

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

MANYETİK VEKTÖR ALANLARI VE UYGULAMALARI

Zehra ÖZDEMİR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2018

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Zehra ÖZDEMİR tarafından hazırlanan " Manyetik Vektör Alanları ve Uygulamaları" adlı tez çalışması 26/02/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Faik Nejat EKMEKÇİ



Jüri Üyeleri:

Başkan: Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN

Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı



Üye : Prof. Dr. Faik Nejat EKMEKÇİ

Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı



Üye : Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı



Üye : Prof. Dr. Keziban ORBAY

Amasya Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı



Üye : Doç. Dr. İsmail GÖK

Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı



Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Atila YETİŞEMİYEN
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

26/02/2018



Zehra ÖZDEMİR

ÖZET

Doktora Tezi

MANYETİK VEKTÖR ALANLARI VE UYGULAMALARI

Zehra ÖZDEMİR

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Faik Nejat EKMEKÇİ

Divergensi sıfır olan vektör alanlarına manyetik vektör alanı denir. Bir yüklü parçacık bir V manyetik vektör alanına girdiği zaman bu parçacığın Serret-Frenet vektörleri bu alandan etkilenirler ve bu etkiyle Lorentz kuvveti denilen bir kuvvet açığa çıkar. Dolayısıyla parçacık bu alan içerisinde bir yörünge izlemeye başlar. Bu yörüngeye manyetik eğri adı verilir. Diğer taraftan, manyetik alanı sınırlandırarak bu yörüngelerin laboratuvar ortamında incelenmesine imkan veren ve çarpışmasız yüklü parçacıklar için bariyer sağlayan akı yüzeyleri ve manyetik yüzeyler olarak adlandırılan yüzeyler mevcuttur.

Bu tez çalışmasında bahsi geçen eğri ve yüzeyler ayrıntılı olarak dört bölüm halinde aşağıdaki gibi verilmiştir.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölüm diğer bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremlere ayrılmıştır.

Üçüncü bölümünde bir γ eğrisinin normal ve binormal vektörlerinin Lorentz kuvvetinden etkilenmesiyle elde edilen yörüngeleri incelenmiş ve bu eğrilerle ilgili bazı karakterizasyonlar verilmiştir.

Dördüncü bölümde akı yüzeylerini ve manyetik yüzeyleri tanımlayıp bu yüzeylerle manyetik eğriler arasındaki ilişki verilmiştir.

Yapılan çalışmalarla ilgili sonuçların analizine ise sonuç bölümünde yer verilmiştir.

Şubat 2018, 63 sayfa

Anahtar Kelimeler: Manyetik vektör alanı, Özel eğriler ve yüzeyler, Öklid uzayı.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

MAGNETIC VECTOR FIELD AND THEIR APPLICATIONS

Zehra ÖZDEMİR

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Faik Nejat EKMEKÇİ

A divergence free vector field called as magnetic vector field. When a charged particle enters a magnetic field V , the Serret-Frenet vectors of this particle are influenced by this field and with this effect a force emerged called Lorentz force. So the particle begins to follow a trajectory in this area. This trajectory called as magnetic curve. On the other hand, there is an array of surfaces surrounding each one of them, called flux surfaces and magnetic surfaces, which provide barrier for non-collisionally charged particles and allow the study of these trajectories in the laboratory.

This thesis consists of four chapters.

The first chapter is devoted to introduction section.

The second chapter is devoted to the basic definitions and theorems to be used in the other chapters.

In chapter three, the orbits obtained by the normal and binormal vectors of a curve γ are affected by Lorentz force are examined and some characterizations related to this curve are given.

In chapter four, flux surfaces and magnetic surfaces are defined and the relations between these surfaces and magnetic curves is given.

The analysis of the results considered in previous chapters are given in the conclusion section.

February 2018, 63 pages

Key Words: Magnetic vector field, Special curves and surfaces, Euclidean 3-space.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde, değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine ne zaman danışsam bana kıymetli zamanını ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle bana faydalı olabilmek için elinden gelenden fazlasını sunan her sorun yaşadığımda yanına çekinmeden gidebildiğim, güler yüzünü ve samimiyetini benden esirgemeyen ve gelecekteki mesleki hayatımda da bana verdiği değerli bilgilerden faydalanacağımı düşündüğüm kıymetli danışman hocam Prof. Dr. F. Nejat EKMEKÇİ (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)' ye, değerli hocalarım Prof. Dr. Yusuf YAYLI (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) ve Doç. Dr. İsmail GÖK (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)' e;

Tez çalışmam boyunca değerli bilgilerini bizlerle paylaşan tezime büyük ölçüde ışık tutan saygıdeğer güler yüzlü hocam Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN' (Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) a;

Motive edici konuşmaları ile desteklerini ve deneyimlerini esirgemeyen tüm bölüm hocalarıma;

Çalışmamın her aşamasında yanımda olan ve desteğini eksik etmeyen canım aileme;

Yüksek lisans ve doktora eğitimim boyunca finansal desteği için bilimin ve bilim insanının destekçisi olan TÜBİTAK'a;
sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Zehra ÖZDEMİR
Ankara, Şubat 2018

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR	5
3. MANYETİK EĞRİLER	11
3.1 N-Manyetik Eğriler	11
3.2 B-Manyetik Eğriler	16
4. MANYETİK EĞRİLER VE YÜZEYLER	22
4.1 Killing Akı Yüzeyleri	22
4.2 Manyetik Eğriyle İlgili Akı Yüzeyleri	31
4.3 Akı Yüzeyi Üzerindeki Manyetik Eğriler	32
4.4 Çizgili Akı Yüzeyleri	38
4.5 Manyetik Yüzeyler	44
4.6 Manyetik Yüzeyler Üzerine Bazı Örnekler	47
4.7 Manyetik Yüzeyler ve Manyetik Eğriler	52
5. SONUÇ	57
KAYNAKLAR	58
ÖZGEÇMİŞ	60

SİMGELER DİZİNİ

$C^\infty(M, R)$	Diferensiyellenebilir fonksiyonların cümlesi
∇	Levi-Civita koneksiyonu
$[\cdot, \cdot]$	Lie operatörü
$\phi(X)$	Lorentz kuvveti fonksiyonu
$F(X, Y)$	Manyetik vektör alanı fonksiyonu
$g(X, Y)$	Metrik
$\mathbb{R}$	Reel uzay
$R(X, Y)Z$	Riemann Christoffel eğrilik tensörü
$\chi(M)$	Tanjant uzayı
$\sum$	Toplam sembolü
$\mathbb{E}$	Öklid uzayı
$\Gamma(X, Y)$	Varyasyonel
$V(X)$	Varyasyon vektör alanı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1 Parçacığın $\Phi(N)$ Lorentz kuvveti etkisindeki hareketi	15
Şekil 3.2 Parçacığın $\Phi(N)$ Lorentz kuvveti etkisiyle oluşan helis hareketi	15
Şekil 3.3 Parçacığın $\Phi(N)$ Lorentz kuvveti etkisiyle oluşan slant helis hareketi.....	16
Şekil 3.4 Parçacığın $\Phi(B)$ Lorentz kuvveti etkisindeki hareketi	19
Şekil 3.5 Parçacığın $\Phi(B)$ Lorentz kuvveti etkisiyle oluşan dairesel hareketi.....	20
Şekil 3.6 Parçacığın $\Phi(B)$ Lorentz kuvveti etkisiyle oluşan helis hareketi	20
Şekil 4.1 Akı yüzeyi $X(u, v)=(\cos u, \sin v, \sin(\cos 2v-\cos 2u)^3)$	24
Şekil 4.2 Tor $X(u, v)=((2+\cos v)\cos u, (2+\cos v)\sin u, \sin v)$	24
Şekil 4.3 $X(u; v) = ((2 + \cos v) \cos u, (2 + \cos v) \sin u, 2 \sin v \cos v)$	24
Şekil 4.4 $X(u, v)=((2+\cos v)\cos u, (2+\cos v)\sin u, v^3-6v)$	25
Şekil 4.5 $X(u, v)=((2+\cos v)\cos u, (2+\cos v)\sin u, v^2+4v)$	25
Şekil 4.6 Akı yüzeyi $X(u, v)=((uv)^{1/2}, \sin(uv)^3, \frac{1}{2} \sin(2uv))$	27
Şekil 4.7 Akı yüzeyi ve üzerindeki manyetik eğriler γ_1 (Siyah), γ_2 (Yeşil) ve γ_3 (Kırmızı).....	28
Şekil 4.8 $X(u, v)=(\cos(u+v), e^u \cos(u+v)\sin(u+v)^3)$	29
Şekil 4.9 $X(u, v)=(\cos(u+v), uv^2+vu^2, \sin(u+v))$	29
Şekil 4.10 Sırasıyla, N-manyetik eğri γ ve ilgili manyetik alan V	37
Şekil 4.11 Akı yüzeyi $X(r, s)=\gamma(s)+r(\tau T-\Omega_1 N + \kappa B)$	38
Şekil 4.12 Akı yüzeyi $X(s, r)=\gamma(s)+r(\tau T+\Omega_2 B)$	38
Şekil 4.13 Manyetik yüzeyler a. $u(s, t)=v(s, t)=w(s, t)=t$, b. $u(s, t)=2 \sin t \cos s$, $v(s, t)=2 \sin t \sin s$, $w(s, t)=2 \cos t$	45
Şekil 4.14 Manyetik yüzey $u(s, t)=t$, $v(s, t)=t^2$, $w(s, t)=t$	46
Şekil 4.15 a. $u(s, t)=t$, $v(s, t)=t^2$, $w(s, t)=t^3$, b. $u(s, t)=t$, $v(s, t)=t^2-2s$, $w(s, t)=t^3+s$ manyetik yüzeyler	47
Şekil 4.16 a. $u(s, t)=0$, $v(s, t)=t \cos t$, $w(s, t)=t \sin t$, b. $u(s, t)=0$, $v(s, t)=s \cos t$, $w(s, t)=s^2 \sin t$ manyetik yüzeyler	47
Şekil 4.17 a. $u(s, t)=0$, $v(s, t)=e^{s/2} \sin t$, $w(s, t)=e^{s/2} \cos t$, b. $u(s, t)=0$, $v(s, t)=e^s \cos t$, $w(s, t)=e^s \sin t$, c. $u(s, t)=0$, $v(s, t)=t e^{s/4} \sin t$ kabuk manyetik yüzeyler	48
Şekil 4.18 a. $w(s, t)=t e^{s/4} \cos t$, $u(s, t)=0$, $v(s, t)=e^{s/2} \sin t$, $w(s, t)=e^{s/2} \cos t$, b. $u(s, t)=0$, $v(s, t)=se^s \sin t$, $w(s, t)=se^s \cos t$ kabuk manyetik yüzeyler	49
Şekil 4.19 Kabuk yüzey ve üzerinde minimal eğri (siyah)	49
Şekil 4.20 Manyetik yüzey $u(s, t)=2 \sin t \cos s$, $v(s, t)=2 \sin t \sin s$, $w(s, t)=2 \cos t$ ve manyetik eğri (kırmızı)	51
Şekil 4.21 Manyetik yüzey $u(s, t)=st$, $v(s, t)=s^2t$ ve üzerindeki manyetik eğri (kırmızı)	54

1. GİRİŞ

Manyetik eğriler fizik ve diferensiyel geometride bir çok uygulama alanına sahip olup bu alanlarda önemli rol oynar. Bir yüklü parçacık bir V manyetik alanına girdiği zaman bu parçacığın Serret-Frenet vektörleri bu alandan etkilenirler ve bu etkiyle Lorentz kuvveti denilen bir kuvvet açığa çıkar. Dolayısıyla parçacık bu alan içerisinde bir yörünge izlemeye başlar. Bu yörüngeye manyetik eğri adı verilir. Örneğin; 3- boyutlu Öklid uzayında yüklü parçacığın teğet vektör alanı manyetik alandan etkilendiğinde

$$\phi(T) = V \times T$$

eklinde tanımlı Lorentz kuvveti açığa çıkar. Lorentz kuvvetinin etkisiyle elde edilen parçacığın hareketini şöyle özetleyebiliriz: Eğer T teğet vektör alanı, V manyetik alanına paralel ise Lorentz kuvveti sıfır olacağından parçacık manyetik alana paralel ilerler. Eğer T teğet vektör alanı, V manyetik alanına dik ise Lorentz kuvveti maksimum olup parçacık çember eğrisi şeklinde bir yörünge izler. Eğer T teğet vektör alanı, V manyetik alanıyla sabit bir açı yapıyorsa Lorentz kuvvetinin etkisiyle parçacık helis eğrisi şeklinde bir yörünge izler (Barros ve Romeo 2007).

Manyetik alanın T teğet vektör alanını etkilemesi sonucunda elde edilen yörüngeleri T-manyetik eğriler olarak adlandıracğız. Bu durumda, V manyetik alanının T-manyetik eğrileri aşğıdaki Lorentz eşitliğini sağlayan eğrilerdir.

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = \phi(\gamma') = V \times \gamma'$$

Bu eşitlik $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$ olması durumunda geodezikleri genelleştirir diyebiliriz. Ayrıca bu eşitliğin çözümü analitik kimya, biyokimya, atmosferik bilim, geokimya, cycloton, proton ve kanser tedavisi gibi birçok alanda yararlı uygulamalara sahiptir. Ayrıca Lorentz eşitliğinin çözümleri Kirchhoff elastik çubukları verir. Bu ise Hall etkisiyle birlikte fiziksel model ve klasik elastik teori arasında inanılmaz bir bağlantı sağlar

(Barros ve Romeo 2007).

Bu alanda yapılan bazı çalışmaları aşağıdaki gibi özetleyebiliriz: 3-boyutlu Riemann manifoldlarında Barros vd. Killing manyetik alanıyla ilgili manyetik alana varyasyonel bir yaklaşım yaparak elde edilen yörüngeleri incelemiştir (Barros ve Romeo 2007), (Barros vd. 2007), (Barros 1997), (Barros vd. 2005), (Barros vd. 2001). Daha sonra, Ling Xu ve David Mould parçacık üzerindeki yükün sürekli değişerek çeşitli eğriliklere sahip karmaşık bir eğri şeklinde yörünge izlediğini ileri sürdü ve araştırmalarında bu metotla elde edilen manyetik eğriler yardımıyla alev, saç, ve ağaç gibi şekillerin çizilebileceğini gösterdi (Xu ve Mould 2009).

Diğer taraftan, gazların yüksek basınç veya yüksek sıcaklık kullanılarak gaz elementinin atom veya molekülünden bir elektronun ayrılması durumunda *plazma* elde edilir. Plazma sıcaklık ve elektirliği çok iyi ileten bir iletken ve büyük miktarda sıcaklık ve enerji yoğunluğuna sahiptir. Yüksek elektrik iletkenliği plazma içerisinde akıma olanak sağlar. Bu akımlar manyetik alanın etkisiyle depolanması gereken bir güç üretirler.

Hazeltine ve arkadaşları göstermiştir ki plazmayı hapsetmek için sınırlandırılmış plazma yüzeyini en dıştan saran akı yüzeyleri olarak adlandırılan her biri bir sonrakini çevreleyen yüzeyler dizini mevcuttur. Bu akı yüzeyleri, birim normal vektör alanları N olmak üzere N ile V manyetik alanı yüzeyin her noktasında birbirine dik olacak şekilde bulunur. Dolayısıyla akı yüzeyleri çarpışmasız yüklü parçacıklar için bariyer sağlar. Depolama bölgesinin akı yüzeylerinin dizini açık ve kapalı gruplar olmak üzere iki şekildedir. Açık olanların iç içe silindirik yüzeyler kapalı olanların ise iç içe torodial yüzeyler şeklinde karmaşık yüzeyler olduğu bilinmektedir (Bird vd. 1960), (Hazeltine ve Meiss 2003), (Boozer 2004).

Manyetik vektör alan çizgilerini üzerinde bulunduran yüzeylere ise *manyetik yüzey* adı verilir. Manyetik yüzeylere en önemli örnek plazmadır. Evrenin çoğu delikli bir manyetik alana sahip bir plazma biçimindedir. Manyetik alan çizgileri eğildiğinde

veya kesildiğinde hızla kırılabilir ve yeniden bağlanabilir, manyetik enerjiyi ısı, kinetik enerji ve hızlı parçacık enerjisine dönüştürür. Bu durumların bir sonucu olarak ilgili manyetik alan çizgileri için manyetik yüzeyler farklı formlarda elde edilebilir. Bu yüzeyler regüler veya singüler olabilir. Manyetik yüzeylerin en yaygın örneği akış tüpleridir. Bu akış tüpleri birçok yıldızın çevresinde ve güneşin çevresinde yaygın olarak bulunurlar. Bazı gezegenlerin de akış tüpleri vardır. İyi bilinen bir örnek: Jüpiter ile ayı io arasındaki akış tüpüdür (Pedersen ve Boozer 2002) .

Penning adlı bir bilim adamı yüklü parçacıkların hareketinin incelenmesi ve plazmanın sınırlandırılması için akı tüplerinden yararlanarak en başarılı yapılardan olan Penning tuzağı adlı bir model geliştirmiştir. Ancak bu model tek tür plazmaları sınırlandırmak için kullanılmaktadır. Daha sonra, stellaratörler ve tokamaklar gibi manyetik yüzey konfigürasyonları, termonükleer füzyon bağlamında oldukça geliştirilmiş, incelenmiş ve yakın zamanda nötr olmayan plazmaların sınırlandırılması için ilgi çekmiştir. Bu modellerin Penning trap gibi açık ve kapalı saha hattı sistemlerine kıyasla belirli avantajları vardır. Manyetik yüzey konfigürasyonları, pozitif ve negatif türleri eşzamanlı olarak, saf elektrondan quasineutral'e kadar olan herhangi bir yük dengesizliğinde sınırlandırır. Diokotron modlarının stabilizasyonunu sağlayabilir ve az miktarda manyetik alan kuvvetlerinde enerjik elektronları ve pozitronları düzenlerler. Dolayısıyla, bu tür konfigürasyonların, pozitron elektron çifti laboratuvarında sınırlandırılması için benzersiz avantajları vardır. Bunlara ek olarak, manyetik füzyon araştırmasında manyetik yüzeylerin önemi uzun süredir bilinmektedir. Örneğin, yarı-nötr bir plazma, saf bir toroidal alanda sınırlandırılmazken, tokamaklar ve stellaratörler gibi toroidal, yuvalanmış akı yüzeyi konfigürasyonlarında kararlı sonlu basınç dengesi mevcuttur. İlk kez, Pedersen ve arkadaşları nötr olmayan plazmaların manyetik yüzeylerle sınırlandırabileceğini göstermiştir (Pedersen ve Boozer 2002) .

