olasılıkları bilindiğinde beklenti hesabı kolay olmaktadır. AR katsayıları düzgünleştirilmiş olasılıklardan oluşan ağırlıklar yardımıyla ağırlıklandırılarak güncellenmektedir. Bu özellikler EM algoritmasını çekici kılmaktadır (Rabault, 1993, s.63).

EM algoritmasının uygulanabilmesi için tüm gerekli olan, düzgünleştirilmiş olasılıklardır. Gözlenen veri (Y_t), düzgünleştirilmiş olasılıklar kullanılarak ağırlıklandırılmaktadır. Ağırlıklandırılmış serilerle EKK tahmini yapılıp parametrelerin güncellenmiş değerleri elde edilmektedir. Bu tahminler, düzgünleştirilmiş olasılıkların yeniden hesaplanmasında kullanılmakta ve sonra veri yeni olasılıklarla ağırlıklandırılmaktadır. Bu süreçte benzerlik fonksiyonunun değeri de artmaktadır. Yakınsama sağlananaya kadar süreç devam etmektedir (Hamilton, 1990, s.45).

2.4.3. Durum Değişkeninin Çıkarsamasında Kullanılan Rejim Olasılıkları

Gözlemlerin rejimlerde sınıflandırılması, gözlemlenemeyen durum değişkeni sebebiyle bilinmemektedir. Bu sebepten, geleneksel tahmin yöntemleri uygulanamamaktadır ve bu durumda filtrelenmiş / düzgünleştirilmiş olasılıklar hesaplanmaktadır.

- **Filtrelenmiş Olasılıklar:** t dönemine kadar gözlenmiş örneklem bilgisine koşullu 'Markov Değişim Model'i için gözlemlenemeyen Markov zincirinin t

döneminde belli bir rejimde olma olasılığına 'filtrelenmiş olasılık' adı verilmektedir (Piger, 2007, s.2). Notasyonel olarak filtrelenmiş olasılıklar,

$$P(S_t = i | X_t, X_{t-1}, \dots; \theta) = P(S_t = i | I_t; \theta)$$

gösterimiyle ifade edilmektedir. Burada S_t , durum değişkeni iken I_t , t dönemine kadar gözlenmiş örneklem bilgisini ve θ ise, tahmin edilen parametre vektörünü göstermektedir.

Her t zamanı için geçmişe koşullu olarak bir rejime ait olmanın anlık olasılığına 'filtrelenmiş olasılık' denilmektedir. Filtreli olasılıklar, gözlemleri rejimler arasında sınıflandırmak için kullanılır. $P(s_t = i | F_t, \hat{\theta})$ filtreli olasılıklar ise uygun rejim, $i^* = \arg \max_{i=1, \dots, K} P(s_t = i | F_t, \hat{\theta})$ olmaktadır (Donderis, Darné ve Ferrara, 2007, s.8).

- **Düzgünleştirilmiş Olasılıklar:** Gözlenen tüm örneklem bilgisine koşullu 'Markov Değişim Model'i için gözlemlenemeyen Markov zincirinin t döneminde belli bir rejimde olma olasılığına 'düzgünleştirilmiş olasılık' adı verilmektedir (Piger, 2007, s.2). Düzgünleştirilmiş olasılıklar sıklıkla, dönüm noktalarının tarihlendirilmesi için kullanılır. Notasyonel olarak düzgünleştirilmiş olasılıklar,

$$P(S_t = i | X_T, X_{T-1}, \dots; \theta) = P(S_t = i | I_T; \theta)$$

gösterimiyle ifade edilmektedir. Burada S_t , durum değişkeni iken I_T , gözlenmiş tüm örneklem bilgisini ve θ ise, tahmin edilen parametre vektörünü göstermektedir. Hamilton'un tekrarlı algoritmasıyla her t zamanında filtreli ve düzgünleştirilmiş olasılıklar elde edilir.

2.4.4. Filtrelenmiş ve Düzgünleştirilmiş Rejim Olasılık Tahminleri

Filtreleme yordamı, cari durumların bileşik koşullu olasılıklarını girdi olarak kabul edip gelecek durumların koşullu olasılıklarını çıktı olarak üretmek için geçiş olasılıkları matrisi olarak adlandırılan dinamik dönüşüm sistemi tarafından filtreleme yapma işlemini ifade etmektedir. Bu esnada koşullu benzerlik fonksiyonu elde edilip parametre tahminleri yapılabilmektedir (Hamilton, 1989, s.367).

Markov değişim modelinin bilinmeyen parametreleri tahmin edildikten sonra gizli kesikli rejim olasılığı $\Pr(s_t = j | y_t)$ 'nin filtrelenmiş tahminleri elde edilebilmektedir. Durum değişkeni doğrudan gözlemlenemediğinden,

$$P(s_t = j | Y_t; \theta) = \frac{P(y_t, s_t = j | Y_t; \theta)}{f(y_t | Y_t; \theta)}$$

olarak ifade edilen ‘filtrelenmiş olasılıklar’ hesaplanmalıdır. Bu olasılıklar, t zamanına kadar elde bulunan bilgiye dayalıdır ve Hamilton filtreleme algoritması ile hesaplanmaktadır. Bir de ‘düzgünleştirilmiş olasılıklar’ vardır. Düzgünleştirilmiş olasılıklar ise n zamanında,

$$\begin{aligned} \Pr(s_t = j, s_{t+1} = k | \omega_T) &= \Pr(s_{t+1} = k | \omega_T) \Pr(s_t = j | s_{t+1} = k, \omega_T) \\ &\approx \Pr(s_{t+1} = k | \omega_T) \Pr(s_t = j | s_{t+1} = k, \omega_t) \\ &= \frac{\Pr(s_{t+1} = k | \omega_T) \Pr(s_t = j, s_{t+1} = k | \omega_t)}{\Pr(s_{t+1} = k | \omega_t)} \\ &= \frac{\Pr(s_{t+1} = k | \omega_T) \Pr(s_t = j | \omega_t) \Pr(s_{t+1} = k | s_t = j)}{\Pr(s_{t+1} = k | \omega_t)} \end{aligned}$$

olarak hesaplanmaktadır. Böylelikle düzgünleştirilmiş tahmin,

$$\Pr(s_t = j | \omega_T) = \sum_{k=1}^M \Pr(s_t = j, s_{t+1} = k | \omega_T)$$

elde edilmektedir. Bu yöntem, n-1 zamanından 1 zamanına geriye doğru iteratif olarak tekrar edilir. Böylelikle rejim olasılıklarının düzgünleştirilmiş tahminleri elde edilmektedir. Düzgünleştirilmiş rejim olasılıkları, tüm örneklem bilgisine koşullu olarak elde edilmektedir (Kim, 1994, ss.9-10).

Y_t , en yüksek düzgünleştirilmiş olasılığa sahip rejime eşlenir. İki rejimli modellerde %50 kuralı uygulanabilmektedir. $\Pr(s_t = 1 | Y_T)$, %50'nin altından üstüne ya da üstünden altına hareket edildiğinde oluşmaktadır. Parametre tahminleri elde edildikten sonra, t zamanında sistemin içinde bulunduğu durum hakkında çıkarsama

yapmak oldukça önemlidir (Hamilton, 1989, s.374). Belli bir durumda olma olasılığı veri bir dönemde bire çok yakınsa, ilgili gözlemlerin ilgili rejimi oluşturduğu sonucuna varılabilir. İlgili durumda olma olasılıkları sıfıra yakınsıyorsa, gözlemler diğer rejime ait olmaktadır. Düzgünleştirilmiş olasılıklarda, örneklemdaki tüm bilgi dikkate alınmaktadır ve düzgünleştirilmiş olasılıklar yalnızca anlamlı bir rejim değişikliği söz konusu olduğunda değişmektedir (Perraudin, 2002, s.29).

Buradan hareketle, geçiş olasılıklarının en çok benzerlik tahminleri ise,

$$\hat{p}_{ij} = \frac{\sum_{t=2}^T p(s_t = j, s_{t-1} = k | \omega_T; \hat{\theta})}{\sum_{t=2}^T p(s_{t-1} = k | \omega_T; \hat{\theta})}$$

olarak elde edilmektedir. $\hat{\theta}$, θ parametre vektörünün en çok benzerlik tahminidir (Hamilton, 1990, s.56).

2.4.5. Yanlış Belirleme Testi

Markov Değişim Modeli,

$$y_t = X_t' \beta_{s_t} + \sigma_{s_t} \varepsilon_t$$

olarak ifade edilsin. Burada, $s_t \in \{1, \dots, N\}$ durum değişkeni iken, $P(s_t = j | s_{t-1} = i) = P_{ij}$, geçiş olasılıkları olsun. Sürecin farklı rejimler izlediği hipotezi, $H_0 : \beta_j = \beta, \sigma_j = \sigma$ $j= 1, \dots, N$ biçiminde oluşturulan sıfır hipotezine karşı test edilmektedir fakat P_{ij} , sıfır hipotezi altında belirlenemez. Kararlılık koşulları sağlanamayacağından LR testinin dağılımı standart dağılım göstermemektedir. Bu sebepten kritik değerler simülasyonla belirlenebilmektedir (Franses ve Dijk, 2003, s.100).

$Y_t = \alpha_{s_t} + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ modeli üzerinden rejim sayısı testi yapılacaktır olursa hipotezler,

H_0 : Süreç tek rejimlidir

H_1 : Süreç iki rejimlidir

olarak yazılabilmektedir. Burada test istatistiği, $LR = 2 \left(L(\hat{\theta}_{ecb(2)}) - L(\hat{\theta}_{ecb(1)}) \right)$ formülüyle hesaplanmaktadır. LR istatistiği r serbestlik dereceli ki-kare dağılımına sahip bir istatistiktir. Burada r, test edilen kısıt sayısıdır. $\hat{\theta}_{ecb(2)}$ ve $\hat{\theta}_{ecb(1)}$ iki rejimli ve tek rejimli durumlarda modelden elde edilen EÇB tahminleridir (Piger, 2007, s.26).

2.4.6. Hall - Psaradakis - Sola Birim Kök Testi (Hall, Psaradakis ve Sola, 1999, 143-154):

Bu test, Markov değişim modeline dayanmaktadır. Test denklemindeki parametreler, gözlenemeyen durum değişkeni $s_t \in \{0,1\}$ ile değişmektedir. Test denklemini,

$$\Delta y_t = \mu_0(1-s_t) + \mu_1 s_t + [\phi_0(1-s_t) + \phi_1 s_t] y_{t-1} + \sum_{j=1}^k [\psi_{0j}(1-s_t) + \psi_{1j} s_t] \Delta y_{t-j} + \sigma_e e_t$$

olarak yazılabilmektedir. Burada $\{e_t\}$ sıfır ortalama ve birim varyans ile bağımsız ve özdeş dağılmış rassal değişkenler dizisidir. $H_0 : \phi_0 = 0$ ve/veya $\phi_1 = 0$ olarak yazılan ve her iki rejimde de birim kökün varlığını öne süren temel hipotez, benzerlik tabanlı yöntemlerle test edilebilmektedir. $\{e_t\}$ 'nin Gaussyen rassal değişken dizisi olduğu varsayılırsa, yukarıdaki test denkleminde çıkarsama, Hamilton (1994)'te tanıtılan algoritmaya benzer ardışık ve doğrusal olmayan filtreleme algoritması kullanılarak yapılabilir. Bu algoritma, $\Pr(s_t = 1 | I_t, \mathcal{G})$ formunda olasılıksal çıkarsamalar üretmek için tasarlanmıştır ama bu olasılıkların çarpımı gözlenen verinin benzerliğini vermektedir. Burada, $I_t = \{y_1, \dots, y_t\}$ ve $\mathcal{G} = (\mu_0, \mu_1, \phi_0, \phi_1, \sigma_e, \psi_{01}, \dots, \psi_{0k}, \psi_{11}, \dots, \psi_{1k})'$

olmaktadır. Daha sonra, bu benzerliği maksimize eden $\hat{\mathcal{G}}$, sayısal optimizasyon algoritması ile bulunmaktadır. Standart ADF istatistiğine benzer şekilde, bu birim kök testi de ϕ_0 ve ϕ_1 'in EB tahminlerine ilişkin t-oranlarına dayandırılabilir. Ayrıca $\hat{\mathcal{G}}$ elde edildiğinde, gözlenemeyen rejimler $\{s_t\}$ 'in olasılıksal çıkarsamaları, filtrelenmiş ya da düzgünleştirilmiş olasılıklara dayalı olarak yapılabilir.

Hesaplanan istatistik değerı tablo değerinden daha negatifse, serinin durağan olduğu sonucuna varılmaktadır.



3. GEÇİŞ MODELLERİ ÇERÇEVESİNDE PARAMETRİK OLMAYAN ve SEMİPARAMETRİK YAKLAŞIM

Birinci bölümde, geçiş ve rejim değişim modelleri parametrik açıdan değerlendirilmiştir. Parametrik regresyon çerçevesinde geçiş modellerinin geçiş fonksiyonları yani TAR modelleri kapsamında gösterge fonksiyonu ve de STAR modelleri kapsamında lojistik ya da üssel fonksiyon, sırasıyla ani ve kademeli geçişi belirtmek amacıyla iyi tanımlanmış fonksiyonlar olarak kullanılmaktaydı. Ekonomilerde rejimler arası geçişlerin ani olması durumu nadiren gözlenen bir durum olup geçişler genellikle daha yavaş ve düzgün bir biçimde gerçekleşmektedir. Ayrıca çeşitli ülke ekonomilerinde gerçekleşen tüm rejim geçişlerinin iyi tanımlanmış fonksiyonel kalıplara sadık kalması da mümkün olmayabilmekte ve ülke ekonomisinin kendisine has geçiş dinamiği söz konusu olabilmektedir. Bu aşamada parametrik yöntemlerden parametrik olmayan yöntemlere ve sonrasında da teorik gereklilikler ışığında semiparametrik yöntemlere geçilmesi kaçınılmaz olmaktadır. Üçüncü bölümde, analize parametrik olmayan ve semiparametrik zaman serisi ekonometrisi kapsamında devam edilmektedir.

3.1. Parametrik Olmayan Ekonometri

Bir regresyon eğrisinin tahmininde, parametrik olmayan yaklaşımın kullanılmasının sağladığı çeşitli avantajlar vardır. İlk olarak modelde iki değişken olduğu düşünülürse, bu değişkenler arasındaki ilişki iyi tanımlanmış bir fonksiyonel kalıba uymayabilmektedir. Bu durumda parametrik olmayan yaklaşımlardan yararlanarak, bu kendine has ilişki biçimi hakkında detaylı ve daha kesin bilgi sahibi olmak mümkün olmaktadır. Zaman serisi modelleri düşünüldüğünde, serinin gelecek gözlemleri hakkında öngörude bulunabilmek, çeşitli ekonomi politikalarını ve tedbirleri uygulamaya koymak, kişisel ya da genel bazda ekonomiye dair alınacak kararlarda oldukça önemli bir imkandır. Bu çerçevede düşünüldüğünde ikinci olarak, parametrik olmayan yaklaşımın herhangi bir parametrik modele başvurmaksızın gelecek gözlemlerin tahminini vermesi önemli bir özellik olarak sayılabilmektedir. Bir diğer parametrik olmayan yöntem özelliğine bakılacak olunursa bu yaklaşımda, tek tek veri noktalarının etkisi incelendiğinden, sahte gözlemlerin tespit edilmesi ve x eksenini

yönündeki aşırı değerlerin ön elemesinin yapılması konusunda bir kolaylık söz konusu olmaktadır. Nihai olarak da, parametrik olmayan yöntemlerin yalnızca komşu x değerleri arasında enterpolasyon yapma ve bu yolla da kayıp değerleri ikame etme konusunda esnek bir yöntem oluşturduğu belirtilebilmektedir (Härdle, 1994, ss.7-8).

Parametrik olmayan eğri tahmininin sağladığı büyük esneklik, sonlu örneklemelerde düzgünleştiricilerin uygunluğunun net bir teorik tanımını yapmayı zorlaştırmaktadır. Bu sebepten dolayı, parametrik olmayan düzgünleştirme yönteminin doğruluğunun örneklem hacmi sonsuza doğru artarken yani asimptotik olarak değerlendirilmesi analizi daha kolay hale getirmektedir (Härdle, 1994, ss.15-16).

Parametrik olmayan yaklaşımın ardında temelde düzgünleştirme fikri yatmaktadır. Bu sebepten düzgünleştiriminin tanımı, türleri ve özellikleri hakkında analize devam etmek kaçınılmaz olmaktadır. Tek değişkenli stokastik sürecin ‘koşullu heteroskedastik doğrusal olmayan otoregresif model’ tarafından üretilmesi durumunda model,

$$y_t = \mu(x_t) + \sigma(x_t) \xi_t$$

olarak ifade edilebilmektedir. Burada, $x_t = (y_{t-i_1}, y_{t-i_2}, \dots, y_{t-i_m})'$ tüm m gecikmeli değerler vektörü iken $\xi_t \sim i.i.d.(0,1)$ olarak gösterilmekte, $\mu(\cdot)$ ve $\sigma(\cdot)$ sırasıyla koşullu ortalama ve volatilité fonksiyonunu ifade etmektedir. Koşullu volatilité fonksiyonu modellemesinde kullanılan gecikme sayısı teorik olarak koşullu ortalama fonksiyonunu modelleme için de gerektiğinden (tersi durum geçerli değildir) mevcut durumda sabit varyanslı hatalar varsayımı yapılmaktadır. Sabit varyans varsayımı geçerli iken x noktasında $\mu(x_t)$ ’nin birinci derece Taylor açılımı,

$$\mu(x_t) = \mu(x) + \frac{\partial \mu(x)}{\partial x'} (x_t - x) + R(x_t, x)$$

ise model,

$$y_t = \underbrace{\mu(x)}_{\text{bilinen terim}} + \frac{\partial \mu(x)}{\partial x'} \underbrace{(x_t - x)}_{\text{bilinen terim}} + R(x_t, x) + \varepsilon_t$$

olarak yazılabilmektedir. Yaklaştırma hatası olan $R(x_t, x)$ 'den dolayı EKK tahmini sapmalı olmaktadır. İlgili sapmayı azaltmak için yalnızca x 'e yakın olan x_t gözlemleri kullanılabilir. x 'in lokal komşuluğunda olmayan gözlemlere ise düşük ağırlıklar verilmektedir. Elde daha fazla veri bulunduğunda, lokal komşuluğun büyüklüğü ile birlikte tahmin varyansı ve sapması da azaltılabilmektedir. Böylelikle örneklem hacmindeki büyüme ile birlikte modelin yaklaştırma hatası küçültülebilmektedir. Parametrik olmayan tahminin arkasındaki temel fikir bu olmaktadır (Tschernig, 2004, ss.244-245).

3.2. Düzgünleştirme Parametresinin Seçimi ve Parametrik Olmayan Regresyon

Parametrik olmayan yaklaşımlarda düzgünleştirme derecesinin doğru belirlenmesi analizin geçerliliği açısından kritik bir öneme sahiptir. Bu işlem gerçekleştirilirken sapma – varyans alışverişinin özenle gözetilmesi gerekmektedir. Optimal sapma – varyans alışveriş düzeyi belirlenebildiği takdirde, elde edilecek parametrik olmayan tahmin sonuçlarına güvenilebilmektedir. Optimal düzey, ‘düzgünleştirme parametresi’ adı verilen parametre tarafından kontrol edilmektedir. Bu parametre, x çevresindeki komşuluğun büyüklüğünü düzenlemektedir. Geniş tutulmuş bir komşuluk üzerinden yerel ortalama alma, iyi ile kötünün karışmasına sebep olmaktadır. Bu durumda ortaya çıkan aşırı düzgünleştirilmiş eğri, $\hat{m}$ olarak ifade edilen parametrik olmayan tahminin sapmalı olmasına sebebiyet vermektedir. Diğer taraftan, düzgünleştirme parametresinin çok küçük bir komşuluğa karşılık gelmesi durumunda ise sap ile saman birbirinden ayıramamaktadır. Bu durumda yalnızca az sayıda gözlem, $\hat{m}(x)$ tahminine katkıda bulunacak, ayrıca tahmin kaba ve dalgalı bir görünüme sahip olacaktır. Böylelikle de tahminin varyansı yükselecektir. Aşırı düzgünleştirme ile eksik düzgünleştirme arasında denge kurmayı sağlayan parametrenin seçimi, ‘düzgünleştirme parametresi seçim problemi’ olarak adlandırılmaktadır (Härdle, 1994, s.24). Küçük bant genişlikleri veriyi yeniden üretirken çok geniş bant genişlikleri, bağımlı değişkenlerin

ortalaması olan aşırı düzgün eğri ile neticelenmektedir (Härdle, 1994, s.33). Bu seçim probleminin optimal çözümü durumunda tüm x noktalarının her birinin komşuluk alanının genişliği belirlenmiş olmaktadır.

3.2.1. Düzgünleştirme (Bant genişliği) Parametresi Seçimi

Sapma – varyans dengesinin sağlanmasında düzgünleştirme parametresinin seçimi büyük önem arz etmektedir. Optimal düzeyinden küçük düzgünleştirme parametresi, kaba ve dalgalı yani yüksek varyanslı bir tahmin elde edilmesine sebebiyet verirken optimal düzeyinden büyük düzgünleştirme parametresi, aşırı düzgünleştirme sebebiyle tahminin sapmalı olmasına neden olmaktadır. Bu sebeplerden dolayı, parametrik olmayan tahminde sapma - varyans ilişkisi göz önünde bulundurularak düzgünleştirme parametresinin seçimi önem arz etmektedir. Bu parametrenin seçiminde kullanılan klasik yaklaşımlar bu alt başlıkta tanıtılmaktadır.

3.2.1.1. Normal Referans Yaklaşımı

f , σ standart sapmalı Gausyen yoğunluk fonksiyonu ise, bilinmeyen σ parametresi, örneklem standart sapması (s) ile ikame edilerek ‘normal referans bant genişliği seçicisi’,

$$\hat{h}_{opt,n} = \begin{cases} 1.06sT^{-\frac{1}{5}}, & \text{Gausyen kernel için} \\ 2.34sT^{-\frac{1}{5}}, & \text{Epanechnikov kernel için} \end{cases}$$

olarak hesaplanmaktadır. Burada T , örneklem hacmini temsil etmektedir. Bu seçici, veri yaklaşık Gausyen dağıldığında iyi bir seçici olmaktadır. Verinin dağılımı asimetric ya da çok modlu ise bu yaklaşım aşırı düzgünleştirmeye sebebiyet verebilmektedir (Fan ve Yao, 2003, s.201).

3.2.1.2. Plug-in Yaklaşımı

Bu seçicilerin temel özelliği, lokal tahmin sapmasını doğrudan tahmin etmesidir. Yoğunluk tahmini sapması $\hat{f}_h$, bilinmeyen f ’in bir fonksiyonu olarak yazılmakta ve genellikle ‘Taylor Seri Genişletmesi’ yardımıyla yaklaştırılmaktadır ve sonrasında f ’in bir tahmini ikame edilerek sapmayı ve bunun sonucu olarak da uyum

iyiliği tahminlerini türetmekte kullanılmaktadır. Neticede ise tahmin edilen uyum iyiliğini minimize eden bant genişliği seçilmektedir. En çok kullanılan uyum iyiliği ölçüsü ‘Ortalama Bütünleşik Kareli Hata’ olup,

$$\begin{aligned} OBKH(\hat{f}_h, f) &= E \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{f}_h(x) - f(x))^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} sapma(\hat{f}_h(x))^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} var(\hat{f}_h(x)) dx \end{aligned}$$

formülü yardımıyla hesaplanmaktadır. Asimptotik yaklaştırma ile OBKH,

$$OBKH(\hat{f}_h, f) = \frac{h^4}{4} \left(\underbrace{\int v^2 W(v) dv}_{\text{kernel var yansı}} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f''(x)^2 dx + \frac{1}{nh} \underbrace{\int W(v)^2 dv}_{L_2 \text{ normu}} + o(h^4 + (nh)^{-1})$$

formülü elde edilmektedir. Bu yaklaştırma minimize edilerek optimal bant genişliği (h_{opt}) hesaplanmaktadır. Optimal bant genişliği,

$$h_{opt} = \frac{\int W(v)^2 dv}{n \left(\int v^2 W(v) dv \right)^2 \int f''(x)^2 dx} (1 + o(1))$$

olarak gösterilmektedir. Optimal bant genişliği formülünde, $\int f''(x)^2 dx$ büyüklüğü bilinmemektedir ve tahmin edilmesi gerekmektedir. Bir kılavuz bant genişliği (k) seçilerek, ikinci türevin kılavuz tahmini yapılabilmektedir. Bu tahmin,

$$\hat{f}_k''(x) = \frac{1}{nk^3} \sum_{i=1}^n W''\left(\frac{X_i - x}{k}\right)$$

formülüyle gerçekleştirilebilmektedir. $\hat{f}_k''(x)$, h_{opt} formülünde yerine koyarak h_{opt} tahmin değeri elde edilebilmektedir (Loader, 1999, ss.179-180).

3.2.1.3. Çapraz Geçerlilik Seçicisi ve Leave-on-Out Çapraz Geçerlilik Fonksiyonu

Düzgünleştirme parametresinin seçiminde sık kullanılan yöntemlerden olan çapraz geçerlilik yöntemi, öngörü hatasını tahmin etme yoluyla tahminci performansını değerlendirmek için faydalı bir yöntemdir. Bu yöntemin arkasında yatan temel fikir, modelin değerlendirilmesinde bir veri noktasının dışarıda bırakılması ve geriye kalan verilerle modeli tahmin etme şeklindedir. Çapraz geçerlilik seçicisi,

$$CG(h) = T^{-1} \sum_{i=1}^T \{Y_i - \hat{m}_{h,-i}(X_i)\}^2$$

formülü ile hesaplanmaktadır. Burada $\hat{m}_{h,-i}$, türev derecesi $\nu = 0$ olması durumunda h bant genişliği ile i . gözlemi olmaksızın kullanılan ‘lokal polinomial tahminci’ olmaktadır. Yukarıdaki formülde, toplanan sayılardan her biri $\{(X_j, Y_j) : j \neq i\}$ veri kümesi kullanılarak i . veri noktasının kareli öngörü hatasını vermektedir (Fan ve Yao, 2003, s.243). Doğrusal olmayan AR(1) modeli, $X_t = f(X_{t-1}) + \varepsilon_t$ olsun. Bağımlı veri durumunda bant genişliği (h) seçilirken,

$$d_A(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \{f(X_t) - \hat{f}_h(X_t)\}^2 w(X_t)$$

ile ifade edilen OHK minimize edilebilmektedir. Bu ifade,

$$d_I(h) = \int \{f(x) - \hat{f}_h(x)\}^2 \eta(x) w(x) dx$$

formülü ile gösterilen ‘bütünleşik kareli hata’nın yaklaştırması olmaktadır. Burada $\eta(\cdot)$, durağan dağılımın yoğunluğunu ifade ederken $w(\cdot)$, kompakt tanımlı ağırlık fonksiyonunu temsil etmektedir. $d_A(h)$, bilinmeyen AR fonksiyonu olan $f(\cdot)$ içerdiğinden plug – in yaklaşımıyla tahmin edilememektedir. Parametrik olmayan kernel tahmincisi için Härdle (1990), ‘leave-on-out çapraz geçerlilik fonksiyonu’ önermiştir. Bu fonksiyon,

$$\zeta G(h) = \frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^n \left\{ X_t - \hat{f}_{h,t}(X_{t-1}) \right\}^2 w(X_{t-1})$$

ile gösterilmektedir. Burada otoregresyon fonksiyonu tahmini,

$$\hat{f}_{h,t}(x) = \frac{n^{-1} \sum_{j \neq t} K\left\{ (x - X_{j-1}) / h \right\} X_j}{n^{-1} \sum_{j \neq t} K\left\{ (x - X_{j-1}) / h \right\}} \text{ olmaktadır. Böylelikle } \zeta G(h) \text{ 'yi minimize}$$

eden bant genişliği $\hat{h}$ elde edilmektedir.

3.2.2. Parametrik Olmayan Regresyon

Değişkenler arasındaki ilişkinin iyi tanımlanmış yani özellikleri bilinen bir fonksiyonla analiz edilemediği durumlarda 'Parametrik Olmayan Regresyon Modelleri' çıkmaz duruma çözüm olmaktadır. Parametrik olmayan regresyon tahmininde temel kavram düzgünleştirmedir. Düzgünleştirme ile sapma – varyans ilişkisi dikkate alınarak ilgili regresyon tahmini yapılabilir. En çok kullanılan düzgünleştirme yöntemi 'kernel düzgünleştirme' olup, diğer düzgünleştirme yöntemlerine de avantaj ve dezavantajları dikkate alınarak geçiş yapılabilir. Bu alt başlıkta, parametrik olmayan regresyon tahmininde sıkça kullanılan düzgünleştirme yöntemleri anlatılmaktadır.

3.2.2.1. Kernel Düzgünleştirme

$\{W_{ni}(x)\}_{i=1}^n$ olarak ifade edilen ağırlık dizisinin şeklinin, x yakınındaki ağırlıkların şeklini ve büyüklüğünü ayarlayan ölçek parametrelili yoğunluk fonksiyonu tarafından belirlenmesi önemlidir. Bu şekil fonksiyonuna 'Kernel Fonksiyonu' adı verilmektedir. Kernel fonksiyonu; sürekli, sınırlı ve simetrik reel bir fonksiyondur ve fonksiyonun integrali alındığında,

$$\int K(u) du = 1$$

geçerli olup ağırlıklar toplamı bire eşittir. Tek boyutlu x geçerliken, Kernel düzgünleştiricileri için ağırlık dizisi,

$$W_{ni}(x) = \frac{K_{h_n}(x - X_i)}{\hat{f}_{h_n}(x)}$$

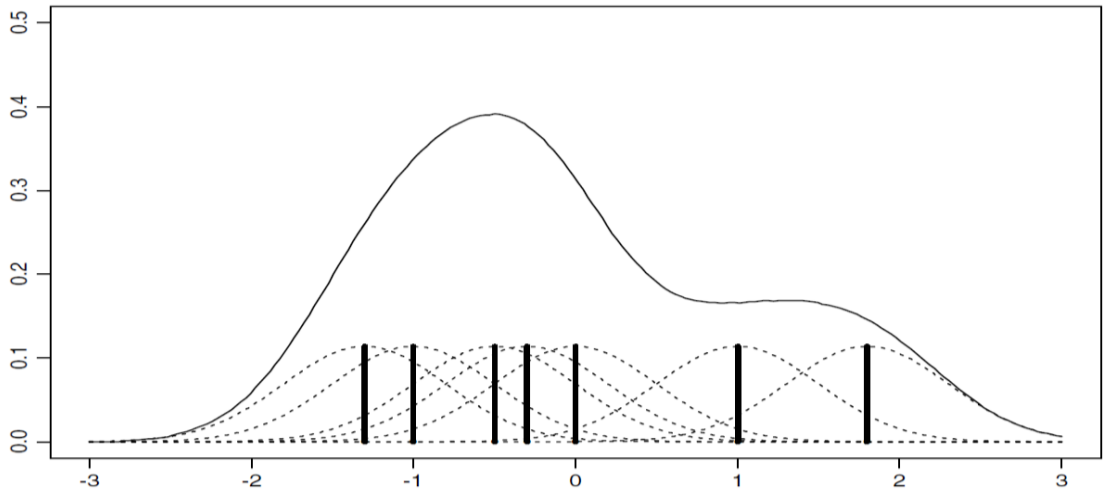
olarak gösterilebilmektedir. Burada; $\hat{f}_{h_n}(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^n K_{h_n}(x - X_i)$ iken

$K_{h_n}(u) = h_n^{-1} K\left(\frac{u}{h_n}\right)$, h_n ölçek faktörüne sahip Kernel fonksiyonu olmaktadır. $\hat{f}_h(\cdot)$

fonksiyonu, 'X'in marjinal yoğunluğunun Rosenblatt - Parzen Kernel Yoğunluk Tahmincisi' olarak adlandırılmaktadır. Ayrıca 'Nadaraya-Watson Tahmincisi' ise,

$$\hat{m}_h(x) = \frac{n^{-1} \sum_{i=1}^n K_h(x - X_i) Y_i}{n^{-1} \sum_{i=1}^n K_h(x - X_i)}$$

olarak ifade edilebilmektedir. Kernel ağırlıklarının şekli, Kernel fonksiyonu tarafından belirlenirken ağırlıkların büyüklüğü, h ile ifade edilen bant genişliğine bağlıdır. Ağırlıkların normalleştirilmesi, X değişkenlerinin yerel yoğunluğuna uyumu kolaylaştırırken ağırlıklar toplamının bir olmasını garanti etmektedir (Härdle, 1994, s.32).



