

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİRLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERDE KARARLILIK
ANALİZİ

Ash Beste ÖZAYDIN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2018

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Ashı Beste ÖZAYDIN tarafından hazırlanan " Kesirli Diferensiyel Denklemlerde Kararlılık Analizi " adlı tez çalışması 10/01/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Fatma KARAKOÇ



Jüri Üyeleri:

Başkan: Prof. Dr. Hüseyin MERDAN
TOBB ETÜ, Matematik Anabilim Dalı



Üye : Doç. Dr. Fatma KARAKOÇ
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı



Üye : Doç. Dr. Arzu ÜNAL
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı



Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Atila YETİŞEMİYEN
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

10/01/2018



Aslı Beste ÖZAYDIN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KESİRLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERDE KARARLILIK ANALİZİ

Aslı Beste ÖZAYDIN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Fatma KARAKOÇ

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde kesirli integral ve türev operatörleri tanımlanıp bunlarla ilgili özellikler verilmiş, bazı özel fonksiyonlar ifade edilmiş ve bu fonksiyonların kesirli integral ve türev operatörleri ile ilişkilerine değinilmiştir. Ayrıca kesirli integral ve türev operatörlerinin Laplace dönüşümleri de incelenmiştir.

Üçüncü bölümde Riemann-Liouville ve Caputo türevi içeren kesirli diferensiyel denklemler için varlık ve teklik teoremleri ifade edilmiştir.

Dördüncü bölümde kesirli basamaktan diferensiyel denklemlerin kararlılık analizi yapılmıştır. İlk olarak denge noktalarının lokal kararlılığı incelenmiştir. Daha sonra lineer olmayan denklemler için Lyapunov yöntemi uygulanarak Mittag-Leffler kararlılık gösterilmiştir.

Beşinci bölüm, bu çalışmada elde edilen orijinal sonuçları içermektedir. Bu bölümde Hadamard türevi içeren kesirli diferensiyel denklemler için global çekicilik ele alınmıştır. Lyapunov yöntemi yardımıyla denklemin $y^* = 0$ denge noktasının global çekici olması için yeter koşullar elde edilmiştir.

Son bölümde ise elde edilen sonuçlar özetlenmiştir.

Ocak 2018, 90 sayfa

Anahtar Kelimeler: Kesirli integral operatörü, Kesirli türev operatörü, Kesirli diferensiyel denklem, Lokal kararlılık, Lyapunov yöntemi, Mittag-Leffler kararlılık, Global çekicilik, Hadamard kesirli türevi.

ABSTRACT

Master Thesis

STABILITY ANALYSIS OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Ashı Beste ÖZAYDIN

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Fatma KARAKOÇ

This thesis consists of six chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, fractional integral and derivative operators are introduced, related properties are given, some specific functions are expressed and the relationship with fractional integral and derivative operators of these functions are referred. Moreover, Laplace transformations of fractional integral and derivative operators are investigated.

In the third chapter, the existence and uniqueness theorems are expressed for fractional differential equations involving Riemann-Liouville and Caputo fractional derivative.

In the fourth chapter, stability analysis of fractional differential equations are performed. Firstly, local stability of equilibrium points are investigated. Later, by applying Lyapunov method, Mittag-Leffler stability is shown for nonlinear equations.

The fifth chapter includes the original results of this study. In this chapter, global attractivity is given for fractional differential equations involving Hadamard derivative. Sufficient conditions are obtained for the global attractivity of the equilibrium point $y^* = 0$ via Lyapunov method.

Finally in the last chapter, the results are summarized.

January 2018, 90 pages

Key Words: Fractional integral operator, Fractional derivative operator, Fractional differential equation, Local stability, Lyapunov method, Mittag-Leffler stability, Global attractivity, Hadamard fractional derivative.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca değerli fikirleri ile beni yönlendiren, yardımlarını ve önerilerini eksik etmeyen saygı değer danışman hocam, Sayın Doç. Dr. Fatma KARAKOÇ'a saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, çalışmalarım boyunca desteğini esirgemeyen ve bana her zaman moral kaynağı olan sevgili aileme sonsuz teşekkür ederim.

Aslı Beste ÖZAYDIN

Ankara, Ocak 2018

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	
ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. ÖN BİLGİLER VE TEOREMLER	3
2.1 Temel Kavramlar	3
2.2 Gamma ve Beta Fonksiyonları	5
2.3 Kesirli İntegral ve Türev Operatörleri.....	6
2.4 Mittag-Leffler Fonksiyonları	17
2.5 Laplace Dönüşümleri	24
3. ÇÖZÜMLERİN VARLIK VE TEKLİĞİ	30
4. KARARLILIK ANALİZİ	40
4.1 Giriş.....	40
4.2 Denge Noktaları ve Kararlılık	41
4.3 Lyapunov Yöntemi ve Mittag-Leffler Kararlılık	55
5. GLOBAL ÇEKİCİLİK	74
6. TARTIŞMA VE SONUÇ	86
KAYNAKLAR.....	87
ÖZGEÇMİŞ	90

SİMGELER DİZİNİ

$B(z, w)$	Beta fonksiyonu
$E_\alpha(z)$	Bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar
$\Gamma(z)$	Gamma fonksiyonu
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar
$o(f(x))$	Küçük o notasyonu
$\mathcal{L}\{f(x)\}$	Laplace dönüşümü
$\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$	Pozitif reel sayılar
$\mathbb{R}$	Reel sayılar
I^α	Riemann-Liouville kesirli integral operatörü
$[\cdot]$	Tam değeri fonksiyonu
$\Re(z)$	z kompleks sayısının reel kısmı
Z_0^-	$Z_0^- = \{0, -1, -2, \dots\}$
D^α	α . basamaktan Riemann-Liouville kesirli türevi
${}^CD^\alpha$	α . basamaktan Caputo kesirli türevi

1. GİRİŞ

Kesirli basamaktan türevin ya da daha genel olarak keyfi reel ya da kompleks sayı basamaktan türevin göz önüne alınması on yedinci yüzyılda Marquis de L'Hospital'in Wilhelm Leibnitz'e yazdığı " $\frac{d^n x}{dx^n}$ türevinde $n = \frac{1}{2}$ olmasının anlamı nedir?" sorusuyla başlamıştır. Ancak kesirli integral ya da türev hesabının temel özellikleri on sekizinci ve on dokuzuncu yüzyılda yapılan az sayıda çalışmada ele alınmıştır. Kesirli integral ve türev hesabının özelliklerinin incelendiği ilk kitap Oldham ve Spanier tarafından 1974 yılında yayımlanmıştır. Son 25 yıldır ise kesirli diferansiyel denklemlerin gerek teorisinin gerekse çözüm yöntemlerinin sistematik olarak ele alındığı önemli kitaplar basılmıştır (Miller ve Ross 1993, Samko vd. 1993, Podlubny 1999, Kilbas vd. 2006, Lakshmikantham vd. 2009, Diethelm 2010).

Laplace dönüşümleri ve Mittag-Leffler fonksiyonları, kesirli basamaktan diferansiyel denklemlerin çözümlerinin elde edilmesi ve ifade edilmesinde kullanılan en önemli araçlardır. Bu yüzden tezin ikinci bölümünde kesirli integral ve türev operatörlerinin özelliklerinin yanı sıra Laplace dönüşümleri ve Mittag-Leffler fonksiyonlarının özelliklerine de yer verilmiştir.

Diğer taraftan iyi bilinmektedir ki diferansiyel denklemlerde çözümlerin kararlılık analizinin yapılması temel problemlerden biridir. Tamsayı basamaktan diferansiyel denklemlere benzer olarak kesirli basamaktan diferansiyel denklemlerin lokal kararlılık analizinde de lineerleştirme metodu yoğun bir şekilde uygulanmaktadır (Ahmed ve Elgazzar 2007, Ahmed vd. 2007, Ozalp ve Demirci 2011, El-Saka ve Ahmed 2016, Ghaziani vd. 2016). Tamsayı basamaktan diferansiyel denklemlerden farklı olarak ise lineer olmayan diferansiyel denklemler için Mittag-Leffler kararlılık tanımlanmıştır. Mittag-Leffler kararlılık incelemesi de Lyapunov yöntemi yardımıyla yapılmaktadır (Li vd. 2009, Li vd. 2010, Zhang vd. 2011, Aguila-Camacho vd. 2014, Duarte-Mermoud vd. 2015).

Son otuz yılda dinamik sistemlerde kontrol teori, mekanik, optik, elektrik, viskoelastisite gibi gerçek hayat problemlerinde tamsayı basamaktan türev yerine kesirli basamaktan türev içeren modellerin kullanılmasının daha uygun olduğunun vurgulanmasıyla kesirli diferensiyel denklemler ve kesirli basamaktan integral denklemler incelenmeye başlanmıştır (Sabatier vd. 2006, Zamani vd. 2009, Gabono ve Poinot 2011).

Kesirli basamaktan ya da daha genel olarak keyfi basamaktan türeve ilişkin pek çok tanım olmasına rağmen Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türevlerinin incelenmesi yoğun olarak devam etmektedir. Riemann-Liouville kesirli integralinden farklı olarak verilen tanımlardan bir tanesi

$$(J_{a+}^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt, \quad x > a, \quad \alpha > 0,$$

integrali ile tanımlanan α . basamaktan Hadamard kesirli integralidir (Hadamard 1892). Benzer olarak α . basamaktan Hadamard kesirli türevi de

$$(D_{a+}^{\alpha}f)(x) = \left(x \frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt, \quad x > a, \quad \alpha \geq 0$$

şeklinde tanımlıdır (Samko vd. 1993). Hadamard kesirli türevi içeren lineer olmayan diferensiyel denklemlerin çözümlerinin varlık ve tekliği Kilbas vd. tarafından incelenmiştir (Kilbas vd. 2003).

Bu tezin beşinci bölümünde Hadamard kesirli türevi içeren lineer olmayan bir diferensiyel denklem sınıfı ele alınmıştır ve denge noktasının global çekici olması için yeter koşullar elde edilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER VE TEOREMLER

Bu bölümde bazı özel fonksiyonların tanımı ve bunlarla ilgili teoremler ile kararlılık analizinde ve çözümlerin varlık-teklığında kullanılacak olan fonksiyon uzayları verilecek ve ardından da kesirli integral ve türev operatörleri tanıtılacaktır.

2.1 Temel Kavramlar

Bu kesimde mutlak sürekli fonksiyon uzaylarını ve Lebesgue anlamında kompleks değerli ölçülebilir fonksiyon uzaylarını tanımlayacağız.

$\Omega = [a, b]$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, reel eksenin sonlu ya da sonsuz aralığı olsun.

$1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere $L_p(a, b)$ uzayı Ω üzerinde

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1 \leq p < \infty) \text{ ve } \|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{a \leq x \leq b} |f(x)| \quad (2.1)$$

normuna sahip kompleks değerli ölçülebilir f fonksiyonlarının uzayıdır. Burada

$\|f\|_p < \infty$ ve $\operatorname{ess\,sup} |f(x)|$, $|f(x)|$ fonksiyonunun maksimum değeridir (Kilbas vd. 2006).

$[a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$, sonlu aralık olsun. $AC[a, b]$ ile $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli olan f fonksiyonlarının uzayı gösterilecektir. Bu uzay $\varphi(t) \in L(a, b)$ olmak üzere

$$f(x) = c + \int_a^x \varphi(t) dt, \quad (2.2)$$

Lebesgue anlamında toplanabilir fonksiyonların uzayına denktir. Burada

$$\varphi(t) = f'(t) \text{ ve } c = f(a)$$

dır (Kilbas vd. 2006).

$n \in \mathbb{N}$ için ve $f^{(n-1)}(x) \in AC[a, b]$ olmak üzere, $AC^n[a, b]$, $[a, b]$ aralığında tanımlı ve $(n-1)$. basamaktan sürekli türe ve sahip $f(x)$ kompleks değerli fonksiyonlarının uzayını gösterir ve aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$AC^n[a, b] = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \text{ ve } (D^{n-1}f)(x) \in AC[a, b], \quad D = \frac{d}{dx} \right\} \quad (2.3)$$

Özel olarak $AC^1[a, b] = AC[a, b]$ dir (Kilbas vd. 2006).

Lemma 2.1 (Kilbas vd. 2006) $AC^n[a, b]$ uzayı

$$f(x) = (I_{a+}^n \varphi)(x) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k$$

formundaki $f(x)$ fonksiyonlarından oluşur.

Burada $\varphi(t) \in L(a, b)$, c_k ($k = 0, 1, \dots, n-1$) keyfi sabitlerdir ve

$$(I_{a+}^n \varphi)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} \varphi(t) dt$$

şeklindedir. Ayrıca

$$\varphi(t) = f^{(n)}(t), \quad c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

dir.

Teorem 2.1 (Kilbas vd. 2006) (U, d) boş olmayan tam metrik uzay ve $0 \leq w < 1$ olmak üzere $T : U \rightarrow U$ bir daralma dönüşümü olsun, yani her $u, v \in U$ için,

$$d(Tu, Tv) \leq wd(u, v)$$

sağlansın. Bu durumda, T operatörü bir tek $u^* \in U$ sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, T^k , $k \in \mathbb{N}$,

$$T^1 = T \text{ ve } T^k = TT^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

şeklinde tanımlı operatör dizisi ise, bu durumda her $u_0 \in U$ için, $\{T^k u_0\}_{k=1}^{\infty}$ serisi u^* sabit noktaya yakınsar.

Teorem 2.2 $a_1, a_2, \dots, a_n$ reel katsayılar ve

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots a_{n-1}\lambda + a_n$$

olmak üzere H_n Hurwitz matrisi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$H_1 = (a_1), \quad H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}, \dots,$$

$$H_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

burada, eğer $j > n$ ise $a_j = 0$ dır. $P(\lambda)$ polinom denkleminin köklerinin tümünün reel kısımlarının negatif olması için gerek ve yeter koşul Hurwitz matrisinin bütün determinantlarının pozitif olmasıdır, yani

$$\det H_j > 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

olmasıdır.

Tanım 2.1 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere eğer her $x, y \in I$ için,

$$|f(x) - f(y)| \leq M |x - y|^\alpha$$

olacak şekilde bir $M > 0$ bulunabiliyorsa, bu durumda f fonksiyonuna Hölder süreklidir denir, burada $0 < \alpha \leq 1$ dir.

2.2 Gamma ve Beta Fonksiyonları

Bu kesimde kesirli integral ve türevin incelenmesinde yardımcı olacak Gamma ve Beta fonksiyonları ifade edilecektir.

Tanım 2.2 $\Re(z) > 0$ olmak üzere

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Gamma fonksiyonu denir.

Tanım 2.3 $\Re(z) > 0, \Re(w) > 0$ olmak üzere

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Beta fonksiyonu denir.

Lemma 2.2 $z, w \notin Z_0^-$ olmak üzere

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \quad (2.6)$$

dir.

2.3 Kesirli İntegral ve Türev Operatörleri

Bu kesimde kesirli integral ve kesirli türev operatörleri tanıtılıp bazı özellikleri incelenecektir.

Tanım 2.4 (Kilbas vd. 2006) $\Omega = [a, b]$ ($-\infty < a < b < \infty$) reel ekseninde bir sonlu aralık olsun. $\alpha \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$x > a \text{ için, } (I_{a+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (2.7)$$

ve

$$x < b \text{ için, } (I_{b-}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{1-\alpha}} \quad (2.8)$$

ile tanımlı $I_{a+}^\alpha f$ ve $I_{b-}^\alpha f$ operatörlerine sırasıyla α . basamaktan sol taraflı ve sağ taraflı Riemann-Liouville kesirli integralleri denir. Burada Γ , (2.4) ile tanımlanan Gamma fonksiyonudur.

$\alpha = n \in \mathbb{N}$ olduğunda (2.7) ve (2.8) integralleri

$$\begin{aligned}(I_{a+}^n f)(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \\ &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \dots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(I_{b-}^n f)(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b (t-x)^{n-1} f(t) dt \\ &= \int_x^b dt_1 \int_{t_1}^b dt_2 \dots \int_{t_{n-1}}^b f(t_n) dt_n\end{aligned}$$

integrallerine eşdeğerdir.

Özel olarak, $(I_{a+}^0 f)(x) = f(x)$ kabul edilmektedir.

Tanım 2.5 (Kilbas vd. 2006) $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0$ ve $n = [\alpha] + 1$ olmak üzere, $x > a$ için

$$\begin{aligned}(D_{a+}^\alpha f)(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{a+}^{n-\alpha} f)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\end{aligned} \quad (2.9)$$

ve $x < b$ için,

$$\begin{aligned}(D_{b-}^\alpha f)(x) &= \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I_{b-}^{n-\alpha} f)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{f(t) dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}\end{aligned} \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlı $D_{a+}^\alpha f$ ve $D_{b-}^\alpha f$ operatörlerine α . basamaktan Riemann-Liouville kesirli türevi denir.

Özel olarak $\alpha = n \in \mathbb{N}$ ise, bu durumda

$$\begin{aligned}(D_{a+}^0 f)(x) &= (D_{b-}^0 f)(x) = f(x), \\ (D_{a+}^n f)(x) &= f^{(n)}(x) \text{ ve } (D_{b-}^n f)(x) = (-1)^n f^{(n)}(x)\end{aligned} \quad (2.11)$$

elde edilir. Ayrıca $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $0 < \alpha < 1$ ise, bu durumda (2.9) ve (2.10) sırasıyla,

$$\begin{aligned}(D_{a+}^{\alpha}f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}, \quad x > a, \\ (D_{b-}^{\alpha}f)(x) &= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{\alpha}}, \quad x < b.\end{aligned}$$

kesirli türevlerine indirgenir.

Uyarı 2.1 Sabit fonksiyonun Riemann-Liouville kesirli türevi sıfır değildir. Gerçekten, (2.9) da $f(x) = 1$ alınırsa

$$(D_{a+}^{\alpha}1)(x) = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \quad (2.12)$$

elde edilir.

Aşağıdaki lemmada kuvvet fonksiyonlarının kesirli integral ve türevi hesaplanmıştır.

Lemma 2.3 (Kilbas vd. 2006) $\beta \in \mathbb{R}^+$ olsun. Bu durumda

$$\alpha > 0 \text{ iken } (I_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\beta+\alpha-1}, \quad (2.13)$$

ve

$$\alpha \geq 0 \text{ iken } (D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1} \quad (2.14)$$

sağlanır.

İspat. İlk olarak (2.13) eşitliğini ispatlayalım. (2.7) kesirli integral tanımından

$$(I_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1})(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (t-a)^{\beta-1}(x-t)^{\alpha-1} dt$$

dir. $t = a + s(x-a)$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$(I_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1})(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 s^{\beta-1}(1-s)^{\alpha-1} ds \quad (2.15)$$

elde edilir. (2.15) de Beta fonksiyonunun (2.5) ve (2.6) ile verilen özellikleri göz önüne alınırsa (2.13) eşitliği elde edilir.

(2.14) eşitliğinin ispatı için, (2.9) Riemann-Liouville kesirli türev tanımı ve (2.13) eşitliği göz önüne alınırsa

$$(D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{n+\beta-\alpha-1} \quad (2.16)$$

elde edilir. (2.16) nın n kez türevi alınıp düzenlenirse istenilen sonuç bulunur. ■

Uyarı 2.2 (2.14) de $\beta = 1$ alındığında da (2.12) eşitliğinin sağlandığı görülür.

Uyarı 2.3 $j = 1, 2, \dots, [\alpha] + 1$ ise

$$(D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\alpha-j})(x) = 0 \quad (2.17)$$

dır.

Aşağıdaki lemmada (2.3) ile tanımlanan $AC^n[a, b]$ uzayındaki fonksiyonların D_{a+}^{α} kesirli türevi ifade edilmiştir.

Lemma 2.4 (Kilbas vd. 2006) $\alpha \geq 0$ ve $n = [\alpha] + 1$ olsun. Eğer $y(x) \in AC^n[a, b]$ ise bu durumda

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (x-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{y^{(n)}(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}$$

dir.

İspat. $y(x) \in AC^n[a, b]$ olduğundan Lemma 2.1 den

$$y(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} y^{(n)}(t) dt + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad (2.18)$$

yazılabilir. (2.18) eşitliğine (2.9) ile tanımlı D_{a+}^{α} kesirli türev operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} (D_{a+}^{\alpha}y)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{1}{\Gamma(n)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \int_a^t (t-u)^{n-1} y^{(n)}(u) (x-t)^{n-\alpha-1} du dt \\ &+ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k (x-t)^{n-\alpha-1} dt \end{aligned} \quad (2.19)$$

elde edilir.

$$A_1(x) =: \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{1}{\Gamma(n)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \int_a^t (t-u)^{n-1} y^{(n)}(u) (x-t)^{n-\alpha-1} du dt$$

ve

$$A_2(x) =: \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k (x-t)^{n-\alpha-1} dt$$

olsun. $A_1(x)$ integralinde integrasyon sırası değiştirilirse

$$A_1(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{1}{\Gamma(n)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \int_u^x (x-t)^{n-\alpha-1} (t-u)^{n-1} y^{(n)}(u) dt du$$

bulunur. $t = u + s(x-u)$ değişken değiştirmesi yapıp Beta fonksiyonunun (2.5) ve (2.6) özellikleri dikkate alınırsa

$$A_1(x) = \frac{1}{\Gamma(2n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x-u)^{2n-\alpha-1} y^{(n)}(u) du \quad (2.20)$$

elde edilir. (2.20) de n kez türev alınıp düzenlenirse

$$A_1(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} y^{(n)}(t) dt \quad (2.21)$$

bulunur.

$A_2(x)$ integralinin hesabı için $t = a + s(x-a)$ değişken değiştirmesi yapıp, terim terime integral hesaplanırsa

$$A_2(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^{k+n-\alpha} s^k (1-s)^{n-\alpha-1} ds$$

elde edilir. Bu eşitlikte (2.5) ve (2.6) özellikleri göz önüne alınıp düzenlenirse

$$A_2(x) = \left(\frac{d}{dx} \right)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{\Gamma(n-\alpha+k+1)} (x-a)^{k+n-\alpha} \quad (2.22)$$

bulunur. (2.22) de n kez türev alınıp gerekli işlemler yapılsa

$$A_2(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (x-a)^{k-\alpha} \quad (2.23)$$

elde edilir. (2.21) ve (2.23), (2.19) da yerine yazıldığında istenilen elde edilir. ■

Aşağıda verilen lemmada I_{a+}^α kesirli integral operatörünün yarı grup özelliği gösterilmiştir.

Lemma 2.5 (Kilbas vd. 2006) Eğer $\alpha > 0$, $\beta > 0$ ve $f(x) \in L_p(a, b)$ ($1 \leq p \leq \infty$) ise, bu durumda

$$(I_{a+}^\alpha I_{a+}^\beta f)(x) = (I_{a+}^{\alpha+\beta} f)(x) \quad (2.24)$$

sağlanır.

İspat. (2.7) kesirli integral tanımından

$$(I_{a+}^\alpha I_{a+}^\beta f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_a^t (t-\tau)^{\beta-1} (x-t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau dt$$

yazılır. Bu eşitlikte integrasyon sırası değiştirilse

$$(I_{a+}^\alpha I_{a+}^\beta f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_\tau^x (t-\tau)^{\beta-1} (x-t)^{\alpha-1} f(\tau) dt d\tau$$

elde edilir. İntegralin hesabı için $t = \tau + s(x - \tau)$ değişken değiştirmesi yapılp (2.5) ve (2.6) eşitlikleri göz önünde bulundurulursa, istenilen sonuç elde edilir. ■

Aşağıdaki lemma kesirli türev operatörünün, kesirli integralin soldan tersi olduğunu göstermektedir.