Bu tezin üçüncü bölümünde bir γ eğrisinin Normal ve binormal vektörlerinin Lorentz kuvvetinden etkilenmesiyle elde edilen yörüngeleri inceleyeceğiz. Bu yörüngeleri, sırasıyla, N-manyetik eğriler ve B-manyetik eğriler olarak adlandıracamız ve bu eğri-

lerle ilgili bazı karakterizasyonlar vereceğiz. Daha sonra sonuçlarımıza bazı örnekler verip Mathematica programı yardımıyla resimlerini çizeceğiz. Dördüncü bölümde akı yüzeylerini ve manyetik yüzeyleri tanımlayıp bu yüzeylerle manyetik eğriler arasındaki ilişkiyi vereceğiz. Son kısımda ise yapılan çalışmalarla ilgili sonuç bölümüne yer vereceğiz.



2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Tanım 2.1 M diferansiyellenebilir bir manifold olmak üzere

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, R)$$

dönüşümü verilsin,

i) g simetrik yani her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(X, Y) = g(Y, X)$$

ii) g bilineer yani her $X, Y, Z \in \chi(M)$ ve her $f, h \in C^\infty(M, R)$ için

$$g(fX + hY, Z) = fg(X, Z) + hg(Y, Z)$$

iii) g dönüşümü pozitif tanımlı yani her $X \in \chi(M)$ için

$$g(X, X) \geq 0$$

koşullarını sağlıyorsa bu dönüşüme M üzerinde *Riemann metriği* veya *Metrik tensor* ve üzerinde Riemann metriği tanımlanmış manifolda *Riemann manifoldu* denir (Hacısalihoglu 1980).

Tanım 2.2 M bir Riemann manifoldu ve ∇ , M üzerinde bir Riemann koneksiyonu olsun. Her $X, Y, Z \in \chi(M)$ ve her $f, h \in C^\infty(M, R)$ için

$$\begin{aligned} \nabla & : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M) \\ (X, Y) & \rightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y \end{aligned}$$

ile tanımlı dönüşümü

$$i) \nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$$ii) \nabla_{(X+Y)}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$$

$$iii) \nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$$

$$iv) \nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$$

özelliklerini sağlıyorsa ∇ ya M üzerinde tanımlı bir *afin koneksiyon* veya *kovaryant türev* denir (Hacısalihoglu ve Ekmekci 2003).

Tanım 2.3 (M, g) Riemann manifoldu ve ∇ , M üzerinde tanımlı afin koneksiyon olsun.

Her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$i) \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

$$ii) Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$$

koşulları sağlanıyorsa ∇ ya M nin *Levi Civita Koneksiyonu* denir

(Hacısalihoglu ve Ekmekci 2003).

Tanım 2.4 (M, g) Riemann manifoldu ve ∇ , M üzerinde tanımlı Levi Civita Koneksiyonu olsun Her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X, Y, Z) &\rightarrow R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \end{aligned}$$

ile tanımlı R dönüştürme M nin *Riemann eğrilik tensörü* olarak adlandırılır (O' Neil 1996)

Tanım 2.5 (M, g) Riemann manifoldu üzerinde $R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$ ile tanımlanan tensöre M nin *Riemann Christoffel eğrilik tensörü* denir. Her $X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için Riemann Christoffel eğrilik tensörü aşağıdaki koşulları sağlar.

$$i) R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$$

$$ii) R(X, Y, Z, W) = -(R(X, Y, W, Z))$$

$$iii) R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$$

$$iv) R(X, Y, Z, W) = (R(Z, W, X, Y)) \text{ (O' Neil 1996).}$$

Tanım 2.6 (M, g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Eğer M nin eğrilik tensörü her $X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için;

$$R(X, Y, Z, W) = C\{g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W)\}$$

biçiminde ise M ye sabit eğrilikli uzay adı verilir ve bu uzay $M(C)$ ile gösterilir

(O' Neil 1996).

Tanım 2.7 $L_X Y$ vektör alanına X in Y yönünde *Lie Türevi* denir. Lie türevi her $p \in M$ noktasında tanımlıdır ve $(L_X Y)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [(\theta_{-t})_*(Y_{\theta_t(p)}) - Y_p]$ olarak tanımlanır. Burada θ_t , 1-parametrelili grubu X vektör alanının integral eğrisidir (Boothby 1975).

Tanım 2.8 gl bir reel vektör uzayı olsun gl üzerinde bilineer operatör aşağıdaki gibi tanımlansın

$$\begin{aligned} [,] &: gl \times gl \rightarrow gl \\ (X, Y) &\rightarrow [,](X, Y) = [X, Y] \end{aligned}$$

Eğer bu operatör,

$$i) [X, Y] = -[Y, X]$$

$$ii) [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] \equiv 0$$

özelliklerini sağlıyorsa Braket operatörüdür ve $(gl, [,])$ ikilisine Lie cebiri denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Teorem 2.1 M manifoldu üzerinde C^∞ X ve Y vektör alanları ve $f \in C^\infty(M, R)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} L_X f &= X(f) \\ (L_X Y)P &= [X, Y]_P \end{aligned}$$

dir (Boothby 1975).

Tanım 2.9 M diferensiyellenebilir bir manifold ve g de M de bir metrik tensör olsun. Her $X, Y \in \chi(M)$ için $(L_V g)(X, Y) = 0$ oluyorsa V vektör alanına g metriğinin *Killing vektör alanı* denir (Kobayashi ve Nomizu 1996).

$\mathbb{R}^3$ de standart koordinat sistemi $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ ve bu uzaydaki metriğide

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

olarak alalım. Bu metriğe karşılık gelen Killing vektör alanları, her $i, j \in \{1, 2, 3\}$ için,

$$(L_V g)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{\alpha=1}^3 \left(\xi_\alpha \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_i} g_{\alpha j} + \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_j} g_{i\alpha} \right) = 0$$

denkleminin çözümleri yapılarak

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}, z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}, z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} \right\}$$

şeklinde elde edilir.

$\gamma = \gamma(t) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$, 3 boyutlu reel uzay form M de kesitsel eğriliği C ile verilmiş bir eğri olsun. γ nın teğet vektör alanı T ile ve hızı $v(t) = \|\gamma'(t)\|$ ile gösterilir. Ayrıca κ ve τ sırasıyla γ nın eğriliği ve torsiyonudur. $\{T, N, B\}$ γ nın Frenet çatısı ve ∇ , M nin bir Levi-Civita bağlantısı olmak üzere γ nın Frenet denklemleri ;

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= \kappa N \\ \nabla_T N &= -\kappa T + \tau B \\ \nabla_T B &= -\tau N \end{aligned}$$

olarak bulunur .Ayrıca ” t ” keyfi bir parametre olmak üzere $\Gamma = \Gamma(t, z)$ varyasyonunu

$$\begin{aligned} \Gamma &: I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M(C) \\ (t, z) &\rightarrow \Gamma(t, z) \end{aligned}$$

olacak şekilde düşünelim. Γ boyunca varyasyon vektör alanı $V = V(t, z)$ ise

$$V(t) = \left. \frac{\partial \Gamma(t, z)}{\partial z} \right|_{z=0}$$

olur. $V = V(t, z), T = T(t, z), v = v(t, z) \dots$ şeklinde notasyonları kullanacağız.

Burada “ s ”, Γ varyasyonu içindeki t eğrilerinin yay parametresini ifade etmek üzere bu kısımdan sonra $v(s, z), W(s, z), \varkappa^2(s, z), \dots$ şeklinde düşünülmektedir.

Tanım 2.10 γ , 3 boyutlu reel uzay formu M üzerinde kesitsel eğriliği C olan ve

$$\begin{aligned} \gamma &: I \subset R \rightarrow M(C) \\ s &\rightarrow \gamma(s) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı regüler eğri ve “ s ” de eğrinin kendi yay parametresi olsun. Eğer

$$\left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial \varkappa^2}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial \tau^2}{\partial z} \right|_{z=0} = 0$$

ise $V = V(s)$ vektör alanına γ eğrisi boyunca *Killing vektör alanı* denir (Barros ve Romeo 2007).

Teorem 2.2 $\gamma, M(C)$, 3-boyutlu reel uzay formlarda

$$\begin{aligned} \gamma &: I \subset R \rightarrow M \\ s &\rightarrow \gamma(s) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı regüler bir eğri olmak üzere,

$$\begin{aligned} (1) \quad V(v^2) &= \left. \frac{\partial v^2}{\partial z} \right|_{z=0} = v g(\nabla_T V, T) \\ (2) \quad V(\varkappa^2) &= \left. \frac{\partial \varkappa^2}{\partial z} \right|_{z=0} = 2\varkappa g(\nabla_T^2 V, N) - 4\varkappa^2 g(\nabla_T V, T) + 2C\varkappa g(V, N) \\ (3) \quad V(\tau^2) &= \left. \frac{\partial \tau^2}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{\tau}{\varkappa} g(\nabla_T^3 V, B) - \frac{\tau \varkappa'}{\varkappa^2} g(\nabla_T^2 V + CV, B) \\ &\quad + \frac{\tau}{\varkappa} (C + \varkappa^2) g(\nabla_T V, B) - \tau^2 g(\nabla_T V, T) \end{aligned}$$

şeklindedir (Barros 1997).

Bu eşitlikler V de çözüm uzayı altı boyutlu olan bir lineer sistem belirtir. Açıkça M nin herhangi bir Killing vektör alanının γ ya kısıtlanması γ boyunca bir Killing vektör alanı ifade eder. Özel olarak M basit bağlantılı ise izometri grubunun boyutu 6 dır ve aşağıdaki Lemma elde edilir (Barros ve Romeo 2007).

Lemma 2.1 M tam, basit bağlantılı reel uzay formu ve γ M içinde immersed eğri olsun. γ üzerinde bir vektör alanı V , γ boyunca bir Killing vektör alanıdır gerek ve yeter koşul M üzerinde bir V Killing vektör alanına genişlemesidir (Barros 1997). M , n -boyutlu bir Riemann Manifoldu olsun. M üzerindeki Lorentz kuvveti F anti simetrik ϕ operatörüyle birlikte aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$g(\phi(X), Y) = F(X, Y), \quad X, Y \in \chi(M)$$

M üzerindeki F manyetik alanının yörüngesi olan γ eğrileri

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = \phi(\gamma')$$

şeklinde tanımlı Lorentz eşitliğini sağlar. Her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için karma çarpım

$$g(X \times Y, Z) = dv_g(X, Y, Z).$$

şeklinde verilir. Eğer V , M üzerinde tanımlı Killing vektör alanı ise bu vektör alanına karşılık gelen Killing manyetik alanı $F_V = \iota_V dv_g$ şeklindedir. Burada ι iççarpımdır. Bu durumda Lorentz kuvveti F_V aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\phi(X) = V \times X. \tag{2.1}$$

Sonuç olarak Lorentz kuvveti eşitliği

$$\phi(\gamma') = \nabla_{\gamma'} \gamma' = V \times \gamma' \tag{2.2}$$

şeklindedir (Barros ve Romeo 2007).

Tanım 2.11 Birim hızlı γ manyetik eğrisi V manyetik alanının yörüngesidir gerek ve yeter şart V manyetik alanı γ eğrisi boyunca aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$V = \omega T + \varkappa B \tag{2.3}$$

burada ω fonksiyonu her bir V manyetik alanıyla ilgili olup manyetik alana göre manyetik alanın yarı-eğimi olarak adlandırılır (Barros ve Romeo 2007).

3. MANYETİK EĞRİLER

3.1 N-Manyetik Eğriler

Aşağıdaki Lorentz eşitliğini sağlayan γ eğrisine M üzerinde bir N-manyetik eğri adı verilir.

$$\nabla_{\gamma'} N = \phi(N) = V \times N \quad (3.1)$$

Önerme 3.1 γ eğrisi 3-boyutlu Riemann manifoldu (M, g) üzerinde birim hızlı bir N-manyetik eğri ve bu eğrinin Frenet elemanları $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ olsun. Bu durumda Serret-Frenet formülleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} \nabla_T T \\ \nabla_T N \\ \nabla_T B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Buradan Lorentz kuvveti ve Frenet vektörleri arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} \phi(T) \\ \phi(N) \\ \phi(B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & \Omega_1 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ -\Omega_1 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

şeklindedir.

İspat. γ eğrisi (M, g) , 3-boyutlu Riemann manifoldu üzerinde bir N-manyetik eğri ve bu eğrinin Frenet elemanları $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ olsun.

$\phi(T) \in sp\{T, N, B\}$ olduğundan

$$\phi(T) = \lambda T + \eta N + \zeta B$$

şeklindedir. Buradan

$$\lambda = g(\phi(T), T) = 0$$

$$\eta = g(\phi(T), N) = -g(\phi(N), T) = -g(\nabla_{\alpha'} N, T) = g(-\varkappa T + \tau B) = -\varkappa$$

$$\zeta = g(\phi(T), B) = \Omega_1$$

dir. Dolayısıyla

$$\phi(T) = -\varkappa N + \Omega_1 B$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde $\phi(N)$ ve $\phi(B)$ nin eşitide

$$\phi(N) = -\varkappa T + \tau B$$

$$\phi(B) = -\Omega_1 T - \tau N.$$

dir. ■

Önerme 3.2 Birim hızlı γ manyetik eğrisi V manyetik alanının yörüngesidir gerek ve yeter şart V manyetik alanı γ eğrisi boyunca aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$V = \tau T - \Omega_1 N + \varkappa B. \quad (3.4)$$

İspat. γ eğrisi V manyetik vektör alanının yörüngesi olsun. Önerme 3.1 ve (3.1) eşitliğinden kolaylıkla görebilirizki γ eğrisi

$$V = \tau T - \Omega_1 N + \varkappa B$$

eşitliğini sağlar. ■

Teorem 3.1 M , 3 boyutlu reel uzay formu $(M(C), g)$ üzerinde kesitsel eğriliği C olan bir manifold ve V , M üzerinde Killing vektör alanı olsun. $(M(C), g, V)$ nin N -manyetik yörüngelerinin eğrilik ve burulması aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$\left[\frac{1}{\varkappa} \left(\left(\frac{C\Omega_1 - \Omega_1''}{\tau} \right)' - \Omega_1' \tau + C\varkappa \right) \right]' + \varkappa \frac{C\Omega_1 - \Omega_1''}{\tau} = 0, \quad \Omega_1 = -\frac{\tau'}{\varkappa} \quad (3.5)$$

İspat. V , M üzerinde Killing vektör alanı olsun. Bu durumda V (3.4) eşitliğini sağlar. Bu eşitliğin s ye göre türevini alırsak

$$\nabla_T V = (\tau' + \Omega_1 \varkappa)T - \Omega_1' N + (\varkappa' - \tau \Omega_1)B, \quad (3.6)$$

eşitliği elde edilir. (3.6) eşitliğinin türevini alıp Serret-Frenet formüllerini kullanırsak

$$\nabla_T^2 V = \Omega_1' \varkappa T + (-\Omega_1'' - \tau(\varkappa' - \tau \Omega_1))N + ((\varkappa' - \tau \Omega_1)' - \Omega_1' \tau)B. \quad (3.7)$$

elde edilir. Tanım 2.10 ve Teorem 2.2 deki (1) eşitliği ile birlikte (3.7) eşitliği kullanılırsa

$$\Omega_1 = -\frac{\tau'}{\varkappa} \quad (3.8)$$

bulunur. (3.6) ve (3.7) eşitlikleri Tanım 2.10 ve Teorem 2.2 deki (2) eşitliği ile birlikte kullanılırsa

$$\Omega_1'' + \tau(\varkappa' - \tau \Omega_1) + g(R(V, T)T, N) = 0$$

bulunur. Ayrıca, M sabit C kesitsel eğriliğine sahip olduğundan $g(R(V, T)T, N) = Cg(V, N) = 0$ dır. Buradan

$$\Omega_1'' + \tau(\varkappa' - \tau \Omega_1) = C\Omega_1 \quad (3.9)$$

dır. Benzer şekilde (3.6) ve (3.7) eşitlikleri Tanım 2.10 ve Teorem 2.2 deki (3) eşitliği ile birlikte düşünülürse

$$\left[\frac{1}{\varkappa} ((\varkappa' - \tau \Omega_1)' - \Omega_1' \tau + g(R(V, T)T, B)) \right]' + \varkappa(\varkappa' - \tau \Omega_1) + (R(V, T)T, B) = 0$$

elde edilir. $g(R(V, T)T, B) = Cg(V, B) = C\varkappa$ ve $g(R(V, T)N, B) = 0$ eşitliklerini kullanırsak

$$\left[\frac{1}{\varkappa} ((\varkappa' - \tau \Omega_1)' - \Omega_1' \tau + C\varkappa) \right]' + \varkappa(\varkappa' - \tau \Omega_1) = 0 \quad (3.10)$$

bulunur. Sonuç olarak (3.8) eşitliği (3.9), (3.10) eşitlikleri ile birlikte düşünülürse

$$\left[\frac{1}{\varkappa} \left(\left(\frac{C\Omega_1 - \Omega_1''}{\tau} \right)' - \Omega_1' \tau + C\varkappa \right) \right]' + \varkappa \frac{C\Omega_1 - \Omega_1''}{\tau} = 0, \quad \Omega_1 = -\frac{\tau'}{\varkappa}$$

eşitliği elde edilir. ■

Sonuç 3.1 3-boyutlu Öklid uzayında γ eğrisi bir N-manyetik eğri olsun. Bu durumda,

i. Eğer Ω_1 sıfırdan farklı bir sabit ise γ eğrisi eksen V manyetik vektör alanı olan bir slant helistir,

ii. Eğer Ω_1 sıfır ise γ eğrisi eksen V manyetik vektör alanı olan bir dairesel helistir.