Şekil 2. Kernel Yoğunluk Tahmininin Nokta Yığınlarını Yeniden Dağıtması

Şekil 2’de görüldüğü gibi Kernel yoğunluk tahmini, koyu renkli dikey çubuklarla gösterilen her bir veri noktasındaki noktalar yığınıni yeniden dağıtmakta ve son tahmini elde etmek amacıyla yeniden dağıtılmış yığınları bir araya toplamaktadır (Fan ve Yao, 2003, s.194).

Kernel fonksiyonu genellikle, kapalı ve sınırlı yani kompakt bir tanım aralığına sahip olacak şekilde belirlenmektedir. Birçok durumda, $K : [-1,1] \rightarrow \mathfrak{R}$ olacak şekilde kernel fonksiyonu seçilmektedir. Bu kernellere örnek olarak Epanechnikov kernel ve kuartik kernel söylenebilir (Franke, Kreiss ve Mammen, 2009, s.929).

Kernel yoğunluk tahmincisi nokta yığınlarını gözlenen veri noktaları çevresinde düzgün bir şekilde dağıttığı için, aralığın sınırına yakın bazı noktalarda yoğunluğun tanım aralığının dışına dağıtım durumu olabilmektedir. Bunun sonucu olarak da kernel yoğunluk tahmincisi sınır bölgelerinde yoğunluğu eksik tahmin etmektedir. Sınır noktalarında yoğunluk tahmini yapabilmek için; sınır kerneli, refleksiyon, transformasyon, lokal polinomiyal tahmin yöntemleri kullanılabilir (Fan ve Yao, 2003, ss.202-203). Refleksiyon yöntemi, kernel yoğunluk tahminini $\{-X_t, t=1, \dots, T\}$ olarak gösterilen yansıtılmış veri ve $\{X_t, t=1, \dots, T\}$ olarak ifade edilen orijinal veriye dayanarak gerçekleştirmektedir. Böylelikle tahminci,

$$\hat{f}_h^*(x) = \frac{1}{T} \left\{ \sum_{t=1}^T K_h(X_t - x) + \sum_{t=1}^T K_h(-X_t - x) \right\}, \quad x \geq 0$$

olarak ifade edilmektedir. x değişkeni sınırdan uzak olduğunda, tahmindeki ikinci terim yalnızca sınır bölgesinde tahmini düzelttiğinden ihmal edilebilmektedir. Sınır düzeltmesi için uygulanan diğer bir yöntem ise veriyi,

$$Y_i = g(X_i), \quad i = 1, \dots, n$$

şeklinde dönüştürmektir. Burada g fonksiyonu, $-\infty$ ’dan $+\infty$ ’a monoton artan bir fonksiyondur. Kernel yoğunluk tahmincisi,

$$\hat{f}_h(x) = T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{1}{h} K\left(\frac{X_t - x}{h}\right) = \int K_h(u - x) d\hat{F}(u)$$

olarak gösterilirse ve bu tahminci, $\hat{f}_Y(y)$ tahminini elde etmek amacıyla dönüştürülmüş veri setine uygulanırsa ve daha sonra ters dönüşümle X yoğunluğu elde edilirse fonksiyon tahmini,

$$\hat{f}_X(x) = g'(x) \hat{f}_Y(g(x)) = g'(x) T^{-1} \sum_{t=1}^T K_h(g(x) - g(X_t))$$

formülüyle elde edilmektedir (Fan ve Yao, 2003, ss.202-203).

Belirtilen sebeplerden dolayı gözlem aralığının sınırında, yerel ortalama alma süreci asimetrik olmakta yani ağırlıkların yarısı tanımsız olup sınır dışında kalmaktadır. Bu durumda da bir sapma ortaya çıkmakta ve parametrik olmayan tahmin sınırdaki yüzeysel davranışa bağlı olmaktadır. Seyrek veri bölgelerinin bulunduğu bir başka durumda ise ağırlıklar, ortalaması alınacak gözlem olmadığından tanımsız olmaktadır. Bu problemi önlemek için, ağırlıklar değişken olacak şekilde oluşturulabilmektedir (Härdle, 1994, s.28).

3.2.2.2. K - En Yakın Komşu Tahminleri (K - EYK)

K en yakın komşu tahmini, değişen komşulukta ağırlıklandırılmış ortalamayı ifade etmekte olup, sabit x komşuluğunda ağırlıklandırılmış ortalamanın alındığı Kernel tahmininden farklılaşmaktadır. Burada Öklidyen uzaklık dikkate alınmakta ve x 'in en yakın komşuları olan X değişkenleri yardımıyla komşuluk tanımlanmaktadır. K – EYK düzgünleştiricisi,

$$\hat{m}_k(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^n W_{ki}(x) Y_i$$

olarak ifade edilmektedir. $\{W_{ki}(x)\}_{i=1}^n$ ağırlıklar dizisini ifade etmektedir ve

$$W_{ki}(x) = \begin{cases} \frac{n}{k} & i \in J_X \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak gösterilmektedir. Burada,

$$J_x = \{i: X_i \text{ } x' \text{ e en yakın } k \text{ gözlemden biri}\}$$

olmaktadır. K – EYK tahmincisi için düzgünleştirme parametresi k olup, tahmin edilen eğrinin düzgünleştirme derecesini düzenlemektedir. Buradaki düzgünleştirme parametresi, Kernel düzgünleştiricileri için bant genişliğine benzer bir rol oynamaktadır. Değişen k 'nin tahmin edilen eğrinin özellikleri üzerindeki etkisi, Uniform Kernel kullanılarak yapılan Kernel tahminindeki duruma benzemektedir. Varyansı olabildiğince küçük tutabilmek için k mümkün olduğunca büyük seçilmelidir. Böylelikle bir kez daha, regresyon fonksiyonuna iyi bir yaklaştırma ile gözlemsel hatanın azaltılması arasında bir ilişki ile karşı karşıya kalınmaktadır (Härdle, 1994, ss.53-54).

3.2.2.3. Kama Düzgünleştiricisi

Kama regresyonuna ve cezalı EKK yöntemine farklı bir yaklaşım ‘düzgün kama yöntemi’dir. Arkasında yatan temel fikir, artık kareler toplamını (AKT) minimize eden düzgün fonksiyonu bulmaktır. Örneğin m olarak ifade edilen bir fonksiyonun popüler bir dalgalanma ölçüsü olarak, $\|m''(x)\|_2^2$ ifadesi gösterilebilmektedir. Lagrange çarpan yöntemiyle dalgalanma kısıtı altında AKT’yi minimize etmek,

$$\sum_{t=1}^T \{Y_t - m(X_t)\}^2 + \omega \int \{m''(x)\}^2 dx$$

olarak gösterilen cezalı EKK probleminde m 'yi minimize etmeye denk olmaktadır. Burada ω , Lagrange çarpanı olup aynı zamanda düzgünleştirme parametresidir. Düzgün kama yaklaşımının model karmaşıklığı, düzgünleştirme parametresi olan ω ile kontrol edilmektedir. $\hat{m}_\omega$ tahmincisi, düzgün kama tahmincisi olarak bilinmektedir. Durum – alan düzgünleştirmesinde çapraz geçerlilik yöntemi, yaklaşık doğru düzgünleştirme miktarını vermektedir. Yukarıdaki minimizasyon probleminin bir çözümü, ‘kübik kama’dır. Tüm mümkün düğümler, $\{X_1, \dots, X_T\}$ olarak gösterilen veri noktalarıdır. Kama taban genişlemesi kullanılarak,

$$m(x) = \sum_{j=1}^{T+4} \beta_j S_j(x)$$

elde edilmektedir ve $\|m^*\|_2^2$, $\{\beta_j\}$ 'de kuadratik bir fonksiyondur. Bu sebepten yukarıdaki minimizasyon problemi, kuadratik ceza fonksiyonlu 'Cezalı EKK' ile aynıdır. Bunun bir sonucu olarak, tam anlamıyla sıfır olmayan birçok tahmin edilmiş parametre sıfıra çekilmektedir. Buna ilaveten $\{\hat{\beta}_j\}$, bağımlı değişkenin doğrusal bir fonksiyonu olduğundan tahminci,

$$\hat{m}_\omega(x) = \sum_{j=1}^{T+4} \hat{\beta}_j S_j(x)$$

ve dolaylı olarak tahminci,

$$\hat{m}_\omega(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^n W_i(x, \omega; X_1, \dots, X_n) Y_i$$

Y_i 'nin doğrusal fonksiyonu olarak gösterilebilmektedir. Burada W_i ağırlıkları, bağımlı değişkene bağlı değildir. O halde 'genelleştirilmiş çapraz geçerlilik',

$$GCG(h) = \left[T^{-1} \text{tr} \{ I - H(h) \} \right]^{-2} OHK(h)$$

minimize edilerek düzgünleştirme parametresi (ω) elde edilir. Burada $H(h)$, düzgünleştirme matrisi iken ortalama hata kare, $OHK(h) = T^{-1} \sum_{i=1}^T \{ Y_i - \hat{m}(X_i) \}^2$ formülü ile hesaplanmaktadır (Fan ve Yao, 2003, ss.251-252).

Düzgünleştirme parametresi seçiminden sonra dikkat edilmesi gereken bir aşama da, komşuluk alanı içindeki gözlemlere ağırlıklandırmanın ne şekilde yapılacağının belirlenmesi olmaktadır. Parametrik olmayan analiz kapsamında ağırlıklandırma çeşitli ağırlık fonksiyonlarına dayanılarak yapılmaktadır.

3.2.3. Parametrik Olmayan Yaklaşımda Ağırlıklandırma

Parametrik olmayan yaklaşımda ağırlıklandırma genellikle; düzgün, negatif olmayan, simetrik ve tek modlu olasılık yoğunluk fonksiyonu olan 'Kernel Fonksiyonu (K)' ile yapılmaktadır. Kernel yoğunluk tahmini,

$$\hat{f}_h(x) = T^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{1}{h} K\left(\frac{X_t - x}{h}\right) = \int K_h(u - x) d\hat{F}(u)$$

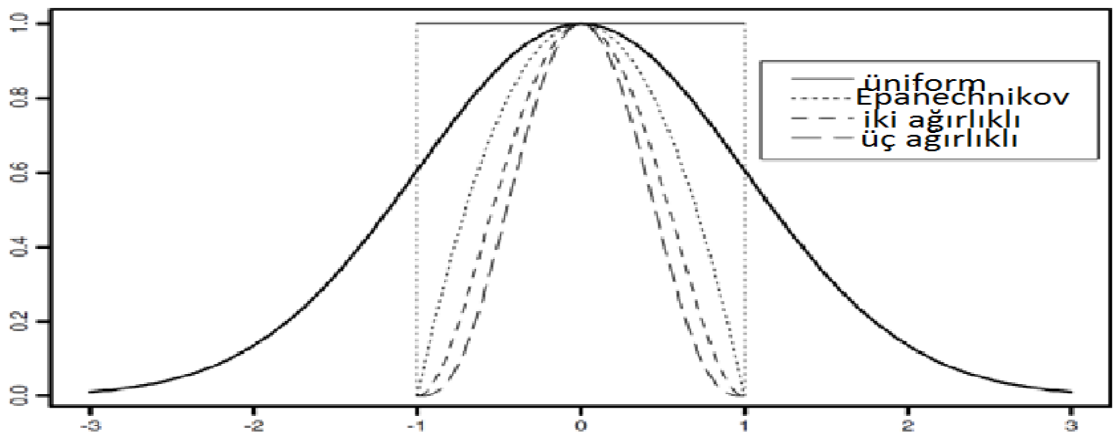
olarak tanımlanmaktadır. Burada, $K_h(\cdot) = K\left(\frac{\cdot}{h}\right) / h$ olmaktadır. Düzgünleştirme

parametresi olan h parametresi, bant genişliği olarak da adlandırılıp yarı pencere büyüklüğünü ifade etmektedir. Genellikle kullanılan Kernel fonksiyonları,

$K(u) = (\sqrt{2\pi})^{-1} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$ olarak gösterilen ‘Gausyen Kernel’ ve

$K_\gamma(u) = \frac{1}{\text{Beta}\left(\frac{1}{2}, \gamma+1\right)} (1-u^2)^\gamma I(|u| \leq 1)$ olarak ifade edilen ‘Simetrik Beta

Ailesi’dir. Buradaki $\gamma = 0, 1, 2, 3$ tercihleri sırasıyla; Üniorm, Epanechnikov, iki ağırlıklı ve üç ağırlıklı Kernel fonksiyonlarına karşılık gelmektedir. γ büyük olduğunda, uygun bir yeniden ölçeklendirme ile elde edilen simetrik gamma kernel, Gausyen kernel fonksiyonunun yaklaşık olarak aynısıdır. Farklı Kernel fonksiyonlarının farklı tanım aralıkları bulunmaktadır. Üniorm kernel için geçerli aralık $[-1, 1]$ iken üç ağırlıklı kernel, kuyruklarda daha küçük ağırlıklara bağlı olarak daha küçük bir tanım aralığına sahiptir. Gausyen kernel’de ise, çok daha uzun bir tanım aralığı geçerlidir. Bant genişlikleri aynı olsa dahi farklı kernel fonksiyonları, x çevresindeki yerel veri noktaları tarafından sağlanan farklı bilgi miktarlarını kullanmaktadır. Kernel yoğunluk tahmincisini kullanmak için, kernel fonksiyonunun ve bant genişliğinin seçilmesi gerekmektedir (Fan ve Yao, 2003, s.195).



Şekil 3. Sıklıkla Kullanılan Kernel Fonksiyonları

Şekil 3'teki kernel fonksiyonları simetrik ve tek modlu olduğu sürece ve bant genişliği optimal olarak belirlendiğinde ortaya çıkan yoğunluk tahmincisi hemen hemen aynı tahmini vermektedir. Bant genişliğinin büyük olması durumunda tahmin büyük sapmalar gösterebilmektedir. Bant genişliğinin küçük olması durumunda ise, tahminin varyansını azaltmak amacıyla kullanılacak fazla sayıda mevcut veri noktası bulunmamaktadır ve bunun sonucu olarak da dalgalı bir eğri ile karşılaşılabilir (Fan ve Yao, 2003, s.196).

3.3. Zaman Serilerinde Parametrik Olmayan Modelleme ve Model Türleri

Regresyon düzgünleştiricilerinin istatistiksel özellikleri esasen, bağımsız ve özdeş dağılmış gözlemler çerçevesinde incelenmektedir ancak zaman serileri ile analiz yapıldığında bu varsayım geçerli olmamaktadır. Bu varsayımın sağlanmadığı bazı senaryoları yakından görmek faydalı olacaktır.

Senaryo 1. $\{(X_i, Y_i), i \geq 1\}, X \in \mathbb{R}^d, Y \in \mathbb{R}$ durağan rassal değişkenler dizisi olsun. Gözlemler i zaman indeksinde bağımlı olsun. Buna göre bir fonksiyonun koşullu dağılımı tahmin edilmek istenebilir.

Senaryo 2. Doğrusal olmayan otoregresif zaman serisi,

$$Y_t = m(Y_{t-1}, \dots, Y_{t-d}) + \varepsilon_t, t = 1, 2, \dots, T$$

olsun. Bu parametrik olmayan regresyon modeli tahmin edilip, gelecekteki gözlemlerin öngörüsü yapılmak istenebilir.

Senaryo 3. Sabit tasarlanmış regresyon modeli,

$$Y_{in} = m(x_{in}) + \varepsilon_{in}, x_{in} = i/n, i \geq 1$$

olarak gösterilirse burada artıklar, ilişkili rassal değişkenler dizisi oluşturmaktadır ve m tahmin edilmek istenmektedir.

Senaryo 4. Verinin eğriler biçiminde ifade edildiği model,

$$Y_i(t) = m(t) + \varepsilon_i(t), 0 \leq t \leq 1, i = 1, 2, \dots$$

biçiminde yazılabilir. Burada $\{\varepsilon_i(t), 0 \leq t \leq 1, i = 1, 2, \dots, n\}$ süreçleri, γ kovaryans fonksiyonuna sahip sıfır ortalamalı durağan sürecin bağımsız kopyaları olsun. Burada ortalama fonksiyonu m ile kovaryans fonksiyonu γ tahmin edilmek istenmektedir.

Birinci senaryo, çok değişkenli zaman serileri gibi modellenebilecek dinamik ekonomik sistemleri ifade etmektedir. İkinci senaryo, döviz kuru getiri serisi gibi finansal zaman serilerinin analizinde sıklıkla kullanılmaktadır. Üçüncü senaryo, tekrarlı gözlemlenen konular için kullanılmaktadır. Dördüncü senaryo için de benzer bir durum söz konusudur (Härdle, 1994, ss.245-247). Zaman serisi gözlemlerinin birbiriyle ilişkili olduğu bu durumlarda çözüm olarak ‘pencereleme ile beyazlatma yöntemi’ kullanılabilmektedir.

3.3.1. Pencereleme ile Beyazlatma Yöntemi

Parametrik olmayan yöntemler, bağımsız ve özdeş dağılmış veriler için istenilen sonuçları vermektedir fakat zaman serilerinde gözlemler arasındaki ilişkiden dolayı bu varsayım ihlal edilmektedir. Bu duruma çözüm olarak, ‘pencereleme yöntemi’ ile zaman serisi verisi beyazlatılabilmektedir ve gözlemler arasındaki korelasyon önemsiz hale getirilip parametrik olmayan yöntemler bu kapsamda da uygulanabilir hale gelmektedir. Kernel yoğunluk tahmincisi,

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)$$

olarak ifade edilsin. Burada $K(\cdot)$, kernel fonksiyonu iken sıfıra eşlenmemiş elemanları içeren tanım kümesinin alt kümesi sonlu olup bant genişliği sıfırdan büyüktür. Kernel fonksiyonunun tanım kümesi $[-1, 1]$ aralığında ise, tahminci yalnızca $(x - h, x + h)$ aralığındaki gözlemleri kullanmaktadır. Örneklem hacmi büyük olduğunda X_i , $i = 1, 2, \dots, n$ çok yüksek dereceden korelasyonlu değilse, $(x - h, x + h)$ aralığında gerçekte bağımsız olan X_i ’lerin sayısı, f dağılımından gelen X_i ’lerin rassal örneklem olarak çekilmesi durumundakiyle aynı olacaktır. Tahminci bağımlı gözlemleri kullandığında, tüm veri kümesindeki değil yalnızca küçük bir penceredeki gözlemlerin bağımlılığından etkilenecektir. Bu sebepten, gözlemler arasındaki bağımlılık kısa hafızaya sahip olup,

küçük penceredeki gözlemleri neredeyse bağımsız hale getirecektir. Bu prensibe, ‘pencereleme ile beyazlatma prensibi’ adı verilmektedir. Bu durumda, bağımsız gözlemler için geliştirilmiş tekniklerin çoğu bağımlı gözlemler durumunda da kullanılabilir (Hart, 1996, ss.116-117).

Durağanlık koşulu altında kernel yoğunluk tahmincisi olan $\hat{f}$ ’nin ortalaması, bağımlı ve bağımsız gözlemler durumunda aynı olmaktadır. Yine $\{x_i, i = 0, \pm 1, \dots\}$, katı durağan reel değerli stokastik bir süreç olduğunda ve bağımlı gözlemler durumunda $\hat{f}$ tahmincisinin varyansı, bağımsız gözlemler durumundaki varyansına ilave olarak kovaryans terimini de içermektedir. Bağımlı gözlemler durumunda varyans, kovaryansın işaretine göre bağımsız gözlemler durumundaki varyanstan büyük ya da küçük olacaktır (Pagan ve Ullah, 1999, ss.43-44). Zaman bağımlılığı, Kernel tahmincisinin varyansını arttırabilirken bu bağımlılığın etkisi, Kernel yönteminin asli bileşeni olan pencereleme ile etkileyici bir şekilde azaltılmaktadır (Hart, 1996, s.119). Başka biçimde ifade edilirse eldeki veri $\{X_t\}_{t=1}^T$, f marjinal yoğunluğuna sahip durağan bir sürecin gerçekleşmesi ise değişken değiştirmek suretiyle,

$$E\hat{f}_h(x) = EK_h(X_t - x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(u) f(x + hu) du$$

olarak yazılabilmektedir. $E\hat{f}_h(x) - f(x)$ olarak tanımlanan tahminci sapması, verinin bağımlı yapısına bağlı olmamaktadır yani bağımsız örneklemdaki durumla aynı durum söz konusudur. Bununla birlikte tahminci varyansı, bağımlı yapıdan etkilenebilmektedir. Kernel yoğunluk tahmincisinin tanım aralığının $[-1,1]$ olduğu varsayımıyla, bu tahminci $x \pm h$ yerel penceresinde yalnızca yerel veri noktalarını kullanarak,

$$\hat{f}_h(x) = T^{-1} \sum_{j=1}^J K_h(X_{t(j)} - x)$$

formülüyle hesaplanmaktadır. Burada $t(j)$, $x \pm h$ aralığına düşen j . veri noktası iken J , yerel veri noktalarının toplam sayısıdır. Orijinal veri yüksek dereceden

otokorelasyonlu olsa da, $\{Y_j = X_{t(j)}, j=1, \dots, J\}$ olarak ifade edilen x çevresindeki yerel pencerede söz konusu olan yeni seride bağımlılık çok daha zayıf olabilmektedir ve böylelikle yerel veri, bağımsız örneklemden alınmış gibi gözükmemektedir (Fan ve Yao, 2003, ss.197-199).

3.3.2. Model Derecesinin Belirlenmesi

Bir zaman serisi regresyonunun tahmininde gecikme sayısının ve model derecesinin doğru belirlenmesi modelin güvenilirliği açısından oldukça önemlidir. Parametrik olmayan regresyon modeli,

$$Z_t = f(Z_{t-1}, \dots, Z_{t-d}) + \varepsilon_t$$

olarak gösterilsin. Burada f , bilinmeyen bir fonksiyon iken $\{\varepsilon_t\}$ dizisi, σ^2 varyanslı Martingale farklar dizisidir. $\{Z_t\}$ 'nin sonlu varyanslı tek değişkenli katı durağan zaman serisi olduğu ve sürekli bir dağılımdan geldiği varsayalım. Buradaki amaç, otoregresif modelin derecesini (d) belirlemektir. Otoregresyon için Kernel tahmini kullanılabilmektedir. $Y_t = (Z_{t-d}, \dots, Z_{t-1})$, bir satır vektörüdür. f , Y_t 'nin yoğunluğu iken $B(\cdot)$, bant genişliğini ifade etmektedir. $y \in \mathbb{R}^d$ için ve r , pozitif tamsayı olmak üzere $t \geq i \geq r$ yarı eşitsizliği geçerli iken yoğunluk tahmincileri aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\hat{f}_{t,i}(y) = \frac{1}{(t-r)B(t)^d} \sum_{s=r}^t K_d \left\{ \frac{y - Y_s}{B(t)} \right\} \text{ ve}$$

$$\hat{F}_{t,i}(y) = \frac{1}{(t-r)B(t)^d} \sum_{s=r}^t Z_s K_d \left\{ \frac{y - Y_s}{B(t)} \right\} \hat{f}_{t,i}(y)^{-1}$$

Burada r , sınır etkilerini minimum yapacak şekilde seçilmektedir aksi halde sınırdaki gözlemlere dayalı olarak yapılacak Kernel tahminleri bu durumdan olumsuz etkilenmektedir. Toplam notasyonlarında $s=r$ iken $s \neq i$ 'dir. $\hat{f}_{t,i}(y)$, i . Y gözlemi haricindeki diğer tüm Y gözlemlerine dayanarak yapılan Kernel tahmini iken $\hat{F}_{t,i}(y)$,

toplama içindeki $Z_i K_d \left\{ \frac{y - Y_i}{B(t)} \right\}$ terimi dışarıda bırakıldığında $Z_{r-d}, \dots, Z_t$ gözlemleri kullanılarak elde edilen $E[Z_t | Z_{t-1}, \dots, Z_{t-d}]$ ifadesinin yani Z_t değişkeninin koşullu ortalamasının Kernel tahminini vermektedir. Bu durumda ‘Çapraz Geçerlilik Yaklaşımı’ değeri, $\text{ÇG}(d) = (N - r + 1)^{-1} \sum \{Z_t - \hat{F}_{N,t}(Y_t)\}^2 W(Y_t)$ formülü ile hesaplanmaktadır. Formül incelendiğinde, gözlenen Z_t değişkeni ile bu değişkenin t. gözlem değeri kullanılmadan elde edilen koşullu ortalamasının tahmininin arasındaki farkın karelerinin ağırlıklandırılmış ortalamasının hesaplandığı görülmektedir. W, negatif olmayan ağırlık fonksiyonudur. Sınırlı zaman serileri için, W=1 olarak alınabilmektedir. Z_t , yakın geçmişine koşullu ortalaması ile ikame edilmektedir. Burada koşullu ortalama fonksiyonu, Z_t silindikten sonra Kernel yöntemi kullanılarak tahmin edilmiştir. Dışarıda bırakma yaklaşımı, modelin karmaşıklığını cezalandırmaktadır. Artıkların ağırlıklandırılmış kareler toplamının hesaplanması yoluyla bulunan ÇG (d) değerleri içinden minimum değere karşılık gelen $\hat{d}$, gecikme derecesi olarak seçilir (Cheng ve Tong, 1992, ss.430-431).

Gecikme derecesinin belirlenmesinde kullanılabilecek bir diğer kriter ise, ‘nihai öngörü hatası (NÖH)’ olmaktadır. Bilinmeyen ‘nihai öngörü hatası (NÖH)’ tahmini için ‘çapraz geçerlilik’ veya ‘asimptotik nihai öngörü hatası (ANÖH)’ nin tahmini kullanılmaktadır. Asimptotik nihai öngörü hatası içinde; bütünleşik varyans, bütünleşik tahmin varyansı ve tahminin bütünleşik kareli sapması büyüklükleri yer almaktadır. ANÖH, kuvvetli aşırı belirleme yaptığından, parametrik olmayan gecikme seçiminde ‘düzeltilmiş ANÖH’ tercih edilmelidir (Tschernig ve Yang, 2000, s.466).

3.3.3. Anlamlı Gecikmeleri Belirlemek İçin Adım Adım Nihai Tahmin Hatası (FPE)

Koşullu ortalama, $M(X_{t-i_1}, \dots, X_{t-i_j})$ notasyonu ile gösterilsin. $k(z)$, kernel fonksiyonunu, h bant genişliğini, n ise gözlem sayısını ifade etsin. $p(x_1, \dots, x_j)$, $(X_{t-i_1}, \dots, X_{t-i_j})$ ’nin birleşik yoğunluğu olsun. Süreç, bir dizi araştırmadan ibaret

olmaktadır. Önceki taramalarda bulunan gecikmeler sabit tutularak, her bir araştırmada yeni gecikme belirlenmektedir. İlk anlamlı gecikme olan i_1^* , $E\left[\left\{X_t - M\left(X_{t-i_1}\right)\right\}^2\right]$ ifadesini minimize eden i_1 seçilerek bulunmaktadır. Burada, $M\left(X_{t-i_1}\right) = E\left[X_t | X_{t-i_1}\right]$ olmaktadır ve $1 \leq i_1 \leq k$ eşitsizliği geçerlidir. Gecikme derecesi, örneklem hacmi ile orantılı olarak değişebilmektedir. Birinci aşamada, $i_1 = i_1^*$ ise, $E\left[\left\{X_t - M\left(X_{t-i_1^*}\right)\right\}^2\right]$ ifadesi ile $\text{var}(X_t)$ karşılaştırılmaktadır. Artık karelerinin ortalaması ile X_t değişkeninin varyansının birbirine eşit olması durumunda, modele dahil edilmiş anlamlı bir gecikme olmadığı sonucuna varılmaktadır. Diğer durumda ise, bir sonraki aşamada $1 \leq i_2 \leq k$, $i_2 \neq i_1^*$ eşitsizlikleri geçerli iken, $E\left[\left\{X_t - M\left(X_{t-i_1^*}, X_{t-i_2}\right)\right\}^2\right]$ ifadesini minimize eden $i_2 = i_2^*$ araştırılmaktadır. Beklenen değer ifadesinin en küçük değerini veren gecikme değerleri seçilmektedir. Modele katılan bir değişkenin anlamsız olması durumunda modelden dışlanamaması, optimal altı bir çözüme sebebiyet verebilmektedir. Bu sebepten, FPE kriterinin parametrik olmayan versiyonu kullanılmaktadır. Bu durumda, X değişkeninin Y üzerine parametrik olmayan regresyonundan elde edilen tahmin şöyledir:

$$\hat{M}_X(Y_{t-j}) = \frac{(nh^j)^{-1} \sum_s X_s k\{h^{-1}(Y_{t-j} - X_{s-j})\}}{(nh^j)^{-1} \sum_s k\{h^{-1}(Y_{t-j} - X_{s-j})\}}$$

$$n^{-1} \sum_t \left[Y_t - (nh^j)^{-1} \sum_s X_s k\{h^{-1}(Y_{t-j} - X_{s-j})\} / p(Y_{t-j}) \right]^2 \times w^2(Y_{t-j}) \quad \text{ifadesi} \quad \text{yeniden}$$

hesaplanmaktadır. p , Y_{t-j} 'nin birleşik yoğunluğunu ifade etmektedir. Beklenen değer alındığında,

$$E\left[n^{-1} \sum_t \left\{Y_t - \hat{M}_X(Y_{t-j})\right\}^2 w^2(Y_{t-j})\right]$$

ifadesi bulunmaktadır. Nihai Tahmin Hatası ise,

$$F\hat{P}E(i_1, \dots, i_j) = n^{-1} \sum_t R_t \frac{1 + (nh^j)^{-1} J^j n^{-1} \sum_t \frac{R_t}{\hat{p}(X_{t-j})} / n^{-1} \sum_t R_t}{1 - (nh^j)^{-1} [2\{k(0)\}^j - J^j] n^{-1} \sum_t \frac{R_t}{\hat{p}(X_{t-j})} / n^{-1} \sum_t R_t}$$

formülü yardımıyla hesaplanmaktadır. Burada R_t , $\{X_t - \hat{M}(X_{t-j})\}^2 w^2(X_{t-j})$ ifadesi yerine kullanılmaktadır ve $J = k(0) = \int k^2(z) dz$ eşitliği geçerli olmaktadır (Tjostheim ve Auestad, 1994, ss.1410-1413). NÖH kriteri, esasen artık kareler toplamını (AKT) yani küçük bant genişliğini ve büyük gecikme derecesini cezalandırmaktadır (Härdle, 1994, s.260).