Lemma 2.6 (Kilbas vd. 2006) Eğer $\alpha > 0$ ve $f(x) \in L_p(a, b)$ ($1 \leq p \leq \infty$) ise, bu durumda

$$(D_{a+}^\alpha I_{a+}^\alpha f)(x) = f(x) \quad (2.25)$$

sağlanır.

İspat. (2.7) ve (2.9) kesirli integral ve türev tanımından

$$(D_{a+}^\alpha I_{a+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \int_a^t (x-t)^{n-\alpha-1} (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau dt$$

yazılır. Bu eşitlikte integrasyon sırası değiştirilirse

$$(D_{a+}^\alpha I_{a+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \int_\tau^x (x-t)^{n-\alpha-1} (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) dt d\tau$$

elde edilir. İntegralin hesabı için $t = \tau + s(x - \tau)$ değışken değıştirmesi yapılp (2.5) ve (2.6) eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$(D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \quad (2.26)$$

bulunur. (2.26) eşitliğinde n kez türev alınıp düzenlenirse istenilen elde edilir. ■

Aşağıdaki lemmalarda kesirli türev ve integral operatörleri için birleşme özelliği verilmiştir.

Lemma 2.7 (Kilbas vd. 2006) Eğer $\alpha > \beta > 0$ ise, bu durumda $f(x) \in L_p(a, b)$, $1 \leq p \leq \infty$, için

$$(D_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} f)(x) = (I_{a+}^{\alpha-\beta} f)(x) \quad (2.27)$$

sağlanır.

İspat. (2.7) ve (2.9) Riemann-Liouville kesirli integral ve türev tanımından

$$(D_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \beta)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \int_a^t (x - t)^{n-\beta-1} (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau dt$$

yazılır. Bu eşitlikte integrasyon sırası değıştirilirse

$$(D_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \beta)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \int_{\tau}^x (x - t)^{n-\beta-1} (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) dt d\tau$$

elde edilir. İçerideki integral için $t = \tau + s(x - \tau)$ değışken değıştirmesi yapılp (2.5) ve (2.6) eşitlikleri dikkate alınırsa

$$(D_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n + \alpha - \beta)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x - \tau)^{n+\alpha-\beta-1} f(\tau) d\tau \quad (2.28)$$

bulunur. (2.28) eşitliğinde n kez türev alınıp gerekli işlemler yapılırsa ispat tamamlanır. ■

Lemma 2.8 (Kilbas vd. 2006) $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$ ve $f_{n-\alpha}(x) = (I_{a+}^{n-\alpha} f)(x)$, (2.7) ile tanımlı $(n - \alpha)$. basamaktan kesirli integral olsun. Bu durumda, $f(x) \in L_1(a, b)$

ve $f_{n-\alpha}(x) \in AC^n[a, b]$ ise

$$(I_{a+}^\alpha D_{a+}^\alpha f)(x) = f(x) - \sum_{j=1}^n \frac{f_{n-\alpha}^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x - a)^{\alpha-j} \quad (2.29)$$

sağlanır.

Özel olarak $0 < \alpha < 1$ alınır, bu durumda $f_{1-\alpha}(x) = (I_{a+}^{1-\alpha} f)(x)$ olmak üzere

$$(I_{a+}^\alpha D_{a+}^\alpha f)(x) = f(x) - \frac{f_{1-\alpha}(a)}{\Gamma(\alpha)} (x - a)^{\alpha-1} \quad (2.30)$$

dir.

İspat. $g(x) = f_{n-\alpha}(x) = (I_{a+}^{n-\alpha} f)(x)$ alalım. Lemma 2.6 dan $(D_{a+}^{n-\alpha} g)(x) = f(x)$ yazılır. $g(x) = f_{n-\alpha}(x) \in AC^n[a, b]$ olduğundan Lemma 2.4 kullanılırsa

$$(D_{a+}^\alpha g)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (x-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{g^{(n)}(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}$$

bulunur. Bu eşitlikte α yerine $n - \alpha$ yazılırsa

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-n+\alpha)} (x-a)^{k-n+\alpha} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{g^{(n)}(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

elde edilir. Toplam terimi için $k = n - j$ alınır

$$f(x) = \sum_{j=1}^n \frac{g^{(n-j)}(a)}{\Gamma(1+\alpha-j)} (x-a)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{g^{(n)}(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

bulunur. Son olarak $g(x) = (I_{a+}^{n-\alpha} f)(x)$ yazılıp düzenlenirse istenilen elde edilir. ■

Uyarı 2.4 Lemma 2.8 de $\alpha = n \in \mathbb{N}$ ise, bu durumda

$$(I_{a+}^n D_{a+}^n f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

sağlanır.

Buraya kadar verdiğimiz özellikler Riemann-Liouville kesirli integral ve türev operatörleri ile ilgiliydi. Aşağıda Caputo kesirli türevi tanımlanıp özellikleri incelenecektir.

Tanım 2.6 (Kilbas vd. 2006) $[a, b]$, reel ekseninde sonlu bir aralık olsun.

$D_{a+}^{\alpha} [y(t)](x) = (D_{a+}^{\alpha} y)(x)$ ve $D_{b-}^{\alpha} [y(t)](x) = (D_{b-}^{\alpha} y)(x)$ sırasıyla, (2.9) ve (2.10) ile tanımlı α . basamaktan Riemann-Liouville kesirli türevi gösterebiliriz. $\alpha \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, $[a, b]$ de α . basamaktan sol taraflı ve sağ taraflı Caputo kesirli türevleri sırasıyla

$$({}^C D_{a+}^{\alpha} y)(x) = \left(D_{a+}^{\alpha} \left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] \right) (x) \quad (2.31)$$

ve

$$({}^C D_{b-}^{\alpha} y)(x) = \left(D_{b-}^{\alpha} \left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(b)}{k!} (b-t)^k \right] \right) (x) \quad (2.32)$$

şeklinde tanımlıdır, burada

$$\alpha \notin \mathbb{N}_0 \text{ için } n = [\alpha] + 1; \alpha \in \mathbb{N}_0 \text{ için } n = \alpha \quad (2.33)$$

dır.

Özel olarak $0 < \alpha < 1$ olduğunda (2.31) ve (2.32) Caputo türevleri sırasıyla

$$\begin{aligned} ({}^C D_{a+}^{\alpha} y)(x) &= (D_{a+}^{\alpha} [y(t) - y(a)])(x), \\ ({}^C D_{b-}^{\alpha} y)(x) &= (D_{b-}^{\alpha} [y(t) - y(b)])(x) \end{aligned}$$

biçimindedir.

Eğer $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ ise, bu durumda (2.31) ve (2.32) Caputo türevleri, (2.9) ve (2.10) ile tanımlı Riemann-Liouville kesirli türevi kullanılarak

$$({}^C D_{a+}^{\alpha} y)(x) = (D_{a+}^{\alpha} y)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (x-a)^{k-\alpha}, \quad n = [\alpha] + 1,$$

ve

$$({}^C D_{b-}^{\alpha} y)(x) = (D_{b-}^{\alpha} y)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(b)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (b-x)^{k-\alpha}, \quad n = [\alpha] + 1,$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliklerde $0 < \alpha < 1$ ise, bu durumda

$$\begin{aligned} ({}^C D_{a+}^{\alpha} y)(x) &= (D_{a+}^{\alpha} y)(x) - \frac{y(a)}{\Gamma(1 - \alpha)} (x-a)^{-\alpha}, \\ ({}^C D_{b-}^{\alpha} y)(x) &= (D_{b-}^{\alpha} y)(x) - \frac{y(b)}{\Gamma(1 - \alpha)} (b-x)^{-\alpha} \end{aligned}$$

elde edilir.

$\alpha \notin \mathbb{N}_0$ ise, aşağıdaki durumlarda (2.31) ve (2.32) Caputo türevleri, (2.9) ve (2.10) Riemann-Liouville kesirli türevleri ile örtüşür:

$$\begin{aligned} y(a) &= y'(a) = \dots = y^{(n-1)}(a) = 0 \text{ ise, } ({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = (D_{a+}^\alpha y)(x), \\ y(b) &= y'(b) = \dots = y^{(n-1)}(b) = 0 \text{ ise, } ({}^C D_{b-}^\alpha y)(x) = (D_{b-}^\alpha y)(x). \end{aligned}$$

Burada özel olarak $0 < \alpha < 1$ ise

$$\begin{aligned} y(a) &= 0 \text{ durumunda } ({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = (D_{a+}^\alpha y)(x), \\ y(b) &= 0 \text{ durumunda } ({}^C D_{b-}^\alpha y)(x) = (D_{b-}^\alpha y)(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

Eğer $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ ve n . basamaktan $y^{(n)}(x)$ adi türevi mevcutsa, bu durumda

$$({}^C D_{a+}^n y)(x) = y^{(n)}(x) \text{ ve } ({}^C D_{b-}^n y)(x) = (-1)^n y^{(n)}(x) \quad (2.34)$$

olur.

Caputo kesirli türevi, Riemann-Liouville kesirli türevinin var olduğu durumdaki $y(x)$ fonksiyonları için tanımlıdır. O halde mutlak sürekli fonksiyonların uzayı olan $AC^n[a, b]$ uzayındaki $y(x)$ fonksiyonları için de tanımlı olur. Bununla ilgili olarak aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.3 (Kilbas vd. 2006) $\alpha \geq 0$ olsun ve n için (2.33) sağlansın. Ayrıca $y(x) \in AC^n[a, b]$ olsun.

(a) Eğer $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ ise, bu durumda $({}^C D_{a+}^\alpha y)(x)$ Caputo türevi

$$({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x \frac{y^{(n)}(t) dt}{(x - t)^{\alpha - n + 1}} =: (I_{a+}^{n-\alpha} D^n y)(x) \quad (2.35)$$

şeklinde ifade edilebilir, burada $D = \frac{d}{dx}$ dir.

Özel olarak $0 < \alpha < 1$ ve $y(x) \in AC[a, b]$ ise, bu durumda

$$({}^C D_{a+}^{\alpha} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{y'(t) dt}{(x-t)^{\alpha}} =: (I_{a+}^{1-\alpha} Dy)(x) \quad (2.36)$$

dir.

(b) Eğer $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ ise, bu durumda $({}^C D_{a+}^{\alpha} y)(x)$ türevi (2.34) ile ifade edilir.

Özel olarak

$$({}^C D_{a+}^0 y)(x) = y(x)$$

dir.

İspat. $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ olsun. (2.31) ve (2.9) dan

$$({}^C D_{a+}^{\alpha} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] (x-t)^{n-\alpha-1} dt$$

elde edilir. Bu eşitlikte kısmi integrasyon yöntemi uygulanıp aynı yöntem devam ettirilirse

$$\begin{aligned} ({}^C D_{a+}^{\alpha} y)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \left\{ -\frac{(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] \right\} \Bigg|_{t=a}^x \\ &\quad + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \left[y'(t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{(k-1)!} (t-a)^{k-1} \right] dt \Bigg\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \frac{(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha} (y'(t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{(k-1)!} (t-a)^{k-1}) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^{n-1} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} (y'(t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{(k-1)!} (t-a)^{k-1}) dt \\ &= \dots = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} (y^{(n-1)}(t) - y^{(n-1)}(a)) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha} y^{(n)}(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} y^{(n)}(t) dt \end{aligned}$$

elde edilir.

$\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ ise, bu durumda (2.31) ve (2.11) den (2.34) ün ilk eşitliği elde edilir. ■

Aşağıda verilecek özellikler Riemann-Liouville türeviyle benzerlik gösterir. $(x-a)^{\beta-1}$ kuvvet fonksiyonunun Caputo kesirli türevi yine kuvvet fonksiyonu biçimindedir. Ancak bir yönüyle Riemann-Liouville türevinden ayrılır. Riemann-Liouville türevinde sabitin türevi sıfır değilken, Caputo türevinde sabitin türevi sıfırdır.

Lemma 2.9 $\alpha > 0, \beta > 0$ olsun ve n için (2.33) sağlansın. Bu durumda

$$({}^C D_{a+}^{\alpha} (t-a)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1}, \quad \beta > n,$$

sağlanır. Özel olarak

$$({}^C D_{a+}^{\alpha} 1)(x) = 0 \tag{2.37}$$

dır.

İspat. (2.31) Caputo türev tanımında $y(x) = (x-a)^{\beta-1}$ alınır

$$({}^C D_{a+}^{\alpha} (t-a)^{\beta-1})(x) = (D_{a+}^{\alpha} (t-a)^{\beta-1})(x) \tag{2.38}$$

elde edilir. (2.38) eşitliğinde (2.14) kullanılırsa istenilen sonuç elde edilir.

$y(x) = 1$ fonksiyonunun Caputo türevi için de yine (2.31) Caputo türev tanımı kullanılırsa

$$({}^C D_{a+}^{\alpha} 1)(x) = (D_{a+}^{\alpha} 1)(x) - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha}$$

bulunur. Son olarak (2.12) eşitliği kullanılırsa istenilen sonuç elde edilir. ■

2.4 Mittag-Leffler Fonksiyonları

Tamsayı basamaktan sistemlerin çözümlerinde çoğunlukla üstel fonksiyonlar karşımıza çıkar. Benzer olarak kesirli sistemlerin çözümlerinde üstel fonksiyonların yerini

Mittag-Leffler fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyon ilk olarak Mittag-Leffler (1903) tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra Wiman (1905) tarafından da incelenmiştir. Ancak bu fonksiyonların temel özellikleri ilk ele alınmasından elli yıl kadar sonra incelenmeye başlanmıştır.

Tanım 2.7 $\alpha \in \mathbb{C}$, $\Re(\alpha) > 0$, $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (2.39)$$

şeklinde tanımlanan E_α fonksiyonuna bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu denir (Mittag-Leffler 1903).

$\alpha = 1$ için Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = e^z$$

üstel fonksiyonuna indirgenir.

Tanım 2.8 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\Re(\alpha) > 0$, $\Re(\beta) > 0$, $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (2.40)$$

şeklinde tanımlı olan $E_{\alpha,\beta}$ fonksiyonuna iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu denir (Wiman 1905).

Özel olarak

$$E_\alpha(z) = E_{\alpha,1}(z)$$

dir.

Teorem 2.4 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ olsun. (2.40) ile tanımlı $E_{\alpha,\beta}(z)$ kuvvet serisi her $z \in \mathbb{R}$ için yakınsaktır.

İspat. Tanım 2.8 den iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu kuvvet serisi gösterimine sahiptir.

$$a_j = \frac{1}{\Gamma(\alpha j + \beta)}$$

olmak üzere

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$$

ifadesi (2.40) ile tanımlı iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonudur.

$$(a_j)^{\frac{1}{j}} = \left(\frac{e}{\alpha j + \beta - 1} \right)^{\alpha + \frac{\beta-1}{j}} (2\pi(\alpha j + \beta - 1))^{-\frac{1}{2j}} \left(\frac{1}{1 + o(1)} \right)^{\frac{1}{j}}$$

olup $|z| \rightarrow \infty$ için

$$\Gamma(z+1) = \left(\frac{z}{e} \right)^z \sqrt{2\pi z} (1 + o(1))$$

Stirling formülü kullanılırsa, $j \rightarrow \infty$ için

$$(a_j)^{\frac{1}{j}} \rightarrow 0$$

elde edilir. O halde kök testinden seri her z için yakınsaktır. ■

Örnek 2.1 $z \in \mathbb{R}$ olmak üzere α ve β parametrelerinin bazı özel seçimleri için iyi bilinen aşağıdaki fonksiyonlar elde edilir:

i)

$$E_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1,$$

ii)

$$\begin{aligned} E_2(z^2) &= E_{2,1}(z^2) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} \\ &= \cosh z, \quad z \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} E_2(-z^2) &= E_{2,1}(-z^2) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2)^k}{\Gamma(2k+1)} \\ &= \cos z, \quad z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Aşağıdaki teoremlerde Mittag-Leffler fonksiyonlarının kesirli integral ve türevi verilmiştir.

Teorem 2.5 (Haubold vd. 2009) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

$$(I_{0+}^{\alpha} [t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha})])(x) = x^{\alpha+\beta-1} E_{\alpha,\alpha+\beta}(ax^{\alpha})$$

eşitliği sağlanır, burada I_{0+}^{α} , (2.7) ile tanımlı Riemann-Liouville kesirli integral operatörüdür.

İspat. (2.40) tanımından

$$t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^{\alpha k + \beta - 1}}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

dır. Bu eşitliğin her iki yanına (2.7) ile tanımlı Riemann-Liouville integral operatörü uygulayıp Mittag-Leffler fonksiyonlarının yakınsaklığı göz önüne alınırsa

$$(I_{0+}^{\alpha} [t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha})])(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{\alpha k + \beta - 1} dt$$

elde edilir. İntegralin hesabı için $t = sx$ değişken değiştirmesi yapıp (2.5) ve (2.6) eşitlikleri de dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} & (I_{0+}^{\alpha} [t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha})])(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} x^{\alpha k + \beta + \alpha - 1} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\alpha k + \beta - 1} ds \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k x^{\alpha k + \beta + \alpha - 1}}{\Gamma(\alpha k + \alpha + \beta)} \\ &= x^{\alpha+\beta-1} E_{\alpha,\alpha+\beta}(ax^{\alpha}) \end{aligned}$$

olup istenilen sonuç elde edilir. ■

Teorem 2.5 de $\beta = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.1 $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

$$(I_{0+}^\alpha [E_\alpha(at^\alpha)])(x) = x^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(ax^\alpha)$$

dır.

Teorem 2.6 (Haubold vd. 2009) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$, $\beta > \alpha$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

$$(D_{0+}^\alpha [t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)])(x) = x^{\beta-\alpha-1} E_{\alpha,\beta-\alpha}(ax^\alpha)$$

dır, burada D_{0+}^α , (2.9) ile tanımlı Riemann-Liouville kesirli türev operatörüdür.

İspat. (2.40) tanımından

$$t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^{\alpha k + \beta - 1}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (2.41)$$

dır. (2.41) in her iki yanına $n = 1$ olmak üzere (2.9) ile tanımlı kesirli türev operatörü uygulanıp, Mittag-Leffler fonksiyonlarının yakınsaklığı göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} (D_{0+}^\alpha [t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)])(x) \\ = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} t^{\alpha k + \beta - 1} dt \end{aligned}$$

elde edilir. İntegralin hesabı için $t = sx$ değişken değiştirmesi yapılp (2.5) ve (2.6) eşitlikleri de dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} (D_{0+}^\alpha [t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)])(x) \\ = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k x^{\alpha k + \beta - \alpha}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \int_0^1 (1-s)^{-\alpha+1-1} s^{\alpha k + \beta - 1} ds \\ = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k x^{\alpha k + \beta - \alpha}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} B(1-\alpha, \alpha k + \beta) \\ = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k x^{\alpha k + \beta - \alpha}}{\Gamma(\alpha k + \beta - \alpha + 1)} \end{aligned} \quad (2.42)$$

elde edilir. (2.42) de Mittag-Leffler fonksiyonlarının yakınsaklığı göz önüne alınıp düzenlenirse

$$\begin{aligned}
(D_{0+}^{\alpha} [t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha})])(x) &= \frac{d}{dx} \left[\frac{x^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} + \frac{ax^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} + \dots \right] \\
&= \frac{(\beta-\alpha)x^{\beta-\alpha-1}}{(\beta-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)} + \frac{a\beta x^{\beta-1}}{\beta\Gamma(\beta)} + \dots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k x^{\alpha k + \beta - \alpha - 1}}{\Gamma(\alpha k + \beta - \alpha)}
\end{aligned}$$

istenilen sonuç elde edilir. ■

Teorem 2.6 da $\beta = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.2 $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

$$(D_{0+}^{\alpha} [E_{\alpha}(at^{\alpha})])(x) = x^{-\alpha} E_{\alpha,1-\alpha}(ax^{\alpha})$$

dır.

Teorem 2.7 (Haubold vd. 2009) $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

$$(D_{0+}^{\alpha} [t^{\gamma-1} E_{\beta,\gamma}(at^{\beta})])(x) = x^{\gamma-\alpha-1} E_{\beta,\gamma-\alpha}(ax^{\beta})$$

eşitliği sağlanır, burada D_{0+}^{α} , (2.9) ile tanımlı Riemann-Liouville kesirli türev operatörüdür.

İspat. (2.40) tanımından

$$t^{\gamma-1} E_{\beta,\gamma}(at^{\beta}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^{\beta k + \gamma - 1}}{\Gamma(\beta k + \gamma)} \quad (2.43)$$

dır. (2.43) eşitliğinin her iki yanına (2.9) ile tanımlı kesirli türev operatörü uygulanıp Mittag-Leffler fonksiyonlarının yakınsaklığı göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
&(D_{0+}^{\alpha} [t^{\gamma-1} E_{\beta,\gamma}(at^{\beta})])(x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{\Gamma(\beta k + \gamma)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} t^{\beta k + \gamma - 1} dt
\end{aligned}$$

elde edilir. İntegralin hesabı için $t = sx$ değişken değıştirmesi yapıp düzenlenirse

$$\begin{aligned}
& (D_{0+}^{\alpha} [t^{\gamma-1} E_{\beta,\gamma}(at^{\beta})])(x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k x^{n-\alpha+\gamma+\beta k-1}}{\Gamma(\beta k + \gamma)} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^{\beta k + \gamma-1} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k x^{n-\alpha+\gamma+\beta k-1}}{\Gamma(\beta k + \gamma)} B(n-\alpha, \gamma + \beta k) \\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k x^{n-\alpha+\gamma+\beta k-1}}{\Gamma(\beta k + \gamma + n - \alpha)} \tag{2.44}
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.44) de Mittag-Leffler fonksiyonlarının yakınsaklığı göz önüne alınıp gerekli işlemler yapılırsa

$$(D_{0+}^{\alpha} [t^{\gamma-1} E_{\beta,\gamma}(at^{\beta})])(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k x^{\beta k + \gamma - \alpha - 1}}{\Gamma(\beta k + \gamma - \alpha)}$$

istenilen sonuç elde edilir. ■

Aşağıdaki teoremdede Caputo kesirli türevinin öz fonksiyonu Mittag-Leffler fonksiyonu olarak ifade edilmiştir.