İspat. 3-boyutlu Öklid uzayında γ eğrisi bir N-manyetik eğri olsun. Eğer Ω_1 sıfırdan farklı bir sabit ve α eğrisi bir N-manyetik eğri olsun. Bu durumda γ eğrisi (3.8), (3.9) ve (3.10) eşitliklerini sağlar ve dolayısıyla

$$\frac{\tau'}{\varkappa} = -\frac{\varkappa'}{\tau} = \Omega_1 \quad (3.11)$$

dir. Buradan

$$\varkappa^2 + \tau^2 = \text{sabit}$$

olup (3.11) eşitliğinden

$$\tau \varkappa' - \varkappa \tau' = -\Omega_1 (\varkappa^2 + \tau^2) = \text{sabit}$$

veya

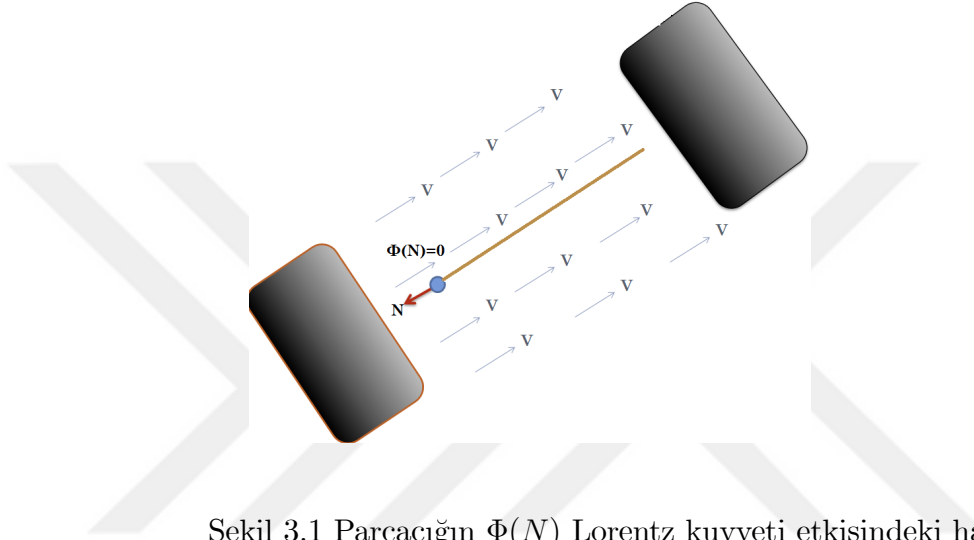
$$\frac{\varkappa^2}{\varkappa^2 + \tau^2} \left(\frac{\tau}{\varkappa} \right)' = \Omega_1.$$

eşitliği elde edilir. O halde γ eğrisi bir slant helistir. Eğer Ω_1 sıfır ise γ (3.11) eşitliğinden kolaylıkla görebiliriz ki γ bir dairesel helistir.

Elde ettiğimiz sonuçların fiziksel yorumlarını aşağıdaki gibi verebiliriz: 3- boyutlu Öklid uzayında yüklü parçacığın normal vektör alanı manyetik alandan etkilendiğinde

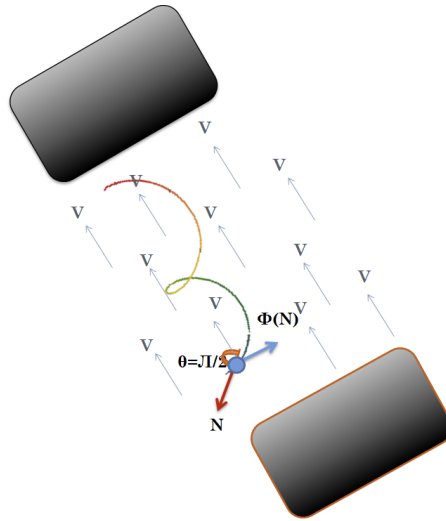
$$\phi(N) = V \times N$$

şeklinde tanımlı Lorentz kuvvetinin etkisiyle yörüngesi değişir. Eğer N normal vektör alanı, V manyetik alanına paralel ise Lorentz kuvveti sıfır olacağından parçacık şekil 3.1'deki gibi manyetik alana paralel ilerler.



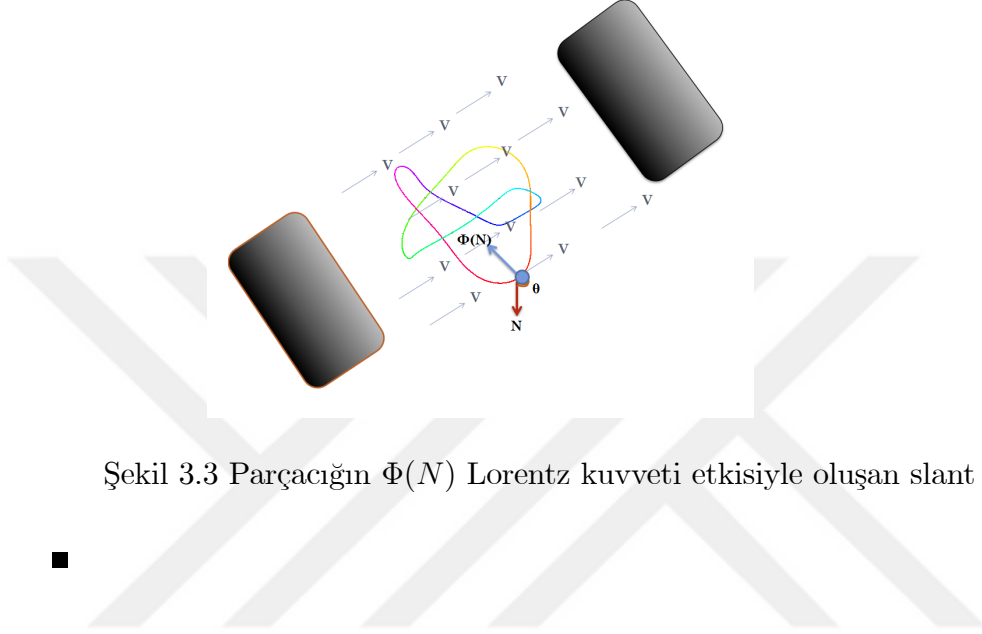
Şekil 3.1 Parçacığın $\Phi(N)$ Lorentz kuvveti etkisindeki hareketi

Eğer N normal vektör alanı, V manyetik alanına dik ise Lorentz kuvveti maksimum olup parçacık şekil 3.2'deki gibi dairesel helis eğrisi şeklinde bir yörünge izler.



Şekil 3.2 Parçacığın $\Phi(N)$ Lorentz kuvveti etkisiyle oluşan helis hareketi

Eğer N normal vektör alanı, V manyetik alanına sabit bir açı ile girerse Lorentz kuvvetinin etkisiyle parçacık şekil 3.3'deki gibi slant helis eğrisi şeklinde bir yörünge izler.



Şekil 3.3 Parçacığın $\Phi(N)$ Lorentz kuvveti etkisiyle oluşan slant helis hareketi

■

3.2 B-Manyetik Eğriler

Önerme 3.3 γ eğrisinin binormal vektör alanı aşağıdaki Lorentz kuvveti eşitliğini sağlıyorsa γ eğrisine M üzerinde B-manyetik eğri denir.

$$\nabla_{\gamma'} B = \phi(B) = V \times B. \quad (3.12)$$

γ eğrisi 3-boyutlu Riemann manifoldu (M, g) üzerinde $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ elemanları ile birlikte bir B-manyetik eğri olsun. B-manyetik eğri için Lorentz eşitliği

$$\begin{bmatrix} \phi(T) \\ \phi(N) \\ \phi(B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_2 & 0 \\ -\Omega_2 & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

şeklindedir.

İspat. γ eğrisi 3-boyutlu Riemann manifoldu (M, g) üzerinde $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ elemanları ile birlikte bir B-manyetik eğri olsun. $\phi(T) \in sp\{T, N, B\}$ olduğundan

$$\phi(T) = \mu T + \rho N + \sigma B$$

dir. Buradan

$$\mu = g(\phi(T), T) = 0$$

$$\rho = g(\phi(T), N) = \Omega_2$$

$$\sigma = g(\phi(T), B) = -g(\phi(B), T) = -g(\nabla_{\alpha'} B, T) = g(-\tau N, T) = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\phi(T) = \Omega_2 N$$

şeklinde yazılır. Benzer şekilde

$$\phi(N) = -\Omega_2 T + \tau B$$

$$\phi(B) = -\tau N.$$

dir. ■

Önerme 3.4 Birim hızlı γ manyetik eğrisi V manyetik alanının yörüngesidir gerek ve yeter şart V manyetik alanı γ eğrisi boyunca aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$V = \tau T + \Omega_2 B. \quad (3.14)$$

İspat. γ eğrisi V manyetik vektör alanının yörüngesi olsun. Önerme 3.3 ve Önerme 3.12 den kolaylıkla görebilirizki γ eğrisi (3.14) eşitliğini sağlar. ■

Teorem 3.2 M , 3 boyutlu reel uzay formu $(M(C), g)$ üzerinde kesitsel eğriliği C olan bir manifold ve V , M üzerinde Killing vektör alanı olsun. $(M(C), g, V)$ nin B-manyetik yörüngelerinin eğrilik burulması aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$2\kappa'' + 2\kappa\tau^2 + 4a\tau^2 + 4C\kappa + \kappa^3 = b, \quad b, \tau \text{ sabit.} \quad (3.15)$$

İspat. V 3-boyutlu Riemann manifoldu üzerinde bir manyetik vektör alanı olsun. Bu durumda V (3.14) eşitliğini sağlar. (3.14) eşitliğinin türevini alarak

$$\nabla_T V = \tau' T + \tau(\kappa - \Omega_2)N + \Omega_2' B \quad (3.16)$$

eşitliği elde edilir. (3.16) nin türevini alırsak

$$\nabla_T^2 V = (\kappa\tau\Omega_2 - \tau\kappa^2)T + (\tau\kappa' - 2\tau\Omega_2')N + (\Omega_2'' + \tau^2\kappa - \tau^2\Omega_2)B \quad (3.17)$$

bulunur. Tanım 2.10 ve Teorem 2.2 deki (1) eşitliği (3.16) eşitliği ile birlikte kullanılırsa

$$\tau' = 0 \quad (3.18)$$

bulunur. (3.16) ve (3.17) eşitlikleri Tanım 2.10 ve Teorem 2.2 deki (2) eşitliği ile birlikte göz önüne alınırsa

$$\tau\kappa' - 2\tau\Omega_2' + g(R(V, T)T, N) = 0.$$

denklemini elde edilir. M nin sabit C kesitsel eğriliği göz önüne alınırsa $g(R(V, T)T, N) = Cg(V, N) = 0$ olduğundan

$$\Omega_2 = \frac{\kappa}{2} + a, \quad a = \text{const.} \quad (3.19)$$

dır. Benzer şekilde (3.16) , (3.17) ve (3.17) eşitlikleri Tanım 2.10 ve Teorem 2.2 deki (3) eşitliği ile birlikte düşünülürse

$$\left[\frac{1}{\varkappa}(\Omega_2'' + \varkappa\tau^2 - \tau^2\Omega_2 + g(R(V,T)T, B)) \right]' + \varkappa\Omega_2' + g(R(V,T)T, B) = 0$$

dır. $g(R(V,T)T, B) = Cg(V, B) = C\varkappa$ ve $g(R(V,T)N, B) = 0$ olduğundan

$$\left[\frac{1}{\varkappa}\left(\frac{\varkappa''}{2} + \varkappa\tau^2 - \tau^2\left(\frac{\varkappa}{2} + a\right) + C\varkappa\right) \right]' + \varkappa\frac{\varkappa'}{2} = 0. \quad (3.20)$$

veya

$$\left[\frac{1}{\varkappa}(\Omega_2'' + \varkappa\tau^2 - \tau^2\Omega_2 + C\varkappa) \right]' + \varkappa\Omega_2' = 0 \quad (3.21)$$

elde edilir. Buradan integrasyon alınarak

$$2\varkappa'' + 2\varkappa\tau^2 + 4a\tau^2 + 4C\varkappa + \varkappa^3 = b, \quad b = \text{sabit}. \quad (3.22)$$

eşitliği bulunur. ■

Sonuç 3.2 3-boyutlu Öklid uzayında γ eğrisi bir B-manyetik eğri olsun. Bu durumda,

- i. Eğer Ω_1 sıfırdan farklı bir sabit ise γ eğrisi eksen V manyetik vektör alanı olan bir dairesel helistir,
- ii. Eğer Ω_1 sıfır ise γ eğrisi bir çemberdir.

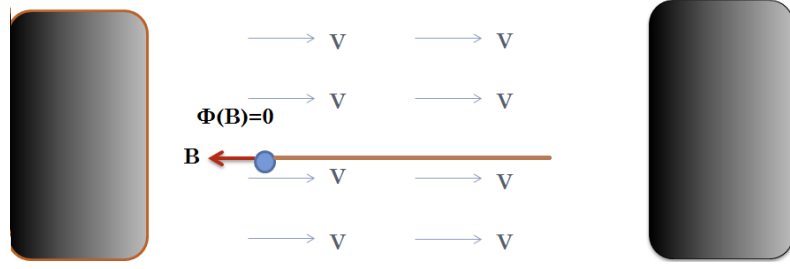
İspat. (3.22) eşitliğinden açıktır. ■

Elde ettiğimiz sonuçların fiziksel yorumunu aşağıdaki gibi verebiliriz:

3- boyutlu Öklid uzayında yüklü parçacığın normal vektör alanı manyetik alandan etkilendiğinde

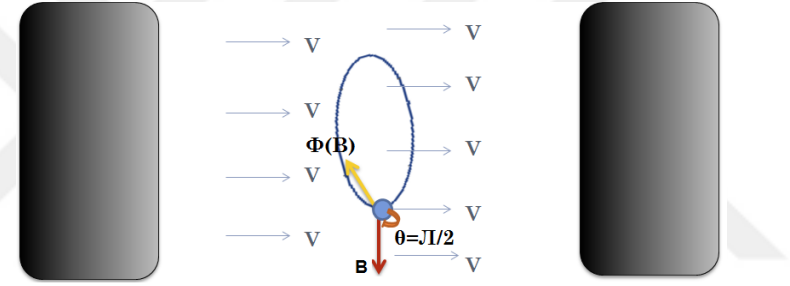
$$\phi(B) = V \times B$$

şeklinde tanımlı Lorentz kuvvetinin etkisiyle yörüngesi değişir. Eğer B binormal vektör alanı, V manyetik alanına paralel ise Lorentz kuvveti sıfır olacağından parçacık şekil 3.4'deki gibi manyetik alana paralel ilerler.



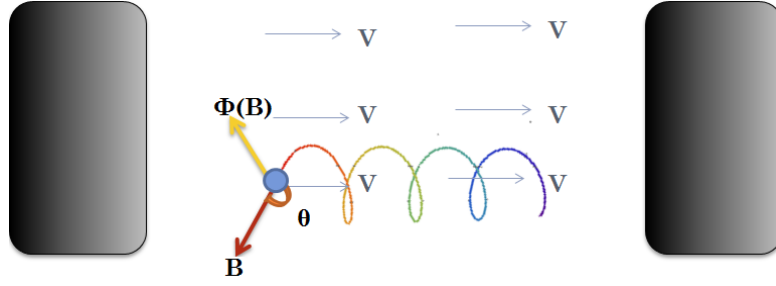
Şekil 3.4 Parçacığın $\Phi(B)$ Lorentz kuvveti etkisindeki hareketi

Eğer B binormal vektör alanı, V manyetik alanına dik ise Lorentz kuvveti maksimum olup parçacık şekil 3.5'deki gibi çember eğrisi şeklinde bir yörünge izler



Şekil 3.5 Parçacığın $\Phi(B)$ Lorentz kuvveti etkisiyle oluşan dairesel hareketi

Eğer B binormal vektör alanı, V manyetik alanına sabit bir açı ile girerse Lorentz kuvvetinin etkisiyle parçacık şekil 3.6'daki gibi dairesel helis eğrisi şeklinde bir yörünge izler.



Şekil 3.6. Parçacığın $\Phi(B)$ Lorentz kuvveti etkisiyle oluşan helis hareketi

Sonuç 3.3 M , 3 boyutlu reel uzay formu $(M(C), g)$ üzerinde kesitsel eğriliği C olan bir manifold ve V , M üzerinde Killing vektör alanı olsun. Bu durumda $(M(C), g, V)$ nin N-manyetik ve B-manyetik yörüngeleri

- i. $C = 1$ için 3-boyutlu $\mathbb{S}^3$ küresi,
- ii. $C = -1$ için 3-boyutlu hiperbolik uzay $\mathbb{H}^3$,
- iii. $C = 0$ için 3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ üzerindedir.

4. MANYATİK EĞRİLER VE YÜZEYLER

4.1 Killing Akı Yüzeyleri

Tanım 4.1 Bir M yüzeyinin birim normal vektör alanı N ve V manyetik vektör alanı olsun. M üzerindeki her noktada $g(V, N) = 0$ eşitliği sağlanıyorsa M akı yüzeyi olarak adlandırılır (Bird vd. 1960), (Boozer 2004).