3.3.4. Fonksiyonel Katsayılı AR (FAR) Modeli Yaklaşımı

Eşik modelinin uzantısı olarak ‘Fonksiyonel katsayılı AR modeli,

$$X_t = f_1(X_{t-d})X_1 + \dots + f_p(X_{t-d})X_{t-p} + \sigma(X_{t-d})\varepsilon_t$$

olarak ifade edilmektedir. Burada, $d > 0$ ve $f_1(\cdot), \dots, f_p(\cdot)$, bilinmeyen katsayı fonksiyonlarıdır. Bu model doğrusal AR modelini, eşik gecikme değişkeni olan X_{t-d} ’ye göre katsayılarının değişmesine izin vererek genelleştirmektedir ve katsayı fonksiyonları gösterge fonksiyonlar olan TAR, EXPAR, STAR gibi doğrusal olmayan zaman serisi modellerini de içinde barındırmaktadır. Bu fonksiyonlar düzgün olup bunun sonucu olarak da, bir sabit veya doğrusal fonksiyon tarafından yerel olarak yaklaştırılabilir. $f_1(\cdot), \dots, f_p(\cdot)$ fonksiyonlarını, veri bir x_0 noktasında tahmin etmek amacıyla sabit tarafından yerel olarak yaklaştırma yapılırsa,

$$f_j(x) \approx a_j, \quad x \in (x_0 - h, x_0 + h)$$

sonucu ortaya çıkmaktadır. h , sabit yaklaşımların yapıldığı komşuluğun büyüklüğünü temsil etmektedir. Lokal parametre a_j , $f_j(x_0)$ ’a karşılık gelmektedir. Bu durumda lokal AR(p) modeli şöyledir:

$$X_t \approx a_1 X_{t-1} + \dots + a_p X_{t-p} + \sigma(x_0)\varepsilon_t, \quad X_{t-d} \in x_0 \pm h$$

Yalnızca verinin, $\{(X_{t-p}, \dots, X_t) : X_{t-d} \in x_0 \pm h, t = p+1, \dots, T\}$ olarak gösterilebilen alt kümesini kullanarak EKK yöntemiyle AR(p) modeli,

$$\sum_{t=p+1}^T (X_t - a_1 X_{t-1} - \dots - a_p X_{t-p})^2 I(|X_{t-d} - x_0| \leq h)$$

ifadesi minimize edilerek tahmin edilebilmektedir. Burada $I(\cdot)$, gösterge fonksiyonu olmaktadır. Buradaki minimizasyon problemi x_0 noktasına bağlı olup x_0 noktasındaki $f_1(\cdot), \dots, f_p(\cdot)$ fonksiyonlarının tahminleri, $\hat{f}_1(x_0) = \hat{a}_1(x_0), \dots, \hat{f}_p(x_0) = \hat{a}_p(x_0)$ olarak elde edilmektedir. $x_0, [a, b]$ aralığında ilerlediği için bu aralıkta tahmin edilmiş fonksiyonlar elde edilmektedir. Lokal sabit yaklaşımlar, lokal doğrusal yaklaşımlarla geliştirilebilmektedir. Böylelikle,

$$f_j(x) \approx a_j + b_j(x - x_0), x \in x_0 \pm h$$

yazılabilmektedir. Lokal parametre b_j , f_j 'nin x_0 noktasındaki yerel eğimine karşılık gelmektedir. Bu durumda yaklaşık model,

$$X_t \approx \{a_1 + b_1(X_{t-d} - x_0)\} X_{t-1} - \dots - \{a_p + b_p(X_{t-d} - x_0)\} X_{t-p} + \sigma(x_0) \varepsilon_t, X_{t-d} \in x_0 \pm h$$

olarak yazılabilmektedir. Üiform ağırlıklar, negatif olmayan tek modlu K fonksiyonu yardımıyla, $K((X_{t-d} - x_0)/h)$ olarak yazılan ağırlıklandırma şeması ile ikame edilirse, problem yerel ağırlıklandırılmış karelerin minimizasyonu problemine dönüşmektedir. Bu durumda minimizasyon problemi formel olarak,

$$\sum_{t=p+1}^T \left[X_t - \{a_1 + b_1(X_{t-d} - x_0)\} X_{t-1} - \dots - \{a_p + b_p(X_{t-d} - x_0)\} X_{t-p} \right]^2 K\left(\frac{X_{t-d} - x_0}{h}\right)$$

ifadesine dönüşmektedir. Tüm terimler için ağırlıklandırma, X_{t-d} ile x_0 arasındaki uzaklığa uygun olarak yapılmaktadır. Kernel fonksiyonunun tanımlı olduğu aralık $[-1, 1]$ aralığı ise, yukarıda ifade edilen ağırlıklandırılmış regresyon yalnızca $X_{t-d} \in x_0 \pm h$ komşuluğundaki yerel veri noktalarını kullanmaktadır. Genellikle ağırlık

fonksiyonları ince kuyruklu olduğu sürece sınırlı tanım aralıklarına sahip olma zorunluluğu taşımamaktadır (Fan ve Yao, 2003, ss.20-22).

Uygulama alanına bakıldığında, Huang ve Shen (2004) çalışmalarında, polinomial kamalara dayalı global düzgünleştirme yöntemi ile doğrusal olmayan zaman serileri için ‘fonksiyonel katsayılı regresyon modeli’ tahmin etmektedirler. Çalışmada fonksiyonel katsayılı regresyon modeli,

$$f(x, u) = \sum_{j=1}^d a_j(u) x_j$$

olarak gösterilmiştir. Burada $a_j(.)$ ’lar, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyonlar olup, x vektörü $x = (x_1, \dots, x_d)^T$ olmaktadır. $U_t \in \mathbb{R}$ olduğundan, model tahmininde yalnızca tek boyutlu düzgünleştirme gereklidir. Tahminde polinomial kamalar kullanıldığından, düğüm konumlarının ve düğüm sayılarının belirlenmesi gerekmektedir. Düğümler, eşit mesafelerde yerleştirilebileceği gibi eşik değişkenin örneklem kantillerine de yerleştirilebilmektedir. Makalede, ‘eşit mesafeli yerleştirme yaklaşımı’ tavsiye edilmektedir. Düğüm sayısının belirlenmesinde ise; AIC, AIC_C (Sapma Düzeltilmiş AIC), BIC ve modifiye edilmiş çapraz geçerlilik (MÇG) kriterleri minimize edilebilmektedir. Yapılan simülasyon çalışmalarında AIC ve AIC_C , diğerlerinden daha iyi bir performans gösterdiğinden düğüm sayısının belirlenmesinde AIC tercih edilmiştir. Verilen örnekte ilgili veri seti için iki sınır düğümü, eşik değişkenin 5 ve 95’inci yüzdelik dilimine yerleştirilmiştir. Simülasyon çalışmalarında, sınır düğümünün bu şekilde seçiminin nispi olarak kararlı bir seçim olduğu görülmektedir.

Fonksiyonel katsayılı regresyon modelinin belirlenmesinde bir diğer gereklilik ise eşik değişken seçimi ve anlamlı değişkenlerin belirlenmesi olmaktadır. Aday modeller sınıfı,

$$Y_t = \sum_{j \in S_d} a_j(Y_{t-d}) Y_{t-j} + \varepsilon_t, \quad 1 \leq d \leq p_{\max}, \quad S_d \subset \{1, \dots, p_{\max}\}$$

olarak gösterilebilmektedir. Veri bir aday eşik gecikmesi d için, aşamalı ekleme – silme yöntemiyle anlamlı gecikmelerin optimal alt kümesi olan S_d^* kararlaştırılmaktadır. AIC,

BIC, MÇG kriterleri minimize edilerek eşik gecikme ve anlamlı gecikmeler seçilebilir. Aşamalı ekleme adımında, tek tek anlamlı gecikmeler eklenir ve ortalama hata kare minimize edilerek seçim yapılır. Aşamalı silme adımında ise, önceki adımda eklenen gecikmeler ortalama hata kare minimize edilecek şekilde bir bir silinmektedir. Aşamalı ekleme ve silmeden sonra, gecikme indekslerinden oluşan alt kümelerin bir dizisi elde edilir ve AIC'yi minimize eden anlamlı gecikmelerin optimal alt kümesi S_d^* elde edilir. Burada d, eşik gecikmesini ifade etmektedir (Huang ve Shen, 2004, s.520).

Cai, Fan ve Yao (2000) çalışmalarına bakıldığında ise, Huang ve Shen (2004) çalışmalarından farklı olarak fonksiyonel katsayılı regresyon modeli, zaman serisi verisi için 'lokal doğrusal regresyon tekniği' ile tahmin edilmektedir. Bir çok zaman serisi modeli,

$$m(u, x) = \sum_{j=1}^p a_j(u) x_j$$

modelinin özel durumları olarak görülebilmektedir. Bu makalede lokal doğrusal regresyon tekniği ile katsayı fonksiyonları $\{a_j(\cdot)\}$ tahmin edilmekte ve yalnızca düzgünleştirme değişkeni (U) düzgünleştirilmektedir. Makalede Tong (1990) vaşak verisi kullanılarak,

$$x_t = a_1(x_{t-2})x_{t-1} + a_2(x_{t-2})x_{t-2} + \varepsilon_t$$

modeli tahmin edilmiştir. Modeldeki katsayılar olan $a_1(\cdot)$ ve $a_2(\cdot)$, tek boyutlu kernel regresyonla tahmin edilmektedir. $a_j(\cdot)$, sürekli ikinci türe ve sahip olup u_0 noktasında doğrusal bir fonksiyon ile yerel olarak yaklaşılabilmektedir. Bu durumda yaklaştırma $a_j(u) \approx a_j + b_j(u - u_0)$ ile gösterilmektedir ve böylelikle $\hat{a}_j(u_0) = \hat{a}_j$ elde edilmektedir. $\{(\hat{a}_j, \hat{b}_j)\}$, ağırlıklandırılmış kareler toplamını minimize etmektedir.

Lokal polinomial teknik kullanılarak yapılacak model tahmininde; bant genişliği, düzgünleştirme değişkeni ve polinom derecesi seçimi gerekmektedir. İlk

etapta, $h = \left[\frac{n}{(n - qm)} \right]^{\frac{1}{5}}$ formülü kullanılarak bulunan bant genişliği değeri ile fonksiyon

katsayıları tahmin edilmektedir. Burada n , örneklem hacmidir. $n - qm$ ($q = 1, \dots, Q$) uzunluğundaki Q adet alt serinin her biri için bilinmeyen katsayı fonksiyonları tahmin edilmektedir ve sonrasında tahmin edilmiş modellere dayalı olarak zaman serisinin m uzunluğundaki gelecek bölümünün tek adım ileri öngörü hataları hesaplanmaktadır. Burada m ve Q veri iki pozitif tamsayıdır ve $n > mQ$ eşitsizliği geçerlidir. Nihayetinde, ortalama kareli hatayı minimize eden bant genişliği seçilmektedir. Uygulamada, $m = \lceil 0.1n \rceil$ ve $Q = 4$ alınabilmektedir. Düzgünleştirme değişkeninin seçiminde ise, herhangi bir ön bilgi yoksa U; Akaike bilgi kriteri, çapraz geçerlilik kriteri vb. kriterler kullanılarak seçilebileceği gibi açıklayıcı değişkenlerin doğrusal fonksiyonu olarak da seçilebilmektedir. Bu makalede, OHK(h) değerini minimum yapacak şekilde veri açıklayıcı değişkenlerden birisi U yani geçiş değişkeni olarak seçilmektedir. Modelin derecesi p de bu şekilde seçilebilmektedir (Cai, Fan ve Yao, 2000, s.944).

Fan ve Zhang (2008) çalışmalarında, değişken katsayılı modellerin istatistiksel yöntemlerinden bahsetmişlerdir. Değişken katsayılı modeller, temelde yerel parametrik modellerdir. Değişken katsayılı model,

$$\underbrace{m(U, X)}_{\text{regresyon fonksiyonu}} = X^T \underbrace{a(U)}_{\substack{\text{bilinmeyen} \\ \text{fonksiyon} \\ \text{katsayı} \\ \text{vektörü}}}$$

olarak ifade edilebilmektedir. Burada U ve X arasındaki doğrusal olmayan etkileşimlere de izin verilmektedir ve U değişkeni, tek değişkeni temsil etmek zorunda değildir. Bu modelde $a(\cdot)$ tahmini için üç yaklaşım bulunmaktadır. Bunlar; kernel lokal polinomiyal düzgünleştirme, polinomiyal kama ve düzgünleştirme kaması yaklaşımlarıdır. Değişken katsayılı model, lokal lineer model olduğundan ‘kernel lokal polinomiyal düzgünleştirme’ kullanımı daha makul görünmektedir. Bu yöntemde, her bir veri u için lokal doğrusal tahminci $\hat{a}(u)$,

$$L(a, b) = \sum_{i=1}^n \left\{ y_i - X_i^T a - X_i^T b (U_i - u) \right\}^2 K_h(U_i - u)$$

ifadesi minimize edilerek elde edilmektedir. Burada, $K_h(t) = K(t/h)/h$ genellikle 'Epanechnikov Kernel' olarak seçilen kernel fonksiyonudur. Epanechnikov kernel, $K(t) = 0.75(1-t^2)_+$ olarak ifade edilmektedir. $\hat{a}(u)$, asimptotik normal dağılmaktadır. Burada öncelikle, $\hat{a}(u)$ 'nin OHK tahmincisi bulunur. Sonra bu tahminci, bant genişliğine göre minimize edilir. Bunun için, $\hat{a}(u)$ 'nin sapmasının ve kovaryans matrisinin tahmin edilmesi gerekmektedir. Fan ve Gijbels (1995) çalışmasında, sapma ve kovaryans matrisi tahmininde kullanılacak pilot bant genişliği (h_*) için artık kareler kriteri (RSC) kullanmışlardır. Lokal polinomiyal regresyon tahmincisinin OHK tahmininin elde edilmesinde, pilot bant genişliği kullanılarak yüksek dereceden başlangıç polinomu tahmini gerekmektedir. Bu pilot tahmin aşamasında 'artık kareler kriteri' bant genişliği seçim kuralı olarak kullanılabilir. Bu kriter,

$$AKK(x_0; h) = \hat{\sigma}^2(x_0) \{1 + (p+1)V\}$$

formülü ile hesaplanmaktadır. Burada $\hat{\sigma}^2(\cdot)$, p. derece lokal polinomun tahmininden elde edilen normleştirilmiş ve ağırlıklandırılmış AKT olmaktadır. V ise, $(X^T W X)^{-1} (X^T W^2 X) (X^T W X)^{-1}$ matrisinin köşegeninin birinci elemanını ifade etmekte ve lokal veri noktalarının etkin sayısını göstermektedir. Bant genişliği çok büyük olduğunda, polinom veriye iyi uyum sağlayamamaktadır. Buna bağlı olarak sapma ve $\hat{\sigma}^2(x_0)$ büyük olmaktadır. Bant genişliği küçük olduğunda ise, tahmin varyansı ve V büyük olmaktadır. $\hat{\sigma}^2(x_0)$ ve V birlikte AKK formülünde yer aldığından AKK büyüklüğü, bant genişliğinin aşırı seçimlerini önlemektedir (Fan ve Gijbels, 1996, s.118).

Katsayı fonksiyonlarının düzgünleştirme dereceleri farklı olduğunda, 'iki adımlı tahmin yöntemi' kullanılabilir. Bu yöntemde öncelikle, $a(\cdot)$ 'ların başlangıç tahmincisi için küçük bant genişliği kullanılır. Bu tahminci, daha küçük

sapmaya ve daha büyük varyansa sahip olacaktır. Daha sonra, $a(\cdot)$ 'nin daha az düzgün bileşenleri, başlangıç tahmincisiyle ikame edilmektedir. Nihayetinde ise bant genişliği çok az arttırılarak daha yüksek dereceden düzgünleştirme ile düzgün bileşenlerin tahmini yapılır. İlk olarak diğerlerinden daha düzgün olan $a_p(\cdot)$ katsayı fonksiyonu tahmin edilsin. Değişken katsayı modeli,

$$y_i = \sum_{j=1}^{p-1} a_j(U_i) x_{ij} + a_p(U_i) x_{ip} + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

olarak gösterilmektedir. Küçük bant genişliği ile herhangi bir veri u için, $a(u)$ 'nin başlangıç tahmincisi $\tilde{a}(u)$ olsun. Bu tahminci modelde yerine koyulursa sentetik model,

$$y_i - \sum_{j=1}^{p-1} \tilde{a}_j(U_i) x_{ij} = a_p(U_i) x_{ip} + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

olarak elde edilmektedir. $a_p(\cdot)$, dördüncü türevelere sahip iken Taylor açılımı ile,

$$a_p(U_i) \approx \sum_{k=0}^3 (k!)^{-1} a_p^{(k)}(u) (U_i - u)^k$$

olarak yazılmaktadır. Burada U_i , $2h_1$ uzunluğuyla u 'nun komşuluğu içindedir. Bu da analizi h_1 bant genişliği ile lokal kübik tahmine götürmektedir. Aşağıdaki,

$$\sum_{i=1}^n \left\{ y_i - \sum_{j=1}^{p-1} \tilde{a}_j(U_i) x_{ij} - x_{ip} \sum_{k=0}^3 a_{p,k}(U_i - u)^k \right\}^2 \times K_{h_1}(U_i - u)$$

ifadesi minimize edilerek $(a_{p,0}, a_{p,1}, a_{p,2}, a_{p,3})$ tahmini elde edilmektedir. $a_p(u)$ 'nin nihai tahmincisi ise $a_{p,0}$ 'a karşılık gelen kısımdır. İki adımlı yöntemde $a_p(\cdot)$ tahmininde ilk adım yukarıdakiyle aynıdır fakat ikinci adımda $\tilde{a}_p(U_i)$, U_i 'ye karşı h_1 bant genişliği ile 'lokal kübik modelleme' yöntemiyle düzgünleştirilebilmektedir.

Buraya kadar olan kısımda U , bilinen ve gözlemlenendi. Adaptif değişken katsayılı model ile bu varsayım kaldırılabilir. Adaptif katsayılı model,

$$E(Y | X) = \sum_{j=1}^p g_j(\beta^T X) x_j$$

olarak gösterilebilmektedir. Burada, $U = \beta^T X$ olarak ifade edilen bilinmeyen bir indeks olmaktadır. β veriyken model, ‘değişken katsayılı model’e dönüşür ve $\{\hat{g}(., \beta)\}$ olarak gösterilen katsayı fonksiyon tahminleri elde edilir. Bu tahminler adaptif katsayılı modelde yerine koyulduğunda,

$$E(Y | X) = \sum_{j=1}^p \hat{g}_j(\beta^T X, \beta) x_j$$

ile gösterilen ‘sentetik parametrik model’ elde edilmektedir. Burada β tahmini için EKK yöntemi uygulanabilmektedir. Değişken katsayılı modelde katsayıların, gerçekten değişken olup olmadığını test etmek mümkündür. Hipotezler,

$$H_0 : a_j(u) = C_j \leftrightarrow H_1 : a_j(u) \neq C_j$$

olarak kurulmaktadır. Burada C_j sabittir. Hipotez, bootstrap tabanlı ‘genelleştirilmiş benzerlik oranı testi’ ile test edilmektedir. Burada test istatistiği,

$$T_j = (-2 \log h)^{1/2} \left(\sup_{u \in [0,1]} |\hat{v}(\hat{a}_j | D)|^{-1/2} \times (\hat{a}_j - \hat{C}_j - \hat{s}(\hat{a}_j | D)) | -d_{v,n} \right)$$

formülü ile hesaplanmaktadır. $\hat{C}_j = n^{-1} \sum_{i=1}^n \hat{a}_j(U_i)$ eşitliği geçerlidir. Asimptotik kritik değer ise, $c_\alpha = -\log \{-0.5 \log(1 - \alpha)\}$ formülüyle hesaplanmaktadır. $T_j > c_\alpha$ olduğunda, sıfır hipotezi reddedilmektedir (Fan ve Zhang, 2008, ss.183-185).

3.3.4.1. FAR Modeli İçin Belirlenme Prosedürü

FAR modelinin kullanılmasında temel zorluk fonksiyonel katsayılar olan $f_i(.)$ ’lerin belirlenmesidir. Belirlenme durumunda ‘düzenlenmiş lokal regresyon’ dikkate

alınarak AR katsayılarının lokal davranışı keşfedilebilmektedir. Lokal kelimesinden kastedilen anlam, eşik uzayı olan X_{t-1}^* 'daki birbirine yakın veri noktalarıyla $f_i(\cdot)$ 'nin yerel tahminini elde etmek için belli bir pencereyi kullanmayı ifade etmektedir. Böyle bir tahmin, $f_i(\cdot)$ 'nin şekli hakkında bilgi sağlamaktadır (Chen ve Tsay, 1993, ss.299-300). Chen ve Tsay (1993), doğrusal olmayan fonksiyonel formları yaklaşık olarak belirlemek için 'düzenlenmiş lokal regresyon yöntemi' önermişlerdir.

3.3.4.1.1. Düzenlenmiş Lokal Regresyon

Basitlik amacıyla x_{t-d} , tek eşik değişken olsun. $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ ise, $x_t = f_1(x_{t-d})x_{t-1} + \dots + f_p(x_{t-d})x_{t-p} + \varepsilon_t$ olarak gösterilen FAR modelinin N ardışık gözlemi olsun. Model belirlenmesindeki temel amaç, veriden $f_i(\cdot)$ fonksiyonel şekillerinin çıkarsanmasıdır yani $f_i(\cdot)$ fonksiyonunu, x_{t-d} 'nin farklı değerleri için tahmin etmektir. $f_i(x)$ fonksiyonunu tahmin etmek amacıyla verinin $i=1, \dots, k$ iken $x_{t-d} = x$ olacak şekilde $x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_k}$ olarak ifade edilen yeterli sayıda gözlem içerdiği varsayılın. Bu durumda geçiş değişkeninin değer alacağı k adet gözlem söz konusu olmaktadır. Doğrusal regresyon, $t=t_1, t_2, \dots, t_k$ iken $x_t = a_1x_{t-1} + \dots + a_px_{t-p} + \varepsilon_t$ olarak gösterilsin. $a_i = f_i(x)$ eşitliği durumunda EKK yöntemiyle fonksiyonların tahmini, $\hat{a}_i$ ile elde edilmektedir. $\hat{f}_i(x)$ 'in x değişkenine göre grafiği çizildiğinde, $f_i(\cdot)$ 'nin fonksiyonel şeklinin tahmini sağlanmaktadır. Uygulamada böyle ideal bir durumun gerçekleşmesi zor olsa da geçiş değişkeni x_{t-d} 'nin x 'e yakın değerler alabileceği veri noktalarını kullanma fikri faydalı olmaktadır (Chen ve Tsay, 1993, s.300).

$x_1, \dots, x_N$ verisi için geçiş değişken olan x_{t-d} , $x_1, \dots, x_{N-d}$ değerlerini alabilmektedir. $x_{(i)}$, $\{x_1, \dots, x_{N-d}\}$ 'nin i . sıra istatistiği olsun. $x_{(i)}$ 'nin zaman indeksi t_i ile gösterilsin. Bu durumda düzenlenmiş lokal regresyon için takip edilecek basamaklar aşağıda sıralanmaktadır (Chen ve Tsay, 1993, s.300):

1. Pencere oluşturmak için c ile ifade edilen aralık uzunluğunu ve penceredeki gözlem sayısını kontrol etmek için K ile gösterilen minimum örneklem hacmini seç.
2. $\left[x_{(1)}, x_{(1)} + c \right]$ penceresini oluştur. $x_{(1)}, \dots, x_{(k)}$ gözlemlerinin bu pencerenin içinde olduğunu varsay. Süreci,

$$x_{t+d} = a_1 x_{t+d-1} + \dots + a_p x_{t+d-p} + e_{t+d}, \quad t = t_1, \dots, t_k$$

olarak gösterilen doğrusal regresyonun tahminiyle başlat. a_i 'nin EKK tahminini, penceredeki örneklem hacmi (k) , $k > K$ koşulunu sağlarken $f_i(x_{(1)} + c)$ 'nin tahmini olarak düşün.

3. Sıralı geçiş değişkeninin yeni bir veri noktası pencereye girene ya da pencereden çıkana kadar pencereyi x_{t-d} eksenini boyunca hareket ettir. Yeni penceredeki örneklem hacmi K 'ye eşit ya da K 'den büyükse, $\hat{f}_i(x_{(j)} + c)$ 'yi elde etmek amacıyla ikinci basamakta kurulana benzer bir doğrusal regresyon kur. Burada $x_{(j)} + c$, aralığın sağındaki son noktayı belirtmektedir. Penceredeki örneklem hacmi K 'den küçükse, pencereyi ileri doğru hareket ettirmeye devam et.
4. $x_{(N-d)}$ 'e kadar üçüncü basamağı tekrar et.
5. $\hat{f}_i(x)$ 'in x 'e karşı çizimlerini yap ve çizimlerden $f_i(\cdot)$ 'nin fonksiyonel biçimini belirle. Uygulamada c ve K 'nin seçimi, örneklem hacmi (N) 'ne, p derecesine ve $f_i(\cdot)$ fonksiyonlarına bağlıdır.

Özetlenecek olursa, düzenlenmiş lokal regresyon ve bazı çizimlere dayanarak, FAR modeli tahmini için dört basamaklı yöntem önerilmektedir. Bu basamaklar aşağıdaki gibidir (Chen ve Tsay, 1993, s.301).

1. Gecikme parametresi d ile AR derecesi p seçilir.
2. Önerilen 'düzenlenmiş lokal regresyon (DLR) yardımıyla $f_i(\cdot)$ fonksiyonel şekilleri belirlenir.

3. Doğru kabul edilen parametrik bir model oluşturulup ‘koşullu EKK’ ile bu model tahmin edilir.
4. Tahmin edilen model, doğrusal olmayan zaman serileri analizinde kullanılan çeşitli testlerle kontrol edilir. Gerekirse, ikinci ve üçüncü basamaklara dönüş yapılabilir.

Cai, Fan ve Yao (2000) çalışmalarında, lokal doğrusal regresyon için bant genişliği seçiminde kolay ve hızlı bir yöntem önermişlerdir. Bu yöntem, durağan zaman serisi verisinin yapısına uygun ‘değiştirilmiş çok katlı çapraz geçerlilik kriteri’ olarak bakılabilmektedir. m ve Q , iki pozitif tamsayı olsun ve $n > mQ$ eşitsizliği sağlansın. Temel fikir, $n - qm$ uzunluğundaki Q adet alt seriyi bilinmeyen katsayı fonksiyonlarını tahmin etmek için kullanmaktır. Burada, $(q = 1, \dots, Q)$ olmaktadır. Sonrasında ise amaç, tahmin edilen modele dayalı olarak m uzunluğundaki zaman serisinin gelecek bölümünün bir adım ileri öngörü hatalarını hesaplamaktır yani OHK’yi minimize eden h seçilmektedir. Bu durumda ortalama OHK,

$$ORTOHK(h) = Q^{-1} \sum_{q=1}^Q OHK_q(h)$$

formülüyle hesaplanmaktadır. Burada, $OHK_q(h) = \frac{1}{m} \sum_{i=n-qm+1}^{n-qm+m} \left\{ Y_i - \sum_{j=1}^p \hat{a}_{j,q}(U_i) X_{i,j} \right\}^2$ ve $q = 1, \dots, Q$ olarak ifade edilmektedir. $\{\hat{a}_{j,q}(\cdot)\}$, $h[n/(n-qm)]^{1/5}$ bant genişliği ile $\{(U_i, X_i, Y_i), 1 \leq i \leq n - qm\}$ örnekleminde hesaplanmaktadır. Uygulamada, $m = [0.1n]$ ve $Q = 4$ kullanılabilmektedir. mQ yeterince büyük olduğunda yani öngörü hatalarının hesaplanması kararlı olduğunda seçilen bant genişliği, m ve Q seçimine kritik düzeyde bağlı olmamaktadır (2000, s.944).

3.3.5. Adaptif Fonksiyonel Katsayılı Otoregresif Modeller (AFKOR)

Model bağımlı değişken (geçiş değişkeni), gecikmeli değişken olmanın yanı sıra geçmiş değerlerin doğrusal bir kombinasyonu da olabilmektedir. Bu durumda AFKOR modeli kullanılabilmektedir. Model,

$$X_t = G(X_{t-1}, \dots, X_{t-p}) + \varepsilon_t, \quad E\{\varepsilon_t | X_{t-1}, \dots, X_{t-p}\} = 0$$

olarak yazılabilmektedir. Oto regresif fonksiyon G , beklenen öngörü hatasını minimize ettiği ölçüde en iyi öngörü fonksiyonu olmaktadır. Bu durumda minimizasyon problemi,

$$\min_G E\left(X_t - G(X_{t-1}, \dots, X_{t-p})\right)^2$$

olmaktadır. Fakat parametrik olmayan G fonksiyonu boyutluluk probleminden dolayı makul bir doğrulukla tahmin edilememektedir. FAR modelinin genelleştirilmesi ile katsayı fonksiyonlarının ‘indis’ adı verilen geçmiş değerlerin doğrusal fonksiyonlarına bağlı olmasına izin verilmektedir. $X_{t-1} = (X_{t-1}, \dots, X_{t-p})$ olup, özel olarak da $\|\beta\| = 1$ eşitliğini sağlayan $\mathbb{R}^p$ uzayında bilinmeyen doğrultu olsun. AFKOR modeli, G oto regresif fonksiyonunu,

$$g(x) = g_0(\beta^T x) + \sum_{j=1}^{p-1} g_j(\beta^T x) x_j \quad (8.31)$$

biçiminde gösterilen fonksiyonlar ailesi ile yaklaştırmaktadır. G fonksiyonu bu yaklaştırmayı gerçekten kabul ediyorsa AFKOR modeli,

$$X_t = g_0(\beta^T X_{t-1}) + \sum_{j=1}^p g_j(\beta^T X_{t-1}) X_{t-j} + \varepsilon_t$$

şeklinde yazılabilmektedir. ε_t ’nin X_{t-1} ’den bağımsız olduğu varsayılmaktadır. AFKOR modelleri, önemli model bağımlı doğrultu olan β ’yı, modelleme sapmasını azaltmak amacıyla seçmeye izin vermektedir. β ’daki ilave parametreler, istatistiksel tahminde çok fazla ilave zorluk çıkarmamaktadır. β parametresi, genellikle $\sqrt{n}$ oranında ve g fonksiyonu β biliniyormuşçasına iyi olarak tahmin edilebilmektir (Fan ve Yao, 2003, s.334).

3.3.6. Lokal Polinomiyal Tahmin

Skalar x için kernel fonksiyonu, $\frac{1}{h}K\left(\frac{x_t - x}{h}\right)$ olmaktadır. h ne kadar büyük olursa, x çevresindeki komşuluk da o kadar büyük olur. Bu durumda, komşuluktaki örneklem gözlemleri büyük ağırlıklar almakta ve tahmin sapması artmaktadır. Değişken sayısı birden büyük olduğunda yani değişken vektörü $x = (x_1, \dots, x_m)'$ iken çarpım kerneli, $K_h(x_t - x) = \prod_{i=1}^m \frac{1}{h^m} K\left(\frac{x_{ti} - x_i}{h}\right)$ olarak yazılmaktadır. Burada x_{ti} , t .değişkenin i . bileşenini temsil etmektedir. Çözülecek ağırlıklı EKK problemi,

$$\{\hat{c}, \hat{c}_1, \dots, \hat{c}_m\} = \arg \min_{\{c, c_1, \dots, c_m\}} \sum_{t=i_m+1}^T \left\{ y_t - c - \sum_{i=1}^m c_i (x_{ti} - x_i) \right\}^2 K_h(x_t - x)$$

ile ifade edilmektedir. Buradan, x noktasında lokal doğrusal fonksiyon tahmini olan $\hat{\mu}(x, h) = \hat{c}$ elde edilmektedir. Bu tahminci, birinci derece Taylor açılımına dayandığından ‘lokal doğrusal tahminci’ olmaktadır. Sıfırıncı derece Taylor yaklaşımı ile Nadaraya – Watson tahmincisi bulunmaktadır. Burada minimizasyon problemi,

$$\hat{\mu}_{NW}(x, h) = \hat{c} = \arg \min_{\{c\}} \sum_{t=i_m+1}^T \{y_t - c\}^2 K_h(x_t - x)$$

olarak ifade edilmektedir. Lokal kuadratik tahminci ise, $\mu(\cdot)$ ’nin ikinci derece kısmi türevlerinin tahmininde kullanılmaktadır. x_t , bir ya da iki boyutluysa tahmin edilen fonksiyonların, h ’nin farklı değerlerine karşı grafiği çizilebilmektedir. İlgili model,

$$Y_t = m(X_t) + \sigma(X_t)\varepsilon_t$$

olarak gösterilsin. Burada, $\sigma^2(x) = \text{var}(Y_t | X_t = x)$ olmaktadır. ε_t , $E(\varepsilon_t | X_t) = 0$ ile $\text{var}(\varepsilon_t | X_t) = 1$ özelliklerine sahiptir. Lokal polinomiyal teknik, $m(x) = m^{(0)}(x)$ olarak ifade edilen fonksiyonun kendisi ile türevleri olan $m^{(\nu)}(x)$ ’in tahmininde kullanıma oldukça uygundur. Burada ν , türev derecesini ifade etmektedir. $m(\cdot)$ fonksiyonunun

şekli belirlenemediğinden, x_0 'dan uzak veri noktası $m(x_0)$ hakkında çok az bir bilgi sağlamaktadır. Dolayısıyla yalnızca x_0 çevresindeki yerel veri noktaları kullanılmaktadır. $m(x)$, x_0 noktasında $(p+1)$. dereceden türevlenebilir olsun. x_0 'ın yerel komşuluğundaki x için Taylor genişletmesi,

$$m(x) = m(x_0) + m'(x_0)(x - x_0) + \frac{m''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{m^{(p)}(x_0)}{p!}(x - x_0)^p + O\{(x - x_0)^{p+1}\}$$

olarak yazılabilmektedir. x_0 çevresinde yerel olarak $m(x)$,

$$m(x) \approx \sum_{j=0}^p \beta_j (x - x_0)^j$$

olarak modellenmektedir. $\{\beta_j\}$ parametreleri, x_0 'a bağlı lokal parametrelerdir. Her bir lokal parametre, $\beta_j = m^{(j)}(x_0) / j!$ olarak gösterilebilmektedir. Yukarıdaki lokal model lokal veri kullanılarak,

$$\sum_{t=1}^T \left\{ Y_t - \sum_{j=0}^p \beta_j (X_t - x_0)^j \right\}^2 K_h(X_t - x_0)$$

ifadesinin minimizasyonu ile tahmin edilmektedir (Fan ve Yao, 2003, ss.230-231).