Teorem 2.8 (Diethelm 2010) $\alpha > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun ve $y(x)$ fonksiyonu

$$y(x) = E_{\alpha}(\lambda x^{\alpha}), \quad x \geq 0$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$({}^C D_{0+}^{\alpha} y)(x) = \lambda y(x)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. (2.39) Mittag-Leffler fonksiyonunun tanımından

$$E_{\alpha}(\lambda x^{\alpha}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x^{\alpha})^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \tag{2.45}$$

dır. (2.45) in her iki yanına (2.31) ile tanımlı Caputo kesirli türev operatörü uygu-

lanıp Mittag-Leffler fonksiyonlarının yakınsaklığı göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} ({}^C D_{0+}^\alpha [E_\alpha(\lambda t^\alpha)])(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n t^{\alpha k} \right) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k t^{\alpha k - n}}{\Gamma(\alpha k - n + 1)} \right) dt \end{aligned}$$

elde edilir. İntegralin hesabı için yine Mittag-Leffler fonksiyonunun yakınsaklık özelliği dikkate alınıp $t = sx$ değişken değiştirmesi yapıp düzenlenirse

$$\begin{aligned} ({}^C D_{0+}^\alpha [E_\alpha(\lambda t^\alpha)])(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k - n + 1)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} t^{\alpha k - n} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k x^{\alpha k - \alpha}}{\Gamma(\alpha k - n + 1)} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^{\alpha k - n} ds \end{aligned}$$

bulunur. Son olarak Lemma 2.2 uygulanıp $k \rightarrow k + 1$ yazılırsa

$$\begin{aligned} ({}^C D_{0+}^\alpha [E_\alpha(\lambda t^\alpha)])(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k x^{\alpha k - \alpha}}{\Gamma(\alpha k - \alpha + 1)} \\ &= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \\ &= \lambda y(x) \end{aligned}$$

istenilen elde edilir. ■

Caputo türevi içeren lineer denklemlerin genel çözümlerinin elde edilmesinde yararlanılacak olan aşağıdaki teoremi ifade edelim.

Teorem 2.9 (Diethelm 2010) $\lambda > 0$ olmak üzere $u(x) = E_\alpha(-\lambda x^\alpha)$ olsun. Bu durumda, $0 < \alpha < 1$ iken $u(x)$ fonksiyonunun $[0, \infty)$ aralığında sıfırı yoktur.

2.5 Laplace Dönüşümleri

Bu kesimde Mittag-Leffler fonksiyonları ile kesirli integral ve türevin Laplace dönüşümleri hesaplanacaktır.

Tanım 2.9 $s \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\} = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx \quad (2.46)$$

şeklinde tanımlı olan dönüşüme, genelleştirilmiş integral yakınsak ise, $f(x)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü denir.

Aşağıdaki teoremlerde Mittag-Leffler fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri elde edilmiştir.

Teorem 2.10 (Kilbas vd. 2006) Eğer $\alpha, \beta, a \in \mathbb{R}$ ve $\alpha, \beta > 0$ ise, bu durumda

$$\mathcal{L}\{x^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(ax^\alpha)\} = s^{-\beta} (1 - as^{-\alpha})^{-1}, \quad |as^{-\alpha}| < 1,$$

dir.

İspat. (2.40) tanımından

$$x^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(ax^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k x^{\alpha k + \beta - 1}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (2.47)$$

dır. (2.47) eşitliğinin her iki yanına Laplace dönüşümü uygulanıp Mittag-Leffler fonksiyonlarının yakınsaklık özelliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(ax^\alpha)\} &= \mathcal{L}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k x^{\alpha k + \beta - 1}}{\Gamma(\alpha k + \beta)}\right\} \\ &= \mathcal{L}\left\{\frac{x^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} + \frac{ax^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \dots\right\} \\ &= \frac{1}{s^\beta} + \frac{a}{s^{\alpha+\beta}} + \dots \\ &= \frac{1}{s^\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{s^\alpha}\right)^k \\ &= \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - a}, \quad |as^{-\alpha}| < 1, \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 2.11 (Diethelm 2010) $\alpha > 0$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun.

$$y(z) = E_\alpha(-\lambda z^\alpha)$$

şeklinde tanımlasın. $y(z)$ nin Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{y(z)\} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda}, \quad \left| \frac{\lambda}{s^\alpha} \right| < 1, \quad (2.48)$$

dır.

İspat. (2.39) tanımından

$$\begin{aligned} y(z) &= E_\alpha(-\lambda z^\alpha) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda z^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \end{aligned} \quad (2.49)$$

yazılır. (2.49) eşitliğinin her iki yanına Laplace dönüşümü uygulayıp Mittag-Leffler fonksiyonlarının yakınsaklık özelliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y(z)\} &= \mathcal{L}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda z^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}\right\} \\ &= \mathcal{L}\left\{1 - \frac{\lambda z^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\lambda^2 z^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} - \dots\right\} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{\lambda}{s^{\alpha+1}} + \frac{\lambda^2}{s^{2\alpha+1}} - \dots \\ &= \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\lambda}{s^\alpha}\right)^k \\ &= \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda}, \quad \left| \frac{\lambda}{s^\alpha} \right| < 1 \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Aşağıdaki teoremlerde kesirli integral ve türevin Laplace dönüşümleri gösterilmiştir.

Teorem 2.12 (Haubold vd. 2009) $\alpha > 0$ olsun. Bu durumda

$$\mathcal{L}\{I_{0+}^\alpha f\} = s^{-\alpha} F(s) \quad (2.50)$$

sağlanır.

İspat. (2.7) kesirli integral tanımı ve Laplace dönüşümü tanımından

$$\mathcal{L}\{I_{0+}^{\alpha}f\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \right) dx$$

yazılır. Bu ifadede integrasyon sırası değiştirilse

$$\mathcal{L}\{I_{0+}^{\alpha}f\} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t=0}^{\infty} f(t) \left(\int_{x=t}^{\infty} e^{-sx} (x-t)^{\alpha-1} dx \right) dt \quad (2.51)$$

bulunur. (2.51) de $s(x-t) = u$ değişken değiştirmesi yapıp düzenlenirse

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{I_{0+}^{\alpha}f\} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} s^{-\alpha} \left(\int_0^{\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} du \right) dt \\ &= s^{-\alpha} F(s) \end{aligned}$$

istenilen sonuç elde edilir. ■

Teorem 2.13 (Haubold vd. 2009) $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ve $n-1 \leq \alpha < n$ olmak üzere

$$\mathcal{L}\{D_{0+}^{\alpha}f\} = s^{\alpha}F(s) - \sum_{k=1}^n s^{k-1} (D_{0+}^{\alpha-k}f)|_{t=0}$$

dır.

İspat.

$$(D_{0+}^{\alpha}f)(x) = \left(\frac{d}{dx} \right)^n (I_{0+}^{n-\alpha}f)(x)$$

eşitliğine Laplace dönüşümü uygulanıp

$$\mathcal{L}\left\{ \frac{d^n f}{dx^n} \right\} = s^n \mathcal{L}\{f\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left(\frac{d}{dx} \right)^{n-k-1} f(0) \quad (2.52)$$

eşitliği göz önüne alınırsa

$$\mathcal{L}\left\{ \frac{d^n}{dx^n} (I_{0+}^{n-\alpha}f) \right\} = s^n \mathcal{L}\{(I_{0+}^{n-\alpha}f)(x)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left(\frac{d}{dx} \right)^{n-k-1} [(I_{0+}^{n-\alpha}f)(t)]|_{t=0} \quad (2.53)$$

elde edilir. (2.53) de (2.50) eşitliği göz önüne alınıp k yerine $k-1$ yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{ \frac{d^n}{dx^n} (I_{0+}^{n-\alpha}f) \right\} &= s^{\alpha}F(s) - \sum_{k=1}^n s^{k-1} \left(\frac{d}{dx} \right)^{n-k} [(I_{0+}^{n-\alpha}f)(t)]|_{t=0} \\ &= s^{\alpha}F(s) - \sum_{k=1}^n s^{k-1} (D_{0+}^{\alpha-k}f)(t)|_{t=0} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 2.14 (Podlubny 1999) $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ve $n - 1 < \alpha \leq n$ olmak üzere

$$\mathcal{L} \{ {}^C D_{0+}^\alpha f \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0)$$

dır.

İspat. $D = \frac{d}{dx}$ olmak üzere

$$({}^C D_{0+}^\alpha f)(x) = (I_{0+}^{n-\alpha} D^n f)(x)$$

eşitliğinin her iki yanına Laplace dönüşümü uygulanıp (2.50) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{ ({}^C D_{0+}^\alpha f)(x) \} &= \mathcal{L} \{ I_{0+}^{n-\alpha} f^{(n)}(x) \} \\ &= s^{\alpha-n} \mathcal{L} \{ f^{(n)}(x) \} \end{aligned} \quad (2.54)$$

bulunur. (2.54) de (2.52) eşitliği kullanılıp gerekli düzenlemelere yapılırsa istenilen sonuç elde edilir. ■

Aşağıdaki örnekte bir kesirli integral denklemin çözümü Mittag-Leffler fonksiyonları cinsinden ifade edilmektedir.

Örnek 2.2 (Haubold vd. 2009) $\alpha > 0$ olsun.

$$N(x) - N_0 = -c^\alpha (I_{0+}^\alpha N)(x) \quad (2.55)$$

kesirli integral denkleminin çözümü

$$N(x) = N_0 E_\alpha(-c^\alpha x^\alpha) \quad (2.56)$$

dır. Burada $E_\alpha(x)$, (2.39) ile tanımlı Mittag-Leffler fonksiyonudur, $N(0) = N_0$ ve c reel sabittir.

Çözüm. (2.55) in her iki yanına Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\mathcal{L} \{ N(x) - N_0 \} = \mathcal{L} \{ -c^\alpha (I_{0+}^\alpha N)(x) \} \quad (2.57)$$

elde edilir. (2.57) de (2.50) eşitliği göz önüne alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} N(s) - N_0 \frac{1}{s} &= -c^\alpha s^{-\alpha} N(s) \\ N(s) &= N_0 s^{-1} \left[1 + \left(\frac{s}{c} \right)^{-\alpha} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (2.58)$$

bulunur. (2.58) eşitliğine Ters Laplace dönüşümü uygulanıp (2.48) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \{N(s)\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ N_0 s^{-1} \left[1 + \left(\frac{s}{c} \right)^{-\alpha} \right]^{-1} \right\} \\ N(x) &= N_0 E_\alpha(-c^\alpha x^\alpha) \end{aligned}$$

çözümü bulunur.

3. ÇÖZÜMLERİN VARLIK VE TEKLİĞİ

Bu bölümde Riemann-Liouville kesirli türevi ve Caputo kesirli türevi içeren başlangıç değer problemlerinin çözümlerinin varlık ve tekliği incelenecektir. Esas sonuçların ispatını vermeden önce ispatlarda kullanılacak olan aşağıdaki yardımcı lemmayı ifade edelim.

Lemma 3.1 (Kilbas vd. 2006) $\alpha \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere I_{a+}^α kesirli integral operatörü $L(a, b)$ de sınırlıdır, yani

$$\|I_{a+}^\alpha f\|_1 \leq \frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|f\|_1 \quad (3.1)$$

sağlanır.

İspat. $p = 1$ olmak üzere (2.1) den

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx \quad (3.2)$$

yazılır. (2.7) kesirli integral tanımı kullanılıp $u = x-t$ değişken değiştirilmesi yapılırsa

$$(I_{a+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} u^{\alpha-1} f(x-u) du \quad (3.3)$$

elde edilir. Diğer taraftan (2.7) kesirli integral tanımı (3.2) normunda göz önüne alınıp (3.3) eşitliği dikkate alınır

$$\begin{aligned} \|I_{a+}^\alpha f\|_1 &= \int_a^b |I_{a+}^\alpha f| dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \left| \int_0^{x-a} t^{\alpha-1} f(x-t) dt \right| dx \end{aligned} \quad (3.4)$$

bulunur. $p = 1$ olmak üzere

$$\left[\int_{S_2} \left| \int_{S_1} F(x, y) dx \right|^p dy \right]^{\frac{1}{p}} \leq \int_{S_1} \left(\int_{S_2} |F(x, y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} dx$$

genelleştirilmiş Minkowsky eşitsizliği (3.4) de göz önüne alınır

$$\begin{aligned} \|I_{a+}^\alpha f\|_1 &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} \int_a^b |t^{\alpha-1} f(x-t)| dx dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} |t|^{\alpha-1} \left(\int_a^b |f(x-t)| dx \right) dt \end{aligned}$$

bulunur. (3.2) normu son eşitsizlikte yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\|I_{a+}^{\alpha} f\|_1 &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|f\|_1 \int_0^{x-a} |t|^{\alpha-1} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|f\|_1 \left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha} \right) \Big|_0^{x-a} \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \|f\|_1
\end{aligned}$$

istenilen elde edilir. ■

Şimdi

$$(D_{a+}^{\alpha} y)(x) = f(x, y(x)), \quad (3.5)$$

$$(D_{a+}^{\alpha-k} y)(a+) = b_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (3.6)$$

Cauchy problemini ele alalım, burada $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $n = -[-\alpha]$ ve $b_k \in \mathbb{R}$ verilen sabitlerdir.

$(D_{a+}^{\alpha-k} y)(a+)$ limiti aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

$$(D_{a+}^{\alpha-k} y)(a+) = \lim_{x \rightarrow a+} (D_{a+}^{\alpha-k} y)(x), \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad (3.7)$$

$$(D_{a+}^{\alpha-n} y)(a+) = \lim_{x \rightarrow a+} (I_{a+}^{n-\alpha} y)(x), \quad \alpha \neq n; \quad (D_{a+}^0 y)(a+) = y(a), \quad \alpha = n. \quad (3.8)$$

Teorem 3.1 (Kilbas vd. 2006) G , reel ekseninde açık küme olsun. Ayrıca $f : (a, b] \times G \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere her $y \in G$ için $f(x, y) \in L(a, b)$ sağlansın. Bu durumda $y(x) \in L(a, b)$ olmak üzere, $y(x)$ in (3.5)-(3.6) Cauchy problemini sağlaması için gerek ve yeter koşul $y(x)$ in

$$y(x) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)} (x-a)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t, y(t)) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad x > a, \quad (3.9)$$

Volterra integral denklemini sağlamasıdır.

İspat. İlk olarak gereklilik kısmını ispatlayalım. $f(x, y(x)) \in L(a, b)$ olduğundan ve (3.5) den

$$(D_{a+}^{\alpha} y)(x) \in L(a, b) \quad (3.10)$$

dir. (2.9) Riemann-Liouville kesirli türev tanımına göre

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{a+}^{n-\alpha}y)(x), \quad n = -[-\alpha], \quad (I_{a+}^0y)(x) = y(x),$$

yazılabilir. Dolayısıyla (3.10), (2.2) ve (2.3) den $(I_{a+}^{n-\alpha}y)(x) \in AC^n[a, b]$ dir. O halde Lemma 2.8 deki (2.29) eşitliği kullanılırsa

$$(I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}y)(x) = y(x) - \sum_{j=1}^n \frac{y_{n-\alpha}^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j}, \quad y_{n-\alpha}(x) = (I_{a+}^{n-\alpha}y)(x) \quad (3.11)$$

elde edilir. (2.9) Riemann-Liouville kesirli türev tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} y_{n-\alpha}^{(n-j)}(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-j} (I_{a+}^{n-\alpha}y)(x) \\ &= \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-j} (I_{a+}^{(n-j)-(\alpha-j)}y)(x) \\ &= (D_{a+}^{\alpha-j}y)(x) \end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlik ve (3.6) koşulu (3.11) de göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} (I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}y)(x) &= y(x) - \sum_{j=1}^n \frac{(D_{a+}^{\alpha-j}y)(a+)}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j} \\ &= y(x) - \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j} \end{aligned} \quad (3.12)$$

elde edilir.

Lemma 3.1 den $[a, b]$ aralığında $(I_{a+}^{\alpha}f(t, y(t)))(x) \in L(a, b)$ dir. (3.5) eşitliğinin her iki tarafına I_{a+}^{α} kesirli integral operatörü uygulayıp (3.12) ve (2.7) göz önüne alınırsa (3.9) eşitliğine ulaşılır ve gereklilik ispatlanmış olur.

Şimdi yeterliliği ispat edelim. $y(x) \in L(a, b)$, (3.9) integral denklemini sağlasın. (3.9) eşitliğinin her iki yanına D_{a+}^{α} kesirli türev operatörü uygulanırsa

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\alpha-j})(x) + (D_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\alpha}f(t, y(t)))(x)$$

bulunur. Son eşitlikte (2.17) ve Lemma 2.6 dikkate alınırsa (3.5) elde edilir.

Şimdi (3.6) eşitliğinin de sağlandığını gösterelim. (3.9) eşitliğinin her iki yanına $D_{a+}^{\alpha-k}$, $k = 1, \dots, n$, kesirli türev operatörü uygulanıp $1 \leq k \leq n-1$ için (2.14), (2.17) ve (2.27) özellikleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
(D_{a+}^{\alpha-k}y)(x) &= \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)} (D_{a+}^{\alpha-k}(t-a)^{\alpha-j})(x) + (D_{a+}^{\alpha-k}I_{a+}^{\alpha}f(t, y(t)))(x) \\
&= \sum_{j=1}^k \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)} (D_{a+}^{\alpha-k}(t-a)^{\alpha-j})(x) + (I_{a+}^k f(t, y(t)))(x) \\
&= \sum_{j=1}^k \frac{b_j}{(k-j)!} (x-a)^{k-j} + \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x (x-t)^{k-1} f(t, y(t)) dt \quad (3.13)
\end{aligned}$$

bulunur. $k = n$ durumunda (3.9) eşitliğinin her iki yanına $I_{a+}^{n-\alpha}$ kesirli integral operatörü uygulanıp (2.13) ve (2.24) özellikleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
(I_{a+}^{n-\alpha}y)(x) &= \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)} (I_{a+}^{n-\alpha}(t-a)^{\alpha-j})(x) + (I_{a+}^{n-\alpha}I_{a+}^{\alpha}f(t, y(t)))(x) \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{(n-j)!} (x-a)^{n-j} + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t, y(t)) dt \quad (3.14)
\end{aligned}$$

elde edilir.

O halde $x \rightarrow a+$ için (3.13) ve (3.14) eşitliklerinin her iki yanının limitleri alınıp (3.7) ve (3.8) göz önüne alınırsa (3.6) elde edilir. Dolayısıyla yeterlilik de ispatlanmış olur. ■

Sonuç 3.1 $0 < \alpha < 1$ ve G , reel ekseninde açık küme olsun. Ayrıca $f : (a, b] \times G \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere her $y \in G$ için $f(x, y) \in L(a, b)$ sağlansın. Bu durumda $y(x) \in L(a, b)$ olmak üzere, $y(x)$ in

$$\begin{aligned}
(D_{a+}^{\alpha}y)(x) &= f(x, y(x)), \\
(I_{a+}^{1-\alpha}y)(a+) &= b, \quad b \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

Cauchy problemini sağlaması için gerek ve yeter koşul $y(x)$ in

$$y(x) = \frac{b(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t, y(t)) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad x > a,$$

Volterra integral denklemini sağlamasıdır.

Teorem 3.2 (Kilbas vd. 2006) $\alpha > 0$, $n = -[-\alpha]$ ve G , reel ekseninde açık küme olsun. $f : (a, b] \times G \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere her $y \in G$ için $f(x, y) \in L(a, b)$ sağlansın. Ayrıca her $x \in (a, b]$ ve her $y_1, y_2 \in G$ için,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq A |y_1 - y_2|, \quad A > 0, \quad (3.15)$$

Lipschitz koşulu sağlansın. Bu durumda, (3.5)-(3.6) Cauchy probleminin

$$L^\alpha(a, b) = \{y \in L(a, b) : D_{a+}^\alpha y \in L(a, b)\} \quad (3.16)$$

şeklinde tanımlanan $L^\alpha(a, b)$ uzayında bir tek $y(x)$ çözümü vardır.

İspat. İlk olarak $y(x) \in L(a, b)$ tek çözümünün varlığını ispatlayalım. (3.5)-(3.6) başlangıç değer problemi ve (3.9) integral denklemi denk olduklarından (3.9) integral denkleminin $y(x) \in L(a, b)$ tek çözümünün varlığını ispat etmek yeterlidir.

$[a, x_1] \subset [a, b]$, $a < x_1 < b$ olmak üzere

$$\frac{A(x_1 - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} < 1 \quad (3.17)$$

sağlansın. $[a, x_1]$ aralığında (3.9) integral denkleminin $y(x) \in L(a, x_1)$ tek çözümünün varlığını ispatlayalım. $L(a, x_1)$ uzayı

$$d(y_1, y_2) = \|y_1 - y_2\|_1 = \int_a^{x_1} |y_1(x) - y_2(x)| dx$$

metriğine göre tam metrik uzay olduğundan Teorem 2.1 uygulanabilir.

$$(Ty)(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t, y(t)) dt}{(x - t)^{1-\alpha}} \quad (3.18)$$

dönüşümünü göz önüne alalım, burada

$$y_0(x) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x - a)^{\alpha-j} \quad (3.19)$$

dir. (3.19) eşitliğinden $y_0(x) \in L(a, x_1)$ olduğu açıktır. Diğer taraftan, $f(x, y(x)) \in L(a, b)$ olduğundan ve Lemma 3.1 den (3.18) in sağ tarafındaki integral de $L(a, x_1)$ uzayına aittir. Dolayısıyla her $y(x) \in L(a, x_1)$ için, $(Ty)(x) \in L(a, x_1)$ bulunur.

Şimdi (3.18) dönüşümünün bir daralma dönüşümü olduğu yani her $y_1(x), y_2(x) \in L(a, x_1)$ için

$$\|Ty_1 - Ty_2\|_1 \leq w \|y_1 - y_2\|_1, \quad 0 < w < 1 \quad (3.20)$$

eşitsizliğinin sağlandığı gösterilecektir. (3.18)-(3.19) ve (2.7) ile verilen Riemann-Liouville integral tanımı kullanılırsa, her $y_1(x), y_2(x) \in L(a, x_1)$ için

$$\begin{aligned} (Ty_1)(x) - (Ty_2)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \\ &= I_{a+}^\alpha (f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))) \end{aligned} \quad (3.21)$$

elde edilir. (3.21) eşitliğin her iki yanının mutlak değeri alınıp (3.15) Lipschitz koşulu ve (3.1) özelliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \|Ty_1 - Ty_2\|_{L(a, x_1)} &\leq \int_a^{x_1} |(I_{a+}^\alpha (f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))))| dt \\ &\leq A \|I_{a+}^\alpha (|y_1(t) - y_2(t)|)\|_{L(a, x_1)} \\ &\leq A \frac{(x_1 - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \|y_1(x) - y_2(x)\|_{L(a, x_1)} \end{aligned}$$

bulunur. (3.17) göz önüne alındığında, $w = \frac{A(x_1 - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}$ olmak üzere (3.20) sağlanır. O halde Teorem 2.1 den $[a, x_1]$ aralığında (3.9) denkleminin bir tek $y^*(x) \in L(a, x_1)$ çözümü vardır. Ayrıca Teorem 2.1 den $y^*, (T^m y_0^*)(x)$ dizisinin limitidir, yani

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|T^m y_0^* - y^*\|_{L(a, x_1)} = 0 \quad (3.22)$$

dır, burada $y_0^*(x), L(a, b)$ de herhangi bir fonksiyondur. Eğer (3.6) başlangıç koşulunda en azından bir $b_k \neq 0$ mevcutsa, $y_0^*(x) = y_0(x)$ alınabilir, burada $y_0(x)$, (3.19) ile tanımlı fonksiyondur.

(3.18) den $(T^m y_0^*)(x)$ dizisi

$$(T^m y_0^*)(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t, (T^{m-1} y_0^*)(t))}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (3.23)$$

şeklinde rekürans formülü ile tanımlıdır. $y_m(x) = (T^m y_0^*)(x)$ olarak yazılırsa, (3.23) eşitliği

$$y_m(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t, y_{m-1}(t)) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad m \in \mathbb{N},$$

şeklinde olur ve (3.22)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|y_m - y^*\|_{L(a, x_1)} = 0$$

biçiminde yeniden yazılır.

O halde ardışık yaklaşımlar yöntemi uygulanarak $[a, x_1]$ aralığında (3.9) integral denkleminin bir tek $y^*(x)$ çözümü bulunabilir.

Şimdi $[x_1, x_2]$ aralığını alalım, burada $x_2 = x_1 + h_1$, $h_1 > 0$ ve $x_2 < b$ dir. (3.9) denklemi

$$y(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_1}^x \frac{f(t, y(t)) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)} (x-a)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x_1} \frac{f(t, y(t)) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

formunda yazılırsa, $y(t)$, $[a, x_1]$ aralığında tek olarak tanımlı olduğundan,

$$y(x) = y_{01}(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_1}^x \frac{f(t, y(t)) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

yazılabilir, burada

$$y_{01}(x) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)} (x-a)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x_1} \frac{f(t, y(t)) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

şeklinde tanımlı bilinen fonksiyondur.

İspatın ilk kısmındaki argümanlar kullanılarak $[x_1, x_2]$ aralığında (3.9) denklemi için $y^*(x) \in L(x_1, x_2)$ tek çözümünün varlığı gösterilebilir.

Bir sonraki aralık $[x_2, x_3]$, burada $x_3 = x_2 + h_2$, $h_2 > 0$ ve $x_3 < b$, alınıp aynı işlem tekrar edilirse, $[a, b]$ aralığında (3.9) denklemi için $y^*(x) \in L(a, b)$ tek çözümünün var olduğu sonucuna ulaşılır.

Böylece (3.9) Volterra integral denkleminin $y(x) = y^*(x) \in L(a, b)$ tek çözümü vardır ve dolayısıyla (3.5)-(3.6) Cauchy probleminin $y(x) = y^*(x) \in L(a, b)$ tek çözümü vardır.

Bu teoremin ispatını tamamlamak için $y(x) \in L(a, b)$ tek çözümünün $L^\alpha(a, b)$ uzayına ait olduğunu göstermeliyiz. (3.16) dan $D_{a+}^\alpha y \in L(a, b)$ olduğunu göstermek yeterlidir. İspat içerisinde yapılan işlemlerden $y(x) \in L(a, b)$ nin $y_m(x) \in L(a, b)$ dizisinin limiti olduğunu biliyoruz, yani

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|y_m - y\|_1 = 0 \quad (3.24)$$

dır. (3.5) ve (3.15) ile tanımlı Lipschitz koşulu kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|D_{a+}^\alpha y_m - D_{a+}^\alpha y\|_1 &= \|f(x, y_m) - f(x, y)\|_1 \\ &\leq A \|y_m - y\|_1 \end{aligned}$$

elde edilir. (3.24) göz önüne alınırsa

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|D_{a+}^\alpha y_m - D_{a+}^\alpha y\|_1 = 0$$

bulunur. Böylece $(D_{a+}^\alpha y)(x) \in L(a, b)$ elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Aşağıdaki teoremde Caputo türevi içeren bir kesirli lineer diferensiyel denkleminin genel çözümü Mittag-Leffler fonksiyonları yardımıyla ifade edilmektedir.

Teorem 3.3 (Diethelm 2010) $0 < \alpha < 1$ ve A matrisi $n \times n$ tipinde sabit bir matris olsun. Ayrıca $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ A matrisinin özdeğerleri, $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(n)}$ bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler olsun. Bu durumda

$$({}^C D_{0+}^\alpha y)(x) = Ay(x) \quad (3.25)$$

kesirli diferensiyel denklem sisteminin genel çözümü

$$y(x) = \sum_{l=1}^n c_l u^{(l)} E_\alpha(\lambda_l x^\alpha) \quad (3.26)$$

şeklindedir, burada $c_l \in \mathbb{R}$ belirli sabitlerdir.

(3.25) kesirli diferensiyel denklem sisteminin $y(0) = y_0$ koşulunu sağlayan tek çözümü

$$y_0 = (u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(n)})(c_1, \dots, c_n)^T \quad (3.27)$$

şeklindedir.

İspat.

$$y_1(x) = u^{(1)} E_\alpha(\lambda_1 x^\alpha), \dots, y_n(x) = u^{(n)} E_\alpha(\lambda_n x^\alpha)$$

vektör fonksiyonlarının (3.25) sisteminin lineer bağımsız çözümleri oldukları gösterilecektir.

İlk olarak $y_1(x)$ in (3.25) sisteminin çözümü olduğunu gösterelim. Bunun için Teorem 2.8 kullanılırsa

$$\begin{aligned} ({}^C D_{0+}^\alpha y_1)(x) &= ({}^C D_{0+}^\alpha [u^{(1)} E_\alpha(\lambda_1 t^\alpha)])(x) \\ &= u^{(1)} \lambda_1 E_\alpha(\lambda_1 x^\alpha) \end{aligned} \quad (3.28)$$

elde edilir. $u^{(1)}$, A matrisinin λ_1 özdeğerine karşılık gelen bir özvektörü olduğundan,

$$\lambda_1 u^{(1)} = A u^{(1)}$$

sağlanır. Teorem 2.9 dan $E_\alpha(\lambda_1 x^\alpha) \neq 0$ dır. O halde

$$u^{(1)} \lambda_1 E_\alpha(\lambda_1 x^\alpha) = A u^{(1)} E_\alpha(\lambda_1 x^\alpha) \quad (3.29)$$

olup, (3.29) eşitliği (3.28) de göz önüne alınırsa, $y_1(x) = u^{(1)} E_\alpha(\lambda_1 x^\alpha)$ vektör fonksiyonunun (3.25) sisteminin çözümü olduğu görülür. Benzer şekilde $y_2(x), \dots, y_n(x)$ vektör fonksiyonlarının da (3.25) sistemini sağladığı görülebilir.

Şimdi $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ vektör fonksiyonlar cümlesinin lineer bağımsız olduğunu gösterelim. $a_1, a_2, \dots, a_n$ sabitler olmak üzere

$$a_1 u^{(1)} E_\alpha(\lambda_1 x^\alpha) + \dots + a_n u^{(n)} E_\alpha(\lambda_n x^\alpha) = 0 \quad (3.30)$$

olsun. Teorem 2.9 dan $E_\alpha(\lambda_k x^\alpha) \neq 0$, $k = 1, \dots, n$, dir. Ayrıca $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(n)}$ vektörleri A matrisinin özvektörleri olduklarından sıfırdan farklıdır. O halde (3.30) dan $a_1 = \dots = a_n = 0$ sağlanır ve $y_1(x), \dots, y_n(x)$ çözümleri lineer bağımsızdır.

O halde $y_1(x), \dots, y_n(x)$ vektör fonksiyonları (3.25) sisteminin lineer bağımsız çözümleridir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x) \\ &= c_1 u^{(1)} E_\alpha(\lambda_1 x^\alpha) + \dots + c_n u^{(n)} E_\alpha(\lambda_n x^\alpha) \\ &= \sum_{l=1}^n c_l u^{(l)} E_\alpha(\lambda_l x^\alpha) \end{aligned}$$

olup istenilen elde edilir.

Şimdi (3.25) sisteminin $y(0) = y_0$ koşulunu sağlayan tek çözümünün

$$y_0 = (u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(n)})(c_1, \dots, c_n)^T$$

olduğunu gösterelim. Bunun için kabul edelim ki (3.25) sisteminin $y(0) = y_0$ koşulunu sağlayan iki farklı çözümü

$$\begin{aligned} y_A(x) &= c_1 u^{(1)} E_\alpha(\lambda_1 x^\alpha) + \dots + c_n u^{(n)} E_\alpha(\lambda_n x^\alpha) \\ y_B(x) &= k_1 u^{(1)} E_\alpha(\lambda_1 x^\alpha) + \dots + k_n u^{(n)} E_\alpha(\lambda_n x^\alpha) \end{aligned}$$

olsun. (2.39) Mittag-Leffler fonksiyonunun tanımından

$$y_A(0) = c_1 u^{(1)} + \dots + c_n u^{(n)} = y_0 \quad (3.31)$$

$$y_B(0) = k_1 u^{(1)} + \dots + k_n u^{(n)} = y_0 \quad (3.32)$$

yazılır. (3.31) ve (3.32) den

$$c_1 = k_1, \dots, c_n = k_n$$

olmalıdır ki bu da kabulümüzle çelişir. Dolayısıyla istenilen tek çözüm elde edilir.

■

4. KARARLILIK ANALİZİ

4.1 Giriş

Son yıllarda mühendislikte ve diğer bilimlerde kesirli basamaktan diferensiyel denklemlerin uygulama alanları artış göstermektedir. Ancak bu denklemlerin tam çözümlerinin bulunması oldukça zordur. Bu yüzden denklemlerin çözümlerinin kalitatif yöntemlerle incelenmesi büyük önem taşımaktadır. Bu bağlamda kararlılık analizi yapılması çözümlerin davranışını belirlemeye ışık tutacaktır.

$$({}^C D_{0+}^\alpha y)(x) = f(x, y(x)) \quad (4.1)$$

kesirli diferensiyel denklemini ele alalım, burada $\alpha \in (0, 1)$, $f : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bölgesinde tanımlı bir fonksiyondur. Ayrıca f fonksiyonunun bu bölgede sürekli olduğunu, ikinci değişkene göre Lipschitz koşulunu sağladığını ve $x \geq 0$ için $f(x, 0) = 0$ olduğunu kabul edelim.

Tanım 4.1 (Diethelm 2010) (4.1) diferensiyel denklemini $y(0) = y_0$ başlangıç koşulu ile birlikte ele alalım.

- i) Her $\varepsilon > 0$ için $\|y_0\| < \delta$ olduğunda her $x \geq 0$ için $\|y(x)\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ mevcutsa (4.1) diferensiyel denkleminin $y(x) = 0$ çözümüne kararlıdır denir.
- ii) $y(x) = 0$ çözümü kararlı ve $\|y_0\| < \gamma$ olduğunda $\lim_{x \rightarrow \infty} \|y(x)\| = 0$ olacak şekilde bir $\gamma > 0$ mevcutsa (4.1) diferensiyel denkleminin $y(x) = 0$ çözümüne asimptotik kararlıdır denir.

Uyarı 4.1

$$({}^C D_{0+}^\alpha y)(x) = g(x, y(x))$$

kesirli diferensiyel denkleminin $y(x) = y_1(x)$ çözümünün (asimptotik) kararlı olması için gerek ve yeter koşul

$$f(x, z) := g(x, z + y_1(x)) - g(x, y_1(x))$$

olmak üzere (4.1) denkleminin sıfır çözümünün (asimptotik) kararlı olmasıdır.

4.2 Denge Noktaları ve Kararlılık

Bu kesimde lokal kararlılık ile ilgili literatürde yer alan bazı sonuçlar verilecektir. İlk olarak teoremlerde kullanılacak olan esas argüment tanımı ifade edilmektedir.

Tanım 4.2 $z \neq 0$ ve $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere bir $z = x + iy$ karmaşık sayısını orijine birleştiren doğrunun reel eksenle pozitif yönde yaptığı açı θ olsun. Bu z karmaşık sayısı için

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

eşitliği sağlanıyorsa, bu durumda θ sayısına z nin argümenti denir. Eğer $0 \leq \theta < 2\pi$ ise, bu durumda θ ya esas argüment denir.

Aşağıdaki teoremda sabit katsayılı, lineer, homogen denklem sistemlerinin kararlılığı için gerek ve yeter koşullar ifade edilmektedir.

Teorem 4.1 (Matignon 1997, Diethelm 2010) $0 < \alpha < 1$ ve A matrisi $N \times N$ tipinde sabit bir matris olmak üzere N boyutlu

$$({}^C D_{0+}^\alpha y)(x) = Ay(x) \tag{4.2}$$

kesirli diferensiyel denklem sistemini göz önüne alalım.

- i) (4.2) sisteminin $y(x) = 0$ çözümünün asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter koşul A matrisinin tüm λ_j ($j = 1, \dots, N$) özdeğerlerinin $|\arg \lambda_j| > \frac{\alpha\pi}{2}$ koşulunu sağlamasıdır.

- ii) (4.2) sisteminin $y(x) = 0$ çözümünün kararlı olması için gerek ve yeter koşul A matrisinin tüm λ_j ($j = 1, \dots, N$) özdeğerleri için $|\arg \lambda_j| \geq \frac{\alpha\pi}{2}$ ve $|\arg \lambda_j| = \frac{\alpha\pi}{2}$ olan tüm özdeğerler için geometrik katlılık (karşılık gelen lineer bağımsız özvektör sayısı) ile cebirsel katlılığın (λ nın katlılığı) aynı olmasıdır.

Aşağıdaki örnekte katsayı matrisinin özdeğerleri bulunarak çözümün kararlılığı incelenmiştir.

Örnek 4.1 (Diethelm 2010) A matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$({}^C D_{0+}^\alpha y)(x) = Ay(x) \quad (4.3)$$

sistemi ele alalım, burada $0 < \alpha < 1$ dir.

A katsayı matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_2 = -2$ olup $\arg \lambda_1 = 0$ olduğundan (4.3) sisteminin $y = 0$ çözümü kararsızdır.

Diğer taraftan, Teorem 3.3 ün bir uygulaması olarak da $y = 0$ çözümünün kararsız olduğu görülebilir. A matrisinin $\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_2 = -2$ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörler sırasıyla $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ ve $u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}^T$ dur. Teorem 3.3 ten (4.3) ün genel çözümü

$$y(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} E_\alpha(x^\alpha) + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} E_\alpha(-2x^\alpha)$$

olup $x \rightarrow \infty$ için $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T E_\alpha(x^\alpha)$ fonksiyonu sınırlandırılmayacağından $y = 0$ çözümü kararsızdır.

Şimdi, $\alpha \in (0, 1]$ olmak üzere

$$\begin{cases} ({}^C D_{0+}^\alpha y_1)(x) = f_1(y_1, y_2) \\ ({}^C D_{0+}^\alpha y_2)(x) = f_2(y_1, y_2) \end{cases} \quad (4.4)$$

kesirli diferensiyel denklem sistemini

$$y_1(0) = y_{01} \text{ ve } y_2(0) = y_{02} \quad (4.5)$$

başlangıç koşulları ile birlikte göz önüne alalım. $f_i(y_1^*, y_2^*) = 0$, $i = 1, 2$, olsun. Bu durumda $E^* = (y_1^*, y_2^*)$ (4.4) sisteminin denge noktasıdır.

(4.4)-(4.5) sisteminin lineerleştirme yöntemi ile kararlılık analizi Ahmed vd. (2007) tarafından yapılmıştır. İlk olarak $E^* = (y_1^*, y_2^*)$ denge noktasını $(0, 0)$ noktasına kaydırmak için (4.4)-(4.5) sisteminde

$$y_i(x) = y_i^* + \varepsilon_i(x), \quad i = 1, 2,$$

değişken değiştirilmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} ({}^C D_{0+}^\alpha (y_1^* + \varepsilon_1))(x) &= f_1(y_1^* + \varepsilon_1, y_2^* + \varepsilon_2) \\ ({}^C D_{0+}^\alpha (y_2^* + \varepsilon_2))(x) &= f_2(y_1^* + \varepsilon_1, y_2^* + \varepsilon_2) \end{aligned} \quad (4.6)$$

elde edilir. ${}^C D_{0+}^\alpha$ Caputo türev operatörünün lineerlik özelliği ve (2.37) özelliği göz önüne alınırsa, (4.4) sisteminin

$$\begin{aligned} ({}^C D_{0+}^\alpha \varepsilon_1)(x) &= f_1(y_1^* + \varepsilon_1, y_2^* + \varepsilon_2) \\ ({}^C D_{0+}^\alpha \varepsilon_2)(x) &= f_2(y_1^* + \varepsilon_1, y_2^* + \varepsilon_2) \end{aligned} \quad (4.7)$$

sistemine eşdeğer olduğu görülür. Açık olarak (4.7) sisteminin denge noktası $(0, 0)$ dır. Diğer taraftan $i = 1, 2$ için

$$f_i(y_1^* + \varepsilon_1, y_2^* + \varepsilon_2) \cong f_i(y_1^*, y_2^*) + \left. \frac{\partial f_i}{\partial y_1} \right|_{E^*} \varepsilon_1 + \left. \frac{\partial f_i}{\partial y_2} \right|_{E^*} \varepsilon_2 + \dots$$

ve $f_i(y_1^*, y_2^*) = 0$ olduğundan

$$f_i(y_1^* + \varepsilon_1, y_2^* + \varepsilon_2) \cong \left. \frac{\partial f_i}{\partial y_1} \right|_{E^*} \varepsilon_1 + \left. \frac{\partial f_i}{\partial y_2} \right|_{E^*} \varepsilon_2 \quad (4.8)$$

elde edilir. (4.7) ve (4.8) den $i = 1, 2$ için

$$({}^C D_{0+}^{\alpha} \varepsilon_i)(x) \cong \frac{\partial f_i}{\partial y_1} \Big|_{E^*} \varepsilon_1 + \frac{\partial f_i}{\partial y_2} \Big|_{E^*} \varepsilon_2$$

bulunur ve dolayısıyla

$$\varepsilon_1(0) = y_1(0) - y_1^* \text{ ve } \varepsilon_2(0) = y_2(0) - y_2^*$$

başlangıç koşuluna sahip

$${}^C D_{0+}^{\alpha} \varepsilon = A \varepsilon \tag{4.9}$$

sistemine ulaşılır, burada

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \Big|_{E^*}, \quad i, j = 1, 2,$$

dir. Diğer taraftan verilen bir A kare matrisi için

$$C = B^{-1}AB$$

olacak şekilde singüler olmayan bir B matrisi vardır, burada C matrisi

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

şeklinde A Jakobiyen matrisinin özdeğerlerinden oluşan köşegen matristir. O halde

$$AB = BC$$

ve buradan

$$A = BCB^{-1} \tag{4.10}$$

elde edilir.

$${}^C D_{0+}^{\alpha} (B^{-1} \varepsilon) = B^{-1} ({}^C D_{0+}^{\alpha} \varepsilon)$$

özellği (4.10) ile birlikte (4.9) denkleminde göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} {}^C D_{0+}^{\alpha} (B^{-1} \varepsilon) &= B^{-1} ({}^C D_{0+}^{\alpha} \varepsilon) \\ &= B^{-1} A \varepsilon \\ &= B^{-1} (BCB^{-1}) \varepsilon \\ &= C (B^{-1} \varepsilon) \end{aligned} \tag{4.11}$$

elde edilir. $\eta = B^{-1}\varepsilon$, $\eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$ olmak üzere (4.11) sistemi

$$\begin{cases} {}^C D_{a+}^\alpha \eta_1 = \lambda_1 \eta_1 \\ {}^C D_{a+}^\alpha \eta_2 = \lambda_2 \eta_2 \end{cases} \quad (4.12)$$

sistemine eşdeğerdir. Teorem 2.8 kullanılarak (4.12) ile verilen sistemin çözümü

$$\begin{aligned} \eta_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1)^n x^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n + 1)} \eta_1(0) = E_\alpha(\lambda_1 x^\alpha) \eta_1(0) \\ \eta_2(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_2)^n x^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n + 1)} \eta_2(0) = E_\alpha(\lambda_2 x^\alpha) \eta_2(0) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Diğer taraftan, Teorem 4.1 den A matrisinin λ_1 ve λ_2 özdeğerleri için $|\arg \lambda_1| > \frac{\alpha\pi}{2}$ ve $|\arg \lambda_2| > \frac{\alpha\pi}{2}$ sağlamr ise, bu durumda $E^* = (y_1^*, y_2^*)$ denge noktası lokal olarak asimptotik kararlıdır. Bu incelemelerin bir uygulaması olarak $\alpha \in (0, 1]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} ({}^C D_{0+}^\alpha y_1)(x) &= y_1(x)(r - ay_1(x) - by_2(x)), \\ ({}^C D_{0+}^\alpha y_2)(x) &= y_2(x)(-d + cy_1(x)) \end{aligned} \quad (4.13)$$

kesirli Lotka-Volterra av-avcı modelini göz önüne alalım (Ahmed vd. 2007). Burada $y_1 \geq 0$ ve $y_2 \geq 0$ sırasıyla, av ve avcı nüfuslarıdır ve r, a, b, c, d pozitif sabitlerdir. (4.13) sisteminin denge noktaları

$$(y_1^*, y_2^*) = E_0(0, 0), \quad E_1\left(\frac{r}{a}, 0\right), \quad E_2\left(\frac{d}{c}, \frac{cr - ad}{cb}\right)$$

noktalarıdır.

(4.13) sisteminin $A(y_1^*, y_2^*)$ Jakobiye matrisi

$$A(y_1^*, y_2^*) = \begin{bmatrix} r - 2ay_1^* - by_2^* & -by_1^* \\ cy_2^* & -d + cy_1^* \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

$(y_1^*, y_2^*) = (0, 0)$ için $A(0, 0)$ matrisi

$$A(E_0) = A(0, 0) = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}$$

olup, $A(E_0)$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = r$ ve $\lambda_2 = -d$ dir. $\lambda_2 < 0$ olduğundan $|\arg \lambda_2| = \pi > \frac{\alpha\pi}{2}$ ve $\lambda_1 > 0$ olduğundan $|\arg \lambda_1| = 0 < \frac{\alpha\pi}{2}$ dir. Böylece $E_0 = (0, 0)$ kararsız bir noktadır.

Aynı şekilde $(y_1^*, y_2^*) = (\frac{r}{a}, 0)$ için $A(\frac{r}{a}, 0)$ matrisi

$$A(E_1) = A(\frac{r}{a}, 0) = \begin{bmatrix} -r & -\frac{br}{a} \\ 0 & \frac{cr}{a} - d \end{bmatrix}$$

olup $A(E_1)$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = -r$ ve $\lambda_2 = \frac{cr}{a} - d$ bulunur. $\lambda_1 < 0$ olduğundan $|\arg \lambda_1| = \pi > \frac{\alpha\pi}{2}$ dir. Eğer $cr < ad$ ise, bu durumda $\lambda_2 < 0$ ve $|\arg \lambda_2| = \pi > \frac{\alpha\pi}{2}$ bulunur. Dolayısıyla $E_1 = (\frac{r}{a}, 0)$ denge noktası asimptotik kararlıdır.

Son olarak $(y_1^*, y_2^*) = (\frac{d}{c}, \frac{cr - ad}{cb})$ için $A(\frac{d}{c}, \frac{cr - ad}{cb})$ matrisi

$$A(E_2) = A\left(\frac{d}{c}, \frac{cr - ad}{cb}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{ad}{c} & -\frac{bd}{c} \\ \frac{cr - ad}{b} & 0 \end{bmatrix}$$

olup $A(E_2)$ matrisinin özdeğerleri

$$\lambda_{1,2} = \frac{-ad \mp \sqrt{(ad)^2 - 4cd(cr - ad)}}{2c}$$

dir.

O halde $(y_1^*, y_2^*) = (\frac{d}{c}, \frac{cr - ad}{cb})$ denge noktasının lokal asimptotik kararlı olması için bir yeter koşul

$$|\arg \lambda_1| > \frac{\alpha\pi}{2}, \quad |\arg \lambda_2| > \frac{\alpha\pi}{2}$$

olmasıdır.

Özel olarak $a = 0$ durumunda $E_2 = (\frac{d}{c}, \frac{cr - ad}{cb})$ denge noktası için $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{dr}$ bulunur. Bu durumda $\alpha = 1$ olmak üzere tamsayı basamaktan sistem için E_2

denge noktası merkez noktadır. Ancak $\arg \lambda_1 = \frac{\pi}{2}$ ve $\arg \lambda_2 = -\frac{\pi}{2}$ olduğundan $0 < \alpha < 1$ olmak üzere α . basamaktan sistem için E_2 lokal asimptotik kararlı bir denge noktasıdır.

Şimdi Caputo kesirli türevi içeren

$$\begin{cases} ({}^C D_{a+}^\alpha x)(t) = x(1 - x - \frac{ay}{k+x} - \frac{\sigma}{l+x}), \\ ({}^C D_{a+}^\alpha y)(t) = \gamma y(1 - \frac{\beta y}{k+x}), \end{cases} \quad (4.14)$$

Leslie-Gower av-avcı modelini ele alalım (Ghaziani vd. 2016), burada a , β , k , σ , l , δ ve γ pozitif parametrelerdir ve $\alpha \in (0, 1)$ dir. (4.14) sistemi $x(\delta) = x_0 > 0$, $y(\delta) = y_0 > 0$ başlangıç koşulları ile birlikte incelenecektir.

Tamsayı basamaktan türev içeren Leslie-Gower modeli

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = rx_1(1 - \frac{x_1}{d}) - \frac{a_1 x_1 x_2}{n_1 + x_1}, \\ \frac{dx_2}{d\tau} = sx_2(1 - \frac{a_2 x_2}{n_2 + x_1}), \end{cases} \quad (4.15)$$

ve genelleştirmeleri $x_1(0) > 0$, $x_2(0) > 0$ koşulları ile birlikte ele alınmıştır (Das vd. 2009, Ji vd. 2009, Gupta ve Chandra 2013). Burada $x_1(\tau)$ ve $x_2(\tau)$ sırasıyla av ve avcı popülasyonunu göstermektedir. r ve d sırasıyla av popülasyonu için büyüme oranı ve çevre taşıma kapasitesidir. a_1 parametresi avın kişi başına düşen azalma oranının maksimum değeridir, n_1 ve n_2 sırasıyla av ve avcının çevresel koruma miktarını ölçer, s avcının büyüme oranını gösterir ve sa_2 avcının kişi başına düşen azalma oranının maksimum değeridir.

(4.15) modeline lineer olmayan hasat terimi de eklenirse $n_1 = n_2 = n$ olmak üzere

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = rx_1(1 - \frac{x_1}{d}) - \frac{a_1 x_1 x_2}{n + x_1} - \frac{qEx_1}{m_1 E + m_2 x_1}, \\ \frac{dx_2}{d\tau} = sx_2(1 - \frac{a_2 x_2}{n + x_1}), \end{cases} \quad (4.16)$$

modeli elde edilir, burada q yakalanabilirlik katsayısı, E hasat terimi, m_1 ve m_2 sabitlerdir. Parametrelerin geri kalanı (4.15) modeli ile aynıdır. Ayrıca biyolojik

anlamından dolayı tüm parametreler pozitif kabul edilmektedir. (4.16) da

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1}{d}, \quad y = \frac{a_1 x_2}{d}, \quad t = r\tau, \quad a = \frac{1}{r}, \quad \beta = \frac{a_2}{a_1}, \\ k &= \frac{n}{d}, \quad \sigma = \frac{qE}{rm_2 d}, \quad l = \frac{m_1 E}{m_2 d}, \quad \gamma = \frac{s}{r} \end{aligned}$$

değişken değiştirmeleri yapılırsa

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1 - x - \frac{ay}{k+x} - \frac{\sigma}{l+x}) \\ \frac{dy}{dt} = \gamma y(1 - \frac{\beta y}{k+x}) \end{cases} \quad (4.17)$$

sistemi elde edilir. İncelenecek olan (4.14) modeli tamsayı basamaktan olan (4.17) modelinin kesirli basamaktan türev içeren durumudur.

(4.14) sisteminin denge noktaları

$$\begin{cases} ({}^C D_{a^+}^\alpha x)(t) = 0 \\ ({}^C D_{a^+}^\alpha y)(t) = 0 \end{cases}$$

koşullarını sağlayan noktalardır. Bu noktalar aşağıdaki gibidir:

1. $E_0 = (0, 0)$.

2. Avcı yokken denge noktaları $E_A = (x_A, 0)$ ve $E_B = (x_B, 0)$ şeklindedir. Burada x_A ve x_B ikinci dereceden

$$x^2 - (1 - l)x + \sigma - l = 0$$

denkleminin kökleridir. Buradan

$$x_A = \frac{1}{2}(1 - l - \sqrt{(1 - l)^2 - 4(\sigma - l)}), \quad x_B = \frac{1}{2}(1 - l + \sqrt{(1 - l)^2 - 4(\sigma - l)})$$

bulunur.

$l < 1$ ve $(1 - l)^2 > 4(\sigma - l)$ durumunda eğer $\sigma > l$ ise $E_A = (x_A, 0)$ ve $E_B = (x_B, 0)$ denge noktalarının her ikisi de mevcuttur. Eğer $\sigma < l$ ise sadece $E_B = (x_B, 0)$ denge noktası mevcuttur.

3. Av yokken denge noktası $E_T = (0, \frac{k}{\beta})$ dır.

4. $E_1 = (x_1, y_1)$ ve $E_2 = (x_2, y_2)$ denge noktalarının apsisleri

$$x^2 + (\frac{a}{\beta} + l - 1)x + l(\frac{a}{\beta} + \frac{\sigma}{l} - 1) = 0$$

denkleminin kökleridir. Buradan

$$x_1 = \frac{1}{2}(1 - (\frac{a}{\beta} + l) - \sqrt{(\frac{a}{\beta} + l - 1)^2 - 4l(\frac{a}{\beta} + \frac{\sigma}{l} - 1)}),$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(1 - (\frac{a}{\beta} + l) + \sqrt{(\frac{a}{\beta} + l - 1)^2 - 4l(\frac{a}{\beta} + \frac{\sigma}{l} - 1)}),$$

$$y_1 = \frac{k + x_1}{\beta} \text{ ve } y_2 = \frac{k + x_2}{\beta}$$

bulunur.

Pozitif denge noktalarının varlığı $\frac{a}{\beta} + \frac{\sigma}{l} - 1$ terimine bağlıdır. Bunun için aşağıdaki lemmaları verelim.

Lemma 4.1 Kabul edelim ki $\frac{a}{\beta} + \frac{\sigma}{l} > 1$ olsun.

i) Eğer $\frac{a}{\beta} + l < 1$ ve $(\frac{a}{\beta} + l - 1)^2 > 4l(\frac{a}{\beta} + \frac{\sigma}{l} - 1)$ ise, bu durumda E_1 ve E_2 denge noktaları mevcuttur.

ii) Eğer $\frac{a}{\beta} + l < 1$ ve $(\frac{a}{\beta} + l - 1)^2 = 4l(\frac{a}{\beta} + \frac{\sigma}{l} - 1)$ ise, bu durumda E_1 ve E_2 denge noktaları çakışır ve $\bar{E} = (\bar{x}, \bar{y})$ olur, burada $\bar{x} = \frac{1}{2}(1 - l - \frac{a}{\beta})$ dır.

iii) $\frac{a}{\beta} + l > 1$ ya da $(\frac{a}{\beta} + l - 1)^2 < 4l(\frac{a}{\beta} + \frac{\sigma}{l} - 1)$ ise, bu durumda denge noktası mevcut değildir.

İspat. $A = 1 - (l + \frac{a}{\beta})$ ve $B = 4l(\frac{a}{\beta} + \frac{\sigma}{l} - 1)$ alalım. $\frac{a}{\beta} + \frac{\sigma}{l} > 1$ kabulünden $B > 0$ bulunur.

i) $\frac{a}{\beta} + l < 1$ olduğundan $A > 0$ dir. $(\frac{a}{\beta} + l - 1)^2 > 4l(\frac{a}{\beta} + \frac{\sigma}{l} - 1)$ olduğundan $0 < B < A^2$ bulunur. O halde

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}(A \pm \sqrt{A^2 - B}) > 0$$

elde edilir. Sonuç olarak x_1, x_2, y_1 ve y_2 pozitiftir ve E_1 ve E_2 denge noktaları mevcuttur.

ii) Bu durumda $A > 0$ ve $A^2 = B$ olup $x_{1,2} = \frac{1}{2}(A \pm \sqrt{A^2 - B}) = \frac{A}{2}$ elde edilir. Dolayısıyla denge noktaları çakışır, yani $E_1 = E_2 = (\bar{x}, \bar{y})$ olup $\bar{x} = \frac{1}{2}(1 - l - \frac{a}{\beta})$ dir.

iii) Bu durumda $A < 0$ ya da $A^2 < B$ bulunur. Eğer $A^2 < B$ ve $B > 0$ ise açık olarak x_1 ve x_2 kompleks olur ve bu durumda denge noktası mevcut değildir. Eğer $A < 0, B > 0$ ve $A^2 - B = 0$ ise, bu durumda $x_1 = x_2 = \frac{A}{2} < 0$ elde edilir ve denge noktası mevcut değildir. Son olarak $A < 0, B > 0$ ve $A^2 - B > 0$ ise, bu durumda $(A \pm \sqrt{A^2 - B}) < 0$ olup denge noktası mevcut değildir. ■

Lemma 4.2 Kabul edelim ki $\frac{a}{\beta} + \frac{\sigma}{l} < 1$ olsun. Bu durumda tek denge noktası mevcuttur.

İspat. $A = 1 - (l + \frac{a}{\beta})$ ve $B = 4l(\frac{a}{\beta} + \frac{\sigma}{l} - 1)$ alalım. O halde $B < 0$, yani $\sqrt{A^2 - B} > |A|$ elde edilir. $A > 0$ ise $A - \sqrt{A^2 - B} < 0$ ve $A + \sqrt{A^2 - B} > 0$ bulunur. Bu durumda bir tane denge noktası mevcuttur. Eğer $A < 0$ ise $A - \sqrt{A^2 - B} < 0$ ve $A + \sqrt{A^2 - B} > 0$ elde edilir. O halde yine bir tane denge noktası mevcuttur. ■

Uyarı 4.2 Eğer $\frac{a}{\beta} + \frac{\sigma}{l} = 1$ ve $A = 1 - (l + \frac{a}{\beta}) > 0$ ise $B = 4l(\frac{a}{\beta} + \frac{\sigma}{l} - 1) = 0$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}(A - \sqrt{A^2 - B}) = 0, \\ x_2 &= \frac{1}{2}(A + \sqrt{A^2 - B}) = A > 0 \end{aligned}$$

olmak üzere bir tane (x_2, y_2) denge noktası mevcuttur.

Eğer $\frac{a}{\beta} + \frac{\sigma}{l} = 1$ ve $A = 1 - (l + \frac{a}{\beta}) < 0$ ise $B = 4l(\frac{a}{\beta} + \frac{\sigma}{l} - 1) = 0$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}(A - \sqrt{A^2 - B}) = A < 0, \\ x_2 &= \frac{1}{2}(A + \sqrt{A^2 - B}) = 0 \end{aligned}$$

olup, denge noktası mevcut değildir.

Tanım 4.3 (Ghaziani vd. 2016) Bir denge noktasına karşılık gelen Jakobiye matrisinin en az bir λ_1 özdeğeri kararlı bölgede ise yani $|\arg \lambda_1| > \frac{\alpha\pi}{2}$ ise ve en az bir λ_2 özdeğeri kararsız bölgede ise yani $|\arg \lambda_2| < \frac{\alpha\pi}{2}$ ise, bu durumda bu denge noktasına semer noktası denir.

Aşağıdaki teoremden incelenen denge noktalarının kararlılık analizi verilmiştir.

Teorem 4.2

- i) $\sigma > l$ ise, bu durumda E_0 semer noktasıdır.
- ii) $\frac{a}{\beta} + \frac{\sigma}{l} > 1$ ise, bu durumda E_T denge noktası asimptotik kararlıdır. $\frac{a}{\beta} + \frac{\sigma}{l} < 1$ ise, bu durumda E_T semer noktasıdır.

İspat. (4.14) sisteminin Jakobiye matrisi

$$J = \begin{bmatrix} 1 - 2x - \frac{ayk}{(k+x)^2} - \frac{l\sigma}{(l+x)^2} & -\frac{\gamma x}{k+x} \\ \frac{\gamma\beta y^2}{(k+x)^2} & \gamma - \frac{2\gamma\beta y}{k+x} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

i) E_0 noktasındaki Jakobiye matrisi

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\frac{\sigma-l}{l} & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

olur. $J(E_0)$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = -\frac{\sigma-l}{l}$ ve $\lambda_2 = \gamma$ dir. $\sigma > l$ ise $|\arg \lambda_1| = \pi > \frac{\alpha\pi}{2}$ ve $|\arg \lambda_2| = 0 < \frac{\alpha\pi}{2}$ olduğundan E_0 semer noktasıdır.

ii) E_T noktasındaki Jakobiye matrisi

$$J(E_T) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{a}{\beta} - \frac{\sigma}{l} & 0 \\ \frac{a}{\beta} & -\gamma \end{bmatrix}$$

olur. $J(E_T)$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = 1 - \frac{a}{\beta} - \frac{\sigma}{l}$ ve $\lambda_2 = -\gamma$ dir. $\lambda_2 < 0$ olduğundan $|\arg \lambda_2| = \pi > \frac{\alpha\pi}{2}$ dir. Eğer $\frac{a}{\beta} + \frac{\sigma}{l} > 1$ ise, bu durumda $\lambda_1 < 0$ ve $|\arg \lambda_1| = \pi > \frac{\alpha\pi}{2}$ elde edilir. Dolayısıyla E_T denge noktası asimptotik kararlı olur.

Eğer $\frac{a}{\beta} + \frac{\sigma}{l} < 1$ ise $\lambda_1 > 0$ ve $|\arg \lambda_1| = 0 < \frac{\alpha\pi}{2}$ bulunur. Bu durumda Tanım 4.3 dikkate alınrsa E_T semer noktası olur. ■

Şimdi $\alpha \in [0, 1)$ olmak üzere Caputo kesirli türevi içeren

$$\begin{cases} ({}^C D_{a+}^{\alpha} x)(t) = f(x, y) \\ ({}^C D_{a+}^{\alpha} y)(t) = g(x, y) \end{cases} \quad (4.18)$$

sistemini göz önüne alalım. (4.18) sisteminin denge noktaları

$$f(x^*, y^*) = 0 \text{ ve } g(x^*, y^*) = 0$$

eşitliklerini sağlayan $E = (x^*, y^*)$ noktalarıdır. (4.18) sisteminin Jakobiyeen matrisi

$$J = \begin{bmatrix} \partial f / \partial x & \partial f / \partial y \\ \partial g / \partial x & \partial g / \partial y \end{bmatrix}$$

dir. Yapılan incelemelerden görülmektedir ki, E denge noktasına karşılık gelen $J(E) = J|_E$ matrisinin λ özdeğerleri için

$$|\arg \lambda| > \frac{\alpha\pi}{2} \quad (4.19)$$

sağlanırsa, bu durumda $E = (x^*, y^*)$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

Ahmed ve Elgazzar (2007) yaptıkları çalışmada aşağıdaki sorunun cevabını aramışlardır: $a_1, a_2, \dots, a_n$ reel katsayılar ve

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n \quad (4.20)$$

olmak üzere hangi koşullar altında $P(\lambda) = 0$ denkleminin tüm kökleri (4.19) özelliğini sağlar?

Uyarı 4.3 $\alpha = 1$ ise, (4.19) koşulunun sağlanması için gerek ve yeter koşul Routh-Hurwitz şartlarının sağlanmasıdır.

Uyarı 4.4 (Ahmed ve Elgazzar 2007) $\alpha \in [0, 1)$ ise, Routh-Hurwitz şartları (4.19) özelliğinin sağlanması için yeter koşullardır.

Tanım 4.4 $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$ polinomunun $D(f)$ diskriminantı

$$D(f) = (-1)^{n(n-1)/2} R(f, f')$$

dir, burada f' , f polinomunun türevi olup $g(x) = x^l + b_1x^{l-1} + b_2x^{l-2} + \dots + b_l$ ise $R(f, g)$ karşılık gelen $(n + l) \times (n + l)$ tipinde Sylvester matrisinin determinantıdır.

$n = 3$ durumunda

$$D(P) = 18a_1a_2a_3 + (a_1a_2)^2 - 4a_3a_1^3 - 4a_2^3 - 27a_3^2$$

dir.

Sonuç 4.1 (Ahmed ve Elgazzar 2007) $n = 3$ olmak üzere aşağıdaki koşullardan birinin sağlanması durumunda (4.19) koşulu gerçekleşir:

i) $D(P) > 0$, $a_1 > 0$, $a_3 > 0$ ve $a_1a_2 > a_3$.

ii) $D(P) < 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$ ve $\alpha < \frac{2}{3}$.

iii) $D(P) < 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ ve $a_1a_2 = a_3$.

İspat. i) $D(P) > 0$ olduğundan, $n = 3$ durumunda (4.20) polinom denkleminin tüm kökleri reeldir. Diğer taraftan biliniyor ki (4.20) nin bütün köklerinin negatif reel kısmı olması için gerek ve yeter koşul Routh-Hurwitz kriterinin sağlanmasıdır. Hipotezden Routh-Hurwitz koşulları sağlanır. O halde bütün kökler negatif reel olur. Dolayısıyla $|\arg \lambda| > \frac{\alpha\pi}{2}$ sağlanır.

ii) $D(P) < 0$ olduğundan $n = 3$ durumunda (4.20) polinom denkleminin 1 reel, 1 kompleks kök çifti vardır. O halde $\lambda_1 = -b$, $\lambda_2 = \beta + i\gamma$, $\lambda_3 = \beta - i\gamma$ olmak üzere

$$P(\lambda) = (\lambda + b)(\lambda - \beta - i\gamma)(\lambda - \beta + i\gamma) \quad (4.21)$$

şeklinde olur. (4.21) düzenlenip (4.20) polinom denkleminin eşitlenirse

$$a_1 = b - 2\beta, \quad a_2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta b, \quad a_3 = b(\beta^2 + \gamma^2) \quad (4.22)$$

elde edilir. Hipotezler göz önüne alındığında

$$b > 2\beta, \quad \beta^2 + \gamma^2 > 2\beta b, \quad b > 0 \quad (4.23)$$

bulunur. $\lambda_1 = -b < 0$ olduğundan $|\arg \lambda_1| > \frac{\alpha\pi}{2}$ sağlanır.

Diğer taraftan $b > 2\beta$ olduğundan, $\beta > 0$ olmak üzere $2b\beta > 4\beta^2$ elde edilir. Ayrıca $\beta^2 + \gamma^2 = \beta^2 \sec^2 \theta$ dir, burada $\theta = |\arg \lambda_2| = |\arg \lambda_3|$ dir. Son elde edilen eşitsizlikler (4.23) de göz önüne alınırsa

$$\beta^2 \sec^2 \theta > 4\beta^2 \quad (4.24)$$

elde edilir. (4.24) de gerekli düzenlemeler yapılırsa $\theta > \frac{\pi}{3}$ veya $\theta > \frac{2\pi}{3}$ bulunur. Son olarak $\alpha < \frac{2}{3}$ hipoteziyle bu bulunan eşitsizlikler birleştirilirse $|\arg \lambda_2| = |\arg \lambda_3| > \frac{\alpha\pi}{2}$ elde edilir.

iii) $D(P) < 0$ olduğundan (4.22) geçerlidir. $a_1 a_2 = a_3$ hipotezi ve (4.22) eşitliği kullanılarak

$$\beta = 0 \text{ veya } 2b\beta = b^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

bulunur. $a_1 > 0$ olduğundan $b > 2\beta$ ve $a_2 > 0$ olduğundan $\beta^2 + \gamma^2 > 2b\beta$ elde edilir. Bu eşitsizliklerle $2b\beta = b^2 + \beta^2 + \gamma^2$ eşitliği çelişir. Dolayısıyla $\beta = 0$ olur. (4.21) de $\beta = 0$ yazılırsa

$$\lambda_1 = -b, \lambda_{2,3} = \mp i\gamma$$

elde edilir. Burada $a_3 > 0$ olduğundan $b > 0$ dır. O halde kökler negatif reel ve sıfır sanal olduğundan $|\arg \lambda| > \frac{\alpha\pi}{2}$ sağlanır. ■

4.3 Lyapunov Yöntemi ve Mittag-Leffler Kararlılık

Daha önceki kesimde yapılan incelemeler kesirli diferensiyel denklemlerin denge noktalarının lokal kararlılık analizini içeriyordu. Bu kesimde denge noktalarının global kararlılık analizi yapılacaktır. Bu bağlamda kesirli diferensiyel denklemlerde karşımıza çıkan Mittag-Leffler kararlılık tanıtılacak ve Lyapunov yöntemi yardımıyla sistemlerin kararlılığı incelenecektir.

$\alpha \in (0, 1)$ olmak üzere

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) = f(x, y(x)) \quad (4.25)$$

kesirli diferensiyel denklemini göz önüne alalım, burada D^{α} operatörü hem Riemann-Liouville hem de Caputo türevi yerine kullanılmaktadır. Bu kesimde genelliği bozmadan (4.25) denkleminin denge noktasının $y^* = 0$ olduğu kabul edilecektir.

Uyarı 4.5 Genelliği bozmaksızın her $y^* \neq 0$ denge noktası $y_1 = y - y^*$ değişken değiştirmesi ile sıfıra taşınabilir. Gerçekten, $y^* \neq 0$ (4.25) denkleminin denge noktası olsun. İlk olarak (4.25) denklemindeki kesirli türevin Caputo türevi olduğunu kabul edelim. Bu durumda $y_1 = y - y^*$ değişken değiştirmesi yapıp (2.37) dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} ({}^CD_{a+}^{\alpha}y_1)(x) &= ({}^CD_{a+}^{\alpha}(y - y^*))(x) \\ &= f(x, y(x)) \\ &= f(x, y_1 + y^*) \\ &= g(x, y_1) \end{aligned}$$

bulunur. $y = y^*$ (4.25) denkleminin denge noktası olduğundan $g(x, 0) = 0$ olduğu açıktır. Dolayısıyla elde edilen yeni sistemin denge noktası $y_1^* = 0$ dır.

Şimdi (4.25) denklemindeki kesirli türevin Riemann-Liouville türevi olduğunu kabul edelim. $y_1 = y - y^*$ değişken değiştirmesi yapıp (2.12) dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} ({}^{RL}D_{a+}^{\alpha}y_1)(x) &= ({}^{RL}D_{a+}^{\alpha}(y - y^*))(x) \\ &= f(x, y(x)) - \frac{y^*(x - a)^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} \\ &= f(x, y_1 + y^*) - \frac{y^*(x - a)^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} \\ &= g(x, y_1) \end{aligned}$$

bulunur. Burada da $y = y^*$ (4.25) denkleminin denge noktası olduğundan $g(x, 0) = 0$ dır. Dolayısıyla elde edilen yeni sistemin denge noktası $y_1^* = 0$ dır.

Tanım 4.5 (Zhang vd. 2011) $B \subset \mathbb{R}^n$ orijini içeren bir bölge olsun. Eğer

$$\|y(x)\| \leq \{m(y_0)E_\alpha(-\lambda(x-a)^\alpha)\}^b \quad (4.26)$$

sağlanırsa, bu durumda (4.25) denkleminin sıfır çözümüne Mittag-Leffler kararlıdır denir, burada $y(a) = y_0$, $\lambda \geq 0$, $b > 0$, $m(0) = 0$, $m(y) \geq 0$ ve $m(y)$, $y \in B \subset \mathbb{R}^n$ de (3.15) ile tanımlı Lipschitz koşulunu sağlar.

Tanım 4.6 (Zhang vd. 2011) $B \subset \mathbb{R}^n$ orijini içeren bir bölge olsun. Eğer

$$\|y(x)\| \leq \{m(y_0)(x-a)^{-\gamma}E_{\alpha,1-\gamma}(-\lambda(x-a)^\alpha)\}^b \quad (4.27)$$

sağlanırsa, bu durumda (4.25) denkleminin sıfır çözümüne genelleştirilmiş Mittag-Leffler kararlıdır denir, burada $y(a) = y_0$, $-\alpha < \gamma \leq 1 - \alpha$, $\lambda \geq 0$, $b > 0$, $m(0) = 0$, $m(y) \geq 0$ ve $m(y)$, $y \in B \subset \mathbb{R}^n$ de (3.15) ile tanımlı Lipschitz koşulunu sağlar.

Tanım 4.7 (Zhang vd. 2011) Eğer $\theta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ sürekli fonksiyonu kesin artansa ve $\theta(0) = 0$ ise, bu durumda $\theta(r)$ fonksiyonuna K - sınıfındandır denir.

Uyarı 4.6 (Zhang vd. 2011) Mittag-Leffler kararlı olan bir çözüm lokal asimptotik kararlıdır.

Lyapunov yöntemi ile Mittag-Leffler kararlılığın incelendiği sonuçları vermeden önce aşağıdaki yardımcı lemmaları ifade edelim.

Lemma 4.3 (Lakshmikantham vd. 2009) $0 < \alpha < \lambda < 1$, $h \in C([a, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $v, w \in C_{1-\alpha}([a, T], \mathbb{R})$ λ üslü Hölder sürekli olsun ve

$$i) \quad ({}^{RL}D_{a^+}^\alpha v)(x) \leq h(x, v(x)),$$

$$\text{ii) } ({}^{RL}D_{a+}^{\alpha} w)(x) \geq h(x, w(x)), \quad a \leq x \leq T,$$

eşitsizlikleri sağlansın.

Burada $\Gamma(\alpha)v(x)(x-a)^{1-\alpha}|_{x=a} = v_0$ ve $\Gamma(\alpha)w(x)(x-a)^{1-\alpha}|_{x=a} = w_0$ dır. Ayrıca kabul edelim ki h fonksiyonu

$$h(x, y_1) - h(x, y_2) \leq K(y_1 - y_2), \quad y_1 \geq y_2, \quad K > 0$$

Lipschitz koşulunu sağlasın. Bu durumda $v_0 \leq w_0$ olduğunda, $v(x) \leq w(x)$, $a \leq x \leq T$ sağlanır.

Uyarı 4.7 Lemma 4.3 de, ${}^{RL}D_{a+}^{\alpha}$ Riemann-Liouville türevi yerine ${}^CD_{a+}^{\alpha}$ Caputo türevi alındığında da aynı sonuçlar geçerlidir.

Lemma 4.4 (Denton ve Vatsala 2010) $0 < \alpha < 1$, $v, w \in C_{1-\alpha}([a, T], \mathbb{R})$ ve $h \in C([a, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ olsun ve

$$\text{i) } v(x) \leq \frac{v_0}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} h(t, v(t)) dt,$$

$$\text{ii) } w(x) \geq \frac{w_0}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} h(t, w(t)) dt,$$

eşitsizlikleri sağlansın.

Burada $a < x \leq T$, $\Gamma(\alpha)v(x)(x-a)^{1-\alpha}|_{x=a} = v_0$ ve $\Gamma(\alpha)w(x)(x-a)^{1-\alpha}|_{x=a} = w_0$ dır. Ayrıca kabul edelim ki $h(x, y(x))$ fonksiyonu her bir x için y ye göre azalmayan olsun ve

$$h(x, y_1) - h(x, y_2) \leq K(y_1 - y_2), \quad y_1 \geq y_2, \quad K > 0 \quad (4.28)$$

Lipschitz koşulunu sağlasın. Bu durumda $v_0 \leq w_0$ olduğunda, $v(x) \leq w(x)$, $a < x \leq T$, sağlanır.

Şimdi $0 < \alpha < 1$ olmak üzere

$$({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = f(x, y(x)), \quad (4.29)$$

lineer olmayan kesirli diferensiyel denklem sistemini $y(a) = y_0$ başlangıç koşulu ile birlikte göz önüne alalım. Burada $f : [a, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ x 'e göre parçalı sürekli ve $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $y^* = 0$ denge noktasını içeren bölgedir. Ayrıca (4.29) sisteminin $y(a) = y_0$ başlangıç koşulunu sağlayan tek $y(x) \in C^1[a, \infty)$ çözümünün olduğu kabul edilmektedir.

Aşağıdaki teoremlerde Lyapunov metodu kullanılarak (4.29) sisteminin Mittag-Leffler kararlılığı için yeter koşullar elde edilmiştir (Zhang vd. 2011).

Teorem 4.3 $a = 0$ alalım. $D \subset \mathbb{R}^n$ orijini içeren bir bölge olmak üzere

$V(x, y(x)) : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^+$ sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olsun ve y 'ye göre (4.28) Lipschitz koşulunu sağlasın. Ayrıca

$$\beta_1 \|y\|^c \leq V(x, y(x)) \leq \beta_2 \|y\|^{cd}, \quad (4.30)$$

$$({}^C D_{0+}^\alpha V)(x) \leq -\beta_3 \|y\|^{cd}, \quad (4.31)$$

sağlansın. Burada $\beta_1, \beta_2, \beta_3, c$ ve d keyfi pozitif sabitlerdir. Bu durumda (4.29) sisteminin $y^* = 0$ denge noktası Mittag-Leffler kararlıdır (lokal asimptotik kararlıdır). Eğer hipotezler $\mathbb{R}^n$ de sağlanırsa, bu durumda $y^* = 0$ denge noktası global Mittag-Leffler kararlıdır (global asimptotik kararlıdır).

İspat. (4.30) ve (4.31) den

$$({}^C D_{0+}^\alpha V)(x) \leq -\frac{\beta_3}{\beta_2} V(x, y(x)) \quad (4.32)$$

elde edilir.

$$({}^C D_{0+}^\alpha V)(x) = -\frac{\beta_3}{\beta_2} V(x, y(x)) \quad (4.33)$$

kesirli lineer diferensiyel denkleminin her iki tarafına (2.46) ile tanımlı Laplace

dönüşümü uygulanıp Teorem 2.14 dikkate alınır

$$V(s) = V(0, y(0)) \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \frac{\beta_3}{\beta_2}}$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafına ters Laplace dönüşümü uygulanıp Teorem 2.11 göz önüne alınır

$$V(x, y(x)) = V(0, y(0)) E_\alpha(-\frac{\beta_3}{\beta_2} x^\alpha)$$

çözümü bulunur. (4.32), (4.33) ve Uyarı 4.7 dikkate alınır

$$V(x, y(x)) \leq V(0, y(0)) E_\alpha(-\frac{\beta_3}{\beta_2} x^\alpha) \quad (4.34)$$

elde edilir, burada $E_\alpha(-\frac{\beta_3}{\beta_2} x^\alpha)$ negatif olmayan Mittag-Leffler fonksiyonudur (Pollard 1948). (4.34), (4.30) da göz önüne alınır

$$\|y(x)\| \leq \left[\frac{V(0, y(0))}{\beta_1} E_\alpha(-\frac{\beta_3}{\beta_2} x^\alpha) \right]^{\frac{1}{c}}$$

elde edilir, burada $x \rightarrow \infty$ için, $E_\alpha(-\frac{\beta_3}{\beta_2} x^\alpha) \rightarrow 0$ dır (Podlubny 1999). Dolayısıyla ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.4 $D \subset \mathbb{R}^n$ orijini içeren bir bölge olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanacak şekilde sürekli türevlenebilir bir $V(x, y(x)) : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu ile K -sınıfından bir θ fonksiyonunun mevcut olduğunu kabul edelim:

$$V(x, y(x)) \geq \theta(\|y\|), \quad (4.35)$$

$$({}^C D_{0+}^\alpha V)(x) \leq 0. \quad (4.36)$$

Bu durumda (4.29) sisteminin $y^* = 0$ denge noktası lokal kararlıdır. Eğer hipotezler $\mathbb{R}^n$ de sağlanırsa, bu durumda, $y^* = 0$ denge noktası global kararlıdır.

İspat. İlk olarak

$$({}^C D_{0+}^\alpha V)(x) = 0 \quad (4.37)$$

kesirli lineer diferensiyel denklemini ele alalım.

(4.37) denkleminin her iki tarafına (2.46) ile tanımlı Laplace dönüşümü uygulanırsa Teorem 2.14 den

$$V(s) = \frac{V(0, y(0))}{s}$$

elde edilir. Bu ifadenin her iki tarafına ters Laplace dönüşümü uygulandığında

$$V(x, y(x)) = V(0, y(0))$$

bulunur. (4.36), (4.37) ve Uyarı 4.7 dikkate alınır

$$V(x, y(x)) \leq V(0, y(0)) \quad (4.38)$$

elde edilir. (4.38) eşitsizliği (4.35) de göz önüne alınır

$$\|y(x)\| \leq \theta^{-1}(V(0, y(0)))$$

elde edilir ki bu bize $y^* = 0$ denge noktasının kararlı olduğunu gösterir. ■

Yukarıdaki teoremlerden görüyoruz ki $V(x, y(x))$ fonksiyonu üzerinde ${}^C D_{0+}^\alpha V$ türevinin varlığını garantilemek için güçlü şartlar kabul edilmiştir. Bu şartlar $V(x, y(x))$ fonksiyonunun seçimini zorlaştırır. Bunun için sürekli türevlenebilir $V(x, y(x))$ fonksiyonu $V(x, y(x)) \in C_{1-\alpha}([a, \infty) \times D, \mathbb{R}^+)$ olarak zayıflatılabilir. Burada $\gamma \in \mathbb{C}$ ($0 \leq \Re(\gamma) < 1$) ve $a \leq x \leq b \leq \infty$ olmak üzere $C_\gamma[a, b]$ ağırlıklı uzayı, $(a, b]$ de tanımlı ve $(x - a)^\gamma f(x) \in C[a, b]$ özelliğine sahip f fonksiyonlarının uzayıdır.

Lemma 4.5 (Kilbas vd. 2006) $0 < \alpha < 1$ ve $y(x)$, $[a, b]$ de tanımlı Lebesgue fonksiyonu olsun. Eğer

$$\lim_{x \rightarrow a^+} [(x - a)^{1-\alpha} y(x)] = c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad (4.39)$$

ise, bu durumda

$$(I_{a+}^{1-\alpha} y)(a+) = \lim_{x \rightarrow a^+} (I_{a+}^{1-\alpha} y)(x) = c\Gamma(\alpha) \quad (4.40)$$

dır.

İspat. Keyfi $\varepsilon > 0$ seçelim. (4.39) dan, $a < t < a + \delta$ için,

$$|(t-a)^{1-\alpha}y(t) - c| < \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)} \quad (4.41)$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mevcuttur. Diğer taraftan (2.13) den

$$\Gamma(\alpha) = (I_{a+}^{1-\alpha}(t-a)^{\alpha-1})(x) \quad (4.42)$$

elde edilir. Bu eşitlik ve (2.7) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} |(I_{a+}^{1-\alpha}y)(x) - c\Gamma(\alpha)| &= |(I_{a+}^{1-\alpha}y)(x) - c(I_{a+}^{1-\alpha}(t-a)^{\alpha-1})(x)| \\ &= \left| \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} [y(t) - c(t-a)^{\alpha-1}] dt \right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} |y(t) - c(t-a)^{\alpha-1}| dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} (t-a)^{\alpha-1} |y(t)(t-a)^{1-\alpha} - c| dt \end{aligned}$$

bulunur. (4.41), (2.7) ve (2.13) göz önüne alınırsa, $a < t < x < a + \delta$ için,

$$\begin{aligned} |(I_{a+}^{1-\alpha}y)(x) - c\Gamma(\alpha)| &< \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} (t-a)^{\alpha-1} dt \\ &= \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)} (I_{a+}^{1-\alpha}(t-a)^{\alpha-1})(x) \\ &= \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır. ■

Aşağıdaki teoremlerde (4.29) sistemi için kararlılık incelemesi yapılmıştır (Zhang vd. 2011).

Teorem 4.5 $D \subset \mathbb{R}^n$ orijini içeren bir bölge olmak üzere

$V(x, y(x)) \in C_{1-\alpha}([a, \infty) \times D, \mathbb{R}_+)$ ve K - sınıfından bir θ fonksiyonu mevcut olsun öyle ki

$$V(x, y(x)) \geq \theta(\|y\|), \quad (4.43)$$

$$({}^{RL}D_{a+}^{\alpha}V)(x) \leq 0, \quad (4.44)$$

eşitsizlikleri sağlansın. Burada $0 \leq a < x$ ve $y \in D$ dir. Bu durumda (4.29) sisteminin $y^* = 0$ denge noktası lokal asimptotik karardır. Eğer hipotezler $\mathbb{R}^n$ de sağlanırsa, bu durumda $y^* = 0$ denge noktası global asimptotik karardır.

İspat. Öncelikle

$$({}^{RL}D_{a+}^{\alpha}V)(x) = 0 \quad (4.45)$$

kesirli lineer diferensiyel denklemini $\Gamma(\alpha)V(x, y(x))(x - a)^{1-\alpha} \big|_{x=a} = V_0$ başlangıç koşulu ile birlikte ele alalım.

(4.45) in her iki tarafına (2.46) ile tanımlı Laplace dönüşümü uygulanıp Teorem 2.13 dikkate alınır

$$V(s) = \frac{(I_{a+}^{1-\alpha}V)(x) \big|_{x=a}}{s^{\alpha}}$$

elde edilir. Bu ifadenin her iki yanına ters Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$V(x, y(x)) = (I_{a+}^{1-\alpha}V)(x) \big|_{x=a} \frac{(x - a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad (4.46)$$

bulunur. Lemma 4.5, (4.46) da göz önüne alınır

$$V(x, y(x)) = V_0 \frac{(x - a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

elde edilir. (4.44), (4.45) ve Lemma 4.3 dikkate alınır

$$V(x, y(x)) \leq V_0 \frac{(x - a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad (4.47)$$

bulunur. (4.47), (4.43) de yazılırsa

$$\|y(x)\| \leq \theta^{-1} \left(V_0 \frac{(x - a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty,$$

elde edilir ki bu da $y^* = 0$ denge noktasının asimptotik kararlı olduğunu gösterir. ■

Teorem 4.6 $D \subset \mathbb{R}^n$ orijini içeren bir bölge olmak üzere

$V(x, y(x)) \in C_{1-\alpha}([a, \infty) \times D, \mathbb{R}^+)$ fonksiyonu y' ye göre (4.28) Lipschitz koşulunu sağlasın. Kabul edelim ki $V(x, 0) = 0$ olsun ve

$$V(x, y(x)) \geq c \|y\|^d, \quad (4.48)$$

$$({}^{RL}D_{a+}^{\alpha}V)(x) \leq 0, \quad (4.49)$$

eşitsizlikleri sağlansın, burada $a \geq 0$ ve c, d keyfi pozitif sabitlerdir. Bu durumda (4.29) sisteminin $y^* = 0$ denge noktası genelleştirilmiş Mittag-Leffler kararlıdır. Eğer hipotezler $\mathbb{R}^n$ de sağlanırsa, bu durumda $y^* = 0$ denge noktası genelleştirilmiş global Mittag-Leffler kararlıdır.

İspat. $\Gamma(\alpha)V(x, y(x))(x - a)^{1-\alpha} \big|_{x=a} = V_0$ olmak üzere, Teorem 4.5 in ispatında olduğu gibi

$$V(x, y(x)) \leq V_0 \frac{(x - a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad (4.50)$$

dir. (4.50), (4.48) de göz önüne alınırsa

$$\|y(x)\| \leq \left(\frac{V_0}{c\Gamma(\alpha)} (x - a)^{\alpha-1} \right)^{\frac{1}{d}}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik

$$\|y(x)\| \leq \left(\frac{V_0}{c} (x - a)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(0, (x - a)^\alpha) \right)^{\frac{1}{d}}$$

eşitsizliğine denktir. Dolayısıyla $y^* = 0$ genelleştirilmiş Mittag-Leffler kararlıdır. ■

Aşağıdaki teoremlerde karşılaştırma metodu kullanılarak kesirli diferensiyel sistemlerin kararlılığı incelenecektir (Zhang vd. 2011). Bunun için $f(x, 0) = 0$ olmak üzere (4.29) sistemini ve

$$({}^{RL}D_{a+}^\alpha u)(x) = g(x, u(x)), \quad \Gamma(\alpha)u(x)(x - a)^{1-\alpha} \big|_{x=a} = u_0, \quad (4.51)$$

kesirli diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Burada $0 < \alpha < 1$, $u_0 \in \mathbb{R}^+$, $u(x) \in C_{1-\alpha}([a, \infty), \mathbb{R})$, $g(x, 0) = 0$ olmak üzere $g \in C([a, \infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ fonksiyonu u 'ya göre (4.28) Lipschitz koşulunu sağlar. Ayrıca $x \geq a$ için (4.51) sisteminin $u(x)$ tek çözümünün mevcut olduğu kabul edilmektedir.

Öncelikle karşılaştırma metodunun verileceği teoremlerin ispatında kullanılacak bir sonucu ifade edelim.

Teorem 4.7 (Kilbas vd. 2006) $0 < \alpha < 1$ ve G , reel ekseninde açık küme olsun.

$f : (a, b] \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere her $y \in G$ için $f(x, y(x)) \in C_{1-\alpha}[a, b]$ sağlansın. $y(x) \in C_{1-\alpha}[a, b]$ iken, $y(x)$ fonksiyonunun

$$\begin{aligned}({}^{RL}D_{a+}^{\alpha}y)(x) &= f(x, y(x)), \\ (I_{a+}^{1-\alpha}y)(a+) &= b, \quad b \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

Cauchy problemini sağlaması için gerek ve yeter koşul $y(x)$ in

$$y(x) = \frac{b(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t, y(t))}{(x-t)^{1-\alpha}} dt.$$

integral denklemini sağlamasıdır.

Teorem 4.8 (4.29) sisteminin bir denge noktası $y = 0$ olsun. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ orijini içeren bölge ve $V(x, 0) = 0$ olmak üzere $V \in C_{1-\alpha}([a, \infty) \times D, \mathbb{R}^+)$ ve K - sınıfından bir θ fonksiyonu mevcut olsun öyle ki

$$V(x, y(x)) \geq \theta(\|y\|)$$

sağlansın. Ayrıca $V(x, y(x))$

$$({}^{RL}D_{a+}^{\alpha}V)(x) \leq g(x, V(x, y)), \quad (x, y) \in [a, \infty) \times \Omega \quad (4.52)$$

eşitsizliğini sağlasın ve $g(x, y)$ her x için y 'ye göre azalmayan olsun.

i) (4.51) in sıfır çözümü kararlı ise, bu durumda (4.29) un sıfır çözümü de kararlıdır.

ii) (4.51) in sıfır çözümü asimptotik kararlı ise, bu durumda (4.29) un sıfır çözümü de asimptotik kararlıdır.

İspat. $y(x), y_0 \in \Omega$ başlangıç koşullu (4.29) sisteminin çözümü olsun. $y(x)$ çözüm eğrisi boyunca $V(x, y(x)), V(x)$ olarak yazılabilir.

$$({}^{RL}D_{a+}^{\alpha}V)(x) = g(x, V(x, y)) \quad (4.53)$$

denklemini $\Gamma(\alpha)V(x)(x-a)^{1-\alpha}|_{x=a} = V_0$ başlangıç koşulu ile birlikte ele alalım.

Teorem 4.7 den bu başlangıç değer problemi

$$V(x) = \frac{V_0(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} g(t, V(t)) dt$$

integral denklemine denktir.

(4.52), (4.53) ve Lemma 4.3 dikkate alındığında

$$V(x) \leq \frac{V_0(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} g(t, V(t)) dt \quad (4.54)$$

elde edilir. Diğer taraftan, Teorem 4.7 den (4.51) denklemi

$$u(x) = \frac{u_0(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} g(t, u(t)) dt \quad (4.55)$$

integral denklemine denktir.

Şimdi $u_0 = V_0$ alınıp (4.54) ve (4.55) eşitsizliklerine Lemma 4.4 uygulanırsa $V(x) \leq u(x)$, $x > a$, elde edilir.

i) Eğer (4.51) denkleminin sıfır çözümü kararlı ise, bu durumda her $u_0 \geq 0$ için en az bir $\varepsilon > 0$ vardır öyle ki $|u_0| < \delta$ olduğunda her $x > a$ için $|u(x)| < \varepsilon$ sağlanır. $V(x, y(x)) \geq \theta(\|y\|)$ hipotezi de dikkate alınırsa

$$\theta(\|y\|) \leq V(x, y(x)) \leq u(x) < \varepsilon \quad (4.56)$$

elde edilir. (4.56) eşitsizliğinden

$$\|y(x)\| < \theta^{-1}(\varepsilon) \quad (4.57)$$

bulunur, dolayısıyla (4.29) un sıfır çözümü kararlıdır.

ii) (4.56) eşitsizliğinin her iki yanının $x \rightarrow \infty$ için limiti alınıp, K - sınıfından fonksiyonun tanımı dikkate alınırsa

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \|y(x)\| = 0$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.9 $y = 0$, (4.29) sisteminin denge noktası olsun. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ orijini içeren bölge olmak üzere $V \in C_{1-\alpha}([a, \infty) \times \Omega, \mathbb{R}^+)$ fonksiyonu için $V(x, 0) = 0$ ve

$$V(x, y(x)) \geq k \|y\|^c \quad (4.58)$$

sağlansın. Ayrıca $V(x, y(x))$, y 'ye göre (4.28) Lipschitz koşulunu ve

$$({}^{RL}D_{a+}^\alpha V)(x) \leq g(x, V(x, y)), \quad (x, y) \in [a, \infty) \times \Omega, \quad (4.59)$$

eşitsizliğini sağlasın, burada $k > 0$, $c > 0$ ve $g(x, y)$ her x için, y 'ye göre azalmayan fonksiyondur. Bu durumda (4.51) denkleminin sıfır çözümü genelleştirilmiş Mittag-Leffler kararlı ise (4.29) sisteminin sıfır çözümü de genelleştirilmiş Mittag-Leffler kararlıdır.

İspat. Tanım 4.6 dan eğer (4.51) denkleminin sıfır çözümü genelleştirilmiş Mittag-Leffler kararlı ise, bu durumda $\lambda \geq 0$, $b > 0$ ve $-\alpha < \gamma \leq 1 - \alpha$ sabitleri vardır öyle ki

$$|u(x)| \leq \{m(u_0)(x - a)^{-\gamma} E_{\alpha, 1-\gamma}(-\lambda(x - a)^\alpha)\}^b \quad (4.60)$$

sağlanır. Burada $m(0) = 0$, $m(y) \geq 0$ ve K , Lipschitz sabiti olmak üzere $m(y)$, y 'ye göre Lipschitz koşulunu sağlar.

$\Gamma(\alpha)V(x, y)(x - a)^{1-\alpha}|_{x=a} = u_0 = V_0$ alınırsa Teorem 4.8 in ispatında olduğu gibi $V(x, y) \leq u(x)$ dir. Bu eşitsizlik, (4.58) ve (4.60) eşitsizlikleri ile birlikte göz önüne alınırsa

$$k \|y\|^c \leq V(x, y(x)) \leq u(x) \leq \{m(u_0)(x - a)^{-\gamma} E_{\alpha, 1-\gamma}(-\lambda(x - a)^\alpha)\}^b$$

elde edilir. Buradan

$$\|y(x)\| \leq \left\{ \frac{m(\Gamma(\alpha)V(x, y)(x - a)^{1-\alpha}|_{x=a})}{k^{1/b}} (x - a)^{-\gamma} E_{\alpha, 1-\gamma}(-\lambda(x - a)^\alpha) \right\}^{b/c} \quad (4.61)$$

dir. (4.61) eşitsizliğinde

$$M(y) = \frac{m(\Gamma(\alpha)V(x, y)(x - a)^{1-\alpha}|_{x=a})}{k^{1/b}}$$

alınırsa

$$\|y(x)\| \leq \{M(y(a))(x - a)^{-\gamma} E_{\alpha, 1-\gamma}(-\lambda(x - a)^\alpha)\}^{b/c}$$

elde edilir. $V(x, 0) = 0$ kabulünden

$$M(0) = \frac{m(\Gamma(\alpha)V(x, 0)(x - a)^{1-\alpha}|_{x=a})}{k^{1/b}} = 0$$

dır. $m(y) \geq 0$, $V(x, y) \geq 0$ ve $k > 0$ olduğundan $M(y)$ negatif olmayan fonksiyondur. Ayrıca $m(y)$ ve $V(x, y)$, y 'ye göre Lipschitz koşulunu sağladığından $M(y)$ fonksiyonu da Lipschitz koşulunu sağlar. Dolayısıyla (4.29) sisteminin sıfır çözümü genelleştirilmiş Mittag-Leffler kararlıdır ve ispat tamamlanır. ■

Yukarıdaki incelemelerde Caputo türevi içeren kesirli diferensiyel denklem sistemleri ele alınmıştı. Şimdi hem Riemann-Liouville hem de Caputo türevi içeren denklemler için elde edilen sonuçlar ifade edilecektir (Li vd. 2009).

$0 < \alpha < 1$ olmak üzere

$$(D_{a+}^\alpha y)(x) = f(x, y(x)), \quad y(a) = y_0, \quad (4.62)$$

lineer olmayan kesirli diferensiyel denklem sistemini göz önüne alalım, burada D^α operatörü hem Riemann-Liouville hem de Caputo türevini belirtir. $f : [a, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ de x 'e göre parçalı süreklidir ve $[a, \infty) \times \Omega$ bölgesinde y 'ye göre Lipschitz koşulunu sağlar. Ayrıca $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $y^* = 0$ denge noktasını içeren bir bölgedir.

Kararlılık ile ilgili teoremlere geçmeden önce bu teoremlerin ispatında kullanılacak yardımcı lemmaları verelim.

Lemma 4.6 $\alpha \in (0, 1)$ ve $M(0) \geq 0$ olsun. Bu durumda

$$({}^C D_{a+}^\alpha M)(x) \leq ({}^{RL} D_{a+}^\alpha M)(x)$$

sağlanır. Burada ${}^{RL}D_{a+}^{\alpha}$ ve ${}^CD_{a+}^{\alpha}$, sırasıyla, Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türev operatörleridir.

İspat. (2.36) Caputo türev özelliğinden

$$({}^CD_{a+}^{\alpha}M)(x) = (I_{0+}^{1-\alpha}M'(t))(x)$$

dir. Bu eşitlikte (2.7) ile tanımlı Riemann-Liouville kesirli integral tanımı göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} ({}^CD_{a+}^{\alpha}M)(x) &= (I_{0+}^{1-\alpha}M'(t))(x) \\ &= -\frac{x^{-\alpha}M(0)}{\Gamma(1-\alpha)} + ({}^{RL}D_{0+}^{\alpha}M)(x) \end{aligned}$$

elde edilir. $\alpha \in (0, 1)$ ve $M(0) \geq 0$ olduğundan istenilen sonuç bulunur. ■

Lemma 4.7 Reel değerli ve sürekli $f(x, y)$ fonksiyonu için

$$\|(I_{a+}^{\alpha}f)(x)\| \leq I_{a+}^{\alpha} \|f(x, y(x))\|$$

sağlanır. Burada $\alpha \geq 0$ ve $\|\cdot\|$, $\mathbb{R}^{n+1}$ de keyfi bir normu belirtir.

İspat. (2.7) ile tanımlı Riemann-Liouville kesirli integral tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned} \|(I_{a+}^{\alpha}f)(x)\| &= \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t, y(t))dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \right\| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\|f(t, y(t))\|}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \\ &= I_{a+}^{\alpha} \|f(x, y(x))\|. \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. ■

Aşağıdaki sonuç Zhang vd. (2011) makalesindeki Teorem 4.3 ile aynı olup ispatta farklı bir yöntem kullanılmıştır.

Teorem 4.10 $a = 0$, $x \geq 0$, $y \in D$ ve $\alpha \in (0, 1)$ olmak üzere $y^* = 0$, (4.62) sisteminin denge noktası olsun. $D \subset \mathbb{R}^n$ orijini içeren bir bölge olmak üzere $V(x, y(x)) : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^+$ sürekli türevlenebilir fonksiyonu y 'ye göre (4.28) Lipschitz koşulunu sağlasın. Ayrıca

$$\beta_1 \|y\|^c \leq V(x, y(x)) \leq \beta_2 \|y\|^{cd}, \quad (4.63)$$

$$({}^C D_{0+}^\alpha V)(x) \leq -\beta_3 \|y\|^{cd}, \quad (4.64)$$

sağlansın, burada β_1 , β_2 , β_3 , c ve d keyfi pozitif sabitlerdir. Bu durumda D_{a+}^α operatörü ${}^C D_{a+}^\alpha$ olmak üzere (4.62) sisteminin $y^* = 0$ denge noktası Mittag-Leffler kararlıdır. Eğer hipotezler $\mathbb{R}^n$ de sağlanırsa, bu durumda $y^* = 0$ denge noktası global Mittag-Leffler kararlıdır.

İspat. (4.63) ve (4.64) den

$$({}^C D_{a+}^\alpha V)(x) \leq -\frac{\beta_3}{\beta_2} V(x, y(x))$$

elde edilir. O halde

$$({}^C D_{a+}^\alpha V)(x) + M(x) = -\frac{\beta_3}{\beta_2} V(x, y(x)) \quad (4.65)$$

sağlanacak şekilde negatif olmayan bir $M(x)$ fonksiyonu mevcuttur. (4.65) eşitliğinin her iki yanına (2.46) ile tanımlı Laplace dönüşümü uygulanıp Teorem 2.14 göz önüne alınırsa

$$s^\alpha V(s) - V(0)s^{\alpha-1} + M(s) = -\frac{\beta_3}{\beta_2} V(s) \quad (4.66)$$

elde edilir, burada $V(0) = V(0, y(0))$ negatif olmayan sabit, $V(s) = \mathcal{L}\{V(x, y(x))\}$ ve $M(s) = \mathcal{L}\{M(x)\}$ dir. (4.66) eşitliği düzenlenirse

$$V(s) = \frac{V(0)s^{\alpha-1} - M(s)}{s^\alpha + \frac{\beta_3}{\beta_2}} \quad (4.67)$$

elde edilir. (4.67) eşitliğine ters Laplace dönüşümü uygulanıp Teorem 2.10 ve Teorem 2.11 dikkate alınırsa

$$V(x, y(x)) = V(0)E_\alpha(-\frac{\beta_3}{\beta_2}x^\alpha) - M(x) * [x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\frac{\beta_3}{\beta_2}x^\alpha)]$$

bulunur, burada $f * g$ notasyonu f ile g fonksiyonlarının konvolüsyonunu göstermektedir.

$x^{\alpha-1}$, $E_{\alpha,\alpha}(-\frac{\beta_3}{\beta_2}x^\alpha)$ ve $M(x)$ negatif olmayan fonksiyonlar olduklarından

$$V(x, y(x)) \leq V(0)E_\alpha(-\frac{\beta_3}{\beta_2}x^\alpha) \quad (4.68)$$

elde edilir. (4.68), (4.63) de göz önüne alınırsa

$$\|y(x)\| \leq \left[\frac{V(0, y(0))}{\beta_1} E_\alpha(-\frac{\beta_3}{\beta_2}x^\alpha) \right]^{\frac{1}{c}}$$

bulunur, burada $y(0) \neq 0$ için $\frac{V(0, y(0))}{\beta_1} > 0$, $y(0) = 0$ için $\frac{V(0, y(0))}{\beta_1} = 0$ dir.

$m = \frac{V(0, y(0))}{\beta_1} \geq 0$ tanımlayalım. Buradan

$$\|y(x)\| \leq \left[m E_\alpha(-\frac{\beta_3}{\beta_2}x^\alpha) \right]^{\frac{1}{c}}$$

elde edilir. O halde $y^* = 0$, Mittag-Leffler kararlıdır. ■

Teorem 4.11 ${}^C D_{0+}^\alpha$ Caputo türev operatörü yerine ${}^{RL} D_{0+}^\alpha$ Riemann-Liouville türev operatörü alınmak üzere Teorem 4.10 un hipotezleri sağlansın. Bu durumda

$$\|y(x)\| \leq \left[\frac{V(0)}{\beta_1} E_\alpha(-\frac{\beta_3}{\beta_2}x^\alpha) \right]^{1/c}$$

dir.

İspat. $V(x, y(x)) \geq 0$ olduğundan Lemma 4.6 dan

$$({}^C D_{0+}^\alpha V)(x) \leq ({}^{RL} D_{0+}^\alpha V)(x) \quad (4.69)$$

elde edilir. (4.64) ve (4.69) dan

$$\begin{aligned} ({}^C D_{0+}^\alpha V)(x) &\leq ({}^{RL} D_{0+}^\alpha V)(x) \\ &\leq -\beta_3 \|y\|^{cd} \end{aligned}$$

bulunur. İspatın geri kalanı Teorem 4.10 un ispatına benzer olarak yapılır. ■

Şimdi $\alpha \in (0, 1)$ olmak üzere

$$\begin{cases} ({}^{RL}D_{0+}^{\alpha}y)(x) = f(x, y(x)) \\ [(I_{0+}^{1-\alpha}y)(x)]_{x=0} = 0 \end{cases} \quad (4.70)$$

sistemini ele alalım.

Teorem 4.12 $y^* = 0$, (4.70) sisteminin denge noktası olsun. $f(x, y(x))$, (4.28) ile tanımlı Lipschitz koşulunu sağlasın. Ayrıca kabul edelim ki $V(x, y(x))$ fonksiyonu mevcut olsun ve

$$\beta_1 \|y\|^c \leq V(x, y(x)) \leq \beta_2 \|y\|, \quad (4.71)$$

$$V'(x, y(x)) \leq -\beta_3 \|y\|, \quad (4.72)$$

sağlansın, burada $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ ve c pozitif sabitler ve $V'(x, y(x)) = \frac{d}{dx}V(x, y(x))$ dir.

Bu durumda

$$\|y(x)\| \leq \left[\frac{V(0, y(0))}{\beta_1} E_{1-\alpha} \left(-\frac{\beta_3}{\beta_2 \ell} x^{1-\alpha} \right) \right]^{1/c}$$

dir.

İspat. (2.36) Caputo türev özelliğinden

$$({}^CD_{0+}^{1-\alpha}V)(x) = I_{0+}^{\alpha}V'(x, y(x)) \quad (4.73)$$

yazılır. (4.72) nin her iki yanına I_{0+}^{α} kesirli integral operatörü uygulamp (4.73) göz önüne alınırsa

$$({}^CD_{0+}^{1-\alpha}V)(x) \leq -\beta_3 I_{0+}^{\alpha} \|y(x)\| \quad (4.74)$$

bulunur. $f(x, y(x))$ Lipschitz koşulunu sağladığından

$$\|f(x, y(x))\| \leq K \|y(x)\|$$

yazılır. Bu eşitsizliğin her iki yanına I_{0+}^{α} kesirli integral operatörü uygulamp gerekli işlemler yapılırsa

$$-\beta_3 I_{0+}^{\alpha} \|y(x)\| \leq -\beta_3 K^{-1} I_{0+}^{\alpha} \|f(x, y(x))\| \quad (4.75)$$

elde edilir. (4.74) ve (4.75) den

$$({}^CD_{0+}^{1-\alpha}V)(x) \leq -\beta_3 K^{-1} I_{0+}^\alpha \|f(x, y(x))\| \quad (4.76)$$

bulunur. Lemma 4.7 ve (4.76) kullanılırsa

$$({}^CD_{0+}^{1-\alpha}V)(x) \leq -\beta_3 K^{-1} \|I_{0+}^\alpha f(x, y(x))\| \quad (4.77)$$

elde edilir. (2.30) eşitliği kullanılıp teoremden verilen başlangıç koşulu dikkate alınırsa ve (4.77) de yazılırsa

$$({}^CD_{0+}^{1-\alpha}V)(x) \leq -\beta_3 K^{-1} \|y(x)\|$$

bulunur. İspatın geri kalanı Teorem 4.10 un ispatındaki benzer işlemler yapılarak tamamlanır. ■

5. GLOBAL ÇEKİCİLİK

Bu bölümde Hadamard kesirli türevini içeren bir lineer olmayan diferensiyel denklem ele alınıp, ağırlıklı uzaylarda denge noktasının global çekici olması için yeter koşullar ifade edilecektir. Öncelikle Hadamard kesirli türev ve integralini tanıtalım.

Tanım 5.1 (Kilbas vd. 2006) $\alpha \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, $x > a$ için

$$(J_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t} \right)^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt \quad (5.1)$$

ile tanımlı $J_{a+}^{\alpha} f$ operatörüne α . basamaktan sol tarafı Hadamard kesirli integrali denir.

Tanım 5.2 (Kilbas vd. 2006) $\delta = xD$ ($D = \frac{d}{dx}$) δ - türev olsun. $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$ olmak üzere, $x > a$ için

$$\begin{aligned} (D_{a+}^{\alpha} f)(x) &= \delta^{(n)}(J_{a+}^{n-\alpha} f)(x) \\ &= \left(x \frac{d}{dx} \right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t} \right)^{n-\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt \end{aligned} \quad (5.2)$$

ile tanımlı $D_{a+}^{\alpha} f$ operatörüne α . basamaktan sol tarafı Hadamard kesirli türevi denir, burada $n = [\alpha] + 1$ dir.

$a \leq x \leq b \leq \infty$, $y_0 \in \mathbb{R}$ ve $\alpha \in (0, 1)$ olsun.

$$(D_{a+}^{\alpha} y)(x) = f(x, y(x)), \quad x > a, \quad (5.3)$$

lineer olmayan kesirli diferensiyel denklemini

$$(J_{a+}^{1-\alpha} y)(x) \Big|_{x=a} = y_0$$

başlangıç koşulu ile birlikte göz önüne alalım. Burada D_{a+}^{α} , α . basamaktan Hadamard kesirli türev operatörü, $J_{a+}^{1-\alpha}$ ise, $(1-\alpha)$. basamaktan Hadamard kesirli integral operatörüdür. G , reel ekseninde açık küme olmak üzere, $y \in G$ için $f(x, y(x)) \in C_{\gamma, \log} [a, b]$

dir. $0 \leq \gamma < 1$ ve $\gamma \geq 1 - \alpha$ olmak üzere $C_{\gamma, \log}[a, b]$ ağırlıklı uzayı, $(a, b]$ de tanımlı ve $(\log \frac{x}{a})^\gamma g(x) \in C[a, b]$ özelliğine sahip g fonksiyonlarının uzayıdır.

Tanım 5.3 Eğer (5.3) denkleminin her çözümü $x \rightarrow \infty$ iken sifıra yaklaşıyorsa, bu durumda (5.3) denkleminin sıfır çözümüne global çekicidir denir.

Tanım 5.4 Eğer $\theta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ sürekli fonksiyonu kesin artansa ve $\theta(0) = 0$ ise, bu durumda $\theta(r)$ fonksiyonuna K - sınıfına aittir denir.

Lemma 5.1 (Kilbas vd. 2006) Eğer $\alpha > 0$, $\beta > 0$ ve $0 < a < \infty$ ise, bu durumda

$$(J_{a+}^\alpha (\log \frac{t}{a})^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta + \alpha)} (\log \frac{x}{a})^{\beta+\alpha-1} \quad (5.4)$$

ve

$$(D_{a+}^\alpha (\log \frac{t}{a})^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)} (\log \frac{x}{a})^{\beta-\alpha-1} \quad (5.5)$$

dir.

Uyarı 5.1 Sabitin Hadamard kesirli türevi sıfır değildir. Gerçekten (5.5) de $\beta = 1$ alınırsa

$$(D_{a+}^\alpha 1)(x) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} (\log \frac{x}{a})^{-\alpha} \quad (5.6)$$

elde edilir.

Tanım 5.5 y^* noktasının (5.3) kesirli diferensiyel denkleminin denge noktası olması için gerek ve yeter koşul her $x > a$ için

$$f(x, y^*) = (D_{a+}^\alpha y)(x)|_{y=y^*}$$

olmasıdır. Burada D^α operatörü (5.2) ile tanımlı Hadamard türevini belirtir.

Bu bölüm boyunca $y^* = 0$ alınacaktır.

Uyarı 5.2 Genelliği bozmaksızın her $y^* \neq 0$ denge noktası $y_1 = y - y^*$ değişken değiştirmesi ile sifıra taşınabilir. Gerçekten, $y^* \neq 0$ (5.3) denkleminin denge noktası olsun. $y_1 = y - y^*$ değişken değiştirmesi yapıp (5.6) dikkate alırsa

$$\begin{aligned} (D_{a+}^\alpha y_1)(x) &= (D_{a+}^\alpha (y - y^*))(x) \\ &= f(x, y(x)) - \frac{y^*}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{-\alpha} \\ &= f(x, y_1 + y^*) - \frac{y^*}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\log \frac{x}{a}\right)^{-\alpha} \\ &= g(x, y_1) \end{aligned}$$

bulunur. Burada $y = y^*$ (5.3) denkleminin denge noktası olduğundan $g(x, 0) = 0$ dır. Dolayısıyla elde edilen yeni sistemin denge noktası $y_1^* = 0$ dır.

Aşağıdaki teorem ana sonucun ispatında kullanılacaktır.

Teorem 5.1 (Kilbas vd. 2006) $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $n = -[-\alpha]$ ve $0 \leq \gamma < 1$ olmak üzere $\gamma \geq n - \alpha$ sağlansın. Eğer $f \in C_{\gamma, \log} [a, b]$ ise, bu durumda

$$\begin{cases} (D_{a+}^\alpha y)(x) - \lambda y(x) = f(x), & a < x \leq b, \\ (D_{a+}^{\alpha-k} y)(a+) = b_k, & b_k \in \mathbb{R}; \quad k = 1, \dots, n, \end{cases}$$

Cauchy problemi $y(x) \in C_{\delta; n-\alpha, \gamma} [a, b]$ tek çözümüne sahiptir ve bu çözüm

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{j=1}^n b_j \left(\log \frac{x}{a}\right)^{\alpha-j} E_{\alpha, \alpha-j+1} \left[\lambda \left(\log \frac{x}{a}\right)^\alpha \right] \\ &\quad + \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left[\lambda \left(\log \frac{x}{t}\right)^\alpha \right] f(t) \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

şeklindedir, burada

$$C_{\delta; n-\alpha, \gamma} [a, b] = \{y(x) \in C_{n-\alpha, \log} [a, b] : (D_{a+}^\alpha y)(x) \in C_{\gamma, \log} [a, b]\}$$

dir.

Aşağıdaki lemma Kilbas vd.'de (2006) verilen Lemma 3.5 in genelleştirmesidir.

Lemma 5.2 $0 < \alpha < 1$ ve $y(x) \in C_{1-\alpha, \log} [a, b]$ olsun. Eğer

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \left[\left(\log \frac{x}{a} \right)^{1-\alpha} y(x) \right] = c, \quad c \in \mathbb{R} \quad (5.7)$$

ise, bu durumda

$$(J_{a^+}^{1-\alpha} y)(a+) = \lim_{x \rightarrow a^+} (J_{a^+}^{1-\alpha} y)(x) = c\Gamma(\alpha) \quad (5.8)$$

dır.

İspat. $\varepsilon > 0$ olsun. (5.7) den, $a < t < a + \delta$ için,

$$\left| \left(\log \frac{t}{a} \right)^{1-\alpha} y(t) - c \right| < \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)} \quad (5.9)$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mevcuttur. Diğer taraftan (5.4) den

$$\Gamma(\alpha) = (J_{a^+}^{1-\alpha} (\log \frac{t}{a})^{\alpha-1})(x) \quad (5.10)$$

elde edilir. Bu eşitlik ve (5.1) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} |(J_{a^+}^{1-\alpha} y)(x) - c\Gamma(\alpha)| &= \left| (J_{a^+}^{1-\alpha} y)(x) - c(J_{a^+}^{1-\alpha} (\log \frac{t}{a})^{\alpha-1})(x) \right| \\ &= \left| \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t} \right)^{-\alpha} \left[y(t) - c \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha-1} \right] \frac{dt}{t} \right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t} \right)^{-\alpha} \left| y(t) - c \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha-1} \right| \frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t} \right)^{-\alpha} \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha-1} \left| y(t) \left(\log \frac{t}{a} \right)^{1-\alpha} - c \right| \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

bulunur. (5.9), (5.1) ve (5.4) göz önüne alınırsa, $a < t < x < a + \delta$ için,

$$\begin{aligned} |(J_{a^+}^{1-\alpha} y)(x) - c\Gamma(\alpha)| &< \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t} \right)^{-\alpha} \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha-1} \frac{dt}{t} \\ &= \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)} (J_{a^+}^{1-\alpha} (\log \frac{t}{a})^{\alpha-1})(x) \\ &= \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır. ■

Aşağıdaki lemmada, (2.40) ile tanımlı Mittag-Leffler fonksiyonlarının Hadamard ke-sirli türevinin hesabı için bir formül verilmektedir.

Lemma 5.3 $A > 0$ ve $0 < \alpha < 1$ olsun. Bu durumda

$$\left(D_{a+}^{\alpha} \left[\left(\log \frac{x}{a} \right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(A \left(\log \frac{x}{a} \right)^{\alpha} \right) \right] \right) (x) = A \left(\log \frac{x}{a} \right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(A \left(\log \frac{x}{a} \right)^{\alpha} \right), \quad x > a,$$

sağlanır, burada D_{a+}^{α} , α . basamaktan Hadamard kesirli türev operatörüdür.

İspat. (5.2) den

$$\begin{aligned} & \left(D_{a+}^{\alpha} \left[\left(\log \frac{x}{a} \right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(A \left(\log \frac{x}{a} \right)^{\alpha} \right) \right] \right) (x) \\ &= x \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t} \right)^{-\alpha} \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(A \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\alpha} \right) \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

yazılır.

$E_{\alpha,\beta}(z)$ Mittag-Leffler fonksiyonu tam fonksiyon olduğundan (2.40) kullanılıp $u = \frac{\log t - \log a}{\log x - \log a}$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} & \left(D_{a+}^{\alpha} \left[\left(\log \frac{x}{a} \right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(A \left(\log \frac{x}{a} \right)^{\alpha} \right) \right] \right) (x) \\ &= x \frac{d}{dx} \left[1 + \frac{A}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\log \frac{x}{a} \right)^{\alpha} + \frac{A^2}{\Gamma(2\alpha+1)} \left(\log \frac{x}{a} \right)^{2\alpha} + \dots \right] \\ &= A \left(\log \frac{x}{a} \right)^{\alpha-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \frac{A}{\Gamma(2\alpha)} \left(\log \frac{x}{a} \right)^{\alpha} + \dots \right] \\ &= A \left(\log \frac{x}{a} \right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(A \left(\log \frac{x}{a} \right)^{\alpha} \right). \end{aligned}$$

istenilen sonuç elde edilir. ■

Aşağıdaki yardımcı lemma Lakshmikantham vd.'deki (2009) Lemma 2.3.1 in genelleştirmesidir.

Lemma 5.4 $M > 0, \lambda > \alpha$ ve $m(x) \in C_{1-\alpha, \log}[a, b]$ olmak üzere

$$\left| \left(\log \frac{x}{a} \right)^{1-\alpha} m(x) - \left(\log \frac{y}{a} \right)^{1-\alpha} m(y) \right| \leq M \left| \log \frac{x}{y} \right|^{\lambda} \quad (5.11)$$

eşitsizliği sağlansın. Her $x_1 \in (a, b]$ için, eğer

$$m(x_1) = 0 \text{ ve } m(x) \leq 0, \quad a < x \leq x_1, \quad (5.12)$$

ise, bu durumda

$$(D_{a+}^{\alpha}m)(x_1) \geq 0, \quad 0 < \alpha < 1$$

dir.

İspat. (5.2) den

$$(D_{a+}^{\alpha}m)(x) = x \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{-\alpha} \frac{m(t)}{t} dt, \quad x > a$$

yazılır. $H(x) = \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{-\alpha} \frac{m(t)}{t} dt$ tanımlayalım. Yeterince küçük $h > 0$ için

$$\begin{aligned} H(x_1) - H(x_1 - h) &= \int_a^{x_1} \left(\log \frac{x_1}{t}\right)^{-\alpha} \frac{m(t)}{t} dt - \int_a^{x_1-h} \left(\log \frac{x_1-h}{t}\right)^{-\alpha} \frac{m(t)}{t} dt \\ &= \int_a^{x_1-h} \left[\left(\log \frac{x_1}{t}\right)^{-\alpha} - \left(\log \frac{x_1-h}{t}\right)^{-\alpha} \right] \frac{m(t)}{t} dt \\ &\quad + \int_{x_1-h}^{x_1} \left(\log \frac{x_1}{t}\right)^{-\alpha} \frac{m(t)}{t} dt \end{aligned}$$

elde edilir.

$a < t \leq x_1 - h \leq x_1$ için, $\left(\log \frac{x_1}{t}\right)^{-\alpha} - \left(\log \frac{x_1-h}{t}\right)^{-\alpha} \leq 0$ ve $m(t) \leq 0$ olduğundan

$$H(x_1) - H(x_1 - h) \geq \int_{x_1-h}^{x_1} \left(\log \frac{x_1}{t}\right)^{-\alpha} \frac{m(t)}{t} dt \quad (5.13)$$

dir. Diğer taraftan (5.11) den

$$\left| \left(\log \frac{x_1}{a}\right)^{1-\alpha} m(x_1) - \left(\log \frac{t}{a}\right)^{1-\alpha} m(t) \right| \leq k(x_1) \left| \log \frac{x_1}{t} \right|^{\lambda}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $M = k(x_1) > 0$ sabiti vardır. $m(x_1) = 0$ olduğu yukarıdaki eşitsizlikte göz önüne alınırsa

$$-k(x_1) \left(\log \frac{x_1}{t}\right)^{\lambda} \leq -\left(\log \frac{t}{a}\right)^{1-\alpha} m(t) \leq k(x_1) \left(\log \frac{x_1}{t}\right)^{\lambda}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik (5.13) ile birlikte göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} H(x_1) - H(x_1 - h) &\geq -k(x_1) \int_{x_1-h}^{x_1} \left(\log \frac{x_1}{t}\right)^{-\alpha+\lambda} \frac{dt}{t} \\ &= \frac{-k(x_1)}{1-\alpha+\lambda} \left(\log \frac{x_1}{x_1-h}\right)^{1-\alpha+\lambda} \end{aligned} \quad (5.14)$$

ifadesine ulaşılır.

Yeterince küçük $h > 0$ için, (5.14) den

$$\frac{H(x_1) - H(x_1 - h)}{h} + \frac{k(x_1)}{h(1 - \alpha + \lambda)} \left(\log \frac{x_1}{x_1 - h} \right)^{1 - \alpha + \lambda} \geq 0$$

dır. $h \rightarrow 0$ için limit alınırsa

$$\frac{d}{dx} H(x) \big|_{x=x_1} \geq 0$$

bulunur. $x > 0$ ve $1 - \alpha > 0$ olduğundan ve (5.2) den

$$(D_{a+}^{\alpha} m)(x_1) \geq 0$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Aşağıdaki teorem Lakshmikantham vd.'deki (2009) Teorem 2.3.1 in genelleştirmesidir.

Teorem 5.2 $0 < \alpha < 1$ olsun ve kabul edelim ki $v, w \in C_{1-\alpha, \log}[a, b]$ fonksiyonları aşağıdaki koşulları sağlasın:

i) $\lambda > \alpha$ ve $M_1, M_2 > 0$ için,

$$\left| \left(\log \frac{x}{a} \right)^{1-\alpha} v(x) - \left(\log \frac{y}{a} \right)^{1-\alpha} v(y) \right| \leq M_1 \left| \log \frac{x}{y} \right|^{\lambda}, \quad (5.15)$$

$$\left| \left(\log \frac{x}{a} \right)^{1-\alpha} w(x) - \left(\log \frac{y}{a} \right)^{1-\alpha} w(y) \right| \leq M_2 \left| \log \frac{x}{y} \right|^{\lambda}, \quad (5.16)$$

ii) $f \in C_{\gamma, \log}[a, b]$, $0 \leq \gamma < 1$, ve $\gamma \geq 1 - \alpha$ için,

$$(D_{a+}^{\alpha} v)(x) \leq f(x, v(x)), \quad (5.17)$$

$$(D_{a+}^{\alpha} w)(x) \geq f(x, w(x)), \quad (5.18)$$

olmak üzere (5.17), (5.18) eşitsizliklerinden biri kesin olarak sağlansın. Bu durumda

$$v_0 < w_0$$

olması

$$v(x) < w(x), \quad a < x \leq b, \quad (5.19)$$

olmasını gerektirir, burada $(J_{a+}^{1-\alpha}v)(x) \big|_{x=a} = v_0$, $(J_{a+}^{1-\alpha}w)(x) \big|_{x=a} = w_0$ dır.

İspat. Kabul edelim ki $v_0 < w_0$ olsun ve (5.19) doğru olmasın. Bu durumda v_0 , w_0 ın tanımı ve $\Gamma(\alpha)v(x)(\log \frac{x}{a})^{1-\alpha}$ ile $\Gamma(\alpha)w(x)(\log \frac{x}{a})^{1-\alpha}$ nın sürekliliğinden bir x_1 noktası vardır öyle ki $a < x_1 \leq b$ için,

$$v(x_1) = w(x_1) \text{ ve } v(x) < w(x), \quad a < x < x_1,$$

dir.

$$m(x) = v(x) - w(x), \quad a < x \leq x_1, \quad (5.20)$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda $m(x) < 0$, $a < x < x_1$ ve $m(x_1) = 0$ olur. Ayrıca $m(x) \in C_{1-\alpha, \log}[a, b]$ fonksiyonunun (5.11) eşitsizliğini sağladığı açıktır. O halde Lemma 5.4 den

$$(D_{a+}^{\alpha}m)(x_1) \geq 0 \quad (5.21)$$

elde edilir.

(5.18) eşitsizliğinin kesin olarak sağlandığını kabul edelim. Bu durumda (5.17), (5.20) ve (5.21) göz önüne alınırsa

$$f(x_1, v(x_1)) \geq (D_{a+}^{\alpha}v)(x_1) \geq (D_{a+}^{\alpha}w)(x_1) > f(x_1, w(x_1))$$

elde edilir. Bu ise $v(x_1) = w(x_1)$ olmasıyla çelişir. Eğer (5.17) eşitsizliğinin kesin olarak sağlandığı kabul edilirse yine benzer çelişki elde edilir. Dolayısıyla $v_0 < w_0$ olduğunda (5.19) geçerlidir. ■

Aşağıdaki lemma ana sonucun ispatında kullanılacaktır.

Lemma 5.5 Kabul edelim ki Teorem 5.2 nin koşulları (5.17), (5.18) eşitsizliklerinin kesin olmaması durumunda sağlansın. Ayrıca f fonksiyonu

$$|f(x, u_1) - f(x, u_2)| \leq L(u_1 - u_2), \quad u_1 \geq u_2, \quad L > 0, \quad (5.22)$$

Lipschitz koşulunu sağlasın. Bu durumda

$$v_0 \leq w_0$$

olması

$$v(x) \leq w(x), \quad a < x \leq b, \quad (5.23)$$

olmasını gerektirir, burada $(J_{a+}^{1-\alpha}v)(x) \big|_{x=a} = v_0$, $(J_{a+}^{1-\alpha}w)(x) \big|_{x=a} = w_0$ dır.

İspat. Yeterince küçük $\varepsilon > 0$ için, w_ε fonksiyonu

$$w_\varepsilon(x) = w(x) + \varepsilon\lambda(x)$$

şeklinde tanımlansın, burada

$$\lambda(x) = (\log \frac{x}{a})^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left[2L(\log \frac{x}{a})^\alpha \right] \quad (5.24)$$

dır. Lemma 5.2 den ve $w_\varepsilon(x)$ fonksiyonunun tanımından

$$w_{\varepsilon_0} = w_0 + \varepsilon\lambda_0 \quad (5.25)$$

yazılabilir, burada $w_{\varepsilon_0} = (J_{a+}^{1-\alpha}w_\varepsilon)(x) \big|_{x=a}$, $w_0 = (J_{a+}^{1-\alpha}w)(x) \big|_{x=a}$ ve $\lambda_0 = (J_{a+}^{1-\alpha}\lambda)(x) \big|_{x=a}$ dır.

Öte yandan, (2.40), (5.24) ve Lemma 5.2 dikkate alınırsa, $\lambda_0 = 1$ elde edilir. $v_0 \leq w_0$ olduğundan ve (5.25) eşitliğinden $w_{\varepsilon_0} > w_0 \geq v_0$ bulunur.

Şimdi (5.18) ve (5.22) kullanılırsa

$$\begin{aligned} (D_{a+}^\alpha w_\varepsilon)(x) &= (D_{a+}^\alpha w)(x) + \varepsilon(D_{a+}^\alpha \lambda)(x) \\ &\geq f(x, w(x)) + \varepsilon(D_{a+}^\alpha \lambda)(x) \\ &\geq f(x, w_\varepsilon(x)) - \varepsilon L\lambda(x) + \varepsilon(D_{a+}^\alpha \lambda)(x) \end{aligned} \quad (5.26)$$

elde edilir. Diğer taraftan, Lemma 5.3 den

$$\begin{aligned}(D_{a+}^{\alpha}\lambda)(x) &= 2L(\log \frac{x}{a})^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(2L(\log \frac{x}{a})^{\alpha}) \\ &= 2L\lambda(x)\end{aligned}\tag{5.27}$$

olduğu açıktır. (5.27), (5.26) da göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}(D_{a+}^{\alpha}w_{\varepsilon})(x) &\geq f(x, w_{\varepsilon}(x)) - \varepsilon L\lambda(x) + \varepsilon 2L\lambda(x) \\ &= f(x, w_{\varepsilon}(x)) + \varepsilon L\lambda(x) \\ &> f(x, w_{\varepsilon}(x))\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $w_{\varepsilon} \in C_{1-\alpha,\log}[a, b]$ fonksiyonu (5.16) eşitsizliğini sağlar. O halde Teorem 5.2 den her $\varepsilon > 0$ için,

$$v(x) < w_{\varepsilon}(x), \quad a < x \leq b,$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki yanının $\varepsilon \rightarrow 0$ iken limiti alınırsa

$$v(x) \leq w(x), \quad a < x \leq b,$$

elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır. ■

Aşağıdaki teoremlerde (5.3) denkleminin sıfır çözümünün global çekiciliği için yeter koşullar verilmiştir.

Teorem 5.3 $y^* = 0$, (5.3) denkleminin denge noktası olsun.

$V(x, y(x)) \in C_{1-\alpha,\log}[a, b]$ fonksiyonu (5.22) Lipschitz koşulunu sağlasın. Ayrıca

$$k_1 \|y\|^d \leq V(x, y(x)) \leq k_2 \|y\|^{dc}, \tag{5.28}$$

$$(D_{a+}^{\alpha}V)(x) \leq -k_3 \|y\|^{dc} \tag{5.29}$$

koşulları sağlansın, burada $\alpha \in (0, 1)$ ve k_1, k_2, k_3, c ve d keyfi pozitif sabitlerdir. Bu durumda $y^* = 0$ global çekicidir.

İspat. (5.28) ve (5.29) dan

$$(D_{a^+}^\alpha V)(x) \leq -\frac{k_3}{k_2} V(x, y(x)) \quad (5.30)$$

dir. Teorem 5.1 dikkate alınır

$$\begin{aligned} (D_{a^+}^\alpha V)(x) + \frac{k_3}{k_2} V(x, y(x)) &= 0, \\ (J_{a^+}^{1-\alpha} V)(x) \big|_{x=a} &= V_0, \end{aligned} \quad (5.31)$$

başlangıç değer probleminin

$$V(x, y(x)) = V_0 \left(\log \frac{x}{a} \right)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left[-\frac{k_3}{k_2} \left(\log \frac{x}{a} \right)^\alpha \right] \quad (5.32)$$

tek çözümü vardır.

Lemma 5.5 dikkate alınıp (5.30), (5.31) ve (5.32) arasındaki ilişki göz önünde bulundurulursa

$$V(x, y(x)) \leq V_0 \left(\log \frac{x}{a} \right)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left[-\frac{k_3}{k_2} \left(\log \frac{x}{a} \right)^\alpha \right] \quad (5.33)$$

elde edilir. (5.33), (5.28) de yazılırsa

$$\|y(x)\| \leq \left(\frac{V_0}{k_1} \left(\log \frac{x}{a} \right)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left[-\frac{k_3}{k_2} \left(\log \frac{x}{a} \right)^\alpha \right] \right)^{\frac{1}{d}}$$

eşitsizliğine ulaşılır. $x \rightarrow \infty$ için

$$E_{\alpha, \alpha} \left[-\frac{k_3}{k_2} \left(\log \frac{x}{a} \right)^\alpha \right] \rightarrow 0$$

olduğundan ispat tamamlanır. ■

Teorem 5.4 $y^* = 0$, (5.3) denkleminin denge noktası olsun.

$V(x, y(x)) \in C_{1-\alpha, \log}[a, b]$ (5.22) Lipschitz koşulunu sağlasın ve θ , K - sınıfından fonksiyon olsun. Ayrıca

$$V(x, y(x)) \geq \theta \|y\|, \quad (5.34)$$

$$(D_{a^+}^\alpha V)(x) \leq 0 \quad (5.35)$$

sağlansın, burada $\alpha \in (0, 1)$ dir. Bu durumda $y^* = 0$ global çekicidir.

İspat. Bu teoremin ispatı Teorem 5.3 ün ispatına benzerdir. Teorem 5.1 den

$$(J_{a+}^{1-\alpha}V)(x) |_{x=a} = V_0$$

başlangıç koşullu

$$(D_{a+}^{\alpha}V)(x) = 0 \quad (5.36)$$

kesirli lineer diferensiyel denklemi

$$V(x, y(x)) = \frac{V_0}{\Gamma(\alpha)} (\log \frac{x}{a})^{\alpha-1}$$

tek çözümüne sahiptir. Lemma 5.5, (5.35) ve (5.36) göz önüne alınırsa

$$V(x, y(x)) \leq \frac{V_0}{\Gamma(\alpha)} (\log \frac{x}{a})^{\alpha-1} \quad (5.37)$$

elde edilir. (5.37), (5.34) de yazılırsa

$$\|y(x)\| \leq \theta^{-1} (\frac{V_0}{\Gamma(\alpha)} (\log \frac{x}{a})^{\alpha-1})$$

bulunur. $0 < \alpha < 1$ olduğundan ve θ , K - sınıfından fonksiyon olduğundan

$$x \rightarrow \infty \text{ iken } \|y(x)\| \rightarrow 0$$

bulunur. Dolayısıyla ispat tamamlanır. ■

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında kesirli türev içeren denklemlerin kararlılık analizi çalışılmıştır. Bunun için ilk olarak kesirli diferensiyel denklemlerin çözümünde önemli bir araç olan kesirli türev ve integralin Laplace dönüşümleri tanıtılmıştır. Ayrıca çözümlerde karşımıza çıkan Mittag-Leffler fonksiyonlarının özellikleri irdelenmiştir. Yapılan literatür taramasında özellikle uygulamalarda karşılaşılan kesirli basamaktan diferensiyel denklem sistemlerinin lokal kararlılığının incelendiği görülmüştür. Lokal kararlılık analizinde lineerleştirme yöntemi temel araç olarak kullanılmaktadır. Lineer olmayan sistemlerin incelemesinde ise, adi diferensiyel denklem sistemlerinde olduğu gibi Lyapunov metodu önemli bir yere sahiptir. İncelemelerde adi diferensiyel denklem sistemlerinden farklı olarak Mittag-Leffler kararlılık tanımlanmış ve mevcut sonuçlar ifade edilmiştir. Bu tez çalışmasında ayrıca Hadamard kesirli türevi içeren diferensiyel denklemler ele alınıp sıfır çözümünün global çekici olması için yeter koşullar elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

- Aguila-Camacho, N., Duarte-Mermoud, M. N. and Gallegos, J. A. 2014. Lyapunov functions for fractional order systems. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 19, 2951-2957.
- Ahmed, E. and Elgazzar, A. S. 2007. On fractional order differential equations model for nonlocal epidemics. *Physica A*, 379, 607-614.
- Ahmed, E., El-Sayed, A. M. A. and El-Saka, H. A. A. 2007. Equilibrium points, stability and numerical solutions of fractional order predator-prey and rabies model. *J. Math. Anal. Appl.*, 325, 542-553.
- Das, T., Mukherjee, R. N. and Chaudhari, K. S. 2009. Bioeconomic harvesting of a prey-predator fishery. *Journal of Biological Dynamics*, 3(5), 447-462.
- Denton, Z. and Vatsala, A. S. 2010. Fractional integral inequalities and applications. *Computers and Mathematics with Applications*, 59, 1087-1094.
- Diethelm, K. 2010. *The Analysis of Fractional Differential Equations*. Springer-Verlag, 247, Berlin.
- Duarte-Mermoud, M. A., Aguila-Camacho, N. and Gallegos, J. A. 2015. Using general quadratic Lyapunov functions to prove Lyapunov uniform stability for fractional order systems. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 22, 650-659.
- El-Saka, H. A. A. and Ahmed, E. 2016. A fractional order network model for ZIKA. Doi: 10.1101/039917.
- Gabano, J.-D. and Poinot, T. 2011. Fractional modelling and identification of thermal systems. *Signal Processing*, 91, 531-541.
- Ghaziani, R. K., Alidousti, J. and Eshkaftaki, A. B. 2016. Stability and dynamics of a fractional order Leslie-Gower prey-predator model. *Applied Mathematical Modelling*, 40, 2075-2086.
- Gupta, R. P. and Chandra, P. 2013. Bifurcation analysis of modified Leslie-Gower predator-prey model with Michaelis-Menten type prey harvesting. *J. Math. Anal. Appl.*, 398, 278-295.
- Hadamard, J. 1892. Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor. *J. Math. Pures Appl.*, 8(Ser. 4), 101-186.
- Haubold, H. J., Mathai, A. M. and Saxena, R. K. 2011. Mittag-Leffler functions and their applications. *Journal of Applied Mathematics*, Article ID 298628, 51 pages, doi: 10.1155/2011/298628.
- Ji, C., Jiang, D. and Shi, N. 2009. Analysis of a predator-prey model with modified Leslie-Gower and Holling-type II schemes with stochastic perturbation. *J. Math. Anal. Appl.*, 359, 482-498.

- Kilbas, A. A., Marzan, S. A. and Tityura, A. A. 2003. Hadamard-type fractional integrals and derivatives and differential equations of fractional order (Russian). Dokl. Akad. Nauk, 389(6), 734-738. Translated in 2003. Dokl. Math., 67(2), 263-267.
- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. and Trujillo, J. J. 2006. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier, 523, Amsterdam.
- Lakshmikantham, V., Leela, S. and Vasundhara, D. J. 2009. Theory of Fractional Dynamic Systems. Cambridge Scientific Publishers, 170, Cambridge UK.
- Li, Y., Chen, Y. and Podlubny, I. 2009. Mittag-Leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems. Automatica, 45, 1965-1969.
- Li, Y., Chen, Y. and Podlubny, I. 2010. Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability. Computers and Mathematics with Applications, 59, 1810-1821.
- Matignon, D. 1997. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing. Computational Engineering in Systems Applications, 2, 963-968.
- Miller, K. S. and Ross, B. 1993. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. John Wiley & Sons Inc., 366, New York.
- Mittag-Leffler, G. M. 1903. Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 137, 554-558.
- Oldham, K. B. and Spanier, J. 1974. The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order. Academic Press, 234, San Diego.
- Ozalp, N. and Demirci, E. 2011. A fractional order SEIR model with vertical transmission. Mathematical and Computer Modelling, 54, 1-6.
- Podlubny, I. 1999. Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications. Academic Press, 340, San Diego.
- Pollard, H. 1948. The completely monotonic character of the Mittag-Leffler function $E_\alpha(-x)$. Bulletin of the American Mathematical Society, 54, 1115-1116.
- Sabatier, J., Aoun, M., Oustaloup, A., Grégoire, G., Ragot, F. and Roy, P. 2006. Fractional system identification for lead acid battery state of charge estimation. Signal Processing, 86, 2645-2657.
- Samko, S. G., Kilbas, A. A. and Marichev, O. I. 1993. Fractional Integrals and Derivatives; Theory and Applications. Gordon and Breach Science Publishers, 976, Amsterdam.

- Wiman, A. 1905. Über den fundamental satz in der theorie der funcktionen, $E_\alpha(x)$. Acta Mathematica, 29, 191-201.
- Zamani, M., Karimi-Ghartemani, M., Sadati, N. and Parniani, M. 2009. Design of a fractional order PID controller for an AVR using particle swarm optimization. Control Engineering Practice, 17, 1380-1387.
- Zhang, F., Li, C. and Chen. Y. 2011. Asymptotical stability of nonlinear fractional differential system with Caputo Derivative. International Journal of Differential Equations, 2011, Article ID 635165, 12 pages, doi: 10.1155/2011/635165.



ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Aslı Beste ÖZAYDIN

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Tarihi : 21/03/1992

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Alparslan Anadolu Lisesi (2010)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2014)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı
(Şubat 2015 - Ocak 2018)