Bu bölümde $V = \frac{\partial}{\partial z}$ ve $V = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ Killing vektör alanlarının akı yüzeylerini belirleyeceğiz. Diğer vektör alanları $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, -z\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z}$ ve $z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}$ de bu vektörlerle aynı akı yüzeylerini üretirler.

M üzerindeki V vektör alanı Killing vektör alanı olması için

$$g(\nabla_Y V, X) + g(\nabla_X V, Y) = 0 \quad (4.1)$$

şeklinde verilen Killing eşitliğinin sağlanması gerek ve yeter şarttır. Burada $X, Y \in \chi(M)$ ve ∇ , M nin Levi-Civita koneksiyonudur.

Killing eşitliğinin temel çözümü $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}, -z\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z}, z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z} \right\}$ 3-boyutlu öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ üzerindeki Killing vektör alanlarının baz vektörlerini verir. Burada x, y ve z , $\mathbb{E}^3$ uzayının koordinatlarıdır ve $\mathbb{R}^3 = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$ bir vektör uzayıdır (Barros ve Romeo 2007), (Drut-Romaniuc ve Munteanu 2011).

Teorem 4.1 M , 3-boyutlu öklid uzayında $X(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$ parametrik denklemlerle verilen bir yüzey olsun. Bu durumda M yüzeyinin, $V = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ manyetik alanının akı yüzeyi olması için

$$\frac{\partial x_3}{\partial u} \left(x_1 \frac{\partial x_1}{\partial v} + x_2 \frac{\partial x_2}{\partial v} \right) - \frac{\partial x_3}{\partial v} \left(x_1 \frac{\partial x_1}{\partial u} + x_2 \frac{\partial x_2}{\partial u} \right) = 0 \quad (4.2)$$

eşitliğinin sağlanması gerek ve yeter şarttır.

İspat. M , 3-boyutlu öklid uzayında $X(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$ parametrik denklemiyle verilen bir yüzey olsun. Bu durumda M nin birim normal vektör alanı aşağıdaki gibidir.

$$N = \frac{1}{\|X_u \times X_v\|} \left(\frac{\partial x_2}{\partial u} \frac{\partial x_3}{\partial v} - \frac{\partial x_2}{\partial v} \frac{\partial x_3}{\partial u}, \frac{\partial x_1}{\partial v} \frac{\partial x_3}{\partial u} - \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_3}{\partial v}, \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial v} - \frac{\partial x_1}{\partial v} \frac{\partial x_2}{\partial u} \right). \quad (4.3)$$

$X(u, v)$ bir akı yüzeyi olduğundan N birim normal vektör alanı ve $V = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial x}$ manyetik alanı için

$$g(N, V) = 0$$

dır. Buradan

$$\frac{\partial x_3}{\partial u} \left(x_1 \frac{\partial x_1}{\partial v} + x_2 \frac{\partial x_2}{\partial v} \right) - \frac{\partial x_3}{\partial v} \left(x_1 \frac{\partial x_1}{\partial u} + x_2 \frac{\partial x_2}{\partial u} \right) = 0$$

elde edilir. Tersine (4.2) eşitliği sağlansın, bu durumda $g(N, V) = 0$ dır. O halde $X(u, v)$ yüzeyi $V = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial x}$ manyetik alanının bir akı yüzeyidir. Benzer şekilde $-z \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial z}$ ve $-z \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial z}$ vektör alanları içinde çözüm yapılabilir. ■

Şimdi ise (4.2) eşitliğinin özel çözümünü verip Mathematica programı yardımıyla resmini çizeceğiz.

Çözüm 4.1 M , 3-boyutlu Öklid uzayında $X(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$ parametrik denklemiyle verilen bir akı yüzeyi olsun. Bu durumda M , (4.2) eşitliğini sağlar. Genelliği bozmadan $A(u, v) = x_1 \frac{\partial x_1}{\partial v} + x_2 \frac{\partial x_2}{\partial v}$, $B(u, v) = x_1 \frac{\partial x_1}{\partial u} + x_2 \frac{\partial x_2}{\partial u}$ şeklinde alırsak aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$A(u, v) \frac{\partial x_3}{\partial u} - B(u, v) \frac{\partial x_3}{\partial v} = 0. \quad (4.4)$$

(4.4) eşitliğinin çözümü için $x_3(u, v) = c$ (c sabit) alınarak.

$$dx_3 = x_{3u} du + x_{3v} dv.$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$\frac{x_{3u}}{x_{3v}} = -\frac{dv}{du}. \quad (4.5)$$

dir. (4.4) ve (4.5) eşitlikleri yardımıyla

$$\frac{dv}{du} = \frac{B(u, v)}{A(u, v)}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Son eşitlikten karakteristik koordinatlar $\xi = u$ ve $\eta = \psi(u, v)$ olup burada $\{\xi, \eta\}$ lineer bağımsız ve $\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(u, v)} \neq 0$ dır. Sonuç olarak $x_3(u, v) = f(\eta)$ bulunur. Buradan belirli $x_1(u, v)$ ve $x_2(u, v)$ için akı yüzeyinin denklemi

$$X(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), f(\eta))$$

şeklindedir.

Örnek 4.1 M , 3-boyutlu öklid uzayında $X(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$ bir akı yüzeyi olsun. Bu durumda M , (4.2) eşitliğini sağlar.

Eğer $x_1(u, v) = \cos(u)$, $x_2(u, v) = \sin(v)$ şeklinde seçilirse

$$\sin v \cos v \frac{\partial x_3}{\partial u} + \cos u \sin u \frac{\partial x_3}{\partial v} = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu ise

$$\frac{dv}{du} = \frac{\cos u \sin u}{\sin v \cos v} \Rightarrow \cos 2v - \cos 2u = c. \quad (4.6)$$

eşitliğini verir. Buradan

$$\begin{aligned} \xi &= u, \\ \eta &= \cos 2v - \cos 2u. \end{aligned} \quad (4.7)$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_3}{\partial u} &= \frac{\partial x_3}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial x_3}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial u} = \frac{\partial x_1}{\partial \xi} + 2 \sin 2u \frac{\partial x_3}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial x_3}{\partial v} &= \frac{\partial x_3}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial x_3}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial v} = -2 \sin 2v \frac{\partial x_3}{\partial \eta}.\end{aligned}\tag{4.8}$$

elde edilir. (4.8) eşitliği ile birlikte

$$\frac{\partial x_3}{\partial \xi} = 0 \Rightarrow x_1(\xi, \eta) = g(\eta).\tag{4.9}$$

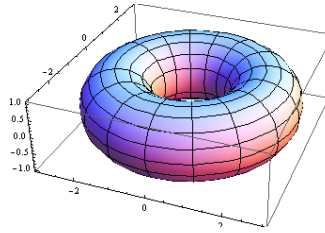
bulunur. Bu eşitlikle birlikte

$$x_3(u, v) = f(\cos 2v - \cos 2u).$$

elde edilir. Sonuç olarak $V = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ manyetik alanının akı yüzeyinin parametrik denklemi

$$X(u, v) = (\cos u, \sin v, f(\cos 2v - \cos 2u))$$

şeklindedir. Akı yüzeyinin resmi şekil 4.1' de verilmiştir.

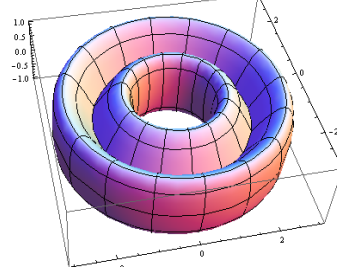


Şekil 4.1 Akı yüzeyi $X(u, v) = (\cos u, \sin v, \sin(\cos 2v - \cos 2u)^3)$

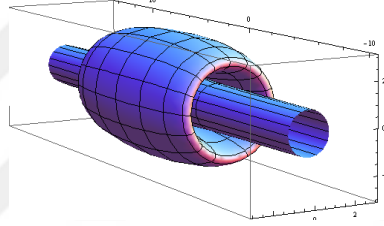
M , 3-boyutlu Öklid uzayında $X(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$ parametrik denklemiyle verilmiş bir yüzey olsun. Bu durumda M , (4.2) eşitliğini sağlar. Eğer $x_1(u, v) = (c + a \cos v) \cos u$, $x_2(u, v) = (c + a \cos v) \sin u$ şeklinde seçilirse benzer çözümle akı yüzeyinin parametrik denklemi aşağıdaki gibi elde edilir

$$X(u, v) = ((c + a \cos v) \cos u, (c + a \cos v) \sin u, f(v)).$$

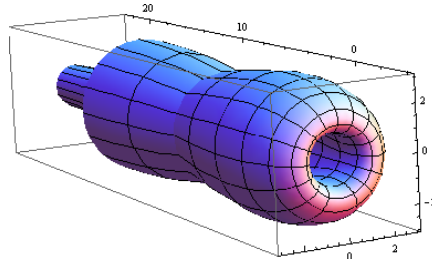
Şimdi topolojik tor yüzeyini de içeren bir kaç resmini, şekil 4.2-şekil 4.5'te vereceğiz.



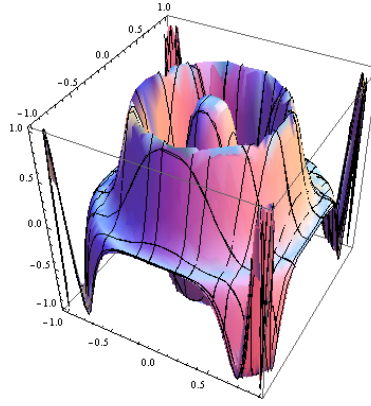
Şekil 4.2 Tor $X(u, v) = ((2 + \cos v) \cos u, (2 + \cos v) \sin u, \sin v)$



Şekil 4.3 $X(u, v) = ((2 + \cos v) \cos u, (2 + \cos v) \sin u, 2 \sin v \cos v)$



Şekil 4.4 $X(u, v) = ((2 + \cos v) \cos u, (2 + \cos v) \sin u, v^3 - 6v)$



Şekil 4.5 $X(u, v) = ((2 + \cos v) \cos u, (2 + \cos v) \sin u, v^2 + 4v)$

Topolojik tor $V = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ manyetik alanının ürettiği bir akı yüzeyidir.

İspat. $X(u, v)$ yüzeyi (4.2) eşitliğini sağladığı kolaylıkla görülebilir. Dolayısıyla tor yüzeyi V manyetik alanının bir akı yüzeyidir. ■

Teorem 4.2 M , 3-boyutlu Öklid uzayında $X(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$ şeklinde parametrelendirilmiş bir yüzey olsun. Bu durumda M , $V = \frac{\partial}{\partial z}$ vektör alanının akı yüzeyi olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial v} - \frac{\partial x_1}{\partial v} \frac{\partial x_2}{\partial u} = 0. \quad (4.10)$$

eşitliğinin sağlamasıdır.

İspat. Teorem 4.1 ispatına benzer şekilde yapılabilir. ■

Şimdi (4.10) eşitliğinin bir çözümünü vereceğiz ve Mathematica programı yardımıyla resmini çizeceğiz.

Çözüm 4.2 $X(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$ yüzeyi $V = \frac{\partial}{\partial z}$ manyetik alanının bir akı yüzeyi olsun. Bu durumda M (4.10) denklemini sağlar. Buradan genelliği

bozmadan (4.10) eşitliğinde $\frac{\partial x_1}{\partial u} = A(u, v)$, $\frac{\partial x_1}{\partial v} = B(u, v)$ şeklinde alırsak aşağıdaki eşitliği elde edebiliriz

$$A(u, v) \frac{\partial x_2}{\partial u} - B(u, v) \frac{\partial x_2}{\partial v} = 0. \quad (4.11)$$

(4.11) eşitliğinin çözümü için $\eta = x_2(u, v) = c$ (c sabit) alınırsa, bu durumda

$$dx_2 = x_{2u}du + x_{2v}dv = 0$$

dır. Bu ise

$$\frac{x_{2u}}{x_{2v}} = -\frac{dv}{du} \quad (4.12)$$

eşitliğini verir. (4.11) ve (4.12) eşitliklerini birlikte kullanırsak

$$\frac{dv}{du} = \frac{B(u, v)}{A(u, v)}$$

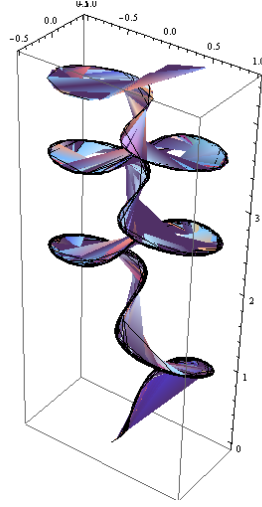
elde edilir. Buradan karakteristik koordinatlar $\xi = u$ ve $\eta = \psi(u, v)$ olup burada $\{\xi, \eta\}$ lineer bağımsız ve $\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(u, v)} \neq 0$ dır. Sonuç olarak $x_2(u, v) = g(\eta)$ olarak bulunur. Bu durumda belirli $x_1(u, v)$ için akı yüzeyi

$$X(u, v) = (x_1(u, v), g(\eta), x_3(u, v))$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 4.2 M , 3-boyutlu Öklid uzayında $X(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$ şeklinde parametrelendirilmiş bir yüzey olsun. Bu durumda M (4.10) eşitliğini sağlar. Eğer $x_1(u, v) = \sqrt{uv}$ olarak seçilir ve Çözüm 3.2 kullanılırsa V vektör alanının akı yüzeyi şekil 4.6'daki gibi elde edilir.

$$X(u, v) = (\sqrt{uv}, f(uv), x_3(u, v)).$$



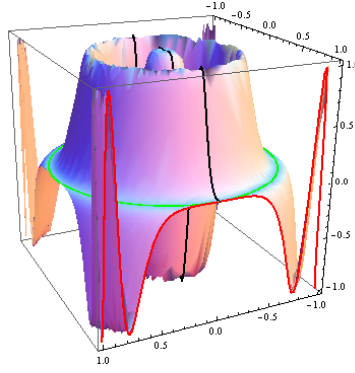
Şekil 4.6 Akı yüzeyi $X(u, v) = (\sqrt{uv}, \sin(uv)^3, 1/2 \sin(2uv))$

Teorem 4.3 γ eğrisi M akı yüzeyi üzerinde bir eğri olsun. Bu durumda γ eğrisinin bir manyetik eğri olması için gerek ve yeter koşul bir geodezik eğrisi olmasıdır.

İspat. γ eğrisi M akı yüzeyi üzerinde bir eğri olsun. Bu durumda γ eğrisi (3.5) denklemini sağlar. Tanım 2.11 deki (2.3) denklemi ve Tanım 4.1 kullanılırsa γ eğrinin geodezik eğri olduğu kolaylıkla görülebilir.

Tersine γ eğrisi M yüzeyi üzerinde bir geodezik eğri olsun, bu durumda γ eğrisi (2.3) eşitliğini sağlar bu ise γ eğrisinin bir manyetik eğri olduğunu gösterir. ■

Örnek 4.3 $X(u, v) = (\cos u, \sin v, \sin(\cos 2v - \cos 2u)^3)$ yüzeyi $V = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ manyetik alanının bir akı yüzeyi ve γ eğrisi V manyetik alanının bir manyetik yörünge eğrisi olsun. Bu durumda son teoremden $\gamma_1(s) = (0, \sin s, \sin(\cos 2s + 1)^3)$, $\gamma_2(s) = (\cos s, \sin s, 0)$ ve $\gamma_3(s) = (\cos s, 1, -\sin(1 + \cos 2s)^3)$ eğrilerinin $X(u, v)$ yüzeyi üzerindeki manyetik eğriler olduğu kolaylıkla görülebilir. İlgili yüzey ve eğriler şekil 4.7’de gösterilmiştir.



Şekil 4.7. Akı yüzeyi ve üzerindeki manyetik eğriler γ_1 (Siyah), γ_2 (Yeşil) and γ_3 (Kırmızı)

Önerme 4.1 Birim hızlı γ B-manyetik eğrisinin V manyetik alanının yörüngesi olması için gerek ve yeter koşul V manyetik alanının γ eğrisi boyunca aşağıdaki şekilde yazılmasıdır.

$$V = \tau T + \Omega_2 B, \quad \Omega_2 = \frac{\varkappa}{2} + a \quad (a \in \mathbb{R}) \quad (4.13)$$

Burada $\varkappa$ ve τ , sırasıyla, γ eğrisinin eğrilik ve burulmasıdır (Bozkurt vd. 2014) .

Önerme 4.2 Eğri-yüzey veya Darboux çatısı olarak adlandırılan $\{T, Y, Z\}$ çatısı

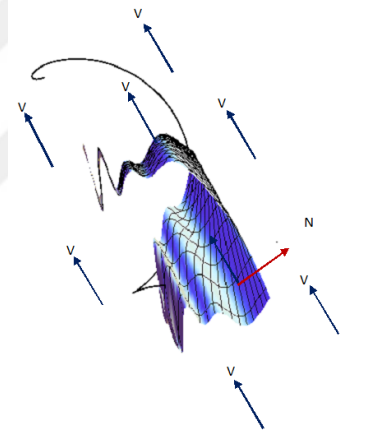
$$\begin{bmatrix} \nabla_T T \\ \nabla_T Y \\ \nabla_T Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & \tau_g \\ -k_n & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada geodezik eğrilik k_g , $k_g = \varkappa \cos \theta$ şeklinde, normal eğrilik k_n , $k_n = \varkappa \sin \theta$ şeklinde ve geodezik torsiyon τ_g , θ açısı Z ve B manyetik alanları arasındaki açı olmak üzere $\tau_g = \tau - \theta$ şeklinde tanımlıdır. Biliyoruz ki eğer $k_g = 0$ ise γ eğrisi geodezik, eğer $k_n = 0$ ise γ eğrisi asimptotik eğri, eğer $\tau_g = 0$ ise γ eğrisi eğrilik çizgisi olarak adlandırılır (Camcı vd. 2011).