Amaç $m^{(j)}(x)$ 'i tahmin etmek ise, $p - j$ tek olduğunda lokal polinomiyal tahmin, sınır sapmasını otomatik olarak düzeltmektedir. p 'nin $p - j$ farkının tek sayı olacak şekilde seçilmesi daha iyi bir tahminci performansı sağlamakta ve bu durumda lokal polinomiyal tahmin aşırı sınır sapması oluşturmamaktadır (Fan ve Yao, 2003, s.233).

İlk amaç bir regresyon fonksiyonu tahmin etmek olduğunda 'lokal doğrusal tahmin', birinci türev tahmin etmek olduğunda 'lokal kuadratik tahmin' tercih edilmektedir ve diğer türev tahminleri de benzer şekilde yapılmaktadır (Fan ve Yao, 2003, s.234).

Lokal polinomiyal tahminin artıkları için de; portmanto otokorelasyon testi, LM otokorelasyon testi, ARCH LM, J.B. testleri keşif amacıyla kullanılabilir. Artıkların otokorelasyon fonksiyon grafiği olan korelogram da çizilebilir. Artıklar lokal tahminden elde edildiğinde asimptotik özelliklerin sağlanamayabileceğine dikkat edilmelidir (Tschernig, 2004, s.262).

3.3.6.1. Lokal Regresyonun Bileşenleri

Lokal regresyonun tahmininde bant genişliğinin, lokal polinom derecesinin ve ağırlık fonksiyonunun belirlenmesi oldukça önemlidir. İlk olarak bant genişliğinin seçiminde en temel yol, tüm x 'ler için sabit bir bant genişliği seçimidir. x_i 'ler üniform olmayan bir dağılıma sahip olduğunda, boş komşular problemi söz konusu olabilmektedir. Bu durum özellikle kuyruk ve sınır bölgelerinde ya da çok boyutlu durumlarda daha kritik bir öneme sahip olmaktadır. Boş komşuluk problemini aşmak için, 'en yakın komşu' bant genişliği kullanılabilir. Bu durumda, ilgili x noktasına tüm noktaların uzaklığı hesaplanır. Sıfır ile bir arasında değerler alan düzgünleştirme parametresi ile örneklem hacmi çarpılarak bir k değeri elde edilir ve k . en yakın mesafedeki $h(x)$ seçilir (Loader, 1999, ss.20-21). İkinci olarak lokal polinomun derecesi de sapma – varyans ilişkisini etkilemektedir. Yüksek polinom derecesi, düşük polinom derecesine göre ilgili ortalama $\mu(u)$ 'ya daha iyi bir yaklaşır. Yüksek dereceli polinom, tahmincinin daha az sapmalı olmasını sağlamaktadır ancak burada tahmin edilecek katsayı sayısı daha fazla olduğundan tahminin varyansı artacaktır. Bu açıdan, bant genişliği ile polinom derecesinin etkileri birbirine karışacaktır. Genellikle düşük dereceli bir polinom seçimi yeterli olmakta ve tatmin edici bir tahmin yakalamak adına bant genişliği üzerine odaklanılmaktadır. En çok kullanılan lokal regresyonlar arasında ilk sıralarda, lokal doğrusal ve lokal kuadratik polinomlar gelmektedir. Lokal sabit polinom, sapmaya elverişli olduğu için daha az tercih edilmektedir. Lokal doğrusal tahmin, özellikle sınır bölgelerinde daha iyi sonuçlar vermektedir. Lokal kuadratik tahmin, sapmayı daha çok azaltmaktadır ancak varyanstaki artış özellikle sınır bölgelerinde problem oluşturabilmektedir. Lokal kübik ve daha üst dereceden polinomlar ise diğerlerine göre nadiren daha iyi sonuçlar vermektedir (Loader, 1999, s.22). Nihai olarak ağırlık

fonksiyonuna değinilirse $W(u)$, sapma – varyans ilişkisinde daha az etkiye sahip olmakla birlikte, tahmin edilen regresyon eğrisinin görsel kalitesini etkilemektedir. En temel ağırlık fonksiyonu,

$$W(u) = I_{[-1,1]}(u)$$

olarak ifade edilen ‘dikdörtgen ağırlık fonksiyonu’dur. Bu ağırlık fonksiyonu, süreksiz ağırlıklar oluşturduğundan ve süreksiz eğri tahminine sebebiyet verdiğiinden nadiren kullanılmaktadır. $W(u)$ genellikle, sürekli, simetrik, sıfır noktasında zirve yapan ve $[-1,1]$ aralığı üzerinde olmalıdır. Bu özelliklere sahip bir ağırlık fonksiyonu olarak ‘triküp ağırlık fonksiyonu’ sıklıkla tercih edilebilmektedir (Loader, 1999, s.23).

Lokal regresyon tahmini, lokal en küçük kareler tahminidir. Bu sebepten, aşırı değerlere karşı duyarlılık gibi EKK yönteminin sıkıntılı taraflarını da beraberinde getirmektedir. EKK yöntemi yerine, ‘lokal benzerlik yöntemi’ de kullanılabilmektedir (Loader, 1999, s.24).

3.3.7. Global Kama Yaklaşırması

Parçalı doğrusal fonksiyonların eğimlerini değıştirdikleri noktalara ‘düğüm’ adı verilmektedir. $t_{j,1}, \dots, t_{j,m_j}$, bilinmeyen $f_1(\cdot), \dots, f_p(\cdot)$ fonksiyonlarını yaklaştırmak için geçerli düğümler olsun. Tüm lokasyonlarda tüm türevlere sahip bir polinomial fonksiyon, farklı lokasyonlarda farklı düzgünleştirme dereceli fonksiyonlara yaklaştırmada çok esnek değildir. Yaklaştırmada esnekliğini arttırmanın bir yolu olarak, yaklaşan fonksiyonların türevlerinin bazı lokasyonlarda süreksizlik göstermesine izin verilebilmektedir. Bu fonksiyonlara ‘kama fonksiyonları’ adı verilmektedir. Yaklaşan fonksiyonların türevlerinin süreksizlik gösterdiği yerlere ‘düğüm’ adı verilmektedir (Fan ve Yao, 2003, s.246). Bu durumda yaklaştırmada,

$$f_j(x) \approx b_{j,0} + b_{j,1}x + b_{j,2}(x - t_{j,1})_+ + \dots + b_{j,m_j+1}(x - t_{j,k})_+$$

olarak yapılmaktadır. $f_j(x, b_j)$, yukarıdaki fonksiyonun sağ tarafını temsil etsin. Düzgünler, $[a, b]$ aralığında yeterince iyi belirlenmişse, bunun sonucunda ortaya çıkan parçalı doğrusal fonksiyonlar düzgün fonksiyon f_j 'ye oldukça iyi bir yaklaştırma sağlayabilmektedir. Düzgün noktaları belirlendikten sonra parametreler, artık kareler toplamını parametre tahmincisine göre minimize etmek suretiyle EKK yöntemi kullanılarak tahmin edilmektedir. Formel olarak gösterilirse,

$$\sum_{t=p}^T \left\{ X_t - f_1(X_{t-1}, b_1) - \dots - f_p(X_{t-p}, b_p) \right\}^2$$

ifadesinin minimizasyonu ile parametreler tahmin edilebilmektedir. Sonrasında ise fonksiyon tahminleri $\hat{f}_j(x) = f_j(x, \hat{b}_j)$ olarak elde edilmektedir (Fan ve Yao, 2003, s.23).

3.3.8. Polinomiyal Kama Yöntemi

$t_1, \dots, t_J$, $-\infty < t_1 < \dots < t_J < +\infty$ sırasını izleyecek biçimde veri düğüm noktalar dizisi olsun. Bu düğümler, araştırmacı ya da veri tarafından belirlenebilmektedir. p . dereceden bir kama fonksiyonu, $(-\infty, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{J-1}, t_J], [t_J, +\infty)$ olarak gösterilen her bir aralıkta p . dereceden polinomiyal bir fonksiyon olacak şekilde $(p - 1)$. dereceden sürekli türevlenebilir bir fonksiyondur. p . dereceden $t_1, \dots, t_J$ olarak gösterilen düğüm noktalarına sahip bir kama fonksiyonu $s(x)$ ise bu fonksiyon,

$$s(x) = \sum_{j=1}^{J+p+1} \beta_j S_j(x)$$

formülasyonu ile gösterilebilmektedir. Burada,

$$\begin{cases} S_j(x) = (x - t_j)_+^p, & j = 1, \dots, J \\ S_{J+j}(x) = x^{j-1}, & j = 1, \dots, p + 1 \end{cases}$$

olmaktadır. $t_1, \dots, t_J$ düğümlerine sahip kama fonksiyonları uzayı, $(J+p+1)$ boyutlu doğrusal uzaydır ve $\{S_j(x)\}$ fonksiyonları, ‘güç tabanı’ olarak ifade edilen doğrusal uzayın bir tabanıdır. Güç kama tabanının bir avantajı olarak, $S_j(x) (j \leq J)$ terimini silmekle bir düğümü silmek aynı anlama gelmektedir. Bununla birlikte güç kama tabanı, büyük çoklu korelasyon katsayılarına sahip olabilmekte ve bu durum hemen hemen bozulmuş bir dizayn matrisine sebebiyet verebilmektedir. Sıklıkla kullanılan bir başka taban ise, ‘B – kama tabanı’dır. B – kama tabanı, nümerik olarak daha kararlı bir tabandır ve tabandan bir terimi çıkarmak bir düğümü çıkarmak anlamına gelmemektedir (Fan ve Yao, 2003, s.247). Yassı güç tabanlarının, ortogonal olmaktan uzak olmaları dezavantaj oluşturmaktadır ve bu durum, çok sayıda düğüm söz konusu iken nümerik bir kararsızlığa sebep olmaktadır. Bu durumda daha kararlı nümerik özelliklere sahip denk tabanlarla çalışmak tavsiye edilmektedir. En çok tercih edilen taban ise, yukarıda bahsedilen ‘B – kama tabanı’ olmaktadır (Ruppert, Wand ve Carroll, 2003, s.70).

Kübik kamalar, pratikte sıklıkla kullanılmaktadır. Gösterim kolaylığı açısından kübik kama yaklaştırmasına odaklanılırsa ilgili model $Y_t = m(X_t) + \sigma(X_t)\varepsilon_t$, $\sigma^2(x) = \text{var}(Y_t | X_t = x)$ $E(\varepsilon_t | X_t) = 0$, $\text{var}(\varepsilon_t | X_t) = 1$ olarak gösterilirse, $s(x) = \sum_{j=1}^{J+p+1} \beta_j S_j(x)$ fonksiyonu modele yerleştirildiğinde,

$$Y_t \approx \sum_{j=1}^{J+4} \beta_j S_j(X_t) + \sigma(X_t)\varepsilon_t$$

fonksiyonu elde edilmektedir. Değişen varyans göz ardı edilerek bilinmeyen parametreler $\{\beta_j\}$,

$$\min_{\beta} \sum_{t=1}^T \left\{ Y_t - \sum_{j=1}^{J+4} \beta_j S_j(X_t) \right\}^2$$

ile elde edilmektedir. $\hat{\beta}_j$, $(j=1, \dots, J+4)$ EKK tahmini olsun. Böylelikle regresyon fonksiyonu,

$$\hat{m}(x) = \sum_{j=1}^{J+4} \hat{\beta}_j S_j(x)$$

olarak gösterilen kama fonksiyonu ile tahmin edilmektedir ve $\hat{m}(x)$, $S_j(x)$ olarak ifade edilen kübik kama tabanının doğrusal bir kombinasyonu olduğundan bu fonksiyona ‘kübik kama fonksiyonu’ adı verilmektedir (Fan ve Yao, 2003, s.247).

Polinomiyal kama yöntemi, düğüm noktalarının seçimine karşı duyarlıdır. Düğümleri otomatik olarak seçmenin bir yolu, başlangıçta düğüm seçim sürecinde elenebilecek birçok düğümü yerleştirmekle mümkün olmaktadır. Bu düğümler sıklıkla, X değişkeninin sıra istatistiklerine yerleştirilmektedir. Bir diğer yöntem ise ‘basamaklı silme yöntemi’dir. EKK yönteminden elde edilen $\hat{\beta}_j$ ve $s.h.(\hat{\beta}_j)$ tahminlerinden yararlanılarak hesaplanan t – istatistiklerinden en küçüğüne sahip j_0 , $1 \leq j_0 \leq J$ düğümü silinir. Her basamakta bir düğüm silmek suretiyle süreç tekrarlanır ve j ile indekslenmiş modeller dizisi elde edilir. j . model, KKT_j ile $J+4-j$ adet bağımsız parametre içermektedir. Sonucunda ise değiştirilmiş Mallows C_p kriterini minimize eden $\hat{j}$ modeli seçilmektedir. Bu kriter,

$$C_j = KKT_j + \alpha(J+4-j)\hat{\sigma}^2$$

formülü ile hesaplanmaktadır. Burada $\hat{\sigma}$, başlangıç modelinin tahmin edilen standart sapması iken α , düzgünleştirme parametresidir (Fan ve Yao, 2003, ss.248-249).

3.3.9. Kuadratik Olmayan Cezalı Kamalar

Düğüm seçiminde basamaklı yaklaşımın kusurlarından birisi, değişken seçim sürecindeki stokastik hata birikimidir. Seçilen model, mümkün tüm alt modeller arasından seçilmemektedir ve yöntemin örneklem özelliklerinin anlaşılması zor olmaktadır. Önerilen ‘cezalılı benzerlik yöntemi’, yüksek boyutlu parametrik olmayan modellemeye uygulanabilmektedir. Regresyon fonksiyonları; kamalar ya da dalgacıklar kullanılarak yaklaşıldıktan sonra bilinmeyen fonksiyonları temsil eden anlamlı değişkenlerin seçilmesi oldukça önemlidir. Cezalı benzerlik yöntemi, değişkenlerin

seçimi ile parametrelerin tahminini eşanlı olarak yapmaktadır ve yöntemin örnekleme özellikleri tespit edilebilmektedir (Fan ve Li, 2001, s.1349).

3.4. Semiparametrik Zaman Serisi Regresyon Modelleri

Kısmi doğrusal model, toplamsal model ve tek indeks modelleri ‘semi parametrik zaman serisi regresyonu’ kapsamında değerlendirilmektedir. Semiparametrik modellerin tahmininde kullanılan yöntemlerden birisi ‘semiparametrik kernel tahmini yaklaşımı’dır. Bu yöntemde ilk adım, β ’nın bilindiği varsayımıyla μ ’nın ve $g(\cdot)$ ’nin tahmin edilmesidir. μ , standart lokal doğrusal tahmin yöntemiyle tahmin edilebilmektedir. $g_i(\cdot)$ tahminleri ise, Linton ve Nielsen (1995)’in ‘marjinal bütünleşme tekniği’ ile elde edilebilmektedir. Bu teknik uygulanırken, parametrik olmayan iki değişkenli toplamsal ya da çarpımsal bir yapının olduğu varsayılın. $g(x, z)$, iki değişkenli regresyon fonksiyonu ise toplamsal alt model,

$$g(x, z) = g_1(x) + g_2(z)$$

olarak yazılabilmektedir. Makalede temel amaç, g_1 ve g_2 tahmininde alternatif kernel yöntemi oluşturmaktır. Bu yöntemle elde edilen tahminci açık olarak tanımlanmış olup istatistiksel özellikleri kolayca türetilenmektedir. Tahmincinin yakınsama oranı ise $n^{2/5}$ olmaktadır. Çarpımsal alt model ise,

$$g(x, z) = h_1(x)h_2(z)$$

olarak gösterilmekte ve yine marjinal bütünleşme tekniği ile h_1 ve h_2 tahminleri ayrı ayrı elde edilebilmektedir. Ayrıca bu teknik ile ayrı çarpımsal ve toplamsal tahminlerden elde edilen serbestlik derecelerini eşlemek gereksiz olmaktadır. Toplamsal ve çarpımsal yapılar arasında seçim yapmak için artıklar oluşturulmaktadır (Linton ve Nielsen, 1995, ss.93-94).

Q , $\int dQ(z) = 1$ koşulunu sağlayan deterministik ağırlıklandırma fonksiyonu olsun. q ise, Q ’nun yoğunluğu olsun. Bu durumda,

$$\alpha_Q(x) = \int g(x, z) dQ(z)$$

ifadesi yazılabilmektedir. Toplamsal durumda bu ifade, $\alpha_Q(x) = g_1(x) + c_1$ olarak yazılabilmektedir. Burada, $c_1 = \int g_2(z) dQ(z)$ olmaktadır. Çarpımsal durumda ise, $\alpha_Q(x) = h_1(x) c_2$ ifadesi geçerli iken burada $c_2 = \int h_2(z) dQ(z)$ olmaktadır. Buradan anlaşılacağı üzere $\alpha_Q(x)$, hem toplamsal hem de çarpımsal yapının ilgilenilen tek değişkenli bileşenidir. Eldeki örneklem, $\{y_i, x_i, z_i\}_{i=1}^n$ ile gösterilsin. y 'nin x ve z üzerine parametrik olmayan regresyonu $g(x, z)$ tahmin edilsin. Bu durumda,

$$\hat{\alpha}_Q(x) = \int \hat{g}(x, z) dQ(z) = \sum_{j=1}^n w_{Qj}(x) y_j$$

olarak tahmin edilmektedir. Burada, $w_{Qj}(x) = \int w_j(x, z) dQ(z)$ olarak gösterilebilmektedir (Linton ve Nielsen, 1995, s.94).

Marjinal bütünleşme tekniği uygulanarak,

$$m_1(U_t, V_t) = \mu + U_t^r \beta + \sum_{i=1}^p g_i(V_{ti})$$

denkleminin $g_1, \dots, g_p$ tahminleri elde edilebilmektedir. İkinci adımda ise, ‘Ağırlıklandırılmış EKK’ yöntemi ile $\hat{\beta}$ vektörü elde edilmektedir. Bulunan $\hat{\beta}$, önceki adımlarda yerine koyularak tahmin süreci tamamlanmaktadır (Saart, Gao ve Kim, 2014, s.145).

Gao (2012) makalesi incelendiğinde yarı doğrusal (semiparametrik) zaman serisi modeli,

$$y_t = x_t^r \beta + g(x_t) + e_t, \quad t = 1, \dots, n$$

olarak gösterilmektedir. Burada $\{e_t\}$, martingale farklar dizisi olmaktadır. Makale’de değişken sayısı d ile gösterilip, $1 \leq d \leq 3$ eşitsizliği geçerlidir. Modelin doğrusal kısım parametresi olan β , EKK yöntemiyle tahmin edilebilmektedir. Bu durumda tahminci,

$$\hat{\beta} = \left(\sum_{t=1}^n x_t x_t^{\tau} \right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^n x_t y_t \right)$$

olarak elde edilebilir. Parametrik olmayan $g(\cdot)$ tahmincisi ise,

$\hat{g}(x) = \sum_{t=1}^n w_{nt}(x) (y_t - x_t^{\tau} \hat{\beta})$ formülüyle elde edilmektedir. $\hat{g}(x)$ ’in elde edilmesinde

kullanılan olasılık ağırlık fonksiyonu ise, $w_{nt}(x) = \frac{K\left(\frac{x_t - x}{h}\right)}{\sum_{s=1}^n K\left(\frac{x_s - x}{h}\right)}$ formülüyle

hesaplanmaktadır (Gao, 2012, s.3).

3.4.1. Toplamsal AR Modeli

Otoregresif fonksiyon G , toplamsal yapıyı kabul ederse model,

$$X_t = f_1(X_{t-1}) + \dots + f_p(X_{t-p}) + \varepsilon_t$$

olarak yazılabilmektedir. Bu model, her bir gecikmeli değişkenin X_t değişkenine doğrusal olmayan katkısını incelemeyi mümkün kılmaktadır. Ayrıca bu model, AR(p) modelini de kapsamaktadır. Böylelikle veri bir zaman serisi için AR(p) modelinin uygun olup olmadığı da test edilebilmektedir (Fan ve Yao, 2003, s.350).

Toplamsal AR modeli, boyutluluk problemine çözüm olarak geliştirilmiştir ve her bir katsayı fonksiyonu birbirinden bağımsız olarak tek boyutlu parametrik olmayan yöntemler kullanılarak tahmin edilebilmektedir. Bu modelin tahmininde, ‘lokal doğrusal modelleme’ doğrudan kullanılamamaktadır. Bilinmeyen, $f_1(\cdot), \dots, f_p(\cdot)$ fonksiyonlarını $(x_1, \dots, x_p)$ noktasında yerel olarak yaklaştırmak amacıyla, $X_{t-1}, \dots, X_{t-p}$ değişkenlerinde eşanlı olarak yerelleştirmeye ihtiyaç bulunmaktadır. Bu

durum, lokal komşuluk çok geniş olmadıkça neredeyse hiç veri içermeyen p boyutlu hiperküp'e sebebiyet vermektedir. Lokal komşuluk yeterli sayıda veri noktası içermesi amacıyla geniş tutulduğunda ise, yaklaştırma hataları büyük çıkmaktadır. Bu, boyutluluk ile ilgili temel problemidir. Problemi hafifletmek için, doğrusal olmayan fonksiyonlarla, örneğin parçalı doğrusal fonksiyonlarla yaklaştırma yapılabilir (Fan ve Yao, 2003, s.23).

3.4.1.1. Geri Uydurma Algoritması ile Toplamsal Model Tahmini

$f_1, \dots, f_p$ fonksiyonları, 'geri uydurma algoritması' ile kolaylıkla tahmin edilebilmektedir. Burada, $Ef_j(X) = 0$ ($j = 1, \dots, p$) belirlenebilirlik koşulu olarak gerekmektedir. Bu kısıtlarla birlikte, $EX_t = 0$ eşitliği gerçekleşmektedir. μ ile gösterilen sabit terim de modele katılırsa model,

$$X_t = \mu + f_1(X_{t-1}) + \dots + f_p(X_{t-p}) + \varepsilon_t$$

olarak yazılabilmektedir. Burada $EX_t = \mu$ olmaktadır (Fan ve Yao, 2003, s.350). Bu algoritmada öncelikle, $f_j(x) \approx f_j(x, b_j)$ ile gösterilen kama yaklaştırmasını dikkate almak gerekmektedir. Sonrasında ise, öngörü hatalarını minimize edecek $b_1, \dots, b_p$ parametreleri elde edilmektedir. Bu durumda minimizasyon problemi,

$$\sum_{t=p+1}^T \left\{ X_t - f_1(X_{t-1}, b_1) - \dots - f_p(X_{t-p}, b_p) \right\}^2$$

olarak yazılabilmektedir. Model doğrudan EKK yöntemi ile çözüldüğünde, yüksek dereceden matris tersi problemi ile karşılaşılacaktır. Bu durumda problem, iteratif bir yol izlenerek çözülebilmektedir. $b_2, \dots, b_p$ başlangıç değerleri veri iken yukarıda belirtilen minimizasyon problemi b_1 için çözülmektedir. Tahmin edilen b_1 ve $b_3, \dots, b_p$ değerleri ile minimizasyon problemi b_2 için çözülmektedir ve böylelikle b_2 için güncellenmiş değer elde edilmektedir. Yinelemeli süreç bu şekilde devam etmektedir. Nihayetinde ise b_p güncellendikten sonra, $b_1, \dots, b_p$ değerleri yeniden

güncellenmektedir. Algoritma, yakınsama kriteri sağlanana kadar devam etmektedir (Fan ve Yao, 2003, s.351).

Geri uydurma algoritmasına ‘Gauss – Seidel Algoritması’ adı da verilmektedir. Algoritmanın işleyişi bir başka açıdan değerlendirilirse başlangıç adımı olarak, $f_i = f_i^0$ başlangıç değerleri belirlenmektedir. Burada, $i = 1, 2, \dots, p$ olmaktadır. Sonraki adımda ise, $j = 1, 2, \dots, p, 1, 2, \dots, p, \dots$, olarak çevrim devam etmektedir. $\hat{f}_j \leftarrow S_j \left(y - \sum_{k \neq j} \hat{f}_k \right)$ ifadesinde S_j , düzgünleştiricileri göstermekte iken $\left(y - \sum_{k \neq j} \hat{f}_k \right)$, kısmi artıkları ifade etmektedir. $S_j \left(y - \sum_{k \neq j} \hat{f}_k \right)$ olarak gösterilen ‘düzgünleştirilmiş kısmi artıklar’, $\hat{f}_i$ ’ların güncelleştirilip $\hat{f}_j$ ’ların elde edilmesinde kullanılmaktadır. Yapılan iterasyonlar, bireysel fonksiyonlar değişmeyinceye kadar devam etmektedir. Gauss – Seidel yaklaşımı notasyonel olarak açık bir şekilde,

$$f_j^{yeni} \leftarrow S_j \left(y - \sum_{k < j} f_k^{yeni} - \sum_{k > j} f_k^{eski} \right)$$

olarak gösterilebilmektedir. Bu algorithmada yakınsamanın sağlanması için, $[0,1]$ aralığında öz değerlere sahip simetrik düzgünleştirme matrisleri gerekmektedir (Buja, Hastie ve Tibshirani, 1989, ss.478-479). X_{t-k} değişkeni kullanılmaksızın hesaplanan kısmi artıklar, $\hat{\varepsilon}_{t,k} = X_t - \sum_{j \neq k} f_j \left(X_{t-j}, \hat{b}_j \right)$ formülüyle elde edilmektedir. Geri uydurma algoritması ile $\hat{b}_k$,

$$\sum_{t=p+1}^T \left\{ \hat{\varepsilon}_{t,k} - f_k \left(X_{t-k}, \hat{b}_k \right) \right\}^2$$

ifadesinin minimizasyonu ile elde edilmektedir. Bu problem, $\{\hat{\varepsilon}_{t,k}\}$ ’nin $\{X_{t-k}\}$ üzerine ‘polinomiyal kama yöntemi’ kullanılarak gerçekleştirilen parametrik olmayan regresyon problemidir. Sonuçta elde edilen tahmin, kısmi artıklarda doğrusal olmaktadır. Matris notasyonu ile ifade edilirse,

$$\begin{pmatrix} f_k(X_{p-k+1}, \hat{b}_k) \\ f_k(X_{p-k+2}, \hat{b}_k) \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ f_k(X_{T-k}, \hat{b}_k) \end{pmatrix} = S_k \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_{p+1,k} \\ \hat{\varepsilon}_{p+2,k} \\ \dots\dots\dots \\ \hat{\varepsilon}_{T,k} \end{pmatrix}$$

olarak yazılmaktadır. S_k matrisine ‘düzgünleştirme matrisi’ adı verilmektedir.

$X = (X_{p+1}, \dots, X_T)^T$ iken yukarıdaki matris eşitliği daha kompakt bir şekilde,

$$\hat{f}_k = S_k \left(X - \sum_{j \neq k} \hat{f}_j \right)$$

olarak yazılabilmektedir. S_k , kısmi artıkların gecikmeli X_{t-k} değişkeni üzerine parametrik olmayan şekilde regresyonunu kurduran düzgünleştirme matrisi olsun. Geri uydurma algoritması ile aşağıdaki basamaklar izlenerek $f_1, \dots, f_p$ fonksiyonları tahmin edilebilmektedir.

1. Öncelikle $\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_p$ fonksiyon tahminleri elde edilir.
2. $k=1, \dots, p$ için döngü yapılır ve $\hat{f}_k^* = S_k \left(X - \sum_{j \neq k} \hat{f}_j \right)$ hesaplanır.

Tahmincinin ortası alınarak, $\hat{f}_k(\cdot) = \hat{f}_k^*(\cdot) - (T-p)^{-1} \sum_{t=p+1}^T \hat{f}_k^*(X_{t-k})$ hesaplanır.

Bu algorithmada, ikinci basamakta yakınsama oluncaya kadar tekrar devam etmektedir (Fan ve Yao, 2003, ss.351-352). Geri uydurma, yüksek ilişkili gözlemlerle kullanıldığında yakınsama yavaş olmaktadır. Bu durumda, Linton ve Nielsen (1995)’te önerilen ‘integrasyon tahmincisi’ kullanılabilmektedir (Hardle, Lutkepohl ve Chen, 1997, s.58).

3.4.2. Kısmi Doğrusal Modeller

Kısmi doğrusal modeller, fonksiyonel otoregresif ve toplamsal modeller kapsamında değerlendirilen özgün bir model türüdür. Bu modeller, spesifik gecikmeli

değişkenin otoregresif fonksiyon olan G'ye doğrusal olmayan etkisinin olup olmadığını analiz etme imkanı vermektedir. Bu modeller, cimrilik prensibine daha uygun olduğundan parametreler ve fonksiyonlar daha doğru bir şekilde tahmin edilebilmektedir. Birinci bileşenin doğrusal olmayan olduğunu varsayalım. Bu durumda kısmi doğrusal model,

$$X_t = f(X_{t-1}) + \beta_2 X_{t-2} + \dots + \beta_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

olarak yazılmaktadır. Bu modelin tahmini 'profil EKK yöntemi' ya da daha genel olarak 'profil benzerlik yöntemi' ile yapılabilmektedir. $\beta_2, \dots, \beta_p$ parametrelerinin bilindiği varsayılın. Bu durumda f fonksiyonu, parametrik olmayan yöntemle tahmin edilebilmektedir. Sonuçta elde edilen fonksiyon tahmini $\hat{f}(\cdot; \beta)$ olarak gösterilsin. Burada, $\beta = (\beta_2, \dots, \beta_p)^T$ olmaktadır. Fonksiyon tahmini yukarıdaki modelde yerine koyulursa model,

$$X_t = \hat{f}(X_{t-1}, \beta) + \beta_2 X_{t-2} + \dots + \beta_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

olmaktadır. β parametreleri ise,

$$\sum_{t=p+1}^T \left\{ X_t - \hat{f}(X_{t-1}, \beta) - \beta_2 X_{t-2} - \dots - \beta_p X_{t-p} \right\}^2$$

ifadesini minimize eden EKK yöntemiyle tahmin edilebilmektedir. $\hat{\beta}$, 'profil EKK tahmincisi' olsun. Bu durumda parametrik olmayan bileşen, $\hat{f}(\cdot; \hat{\beta})$ ile tahmin edilebilmektedir (Fan ve Yao, 2003, ss.366-367). Gao ve Tong (2004), kısmi doğrusal regresyon modeli çerçevesinde doğrusal ve parametrik olmayan bileşenlerin mümkün olan en küçük boyuta sahip olup olmadığının belirlenmesinin gerekli olduğunu belirtmişlerdir. Geleneksel parametrik olmayan çapraz geçerlilik model seçim fonksiyonu, tüm doğrusal regresörleri parametrik değilmiş gibi hesaba kattığından seçim fonksiyonu, yanlış model belirleme problemine sebebiyet vermektedir ve bu sebepten, tutarlı sonuçlar veren 'semiparametrik T_v dışarıda çapraz geçerlilik fonksiyonu' ile parametrik ve parametrik olmayan regresörlerin seçilebileceği öne

sürülmektedir. Burada, $T \rightarrow \infty$ iken $T_v \rightarrow \infty$ olmaktadır ve $T_v > 1$ eşitsizliği geçerli olacak şekilde T_v pozitif bir tamsayıdır.