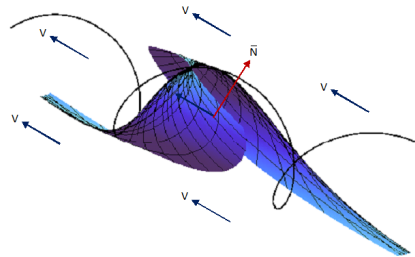
4.2 Manyetik Eğriyle İlgili Akı Yüzeyleri

Tanım 4.2 γ eğrisi V manyetik alanının yörüngesi ve M birim normal vektör alanı n olan bir yüzey olsun. Bu durumda $g(V, n) = 0$ eşitliğini sağlayan M yüzeyi, γ manyetik eğrisiyle ilgili akı yüzeyi olarak adlandırılır. Herbir γ manyetik eğrisi için manyetik vektör alanlarının eşitleri elde edilebileceğinden bu manyetik eğrilerle ilgili akı yüzeyleri kolaylıkla belirnebilir. Bunu aşağıda iki örnekle gösterelim.

Örnek 4.4 $\gamma(s) = (\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}})$ eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında bir T-manyetik eğri olsun. Bu durumda γ eğrisinin manyetik alanı $V(s) = (0, 1, 0)$ şeklinde hesaplanır. Bu durumda γ eğrisiyle ilgili akı yüzeyleri şekil 4.8- şekil 4.9'daki gibidir.



Şekil 4.8 $X(u, v) = (\cos(u + v), e^u, \cos(u + v) \sin(u + v)^3)$



Şekil 4.9 $\bar{X}(u, v) = (\cos(u + v), uv^2 + vu^2, \sin(u + v))$

X ve $\bar{X}$ yüzeylerinin birim normal vektör alanları sırasıyla, $N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$ ve $\bar{N}(u, v) = \frac{\bar{X}_u \times \bar{X}_v}{\|\bar{X}_u \times \bar{X}_v\|}$ şeklinde tanımlı olduğundan $g(V, N) = 0$ ve $g(V, \bar{N}) = 0$ kolaylıkla elde edilir.

4.3 Akı Yüzeyi Üzerindeki Manyetik Eğriler

Önerme 4.3 (M, g) Riemann manifoldu üzerinde γ birim hızlı bir T-manyetik eğri ve $\{T, Y, Z\}$ Darboux çatısı olsun. Bu durumda Darboux çatısının Lorentz kuvveti cinsinden eşiti aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{bmatrix} \phi(T) \\ \phi(Y) \\ \phi(Z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & \varpi \\ -k_n & -\varpi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Burada ϖ , $\varpi = g(\phi(Y), Z)$ şeklinde tanımlı bir fonksiyondur.

İspat. (M, g) Riemann manifoldunda γ Darboux çatısı $\{T, Z, Y\}$ olan birim hızlı bir T-manyetik eğri olsun. Bu durumda

$$\phi(T) = \nabla_T T = k_g Y + k_n Z$$

dir. Ayrıca $\phi(Y) \in \text{span}\{T, Y, Z\}$ olduğundan

$$\phi(Y) = \delta T + \lambda Y + \mu Z$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\delta = g(\phi(Y), T) = -g(\phi(T), Y) = -k_g,$$

$$\lambda = g(\phi(Y), Y) = 0,$$

$$\mu = g(\phi(Y), Z) = \varpi,$$

elde edilir. O halde

$$\phi(Y) = -k_g T + \varpi Z$$

dir. Benzer şekilde

$$\phi(Z) = -k_n T - \varpi Y$$

eşitliği de kolaylıkla elde edilir. ■

Önerme 4.4 Birim hızlı γ T-manyetik eğrisinin V manyetik alanının yörüngesi olması için gerek ve yeter koşul V manyetik alanının γ eğrisi boyunca aşağıdaki şekilde yazılmasıdır.

$$V = \varpi T - k_n Y + k_g Z. \quad (4.16)$$

İspat. γ eğrisi V manyetik alanının manyetik yörüngesi olsun. Bu durumda Önerme 4.3 den

$$V = \varpi T - k_n Y + k_g Z$$

kolaylıkla elde edilir. Tersine (4.16) eşitliği sağlansın. Buradan $V \times T = \phi(T)$ elde edilir. Dolayısıyla γ eğrisi V manyetik alanının manyetik yörüngesidir. ■

Teorem 4.4 γ eğrisi V manyetik alanının manyetik yörüngesi ve M , V manyetik alanıyla ilgili akı yüzeyi olsun. Bu durumda M üzerindeki manyetik eğriler yüzeyin geodezik eğrileridir.

İspat. γ eğrisi V manyetik alanının manyetik yörüngesi ve M bir yüzey olsun. Eğer M , γ T-manyetik eğrisiyle ilgili akı yüzeyi ise bu durumda $g(V, Z) = k_g = 0$ olmalıdır. Bu durum, M flux yüzeyi üzerindeki γ T-manyetik eğrilerinin geodezik eğri olması gerektiğini gösterir. ■

Önerme 4.5 (M, g) Riemann manifoldu üzerinde γ birim hızlı bir N-manyetik eğri ve $\{T, Y, Z\}$ Darboux çatısı olsun. Bu durumda Darboux çatısının Lorentz kuvveti cinsinden eşiti aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{bmatrix} \phi(T) \\ \phi(Y) \\ \phi(Z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g + \frac{\Omega_1 k_n}{\varkappa} & -k_n + \frac{\Omega_1 k_n}{\varkappa} \\ -(k_g + \frac{\Omega_1 k_n}{\varkappa}) & 0 & \theta' + \tau_g \\ -(-k_n + \frac{\Omega_1 k_g}{\varkappa}) & -(\theta' + \tau_g) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ Z \\ Y \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Burada $\Omega_1, \Omega_1 = g(\phi(T), B)$ şeklinde tanımlı bir fonksiyondur.

İspat. (M, g) Riemann manifoldunda γ Darboux çatısı $\{T, Z, Y\}$ olan birim hızlı bir N-manyetik eğri olsun. Bu durumda $\phi(T) \in \text{span} \{T, Y, Z\}$ olduğundan

$$\phi(T) = \lambda T + \eta Y + \zeta Z$$

şeklinde yazılabilir.

$$\begin{aligned} \lambda &= g(\phi(T), T) = 0, \\ \eta &= g(\phi(T), Y) \\ &= g(\phi(T), \cos \theta N + \sin \theta B) \\ &= \cos \theta g(\phi(T), N) + \sin \theta g(\phi(T), B) \\ &= k_g + \frac{\Omega_1 k_n}{\varkappa}, \\ \zeta &= g(\phi(T), Z) \\ &= g(\phi(T), -\sin \theta N + \cos \theta B) \\ &= -\sin \theta g(\phi(T), N) + \cos \theta g(\phi(T), B) \\ &= -k_n + \frac{\Omega_1 k_g}{\varkappa}, \end{aligned}$$

eşitliklerini kullanırsak

$$\phi(T) = (k_g + \frac{\Omega_1 k_n}{\varkappa})Y + (-k_n + \frac{\Omega_1 k_g}{\varkappa})Z.$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca, benzer hesaplamalarla

$$\begin{aligned}\phi(Z) &= -(k_g + \frac{\Omega_1 k_n}{\varkappa})T + (\theta' + \tau_g)Z, \\ \phi(Y) &= -(-k_n + \frac{\Omega_1 k_g}{\varkappa})T - (\theta' + \tau_g)Y.\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. ■

Önerme 4.6 Birim hızlı γ N-manyetik eğrisi V manyetik alanının yörüngesi olması için gerek ve yeter koşul V manyetik alanının γ eğrisi boyunca aşağıdaki şekilde yazılmasıdır.

$$V = (\theta' + \tau_g)T + (k_n - \frac{\Omega_1 k_g}{\varkappa})Y + (k_g + \frac{\Omega_1 k_n}{\varkappa})Z. \quad (4.18)$$

İspat. Birim hızlı γ N-manyetik eğrisi V manyetik alanının yörüngesi olsun. Bu durumda Önerme 4.5 yardımıyla (4.18) eşitliği kolaylıkla elde edilir.

Tersine, (4.18) eşitliği sağlansın. Bu durumda $V \times N = \phi(N)$ sağlanır. Dolayısıyla γ N-manyetik eğrisi V manyetik alanının yörüngesidir. ■

Teorem 4.5 Birim hızlı γ N-manyetik eğrisi V manyetik alanının yörüngesi ve M , V manyetik alanıyla ilgili akı yüzeyi olsun. Bu durumda M yüzeyi üzerindeki N-manyetik eğrilerin Frenet ve Darboux eğrilikleri arasında aşağıdaki bağıntı mevcuttur.

$$\frac{\tau'}{\varkappa^2} = \frac{k_g}{k_n}. \quad (4.19)$$

İspat. Birim hızlı γ N-manyetik eğrisi V manyetik alanının yörüngesi olsun. Eğer M , V manyetik alanıyla ilgili akı yüzeyi ise bu durumda

$$g(V, Z) = 0$$

dır. Buradan

$$k_g + \frac{\Omega_1 k_n}{\varkappa} = 0, \quad \Omega_1 = \frac{-\tau'}{\varkappa}.$$

elde edilir. Son eşitlik yardımıyla da

$$\frac{\tau'}{\varkappa^2} = \frac{k_g}{k_n}.$$

eşitliği bulunur. ■

Sonuç 4.1 Birim hızlı γ N-manyetik eğrisi V manyetik alanının yörüngesi ve M , V manyetik alanıyla ilgili akı yüzeyi olsun. Bu durumda M yüzeyi üzerindeki N-manyetik eğrilerin geodezik eğriler olması için gerek ve yeter koşul γ eğrisinin düzlemsel veya asimptotik bir eğri olmasıdır.

İspat. (4.19) eşitliğinden açıktır. ■

Önerme 4.7 (M, g) Riemann manifoldu üzerinde γ birim hızlı bir B-manyetik eğri ve $\{T, Y, Z\}$ Darboux çatısı olsun. Bu durumda Darboux çatısının Lorentz kuvveti cinsinden eşiti aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{bmatrix} \phi(T) \\ \phi(Y) \\ \phi(Z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\Omega_2 k_g}{\varkappa} & -\frac{\Omega_2 k_n}{\varkappa} \\ -\frac{\Omega_2 k_g}{\varkappa} & 0 & \theta' + \tau_g \\ \frac{\Omega_2 k_n}{\varkappa} & -(\theta' + \tau_g) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Burada Ω_2 , $\Omega_2 = g(\phi(T), N)$ şeklinde tanımlı bir fonksiyondur.

İspat. (M, g) Riemann manifoldunda γ Darboux çatısı $\{T, Z, Y\}$ olan birim hızlı bir B-manyetik eğri olsun. Bu durumda $\phi(T) \in \text{span}\{T, Y, Z\}$ olduğundan

$$\phi(T) = \eta T + \rho Y + \sigma Z.$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\eta &= g(\phi(T), T) = 0, \\
\rho &= g(\phi(T), Y) \\
&= g(\phi(T), \cos \theta N + \sin \theta B) \\
&= \cos \theta g(\phi(T), N) + \sin \theta g(\phi(T), B) \\
&= \frac{\Omega_2 k_g}{\varkappa}, \\
\sigma &= g(\phi(T), Z) \\
&= g(\phi(T), -\sin \theta N + \cos \theta B) \\
&= -\sin \theta g(\phi(T), N) + \cos \theta g(\phi(T), B) \\
&= -\sin \theta g(\phi(T), N) + \cos \theta g(\phi(T), B) \\
&= -\frac{\Omega_2 k_n}{\varkappa},
\end{aligned}$$

eşitlikleri yardımıyla

$$\phi(T) = \frac{\Omega_2 k_g}{\varkappa} Y - \frac{\Omega_2 k_n}{\varkappa} Z.$$

elde edilir. Benzer hesaplamalarla

$$\begin{aligned}
\phi(Z) &= -\frac{\Omega_2 k_g}{\varkappa} T + (\theta' + \tau_g) Z \\
\phi(Z) &= \frac{\Omega_2 k_n}{\varkappa} T - (\theta' + \tau_g) Y
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. ■

Önerme 4.8 Birim hızlı γ B-manyetik eğrisinin V manyetik alanının yörüngesi olması için gerek ve yeter koşul V manyetik alanının γ eğrisi boyunca aşağıdaki şekilde yazılmasıdır.

$$V = (\theta' + \tau_g)T + \frac{\Omega_2 k_n}{\varkappa} Y + \frac{\Omega_2 k_g}{\varkappa} Z. \quad (4.21)$$

İspat. γ B-manyetik eğrisi V manyetik alanının yörüngesi olsun. Önerme 4.7 kullanılırsa (4.21) eşitliği kolaylıkla elde edilir.

Tersine, (4.21) eşitliği sağlansın. Bu durumda $\phi(B) = V \times B$ dir. Dolayısıyla γ B-manyetik eğrisi, V manyetik alanının yörüngesidir. ■

Teorem 4.6 Birim hızlı γ B-manyetik eğrisi V manyetik alanının yörüngesi ve M , V manyetik alanıyla ilgili akı yüzeyi olsun. Bu durumda M yüzeyi üzerindeki B-manyetik eğriler, geodezik veya dik dairesel helis eğrileridir.

İspat. Birim hızlı γ B-manyetik eğrisi V manyetik alanının yörüngesi olsun. Eğer M , V manyetik alanıyla ilgili akı yüzeyi ise bu durumda

$$g(V, Z) = 0$$

dır. Bu durumda

$$\frac{\Omega_2 k_g}{\varkappa} = 0, \quad \Omega_2 = \frac{\varkappa}{2} + a, \quad a = \text{sabit}$$

bulunur. Son eşitlik yardımıyla da

$$k_g\left(\frac{\varkappa}{2} + a\right) = 0, \quad a = \text{sabit}$$

elde edilir. Eğer k_g sıfır ise bu durumda M yüzeyi üzerindeki B-manyetik eğriler geodeziklerdir.

Diğer taraftan, eğer $\varkappa = -2a$ sabitse B-manyetik eğriler sabit torsiyonlu eğriler olduklarından γ eğrisi dik dairesel helistir. ■

4.4 Regle Akı Yüzeyleri

Dayanak eğrisi γ ve doğrultman vektörü g olan regle yüzey

$$R(r, s) = \gamma(s) + rg(s) \tag{4.22}$$

şeklinde verilir.

Bu regle yüzeyin Gauss eğriliği aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$K(r, s) = -\frac{(\det(\gamma'(s), g(s), g'(s)))^2}{(EG - F^2)^2}$$

Burada $E = g(u, u)$, $F = g(u, \gamma' + ru')$, $G = g(\gamma' + ru', \gamma' + ru')$ yüzeyin birinci temel form bileşenleridir. Bir regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart K Gauss eğriliğinin yüzeyinin her noktasında sıfır olmasıdır (Somasundaram 2005). Benzer metodla aşağıdaki karakterizasyonları verebiliriz.

γ bir manyetik eğri ve V bu eğri boyunca bir manyetik alan olsun. Bu durumda regle akı yüzeyi

$$X(r, s) = \gamma(s) + rV(s). \quad (4.23)$$

şeklinde tanımlanır. Son eşitlik sırasıyla r ve s parametrelerine göre türevlenirse

$$X_r(r, s) = V(s).$$

$$X_s(r, s) = \gamma'(s) + rV'(s).$$

elde edilir. Bu durumda yüzeyin birim normal vektör alanı

$$Z(s) = \frac{X_r \times X_s}{\|X_r \times X_s\|} = \frac{V(s) \times (\gamma'(s) + rV'(s))}{\|V(s) \times (\gamma'(s) + rV'(s))\|}$$

şeklindedir. Buradan

$$\begin{aligned} g(Z(s), V(s)) &= g\left(\frac{V(s) \times (\gamma'(s) + rV'(s))}{\|V(s) \times (\gamma'(s) + rV'(s))\|}, V(s)\right) \\ &= \frac{1}{\|V(s) \times (\gamma'(s) + rV'(s))\|} \det(V(s), \gamma'(s) + rV'(s), V(s)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla $X(r, s)$, γ eğrisiyle ilgili akı yüzeyidir.

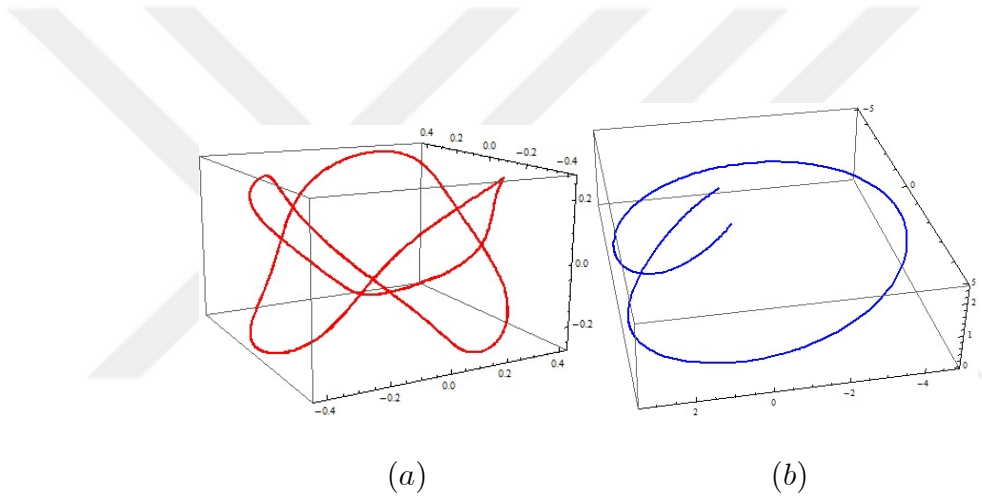
Örnek 4.5 γ eğrisi, parametrik denklemi aşağıdaki gibi olan bir N-manyetik eğri olsun.

$$\gamma(s) = \left(-\frac{\cos 9s}{40} - \frac{2}{5} \cos 2s, -\frac{\sin 9s}{40} - \frac{2}{5} \cos 2s, -\frac{4}{5} \cos 3s\right).$$

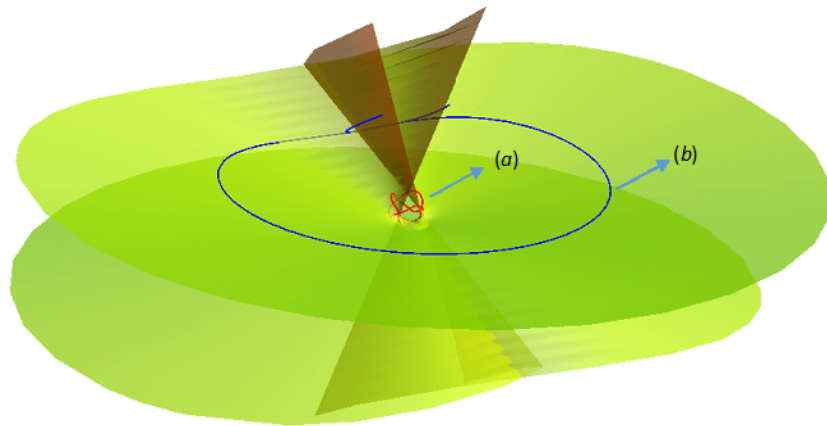
Bu durumda bu eğriyle ilgili manyetik alan

$$V = \tau T - \Omega_1 N + \kappa B$$

şeklindedir. Şekil 4.10 -şekil 4.11’de ilgili manyetik eğri, manyetik alan ve akı yüzeyi gösterilmiştir.



Şekil 4.10 Sırasıyla, N-manyetik eğri γ ve ilgili manyetik alan V



Şekil 4.11 Akı yüzeyi $X(r, s) = \gamma(s) + r(\tau T - \Omega_1 N + \kappa B)$

γ eğrisi, parametrik denklemi aşağıdaki gibi olan bir B-manyetik eğri olsun.

$$\gamma(s) = (\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}).$$

Bu durumda bu eğriyle ilgili manyetik alan

$$V = \tau T + \Omega_2 B, \quad \Omega_2 = \frac{\varkappa}{2} + a, \quad a = \text{sabit}$$

şeklindedir. Şekil 4.12’de ilgili manyetik alan, manyetik eğri ve akı yüzeyi gösterilmiştir.



Şekil 4.12 Akı yüzeyi $X(s, r) = \gamma(s) + r(\tau T + \Omega_2 B)$

Teorem 4.7 $X(u, v)$, γ eğrisiyle ilgili açılabilir regle akı yüzeyi olsun. Bu durumda γ eğrisi aşağıdakileri sağlar:

- i. Eğer γ eğrisi T-manyetik eğri ise bu eğri $\varkappa = \sqrt{\frac{c}{\varpi}}$ ve $\tau = \varpi$ sabit eğriliklerine sahip dik dairesel helistir.
- ii. Eğer γ eğrisi N-manyetik eğri ise bu eğri bir slant helix, genel helis veya torsiyonu aşağıdaki eşitliği sağlayan bir eğridir.

$$\tau^2 = 2 \int \left(\frac{\Omega_1'' \Omega_1^2}{\Omega_1'} \right) ds$$

Burada $\Omega_1 = -\frac{\tau'}{\varkappa}$ dir.

iii. Eğer γ eğrisi B-manyetik eğri ise bu eğri dik dairesel helis veya düzlemsel bir eğridir.

İspat. $X(u, v)$, γ eğrisiyle ilgili açılabilir akı yüzeyi olsun. Bu durumda $X(u, v)$ yüzeyi

$$X(r, s) = \gamma(s) + rV(s)$$

şeklindedir. Bu yüzeyin Gauss eğriliği

$$K(r, s) = -\frac{\det(\gamma'(s), V(s), V'(s))^2}{(EG - F^2)^2} \quad (4.24)$$

dir. Burada $E = g(V, V)$, $F = g(V, \gamma' + rV')$, $G = g(\gamma' + rV', \gamma' + rV')$ yüzeyin birinci temel form bileşenleridir. $X(r, s)$ yüzeyi açılabilir akı yüzeyi olduğundan

$$\det(\gamma'(s), V(s), V'(s)) = 0 \quad (4.25)$$

dır. Eğer γ T-manyetik eğri ise bu durumda (2.3) eşitliğini sağlar. Ayrıca (2.3) ve (4.25) eşitlikleri birlikte kullanılırsa γ eğrisinin eğrilikleri $\varkappa = \text{sabit}$ ve $\tau = \varpi = \text{sabit}$ olarak elde edilir.

Eğer γ eğrisi N-manyetik eğri ise bu durumda γ (3.1) eşitliğini sağlar. (3.1) ve (4.25) eşitlikleri kullanılırsa

$$\Omega_1 = -\frac{\tau'}{\varkappa} = \frac{\varkappa'}{\tau} = \text{sabit} \text{ veya } \Omega_1 = 0 \text{ veya } \tau^2 = 2 \int \left(\frac{\Omega_1'' \Omega_1^2}{\Omega_1'} \right) ds.$$

elde edilir. Son eşitlikten kolaylıkla görebiliriz ki γ sabit eğimli slant helis, genel helis veya eğrilikleri aşağıdaki eşitliği sağlayan bir eğridir.

$$\tau^2 = 2 \int \left(\frac{\Omega_1'' \Omega_1^2}{\Omega_1'} \right) ds.$$

Eğer γ B-manyetik eğri ise bu durumda (3.8) eşitliği sağlanır. (3.4) ve (4.25) eşitlikleri kullanılırsa $\varkappa = 2a$ ve $\tau = \text{sabittir}$ veya γ eğrisi düzlemsel bir eğridir. ■

Teorem 4.8 $X(u, v)$, γ eğrisiyle ilgili açılabilir regle akı yüzeyi olsun. Bu durumda γ eğrisi aşağıdakileri sağlar:

- i. γ eğrisinin $X(r, s)$ yüzeyi üzerinde geodezik T-manyetik eğri olması için gerek ve yeter şart γ eğrisinin sabit $\tau = \varpi$ torsiyona sahip olmasıdır..
- ii. γ eğrisinin $X(r, s)$ yüzeyi üzerinde geodezik N-manyetik eğri olması için gerek ve yeter şart γ eğrisinin slant helis, dik dairesel helis veya aşağıdaki parametrizasyona sahip bir eğri olmasıdır.

$$\sigma(s) = \gamma(s) - \frac{(\tau' + 1)\kappa^2 + \tau^2\tau'}{\kappa\tau(\kappa - \kappa')}(\tau(s)T(s) - \Omega_1(s)N(s) + \kappa(s)B(s))$$

- iii. γ eğrisinin $X(r, s)$ yüzeyi üzerinde geodezik N-manyetik eğri olması için gerek ve yeter şart γ eğrisinin sabit $\kappa = 2a$ eğrilğine sahip olmasıdır.

İspat. γ bir manyetik eğri ve V , γ eğrisi boyunca bir manyetik alan olsun. Eğer γ T-manyetik eğri ise γ (3.5) eşitliğini sağlar. Bu durumda regle yüzeyin parametrik denklemi

$$X(s, r) = \gamma(s) + r(\varpi(s)T(s) + \kappa(s)B(s))$$

şeklinde elde edilir. Eğer γ bir geodezik eğri ise $\frac{d^2\gamma}{dt^2}$ ivme vektörü ve $X(s, r)$ yüzeyinin normal vektörü $X_s(s, r) \times X_r(s, r)$ paraleldir. Buradan $\tau = \varpi$ elde edilir. Tersine, eğer $\tau = \varpi$ ise $\frac{d^2\gamma}{dt^2}$ ve $X_s(s, r) \times X_r(s, r)$ paraleldir. Dolayısıyla γ eğrisi $X(s, r)$ yüzeyi üzerinde geodeziktir.

Eğer γ N-manyetik eğri ise γ (3.1) eşitliğini sağlar. Bu durumda regle yüzeyin parametrik denklemi

$$X(s, r) = \gamma(s) + r(\tau(s)T(s) - \Omega_1(s)N(s) + \kappa(s)B(s))$$

şeklinde elde edilir. Eğer γ bir geodezik eğri ise $\frac{d^2\gamma}{dt^2}$ ivme vektörü ve $X(s, r)$ yüzeyinin normal vektörü $X_s(s, r) \times X_r(s, r)$ paraleldir. Bu durumda γ slant helis, dik dairesel helis veya $r = -\frac{(\tau' + 1)\kappa^2 + \tau^2\tau'}{\kappa\tau(\kappa - \kappa')}$ dir. Tersine, eğer γ slant helis, dik

dairesel helis veya $r = -\frac{(\tau' + 1)\varkappa^2 + \tau^2\tau'}{\varkappa\tau(\varkappa - \varkappa')}$ ise $\frac{d^2\gamma}{dt^2}$ ve $X_s(s, r) \times X_r(s, r)$ paraleldir. Dolayısıyla γ eğrisi $X(s, r)$ yüzeyi üzerinde geodeziktir.

Eğer γ B-manyetik eğri ise $\gamma(3.4)$. Bu durumda regle yüzeyin parametrik denklemi

$$X(s, r) = \gamma(s) + r(\tau(s)T(s) + \Omega_2(s)B(s))$$

şeklinde elde edilir. Eğer γ bir geodezik eğri ise $\frac{d^2\gamma}{dt^2}$ ivme vektörü ve $X(s, r)$ yüzeyinin normal vektörü $X_s(s, r) \times X_r(s, r)$ paraleldir. Bu durumda $\varkappa = 2a$ elde edilir. Tersine, eğer γ sabit $\varkappa = 2a$ eğrilğine sahipse $\frac{d^2\gamma}{dt^2}$ ivme vektörü ve $X(s, r)$ yüzeyinin normal vektörü $X_s(s, r) \times X_r(s, r)$ paraleldir. ■

4.5 Manyetik Yüzeyler

Manyetik alan çizgilerinin parametrik ifadesi $C : r = r(s), 0 < s < I$ ve $T(s), N(s), V(s)$ vektör alanları sırasıyla C eğrisinin teğet, normal ve binormal vektör alanları olsun. Bu durumda manyetik yüzeyler ailesinin parametrik denklemini aşağıdaki gibi verebiliriz.

$$P : [0, I] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3 : P(s, t) = r(s) + u(s, t)T(s) + v(s, t)N(s) + w(s, t)B(s).$$

burada $u(s, t), v(s, t)$ ve $w(s, t)$, C^1 sınıftan fonksiyonlardır. C eğrisi $P(s, t)$ yüzeyler ailesinin eş parametre yüzeyleri olduğundan bir $t_0 \in [0, T]$ parametresi vardır öyleki $P(s, t_0) = r(s), 0 \leq s \leq I$ sağlar. Yani, $u(s, t_0) = v(s, t_0) = w(s, t_0) = 0, 0 < s < I, 0 < t_0 < T$ dir. Eğer u, v ve w fonksiyonları sadece t parametresine bağlı ise $r(s)$ eğrisi bu yüzeyler üzerinde eş geodezik eğridir.

$$P(s, t) = r(s) + u(t)T(s) + v(t)N(s) + w(t)B(s).$$

$u(s, t), v(s, t)$ ve $w(s, t)$ fonksiyonlarının bazı özel seçimlerine karşılık gelen manyetik yüzeyler aşağıdaki gibidir (Wang vd. 2004).

i. Eğer $u(s, t) = 0, v(s, t) = r \cos t$ ve $w(s, t) = r \sin t$ ise $P(s, t)$ yüzeylerine manyetik tüp yüzeyleri denir.

ii. Eğer $u(s, t) = 0$, $v(s, t) = r(s, t) \cos t$ ve $w(s, t) = r(s, t) \sin t$ ise $P(s, t)$ yüzeylerine genelleştirilmiş manyetik tüp yüzeyleri denir.

iii. Eğer $u(s, t) = 0$, $v(s, t) = \exp[\alpha s]b \cos t$ ve $w(s, t) = \exp[\alpha s]b \sin t$ ise $P(s, t)$ yüzeylerine manyetik kabuklu yüzeyler denir. Bu yüzeylerin fiziksel anlamı: Deniz kabuğu yüzeyine uygun bir büyüme eğrisi (üreteç eğrisi) alalım, bu eğriyi r açısıyla döndürelim. Üç alan boyutunun hepsini aynı ölçek faktörü ($\exp$) ile art arda eşzamanlı olarak büyütelim, o zaman r konumundaki yeni büyüme halkasına bire bir eşleme yaparız. D'Arcy Thompson'un açıkladığı gibi, gnomonic (birinci dereceden) deniz kabuklarındaki tüm büyüme halkaları benzerdir, büyüme boyunca şekillerini koruyarak, ancak diğer önceden var olan büyüme artışlarına göre uzaydaki mutlak boyut ve yönlerini değiştirerek büyürler. Dolayısıyla, genelleştirilmiş tüp yüzeyleri olarak da adlandırılırlar.

Aynı hacme sahip yüzeyler arasında potansiyel enerjisini en az harcayacak şekilde dizayn edilmiş yüzeylere minimal yüzeyler adı verilir. Dolayısıyla her yüzey minimal değildir. Ancak her yüzey üzerinde potansiyel enerjisi en az olan noktalardan oluşan bir eğri daima vardır. Bu eğriye minimal eğri denir. Minimal eğrilerin geometrik tanımı aşağıdaki gibidir.

Tanım 4.3 $C : r = r(s)$, $0 < s < I$ parametrik ifadesiyle verilen C eğrisi bir P yüzeyi üzerinde minimal bir eğridir gerek ve yeter koşul aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$Eg + Ge - Ff = 0$$

burada

$E = \langle P_s, P_s \rangle$, $F = \langle P_s, P_t \rangle$, $G = \langle P_t, P_t \rangle$ ve $e = \langle P_{ss}, n \rangle$, $f = \langle P_{st}, n \rangle$, $g = \langle P_{tt}, n \rangle$, sırasıyla P yüzeyinin birinci ve ikinci temel form katsayılarıdır (Şemin 1983).

Bilgisayar grafiklerinde ve bilgisayar destekli tasarımlarda tasarıma en ideal olan eğrileri bulmak için bir arayış vardır. Çünkü, görselleştirme sisteminde, bu gibi eğriler genellikle özel bir çerçeve (çevre eğrisi) yaratmak için kullanılır. Bu amaçla belirli bir yüzey üzerinde en az enerjiye sahip olan eğri aranabilir. Sürekli oldukları

ve en az enerjiye sahip oldukları için, minimal eğrileri kullanmak oldukça uygundur. Bu yüzden çalışmamızda bu eğrilere de yer verdik. O halde aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.9 $P(s, t)$ yüzeyleri üzerindeki manyetik alan çizgileri $C : r = r(s)$, $0 < s < I$ parametrik ifadesiyle verilen C eğrileri olsun. Bu yüzeyler üzerindeki minimal eğriler aşağıdaki denklemi sağlayacak şekilde verilir.

$$\begin{aligned} & ((1 + u_s)^2 + v_s^2 + w_s^2)(u_t\phi_{1t} + v_t\phi_{2t} + w_t\phi_{3t}) \\ & + (u_t^2 + v_t^2 + w_t^2)((1 + u_s)(\phi_{1s} - \varkappa\phi_2) + v_s(\phi_{2s} + \varkappa\phi_1 - \tau\phi_3) + w_s(\phi_{3s} + \tau\phi_2)) \\ = & ((1 + u_s)u_t + v_s v_t + w_s w_t)((1 + u_s)\phi_{1t} + v_s\phi_{2t} + w_s\phi_{3t}), \end{aligned}$$

burada

$$\begin{aligned} \phi_1 &= w_t v_s - v_t w_s, \\ \phi_2 &= u_t w_s - w_t(1 + u_s), \\ \phi_3 &= v_t(1 + u_s) - u_t v_s, \end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat. $P(s, t)$ yüzeyleri üzerindeki manyetik alan çizgileri $C : r = r(s)$, $0 < s < I$ parametrik ifadesiyle verilen C eğrileri olsun. Bu durumda $P(s, t)$ yüzey ailesinin parametrik denklemi

$$P(s, t) = r(s) + u(s, t)T(s) + v(s, t)N(s) + w(s, t)B(s), \quad 0 < s < I, \quad 0 < t < T$$

şeklinde verilir. Buradan sırasıyla s ve t parametrelerine göre kısmi türevleri alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(s, t)}{\partial s} &= (1 + u_s - \varkappa v)T(s) + (v_s + \varkappa u - \tau w)N(s) + (w + \tau v)B(s), \\ \frac{\partial P(s, t)}{\partial t} &= u_t T(s) + v_t N(s) + w_t B(s), \end{aligned}$$

elde edilir. Eş parametre şartı ve son eşitliklerin vektörel çarpımı ile $P(s, t)$ yüzeyler ailesinin normal denklemi

$$n(s, t) = \phi_1 T(s) + \phi_2 N(s) + \phi_3 B(s)$$

olarak bulunur. Burada

$$\phi_1 = w_t v_s - v_t w_s,$$

$$\phi_2 = u_t w_s - w_t(1 + u_s),$$

$$\phi_3 = v_t(1 + u_s) - u_t v_s,$$

şeklindedir. Son olarak bulunan eşitlikler ile Tanım 4.3 birlikte kullanılırsa minimal eğriler için aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} & ((1 + u_s)^2 + v_s^2 + w_s^2)(u_t \phi_{1t} + v_t \phi_{2t} + w_t \phi_{3t}) \\ & + (u_t^2 + v_t^2 + w_t^2)((1 + u_s)(\phi_{1s} - \kappa \phi_2) + v_s(\phi_{2s} + \kappa \phi_1 - \tau \phi_3) + w_s(\phi_{3s} + \tau \phi_2)) \\ = & ((1 + u_s)u_t + v_s v_t + w_s w_t)((1 + u_s)\phi_{1t} + v_s \phi_{2t} + w_s \phi_{3t}). \end{aligned}$$