Zhang, Lee ve Song (2002) çalışmalarında yarı değişken katsayılı modeli, lokal polinomiyal teknik ile tahmin etmişlerdir. Yarı değişken katsayılı model,

$$Y = \sum_{j=1}^p a_j(U) X_j + \sum_{j=p+1}^{p+m} a_j X_j + \varepsilon$$

olarak yazılmaktadır. Çalışmada, bu modelin doğrusal kısmındaki katsayılar küçük bant genişliği kullanılarak ‘lokal polinomiyal yöntem’ ile tahmin edilmektedir. Bu işlem, doğrusal kısımdaki her bir katsayı için ham tahmincileri vermektedir. Sonrasında, bu tahmincilerin ortalamasını almak suretiyle katsayıların nihai tahminleri elde edilir. Bu tahminler yukarıdaki modelde yerine koyulursa, ‘değişken katsayılı model’ elde edilmektedir. Buradan hareketle ise, katsayı fonksiyon tahmincilerine ulaşılabilmektedir.

Modelin doğrusal kısmının tahmin yöntemi iki adımdan oluşmaktadır. Birinci adımda, $a_j(U)$ fonksiyonu, ‘lokal polinomiyal modelleme’ fikrine dayanılarak yerel olarak her bir u noktası ve $j = 1, \dots, p$ için u ’nun komşuluğunda,

$$a_j(U) \approx \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} a_j^{(k)}(u) (U-u)^k$$

ile yaklaştırılabilmektedir. Sonrasında lokal EKK problemi için,

$$\sum_{i=1}^n \left\{ Y_i - \sum_{j=1}^p \sum_{l=0}^q \beta_{j,l} (U_i - u)^l X_{ij} - \sum_{j=p+1}^{p+m} a_j X_{ij} \right\}^2 K_{h_1}(U_i - u)$$

ifadesi minimize edilmektedir. Her bir $j = p+1, \dots, p+m$ için a_j ’nin n adet başlangıç tahmincisi, u ’ya $u_1, \dots, u_n$ değerleri verilerek elde edilebilir. Bilinmeyen katsayı fonksiyonları $a_1(\cdot), \dots, a_p(\cdot)$ küçük bant genişliği isterken, bilinmeyen sabitler olan $a_{p+1}, \dots, a_{p+m}$ büyük bant genişliği istemektedir. $\hat{a}_{1,j}(\cdot)$, a_j ’nin başlangıç tahmincisi

olarak alınmaktadır. Burada h_1 , mümkün olduğunca küçük seçilmelidir. Çapraz geçerlilik yöntemi ile h parametresi seçilebilmektedir. Sonrasında $h_1 = 0.5h$ eşitliğinden yararlanarak ilk adım için nihai bant genişliği bulunmaktadır. İkinci adımda ise, başlangıç tahmincisinin varyansı azaltılır. Bunun bir yolu, $\hat{a}_{1,j}(u_i)$ tahmincisinin $i = 1, \dots, n$ için ortalamasını almaktır. Böylelikle nihai tahminci,

$$\hat{a}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{a}_{1,j}(u_i)$$

olarak hesaplanmaktadır. $h_1, \frac{nh_1}{\log h_1} \rightarrow \infty$ kısıtı altında mümkün mertebe küçük olursa, tahmincinin koşullu sapması sıfıra yakınsamaktadır. $n^{1/2}h_1^{(q+1)} \rightarrow 0$ olacak şekilde h_1 parametresi seçilirse, tahminci $\sqrt{n}$ yakınsama oranına sahip olmaktadır (Zhang, Lee ve Song, 2002, ss.169-171).

Modelin parametrik kısmının iki adımlı yöntem ile tahmininden sonra parametrik olmayan kısmın tahminine geçilmektedir. Parametrik olmayan kısmın tahmini, katsayı fonksiyonlarının düzgünleştirme derecelerinin aynı olup olmamasına göre iki farklı yolla yapılabilmektedir. Öncelikle katsayı fonksiyonlarının düzgünleştirme dereceleri aynı olduğunda kullanılan ‘tek aşamalı tahmin süreci’ne değinilirse, burada öncelikle $a_j(U)$ yukarıda da belirtildiği gibi $j = 1, \dots, p$ için yerel olarak yaklaştırılır. Sonrasında ise $\beta_{j,l}$ ve a_j ’ye göre minimizasyon yapılarak $a_j(u)$ tek aşamalı tahmincisi elde edilir. Burada da h_0 , çapraz geçerlilik yöntemiyle seçilebilir (Zhang, Lee ve Song, 2002, s.171).

Farklı düzgünleştirme dereceli katsayı fonksiyonları için kullanılan ‘iki aşamalı tahmin yöntemi’nde ise ilk aşamada, doğrusal kısmın tahmin süreci $\hat{a}_j$ için aynen geçerli olmaktadır. Burada $j = p+1, \dots, p+m$ olmaktadır. İkinci aşamada ise, yarı değişken katsayı modelinde bilinmeyen sabit katsayı a_j ’nin yerine $\hat{a}_j$ koyulmaktadır ve aşağıdaki model elde edilmektedir:

$$Y - \sum_{j=p+1}^{p+m} \hat{a}_j X_j = \sum_{j=1}^p a_j(U) X_j + \varepsilon$$

Model böylelikle, ‘değişken katsayılı model’e dönüşmektedir (Zhang, Lee ve Song, 2002, s.173).

Modelin parametrik olmayan kısmının tahmin yöntemi özetlenecek olursa, katsayı fonksiyonlarının düzgünleştirme derecesi aynıysa, Fan ve Zhang (1999) çalışmalarında kullandıkları $a_j(u)$ ’nun tek aşamalı tahmincisinden yararlanılmaktadır. Farklı düzgünleştirme dereceleri durumunda ise, ikinci aşama olarak yine aynı çalışmada anlatılan ‘iki adımlı yöntem’ kullanılmaktadır. İki adımlı stratejiyi uygulamak için, ilk olarak küçük bant genişliği ile katsayı fonksiyonlarının başlangıç tahminlerini elde etmek amacıyla,

$$\sum_{k=1}^n \left(Y_k - \sum_{j=1}^p \{a_j + b_j(U_k - u_0)\} X_{kj} \right)^2 K_{h_0}(U_k - u_0)$$

ifadesi minimize edilmektedir. Başlangıç tahminleri kullanılarak, lokal ya da kama düzgünleştirme gibi yöntemlerle ‘ağırlıklı EKK problemi’ minimize edilerek nihai katsayı tahminleri elde edilmektedir. İkinci adımda ise, lokal EKK tahmininde başlangıç tahminleri ikame edilerek ‘lokal EKK’ regresyonu yeniden kurulmaktadır. Uygulamada, ikinci aşama için lokal doğrusal regresyon kullanmak genellikle yeterli olmaktadır (Fan ve Zhang, 1999, s.1493).

Sabit katsayı tahmininde bant genişliği seçim yöntemi, bant genişliği çok küçük olmadıkça önemli bir sorun teşkil etmemektedir. Farklı katsayı düzgünleştirme dereceleri söz konusu olduğunda, modelin doğrusal kısmının tahmini bu durumdan etkilenmemektedir (Zhang, Lee ve Song, 2002, s.176).

Fan ve Huang (2005) makalelerinde yarı değişken katsayılı modelde a_2 ’yi tahmin etmek amacıyla ‘profil EKK’ yöntemini önermişlerdir. Yarı değişken katsayı modelindeki a_2 biliniyor olsun. Bu durumda model,

$$y_i - Z_{i2}^T a_2 = Z_{i1}^T a_1(U_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

olarak yazılabilmektedir. Bu modele dayanarak katsayı fonksiyonu tahmini olan $\tilde{a}_1(U_i)$ elde edilmektedir. Modelde $a_1(U_i)$ yerine $\tilde{a}_1(U_i)$ ikame edilerek sentetik model elde edilir. Bu model EKK yöntemiyle çözülür ve $\hat{a}_2$ elde edilir. Bu tahminci, asimptotik normal bir tahminci olup a_2 'nin profil EKK tahmincisi 'semiparametrik etkin' olmaktadır.

3.4.2.1. Profil EKK Tahmini

Parametrik bileşenler için profil benzerlik tahmincileri, semiparametrik olarak etkindir. Parametrik olmayan bileşenler ise parametrik bileşenler bilinirmişçesine iyi tahmin edilmektedir. Burada öncelikle β veriyken parametrik olmayan fonksiyonlar tahmin edilir ve sonrasında bu tahmin edilen β 'ya bağlı parametrik olmayan fonksiyonlar kullanılarak bilinmeyen β parametresi tahmin edilir. Parametrik olmayan tahmin, modelde yerine konarak sentetik parametrik model,

$$g(x) = \hat{g}_0(\beta^T x; \beta) + \sum_{j=1}^{p-1} g_j(\beta^T x; \beta) x_j$$

şeklinde elde edilmektedir. Sentetik parametrik model EKK yöntemiyle tahmin edilirse, $\hat{\beta}$ tahmini elde edilmektedir. Profil EKK tahmini, β 'yı tahmin etmek için $\hat{\beta}$ 'yı kullanırken, $\hat{g}_j(\cdot; \hat{\beta}_0)$ ise $g_j(\cdot)$ katsayı fonksiyonunu tahmin etmek için kullanılmaktadır. Diğer bir ifade ile, β 'nın $\hat{\beta}_0$ ile gösterilen başlangıç tahmini veriyken tahmin edilmiş katsayı fonksiyonları olan $\hat{g}_j(\cdot; \hat{\beta}_0)$ elde edilir ve sentetik parametrik model,

$$g(x) = \hat{g}_0(\beta^T x; \hat{\beta}_0) + \sum_{j=1}^{p-1} g_j(\beta^T x; \hat{\beta}_0) x_j$$

olarak yazılabilmektedir. Modelin EKK yöntemiyle tahmininden $\hat{\beta}_1$ elde edilmektedir. Bu durumda β 'nın tahmini güncellenmektedir. Güncellenmiş $\hat{\beta}_1$ ile parametrik olmayan bileşenler güncellenmekte ve $\hat{g}_j(\cdot; \hat{\beta}_1)$ tahminleri elde edilmektedir. Yeni

parametrik olmayan tahminler ile parametrik bileşen olan β 'nın tahmini güncellenebilmektedir ve bir yakınsama kriteri sağlanana kadar iterasyonlara devam edilmektedir (Fan ve Yao, 2003, ss.337-338).

3.4.3. Tek İndeks Modelleri

Tek indeks modelleri, Ichimura (1991) çalışmasıyla ortaya koyulmuş modellerdir. Zaman serisi bağlamında tek indeks modeli,

$$X_t = g(\beta_1 X_{t-1} + \dots + \beta_p X_{t-p}) + \varepsilon_t$$

olarak ifade edilmektedir. Bilinmeyen bağlantı fonksiyonu g 'ye izin vererek, doğrusal otoregresif model yardımıyla X_t öngörüsü yapılmaktadır. Bu model 'profil EKK' yöntemiyle tahmin edilebilmektedir (Fan ve Yao, 2003, s.367). Tek indeks modeli, sıklıkla kullanılan bir çok parametrik modeli de içinde barındırmaktadır. g fonksiyonu birim fonksiyon olduğunda model doğrusal modele dönüşürken, g 'nin birikimli normal ya da lojistik dağılım fonksiyonu olması durumunda ise model, iki değerli probit ya da logit modeline dönüşmektedir (Horowitz, 2009, s.7). Tek indeks modelinde $x'\beta$ indeksi, x 'in boyutunu kümelediği için boyut küçültmek suretiyle 'boyutluluk problemi'ni önlemektedir. Bunun sonucu olarak da tek indeks modelindeki g fonksiyonu, tek boyutlu indeks niceliği gözlemlendiğindeyle olasılıkta aynı yakınsama oranı ile tahmin edilebilmektedir. Ayrıca β parametre vektörü de parametrik modeldeki katsayılar gibi $n^{-1/2}$ yakınsama oranı ile tahmin edilebilmektedir (Horowitz, 2009, s.8).

3.4.4. Çoklu İndeks Modelleri

Çoklu indeks modeli,

$$X_t = g(\beta_{11} X_{t-1} + \dots + \beta_{1p} X_{t-p}, \dots, \beta_{d1} X_{t-1} + \dots + \beta_{dp} X_{t-p}) + \varepsilon_t$$

olarak yazılmaktadır. İndis sayısı d , boyutluluk problemini önlemek için genellikle küçük seçilmektedir. İndeks parametreleri olan β 'ların belirlenememesine karşılık, bu indeks parametreleri tarafından doğrusal genişletilmiş uzay belirlenebilir. Doğrusal

genişletme, tahmininde; dilimlenmiş ters regresyon, temel Hessien yönleri, ortalama türev yöntemi gibi yöntemler kullanılabilmektedir. Bu modellerde hem parametrik hem de parametrik olmayan kısım bulunduğu için bu modellere ‘semiparametrik modeller’ adı da verilmektedir (Fan ve Yao, 2003, s.368).

İndeks modellerinde, β vektörünün belirlenebilmesi için g’nin sabit fonksiyon olmaması gerekmektedir. Belirlenme sorunu, yapılan konum ve ölçek normalleştirmesiyle çözülebilmektedir. Konum normalleştirmesi, X veri matrisinin sabit bileşen iermemesiyle mümkün olurken ölçek normalleştirmesi, X matrisinin herhangi bir bileşeninin β katsayısını bire eşitlemekle sağlanabilmektedir. Belirleme için bir diğer gereklilik ise, g fonksiyonunun türevlenebilir olmasıdır (Horowitz, 2009, s.13).

3.4.5. Semiparametrik Geçiş Modelleri

Semiparametrik geçiş modelleri, ekonomide meydana gelen ve temelde iki gruba ayrılan daralma ve genişleme rejimleri arasındaki geçişin matematiksel olarak iyi tanımlanmamış bir fonksiyonla analiz edildiği modellerdir yani burada geçiş fonksiyonu bilinmeyen bir formdadır. Semiparametrik geçiş modeli, değişken katsayılı modelin özel bir durumudur. İki rejimli semiparametrik geçiş modeli,

$$y_t = x_t' \beta_1^0 \{1 - w^0(z_t)\} + x_t' \beta_2^0 w^0(z_t) + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T$$

olarak yazılabilmektedir. Burada $z_t \in \mathbb{R}$ olup sürekli bir geçiş değişkenidir. β_1^0 ve β_2^0 sırasıyla, birinci rejimin ve ikinci rejimin gerçek regresyon katsayı vektörleri iken $w^0(\cdot)$, bilinmeyen parçalı düzgün geçiş fonksiyonudur (Cizek ve Koo, 2015, s.5).

3.4.5.1. Model Tahmini

$\hat{\beta}_T$ ve $\hat{w}_T(\cdot)$, β^0 ve $w^0(\cdot)$ ’ın artık kareler toplamını minimize eden koşulsuz tahmincileri olsun. Yukarıda gösterilen semiparametrik geçiş modeli açılıp ortak faktörler paranteze alındığında buna dayalı oluşturulan minimizasyon problemi,

$$\min_{\beta, w} \sum_{t=1}^T \left\{ y_t - x_t' \beta_1 - x_t' (\beta_2 - \beta_1) w(z_t) \right\}^2$$

olarak yazılabilmektedir. Benzer biçimde, $\hat{\beta}_T(w)$ ve $\hat{w}_T(.,\beta)$, $\beta(w)$ 'nin koşullu tahmincileri olsun. Direkt minimizasyon ile β ve w tahmini pratikte zor olmaktadır. Bu sebepten, rejim geçiş modellerinde 'konsantrasyon yöntemi' tercih edilebilmektedir (Cizek ve Koo, 2015, s.10). Konsantrasyon yöntemine yakından bakılacak olunursa eşik regresyon modeli çerçevesinde model,

$$y_i = \theta' x_i + \delta_n' x_i(\gamma) + e_i$$

olarak yazılabilmektedir. Burada $x_i(\gamma) = x_i d_i(\gamma)$ olup, kukla değişken $d_i(\gamma) = \{q_i \leq \gamma\}$ olarak tanımlanmaktadır ve $\{.\}$, gösterge fonksiyondur. Ayrıca, q_i eşik değişken iken γ eşik değeri temsil etmektedir. Aşağıdaki ifadede yer alan X ve X_γ ($n \times m$) boyutlu matrisleri, x_i' ve $x_i(\gamma)'$ vektörlerinden oluşmaktadır. ($n \times 1$) boyutlu Y ve e sütun vektörleri ise y_i ve e_i değişkenlerinden oluşmaktadır. Bu açıklamalar ışığında artık kareler toplamı fonksiyonu,

$$S_n(\theta, \delta, \gamma) = (Y - X\theta - X_\gamma\delta)'(Y - X\theta - X_\gamma\delta)$$

olarak gösterilebilmektedir. Konsantrasyon yönteminde eşik modeli, γ 'ya koşullu olarak θ ve δ_n 'de doğrusaldır. Dolayısıyla, koşullu EKK tahmincileri olan $\hat{\theta}(\gamma)$ ve $\hat{\delta}(\gamma)$, Y 'nin $X_\gamma^* = [X \ X_\gamma]$ üzerine regresyonuyla elde edilir. Konsantre AKT fonksiyonu,

$$S_n(\gamma) = S_n(\hat{\theta}(\gamma), \hat{\delta}(\gamma), \gamma) = Y'Y - Y'X_\gamma^* (X_\gamma^{*'} X_\gamma^*)^{-1} X_\gamma^{*'} Y$$

ile gösterilmektedir ve $\hat{\gamma}$, $S_n(\gamma)$ 'yı minimize eden değer olarak elde edilmektedir yani $\hat{\gamma} = \arg \min_{\gamma \in \Gamma_n} S_n(\gamma)$ olup $\Gamma_n = \Gamma \cap \{q_1, \dots, q_n\}$ ile ifade edilmektedir. Burada q_i , $i = 1, \dots, n$ eşik değişkenin gözlem değerlerini göstermektedir. Böylelikle eşik değer, eşik değişkenin gözlenen değerleri arasından konsantre AKT fonksiyonunu minimize edecek şekilde seçilmektedir. Eğim tahmincileri ise, $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\hat{\gamma})$ ve $\hat{\delta} = \hat{\delta}(\hat{\gamma})$ eşik değer

tahmininin bir fonksiyonu olarak elde edilmektedir. Diğer bir ifade ile veri, eşik değişken (q_i) ' e dayalı olarak sıralanmakta ve parametre tahmini yapılmaktadır (Hansen, 2000, ss.577-578).

Tekrardan semiparametrik geçiş modeline dönülecek olunursa β vektörü veriyken model, 'değişken katsayılı model' olarak görülebilmektedir. Daha önce değinilen Fan ve Zhang (2008) çalışmasında görüldüğü gibi, değişken katsayılı modelin parametrik olmayan tahmincisi kullanıldığında bilinmeyen parçalı düzgün geçiş fonksiyonunun koşullu tahmincileri $\hat{w}_T(z_1, \beta), \dots, \hat{w}_T(z_T, \beta)$ elde edilmektedir. Sonrasında ise eğim katsayıları, parametrik olmayan geçiş fonksiyonu tahminleri modele yerleştirilmek suretiyle konsantre AKT'yi minimize ederek hesaplanmaktadır. Minimizasyon problemi,

$$\hat{\beta}_T = \arg \min_{\beta} \sum_{t=1}^T \{y_t - x_t' \beta_1 - x_t' (\beta_2 - \beta_1) \hat{w}_T(z_t, \beta)\}^2$$

olarak yazılmaktadır fakat bu yöntem gecikme derecesi (p) büyük olduğunda uygulaması zor bir yöntem olmaktadır. Bu sebepten Cizek ve Koo (2015) çalışmalarında, 'geleneksel konsantrasyon yaklaşımı' yerine 'iteratif tahmin algoritması' önermişlerdir. Bu algoritmada, geçiş değişkeninin iki farklı aralıkta yani iki farklı rejimde değerler alabildiği ve aralıklardan birinde geçiş fonksiyonunun bire diğerinde sıfıra eşit olduğu varsayımı altında ilk tutarlı eğim tahmincisi $\hat{\beta}_T^{(0)}$, sadece birinci ve ikinci rejimlerden veriler kullanılarak tahmin edilmektedir. Sonraki adımda $\beta = \hat{\beta}_T^{(0)}$ veriyken AKT, geçiş fonksiyonunun parametrik olmayan başlangıç tahmincisini gösteren $\hat{w}_T^{(0)} = \hat{w}_T(., \hat{\beta}_T^{(0)})$ ifadesini elde etmek için geçiş değişkeninin her bir gözlenen değerini temsil eden $z_1, \dots, z_T$ noktaları komşuluğunda lokal olarak minimize edilmektedir. Böylelikle, parametrik olmayan geçiş fonksiyonunun başlangıç tahmini $w = \hat{w}_T^{(0)}$ veriyken AKT yeniden minimize edilerek eğim tahmincisi, $\hat{\beta}_T^{(1)} = \hat{\beta}_T(\hat{w}_T^{(0)})$ olarak güncellenir. Benzer biçimde geçiş fonksiyonu tahmini ise güncellenen eğim tahminine dayalı, $\hat{w}_T^{(1)} = \hat{w}_T(., \hat{\beta}_T^{(1)})$ olarak güncellenir. Yöntem,

$k = 2, 3, \dots, K$ için $\hat{\beta}_T^{(k)} = \hat{\beta}_T(\hat{w}_T^{k-1})$ ve $\hat{w}_T^{(k)} = \hat{w}_T(., \hat{\beta}_T^{(k)})$ tahminleriyle yinelenir. Bu uygulamada $k=2$ kullanılmıştır. İlk tahminler $\hat{\beta}_T^{(0)}$ ve $\hat{w}_T^{(0)}$ çok kesin olmadığından $\hat{\beta}_T^{(2)}$, geçiş fonksiyonunun yinelenmiş ve muhtemelen daha kesin tahmini $\hat{w}_T^{(1)}$ 'e dayalı ilk eğitim tahmini olmaktadır.

Semiparametrik geçiş modellerinin tahminde kullanılan 'iteratif tahmin algoritması' ana hatlarıyla önceki paragrafta belirtildiği gibi işletilmektedir fakat algoritmadaki her bir adımın daha iyi anlaşılabilmesi için basamakların ayrı ayrı başlıklar altında incelenmesi faydalı olacaktır.

3.4.5.1.1. β Vektörünün Başlangıç Tahmincisi

Sırasıyla birinci ve ikinci rejim bölgeleri olan (a_1, b_1) 'in ve (a_2, b_2) 'nin bilindiği varsayımı altında β vektörünün tutarlı başlangıç tahmincileri $\hat{\beta}_{1,T}^{(0)}$ ve $\hat{\beta}_{2,T}^{(0)}$, birinci ve ikinci rejim bölgeleri için OEKK yöntemi kullanılarak elde edilir fakat bu aralıklar oluşturulurken modelin yanlış belirlenmesini engellemek amacıyla her bir rejimin aralığı dar tutulabilmekte ve her bir rejimdeki az sayıda gözleme bağlı olarak da başlangıç tahminleri kesinlik taşımayabilmektedir. Bu probleme çözüm olarak, her bir rejim aralığı için dar aralıklardan başlayarak artan aralık dizileri oluşturulur. Formel olarak gösterilirse $(a_1^0, b_1^0) \subseteq (a_1, b_1)$ ve $(a_2^0, b_2^0) \subseteq (a_2, b_2)$ ile başlayarak $(a_j^0, b_j^0) \subset (a_j^1, b_j^1) \subset \dots \subset (a_j^k, b_j^k)$, $j=1,2$ olacak biçimde artan aralıklar elde edilir. Her bir aralık çifti yani (a_1^k, b_1^k) ve (a_2^k, b_2^k) , $k=1, \dots, K$ için $\hat{\beta}_{1,T}^{(0,k)}$ ve $\hat{\beta}_{2,T}^{(0,k)}$ tahminleri elde edilmektedir. $\hat{\beta}_T^{(0,k)}$ tahmininden sonra geçiş fonksiyonu tahmini $\hat{w}_T^{(0,k)} = \hat{w}_T(., \hat{\beta}_T^{(0,k)})$ yapılır. $\min_{\beta, w} \sum_{t=1}^T \{y_t - x_t' \beta_1 - x_t' (\beta_2 - \beta_1) w(z_t)\}^2$ olarak ifade edilen, EKK tahmininden elde edilen artık kareler toplamı olan S_k^2 'nin minimize edilmesiyle ilk tahminler, $\hat{\beta}_{1,T}^{(0)} = \hat{\beta}_{1,T}^{(0,\hat{k})}$ ve $\hat{\beta}_{2,T}^{(0)} = \hat{\beta}_{2,T}^{(0,\hat{k})}$ olarak ve koşulsuz EKK artıklarını minimize eden k argümanı, $\hat{k} = \arg \min_{k=0, \dots, K} S_k^2$ olarak tanımlanmaktadır. Bu

yöntemin uygulanmasıyla tahmin, başlangıç aralıkları olan (a_1^0, b_1^0) ve (a_2^0, b_2^0) seçimine duyarsız olmaktadır (Cizek ve Koo, 2015, ss.11-12).

3.4.5.1.2. $w(.,\beta)$ 'nin Lokal Doğrusal Tahmincisi

Önceki alt başlıkta anlatılan iteratif yöntemle β parametre vektörünün başlangıç tahminleri elde edildikten sonra buna koşullu olarak geçiş fonksiyonunun lokal doğrusal tahmini yapılabilmektedir. Her iki rejimin parametre vektörü $\beta = (\beta_1', \beta_2')'$, $\beta_1 \neq \beta_2$ veri iken semiparametrik geçiş modeli olan $y_t = x_t' \beta_1^0 \{1 - w^0(z_t)\} + x_t' \beta_2^0 w^0(z_t) + \varepsilon_t$, $t = 1, \dots, T$ modeli, tek bağımsız değişkenli ve sabitsiz 'değişken katsayılı model' olarak yazılabilmektedir. Bu durumda model,

$$\tilde{y}_t = y_t - x_t' \beta_1 = x_t' (\beta_2 - \beta_1) w(z_t, \beta) = \tilde{x}_t m(z_t) + \varepsilon_t$$

olmaktadır. Burada, $\tilde{y}_t = y_t - x_t' \beta_1$, $\tilde{x}_t = x_t' (\beta_2 - \beta_1)$ ve $m(z_t) = w(z_t, \beta)$ eşitlikleri geçerlidir. Bu durumda parametrik olmayan düzgün geçiş fonksiyonu $m(.)$ tahmini için üç ana yaklaşım bulunmaktadır. Bunlar; kernel lokal polinomiyal düzgünleştirme, polinomiyal kamalar ve kama düzgünleştirme yöntemleridir. Cizek ve Koo (2015) çalışmalarında, parametrik olmayan geçiş fonksiyonu tahmini için 'lokal sabit ve lokal doğrusal düzgünleştirme yöntemleri'ni seçmişlerdir. Lokal doğrusal tahminci olan $\hat{m}_T(z)$,

$$\min_{a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}} \sum_{t=1}^T \left[\tilde{y}_t - \tilde{x}_t \{a + b(z_t - z)\} \right]^2 K_h(z_t - z)$$

probleminin çözümü ile elde edilebilmektedir. Burada $K_h(v) = K(v/h_T)/h_T$ eşitliği geçerlidir ve $K(v)$ simetrik kernel fonksiyonu iken h_T bant genişliğini temsil etmektedir. Lokal sabit tahmincinin kullanılması durumunda ise, yukarıdaki minimizasyon probleminde yer alan $b(z_t - z)$ terimi silinmektedir. Birinci derece koşulları için problem çözülürse,

$$\hat{m}_T(z) = (1, 0) \left\{ \sum_{t=1}^T \dot{x}_t \dot{x}_t' K_h(z_t - z) \right\}^{-1} \sum_{t=1}^T \dot{x}_t \tilde{y}_t K_h(z_t - z)$$

olarak gösterilen parametrik olmayan tahminci elde edilmektedir. Burada, $\dot{x}_t = [\tilde{x}_t, \tilde{x}_t'(z_t - z)]'$ eşitliği geçerlidir. Lokal sabit tahminci durumunda $\dot{x}_t$ yerine $\tilde{x}_t$ kullanılmaktadır. Gijbels, Lambert ve Qiu (2007) makalesinde, önerilen yöntem genelleştirilerek ‘değişken katsayılı model’ için kullanılmaktadır.

Süreksizlik gösteren regresyon fonksiyonu tahmini söz konusu olduğunda iki düzgünleştirme yaklaşımı kullanılmaktadır. Bunlar; ‘dolaylı yaklaşım’ ve ‘doğrudan yaklaşım’ olmaktadır. Dolaylı yaklaşım’da öncelikle süreksizlik konumları tahmin edilmektedir. Sonra fonksiyonun sürekli olduğu varsayılan dizayn aralığının farklı segmentleri dikkate alınmaktadır. Nihai tahmin ise, her bir segmentte lokal doğrusal tahminci gibi geleneksel tahminciler kullanılarak elde edilmektedir. Doğrudan yaklaşım’da ise regresyon eğrisi, süreksizlik noktalarının sayısını ve konumlarını tespit etmeksizin, doğrudan tahmin edilmektedir. Dizayn aralığındaki her nokta potansiyel süreksizlik noktası olarak alınmaktadır. Her iki yaklaşımda da; kernel düzgünleştirmesine, kamalara, dalgacıklara dayalı yöntemler kullanılabilir. Gijbels vd. (2007) makalesinde, sınır noktalarında regresyon fonksiyonu tahminindeki yararlılığından dolayı ‘lokal doğrusal kernel düzgünleştirmesi’ kullanılmaktadır (Gijbels vd., 2007, s.236).

İlgili model,

$$Y_i = f(x_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

olarak gösterilsin. Burada $x_i = \frac{i}{n}$, $[0,1]$ dizayn aralığında eşit yerleştirilmiş dizayn noktaları olsun. ε_i ise sıfır ortalama ve sonlu varyanslı bağımsız ve özdeş dağılmış rassal hataları ifade etmektedir ve f , parametrik olmayan regresyon fonksiyonudur. Makalede, f ’in $[0,1]$ aralığında s_q noktalarında d_q sıçrama büyüklüğü ile sıçrama gösterdiği dikkate alınmaktadır. Burada, $q = 1, \dots, m$ olup m , sıçrama sayısını ifade

etmektedir. f 'in tüm sıçrama noktalarında sağdan sürekli olduğu varsayılmaktadır. K , $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ aralığında tanımlı, sınırlı ve simetrik kernel yoğunluk fonksiyonu olsun. Tek taraflı iki kernel fonksiyonu,

$$K_{sol}(x) = \begin{cases} K(x), & x \in [-\frac{1}{2}, 0) \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$K_{sağ}(x) = \begin{cases} K(x), & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak gösterilmektedir. Bu durumda sol lokal doğrusal tahminci,

$$(\hat{a}_{sol,0}(x), \hat{a}_{sol,1}(x)) = \arg \min_{a,b} \sum_{i=1}^n [Y_i - a - b(x_i - x)]^2 K_{sol}\left(\frac{x_i - x}{h_n}\right)$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Burada $h_n > 0$, bant genişliği parametresidir. Sağ ve geleneksel lokal doğrusal tahminçiler ise, K_{sol} yerine sırasıyla $K_{sağ}$ ve K kullanılarak elde edilmektedir. Elde edilen geleneksel tahminci $(\hat{a}_{g,0}(x), \hat{a}_{g,1}(x))$, $\left[x - \frac{h_n}{2}, x + \frac{h_n}{2}\right]$ komşuluğundaki veriye dayanarak sırasıyla f fonksiyonunun lokal doğrusal tahminini ve fonksiyonun türevinin lokal doğrusal tahminini vermektedir. Sağ, sol ve geleneksel lokal doğrusal tahminin kalitesi 'ağırlıklandırılmış ortalama artık kareler (WRMS)' yardımıyla değerlendirilmektedir. Sol lokal doğrusal tahmin için $AOAK_{sol}$,

$$AOAK_{sol}(x) = \frac{\sum_i [Y_i - \hat{a}_{sol,0} - \hat{a}_{sol,1}(x_i - x)]^2 K_{sol}\left(\frac{x_i - x}{h_n}\right)}{\sum_i K_{sol}\left(\frac{x_i - x}{h_n}\right)}$$

olarak tanımlanmaktadır. AOAK her üç durumda da hata varyansının tutarlı tahminlerini vermektedir (Gijbels vd., 2007, ss.238-239).

Modeldeki eşik değeri (u), $0 < u < d^2 C_{\tau,c}^2$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde seçilmelidir. Burada d_q , sıçrama büyüklüğü iken C , geleneksel tahminin fonksiyonun süreklilik bölgelerinde yapılmasını sağlayacak şekilde $1 < C < 1 + \frac{d^2}{\sigma^2} C_{\tau,c}^2$ aralığında seçilen bir sabittir. Burada σ^2 hata varyansıdır. Çoklu sıçrama noktası varsa sabit değeri, $1 < C < 1 + \frac{d_q^2}{\sigma^2} C_{\tau_q,c}^2$ aralığında seçilirken eşik değeri, $0 < u < d_q^2 C_{\tau_q,c}^2$ aralığında belirlenmektedir. Burada $q = 1, \dots, m$ için $\tau_q = \frac{x - S_q}{h_n}$ eşitliği geçerlidir. S_q , sıçrama noktalarını, h_n ise sıçrama noktası aralığının genişliğini temsil etmektedir (Gijbels vd., 2007, s.246). Bant genişliği parametresi (h_n)'nin seçimi, çapraz geçerlilik yöntemi ile yapılabilmektedir. Böylelikle tahmin,

$$\hat{h}_n = \arg \min_{h_n} \sum_{i=1}^n \left[Y_i - \hat{f}^{-i}(x_i) \right]^2$$

olarak elde edilmektedir. Burada $\hat{f}^{-i}(x_i)$, i . gözlem dışındaki tüm veriye dayalı tahmini ifade etmektedir. Yalnızca tek taraflı gözlemlerin kullanıldığı $\hat{f}_1$, süreklilik bölgelerinde tamamen yüksek artıklı tahminler verdiği için, geleneksel tahmincinin de sürece dahil edildiği $\hat{f}_2$ ve $\hat{f}_3$ tahmincilerine geçiş yapılmaktadır. Bu tahmincilerin hesaplanmasında kullanılan eşikler olan C ve u 'nun seçimine bakıldığında, yine çapraz geçerlilik yöntemi kullanılırsa,

$$(\hat{h}_n, \hat{C}_n) = \arg \min_{h_n, C_n} \sum_{i=1}^n \left[Y_i - \hat{f}^{-i}(x_i) \right]^2$$

$$(\hat{h}_n, \hat{u}_n) = \arg \min_{h_n, u_n} \sum_{i=1}^n \left[Y_i - \hat{f}^{-i}(x_i) \right]^2$$

tahminleri elde edilmektedir. Bu minimizasyon problemini çözmek amacıyla, C_n ve u_n değerleri için şebeke belirlenmesi gerekmektedir. $\hat{f}_2$ ve $\hat{f}_3$ kapsamında bir kere

$(\hat{a}_{g,0}, \hat{a}_{sol,0}, \hat{a}_{sağ,0})$ tahmincileri sabit h ile bulunduğunda, C 'nin ya da u 'nun farklı değerleri için bu tahminciler tekrardan hesaplanmamaktadır (Gijbels vd., 2007, ss.248-249).

Semiparametrik geçiş modelleriyle bağlantılı olarak değişken katsayılı model çerçevesinde tahmin edilecek regresyon fonksiyonundaki süreksizliğin incelenmesi de faydalı olacaktır. Değişken katsayılı model,

$$Y = \sum_{j=1}^d \beta_j(u) X_j + \varepsilon$$

olarak yazılabilmektedir. Burada bazı $\beta_j(\cdot)$ katsayılarının sıçrama süreksizliğine sahip olduğu varsayılmaktadır. u , indeks değişkenidir. $\{(Y_i; U_i, X_{i1}, \dots, X_{id}), i = 1, \dots, n\}$, bağımsız ve özdeş dağılmış rassal örneklem olsun. Bilinmeyen katsayı fonksiyonları $\beta_j(\cdot)$, $j = 1, \dots, d$ 'lokal doğrusal düzgünleştirme tekniği' ile tahmin edilmektedir. Dolayısıyla Taylor açılımından yararlanılarak herhangi bir $u \in U$ için 'ağırlıklandırılmış lokal EKK problemi' çözülmelidir. Bu durumda,

$$\sum_{i=1}^n \left[Y_i - \sum_{j=1}^d \{ \beta_j(u) + \beta_j'(u)(u_i - u) \} X_{ij} \right]^2 K_{h_n, g}(u_i - u)$$

ifadesinin minimize edilmesi gerekmektedir. Burada $K_{h_n, g}(\cdot) = K_g(\cdot/h_n)/h_n$ olup h_n , bant genişliğini temsil etmektedir. Buradan elde edilen geleneksel $\hat{\beta}_g(u)$ tahmincisi, u 'nun sağındaki ve solundaki veriler kullanılarak elde edildiğinden düzgün olmaktadır. Bu tahminci sıçramaların olduğu bölgede tutarsızdır. Tutarsızlık problemini çözmek için katsayı fonksiyonlarının $\hat{\beta}_{sol}(u)$ olarak gösterilen sol taraf tahmincisi ile $\hat{\beta}_{sağ}(u)$ olarak gösterilen sağ taraf tahmincisi tanımlanmaktadır. Burada asimetrik kernel fonksiyonları olan $K_{sol}(u)$ ve $K_{sağ}(u)$ kullanılmaktadır. $K_{sol}(u) = K_{sağ}(-u) = K_g(u)$ eşitliği $u \in [-\delta, 0]$ için geçerli iken kernel fonksiyonları diğer durumlarda sıfır değerini almaktadır. Bu iki tahmincinin kombinasyonu, u 'nun aralığındaki tüm noktalarda tutarlı tahminler veren tahmincileri ortaya koyacaktır. Notasyonel olarak gösterilirse,

$$\Gamma(u) = \begin{pmatrix} X_1^T & \frac{u_1-u}{h_n} X_1^T \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ X_n^T & \frac{u_n-u}{h_n} X_n^T \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_n \end{pmatrix}$$

$$W_t(u) = \text{diag} \{ K_{h_n,t}(u_1-u), \dots, K_{h_n,t}(u_n-u) \}, t = g, \text{sol}, \text{sağ}$$

$$X_i = (X_{i1}, \dots, X_{id})^T$$

eşitlikleri geçerli iken tahminciler,

$$\hat{\beta}_t(u) = (I_d, 0_d) [\Gamma^T(u) W_t(u) \Gamma(u)]^{-1} \Gamma^T(u) W_t(u) Y, t = g, \text{sol}, \text{sağ}$$

olarak elde edilmektedir. $u = u_1, \dots, u_n$ geçerli iken tahminciler ise,

$$\hat{\beta}_t(u_i) = (I_d, 0_d) [\Gamma^T(u_i) W_t(u_i) \Gamma(u_i)]^{-1} \Gamma^T(u_i) W_t(u_i) Y, t = g, \text{sol}, \text{sağ}, i = 1, \dots, n$$

formülü ile hesaplanmaktadır (Zhao vd., 2016, s.67).

Üç lokal doğrusal tahminin uyumu ise daha önce de belirtildiği gibi ‘Ağırlıklandırılmış Ortalama Artık Kareler (WRMS)’ ile değerlendirilebilmektedir. Bu ölçü,

$$WRMS_t(u) = \frac{\sum_{i=1}^n \left[Y_i - \sum_{j=1}^d \{ \hat{\beta}_{j,t} + \hat{\beta}'_{j,t}(u_i - u) \} X_{ij} \right]^2 K_{h_n,t}(u_i - u)}{\sum_{i=1}^n K_{h_n,t}(u_i - u)}$$

formülü yardımıyla hesaplanmaktadır. Bu ölçü, yerel uyum ölçüsüdür. $\beta(\cdot)$, herhangi bir u çevresinde sürekli ise $\hat{\beta}_g(u)$, $\hat{\beta}_{\text{sol}}(u)$ ve $\hat{\beta}_{\text{sağ}}(u)$, $\beta(u)$ ’nin tutarlı tahmincileridir (Zhao vd., 2016, s.67).

Uygun tutarlı geleneksel, sol ve sağ tahmincileri elde edildikten sonra ‘adaptif sıçrama koruyucu tahminler’,

$$\hat{\beta}_{ASK}(u) = \begin{cases} \hat{\beta}_g(u), & fark(u) < \lambda \\ \hat{\beta}_A(u), & fark(u) \geq \lambda \end{cases}$$

olarak görüldüğü üzere eşik parametresine göre belirlenmektedir. $fark(u) = \text{maksimum} \{AOAK_g(u) - AOAK_{sol}(u), AOAK_g(u) - AOAK_{sağ}(u)\}$ olup λ , eşik parametresini ifade etmektedir. Ayrıca $fark(u)$ ’ın eşik değerden büyük ya da eşik değere eşit olması durumunda elde edilecek adaptif sıçrama koruyucu tahmin olan $\hat{\beta}_A(u)$,

$$\hat{\beta}_A(u) = \begin{cases} \hat{\beta}_{sol}(u), & AOAK_{sol}(u) < AOAK_{sağ}(u) \\ \hat{\beta}_{sağ}(u), & AOAK_{sol}(u) > AOAK_{sağ}(u) \\ (\hat{\beta}_{sol}(u) + \hat{\beta}_{sağ}(u))/2, & AOAK_{sol}(u) = AOAK_{sağ}(u) \end{cases}$$

sol ve sağ tahminciler arasından AOAK karşılaştırmasına göre seçilmektedir. $\hat{\beta}_A(u)$ tahmincisinin seçim yönteminin arkasındaki fikir, u değişkeni süreksizlik bölgesinde olduğunda sol ve sağ tahminciler arasından en uygun tahminciyi seçmektir. Burada AOAK’si minimum olan tahminci seçilmektedir. $\hat{\beta}_{ASK}(u)$, tüm U boyunca tutarlı olmaktadır. Bu yöntemde, katsayı tahmininden önce sıçrama noktalarının sayısının ve yerlerinin tahmini ve hipotez testleri gerekli değildir. Maksimum sıçrama noktası sayısı, $\delta[(b-a)/h_n] - 2$ formülü yardımıyla hesaplanmaktadır (Zhao vd., 2016, s.69). Bant genişliği parametresinin seçiminde ise Rice ve Silverman (1991), verinin kovaryans matrisinden ve öz vektörlerinden yararlanarak çapraz geçerlilik skorunu hesaplayıp beklenen öngörü hata tahminini minimize eden parametreyi seçme yoluna gitmişlerdir. Bant genişliği seçiminde kullanılan bu yöntem ‘leave-one-out çapraz geçerlilik yöntemi’ adını almaktadır. Notasyonel olarak yazılırsa çapraz geçerlilik skoru,

$$CG(h_n, \lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ Y_i - X_i^T \hat{\beta}_{ASK}^{-i}(u_i; h_n, \lambda) \right\}^2$$

formülü ile hesaplanabilmektedir. Bant genişliği $h_n > 0$ ve eşik değeri $\lambda > 0$ için $\zeta G(h_n, \lambda)$ minimize edilerek optimal bant genişliği ve eşik değeri elde edilmektedir. Bu minimizasyon problemin çözümünde h_n ve λ değerleri için şebeke belirlenmesi gerekmektedir. Sağ, sol ve geleneksel tahminciler bir kez elde edildikten sonra bu tahminciler farklı λ değerleri için yeniden hesaplanmamaktadır (Zhao vd., 2016, s.70).

Semiparametrik geçiş modelleri kapsamında fonksiyonel süreksizliğe dönülürse burada geleneksel kernel fonksiyonu $K^g(\nu) = K(\nu)$ olup $K(\nu)$, $[-1, 1]$ aralığında tanımlı simetrik bir kernel fonksiyonudur. Sol ve sağ kısım kernelleri ise sırasıyla, $K^{sol}(\nu) = K(\nu).I(\nu \in [-1, 0))$ ve $K^{sağ}(\nu) = K(\nu).I(\nu \in (0, 1])$ olarak ifade edilmektedir. Bu üç kernel kullanılarak $m(z)$ ve türevleri olan $m'(z)$ 'nin lokal doğrusal (ya da lokal sabit) tahminleri elde edilebilmektedir. Bu durumda tahminler,

$$[\hat{a}^j(z), \hat{b}^j(z)] = \arg \min_{a,b} \sum_{t=1}^T [\tilde{y}_t - \tilde{x}_t \{a + b(z_t - z)\}]^2 K_h^j(z_t - z), \quad j \in \{sol, sağ, g\}$$

probleminin çözümü sonucunda elde edilmektedir. Uyum iyiliği ölçüsü olarak kullanılan AOAK ise,

$$AOAK^j(z) = \frac{\sum_{t=1}^T [\tilde{y}_t - \tilde{x}_t \{\hat{a}^j + \hat{b}^j(z_t - z)\}]^2 K_h^j(z_t - z)}{\sum_{t=1}^T K_h^j(z_t - z)}, \quad j \in \{sol, sağ, g\}$$

formülü ile hesaplanmaktadır. Değişken katsayı tahmincisi $\hat{m}$,

$$\hat{m}_T(z) = \begin{cases} \hat{a}^g(z), & fark(z) \leq u_T \\ \hat{a}^{sol}(z), & fark(z) > u_T \text{ ve } AOAK^{sol}(z) < AOAK^{sağ}(z) \\ \hat{a}^{sağ}(z), & fark(z) > u_T \text{ ve } AOAK^{sol}(z) > AOAK^{sağ}(z) \\ \frac{\hat{a}^{sol}(z) + \hat{a}^{sağ}(z)}{2}, & fark(z) > u_T \text{ ve } AOAK^{sol}(z) = AOAK^{sağ}(z) \end{cases}$$

olarak yazılabilmektedir. Burada eşik değeri pozitif olup u_T ile gösterilirken fark(z), $AOAK^c(z) - \min\{AOAK^l(z), AOAK^r(z)\}$ olarak hesaplanmaktadır (Cizek ve Koo, 2015, ss.13-14).

3.4.5.1.3. $\beta(w)$ 'nun EKK Tahmincisi

Önceki alt başlıkta tahmin yöntemi tartışılan geçiş fonksiyonu (w) veri iken semiparametrik geçiş modeli, eğim parametresi olan β 'da doğrusaldır. Bu sebepten OEKK tahmin yöntemi, rejim parametre vektörü tahmin sürecinde doğrudan uygulanabilmektedir. Geçiş fonksiyonu, $w_t = [1 - w(z_t), w(z_t)]'$ olarak gösterilsin.

AKT olan $T^{-1} \sum_{t=1}^T \{y_t - (w_t \otimes x_t)' \beta\}^2$, w sabit iken β 'ya göre minimize edilmektedir.

Bu durumda koşullu EKK tahmincisi,

$$\hat{\beta}_T(w) = \left\{ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (w_t \otimes x_t)(w_t \otimes x_t)' \right\}^{-1} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (w_t \otimes x_t) y_t$$

olarak elde edilmektedir (Cizek ve Koo, s.14).

Cai vd. (2015) çalışmalarında, Büyük Asya döviz kuru miktarlarının 'semi parametrik STAR modeli' ile öngörüsünü yapmışlardır. Modelde kullanılan durum değişkenleri, geçiş fonksiyonuna parametrik olmayan bir biçimde girmektedir. $\{y_t\}$ için 'Semiparametrik STAR (SSTAR)' modeli,

$$y_t = \phi_{1,0} + \sum_{j=1}^p \phi_{1,j} y_{t-j} + \left(\phi_{2,0} + \sum_{j=1}^p \phi_{2,j} y_{t-j} \right) G^*(f(s_t)) + \varepsilon_t$$

olarak ifade edilebilmektedir. Model kompakt vektör formunda yazıldığında ise,

$$y_t = \phi_1' x_t + \phi_2' x_t G^*(f(s_t)) + \varepsilon_t$$

biçiminde olmaktadır. $x_t = (1, y_{t-1}, \dots, y_{t-p})'$, açıklayıcı (gecikmeli) değişkenler vektörü

iken $\phi_i = (\phi_{i,0}, \phi_{i,1}, \dots, \phi_{i,p})'$, $i=1, 2$ açıklayıcı değişkenlere karşılık gelen katsayılar

vektörünü ve ε_t , bağımsız ve özdeş dağılmış rassal değişkenler dizisini temsil etmektedir. s_t geçiş değişkeni, $d > 0$ koşulunu sağlayan d tam sayısı için gecikmeli bağımlı değişkenlerden ($s_t = y_{t-d}$) seçilebilmektedir. Ayrıca c , eşik değeri ve γ , iki rejim arasındaki geçişin hızını belirleyen düzgünleştirme parametresini ifade etmektedir. $f(\cdot)$, bilinmeyen bir fonksiyon olup $G^*(u)$ lojistik ya da üssel bir fonksiyonu göstermektedir. Formel olarak $G^*(u)$ sırasıyla, $\frac{1}{1 + \exp\{u\}}$ veya $1 - \exp(-\gamma u^2)$ ifadelerine eşit olmaktadır. SSTAR modeli bir başka gösterimle,

$$y_t = a(s_t, \phi)' x_t + \varepsilon_t$$

olarak da yazılabilmektedir. Burada, $a(s_t, \phi) = \phi_1 + \phi_2 G^*(f(s_t))$ eşitliği geçerlidir. Bu yönüyle SSTAR modeli, klasik fonksiyonel katsayılı regresyon modelinin genelleştirilmiş haline dönüşmektedir (Cai vd., 2015, ss. 409-411).

Cai vd. (2015)'nin çalışmalarındaki ana hedeflerden birisi, SSTAR modelindeki parametrik olmayan $f(\cdot)$ fonksiyonunu tahmin etmektir. Bu amaçla SSTAR modelinin tahmininde ‘üç aşamalı tahmin yöntemi’ önerilmektedir. İlk aşamada, $f(s_t)$ ’ye birinci derece Taylor açılımı uygulanmaktadır. s_t , tanım aralığından s_0 noktasının komşuluğunda yer almaktadır. Taylor açılımı ile,

$$f(s_t) \approx a + bs_t$$

$f(s_t)$ ’in, s_0 noktası komşuluğunda doğrusal yaklaştırması elde edilmektedir. Böylelikle $f(s_t)$ ’nin yaklaştırması SSTAR modelinde ikame edildiğinde model yaklaşık olarak,

$$y_t \approx \phi_1' x_t + \phi_2' x_t \frac{1}{1 + \exp\{a + bs_t\}} + \varepsilon_t$$

biçiminde elde edilmektedir. Bu modele dayalı ilk aşama tahminleri ise,

$$L(\phi_1, \phi_2, a, b) = \sum_{t=1}^T \left(y_t - \phi_1' x_t - \phi_2' x_t \frac{1}{1 + \exp\{a + bs_t\}} \right)^2 K_{h_1}(s_t - s_0)$$

olarak gösterilen yerel amaç fonksiyonunun minimizasyonu probleminin çözümü ile elde edilmektedir. Burada kernel fonksiyonu, $K_h(.) = K(. / h) / h$ iken h_1 , ilk aşamada kullanılan bant genişliğini ifade etmektedir. h_1 , asimptotik sapma teriminden kurtulmak amacıyla eksik belirlenmektedir yani birinci aşamada, diğer aşamalardaki sapmanın etkisini hafifletmek için küçük h_1 seçilerek ‘eksik düzgünleştirme’ yapılmaktadır. s_t ’nin tanım aralığındaki her s_0 için $\{\hat{\phi}_1(s_0), \hat{\phi}_2(s_0), \hat{a}(s_0), \hat{b}(s_0)\}$ parametrik olmayan tahminleri elde edilebilmektedir.

İkinci aşamada, ϕ_1 ’in ve ϕ_2 ’nin $\sqrt{T}$ tutarlı tahminçileri olan $\tilde{\phi}_1$ ve $\tilde{\phi}_2$, ortalama yöntemiyle elde edilebilmektedir. Bu durumda tutarlı tahminçiler, geçiş değişkeninin her bir gözlenen değeri yaklaştırma yapılacak nokta olarak seçilip elde edilen parametre tahminlerinin ortalaması alınarak,

$$\tilde{\phi}_1 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\phi}_1(s_t) \text{ ve } \tilde{\phi}_2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\phi}_2(s_t)$$

formülasyonu ile elde edilmektedir.

Son aşamada ise, ikinci aşamada elde edilen $\tilde{\phi}_1$ ve $\tilde{\phi}_2$ tahminçilerinin amaç fonksiyonunda yerine konmasıyla parametrik olmayan kısım tekrar tahmin edilmektedir. Bu durumda amaç fonksiyonu,

$$L(f) = \sum_{t=1}^T \left(y_t - \tilde{\phi}_1' x_t - \tilde{\phi}_2' x_t \frac{1}{1 + \exp\{a + bs_t\}} \right)^2 K_{h_3}(s_t - s_0)$$

olarak yazılmaktadır. Burada h_3 , üçüncü aşamadaki bant genişliğini ifade etmektedir. s_0 , s_t ’nin tüm tanım aralığı üzerinde hareket ederek tam parametrik olmayan tahmin edilmiş eğri $\tilde{f}(s_0)$ elde edilmektedir. Tahmin sürecinin birinci ve üçüncü aşamalarında,

$K(u) = 0.75(1-u^2)1(|u| \leq 1)$ olarak gösterilen ‘Epanechnikov Kernel Fonksiyonu’ kullanılmaktadır. Üçüncü aşamada optimal h_3 seçimi için ‘çapraz geçerlilik yöntemi’ gibi popüler yöntemler kullanılabilmektedir (Cai vd., 2015, ss. 411-413).

3.4.6. Model Seçim Testleri

Parametrik olmayan ve semiparametrik modellerin çeşitli model alternatifleri arasında seçiminde çeşitli istatistiksel testler kullanılabilmektedir. Uygun fonksiyonel kalıbın belirlenmesi için bu testlerin yapılması kaçınılmazdır. Bu alt başlıkta öncelikle, parametrik modelle parametrik olmayan model alternatifi arasında tercih yapabilmek amacıyla geliştirilen 'Genelleştirilmiş Benzerlik Oran Testi' incelenmektedir. Sonrasında ise sırasıyla; parametrik olmayan modellere karşı otoregresif modellerin seçim testi, fonksiyonel katsayılı model alternatiflerinin doğrusal modellere karşı seçim testi, değişken katsayılı modellere karşı eşik modellerin seçim testi ve son olarak, semiparametrik form ile parametrik olmayan form belirleme testi analiz edilmektedir.

3.4.6.1. Genelleştirilmiş Benzerlik Oran Testleri (GBO)

Maksimum benzerlik oranı testlerinin başarısına önemli katkı sağlayan en temel özellik, sıfır hipotezi altındaki asimptotik dağılımlarının zararlı parametrelerden bağımsız olmasıdır. Wilks olgusu sayesinde, H_0 altında genelleştirilmiş benzerlik oranı istatistik dağılımını tahmin amacıyla bootstrap örnekleme üretirken zararlı parametrelere bazı makul değerler atanabilmektedir. f , ilgilenilen fonksiyonlar vektörü ve η , zararlı parametreler vektörü olsun. Eldeki veri kümesinin logaritmik benzerliği ise, $l(f, \eta)$ olarak gösterilsin. η veriyken $\hat{f}_\eta$, iyi bir parametrik olmayan tahmincidir. Sonrasında $\hat{\eta}$, $l(\hat{f}_\eta, \eta)$ 'nin η 'ya göre maksimizasyonu yardımıyla ‘profil benzerlik yöntemi’ kullanılarak tahmin edilebilmektedir. Parametrik bir model ailesi olan f_θ 'nın eldeki veri setine uyup uymadığının test edilmesi isteniyor olsun. Bu durumda sıfır hipotezi,

$$H_0 : f = f_\theta, \theta \in \Theta$$

olarak yazılabilmektedir. f ile gösterilen parametrik olmayan model ise, alternatif model olsun. $\hat{\theta}_0$ ve $\hat{\eta}_0$, $l(f_{\theta}, \eta)$ fonksiyonunu maksimize eden sıfır hipotezi altındaki maksimum benzerlik tahmincisidir. Böylelikle $l(\hat{f}_{\hat{\theta}_0}, \hat{\eta}_0)$, sıfır hipotezi altında maksimum benzerlik olmaktadır. ‘Genelleştirilmiş Benzerlik Oranı’ test istatistiği, iki rakip model sınıfı altında logaritmik benzerlikleri karşılaştırmaktadır ve $T = l(\hat{f}_{\hat{\eta}}, \hat{\eta}) - l(\hat{f}_{\hat{\theta}_0}, \hat{\eta}_0)$ formülü ile hesaplanmaktadır. Test istatistiğinin sıfır hipotezi altındaki asimptotik dağılımı ise ‘koşullu parametrik bootstrap yöntemi’ ile elde edilebilmektedir (Fan ve Yao, 2003, ss.408-409).

3.4.6.2. Parametrik Olmayan Modellere Karşı Otoregresif Modeller

Burada, parametrik olmayan modeller sınıfından fonksiyonel katsayılı model olan FAR (p,d) modeli,

$$X_t = a_1(X_{t-d})X_1 + \dots + a_p(X_{t-d})X_{t-p} + \sigma(X_{t-d})\varepsilon_t$$

olarak yazılırsa, buradaki katsayı fonksiyonlarının gerçekten değişip değişmediği test edilmek istenebilmektedir. Bu durumda test edilecek sıfır hipotezi,

$$H_0 : a_1(.) = a_1, \dots, a_p(.) = a_p$$

olarak yazılmaktadır. Burada $a_1, \dots, a_p$ parametreleri belirlenmemiştir. Sıfır hipotezi altında $\{X_t\}$, AR (p) sürecini izlemektedir. Sınama problemi, FAR (p,d) modeline karşı AR (p) modelinin test edilmesi olarak ifade edilebilmektedir. Benzer bir problem toplamsal AR modeli kurulduğu zaman da ortaya çıkmaktadır. Toplamsal AR modeli,

$$X_t = f_1(X_{t-1}) + \dots + f_p(X_{t-p}) + \varepsilon_t$$

olarak yazılabilmektedir. Burada AR (p) modelinin uygun bir model olup olmadığını test etmek için oluşturulan sıfır hipotezi,

$$H_0 : f_1(x) = a_1x, \dots, f_p(x) = a_px$$

olarak ifade edilmektedir (Fan ve Yao, 2003, s.430).

3.4.6.3. Fonksiyonel Katsayılı Model Alternatiflerinin Test Edilmesi

Değişken katsayılı model,

$$X_t = a_1(X_{t-d})X_{t-1} + \dots + a_p(X_{t-d})X_{t-p} + \varepsilon_t$$

olarak ifade edilirse, lokal doğrusal tahmin yöntemi ile tahmin edilen katsayı fonksiyonları olan $\hat{a}_1(\cdot), \dots, \hat{a}_p(\cdot)$ elde edilmektedir. Bu durumda modelden elde edilen artık kareler toplamı,

$$AKT_1 = \sum_{t=p+1}^T \left\{ X_t - \hat{a}_1(X_{t-d})X_{t-1} - \dots - \hat{a}_p(X_{t-d})X_{t-p} \right\}^2$$

olarak tanımlanmaktadır. $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p$ katsayıları ise, AR (p) modeli altında EÇB yöntemiyle tahmin edilmiş olsun. Bu durumda AR (p) modelinin tahmininden elde edilen artık kareler toplamı,

$$AKT_0 = \sum_{t=p+1}^T \left\{ X_t - \hat{a}_1 X_{t-1} - \dots - \hat{a}_p X_{t-p} \right\}^2$$

olarak ifade edilmektedir. ‘Genelleştirilmiş Benzerlik Oranı (GBO)’ istatistiği ise, $(n/2)\log(AKT_0/AKT_1)$ formülü yardımıyla hesaplanmaktadır. Yakın alternatifler söz konusu olduğunda GBO istatistiğinin logaritmik kısmı Taylor açılımı kullanılarak,

$$\log\left(\frac{AKT_0}{AKT_1}\right) = \log\left\{1 + \frac{AKT_0 - AKT_1}{AKT_1}\right\} \approx (AKT_0 - AKT_1)/AKT_1$$

biçiminde yazılabilmektedir. Bu durumda test istatistiği yeniden formüle edilirse istatistik,

$$T_{n,6} = \frac{n}{2}(AKT_0 - AKT_1)/AKT_1, \quad n = T - p$$

olarak yeniden yazılabilmektedir. Test istatistiğinin sıfır hipotezi altındaki asimptotik dağılımı, zararlı parametrelerden bağımsızdır. Bu sebepten, koşullu öz yineleme yöntemiyle test istatistiğinin dağılımı yaklaştırılabilmektedir. Toplamsal model alternatifine karşı da süreç aynı şekilde işlemektedir (Fan ve Yao, 2003, ss.430-431).

3.4.6.4. Değişken Katsayılı Modellere Karşı Eşik Modeller

Eşik modellerini değerlendirmek için, alternatif model ailesi olarak FAR (p,d) modeli seçilmiş olsun. TAR modeli,

$$X_t = a_1(X_{t-d}, \theta) X_{t-1} + \dots + a_p(X_{t-d}, \theta) X_{t-p} + \varepsilon_t$$

olarak gösterilsin. Burada θ , bilinmeyen parametreler vektörüdür. Bu modelden elde edilen artık kareler toplamı (AKT_0),

$$AKT_0 = \sum_{t=p+1}^T \left\{ X_t - a_1(X_{t-d}, \hat{\theta}) X_{t-1} - \dots - a_p(X_{t-d}, \hat{\theta}) X_{t-p} \right\}^2$$

olarak tanımlanmaktadır. FAR (p,d) modelinden benzer biçimde AKT_1 elde edildikten sonra sonra GBO test istatistiği,

$$T_{n,8} = (n/2) \log(AKT_0/AKT_1), \quad n = T - p$$

formülü ile hesaplanmaktadır. Bu yöntem yalnızca eşik modellerine değil, EXPAR modeli gibi diğer parametrik model ailelerine de uygulanabilmektedir (Fan ve Yao, 2003, s.437).