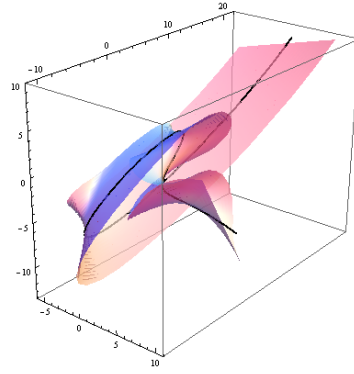
■

4.6 Manyetik Yüzeyler Üzerine Bazı Örnekler

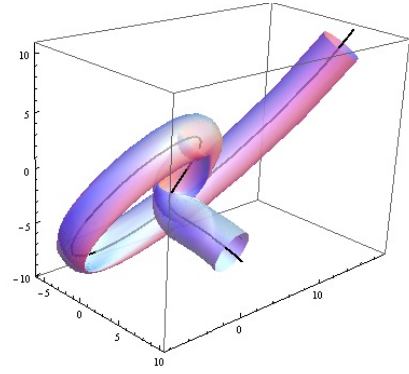
Örnek 4.6 V manyetik vektör alanının bileşenleri $V_x = -x + y$, $V_y = -x + 2y - 2z$, $V_z = 2y - z$ şeklinde verilsin. Bu durumda manyetik alan çizgilerinin denklemi aşağıdaki gibidir.

$$r(s) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{11}}e^{s/2} \sin \frac{\sqrt{11}}{2}s + \frac{6}{55}e^{-s}(-11 + 11e^{3s/2} \cos \frac{\sqrt{11}}{2} - 3\sqrt{11}e^{3s/2} \sin \frac{\sqrt{11}}{2}) \\ + \frac{2}{55}e^{-s}(44 + 11e^{3s/2} \cos \frac{\sqrt{11}}{2} - 3\sqrt{11}e^{3s/2} \sin \frac{\sqrt{11}}{2}s), \\ -\frac{16}{\sqrt{11}}e^{s/2} \sin \frac{\sqrt{11}}{2} + \frac{2}{\sqrt{11}}e^{s/2}(11 \cos \frac{\sqrt{11}}{2} + 3\sqrt{11} \sin \frac{\sqrt{11}}{2}s), \\ \frac{8}{\sqrt{11}}e^{s/2} \sin \frac{\sqrt{11}}{2}s + \frac{3}{55}e^{-s}(11 + 44e^{3s/2} \cos \frac{\sqrt{11}}{2} - 12\sqrt{11}e^{3s/2} \sin \frac{\sqrt{11}}{2}) \\ + \frac{4}{55}e^{-s}(-11 + 11e^{3s/2} \cos \frac{\sqrt{11}}{2} - 3\sqrt{11}e^{3s/2} \sin \frac{\sqrt{11}}{2}s) \end{pmatrix}$$

Bu durumda $u(s, t)$, $v(s, t)$ ve $w(s, t)$ fonksiyonlarının bazı özel seçimleri ile r eğrisiyle ilgili olan manyetik yüzeyler şekil 4.13- şekil 4.14'de verilmiştir.

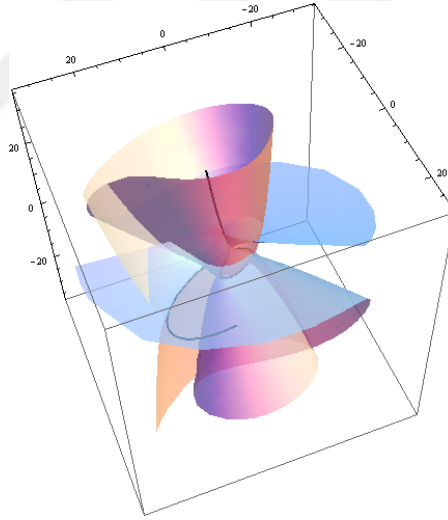


(a)



(b)

Şekil 4.13 a. $u(s, t) = v(s, t) = w(s, t) = t$, b. $u(s, t) = 2 \sin t \cos s$,
 $v(s, t) = 2 \sin t \sin s$, $w(s, t) = 2 \cos t$ manyetik yüzeyler

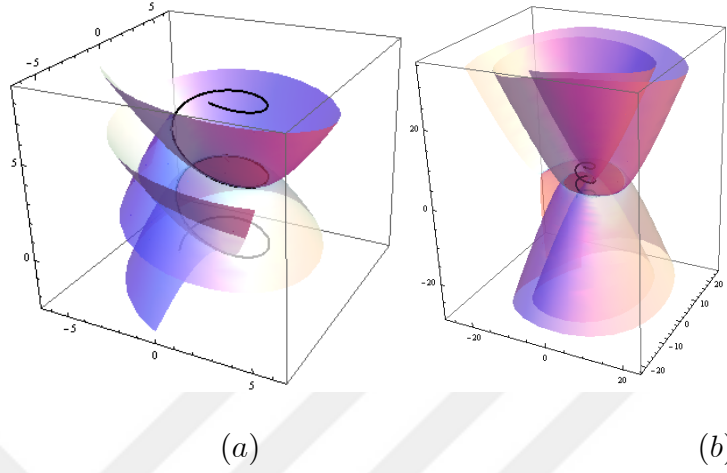


Şekil 4.14 Manyetik yüzey $u(s, t) = t$, $v(s, t) = t^2$, $w(s, t) = t^3$

Örnek 4.7 V manyetik vektör alanının bileşenleri $V_x = x + 2y$, $V_y = -2x - y$, $V_z = 1$ şeklinde verilsin. Bu durumda manyetik alan çizgilerinin denklemi aşağıdaki gibidir.

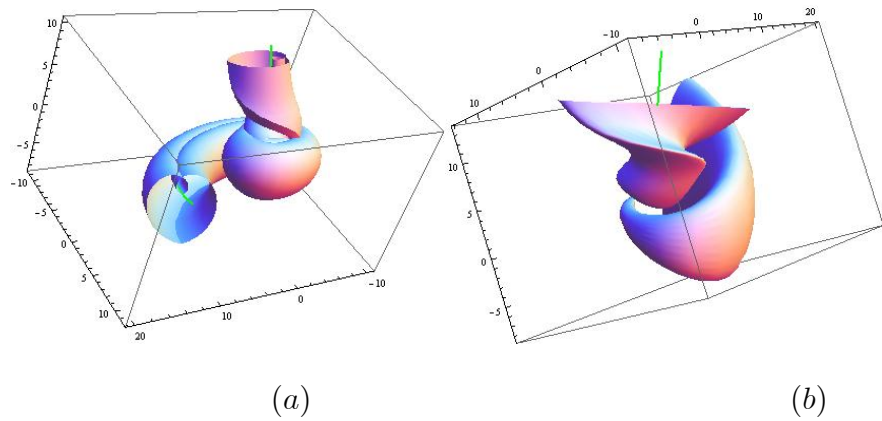
$$r(s) = \begin{pmatrix} \frac{(-1+\sqrt{-3})e^{-\sqrt{-3}s} + (1+\sqrt{-3})e^{\sqrt{-3}s}}{2\sqrt{-3}} + \frac{-e^{-\sqrt{-3}s} + e^{\sqrt{-3}s}}{\sqrt{-3}}, \\ \frac{(1+\sqrt{-3})e^{-\sqrt{-3}s} + (-1+\sqrt{-3})e^{\sqrt{-3}s}}{2\sqrt{-3}} - \frac{-e^{-\sqrt{-3}s} + e^{\sqrt{-3}s}}{\sqrt{-3}}, \\ s + 1 \end{pmatrix}$$

Bu durumda $u(s, t)$, $v(s, t)$ ve $w(s, t)$ fonksiyonlarının bazı özel seçimleri ile r eğrisiyle ilgili olan manyetik yüzeyler şekil 4.15’de verilmiştir.



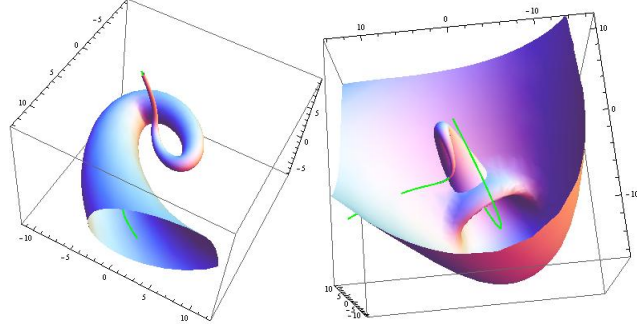
Şekil 4.15 a. $u(s, t) = t$, $v(s, t) = t^2$, $w(s, t) = t^3$, b. $u(s, t) = t$, $v(s, t) = t^2 - 2s$, $w(s, t) = t^3 + s$ manyetik yüzeyler

Örnek 4.8 $V(-x + y, -x + 2y - 2z, 2y - z)$ manyetik alanı için genelleştirilmiş tüp manyetik yüzeyler şekil 4.16’da verilmiştir.



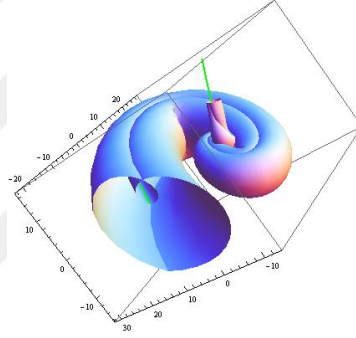
Şekil 4.16 a. $u(s, t) = 0$, $v(s, t) = t \cos t$, $w(s, t) = t \sin t$, b. $u(s, t) = 0$, $v(s, t) = s \cos t$, $w(s, t) = s^2 \sin t$ manyetik yüzeyler

Örnek 4.9 $V(-x + y, -x + 2y - 2z, 2y - z)$ ve $V(ax + by, -bx - ay, c)$ manyetik alanları için kabuk manyetik yüzeyleri şekil 4.17 ve şekil 4.18'de verilmiştir.



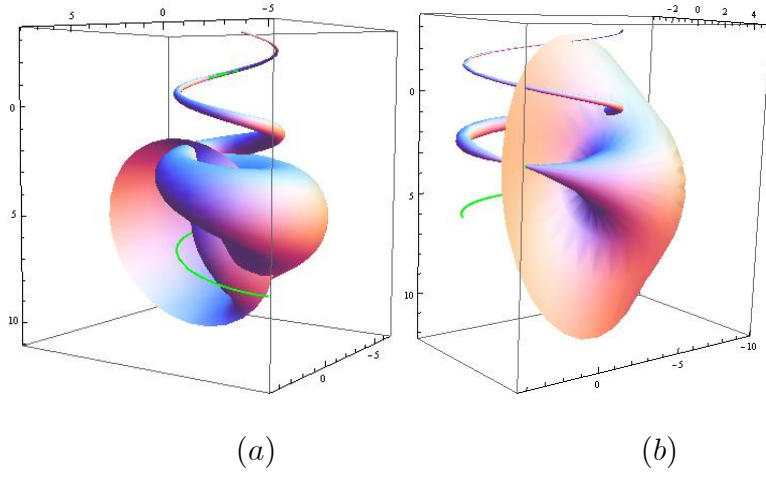
(a)

(b)



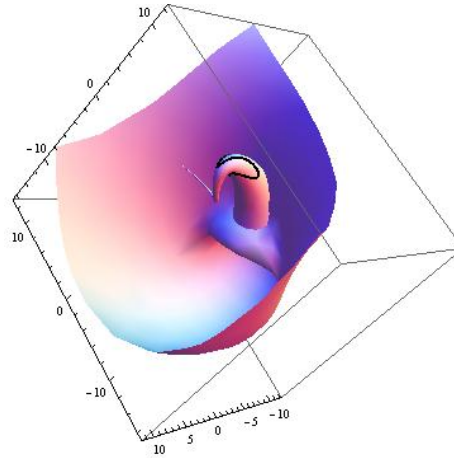
(c)

Şekil 4.17 a. $u(s, t) = 0$, $v(s, t) = e^{s/2} \sin t$, $w(s, t) = e^{s/2} \cos t$, b. $u(s, t) = 0$, $v(s, t) = e^s \cos t$, $w(s, t) = e^s \sin t$, c. $u(s, t) = 0$, $v(s, t) = te^{s/4} \sin t$
kabuk manyetik yüzeyler



Şekil 4.18 a. $w(s, t) = te^{s/4} \cos t$, $u(s, t) = 0$, $v(s, t) = e^{s/2} \sin t$, $w(s, t) = e^{s/2} \cos t$,
b. $u(s, t) = 0$, $v(s, t) = se^s \sin t$, $w(s, t) = se^s \cos t$ kabuk manyetik yüzeyler

Örnek 4.10 $V(-x + y, -x + 2y - 2z, 2y - z)$ manyetik alanı için genelleştirilmiş tüp manyetik yüzeyi ve üzerindeki minimal eğri şekil 4.19’da gösterilmiştir.



Şekil 4.19 Kabuk yüzey ve üzerinde minimal eğri (siyah)

Manyetik yüzeyler yüklü parçacıklar için çarpışmasız bir bariyer bölge oluştururlar. Yani bu yüklü parçacıklar manyetik yüzey içerisinde ve üzerinde diğer parçacıklarla çarpışmadan manyetik eğri boyunca ilerlerler. Ayrıca laboratuvar ortamında parçacık hareketlerinin araştırılmasına olanak sağlarlar. Bu amaçla bu bölümde verilen bir manyetik alan için elde edilen yüzeyler ailesinin üzerinde ve içinde parçacıkların nasıl hareket ettiğini verdik.

4.7 Manyetik Yüzeyler ve Manyetik Eğriler

Önerme 4.9 $\gamma : \gamma(s) = (x(s), y(s), z(s)) \subset \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri ve $V = (V_x, V_y, V_z)$ bir manyetik vektör alanı olsun. Bu durumda γ eğrisi V manyetik alanıyla ilişkili manyetik eğridir gerek ve yeter koşul aşağıdaki γ eğrisinin parametrik denklemi

$$\begin{aligned} x(s) &= \int \cos \theta(s) \cos \varphi(s) ds, \\ y(s) &= \int \cos \theta(s) \sin \varphi(s) ds, \\ z(s) &= \int \sin \theta(s) ds. \end{aligned}$$

şeklindedir ve aşağıdaki diferensiyel denklem sağlanır.

$$V_x(-\theta' \sin \theta \cos \varphi - \varphi' \cos \theta \sin \varphi) + V_y(-\theta' \sin \theta \sin \varphi + \varphi' \cos \theta \cos \varphi) + V_z(\theta' \cos \theta) = 0.$$

İspat. Eğer $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ eğrisi V manyetik alanıyla ilişkili bir manyetik eğri ise aşağıdaki eşitliği sağlar

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = V \times \gamma'$$

son eşitlikten

$$\begin{aligned} x'' &= V_y z' - V_z y', \\ y'' &= V_z x' - V_x z', \\ z'' &= V_x y' - V_y x', \end{aligned}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Son denklemin son iki eşitliğinden

$$-V_x V_z y' + V_y V_z x' = V_x x'' + V_y y''$$

denklemi elde edilir. Yine aynı denklemdeki ilk eşitliği kullanırsak denklem

$$V_x x'' + V_y y'' + V_z z'' = 0$$

şeklinde son halini alır. Diğer taraftan γ eğrisi birim hızlı olduğunu da göz önüne alırsak

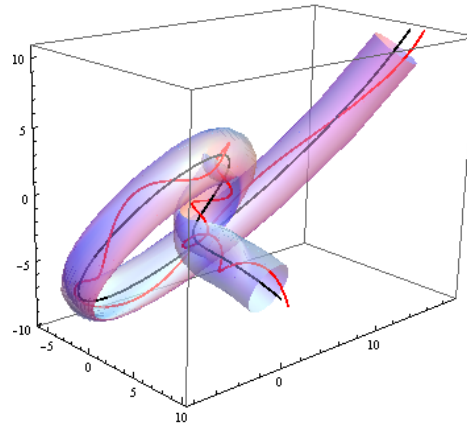
$$\begin{aligned} x'(s) &= \cos \theta(s) \cos \varphi(s), \\ y'(s) &= \cos \theta(s) \sin \varphi(s), \\ z'(s) &= \sin \theta(s), \end{aligned}$$

olmalıdır. Bu durumda

$$V_x(-\theta' \sin \theta \cos \varphi - \varphi' \cos \theta \sin \varphi) + V_y(-\theta' \sin \theta \sin \varphi + \varphi' \cos \theta \cos \varphi) + V_z(\theta' \cos \theta) = 0$$

eşitliği bulunur. ■

Örnek 4.11 Manyetik alan boyunca helissel bir yörünge izleyen bir parçacığın manyetik yüzey içerisindeki hareketi şekil 4.20’de verilmiştir.



Şekil 4.20 Manyetik yüzey $u(s, t) = 2 \sin t \cos s$, $v(s, t) = 2 \sin t \sin s$, $w(s, t) = 2 \cos t$ ve manyetik eğri (kırmızı)

Önerme 4.10 $P(s, t)$ yüzeyler ailesi üzerindeki birim hızlı manyetik eğri γ ve Darboux çatısı $\{t, y, n\}$ ile verilsin. Bu durumda Darboux eşitlikleri aşağıdaki gibidir

$$\begin{bmatrix} \phi(t) \\ \phi(y) \\ \phi(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & \varpi \\ -k_n & -\varpi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ y \\ n \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

burada ϖ , $\varpi = g(\phi(y), n)$ şeklinde belirlenmiş bir fonksiyondur.