3.4.6.5. Semiparametrik - Parametrik Olmayan Form İçin Belirleme Testleri

$y_t = m(X_t) + e_t$ olarak ifade edilen parametrik olmayan modele dayanarak Gao ve Gijbels (2008) çalışmalarında, $H_{01} : m(x) = m_{\theta_0}(x)$ hipotezine karşı $H_{11} : m(x) = m_{\theta_1}(x) + C_n \Delta_n(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$ hipotezini test etmek için parametrik olmayan test yöntemini tartışmışlardır. Burada; C_n , reel sayılar dizisi ve $\Delta_n(x)$, $\mathbb{R}^d$

üzerinde parametrik olmayan bilinmeyen fonksiyonlar dizisidir. H_{01} altında parametrik olmayan model,

$$y_t = m_{\theta_0}(X_t) + e_t$$

olarak gösterilen semiparametrik zaman serisi modeline dönüşmektedir (Gao ve Gijbels, 2008, s.1585). Härdle ve Mammen (1993) ise çalışmalarında, böyle bir hipotez testi için L_2 uzaklık fonksiyonuna dayalı parametrik olmayan kernel test istatistiği ortaya koymuşlardır. İstatistik,

$$M_{1n}(h) = nh^{d/2} \int \left\{ \hat{m}_h(x) - \tilde{m}_{\hat{\theta}}(x) \right\}^2 w(x) dx$$

formülü ile hesaplanmaktadır. Burada $w(x)$, negatif olmayan ağırlık fonksiyonu iken $\hat{m}_h(x)$ $m(\cdot)$ 'nin parametrik olmayan kernel tahmincisidir. Kernel tahmincisinin parametrik karşılığı ise, $\tilde{m}_{\hat{\theta}}(x)$ ile gösterilmektedir (Härdle ve Mammen, 1993, s.1928).

Alternatif bir yaklaşım olarak Gao ve Gijbels (2008) çalışmalarında, parametrik olmayan kernel test istatistiği için farklı tipte bir uzaklık fonksiyonunu dikkate almışlardır. Kısmi doğrusal regresyon modeli için, $H_{02} : m(x) = u^T \beta + g(v)$ hipotezine karşı $H_{12} : m(x) = u^T \beta + g(v) + C_n \Delta_n(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$ hipotezini test etmek istenmektedir.

C_n ve $\Delta_n(\cdot)$ önceden tanımlandığı gibi olmaktadır. u ve v ise, $x = (u^T, v^T)^T$ nin alt

vektörleri olmaktadır. Bu durumda test istatistiği, $L_{2n}(h) = \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \hat{y}_s K\left(\frac{X_s - X_t}{h}\right) \hat{y}_t$

formülü ile hesaplanmaktadır. Burada; $\hat{y}_s = y_s - U_s^T \hat{\beta} - \hat{g}(V_s)$, $\hat{\beta} = (\tilde{U}^T \tilde{U})^+ \tilde{U}^T \tilde{y}$,

$\hat{g}(V_s) = \sum_{t=1}^n w_{2st} (y_t - U_t^T \hat{\beta})$, $\tilde{U} = (I - W_2)U$, $U = (U_1, \dots, U_n)^T$, $\tilde{y} = (I - W_2)Y$ ve

$W_2 = \{w_{2st}\}$, $n \times n$ boyutlu bir matris olmaktadır. Matris elemanları

$w_{2st} = K_2((V_s - V_t)/h) / \sum_{u=1}^n K_2((V_s - V_u)/h)$ olarak ifade edilmekte olup $K_2(\cdot)$, kernel

fonksiyonunu ifade etmektedir. Semiparametrik tek indeks modeli kapsamında ise, $H_{03}: m(x) = u^T \beta + \psi(x^T \eta)$ hipotezine karşı $H_{13}: m(x) = u^T \beta + \psi(x^T \eta) + C_n \Delta_n(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$ hipotezi test edilmek istenmektedir. Burada θ ve η bilinmeyen parametreler vektörü iken $\psi(\cdot)$ bilinmeyen fonksiyonu ifade etmektedir. Bu durumda hesaplanacak

test istatistiği, $L_{3n}(h) = \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \tilde{y}_s K\left(\frac{(X_s - X_t)^T \hat{\eta}}{h}\right) \tilde{y}_t$ formülü ile hesaplanmaktadır.

Burada formül,

$$\tilde{y}_t = (y_t - U_t^T \hat{\beta} - \hat{\psi}(X_t^T \hat{\eta}) \hat{f}_3(X_t^T \hat{\eta}))$$

iken, $\hat{f}_3(X_t^T \hat{\eta}) = (1/h) \sum_{t=1}^n K((X_s - X_t)^T \hat{\eta}/h)$ eşitliği geçerlidir.

4. Enflasyon Serisinin Parametrik ve Semiparametrik Geçiş Modeli ile Analizi

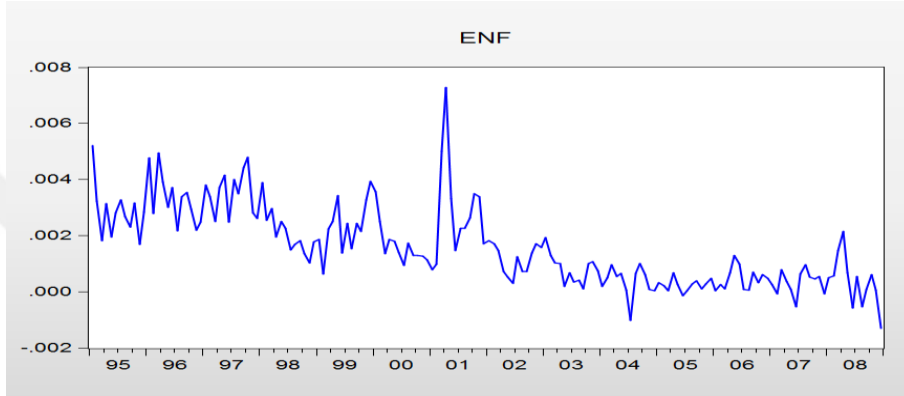
Ekonomik ilişkilere bakıldığında yüksek oranda doğrusal dışılıkların egemen olduğu ve ekonomi incelendiğinde temel olarak iki durumun geçerli olduğu görölmektedir. Bunlar; daralma ve genişleme olarak ifade edilebilir. İncelenen zaman dönemi boyunca gerçekleşen bu farklı durumlar doğrusal modellerle açıklanamamaktadır. Doğrusal dışılıklar; asimetrik ayarlama maliyetleri, işlem maliyetleri, bütçe kısıtları vb. varlığında önemli olmaktadır. Savaşlar, finansal panikler, hükümet politikasındaki anlamlı değişimler, piyasa katılıkları ekonomik seri davranışlarında önemli değişikliklere sebep olmaktadır.

Rejimler arası geçiş modelleri, doğrusal olmayan serilerin modellenmesinde sıklıkla kullanılmaktadır. Son yıllara kadar, rejim geçişlerinin iyi tanımlanmış matematiksel fonksiyonlarla yaklaştırıldığı parametrik yaklaşımın sıklıkla kullanıldığı görölmektedir. Parametrik geçiş modellerinde geçiş fonksiyonları keskin ya da yumuşak iyi tanımlanmış fonksiyonlarla ifade edilmektedir fakat çeşitli ülke ekonomilerinde gerçekleşen rejim geçişlerinin iyi tanımlanmış fonksiyonel kalıplara sadık kalması da mümkün olamayabilmekte ve ülke ekonomisinin kendisine has geçiş dinamiği gözlemlenebilmektedir. Son iki yıldır geçiş modellerine, parametrik olmayan ve semi parametrik yaklaşımlar da uygulanmaya başlamıştır. Bu durumda, geçiş fonksiyonu parametrik olmayan bir biçimde belirlenmektedir ve belli bir kalıba zorlanmamaktadır. Bu aşamada, parametrik yöntemlerden parametrik olmayan ya da semiparametrik yöntemlere geçilmesi kaçınılmaz olmaktadır.

Çalışmada, ortalamada doğrusal olmayan parametrik ve semiparametrik otoregresif geçiş modeli ile 1995 Ocak – 2008 Aralık zaman aralığında TÜFE(1987=100) bazlı enflasyon serisinin modellenmesi yapıp öngörü başarıları karşılaştırılmıştır. Zaman aralığı günümüze kadar uzatıldığında, serilerde genellikle üç rejim geçerli olduğundan ve semiparametrik yaklaşımın yeni olması sebebiyle iki rejimli modelle çalışılması zorunluluğundan inceleme dönemi 2008 yılının Aralık ayı ile sınırlandırılmıştır.

4.1. Enflasyon Serisinin Model Kurma Öncesi Analizi

Bir sürecin doğrusal olmayan bir modelle açıklanabileceği kanısına varabilmek için bazı ön analizlerin yapılması gerekmektedir. Aksi halde, doğrusal olmayan modelin gereksiz kullanımı söz konusu olabilmektedir. Analize öncelikle enflasyon serisinin zaman yolu grafiğinin çizimi ve korelogram analizi ile başlamak yol gösterici olacaktır. Enflasyon serisinin zaman yolu grafiği ve portmanto testi olarak da adlandırılan korelogramı Şekil 4 ve 5'te gösterilmiştir.



Şekil 4: Enflasyon Serisinin Zaman Yolu Grafiği



Şekil 5: Enflasyon Serisinin Korelogramı³

Zaman yolu grafiğinde zaman uzayı geçerli olduğundan seri değerleri kronolojik sırayı takip etmektedir. Şekil 4 incelendiğinde, 2001 yılında ekonomik kriz sebebiyle enflasyon değerlerinde önemli bir artış göze çarpmaktadır. Kriz öncesinde enflasyon düzeyi daha yüksek seyrederken kriz sonrasında bu düzeyin alçaldığı görülmektedir. Bu durum, ortalamada doğrusal olmama hakkında bir işaret vermektedir.

³ OK: Otokorelasyon, KOK: Kısmi Otokorelasyon, Q İst.: Q İstatistiği

Enflasyon serisinin korelogramına bakıldığında, gözlem değerlerinin doğrusal olarak ilişkili oldukları göze çarpmaktadır. Ayrıca, Tablo 1'de gösterilen Enflasyon serisinin 'kırılmalı birim kök testi' sonuçlarına göre serinin durağan olduğu görülmektedir.

Tablo 1: Enflasyon Serisinin Kırılmalı Birim Kök Testi Sonuçları

Test İstatistiği	t istatistiği	olasılık
	-8.5042	<0.01
Test Kritik Değerleri %1 düzeyi	-4.9491	
%5 düzeyi	-4.4436	
%10 düzeyi	-4.1936	

Doğrusal dışılığın tipi hakkında az bilgiye sahip olduğunda parametrik olmayan bir testle analize başlanabilir. Doğrusal olmayan doğru alternatif belirlendiğinde ise parametrik testler daha güçlü olmaktadır ancak bu durumda bile H_0 reddedilemediğinde farklı tipte bir doğrusal dışılık olup olmadığını görmek için parametrik olmayan bir testle sonuç desteklenebilir (Terasvirta, Tjostheim, Granger, 2008:97). Çalışmada doğrusal olmayan yapının varlığı, Brock, Dechert ve Scheinkman'ın 1987 yılında yayımladıkları makale ile ortaya atılan ve genel bir bağımsızlık testi olan BDS doğrusal dışılık testi ile test edilmektedir. Testin önemli bir avantajı, test edilecek veri için dağılımsal bir varsayım gerektirmemesidir. Doğrusallık hipotezi altında, doğru belirlenmiş doğrusal modelin artıkları bağımsız olmalıdır. BDS testi gibi çeşitli doğrusal dışılık testlerinin arkasında yatan temel fikir budur (Tsay, 2002:126-127). Doğrusal olmamanın tipi hakkında bir ön bilgi yoksa, zaman serisinin kendisinde veya doğrusal modelin artıklarında doğrusal olmamanın varlığını test etmek için BDS testi kullanılabilir. En küçük boyutta H_0 yani değişkenin bağımsız ve özdeş dağıldığını öne süren hipotez red ise, doğrusal dışılık için kanıt daha güçlü olmaktadır. Test sonuçları Tablo 2'de gösterilmektedir.

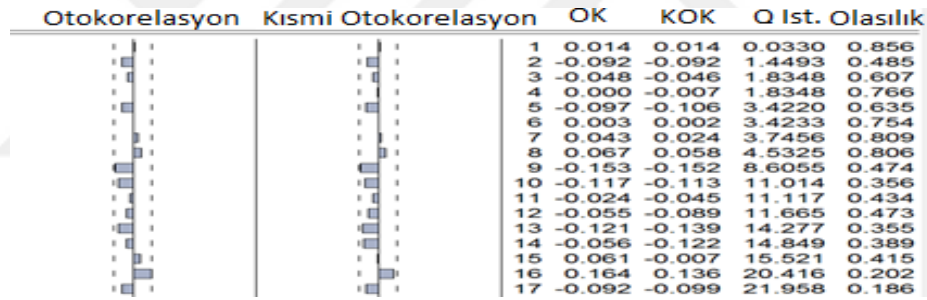
Tablo 2: Enflasyon Serisinin BDS Testi Sonuçları

Boyut	BDS İstatistik Değeri	Standart Hata	Z- İstatistik Değeri	Olasılık
2	0.0887	0.0049	17.8011	0.0000
3	0.1718	0.0079	21.6333	0.0000
4	0.2281	0.0094	24.0587	0.0000
5	0.2614	0.0099	26.3865	0.0000
6	0.2749	0.0095	28.7005	0.0000

Küçük boyutlarda bile sıfır hipotezinin kuvvetli reddi, seride doğrusal dışılık olduğu lehine kanıt oluşturmaktadır fakat bu test hem doğrusal hem de doğrusal olmayan bağımlılığı birlikte değerlendirdiği için, seri doğrusal bağımlılıktan arındırıldıktan sonra doğrusal olmayan bağımlılık olup olmadığına karar verilmelidir. Bunun için uygun bir AR modeli kurulup enflasyon serisi doğrusal bağımlılıktan arındırılmalıdır. Uygun gecikme dereceli AR modelinin En Küçük Kareler (EKK) yöntemi ile tahmini ve artıklarının korelogramı Tablo 3 ve Şekil 6'da gösterilmektedir.

Tablo 3: Uygun Gecikme Dereceli AR Modelinin EKK Tahmini

Bağımlı Değişken: Enf				
Değişken	Katsayı	Standart Hata	t-istatistiği	Olasılık
Enf(-1)	0.6029	0.0640	9.4095	0.0000
Enf(-3)	0.1545	0.0668	2.3116	0.0221
Enf(-5)	0.1942	0.0616	3.1511	0.0019
$R^2 = 0.6528$ DW = 1.9470				



Şekil 6: AR(5) Modelinin Artıklarının Korelogramı

Artıkların korelogramına bakıldığında serinin uygun bir doğrusal modelle modellendiği ve bunun sonucunda doğrusal bağımlılığın ortadan kalktığı görülmektedir. Şekil 6'daki korelogram, artıkların doğrusal bağımlılığı hakkında bilgi verirken, artıkların karelerinin (McLeod-Li Testi) ve mutlak değerlerinin korelogramına bakmak doğrusal dışılık hakkında önemli ip uçları verebilmektedir. McLeod ve Li (1983), modelin uygunluğunu kontrol etmek amacıyla ARMA (p,q) modelinin kareli artıklarına Ljung-Box istatistiğini uygulamışlardır. Kareli artık otokorelasyonları, ARMA modeli artıklarında doğrusal olmayan istatistiksel bağımlılık türlerini tespit etmede yararlıdır (McLeod ve Li, 1983:270).

Artıkların karelerinin ve mutlak değerlerinin korelogramı sırasıyla Şekil 7 ve 8'de gösterilmektedir.



Şekil 7: Artıkların Karelerinin Korelogramı



Şekil 8: Artıkların Mutlak Değerlerinin Korelogramı

Her iki korelogramda da anlamlı otokorelasyon katsayıları göze çarpmaktadır. Doğrusal olmayan bağımlılık görülmektedir. Bu durum, incelenen seride doğrusal dışılık olduğuna işaret etmektedir. Ayrıca, Ramsey'in 1969 yılındaki makalesinde ortaya koyduğu ve yaygın olarak kullanılan regresyon tanımlama hatası testi (RESET) sonucuna bakıldığında, polinomiyal bir alternatife karşı doğrusallık hipotezinin zayıf bir şekilde reddedildiği görülmüştür. Buna karşılık doğrusal modelin artıklarına BDS testi yapıldığında küçük boyutlarda bile doğrusallığın kuvvetli olarak reddedildiği görülmektedir. Doğrusal modelin artıklarına uygulanan BDS Testi sonucu Tablo 4'te verilmiştir.

Tablo 4: Artıkların BDS Testi Sonucu

Boyut	BDS İstatistik Değeri	Standart Hata	Z- İstatistik Değeri	Olasılık
2	0.0198	0.0058	3.4018	0.0007
3	0.0478	0.0092	5.1699	0.0000
4	0.0624	0.0110	5.6642	0.0000
5	0.0738	0.0114	6.4203	0.0000
6	0.0732	0.0110	6.6017	0.0000

RESET ve BDS testleri birlikte değerlendirildiğinde enflasyon serisinde doğrusal dışılığın olduğu fakat bunun, polinomial bir doğrusal dışılıktan farklı olabileceği sonucuna varılmaktadır. Bütün bu analizlerden sonra enflasyon serisinin ortalamada doğrusal olmayan bir modelle modellenmesi gerektiği sonucuna varılmaktadır.

4.2. Model Tahminleri

Ortalamada doğrusal olmayan geçiş modelleri söz konusu olduğunda en sık kullanılan modeller TAR ve STAR modelleridir. TAR modeli limit çevrime sahip olabilir ve bu sebeple periyodik zaman serilerinin modellenmesinde kullanılabilir ve bu model, doğrusal zaman serisi modellerinde yakalanamayan asimetrisi ve sıçrama olayını yakalayabilmektedir. Geleneksel parçalı doğrusal model, zaman uzayında değişimlere imkan verirken TAR modeli, doğrusal yaklaştırmayı geliştirmek amacıyla eşik uzayını kullanmaktadır. Bu model Tong (1978, 1983) ve Tong-Lim (1980) tarafından önerilmiştir. TAR modelinin koşullu ortalama denklemi sürekli değildir. Eşik değerler koşullu ortalama fonksiyonunun süreksizlik noktalarıdır. Bu problemi aşmak için Terasvirta (1994)'nın ortaya koyduğu STAR modeline geçiş yapılmaktadır. Burada TAR modelinin türevlenemezlik problemi aşılmakta fakat geçiş parametreleri zor tahmin edilmektedir (Tsay, 2002:34).

Bu bölümde öncelikle, parametrik keskin geçiş modeli tahmini verilip analiz yapılacaktır. Sonrasında, rejim geçiş modellerine yeni bir yaklaşım olan semi parametrik yönteme dayanan geçiş modeli ile analize devam edilecektir. Son aşamada ise, her iki modelin öngörü başarıları tespit edilip performansları değerlendirilecektir.

4.2.1. Parametrik Geçiş Modeli Tahmini

Ekonomide rejimler arasında daha çok yumuşak geçişlerin görülmesi sebebiyle ilk olarak STAR alternatifine karşı doğrusallık testi yapılmıştır fakat STAR modelinin enflasyon serisinin modellemesinde kullanılmasının uygun olmayacağı tespit edilmiştir. Bu durumda eşik doğrusal dışılığa karşı doğrusallık testi yapılmış ve sıfır hipotezinin reddedilmesi sebebiyle sürecin TAR modeli ile modellenmesinin doğru olacağı kararına varılmıştır. 1995 Haziran - 2008 Aralık dönemi için parametrik TAR modeli tahmin sonuçları Tablo 5'te verilmiştir.

Tablo 5: TAR Modeli Tahmin Sonuçları⁴

Bağımlı Değişken: ENF		Geçiş Değişkeni: M1B (-5)		
Değişken	Katsayı	Standart Hata	t-istatistiği	Olasılık
M1B (-5) < 0.000921				
ENF(-1)	0.4255	0.0744	5.7147	0.0000
ENF(-5)	0.4280	0.0754	5.6705	0.0000
M1B (-5) ≥ 0.000921				
ENF (-1)	0.9344	0.0752	12.4117	0.0000
ENF (-5)	0.0859	0.0702	1.2231	0.2231
$R^2 = 0.6890$ DW = 2.1358				

Monetarist görüş dikkate alınarak yani para arzının enflasyonist daralma ve genişleme rejimleri üzerinde belirleyici rol oynadığı düşünülerek M1 para arzındaki büyüme (M1B) değişkeni geçiş değişkeni olarak düşünülmüştür. Model tahmininde kullanılan veri aylık olduğundan, M1B(-1) ile M1B(-12) arası tüm aday değişkenler Akaike Bilgi Kriterine (AIC) göre değerlendirilmiş ve en küçük AIC değerini veren M1B(-5) değişkeni uygun geçiş değişkeni olarak seçilmiştir. M1 para arzı büyümesinin 5 dönem gecikmeli haline göre gözlemler, parasal daralma ve genişleme rejimlerine atanmaktadır. Parasal daralma rejiminde, enflasyon değişkeninin birinci ve beşinci gecikmelerinin enflasyonun cari değeri üzerinde etkili olduğu görülmektedir. Parasal genişleme döneminde ise, enflasyon değişkeninin cari değeri yalnızca bir önceki dönemin enflasyon değerinden etkilenmektedir. Enflasyon değişkeninin üçüncü gecikmesinin her iki rejimde de anlamsız olması nedeniyle ENF(-3) değişkeni model dışında bırakılmıştır.

⁴ ENF: Enflasyon, M1B: M1 para arzı büyüme oranı

4.2.2. Semiparametrik Geçiş Modeli Tahmini

'Semiparametrik geçiş modeli' tahmininde kullanılan parametrik olmayan geçiş fonksiyonunu tahmini için öncelikle parametrik olmayan geçiş fonksiyonu tahmini farklı eşik yüzdeleri ($\alpha = 0.05, 0.10, 0.20, 0.40$) için denenmektedir ve parametrik olmayan geçiş fonksiyonunun AKT değerini minimum kılan α yani eşik yüzdesi elde edilmektedir. Geçiş değişkeninin (m1b(-5)) gözlem değerleri küçükten büyüğe sıralanmaktadır ve elde edilen eşik yüzdesine karşılık gelen geçiş değişkeninin en küçük ve en büyük değerleri elde edilmektedir. Geçiş değişkeninin en küçük ve en büyük değerlerine karşılık gelen Enflasyon serisinin gözlem değerleri belirlenerek daralma ve genişleme bölgeleri oluşturulmaktadır. Burada doğru α 'yı ve geçiş değişkenini belirlemek, belli sayıda gözlemi birinci ve ikinci rejime atayıp daha sağlıklı başlangıç tahminleri elde etmek açısından oldukça önemlidir. Çalışmada $\alpha = 0.10$ bulunduğundan her iki rejimde de 17 gözlemle doğrusal model tahmini yapılmalıdır.

İlk etapta, iki rejim bölgesine düşen gözlemlerle ayrı ayrı iki doğrusal regresyon tahmin edilmektedir ve bu tahminler algoritmanın başlangıç tahminleri olarak kullanılmaktadır. Parasal daralma ve genişleme rejimlerine düşen 17'şer gözleme dayalı ayrı ayrı yapılan başlangıç parametre tahminleri Tablo 6'da gösterilmiştir.

Tablo 6: Parasal Daralma (1.Rejim) ve Genişleme (2.Rejim) için Parametre Başlangıç Tahminleri

Değişken	1.Rejim Katsayıları	Değişken	2.Rejim Katsayıları
ENF (-1)	-0.0022	ENF (-1)	-0.1642
ENF (-3)	0.4392	ENF (-3)	0.8962
ENF (-5)	0.3547	ENF (-5)	0.2894

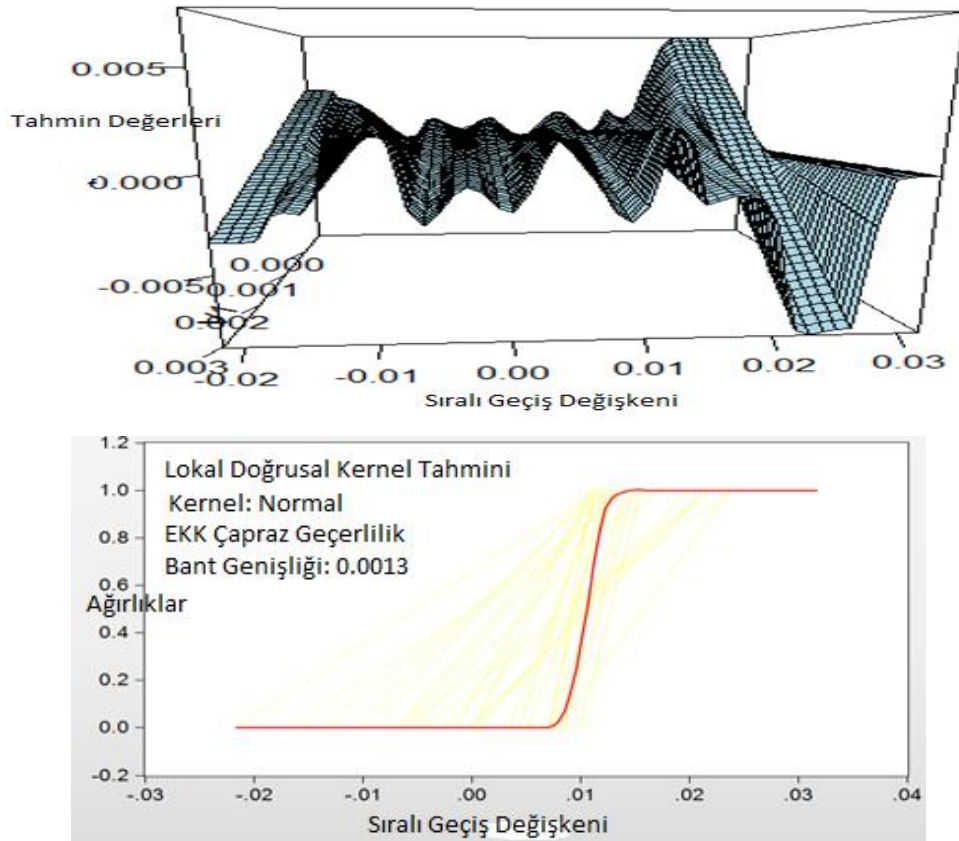
Bu başlangıç eğim parametre tahminlerine dayalı ilk defa elde edilecek 'parametrik olmayan geçiş fonksiyonu' tahmini için ise, seri dönüştürmesi yapıp, dönüştürülmüş serilerle 'kernel lokal tahmin sonuçları' elde edilmelidir. $\tilde{y}_t = y_t - x_t' \beta_1 = x_t' (\beta_2 - \beta_1) w(z_t, \beta) = \tilde{x}_t m(z_t) + \varepsilon_t$ olarak gösterilen parametrik olmayan fonksiyon yani sabitsiz ve tek değişkenli 'değişken katsayılı model' için $\tilde{y}_t = y_t - x_t' \beta_1$, $\tilde{x}_t = x_t' (\beta_2 - \beta_1)$ olarak gösterilen seri dönüştürmeleri yapılmalıdır. Bu dönüştürmeler yapıldıktan sonra değişken katsayılı model tahmin edilip, elde edilen tahmin değerlerine

koşullu parametrik kısmın tahminleri güncellenmektedir. İlk değişken katsayılı model tahmini ve geçiş fonksiyonu sırasıyla Tablo 7'de ve Şekil 9'da gösterilmektedir.

Tablo 7: Değişken Katsayılı Modelin İlk Tahmini

Değişken Katsayılı Model
Regresyon Verisi: Tek Değişken, 163 Veri Noktası
Bant genişliği: 0.0013
Bant genişliği tipi: Sabit
Sürekli Kernel Tipi: İkinci Derece Gaussyen Kernel
Artık Standart Hatası: 0.00076

Burada değişken katsayılı model, kesinliği az olan başlangıç eğim parametresi tahminlerine dayanılarak oluşturulmuştur. Bu sebepten eğim parametrelerinin güncellenip geçiş fonksiyonu grafiğinin daha güvenilir parametre tahminlerine dayalı olarak oluşturulması gerekmektedir.



Şekil 9: Değişken Katsayılı Model Grafiği ve Parametrik Olmayan Geçiş Fonksiyonu

Parametrik olmayan geçiş fonksiyonunun tahmin değerlerine koşullu olarak yani bu fonksiyon tahmin değerleri veri iken parametrik kısmın parametre tahminleri güncellenecektir. Bu amaçla kullanılacak tahminci formülü,

$$\hat{\beta}_T(w) = \left\{ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (w_t \otimes x_t)(w_t \otimes x_t)' \right\}^{-1} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (w_t \otimes x_t) y_t$$

olarak gösterilebilmektedir. w_t değişkeni, ağırlıkları ifade etmektedir. Formülasyona uygun olarak değişkenler dönüştürülmek suretiyle daralma ve genişleme rejim parametreleri güncellenmektedir. Bu aşamada, eldeki tüm gözlemler kullanılarak birinci ve ikinci rejim parametreleri aynı model içerisinde EKK yöntemi ile modellenebilecektir nk yukarıda tahmin edilen parametrik olmayan geçiş fonksiyonu tahmini veri iken semiparametrik geçiş modeli, eğim parametrelerine göre doğrusal bir modeldir. Gerekli dönüşümler yapıldıktan sonra elde edilen parasal daralma rejimi değişkenleri olan; $(1-w)*ENF(-1)$, $(1-w)*ENF(-3)$ ve $(1-w)*ENF(-5)$ ile parasal genişleme değişkenleri olan $w*ENF(-1)$, $w*ENF(-3)$ ve $w*ENF(-5)$, $(w_t \otimes x_t)$ dönüşümü ile elde edilmiş olup semiparametrik modelin parametrik kısmının bağımsız değişkenlerini teşkil etmektedir. Bağımlı değişken ise, modellenen enflasyon değişkenidir ve o da yukarıdaki formülde y_t 'ye karşılık gelmektedir. Bu değişkenlerle birlikte EKK yöntemiyle doğrusal model yukarıdaki parametrik olmayan fonksiyon tahminine koşullu olarak şöyle tahmin edilmiştir:

Tablo 8: Güncellenmiş Parametre Tahminleri

Bağımlı Değişken: Enf				
Değişken	Katsayı	Standart Hata	t-istatistiği	Olasılık
w*ENF(-1)	1.0432	0.1268	8.2226	0.0000
w*ENF(-3)	0.0319	0.1052	0.3039	0.7616
w*ENF(-5)	-0.0504	0.1054	-0.4786	0.6328
(1-w)*ENF(-1)	0.4693	0.0711	6.5970	0.0000
(1-w)*ENF(-3)	0.2059	0.0822	2.5049	0.0133
(1-w)*ENF(-5)	0.2644	0.0733	3.6034	0.0004
$R^2 = 0.6849$ $DW = 1.9406$				

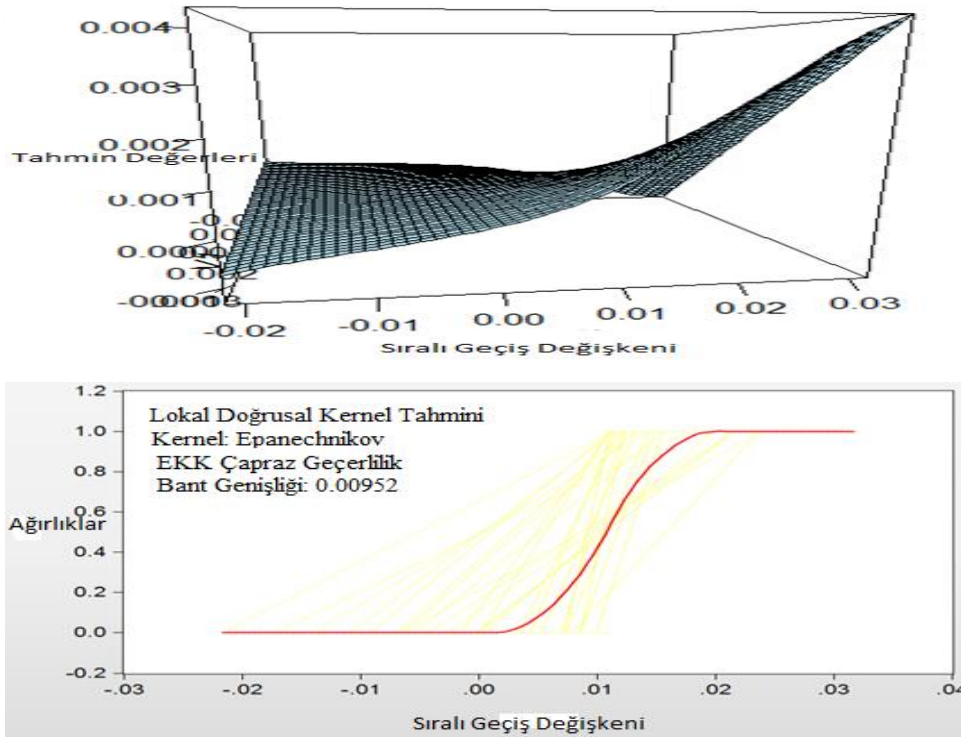
Parametrik olmayan geçiş fonksiyonuna koşullu güncellenmiş, sırasıyla genişleme ve daralma rejimlerinin eğim parametre tahminleri elde edilmiştir. Buna dayalı olarak bir kez daha geçiş fonksiyonu tahmini güncellenecek ve iterasyonun

birinci adımı tamamlanmış olacaktır. Burada elde edilen parametre tahminleri semi parametrik modelin parametrik kısmının tahminlerini oluşturmaktadır. Enflasyonun cari değerleri daralma rejiminde birinci, üçüncü ve beşinci gecikmesi tarafından açıklanırken, genişleme rejiminde yalnızca bir dönem öncesi tarafından açıklanmaktadır.

Yukarıda elde edilen parametre tahminlerine koşullu olarak güncellenmiş değişken katsayılı model tahmini ve geçiş fonksiyonu sırasıyla Tablo 9'da ve Şekil 10'da gösterilmektedir.

Tablo 9: Değişken Katsayılı Modelin Güncellenmiş Tahmini

Değişken Katsayılı Model
Regresyon Verisi: Tek Değişken, 163 Veri Noktası
Bant genişliği: 0.0095
Bant genişliği tipi: Sabit
Sürekli Kernel Tipi: İkinci Derece Gausyen Kernel
Artık Standart Hatası: 0.00077



Şekil 10: Değişken Katsayılı Model Grafiği ve Güncellenmiş Parametrik Olmayan Geçiş Fonksiyonu

İterasyon sonucunda elde edilen fonksiyona dayalı güncellenmiş eğim parametre tahminleri ise şöyledir:

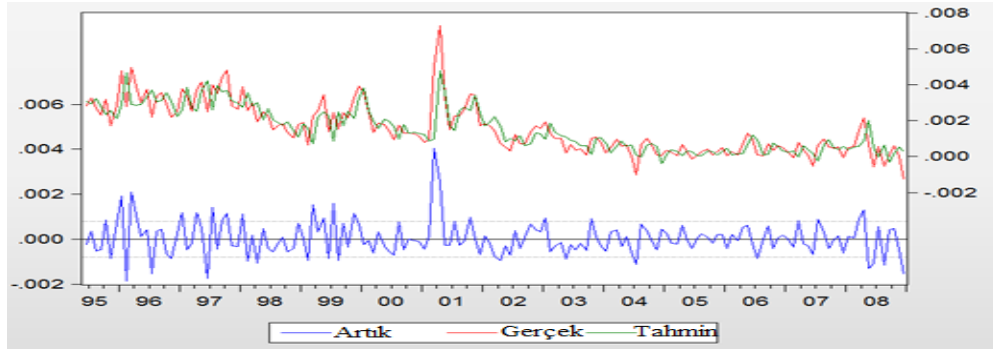
Tablo 10: İkinci Defa Güncellenmiş Parametre Tahminleri

Bağımlı Değişken: Enf				
Değişken	Katsayı	Standart Hata	t-istatistiği	Olasılık
w*ENF(-1)	1.0423	0.1268	8.2192	0.0000
w*ENF(-3)	0.0325	0.1052	0.3091	0.7576
w*ENF(-5)	-0.0503	0.1055	-0.4771	0.6340
(1-w)*ENF(-1)	0.4692	0.0711	6.5981	0.0000
(1-w)*ENF(-3)	0.2056	0.0822	2.5018	0.0134
(1-w)*ENF(-5)	0.2648	0.0733	3.6105	0.0004
$R^2 = 0.6848$ $DW = 1.9407$				

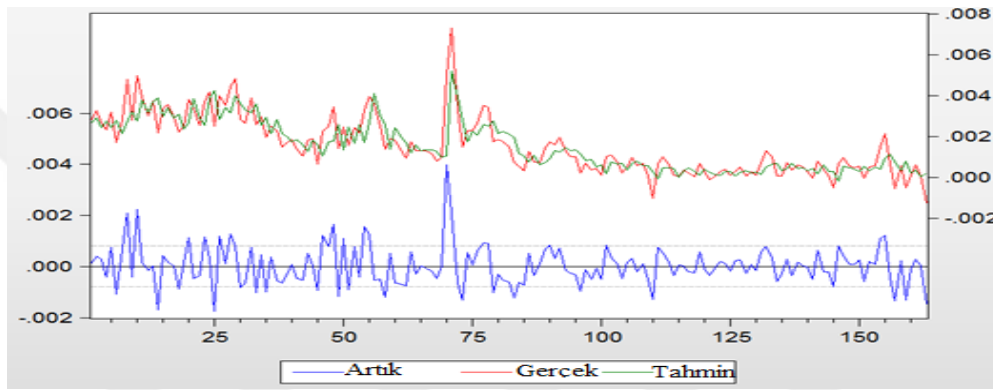
Burada da enflasyonun cari değerleri daralma rejiminde birinci, üçüncü ve beşinci gecikmesi tarafından açıklanırken, genişleme rejiminde yalnızca bir dönem öncesi tarafından açıklanmaktadır. Tablo 8'deki parametre tahminleriyle buradaki parametre tahminleri arasında çok küçük farklılık göze çarpmaktadır. Bu sebepten, nihai parametrik olmayan geçiş fonksiyon tahmini olarak Şekil 10'daki geçiş fonksiyonu kabul edilmektedir. Nihai parametrik model tahmini olarak da Tablo 10'daki parametrik model tahmini dikkate alınmaktadır. Böylelikle, enflasyon serisi için semiparametrik geçiş modeli tahmin edilmiş olmaktadır.

4.2.3. Parametrik ve Semiparametrik Modellerin Öngörü Başarılarının Karşılaştırılması

Parametrik ve Semiparametrik geçiş modeli tahmin edildikten sonra, her iki modelin benzetim grafikleri ve başarı kriterleri karşılaştırılıp hangi modelin öngöründe daha başarılı olduğu tespit edilmelidir. Şekil 11'de ve 12'de sırasıyla parametrik ve semi parametrik tahmine dayalı benzetim grafikleri görülmektedir.



Şekil 11: Parametrik Tahmine Dayalı Benzetim Grafiği



Şekil 12: Semiparametrik Tahmine Dayalı Benzetim Grafiği

Grafikler incelendiğinde, her iki modelin de birbirine benzer sonuçlar verdiği göze çarpmaktadır. Görsel olarak bakıldığında, her iki modelin de gelecek değerleri öngörmeye yol gösterici olarak kullanılabileceği sonucuna varılmaktadır. Her iki modelin öngörü başarı kriterleri karşılaştırıldığında ise hangisinin öngöründe daha başarılı olduğu tespit edilebilecektir. Tablo 11'de parametrik ve semiparametrik modelin öngörü başarı kriterleri verilmektedir.

Tablo 11: Parametrik ve Semiparametrik Modelin Öngörü Başarı Kriterleri

Parametrik Model	Semiparametrik Model
Kök Ortalama Hata Kare: 0.00078	Kök Ortalama Hata Kare: 0.00078
Ortalama Mutlak Hata: 0.00057	Ortalama Mutlak Hata: 0.00058
Ortalama Mutlak Yüzde Hata: 106.60	Ortalama Mutlak Yüzde Hata: 91.83
Theil Eşitsizlik Katsayısı: 0.1935	Theil Eşitsizlik Katsayısı: 0.1949
• Sapma Oranı: 0.0015	• Sapma Oranı: 0.0014
• Varyans Oranı: 0.0639	• Varyans Oranı: 0.0664
• Kovaryans Oranı: 0.9344	• Kovaryans Oranı: 0.9321

Kriterler karşılaştırıldığında, her iki model de birbirine benzer öngörü başarısına sahiptir. Bu durum, Türkiye ekonomisinde gerçekleşen enflasyon değerlerinin parasal daralma ve genişleme rejimleri arasındaki geçişinin kendine has bir dinamiğinin olmaması ve parametrik olmayan geçiş fonksiyonunun parametrik geçiş fonksiyonuna benzer olması ile açıklanabilmektedir. Parametrik TAR modeline dayalı öngörü değerlerinin güven aralığının daha düşük olması sebebiyle, bu modelden elde edilen öngörü değerlerinin semiparametrik modelden elde edilenlere göre daha fazla kesinliğe sahip olduğu sonucuna varılabilmektedir.



5. SONUÇ

Fiyat istikrarı, Merkez Bankasının da temel amaç olarak belirlediği önemli iktisadi hedeflerdendir. Fiyatlar genel düzeyindeki değişimlerin doğru tahmin edilmesi, alınacak tedbirler açısından önem arz etmektedir.

Ekonomide temelde iki rejim yani daralma ve genişleme rejimleri geçerlidir. Çalışmada, incelenen zaman aralığındaki enflasyon değerlerinin bu rejimlerin hangisine atanacağı sorusu bu atamanın belirleyicisi olan doğru geçiş değişkeninin seçiminde yatmaktadır. Bu konuda çeşitli görüşler söz konusu olsa da burada, Monetarist yaklaşım çerçevesinde enflasyonist süreç değerlendirilmiştir ve enflasyonist rejimlerin belirlenmesinde M1 para arzındaki büyüme geçiş değişkeni olarak seçilmiştir.

Enflasyonist sürecin modellenmesi aşamasına bakıldığında, rejimler arası geçişlerin var olduğu zaman aralıklarında geçiş şeklinin doğru belirlenmesi, istenilen kesinlikte tahminler elde edilebilmesi için önemlidir. Geçiş fonksiyonunun yanlış belirlendiği durumlarda tutarsız tahminler elde edilmektedir ve yanlış çıkarsamalar yapılmaktadır. Semiparametrik geçiş modelinde yalnızca geçiş fonksiyonu uygun parametrik olmayan yöntemle tahmin edilmektedir. Burada geçiş fonksiyonu üzerine koyulan tek kısıt, fonksiyonun düzgün fonksiyon olması yani tüm noktalarında türevlenebilir olmasıdır. Geçiş fonksiyonunun parametrik olmayan uygun yöntemle tahmini, Taylor açılımı vb. açılımlarla belli noktalarda fonksiyonel yaklaşımlar yaparken ortaya çıkan yaklaştırma hatalarını önemli ölçüde azaltmaktadır çünkü parametrik olmayan yöntemlerle yaklaştırma yaparken, tüm veri seti değil yalnızca yaklaştırma yapılan noktaya komşu gözlemler dikkate alınarak ağırlıklandırma yapılmaktadır. Bu noktada geçiş fonksiyonları üzerine parametrik kısıtlar koyan parametrik yöntemlerin yanı sıra gerek geçiş fonksiyonunun belli bir kalıba uymadığı yani matematiksel olarak tanımlanmamış geçişler söz konusu olduğunda bunun tüm hatlarıyla ortaya koyulması gerekse de semiparametrik modelde parametrik kısım tahminlerinin gerçek değerlere yakınsama hızının parametrik model tahminlerinininki ile aynı olması sebebiyle semiparametrik yaklaşımın da bu süreçlerin modellenmesinde kullanılması gerekliliği ortaya çıkmaktadır.

Çalışmada hem parametrik hem de semiparametrik geçiş modeli tahminleri yapıldıktan sonra her iki modelin de öngörü performansları değerlendirilmiştir. Öngörü başarı kriterleri karşılaştırıldığında, her iki model de birbirine benzer öngörü başarısına sahiptir. Parametrik geçiş modeline dayalı öngörü değerlerinin güven aralığının daha düşük olması sebebiyle, bu modelden elde edilen öngörü değerlerinin semiparametrik modelden elde edilenlere göre daha fazla kesinliğe sahip olduğu sonucuna varılabilmektedir. Her iki modelin öngörü başarılarının birbirine yakın olması, parametrik olmayan geçiş fonksiyonunun parametrik geçiş fonksiyonuna oldukça benzer olmasına bağlanmaktadır.

Analiz neticesinde benzer sonuçlar görülmüş olsa da, geçiş fonksiyonunun tam şeklini görüp, rejimler arası geçişle ilgili (geçiş hızı vb.) net bilgi edinmek ve dirseklerde türevlenemezlik problemi taşımayan düzgün bir geçiş fonksiyonu elde etmek açısından parametrik geçiş modellerini de içinde barındıran semiparametrik geçiş modelinin kullanımı tavsiye edilmektedir.



EKLER

EK 1: Parametrik Geçiş Modeli Tahmin Sonuçları

Threshold variable chosen: M1B(-5)

Threshold selection: Trimming 0.15, , Sig. level 0.05

Threshold value used: 0.000921738

Note: final equation sample is larger than selection sample

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
M1B(-5) < 0.000921738 -- 68 obs				
ENF(-1)	0.425590	0.074472	5.714778	0.0000
ENF(-5)	0.428023	0.075482	5.670527	0.0000
0.000921738 <= M1B(-5) -- 95 obs				
ENF(-1)	0.934454	0.075288	12.41172	0.0000
ENF(-5)	0.085938	0.070258	1.223177	0.2231
R-squared	0.689034	Mean dependent var	0.001555	
Adjusted R-squared	0.683167	S.D. dependent var	0.001404	
S.E. of regression	0.000791	Akaike info criterion	-11.42346	
Sum squared resid	9.94E-05	Schwarz criterion	-11.34754	
Log likelihood	935.0118	Hannan-Quinn criter.	-11.39263	
Durbin-Watson stat	2.135801			

EK 2: Semiparametrik Modelin Parametrik Kısımının İlk Tahmin Sonuçları

Dependent Variable: DEP0
Method: Least Squares
Date: 10/24/17 Time: 19:12
Sample: 1 163
Included observations: 163

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
A	1.043207	0.126870	8.222622	0.0000
B	0.031979	0.105227	0.303909	0.7616
E	-0.050487	0.105470	-0.478686	0.6328
F	0.469374	0.071149	6.597014	0.0000
G	0.205953	0.082218	2.504974	0.0133
H	0.264460	0.073390	3.603489	0.0004
R-squared	0.684922	Mean dependent var	0.001555	
Adjusted R-squared	0.674888	S.D. dependent var	0.001404	
S.E. of regression	0.000801	Akaike info criterion	-11.38578	
Sum squared resid	0.000101	Schwarz criterion	-11.27190	
Log likelihood	933.9411	Hannan-Quinn criter.	-11.33955	
Durbin-Watson stat	1.940671			

EK 3: Semiparametrik Modelin Parametrik Kısımının Yinelenmiş Tahmin Sonuçları

Dependent Variable: DEP
Method: Least Squares
Date: 10/24/17 Time: 19:18
Sample: 1 163
Included observations: 163

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
A	1.042389	0.126823	8.219249	0.0000
B	0.032534	0.105230	0.309168	0.7576
E	-0.050349	0.105530	-0.477102	0.6340
F	0.469226	0.071115	6.598175	0.0000
G	0.205668	0.082206	2.501871	0.0134
H	0.264888	0.073365	3.610526	0.0004
R-squared	0.684866	Mean dependent var	0.001555	
Adjusted R-squared	0.674829	S.D. dependent var	0.001404	
S.E. of regression	0.000801	Akaike info criterion	-11.38560	
Sum squared resid	0.000101	Schwarz criterion	-11.27172	
Log likelihood	933.9266	Hannan-Quinn criter.	-11.33937	
Durbin-Watson stat	1.940762			

EK 4: Ramsey RESET Sonucu

Ramsey RESET Test

Equation: EQ04

Specification: ENF ENF(-1) ENF(-3) ENF(-5)

Omitted Variables: Powers of fitted values from 2 to 3

	Value	df	Probability
F-statistic	2.881658	(2, 158)	0.0590
Likelihood ratio	5.839826	2	0.0539

EK 5: Bai - Perron Eşik Sayısı Belirleme Testi Sonuçları

Maximum number of thresholds: 5
Threshold data value: 0.000921738042803
Adjacent data value: 0.000739732937446
Threshold value used: 0.000921738

Current threshold calculations:

Multiple threshold tests
Bai-Perron tests of L+1 vs. L sequentially determined thresholds
Date: 11/22/17 Time: 22:39
Sample: 1995M06 2008M12
Included observations: 163
Threshold variable: M1B(-5)
Threshold varying variables: ENF(-1) ENF(-5)
Threshold test options: Trimming 0.15, Max. thresholds 5, Sig. level 0.05

Sequential F-statistic determined thresholds:			1
Threshold Test	F-statistic	Scaled F-statistic	Critical Value**
0 vs. 1 *	12.21045	24.42089	11.47
1 vs. 2	4.295654	8.591309	12.95

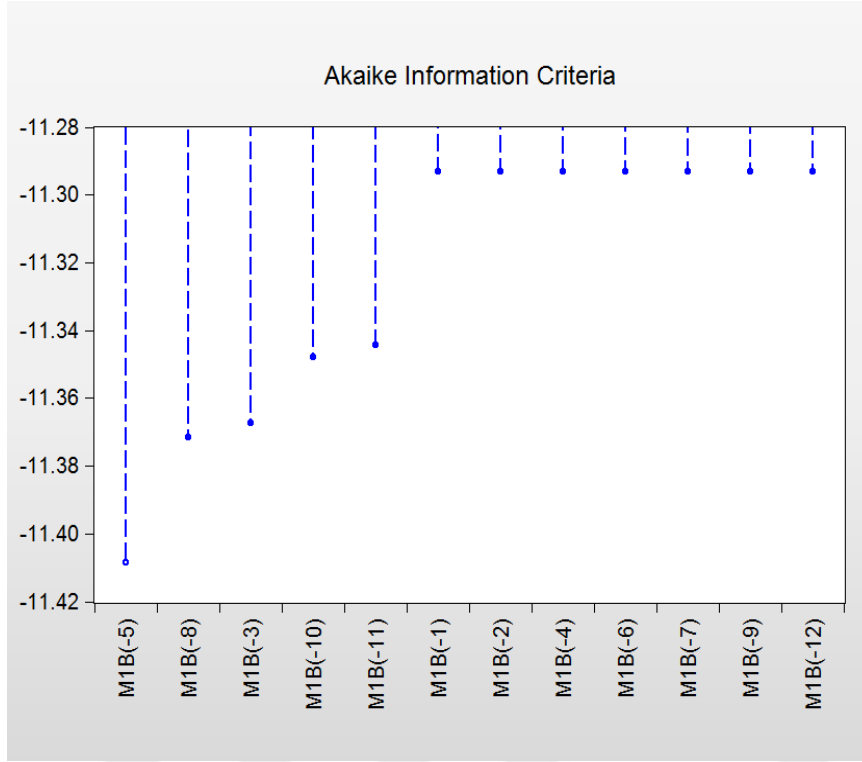
* Significant at the 0.05 level.

** Bai-Perron (Econometric Journal, 2003) critical values.

Threshold values:

	Sequential	Repartition
1	0.000921738	0.000921738

EK 6: AIC'e Göre Eşik Değişken Seçimi:



KAYNAKÇA

- Andrews, D. and W. Ploberger. (1994). Optimal Tests When a Nuisance Parameter is Present Only under the Alternative. *Econometrica*. 62.6, 1383-1414.
- Bationo, R. and H. Hounkpodote (2009). Estimated Changes in Prices of Coffee and Cocoa: Kalman Filter, Hodrick-Prescott Filter and Modeling from Markov Switching. *Munich Personal RePEc Archive*. Paper No. 26980, 1-22.
- Brock, W.A., W. D. Dechert and J. A. Scheinkman (1987). A Test for Independence Based On the Correlation Dimension. Department of Economics, University of Wisconsin at Madison, University of Houston and University of Chicago.
- Brock, W.A., D. Hsieh and B. LeBaron. (1991). *Nonlinear Dynamics, Chaos and Instability: Statistical Theory and Economic Evidence*. Cambridge: MIT Press.
- Buja, A., T. Hastie and R. Tibshirani (1989). Linear Smoothers and Additive Models. *The Annals of Statistics*. 17.2, 453-510.
- Cai, N., Z. Cai, Y. Fang and Q. Xu (2015). Forecasting major Asian exchange rates using a new semiparametric STAR model. *Empirical Economics*. 48.1, 407-426.
- Cai, Z., J. Fan and Q. Yao (2000). Functional-coefficient regression models for nonlinear time series. *Journal of the American Statistical Association*. 95.451, 941-956.
- Caner, M. and B.E. Hansen (2001). Threshold Autoregression with a Unit Root. *Econometrica*. 69.6, 1555-1596.
- Chen R. and R. Tsay (1993). Functional Coefficient Autoregressive Models. *Journal of the American Statistical Association*. 88.421, 298-308.
- Cheng B. and H. Tong (1992). On Consistent Nonparametric Order Determination and Chaos. *Journal of the Royal Statistical Society*. 54.2, 427-449.
- Cířek, P. and C. Koo (2015). Semiparametric transition models. *Unpublished manuscript*. Tilburg University.
- Davidson, R., J. G. Mackinnon and R. Davidson (1985). Heteroskedasticity-Robust Tests in Regressions Directions. *Annales de l'insée*. 59.60, 183-218.
- Davies, R.B. (1977). Hypothesis Testing When The Nuisance Parameter is Present Only Under the Alternative. *Biometrika*. 64.2, 247-254.
- Dempster, A. P., N. M. Laird and D. B. Rubin (1977). Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society*. 39.1, 1-38.
- Donderis, M. A., O. Darné et L. Ferrara (2007). Deux Indicateurs Probabilistes de Retournement Cyclique Pour l'Economie Française. Banque de France.

- Eitrheim, Ø. and T. Terasvirta (1996). Testing the adequacy of smooth transition autoregressive models. *Journal of Econometrics*. 74, 59-75.
- Escribano A. and O. Jordá (1999). Improved Testing and Specification of Smooth Transition Regression Models. P. Rothman (Ed.). *Nonlinear Time Series Analysis of Economic and Financial Data içinde*. Boston: Springer, 289-319.
- Fan, J. and I. Gijbels (1995). Data-driven bandwidth selection in local polynomial fitting: variable bandwidth and spatial adaptation. *Journal of the Royal Statistical Society*. 57.2, 371-394.
- Fan, J. and I. Gijbels (1996). *Local Polynomial Modelling and Its Applications*. Springer.
- Fan, J. and W. Zhang (1999). Statistical Estimation in Varying Coefficient Models. *The Annals of Statistics*. 27.5, 1491-1518.
- Fan, J. and R. Li (2001). Variable Selection via Nonconcave Penalized Likelihood and its Oracle Properties. *Journal of the American Statistical Association*. 96.456, 1348-1360.
- Fan, J. and Q. Yao (2003). *Nonlinear Time Series: Nonparametric and Parametric Methods*. NY: Springer.
- Fan, J. and T. Huang (2005). Profile likelihood inferences on semiparametric varying-coefficient partially linear models. *Bernoulli*. 11.6, 1031-1057.
- Fan, J. and W. Zhang (2008). Statistical Methods with Varying Coefficient Models. *Statistics and Its Interface*. 1, 179-195.
- Fontdecaba, S., M. P. Munõz and J. A. Sánchez (2009). Estimating Markovian Switching Regression Models in R: An application to model energy price in Spain. The R User Conference, France.
- Franke, J., J. P. Kreiss and E. Mammen (2009). Nonparametric Modeling in Financial Time Series. T. G. Andersen, R. A. Davis, J. P. Kreiß and T. Mikosch (Ed.). *Handbook of Financial Time Series içinde*. Berlin: Springer, 927-952.
- Franses, P.H. and D.v Dijk. (2003). *Non-linear Time Series Models in Empirical Finance*. Cambridge University Press.
- Gao, J. and H. Tong (2004). Semiparametric non-linear time series model selection. *Journal of the Royal Statistical Society*. 66, 321-336.
- Gao, J. and I. Gijbels (2008). Bandwidth Selection in Nonparametric Kernel Testing. *Journal of the American Statistical Association*. 103.484, 1584-1594.
- Gao, J. (2012). Identification, Estimation and Specification in a Class of Semi-Linear Time Series Models. *SSRN Electronic Journal*. 1-19.
- Garcon, J.H. (2012). Modélisation et prévision du taux de change canadien à l'aide du modèle ESTAR. *Rapport de recherche*. Université de Montréal.
- Gijbels, I., A. Lambert and P. Qiu (2007). Jump-Preserving Regression and Smoothing using Local Linear Fitting: A Compromise. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*. 59.2, 235-272.
- Granger, W.J. and T. Terasvirta. (1993). *Modelling Non-Linear Economic Relationships*. Oxford: Oxford University Press.

- Hall, S. G., Z. Psaradakis and M. Sola (1999). Detecting Periodically Collapsing Bubbles: A Markov-Switching Unit Root Test. *Journal of Applied Econometrics*. 14, 143-154.
- Hamilton, J. D. (1989). A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle. *Econometrica*. 57.2, 357-384.
- Hamilton, J. D. (1990). Analysis of Time Series Subject to Changes in Regime. *Journal of Econometrics*. 45, 39-70.
- Hamilton, J. D. (1994). State-Space Models. R. F. Engle and D. L. McFadden (Ed.). *Handbook of Econometrics içinde*. Elsevier Science B.V., 3041-3077.
- Hamilton, J. D. (hızl.). (2005). Regime-Switching Models. University of California, San Diego.
- Hansen, B. E. (1996). Inference when a nuisance parameter is not identified under the null hypothesis. *Econometrica*. 64, 413-430.
- Hansen, B. E. (1999). Testing for Linearity. *Journal of Economic Surveys*. 13.5, 551-576.
- Hansen, B. (2000). Sample Splitting and Threshold Estimation. *Econometrica*. 68.3, 575-603.
- Härdle, W. (1990). *Applied Nonparametric Regression*. Econometric Society Monograph Series. Cambridge: Cambridge University Press.
- Härdle, W. and E. Mammen (1993). Comparing Nonparametric Versus Parametric Regression Fits. *The Annals of Statistics*. 21.4, 1926-1947.
- Härdle, W. (1994). *Applied Nonparametric Regression*. Berlin.
- Härdle, W., H. Lutkepohl and R. Chen (1997). A Review of Nonparametric Time Series Analysis. *International Statistical Review*. 65.1, 49-72.
- Hart J. D. (1996). Some Automated Methods of Smoothing Time - Dependent Data. *Journal of Nonparametric Statistics*. 6.(2-3), 115-142.
- Horowitz, J. (2009). *Semiparametric and Nonparametric Methods in Econometrics*. N.Y: Springer.
- Huang, J. Z. and H. Shen (2004). Functional coefficient regression models for non-linear time series: A polynomial spline approach. *Scandinavian Journal of Statistics*, 31.4, 515-534.
- Ichimura, H. (1991). Semiparametric Least Squares (SLS) and Weighted SLS Estimation of Single-Index Models. University of Minnesota, 1-48.
- Kapetanios, G., Y. Shin and A. Snell (2003). Testing for a unit root in the nonlinear STAR framework. *Journal of Econometrics*. 112, 359-379.
- Kim, C. J. (1994). Dynamic Linear Models with Markov - Switching. *Journal of Econometrics*. 60, 1-22.
- Koller, W. and M.M. Fischer (2002). Testing for Non-Linear Dependence in Univariate Time Series An Empirical Investigation of the Austrian Unemployment Rate. *Networks and Spatial Economics*. 2.2, 191-209.
- Linton, O. and J. P. Nielsen (1995). A kernel method of estimating structured nonparametric regression based on marginal integration. *Biometrika*. 82.1, 93-100.
- Loader, C. (1999). *Local Regression and Likelihood*. NY: Springer.

- Luukkonen, R., P. Saikkonen and T. Teräsvirta (1988). Testing Linearity Against Smooth Transition Autoregressive Models. *Biometrika*. 75.3, 491-499.
- McLeod, A.I., and W.K. Li (1983). *Diagnostic Checking ARMA Time Series Models Using Squared-Residual Autocorrelations*. *Journal of Time Series Analysis*. 4.4, 269-273.
- NIST/SEMATECH *e-Handbook of Statistical Methods*. (2012). www.itl.nist.gov/div898/handbook (1 Eylül 2015).
- Pagan A. and A. Ullah (1999). *Nonparametric Econometrics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Perraudin, C. (2002). La prise en compte de ruptures dans l'évolution des variables économiques: Les modèles à changement de régimes. Université Paris I.
- Piger, J. (h.zl.). (2007). *Econometrics: Models of Regime Changes*. University of Oregon, Eugene.
- Potter, S. M. (1999). Nonlinear Time Series Modelling: An Introduction. *Journal of Economic Surveys*. 13.5, 505-528.
- Rabault, G. (1993). Une Application du Modèle de Hamilton à l'estimation des cycles économiques. *Annales d'économie et de statistique*. 30, 57-83.
- Ramsey, J. B. (1969). Tests for specification errors in classical least-squares regression analysis. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B*, 31, 350-71.
- Rice, J. A. and B. W. Silverman (1991). Estimating the Mean and Covariance Structure Nonparametrically When the Data are Curves. *Journal of the Royal Statistical Society*. 53.1, 233-243.
- Ruppert, D., M. P. Wand and R. J. Carroll (2003). *Semiparametric Regression*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Saart, P., J. Gao and N. H. Kim (2014). Semiparametric methods in nonlinear time series analysis: a selective review. *Journal of Nonparametric Statistics*. 26.1, 141-169.
- Salem, M.B. and C. Perraudin. (2001). Tests de linéarité, spécification et estimation de modèles à seuil: une analyse comparée des méthodes de Tsay et de Hansen. *Economie & Prévision*. 148.2, 157-176.
- Teräsvirta, T. (1994). Specification, Estimation, and Evaluation of Smooth Transition Autoregressive Models. *Journal of the American Statistical Association*. 89.425, 208-218.
- Teräsvirta, T. (2004). Smooth Transition Regression Modeling. H. Lutkepohl and M. Kratzig (Ed.). *Applied Time Series Econometrics içinde*. New York: Cambridge University Press, 222-242.
- Teräsvirta, T, D. Tjøstheim and W.J. Granger. (2008). *Modelling nonlinear economic time series*. Oxford University Press.
- Tjøstheim D. and B. H. Auestad (1994). Nonparametric Identification of Nonlinear Time Series: Selecting Significant Lags. *Journal of the American Statistical Association*. 89.428, 1410-1419.
- Tong, H. (1978). *On a threshold model*. *Pattern Recognition and Signal Processing*. 575-586.
- Tong, H. and K. S. Lim. (1980). Threshold Autoregression, Limit Cycles and Cyclical Data. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B*, 42(3), 245-292.

- Tong, H. (1983). Threshold Models in Non-linear Time Series Analysis. *Lecture Notes in Statistics*. 21, Berlin: Springer.
- Tong, H. (1990). *Non-Linear Time Series. A Dynamical System Approach*. Oxford: Oxford University Press.
- Tsay, R. (1989). Testing and Modeling Threshold Autoregressive Processes. *Journal of the American Statistical Association*. 84.405, 231-240.
- Tsay, R. (2002). *Analysis of Financial Time Series*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Tschernig, R. and L. Yang (2000). Nonparametric Lag Selection for Time Series. *Journal of Time Series Analysis*. 21.4, 457-487.
- Tschernig, R. (2004). Nonparametric Time Series Modeling. H. Luetkepohl and M. Kraetzig (Ed.). *Applied Time Series Econometrics içinde*. NY: Cambridge University Press, 243-288.
- Wang, P. (2009). *Financial Econometrics*. Second Edition. Abingdon: Routledge.
- Zhang, W., S. Y. Lee and X. Song (2002). Local Polynomial Fitting in Semivarying Coefficient Model. *Journal of Multivariate Analysis*. 82, 166-188.
- Zhao, Y. Y., J. G. Lin, X. F. Huang and H. X. Wang (2016). Adaptive jump-preserving estimates in varying-coefficient models. *Journal of Multivariate Analysis*. 149, 65-80.
- Zivot, E. and J. Wang. (2005). *Modelling Financial Time Series with S-PLUS*. Second Edition. Springer.