İspat. $P(s, t)$ yüzeyler ailesi üzerindeki birim hızlı manyetik eğri γ ve Darboux çatısı $\{t, y, n\}$ ile verilsin. Bu durumda manyetik eğri tanımından

$$\phi(t) = \nabla_t t = k_g y + k_n n$$

eşitliğini biliyoruz. $\phi(y) \in \text{span}\{t, y, n\}$ olduğundan

$$\phi(Y) = \delta t + \lambda y + \mu n$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\delta = g(\phi(y), t) = -g(\phi(t), y) = -k_g,$$

$$\lambda = g(\phi(y), y) = 0,$$

$$\mu = g(\phi(y), n) = \varpi,$$

şeklinde hesaplanır. O halde

$$\phi(Y) = -k_g t + \varpi n$$

eşitliğini bulmuş oluruz. Benzer şekilde

$$\phi(Z) = -k_n t - \varpi n$$

kolaylıkla elde edilir. ■

Önerme 4.11 $P(s, t)$ yüzeyler ailesi üzerindeki birim hızlı bir manyetik eğri γ ile gösterilsin. Bu durumda γ eğrisi V manyetik alanının manyetik yörüngesidir gerek ve yeter koşul V manyetik alanı γ eğrisi boyunca aşağıdaki gibi yazılır.

$$V = \varpi t - k_n y + k_g n. \quad (4.27)$$

İspat. γ birim hızlı eğrisi V manyetik alanı ile ilgili yörünge eğrisi olsun. Bu durumda Önerme1 kullanılırsa V manyetik alanının

$$V = \varpi t - k_n y + k_g n$$

şeklinde yazılabileceği kolaylıkla elde edilir. Tersine, (4.27) eşitliği sağlansın. Bu durumda $V \times t = \phi(t)$ sağlanır. O halde γ eğrisi V manyetik alanı ile ilgili yörünge eğrisidir ■

Yukarıdaki önermeler yardımıyla aşağıdaki teoremi verebiliriz.

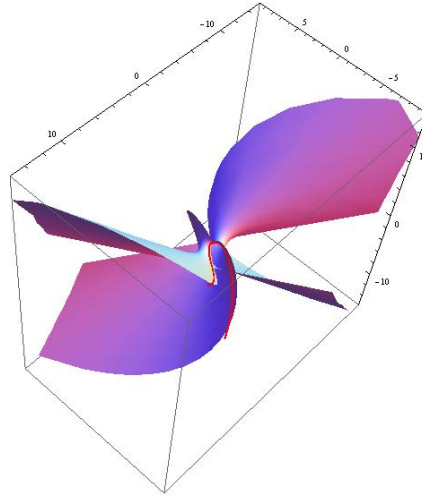
Teorem 4.10 γ birim hızlı eğrisi V manyetik alanı ile ilgili yörünge eğrisi ve P , V manyetik alanıyla ilişkili manyetik yüzey olsun. Bu durumda P manyetik yüzeyi üzerindeki manyetik eğriler geodezik eğrilerdir.

İspat. γ birim hızlı eğrisi V manyetik alanı ile ilgili yörünge eğrisi ve P , V manyetik alanıyla ilişkili manyetik yüzey olsun. Eğer γ eğrisi P manyetik yüzeyi üzerinde geodezik ise $g(\frac{\partial r}{\partial s}, n) = k_g = 0$ dır. Bu ise γ eğrisinin, P yüzeyi üzerinde geodezik olduğunu gösterir. ■

Sonuç 4.2 $P(s, t)$ yüzeyler ailesi üzerindeki manyetik alan çizgileri birer manyetik eğridir gerek ve yeter koşul u , v ve w fonksiyonları sadece t parametresine bağlıdır. Yani aşağıda verilen yüzey ailesi için r eğrileri birer manyetik eğridir.

$$P(s, t) = r(s) + u(t)T(s) + v(t)N(s) + w(t)B(s).$$

Örnek 4.12 $V = (x+2y, -2x-y, 1)$ manyetik vektör alanına karşılık gelen manyetik yüzey ve üzerindeki manyetik eğri şekil 4.21’de verilmiştir.



Şekil 4.21 Manyetik yüzey $u(s, t) = st$, $v(s, t) = s^2t$ ve üzerindeki manyetik eğri (kırmızı)

5. SONUÇ

Manyetik vektör alanlarının uygulamaları üzerine yapılan bu tez çalışması hazırlanırken kaynaklar kısmında verilen bir çok makale ve kitaptan yararlanılmıştır. Bu makale ve kitaplarda bir yüklü parçacık bir manyetik alana girdiğinde bu parçacığın sadece teğet vektör alanının Lorentz kuvvetinden etkilendiği düşünülmüştür. Ancak bilindiği üzere bir parçacık bir eğri boyunca ilerlerken üç boyutlu uzaydaki hareketini teğet vektörün yanısıra, normal ve binormal vektöründe destekler. Dolayısıyla parçacık manyetik alan içerisine girdiğinde normal ve binormal vektörleri de manyetik alandan etkilenir. Bu tez çalışmasında, parçacığın normal ve binormal vektörlerinin manyetik alandan etkilenmesi sonucunda elde edilen yeni yörüngeleri geometrik ve fiziksel açıdan incelenmiş ve farklı sonuçlar elde edilerek fiziksel yorumunun daha anlaşılır olması için görselleştirilmiştir. Bu manyetik eğrilerle bağlantılı olan ve parçacıkların laboratuvar ortamında incelenmesine olanak sağlayabileceğini düşündüğümüz akı (Manyetik) yüzeyleri elde edilmiştir. Ayrıca bu eğriler ve yüzeylerle ilgili bazı karakterizasyonlar elde edilip örneklerle desteklenerek verilmiştir. Elde edilen eğri ve yüzeyler Mathematica programı kullanılarak görselleştirilmiştir.

KAYNAKLAR

- Barros, M., Romero, A. 2007. Magnetic vortices. EPL. 77; 1-5.
- Barros, M., Cabrerizo, J.L., Fern´andez, M., Romero, A. 2007. Magnetic vortex filament flows. J. Math. Phys. 48(8); 082904.
- Barros, M. 1997, General helices and a theorem of Lancret. Proc. Am.Math. Soc. 125; 1503–1509.
- Barros, M., Cabrerizo, J.L., Fern´andez, M., Romero, A. 2005. The Gauss-Landau-Hall problem on Riemannian surfaces. J. Math. Phys. 46; 112905.
- Barros, M., Ferrandez, A., Lucas, P., Mero´no~,M.A. 2001. General helices in the 3–dimensional Lorentzian space forms, Rocky. Mountain. J. Math. 31; 373–388.
- Bird, B.R., Stewart, W.E., Lightfoot, E. N. 1960. Transport Phenomena. Wiley. ISBN 0-471-07392-X.
- Boozer, A.H. 2005. Physics of magnetically confined plasmas. Rev., Mod. Phys. DOI:<https://doi.org/10.1103/RevModPhys.76.1071>.
- Boothby, W.M. 1975. An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry. Academic Press, New York, San Francisco, London.
- Bozkurt, Z., Gök İ., Yaylı Y., Ekmekci F.N. 2014. A new Approach for Magnetic Curves in Riemannian 3D–Manifolds. J. Math. Phys. 55; 1-12.
- Cabrerizo, J.L. 2013. Magnetic fields in 2D and 3D sphere. J. Nonlinear Math. Phys. 20(3); 440-4503.
- Camcı, Ç., Kula, L., İlarslan K. 2011. Characterizations of the position vector of a surface curve in Euclidean 3–space, An. Şt. Univ. Ovidius Constanta. 19; 59–70.
- Druţ-Romaniuc, S.L., Munteanu, M.I. 2011. Magnetic curves corresponding to Killing magnetic fields in E^3 . J. Math. Phys. 52; 113506.
- Hacısalıhoğlu, H.H. 2000. Diferensiyel Geometri. Erten Matbaası, Ankara.
- Hacısalıhoğlu, H.H. 1980. Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş, Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, İstanbul.
- Hacısalıhoğlu, H.H., Ekmekci F.N. 2003. Tensör Geometri, Hacısalıhoğlu Yayınları.
- Hasimoto, H.1971.a. A soliton on a vortex filament. J. Fluid. Mech. 51; 477–485.
- Hasimoto, H. 1971.b. Motion of a vortex filament and its relation to elastica. J. Phys. Soc. Jpn. 31; 293–294.
- Hazeltine, R.D., Meiss, J. D. 2003. Plasma Confinement. Dover publications. inc. Mineola, New York.

- Kobayashi, S., Nomizu, K. 1996. Foundations of differential geometry, 1, Wiley-Interscience Publication.
- Langer, J., Singer, D.A. 1984. Knotted elastic curves in R^3 . J. London. Math. Soc. 30(2); 512–520.
- O'Neill, B. 1996. Elementary Differential Geometry. Academic Press, New York, London.
- Pedersen, T.S., Boozer, A.H. 2002. Confinement of nonneutral plasmas on magnetic surfaces. Phys. Rev. Lett. 88; 205002.
- Ratcliffe, J.G. 1994. Foundations of Hyperbolic Manifolds. New York, NY, USA, Springer-Verlag.
- Ruskin, J. 1971. The Elements of Drawing, Dover Publications.
- Scofield, P.D. 1995. Curves of Constant Precession. Amer. Math. Monthly. 102; 531–537.
- Somasundaram, D. 2005. Differential Geometry. Nasora Publishing House, Delhi Medical Association Road, Daryaganj, New Delhi, India.
- Şemin, F. 1983. Diferensiyel Geometri I. Fen Fakültesi Yayınları, İstanbul Üniversitesi, İstanbul, Türkiye.
- Wang, G.J., Tang, K., Tai, C.L. 2004. Parametric representation of a surface pencil with a common spatial geodesic. 36(5); 447–459.
- Xu, L., Mould, D. 2009. Magnetic curves: Curvature-controlled aesthetic curves using magnetic fields. Comput. Aesth., Eurograph. Assoc. 1–8.
- Yano, K., Kon, M. 1984. Structures on Manifolds .Series in Pure Mathematics, Singapore.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Zehra ÖZDEMİR

Doğum Yeri : Gölbaşı/Ankara

Doğum Tarihi : 01/08/1985

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise : Dr. Şerafettin Tombuloğlu Lisesi (2006)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Anabilim Dalı (2010)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı (2012)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Anabilim Dalı (2011)

Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Anabilim Dalı (2011-2018)

Amasya Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Anabilim Dalı (2018)

SCI Yayınları

Tuğ, G., **Özdemir, Z.**, Gök, İ., Ekmekci, F.N. 2018. Accretive Darboux growth along a space curve, Applied Mathematics and Computation 316; 516–524.

Tuğ, G., **Özdemir, Z.**, Gök, İ., Aydın, S.H., Ekmekci, F.N. 2017. Accretive growth kinematics in Minkowski 3-space. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 14(5); 1750069, Doi: 10.1142/S0219887817500694,.

Özdemir, Z., Gök, İ., Ekmekci, F.N. Yaylı, Y. 2015. Notes on magnetic curves in 3D semi Riemannian manifolds. Turkish Journal of Mathematics, 39; 412-426., Doi: 10.3906/mat-1408-31

Bozkurt, Z., Gök, İ., Yaylı Y., Ekmekci, F.N. 2014. A new Approach for Magnetic Curves in Riemannian Manifolds. J. Math. Phys. 55, 053501; doi: 10.1063/1.4870583.

Bozkurt, Z., Gök, İ., Okuyucu O.Z., Ekmekci, F.N. 2012. Characterizations of rectifying, normal and osculating curves in three dimensional compact Lie groups. Life Sci J, 10(3); 819-823] (ISSN: 1097-8135).

Hakemli Dergiler

Yılmaz, B., **Özdemir, Z.**, Gök, İ., Yaylı, Y. 2016. What is the Locus of the Centers of Meusnier Spheres in the Minkowski 3-Space, Facta Universitatis (NIS) Ser. Math. Inform., 31(3); 717-740.

Özdemir, Z., Gök, İ., Ekmekci, F.N. Yaylı, Y. 2015. A New Approach on Type-3 Slant Helix in E^4 , General Mathematics Notes , 28(1); 40-49.

Bozkurt, Z., Gök, İ., Yaylı Y., Ekmekci, F.N. 2013. On The Bour's Theorem with Respect to Conformal Map in Minkowski Space E_1^3 , Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories, 10:2, 149-172;, doi.10.1080/1726037X.2012.10698617.

Bozkurt, Z., Gök, İ., Yaylı Y., Ekmekci, F.N. 2012. A Conformal Approach to Bour's Theorem, Mathematica Aeterna, 2(8); 701-713.

Gökçelik, F. **Bozkurt, Z.**, Gök, İ., Ekmekci, F.N. Yaylı, Y. 2011. Parallel Transport Frame in 4-dimensional Euclidean, Space E^4 , Caspian Journal of Mathematical Sciences 3(1), 91-1023(1), 91-102.

Bozkurt, Z., Gök, İ., Ekmekci, F.N. Yaylı, Y. 2013. Bour's Theorem under the Conformal Map with Light like Profile Curve Beykent University journal of science and engineering Volume 6(2); 1-30.

Uluslararası Kongreler

Tuğ, G., **Özdemir, Z.**, Gök, İ., Aydın, S.H., Ekmekci, F.N. 2017. Accretive Darboux Growth Along a Space Curve. 15th International Geometry Symposium, (Oral Presentation).

Özdemir, Z., Gök, İ., Ekmekci, F.N. 2017. Magnetic Surfaces. 15th International Geometry Symposium, (Oral Presentation), Amasya, Turkey.

- Özdemir, Z.**, Gök, İ., Ekmekci, F.N. 2017. Magnetic Trajectories in Sasakian Space. International Conference on Mathematics and Mathematics Education, (Oral Presentation).
- Özdemir, Z.**, Gök, İ., Ekmekci, F.N. Yaylı. Y. 2016. Applications on the Magnetic Field. (IECMSA-2016) 5th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, BELGRADE-SERBIA, (Oral Presentation)
- Özdemir, Z.**, Gök, İ., Ekmekci, F.N. Yaylı. Y. 2016. Some Solutions on the Flux Surfaces. 14th International Geometry Symposium, (Oral Presentation).
- Tuğ, G., **Özdemir, Z.**, Ekmekci F.N. 2015. Surface Growth Kinematics in Minkowski 3 Space. 4th International Eurasian Conference on Mathematics Sciences and Applications (IECMSA 2015), (Poster).
- Özdemir, Z.**, Gök, İ., Ekmekci, F.N. Yaylı. Y. 2014. An approach for trajectories of magnetic flow on riemannian manifolds. 3'rd international eurasian conference on mathematical sciences and applications (IECMSA-2014), (Poster).
- Özdemir, Z.**, Gök, İ., Ekmekci, F.N. Yaylı. Y. 2014. Variational approach to curves on semi-Riemannian Manifolds. Karatekin Mathematics Days International Mathematics Symposium, (Oral Presentation).
- Yılmaz, B., **Özdemir, Z.**, Gök, İ. 2013. Evolütes İnvolutes of Spatial Curves and Meusnier spheres in Minkowski Space. International Eurasian Conference on Mathematics Sciences and Applications (IECMSA 2013) (2013) (Oral Presentation).
- Özdemir, Z.**, Gök, İ., Ekmekci, F.N. Yaylı. Y. 2013. Magnetic Curves on Sasakian Manifolds. International Eurasian Conference on Mathematics Sciences and Applications (IECMSA 2013), (Oral Presentation).
- Özdemir, Z.**, Gök, İ., Ekmekci, F.N. Yaylı. Y. 2011. Bour s Theorem on the Conformal Map. International Conference on Recent Advences in Mathematical Science and Applications (Oral Presentation).
- Özdemir, Z.**, Gök, İ., Ekmekci, F.N. Yaylı. Y. 2011. Bour s Theorem on the Conformal Map. ICCES Special Symposium on Meshless & Other Novel Computational Methods Zonguldak, (Oral Presentation).
- Özdemir, Z.**, Gök, İ., Ekmekci, F.N. Yaylı. Y. 2011. V i Slant Helix in n Euclidean Space. ICCES Special Symposium on Meshless & Other Novel Computational

Methods Zonguldak, (Oral Presentation).

Özdemir, Z., Gök, İ., Ekmekci, F.N. Yaylı. Y. 2011. Quaternionic Slant Helix In Semi Euclidean Space E_2^4 . ICCES Special Symposium on Meshless & Other Novel Computational Methods Zonguldak, (Oral Presentation).

Ulusal Kongreler

Kaya, S. **Özdemir, Z.**, Yaylı, Y. 2015. Küresel Elastic Curves. XIII. Geometri Sempozyumu, (Oral Presentation).

Özdemir, Z., Gök, İ., Ekmekci, F.N. Yaylı. Y. 2015. Manyetik Eğriler ve Akı Yüzeyleri. XIII. Geometri Sempozyumu, (Oral Presentation).

Özdemir, Z., Gök, İ., Ekmekci, F.N. Yaylı. Y. 2012. Magnetic Curves and Magnetic Vector Fields. XI. Geometri Sempozyumu, (Oral Presentation).

Özdemir, Z., Gök, İ., Ekmekci, F.N. Yaylı. Y. 2012. Type 3 Slant Helix with respect to Parallel Transport Frame in E^4 . X. Geometri Sempozyumu, Balıkesir, (Oral Presentation)

Özdemir, Z., Gök, İ., Ekmekci, F.N. Yaylı. Y. 2011. Curves in Hyperbolic Space. IX. Geometri Sempozyumu, (Poster)

Özdemir, Z., Gök, İ., Ekmekci, F.N. Yaylı. Y. 2011. Conformal Maps in Lorentz Space. IX. Geometri Sempozyumu, (Poster).

Diğerleri

Ekmekci, F.N. **Özdemir, Z.**, Gök, İ. 2017 Manyetik Eğriler ve Akı Yüzeyleri, Ankara Üniversitesi, BAP Projesi, Proje No: 16H0430022.

Yayınları: