

**T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DİFERANSİYELLENEMEYEN AMAÇ FONKSİYONLARI İÇİN
DÜZGÜNLEŞTİRME YAKLAŞIMI VE YENİ BİR GLOBAL
OPTİMİZASYON TEKNİĞİ**

Nurullah YILMAZ

**Danışman
Prof. Dr. Ahmet ŞAHİNER**

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA - 2018**



© 2018 [Nurullah YILMAZ]

TEZ ONAYI

Nurullah YILMAZ tarafından hazırlanan "**Diferansiyellenemeyen Amaç Fonksiyonları için Düzgünleştirme Yaklaşımı ve Yeni Bir Global Optimizasyon Tekniği**" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri üyeleri önünde Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman

Prof. Dr. Ahmet ŞAHİNER
Süleyman Demirel Üniversitesi



Jüri Üyesi

Prof. Dr. Bilal ALTAY
İnönü Üniversitesi



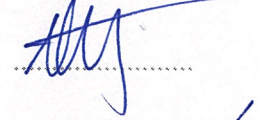
Jüri Üyesi

Prof. Dr. Suna SALTAN
Süleyman Demirel Üniversitesi



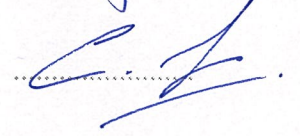
Jüri Üyesi

Prof. Dr. Anar ADİLOĞLU
Süleyman Demirel Üniversitesi



Jüri Üyesi

Prof. Dr. Celaleddin ŞENÇİMEN
Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi



Enstitü Müdürü

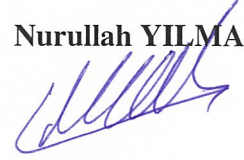
Prof. Dr. Yasin TUNCER



TAAHHÜTNAME

Bu tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Nurullah YILMAZ



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER.....	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ	vii
SİMGELER DİZİNİ.....	viii
TERMİNOLOJİ DİZİNİ.....	ix
1. GİRİŞ	1
1.1. Optimizasyonun Uygulama Alanları ve Tarihçesi	1
1.2. Optimizasyon Problemlerinin Sınıflandırılması	3
1.3. Optimizasyon Problemleri için Çözüm Metotları	3
1.4. Tezin Amacı ve Önemi	5
1.5. Tezin İçerik Özeti	5
2. KAYNAK ÖZETLERİ	6
3. ÖN BİLGİLER	11
4. YENİ DÜZGÜNLEŞTİRME YAKLAŞIMLARI	17
4.1. “ $\max^p$, $\min^p$, $ \cdot ^p$ ” Tipinde Operatörler İçeren Fonksiyonlar için Düzgünleştirme Yaklaşımları	17
4.1.1. Lokal düzgünleştirme yaklaşımı.....	17
4.1.2. Global düzgünleştirme yaklaşımı.....	21
4.2. Parçalı Düzgün Fonksiyonlar için Düzgünleştirme Yaklaşımları	24
4.2.1. Tek değişkenli parçalı düzgün fonksiyonlar için lokal düzgünleştirme yaklaşımları	26
4.2.2. Tek değişkenli parçalı düzgün fonksiyonlar için global düzgünleştirme yaklaşımı	33
4.3. Çok Değişkenli Parçalı Düzgün Fonksiyonlar için Düzgünleştirme Yaklaşımları.....	36
4.3.1. Dikdörtgensel bölgeler üzerinde tanımlı fonksiyonlar için düzgünleştirme yaklaşımları	37
4.3.2. Bir eğri ile birbirinden ayrılan bölgeler üzerinde tanımlı fonksiyonlar için düzgünleştirme yaklaşımı	46
5. YENİ GLOBAL OPTİMİZASYON METOTLARI.....	52
5.1. Düzgün İniş Metodu ve Algoritması.....	52
5.2. Estetik İniş Metodu ve Algoritması.....	57
5.2.1. Alternatif estetik iniş metodu.....	61
5.3. Yeni Düzgün İniş Metodu ve Algoritmaları	65
5.3.1. Düzgün iniş metodunun klasik algoritması	68
5.3.2. Yeni bir lokal minimum araştırma stratejisi	69

6. UYGULAMALAR	74
6.1. Düzgünleştirme Yaklaşımlarının Uygulamaları.....	74
6.1.1. Düzgünleştirme yaklaşımının kısıtlı optimizasyon problemleri için ceza fonksiyonu metoduna uygulanması	74
6.1.2. Düzgünleştirme yaklaşımlarının interpolasyon problemlerine uygulamaları	83
6.2. Global Optimizasyon Metotlarının Test Problemlerine Uygulanması.....	86
6.2.1. Global optimizasyon metotlarının düzgün test problemlerine uygulanması	87
6.2.2. Global optimizasyon metotlarının düzgün olmayan test problemlerine uygulanması.....	99
6.3. Düzgünleştirme Yaklaşımı ve Global Optimizasyonun Moleküler Yapı Problemlerine Uygulanması.....	105
7. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	112
KAYNAKLAR	114
EKLER	121
ÖZGEÇMİŞ.....	123

ÖZET

Doktora Tezi

DİFERANSİYELLENEMEYEN AMAÇ FONKSİYONLARI İÇİN DÜZGÜNLEŞTİRME YAKLAŞIMI VE YENİ BİR GLOBAL OPTİMİZASYON TEKNİĞİ

Nurullah YILMAZ

Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ahmet ŞAHİNER

Teknolojik gelişmeler, hızla ilerleyen bilimsel çalışmalar, üretim ve tüketimde yaşanan değişimler en iyileme (optimizasyon) sürecine olan ihtiyacı beraberinde getirmiştir. Yaşanan gelişmeler ile birlikte optimizasyon problemlerinin yapı ve tipleri değişmektedir. Bu değişimler yeni problemlerin çözümünde mevcut optimizasyon metotlarını yetersiz bırakmaktadır. Bir optimizasyon probleminde amaç fonksiyonunun birden çok lokal minimuma sahip olması durumunda global olanın tespit edilmesi oldukça zordur. Bununla birlikte amaç fonksiyonunun diferansiyellenemeyen (hatta Lipschitz sürekli olmayan) bir yapıya sahip olması global optimizasyonu çok daha zorlu bir problem haline getirmektedir. Bu tez çalışmasının temel amacı bu tür problemlerin global optimizasyonu için yeni ve yüksek performanslı metotlar üretmektir.

Bu tezde ilk olarak diferansiyellenemeyen Lipschitz sürekli olan veya Lipschitz sürekli olmayan fonksiyonlar için yeni düzgünleştirme yaklaşımları sunulmaktadır. İkinci olarak, yeni düzgünleştirme yaklaşımlarından faydalanarak global optimizasyon için yeni yardımcı fonksiyon metotları ve onların algoritmaları verilmektedir. Önerilen düzgünleştirme yaklaşımları ve global optimizasyon metotları kısıtlı optimizasyon problemlerine, interpolasyon problemlerine ve global optimizasyon için test problemlerine uygulanmıştır. Önerilen metotlardan elde edilen nümerik sonuçlar ile mevcut metotlardan elde edilen sonuçlar kıyaslanmıştır. Bu kıyaslamalar tezin ilgili kısımlarında sunulmaktadır. Gerçek hayat problemi olarak, moleküler yapı problemlerinden biri ele alınmıştır. Düzgünleştirme yaklaşımları ve global optimizasyon metotlarından biri kullanılarak çözülmüştür. Elde edilen sonuçlar uygulamalar kısmında sunulmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Global optimizasyon, düzgün olmayan optimizasyon, Lipschitz olmayan optimizasyon, düzgünleştirme, kötü tanımlanmış problemler.

2018, 124 sayfa

ABSTRACT

Phd. Thesis

SMOOTHING APPROACH FOR NONSMOOTH OBJECTIVE FUNCTIONS AND A NEW GLOBAL OPTIMIZATION TECHNIQUE

Nurullah YILMAZ

**Süleyman Demirel University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Prof. Dr. Ahmet ŞAHİNER

Technological developments, rapidly advancing scientific studies, changes in the production and consumption have been accompanied by the need of optimization. Along with these developments, the types and natures of the optimization problems have been changed. These changes have made the existing methods insufficient in solving of the new problems. In case of the objective function of a minimization problem has multiple local minimizers, determining of the global one is a great challenge. In addition, finding the global minimizer is harder when the objective function is non-differentiable or non-Lipschitz. The main aim of this thesis is to develop new and high performance methods for the solution of global optimization problems.

In the first stage of this thesis, the new smoothing approaches for non-differentiable (Lipschitz continuous or non-Lipschitz) functions are presented. At the second stage, by the help of the new smoothing approaches the new auxiliary function methods and their algorithms are given for global optimization. This newly proposed smoothing approaches and global optimization methods are applied to constrained optimization problems, interpolation problems and test problems for global optimization. The numerical results obtained from the proposed methods and the results obtained from the existing methods are compared. The molecular conformation problem is handled as a real-life application. The problem is solved by using one of the newly proposed smoothing approaches and global optimization methods. All these numerical results are presented at the “Applications” part of this thesis.

Keywords: Global optimization, non-smooth optimization, non-Lipschitz optimization, smoothing, ill-posed problems.

2018, 124 pages

TEŞEKKÜR

Bu araştırma için beni yönlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan değerli Danışman Hocam Prof. Dr. Ahmet Şahiner'e teşekkürlerimi sunarım.

Araştırmanın yürütülmesinde maddi ve manevi yardımlarını gördüğüm çalışma arkadaşlarıma teşekkür ederim.

ÖYP-05545-DR-13 No'lu Proje ile tezimi maddi olarak destekleyen Süleyman Demirel Üniversitesi Öğretim Elemanı Yetiştirme Programı Yönetim Birimi'ne teşekkür ederim.

Ayrıca doktora eğitimim boyunca 2211-A Genel Yurt İçi Doktora Bursu kapsamında düzenli finansal desteğinden dolayı TÜBİTAK-BİDEB'e özel teşekkürlerimi sunuyorum.

Tezimin her aşamasında beni yalnız bırakmayan eşime ve aileme sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Nurullah YILMAZ
ISPARTA, 2018

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 1.1 Optimizasyon problem sınıfları.....	3
Şekil 4.1 (a) $q^1(t)$, $q^1(t, 0.5)$ ve $q^1(t, 1)$ fonksiyonunun, (b) $q^{1/2}(t)$, $q^{1/2}(t, 0.5)$ ve $q^{1/2}(t, 1)$ fonksiyonunun grafiğidir.....	19
Şekil 4.2 (a) $q^1(t) = \max\{t, 0\}$, $\tilde{q}_4^1(t, 0.3)$ ve $\tilde{q}_4(t, 0.8)$ fonksiyonunun (b) $q^1(t)$, $\tilde{q}_4^1(t, 0.5)$ ve $\tilde{q}_{1.5}^1(t, 0.5)$ fonksiyonunun (c) $q^{1/2}(t)$, $\tilde{q}_4^{1/2}(t, 0.1)$ ve $\tilde{q}_4^{1/2}(t, 0.4)$ fonksiyonunun (d) $q^{1/2}(t)$, $\tilde{q}_8^{1/2}(t, 0.5)$ ve $\tilde{q}_4^{1/2}(t, 0.5)$ fonksiyonunun grafiğidir.....	24
Şekil 4.3 (a) $f(x)$ ve $f^{l_1}(x, \varepsilon)$ fonksiyonunun (b) $f(x)$ ve $f^g(x, \varepsilon)$ fonksiyonunun grafiğidir.....	37
Şekil 4.4 (a) $f^{l_1}(x, 0.5)$ lokal düzgünleştirme fonksiyonunun (b) $f^g(x, 0.25)$ global düzgünleştirme fonksiyonunun grafiğidir.....	46
Şekil 4.5 (a) f fonksiyonunun grafiği, (b) f fonksiyonunun grafiğinin üstten görünümü (c) $f^{l_1}(x, 0.5)$ lokal düzgünleştirme fonksiyonu grafiği, (d) $f^g(x, 0.5)$ global düzgünleştirme fonksiyonunun grafiğidir.....	51
Şekil 5.1 $n = 1$ için PDS algoritmasının uygulması.....	71
Şekil 5.2 $n = 2$ için PDS algoritmasının uygulması.....	71
Şekil 6.1 (a) $f(x)$ ve $f^{l_1}(x, 0.15)$, (b) $f(x)$ ve $f^g(x, 0.07)$, (c) $f(x) - f^{l_1}(x, 0.15)$, (d) $f(x) - f^g(x, 0.07)$ fonksiyonunun grafiğidir.....	84
Şekil 6.2 $f(x)$ fonksiyonunun grafiğidir.....	85
Şekil 6.3 (a) $f^{l_1}(x, 0.5)$, (b) $f^g(x, 0.5)$, (c) $f(x) - f^{l_1}(x, 0.5)$, (d) $f(x) - f^g(x, 0.5)$ fonksiyonunun grafiğidir.....	86
Şekil 6.4 $f(x)$ amaç fonksiyonunun global minimumu bulunana kadar SDF, EDF, NDF fonksiyonlarının adım adım grafikleridir.....	88
Şekil 6.5 $f(x)$ amaç fonksiyonunun global minimumu bulunana kadar PDS-NDA uygulamasıyla elde edilen grafiklerdir.....	90
Şekil 6.6 f fonksiyonunun düzgünleştirme fonksiyonlarının grafikleridir.....	101
Şekil 6.7 $\Omega = [0, 360] \times [0, 360]$ kümesinin alt bölgelerinin grafiğidir.....	107
Şekil 6.8 Alt bölgeler üzerinde kurulan Bezier yüzeylerinin grafiğidir.....	108
Şekil 6.9 $\tilde{f}(x, y, \varepsilon)$ fonksiyonunun grafiğidir.....	111

ÇİZELGELER DİZİNİ

	Sayfa
Çizelge 6.1 Algoritma A'nın $p = 1$ durumunda Problem 6.8 için uygulanması ile elde edilen sonuçlardır.	79
Çizelge 6.2 Algoritma A'nın $p = 2/3$ durumunda Problem 6.8 için uygulanması ile elde edilen sonuçlardır.	79
Çizelge 6.3 Algoritma A'nın $p = 1$ durumunda Problem 6.9 için uygulanması ile elde edilen sonuçlardır.	80
Çizelge 6.4 Algoritma A'nın $p = 2/3$ durumunda Problem 6.9 için uygulanması ile elde edilen sonuçlardır.	80
Çizelge 6.5 Algoritma A'nın $p = 1$ durumunda Problem 6.10 için uygulanması ile elde edilen sonuçlardır.	81
Çizelge 6.6 Algoritma A'nın $p = 2/3$ durumunda Problem 6.10 için uygulanması ile elde edilen sonuçlardır.	81
Çizelge 6.7 Algoritma A'nın $p = 1$ durumunda Problem 6.11 için uygulanması ile elde edilen sonuçlardır.	82
Çizelge 6.8 Algoritma A'nın $p = 2/3$ durumunda Problem 6.11 için uygulanması ile elde edilen sonuçlardır.	83
Çizelge 6.9 Problem 6.14 için a_i ve b_i değerleridir.	87
Çizelge 6.10 Test problemlerinin listesidir.	91
Çizelge 6.11 SDA uygulaması ile elde edilen nümerik sonuçlardır.	92
Çizelge 6.12 EDA uygulaması ile elde edilen nümerik sonuçlardır.	93
Çizelge 6.13 FDA uygulaması ile elde edilen nümerik sonuçlardır.	94
Çizelge 6.14 NDA uygulaması ile elde edilen nümerik sonuçlardır.	95
Çizelge 6.15 PDS-NDA uygulaması ile elde edilen nümerik sonuçlardır.	96
Çizelge 6.16 Önerilen metotların iterasyon ve fonksiyon değerlendirme sayısıdır.	98
Çizelge 6.17 Önerilen metotlar ile literatürdeki metotların kıyaslamalarıdır.	99
Çizelge 6.18 Problem 6.15 için a_i ve b_i değerleridir.	100
Çizelge 6.19 Düzgün olmayan test problemlerinin listesidir.	100
Çizelge 6.20 SDA uygulaması ile elde edilen nümerik sonuçlardır.	101
Çizelge 6.21 EDA uygulaması ile elde edilen nümerik sonuçlardır.	102
Çizelge 6.22 FDA uygulaması ile elde edilen nümerik sonuçlardır.	102
Çizelge 6.23 NDA uygulaması ile elde edilen nümerik sonuçlardır.	103
Çizelge 6.24 PDS-NDA uygulaması ile elde edilen nümerik sonuçlardır.	103
Çizelge 6.25 Önerilen metotların düzgün olmayan test problemleri üzerinde nümerik kıyaslamalarıdır.	104
Çizelge 6.26 Önerilen metotların literatürde mevcut olan bir metot ile düzgün olmayan problemler üzerinde kıyaslamalarıdır.	105
Çizelge 6.27 Sayısal sonuçlardır.	111

SİMGELER DİZİNİ

x_k^*	k -ıncı lokal minimum
x^*	global minimum
f_k^*	k -ıncı lokal minimumun değeri
f^*	global minimum değeri
d	yön vektörü
$\ x\ $	x vektörünün normu
$\nabla f(x)$	f amaç fonksiyonunun gradyanı
$H_f(x)$	f fonksiyonunun x noktasındaki Hessian Matrisi
χ_A	A kümesinin karakteristik fonksiyonu
$B(x_k^*)$	x_k^* noktasının yuvası
$S(x_k^*)$	x_k^* noktasının basit yuvası
Ω	f fonksiyonunun tanım kümesi
α	parametre
β	düzgünleştirme parametresi

TERMİNOLOJİ DİZİNİ

auxiliary function	yardımcı fonksiyon
basin	yuva
exact penalty function	tam ceza fonksiyonu
partition	basit yuva
penalty function	ceza fonksiyonu
piecewise-smooth	parçalı düzgün
regularization	düzenleştirme
smooth	düzgün
smoothing function	düzgünleştirme fonksiyonu
transititon function	geçiş fonksiyonu



1. GİRİŞ

Optimizasyon, istenilen kısıtlar altında elde edilebilecek en iyi sonucu elde etme olarak tanımlanır. Matematiksel olarak bir optimizasyon problemi $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$(P) \quad \min_{x \in \Omega} f(x)$$

olarak ifade edilir. Burada Ω kısıtlara bağlı olarak sınırları belirlenen $\mathbb{R}^n$ Euclid uzayının bir altkümresi, f ise Ω üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyondur ve bu fonksiyona amaç fonksiyonu adı verilir.

1.1. Optimizasyonun Uygulama Alanları ve Tarihçesi

Optimizasyon en iyi bulma ihtiyacına bağlı gerçek hayat problemlerine matematiksel yaklaşımları kullanarak yanıt aramak adına ortaya çıkmıştır. Bilimin hemen her alanında uygulama olanağı bulunmaktadır. Özellikle kimya mühendisliğinde moleküler yapı ve metalik materyal dizaynı; tasarım mühendisliğinde köprü, baraj, nükleer reaktör, uçak ve roket dizaynı; doğa bilimlerinde popülasyon yönetimi; bilgisayar bilimlerinde ağ ve veri tabanı dizaynı, ekonomide e-ticaret, finans alanında risk analizi; askeri alanlarda envanter yönetimi gibi birçok problemlerin çözümünde kullanılmaktadır (Ng, 2003).

Optimizasyon tarihini kısaca özetleyecek olursak, insan hayatı başladığından beri var olduğu düşünülse de optimizasyon tarihini Pisagor ile başlatmak mümkündür. Eski Yunan'da Zeno, Platon, Aristo'nun ayrıca Arşimed'in çalışmalarının optimizasyonun başlangıcını oluşturduğu kanaati hakimdir.

Geçmişten günümüze bütün metot ve yaklaşımların en önemli unsuru olan "Algoritma" kelimesinin çıkış noktası olan Harezmi, İbn Sahl ve El-Kereci gibi ilim sahiplerinin bu alana önemli katkıları vardır.

Descartes'den başlayarak Fermat tabii ki Newton ve Leibnitz kalkülüsü kurarak optimizasyon için büyük bir adım atmışlardır.

19. yüzyıla gelindiğinde Gauss'un en küçük kareler yöntemi hayli kullanışlı bir metot olarak ortaya çıkmıştır.

20. yüzyıl optimizasyon alanında en hızlı gelişmelerin yaşandığı yüzyıl olarak düşünülebilir. Bulunduğu dönemdeki çoğu optimizasyon probleminin çözümü için yeterli olan "Lineer programlama" ilk olarak 1939 yılında Kantorovich tarafından keşfedilmiş olsa da 1947 yılında Dantzig Simplex metodunu yayınlayana kadar saklı tutulmuştur. Aynı yıl lineer olmayan programlama ilk olarak Karush tarafından geliştirilmiştir. Daha sonraları ise Kuhn ve Tucker tarafından yapılan katkılar ile lineer olmayan programlama Karush-Kuhn-Tucker teorisi olarak kabul görmüştür (Kiranyaz vd., 2014).

1950 ve 1960 yıllarında yapay zekaya (Bulanık Mantık) dayalı optimizasyon yöntemleri ortaya çıkmaya başlamıştır. Bu tarihlerden sonra hızlı gelişmeler yaşanmıştır. Gelişen bilgisayar teknolojisi bu alanı hızlandıran en büyük etken olmuştur.

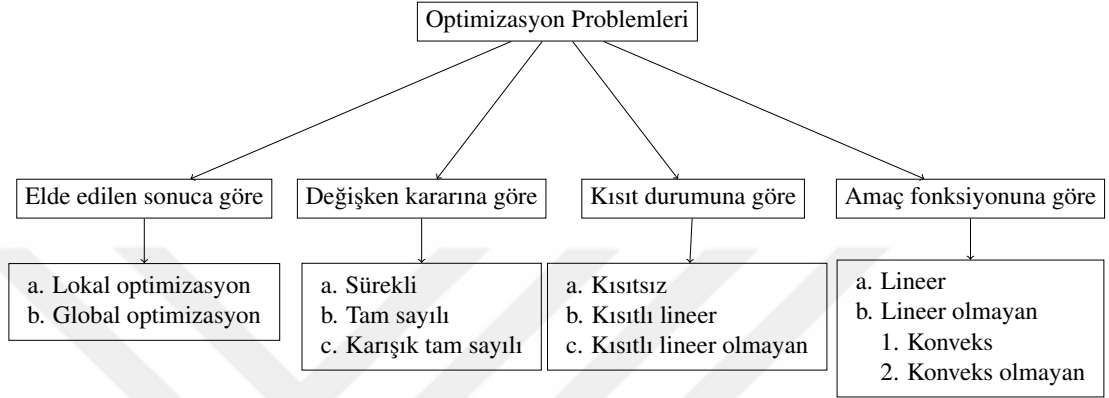
Bu son yüzyılda gelişen teknoloji ve mühendislik çalışmalarında karşılaşılan çoğu optimizasyon probleminin lineer olmayan bir yapıya sahip olduğu bilinmektedir. Bu durum optimizasyon problemlerinin birden çok lokal optimum noktaya sahip olabileceği anlamına gelmektedir. Böyle bir durumda global optimum noktanın bulunması optimizasyon başlığı altında global optimizasyon alanının doğuşuna zemin hazırlamıştır.

Global optimizasyonun çok eski zamanlardan itibaren var olduğu bilinse de 1970'li yıllardan sonra bu alan ile yoğun olarak ilgilenilmiştir. Bunun nedeni mevcut problemlerin çözümünde lokal optimizasyon metotlarının yeterli olması ve gerekli teknolojik araçların (bilgisayarların) yeterince kullanılabilir olmamasıdır. 1970'li yıllardan sonra yaşanan teknolojik gelişmeler global optimizasyon çalışmaları için önemli alt yapılar sunmuş ve oldukça hızlı gelişmeler söz konusu olmuştur.

Son yıllarda global optimizasyon çalışmalarına yoğun ilgi gösterilmektedir. Günümüz itibarıyla gerçek hayat problemleri göz önünde bulundurulduğunda global optimizasyona olan ilginin devam edeceği öngörülmektedir (Guida, 2015).

1.2. Optimizasyon Problemlerinin Sınıflandırılması

Optimizasyon problemleri farklı yönleri değerlendirilerek birçok alt gruba ayrılabilir. Karar değişkeni, kısıt durumu, amaç ve kısıt fonksiyonlarının yapısı ve elde edilen sonuca göre sınıflandırma yapılabilir. Bu sınıflandırma Şekil 1.1 ile verilmiştir.



Şekil 1.1. Optimizasyon problem sınıfları.

Karar değişkenine göre sürekli, kısıt durumuna göre kısıtsız ve amaç fonksiyonuna göre lineer olmayan ve konveks olmayan global optimizasyon problemleri gerçek hayat problemlerinde ortaya çıkan önemli optimizasyon problemlerinden biridir. Böyle bir problem için amaç fonksiyonunun diferansiyellenebilir (düzgün) olup olmaması da ayrı bir sınıflandırma konusu olabilmektedir. Amaç fonksiyonunun diferansiyellenebilir olmadığı durumlar için yapılan çalışmalar diğer durumlara nispeten oldukça azdır. Üstelik bu çalışmaların çoğunda amaç fonksiyonunun Lipschitz sürekli olması koşulu konulmuştur. Fakat son yıllarda yapılan çalışmalarda Lipschitz sürekli olmayan amaç fonksiyonlarına sahip problemler ortaya çıkmaktadır.

Bu çalışmada sürekli değişkene sahip, kısıtsız, amaç fonksiyonu lineer olmayan global optimizasyon problemleri incelenecektir.

1.3. Optimizasyon Problemleri için Çözüm Metotları

Global optimizasyon problemlerini çözmek için birbirinden farklı yapı ve özelliklere sahip yöntemler geliştirilmiştir. Temel olarak bu yöntemler stokastik/sezgisel ve

determinist yöntemler olarak iki gruba ayrılmıştır. Stokastik/sezgisel metotlara Tavlama Benzetimi (Simulated Annealing), Genetik Algoritmalar (Genetic Algorithms), “Tabu search”, “Ant Colony Algoritması”, “Parçacık Sürü Optimizasyonu” gibi metotlar örnek olarak verilebilir. Genellikle kolay uygulanabilen fakat kesin sonuç garantisi bulunmayan yöntemlerdir. Determinist yaklaşımlar daha güvenilir olmasına karşın hesaplama maliyetleri diğer yöntemlere göre oldukça fazladır. Bunlara örnek olarak “Branch and Bound”, “DIRECT” ve Yardımcı Fonksiyon Metodu (Tunneling Algorithm, Filled Function Method) gibi metotlar örnek olarak gösterilebilir.

Yardımcı fonksiyon yaklaşımı global optimizasyon metotları içerisinde sıkça kullanılan metotlardan birisidir. Bu metodun kolay uygulanabilirliği, hızlı ve güvenilir olması öne çıkan avantajlı yönlerindendir. Yardımcı fonksiyon yaklaşımı genel olarak iki ana fazdan oluşur.

- Lokal minimum bulma algoritmasını kullanarak amaç fonksiyonunun lokal minimumunun bulunması.
- Yardımcı fonksiyonu kullanarak amaç fonksiyonunun eldeki lokal minimumundan daha küçük değerli lokal minimumuna götüren başlangıç noktası bulunur ve Faz 1 e dönülür. Eğer öyle bir nokta bulununamıyorsa iterasyon durdurulur ve bulunan son nokta global minimum olarak ilan edilir.

Yardımcı fonksiyon yaklaşımları kısıtlı veya kısıtsız, sürekli veya ayrık (tam sayılı) lineer olmayan global optimizasyon problemlerinin çözümü için önerilmiştir. En bilinen yardımcı fonksiyon yaklaşımları “Tunneling” ve “Filled Fonksiyon” metotlarıdır. Gradyan tabanlı algoritmalar kullanılarak çalışmasına rağmen yapılan bazı düzenlemeler ile diferansiyellenemeyen amaç fonksiyonlarının minimizasyonu amacıyla önerilen metotlar literatürde mevcuttur. Yardımcı fonksiyon metotlarının güvenilir, oldukça kullanışlı ve gelecek vaat eden metotlardan olduğu bilinmektedir. Bu metotlardan bazılarının nümerik olarak tatmin edici sonuçlar sunmadığı bilinse de yardımcı fonksiyon yaklaşımı gerçek hayat problemlerine de uygulanmıştır.

1.4. Tezin Amacı ve Önemi

Bu tez çalışmasının amacı kısıtsız, sürekli, lineer olmayan amaç fonksiyonlarının global optimizasyon problemlerini ele alarak bu problemlerin çözümü için yeni metotlar üretilmesi ve bu yeni metotların işleyişinin test ve reel hayat problemleri üzerinde etkinliğinin gözlemlenmesidir. Literatürde bulunan mevcut metotların çoğu amaç fonksiyonunun diferansiyellenebilir olduğu veya Lipschitz sürekli olduğu problemlere uygulanabilmektedir. Bu metotlardan daha kapsayıcı olarak diferansiyellebilir, diferansiyellenemeyip Lipschitz sürekli veya Lipschitz sürekli olmayan amaç fonksiyonlarına sahip global optimizasyon problemlerine uygulanabilecek şekilde yeni global optimizasyon metotlarının üretimi amaçlanmıştır. Bu nedenle ilk olarak diferansiyellenemeyen fonksiyonlara diferansiyelenebilir fonksiyonlar ile yaklaşım sağlayan yeni düzgünleştirme yaklaşımları sunulmuştur. Bu yeni yaklaşım yöntemlerini kullanarak Yardımcı Fonksiyon anlayışına bağlı yeni global optimizasyon metotları ve algoritmaları inşa edilmiştir. Elde edilen düzgünleştirme yaklaşımları ve global optimizasyon metotları test ve gerçek hayat problemlerine uygulanarak bu yaklaşım ve metotların uygulanabilirliği nümerik olarak sınanmıştır.

1.5. Tezin İçerik Özeti

Tezin 2. Bölümünde kaynak özetlerine, 3. Bölümünde temel tanım, teorem ve notasyon bilgilerine yer verilmiştir. 4. Bölümde yeni yardımcı fonksiyonun ve global optimizasyon metotlarının inşasında kullanılacak olan düzgünleştirme tekniği ile ilgili yeni yöntemler ve 5. Bölümde yeni global optimizasyon metotlarının algoritmaları ve teorik olarak elde edilen sonuçlar sunulmuştur. 6. Bölüm düzgünleştirme yaklaşımları ve global optimizasyon metotlarının uygulamalarından ve elde edilen sonuçlardan oluşmaktadır. 7. Bölümde elde edilen sonuçlar üzerine yorumlar, tartışmalar ve gelecek çalışmalar için önerilere yer verilmiştir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Gerçek hayatın optimizasyon problemi için kullanılan amaç fonksiyonlarının çoğu konveks bir yapıda değildir. Böyle bir durum (P) probleminde tanımlanan amaç fonksiyonunun birden çok lokal minimuma sahip olabileceği anlamına gelmektedir. Bu durum global optimizasyonu zor bir iş haline getirir. Amaç fonksiyonu birden çok lokal minimuma sahip olduğunda bilinen lokal minimumdan daha küçük değere sahip lokal minimuma nasıl geçileceği ve global minimum bulunduğu durma kriterinin nasıl belirleneceği gibi iki önemli sorun ortaya çıkmaktadır. Bu sebeplerden dolayı global optimizasyon alanı 1970 li yıllara kadar yeterince ilgi görmemiştir. Ayrıca yetersiz nümerik hesaplama desteği (yetersiz bilgisayar ve teknoloji desteği) 80 li yıllara kadar global optimizasyon çalışmalarının önündeki en önemli engel olmuştur. Bu döneme kadar global optimizasyon için üretilen metotlar ya bir problemin çok özel bir durumu için kullanılabiliyordu ya da sadece teorik bilgiler içeriyordu. Yayımlanan iki ciltlik kitap (Dixon ve Szegö, 1975, 1978) ve hızla ilerleyen bilgisayar teknolojisi ile birlikte global optimizasyon çalışmalarında hızlı bir gelişme kaydedilmiştir.

İlk global optimizasyon metotlarından biri olan “Branch and Bound” metodu Ayrık Programlama (Discrete Programming) problemlerini çözmek için ortaya çıkmıştır (Land ve Doig, 1960). Determinist bir yapıya sahip olan bu metot, sürekli amaç fonksiyonlarının global optimizasyonu için 1969 yılında yeniden düzenlenmiştir (Falk ve Soland, 1969). Bu yöntem uygun bölgeyi daha küçük bölgelere ayırarak, güvenilmeyen bölgeyi daha sonraki süreç için devre dışı bırakarak ilerlemeye dayanır. Bu alt bölgeler daha küçük alt bölgelere ayrılarak aynı süreç bu alt bölgeler içinde devam ettirilir. Bu metot hem ayrık hem sürekli değişkene sahip problemler için kullanılabilir olduğundan birçok araştırmanın konusunu oluşturmuştur (Horst ve Tuy, 1990; Zilinskas, 2008; Paulavicius vd., 2011).

Literatürde hatırı sayılır yeri olan bir diğer global optimizasyon yöntemi “Covering Metotları” olarak adlandırılan metotlardır. Amaç fonksiyonunun tanım kümesi olan D bölgesini küçük hiper-dikdörtgenlere bölerek çalışan metotlardır. Her bir bölgede seçilen noktada fonksiyon değerine bakılarak sonraki aşamalarda bölgenin dikkate alınıp alınmayacağına karar verilir. DIRECT metodu bu parçalanma tabanlı metotlardan

en bilinenidir (Jones vd., 1993). Bu metodu geliştirmek adına farklı tipte parçalanma yaklaşımı geliştirilerek ilerlenmektedir (Paulavicius vd., 2014, 2017). Bu yönteme alternatif olacak yöntemlerden birisi de boşluk dolduran eğriler yöntemidir. Yöntem amaç fonksiyonunun tanım kümesini dolduracak şekilde eğriler üzerindeki kısmını olarak n –boyutlu problemi bir boyutlu probleme indirgeme esasına dayanır. Daha sonra Lipscthitz veya Hölder sabitlerine dayalı adımlar kullanılarak amaç fonksiyonu minimize edilir (Butz, 1968; Sergeyev vd., 2013; Lera ve Sergeyev, 2015; Ziadi vd., 2016).

Geleneksel global optimizasyon yöntemlerinden birisi de “Multi Start” algoritmalarıdır. Bu metotlar optimizasyon bölgesinde düzenli bir biçimde dağıtılan noktaları başlangıç noktası olarak kullanarak yeni noktalar elde etme prensibine dayanır. Elde edilen noktalar durma kriterini sağlıyor ise algoritmanın işleyişi durdurulur aksi halde bölge üzerindeki başka noktalar alınarak sürece devam edilir. Bu algoritma ile benzer nitelikler taşıyan “Clustering” metotları optimizasyon bölgesinde düzenli bir biçimde dağıtılan noktalardan başlayarak elde edilen noktaları gruplar halinde birbirinden ayırır. Sonraki adımda grubun dışından noktalar üreterek diğer lokal minimumlara ulaşmayı amaçlar. “Multi Level Single Linkage” algoritması yukarıda bahsedilen iki metodun kullanışlı özelliklerinin bir araya getirilmesi sonucu elde edilen bir metottur. Bunların yanısıra “Random Search” metodu da literatürde var olan önemli metotlardan birisidir. Bu alışmalar üzerine daha detaylı bilgilere (Horst ve Pardalos, 1995; Strogin ve Sergeyev, 2000; Zhigljavsky ve Zilinskas, 2008) alışmalarında yer verilmiştir.

Yukarıda işlenen matematiksel yaklaşımlara ek olarak sezgisel metotlar olarak bilinen kimyasal, biyolojik veya fiziksel süreçlerin benzetimine dayanan global optimizasyon yöntemleri de mevcuttur. “Genetik Algoritmalar” ve “Gelişim Algoritmaları” biyolojik süreçlerin benzetiminden faydalanarak üretilen metotlardır (Kirkpatrick vd., 1983; Storn, 1997). “Simulated Annealing” metodu metallerin ısı ile yaşlandırılması sürecinin benzetimine dayalı bir metottur. Metal eriyiğinin yavaş yavaş soğutulmasına yaşlandırma denilmektedir. Bu yaşlandırma işlemi sırasında minimum enerjili atomik yapı elde edildiğinden bu süreç simüle edilerek bir fonksiyonun minimumunun bulunması amaçlanmıştır (Holland, 1975). Bunların yanı sıra “Tabu search”, “Ant Colony Algoritması”, “Parçacık Sürü Optimizasyonu” gibi yöntemler ve bunların

gelişmiş versiyonları önemli global optimizasyon yöntemlerindendir (Glover, 1989, 1990; Dorigo vd., 1991; Kennedy ve Eberhart, 1997). Ayrıca bu yöntemler mühendislik uygulamalarında sıklıkla kullanılmaktadır.

Bir diğer global optimizasyon metodu da “Yardımcı Fonksiyon” yaklaşımıdır. Yardımcı fonksiyon yaklaşımı 1985 yılında Levy ve Montalvo tarafından “Tunneling Algoritmi” adıyla ilk olarak önerilmiştir (Levy ve Montalvo, 1985; Cetin vd., 1993; Xu vd., 2015). Yardımcı fonksiyon yaklaşımının en önemli temsilcisi olan “Filled Fonksiyon Metodu” 1990 yılında Ge tarafından ortaya konulmuştur (Ge, 1987, 1990). Metot, amaç fonksiyonun bir lokal minimum bulma algoritması kullanılarak minimize edilmesi ile başlar. Daha sonra elde edilen noktada filled fonksiyon adı verilen yardımcı fonksiyon inşa edilir. Lokal minimum bulma algoritmaları kullanılarak eldeki yardımcı fonksiyonu minimum yapan noktalar araştırılır. Böyle noktalar bulunursa bu noktalar amaç fonksiyonunun daha düşük değere sahip lokal minimumunun bulunması için başlangıç noktası olarak kullanılır. Süreç amaç fonksiyonunun global minimum değere ulaştıran nokta bulununcaya kadar devam eder. İşleymden anlaşılacağı üzere, filled fonksiyon metodunun ana unsuru filled fonksiyondur. İlk filled fonksiyonlar bünyesinde bulundurduğu terimler ve parametreler nedeniyle yeterince etkili bir biçimde kullanılamamıştır. Fakat yeni filled fonksiyonlar önerilerek bu sorunlar giderilmiştir. Bu çalışmalardan sonra yardımcı fonksiyon metodu teorik ve uygulama yönleriyle gelişerek gündemde kalmaya devam etmiştir (Lucidi ve Piccialli, 2002; Zhang vd., 2004; Yang ve Shang, 2006; Wu vd., 2007; Campana vd., 2009; Lin vd., 2014; Liu vd., 2017; Sahiner vd., 2014, 2017). Son zamanlarda farklı isimler altında yeni yardımcı fonksiyon metotları ortaya çıkmaktadır. Örnek olarak “Cut-Peak Function”, “Global Descent Function”, “Minimum Elimination Escape Function” ve “Filling Function” metotları son dönemde ortaya çıkan metotlardandır (Wang vd., 2009; Ng vd., 2010; Wu vd., 2011; Kethi-Cherif ve Ziadi, 2014; Fan vd., 2015; Lampariello ve Liuzzi, 2015).

Amaç fonksiyonu birden çok lokal minimuma sahip olduğunda problemin çözümünde nasıl sorunlar ortaya çıktığını ve bunların çözümü için hangi yöntemler kullanılarak çözüldüğü önceki paragraflarda detaylarıyla birlikte sunulmuştur. Bunlara ek olarak, amaç fonksiyonu diferansiyellenemeyen bir fonksiyon olduğunda optimizasyon probleminin çözümü için kullanılabilecek yollar oldukça kısıtlanacaktır. Özellikle

gradyan ve türev tabanlı gelişmiş metotlar bu problemlerin çözümü için yetersiz kalacaktır. Bu sorunu ortadan kaldırmak için iki ana yol mevcuttur.

Birinci yol, diferansiyel tanımını genelleştirerek ve diferansiyellenebilme tanımını zayıflatarak klasik metotları bu yeni türev anlayışına göre güncelleyerek kullanan yöntemlerden oluşmaktadır (Clarke, 1983; Demyanov ve Rubinov, 1995; Rockafellar ve Wets, 1998; Bazaraa vd., 2013; Bagirov vd., 2014). Bu güncellenmiş yöntemler Lipschitz sürekli fonksiyonlar için kullanışlı olmalarına rağmen Lipschitz sürekli olmayan fonksiyonlar için kullanışlı değildir.

İkinci yol ise düzgünleştirme yaklaşımıdır. Düzgünleştirme yaklaşımları diferansiyel tanımında bir değişiklik yapmadan eldeki fonksiyonlara düzgün fonksiyonlar ile yaklaşımı amaçlayan veya eldeki fonksiyon üzerinde bir takım değişiklikler yaparak onu düzgün hale getiren yöntemlerdir. 1975 yılında (Bertsekas, 1975), 1980 yılında (Ben-Tal ve Teboule, 1989; Zang, 1980) ve 1982 yılında (Xavier ve Oliveira, 2005; Xavier, 2010) çalışmalarında üretilen düzgünleştirme yaklaşımları ilk olarak ortaya çıkmıştır.

Düzgünleştirme yaklaşımları Lipschitz sürekli fonksiyonları düzgünleştirmek amacıyla farklı yapılara sahip problemlerin çözümünde kullanılmıştır. Örneğin; sıklıkla karşılaşılan min-max problemleri (Vazquez vd., 2001; Bagirov, 2013; Yin, 2015), ceza fonksiyonu yaklaşımı (Zangwil, 1967; Pinar ve Zenios, 1994; Wu vd., 2004; Liu, 2009; Xu vd., 2011; Meng vd., 2011; Lian, 2012; Sahiner vd., 2016a), lineer olmayan tümleyen (Chen ve Mangasarian, 1996; Chen ve Wan, 2015) problemlerine oldukça başarılı bir şekilde uygulanmıştır. Son yıllarda ise Lipschitz sürekli ve Lipschitz sürekli olmayan ters tanımlı problem (inverse problem) ve düzenlileştirme problemleri (regularization problems) adı verilen sinyal ve görüntü işleme alanında karşılaşılan problemlerin çözümünde uygulanmışlardır (Chen ve Zhou, 2010; Chen vd., 2012; Weber vd., 2012a; Nikolova, 2013). Fakat bu düzgünleştirme yaklaşımları belli tipte fonksiyonların düzgünleştirilmesi için kullanılmıştır. Bütün bu fonksiyonları da içine alan daha genel bir fonksiyonlar sınıfı düşünüldüğünde parçalı düzgün fonksiyon sınıfı ile karşılaşılmaktadır.

Parçalı düzgün fonksiyonlar sınıfı uygulama ve kullanım alanları bakımından düzgün olmayan fonksiyonlar sınıfının en önemli alt sınıflarından birisidir (Rockafellar, 2003; Qi ve Tseng, 2007; Griewank ve Walther, 2016). Bu fonksiyonların optimizasyonu sürecinde, eldeki parçalı düzgün fonksiyonu bütünüyle düzgün hale getirme çalışmaları yoğun olarak kullanılmaktadır (Jongen ve Pallaschke, 1988; Wu vd., 2015). Bununla birlikte data modelleme, sinyal ve görüntü işleme alanlarında parçalı düzgün fonksiyonları tümüyle düzgün hale getirme çalışmalarına başvurulmuştur (Prandoni ve Vetterli, 1999; Arandiga vd., 2005; Aslam vd., 2008; Lipman ve Levin, 2010; Özmen vd., 2011; Weber vd., 2012b). Ayrıca data modelleme alanında interpolasyon amacıyla parçalı düzgün fonksiyonların düzgünleştirme çalışmaları da yapılmıştır (Mazroui vd., 2005, 2007; Han, 2009)

Bilindiği gibi Bilgisayar Yardımıyla Geometrik Dizayn (CAGD) mühendisliğin makine, jeoloji, elektrik, endüstriyel dizayn ve görüntüleme gibi bilimlerinde yoğun bir şekilde kullanılmaktadır. Parçalı düzgün fonksiyonların bu çalışma alanı için ayrı bir önemi vardır. Bilgisayar Yardımıyla Geometrik Dizayn alanı içinde ortak kenara sahip düzgün yüzey parçalarının birbirine düzgünlüğü bozmayacak şekilde kaynaştırma (surface blending) çalışmaları parçalı düzgün fonksiyonları tümüyle düzgün hale getirme çalışmalarına benzer nitelikler taşımaktadır (Hartmann, 1995; Ye vd., 1996; Cheng ve Gao, 2003; Belkhatir ve Zidna, 2009).

Bütün bu problemler ve mevcut çalışmalar göz önünde bulundurulduğunda düzgün olmayan fonksiyonlar için yeni düzgünleştirme yöntem ve algoritmalarının üretilmesine ihtiyaç söz konusudur. Yeni tekniklerle daha kapsayıcı, eldeki datayı daha iyi temsil eden yöntem ve algoritmaların üretilmesi gerekmektedir. Bununla birlikte global optimizasyon problemlerinin çözümü bu bölümde sunulan iki önemli nedenden dolayı oldukça zordur. Bu zorlukların üstesinden gelecek yeni metotların inşası mevcut bilgi birikimini bir adım daha öteye taşıyacaktır. Bu yeni metotlar ile gerçek hayatta sıklıkla karşılaşılan global optimizasyon problemleri çözüme kavuşturulacaktır.

3. ÖN BİLGİLER

Tanım 3.1. Verilen bir X uzayı üzerinde tanımlanan $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

- i. Her $x \in X$ için $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- ii. Her $x \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{K}$ için $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
- iii. Her $x, y \in X$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna bir norm, $\|\cdot\|$ normu üzerinde tanımlanan X lineer uzayına normlu lineer uzay denir ve $(X, \|\cdot\|)$ ile gösterilir (Kreyszig, 1978).

Tanım 3.2. $U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık kümesi üzerinde $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon olmak üzere $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in U$ ve $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ birim vektör olsun. Bu durumda

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + hu) - f(\alpha)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha_1 + hu_1, \dots, \alpha_n + hu_n) - f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}{h}$$

limiti mevcut ise f nin α noktasında u vektörü yönünde türevi vardır denir. Bu limit değerine de f fonksiyonunun u vektörü yönündeki türevi denir ve

$$D_u f(\alpha) = D_u f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

olarak gösterilir (Fleming, 1977).

Tanım 3.3. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)}{|h|} = 0$$

olacak şekilde bir L lineer fonksiyoneli varsa f fonksiyonu x_0 noktasında diferansiyellenebilirdir denir (Fleming, 1977).

Tanım 3.4. Eğer bir $C \subset \mathbb{R}^n$ kümesi her $x_1, x_2 \in C$ ve her $\alpha \in [0, 1]$ için

$$\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2 \in C \tag{3.1}$$

şartını sağlıyorsa bu C kümesine konveks küme denir (Bagirov vd., 2014).

Tanımda kısaca; iki nokta konveks kümenin elemanıysa bu iki nokta arasındaki doğru üzerinde bulunan bütün noktaların da bu konveks kümenin elemanı olduğu ifade edilmektedir. Bir C kümesini içeren en küçük konveks kümeye C kümesinin konveks kabuğu adı verilir (Bagirov vd., 2014).

Tanım 3.5. $U \subset \mathbb{R}^n$, $U \neq \emptyset$ ve $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x_1, x_2 \in U$ ve her $\lambda \in (0, 1)$ için

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonu U üzerinde konvektir denir (Bazaraa vd., 2013).

Tanım 3.6. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda

- i. Her $x \in \mathbb{R}^n$ için $f(y) \leq f(x)$ ise $y \in \mathbb{R}^n$ noktasına global,
- ii. Her $x \in \mathbb{R}^n$ için $f(y) < f(x)$ ise $y \in \mathbb{R}^n$ noktasına izole (kesin) global,
- iii. $\exists \rho > 0$ ve her $x \in U_\rho(y) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < \rho\}$ için $f(y) \leq f(x)$ ise $y \in \mathbb{R}^n$ noktasına lokal,
- iv. Her $x \in U(y) \setminus \{y\}$ için $f(y) < f(x)$ ise $y \in \mathbb{R}^n$ noktasına izole (kesin) lokal

minimum nokta denir (Astolfi, 2006; Rao, 2009).

Tanım 3.7. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $\lambda \in (0, \delta)$ için

$$f(x^* + \lambda d) < f(x^*)$$

şartını sağlayan bir $\delta > 0$ varsa d vektörüne x^* noktasında f fonksiyonu için azalış yönü adı verilir (Astolfi, 2006).

Türevlenebilir fonksiyonlar için azalış yönü daha basit bir şartla verilebilmektedir. ∇f ile f fonksiyonunun gradyanı $\nabla f(x) = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right]$ biçiminde tanımlanır.

Önerme 3.8. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve f fonksiyonun birinci mertebeden kısmi türevleri var ve sürekli olsun. $\nabla f(x^*)^T d < 0$ oluyorsa d vektörü x^* noktasında f fonksiyonu için azalış yönüdür (Astolfi, 2006).

Aşağıdaki teorem, bir noktanın lokal minimum nokta olması için gerekli koşulu ifade etmektedir.

Teorem 3.9. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve f fonksiyonun birinci mertebeden kısmi türevleri var ve sürekli olsun. x^* noktası f fonksiyonunun bir lokal minimumu ise

$$\nabla f(x^*) = 0$$

dır (Astolfi, 2006; Rao, 2009).

H_f ile f fonksiyonunun Hessian matrisi

$$H_f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilecektir. Buna göre bir noktanın lokal minimum nokta olması için yeterli koşul aşağıda ifade edilmiştir.

Teorem 3.10. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve f fonksiyonunun ikinci mertebeden kısmi türevleri var ve sürekli olsun. Bu durumda

$$\nabla f(x^*) = 0$$

ve her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$x^T H_f(x^*) x \geq 0$$

şartları sağlanıyorsa x^* noktasına f fonksiyonunun lokal minimum noktasıdır (Astolfi, 2006; Rao, 2009).

Tanım 3.11. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

$$\nabla f(x) = 0$$

olup fakat ekstremum noktası olmayan x noktasına f fonksiyonunun eyer noktası denir (Xu vd., 2001).

Tanım 3.12. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\|x\| \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$$

oluyorsa f fonksiyonuna global konveks denir (Ge, 1990).

$f(x)$ global konveks ise $-f(x)$ global konkavdır ya da $f(x)$ global konkav ise $-f(x)$ global konvektir. Global konvekslik, f fonksiyonunun bütün lokal minimumlaştırıcılarını içeren kapalı ve sınırlı $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin var ve lokal minimumlaştırıcıların bu kümenin iç noktası olmasını gerektirir (Ge, 1990; Xu vd., 2001).

Tanım 3.13. x_k^* , $f(x)$ fonksiyonunun bir izole minimum noktası olsun. $B(x_k^*)$ kümesinden alınan her x noktasından başlayarak uygulanan lokal minimum bulma metodunun x_k^* noktasına yakınsayan ve bu kümeye ait olmayan herhangi bir x noktasından başlayarak uygulanan lokal minimum metodunda x_k^* noktasına yakınsamayan, açık ve bağlantılı $B(x_k^*)$ kümesine x_k^* noktasının yuvası denir (Ge, 1990).

Tanım 3.14. x_k^* noktasında $f(x)$ fonksiyonunun minimumu var ise $f(x)$ fonksiyonunun x_k^* noktasında yuvası vardır (Ge, 1990).

Tanım 3.15. $x_k^*, x_{k+1}^* \in \mathbb{R}^n$ için

$$f(x_{k+1}^*) < f(x_k^*), \quad (f(x_{k+1}^*) > f(x_k^*))$$

ise x_{k+1}^* noktasına $f(x)$ fonksiyonunun x_k^* noktasından daha düşük (yüksek) minimumlaştırıcısı denir ve bu durumda $f(x)$ fonksiyonunun x_{k+1}^* daki B_{k+1}^* yuvası B_k^* yuvasından daha düşüktür (yüksektir) denir (Xu vd., 2001).

Tanım 3.16. B_k^* tarafından içerilen ve kendisinden alınan her $x \neq x_k^*$ için

$$(x - x_k^*)^T \nabla f(x) > 0$$

şartını sağlayan x noktalarının açık ve bağlantılı kümesine x_k^* izole minimum noktanın basit yuvası denir ve S_k^* ile gösterilir (Ge, 1990).

Tanım 3.17. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ için

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L \|x_1 - x_2\|$$

olacak şekilde bir $L \geq 0$ varsa f fonksiyonu Lipschitz süreklidir denir (Jones vd., 1993).

$A \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$ olarak tanımlanacaktır. $\mathbb{R}_+$ ile negatif olmayan reel sayılar gösterilecektir. Parçalı türevlenebilir fonksiyonlar aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 3.18. $f : (\emptyset \neq \Omega) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu Ω üzerinde sürekli ve

$$f(x) \in \{f_i(x) : i = 1, 2, \dots, m\}, \quad \forall x \in \Omega,$$

olacak şekilde $i = 1, 2, \dots, m$ için $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ düzgün (sürekli türevlenebilir) fonksiyon ailesi varsa f fonksiyonuna parçalı düzgün fonksiyon adı verilir (Qi ve Tseng, 2007).

$C(\Omega)$ ile $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı reel değerli bütün sürekli fonksiyonlar kümesi temsil edilecektir. $C^k(\Omega)$ ile Ω üzerinde k -ıncı mertebeden kısmi türevleri sürekli olan fonksiyonlar sınıfı temsil edilecektir. Özel olarak $C^k(\mathbb{R}^n)$ yerine C^k notasyonu kullanılacaktır. $C^{q,p}(\Omega)$ kümesi aşağıdaki şekilde tanımlanacaktır (Mazroui vd., 2007).

$$C^{q,p}(\Omega) = \left\{ f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : \frac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial y^s} f \in C(\Omega), 0 \leq r \leq p, 0 \leq s \leq q \right\}.$$

Düzgünleştirme fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanacaktır.

Tanım 3.19. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\lim_{y \rightarrow x, \varepsilon \rightarrow 0} \tilde{f}(y, \varepsilon) = f(x)$$

olacak şekilde bir $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna $f(x)$ fonksiyonunun düzgünleştirme fonksiyonu adı verilir (Chen, 2012).

x_k^* notasyonunu k -ıncı lokal minimumlaştırıcı ve x^* notasyonunu global minimumlaştırıcı olarak kullanılacaktır.

Aksi belirtilmedikçe Ω_1 v Ω_2 kümeleri $\Omega_1 = \{x : f(x) \geq t\}$ ve $\Omega_2 = \{x : f(x) < t, x \in \Omega\}$ şeklinde tanımlanacaktır.

$\mathbb{R}^n$, Euclid uzayında dikdörtgensel bölge $[l, u] = \prod_{j=1}^n [l_j, u_j]$ ile tanımlanacaktır. Burada $j = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $[l_j, u_j] \subset \mathbb{R}$ biçimindedir. Dikdörtgensel bölgenin orta noktası x^m ile gösterilecektir. Burada $j = 1, 2, \dots, n$ için $x_j^m = \frac{l_j + u_j}{2}$ biçimindedir.

Bilgisayar Yardımıyla Geometrik Dizayn alanının en önemli unsurlarından biriside Bezier eğrileridir. Bezier eğrileri 1950 yılından itibaren geliştirilmeye başlanmıştır. Bezier eğrileri (Farin, 2002; Farin vd., 2002) kitaplarında kapsamlı bir biçimde ele alınmıştır. Bezier eğri ve yüzeyleri bir datayı modelleme amacıyla kullanılmıştır (Nowak vd., 2011; Venkataraman, 2011).

Tanım 3.20. $P_0, P_1, \dots, P_n$ kontrol noktaları olmak üzere n -inci mertebeden bir Bezier eğrisi

$$B(t) = \sum_{i=0}^n b_{i,n}(t) P_i, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

ile tanımlanır. Burada

$$b_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

polinomları n -inci derece Bernstein baz polinomları olarak bilinir (Farin, 2002).

4. YENİ DÜZGÜNLEŞTİRME YAKLAŞIMLARI

Bu bölümde düzgün olmayan fonksiyonların iki farklı sınıfı ele alınacaktır. İlk kısımda “ $\max^p$, $\min^p$, $|\cdot|^p$ ” tipinde operatörler içeren fonksiyonlar sınıfı, ikinci kısımda ise parçalı düzgün fonksiyonlar sınıfı için düzgünleştirme fonksiyonlarına yer verilecektir.

4.1. “ $\max^p$, $\min^p$, $|\cdot|^p$ ” Tipinde Operatörler İçeren Fonksiyonlar için Düzgünleştirme Yaklaşımları

(P) optimizasyon problemleri amaç fonksiyonuna göre düzgün olmayabilirler. f amaç fonksiyonu düzgün değilse çoğu zaman bunun nedeni bünyesinde “ $\max^p$, $\min^p$, $|\cdot|^p$ ” tipi operatörlerin bulunmasıdır. $p = 1$ ise, f fonksiyonu düzgün olmayan fakat Lipschitz sürekli bir fonksiyon olacaktır. Eğer $0 < p < 1$ ise f fonksiyonu Lipschitz sürekli olmayan bir fonksiyon haline dönüşecektir. Böyle bir problemin çözümü için kullanılabilecek yöntem sayısı oldukça kısıtlıdır. Örneğin; $p = 1$ alt diferansiyel yaklaşımına bağlı yöntemler kullanılabilirken, $0 < p < 1$ durumu için bu yaklaşıma bağlı yöntemler kullanılamaz.

Bu bölümde önerilecek düzgünleştirme yaklaşımları ile düzgün olmayan hatta Lipschitz sürekli olmayan fonksiyonların düzgünleştirme fonksiyonları elde edilecektir.

4.1.1. Lokal düzgünleştirme yaklaşımı

$0 < p \leq 1$ için $q^p(t) = \max\{t, 0\}^p$ olarak tanımlansın. Bu fonksiyon için lokal düzgünleştirme yaklaşımı

$$\tilde{q}^p(t, \beta) = \begin{cases} q^p(t), & |t| \geq \beta \\ \mu_p(t, \beta), & |t| \leq \beta \end{cases}$$

olarak elde edilmiştir. Burada $\beta > 0$ için $\mu_p(t, \beta)$ fonksiyonu

$$\mu_p(t, \beta) = \beta^{p-3} \left(\frac{p-1}{4} \right) t^3 + \beta^{p-2} \left(\frac{p}{4} \right) t^2 + \beta^{p-1} \left(\frac{3-p}{4} \right) t + \beta^p \left(\frac{2-p}{4} \right)$$

biçiminde ifade edilir.

Lemma 4.1. $\beta > 0$ olsun. Bu durumda

$$0 \leq \tilde{q}^p(t, \beta) - q^p(t) \leq \mu_p(0, \beta) \quad (4.1)$$

olur.

İspat. $\tilde{q}^p(t, \beta)$ ve $q^p(t)$ fonksiyonları 0 noktasının β komşuluğu dışında aynı değerlere sahip olduğundan (4.1) eşitsizliğinin $-\beta \leq t \leq \beta$ aralığında sağlandığını göstermek yeterli olacaktır. $-\beta \leq t \leq 0$ durumunu ele alalım.

$0 \leq \tilde{q}^p(t, \beta) - q^p(t) = \mu_p(t, \beta)$ ve $\tilde{q}^p(t, \beta)$ fonksiyonu $[-\beta, 0]$ aralığı üzerinde artan olduğu için, $\tilde{q}^p(t, \beta) - q^p(t)$ farkı aralığın sağ uç noktası olan $t = 0$ için maksimuma ulaşır.

$0 \leq t \leq \beta$ için $0 \leq \tilde{q}^p(t, \beta) - q^p(t) = \mu_p(t, \beta) - t^p$ olup $\tilde{q}^p(t, \beta) - q^p(t)$ fark fonksiyonu $[0, \beta]$ azalan bir fonksiyondur. Böylelikle $\tilde{q}^p(t, \beta) - q^p(t)$ fark fonksiyonu maksimum değerini $t = 0$ noktasında alır. İspat tamamlanmış olur. $\square$

Düzgünleştirme fonksiyonunun orjinal fonksiyona olan uzaklığı β parametresiyle kontrol edilebilir. Parametre değişiminin $\tilde{q}^p(t, \beta)$ üzerindeki etkileri Şekil 4.1 (a) ve (b) de gösterilmiştir.

Sonuç 4.2. $\beta \rightarrow 0$ ise $\tilde{q}^p(t, \beta)$ düzgünleştirme fonksiyonu $q^p(t)$ fonksiyonuna yaklaşır.

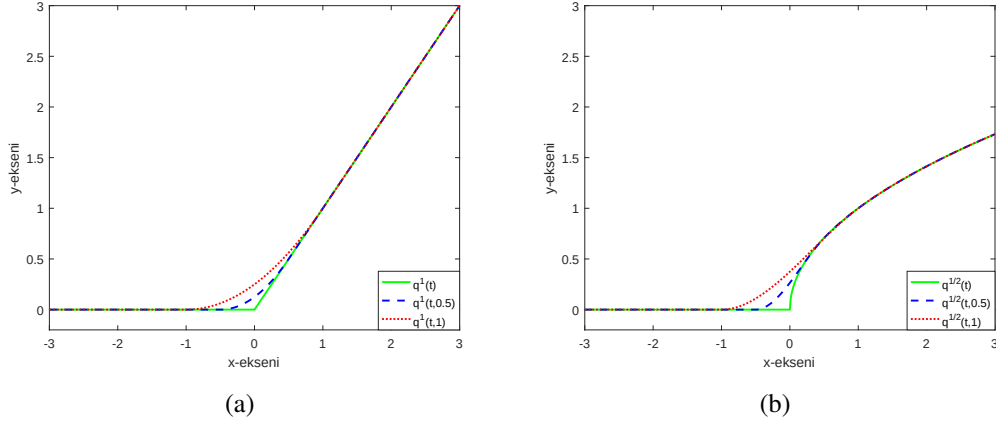
İspat. Lemma 4.1 den

$$0 \leq \tilde{q}^p(t, \beta) - q^p(t) \leq \mu_p(0, \beta)$$

elde edilir. $\beta \rightarrow 0$ iken $\mu_p(0, \beta) \rightarrow 0$ olduğu için, $\beta \rightarrow 0$ için $\tilde{q}^p(t, \beta) - q^p(t) \rightarrow 0$ olduğu görülür. $\square$

Ayrıca $\beta \rightarrow 0$ iken düzgünleştirme fonksiyonunun orjinal fonksiyona yaklaşımı Şekil 4.1 (a) ve (b) ile gösterilmiştir.

Not 4.3. $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Yukarıda tanımlanan $q^p(t)$ fonksiyonunda t değişkeni yerine $g(x)$ fonksiyonu yazılırsa $\max^p\{g(x), 0\}$ fonksiyonu için bir düzgünleştirme fonksiyonu elde edilmiş olur.



Şekil 4.1. (a) $q^1(t)$, $q^1(t, 0.5)$ ve $q^1(t, 1)$ fonksiyonunun, (b) $q^{1/2}(t)$, $q^{1/2}(t, 0.5)$ ve $q^{1/2}(t, 1)$ fonksiyonunun grafiğidir.

Not 4.4. $\min\{g(x), 0\} = -\max\{-g(x), 0\}$ ve $|g(x)| = \max\{g(x), 0\} + \max\{-g(x), 0\}$ olduğu için $\min$ ve $|\cdot|$ operatörleri için ayrıca bir düzgünleştirme fonksiyonu oluşturmaya gerek yoktur.

$i = 1, 2, \dots, m$ için $g_i(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere $\theta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $0 < p_i \leq 1$ olmak üzere $\theta(x) = (\sum_{i=1}^m q^{p_i}(g_i(x)))$ biçiminde tanımlansın. Bu fonksiyonun düzgünleştirme fonksiyonu $\tilde{\theta}(x, \beta) = (\sum_{i=1}^m \tilde{q}^{p_i}(g_i(x), \beta))$ için aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Lemma 4.5. $x \in \mathbb{R}^n$ ve $\beta > 0$ olmak üzere

$$0 \leq \tilde{\theta}(x, \beta) - \theta(x) \leq \sum_{i=1}^m \mu_{p_i}(0, \beta)$$

elde edilir.

İspat. Lemma 4.1 den

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}(x, \beta) - \theta(x) &= \sum_{i=1}^m \tilde{q}^{p_i}(g_i(x), \beta) - \sum_{i=1}^m q^{p_i}(g_i(x)) \\ &= \sum_{i=1}^m (\tilde{q}^{p_i}(g_i(x), \beta) - q^{p_i}(g_i(x))) \\ &\leq \sum_{i=1}^m \mu_{p_i}(0, \beta) \end{aligned}$$

elde edilir. □

Sonuç 4.6. $\beta \rightarrow 0$ için $\tilde{\theta}(x, \beta)$ fonksiyonu $\theta(x)$ fonksiyonuna yaklaşıır.

İspat. Lemma 4.5 den

$$0 \leq \tilde{\theta}(x, \beta) - \theta(x) \leq \sum_{i=1}^m \mu_{p_i}(0, \beta)$$

elde edilir. $\beta \rightarrow 0$ iken $\mu_{p_i}(0, \beta) \rightarrow 0$ ve $\sum_{i=1}^m \mu_{p_i}(0, \beta) \rightarrow 0$ olduğundan dolayı $\tilde{\theta}(x, \beta) - \theta(x) \rightarrow 0$ sonucuna ulaşılır. □

Teorem 4.7. $h, \mathbb{R}_+$ üzerinde tanımlı artan (veya azalan) lineer bir fonksiyon olsun. x^* noktası $h(\theta(x))$ fonksiyonunun bir lokal minimumlaştırıcısı ve $\bar{x}$ noktası $h(\tilde{\theta}(x, \beta))$ fonksiyonunun bir lokal minimumlaştırıcısı olsun. Bu durumda $K > 0$ sabit olmak üzere

$$|h(\tilde{\theta}(\bar{x}, \beta)) - h(\theta(x^*))| \leq K \left(\sum_{i=1}^m \mu_{p_i}(0, \beta) \right)$$

elde edilir. Ayrıca, $\beta \rightarrow 0$ iken $h(\tilde{\theta}(\bar{x}, \beta)) \rightarrow h(\theta(x^*))$ olur.

İspat. h artan fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} h(\tilde{\theta}(\bar{x}, \beta)) - h(\theta(\bar{x})) &\leq h(\tilde{\theta}(\bar{x}, \beta)) - h(\theta(x^*)) \\ &\leq h(\tilde{\theta}(x^*, \beta)) - h(\theta(x^*)) \end{aligned}$$

elde edilir. h fonksiyonu lineer olduğundan $K > 0$ için

$$\begin{aligned} h(\tilde{\theta}(x^*, \beta)) - h(\theta(x^*)) &= K(\tilde{\theta}(x^*, \beta) - \theta(x^*)) \\ &\leq K \left(\sum_{i=1}^m \mu_{p_i}(0, \beta) \right) \end{aligned}$$

bulunur. h azalan fonksiyon olduğunda sonuç benzer şekilde ispatlanır. □

$h(\theta(x))$ fonksiyonu farklı formlar halinde birçok optimizasyon probleminde görülebilir.

Örneğin; $h(t) = \alpha t$, ($\alpha > 0$), ve $\theta(x) = \sum_{i=1}^m (\max\{g_i(x), 0\})^{p_i}$ (Burada $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ düzgün fonksiyonlardır.) olmak üzere kısıtlı optimizasyon için ceza fonksiyonu

yaklaşımı, $h(t) = \alpha t$, ($\alpha > 0$), $\theta(x) = \sum_{i=1}^n |x_i|^{p_i}$ olmak üzere görüntü işleme problemlerinde düzenleme terimi olarak kullanılmıştır. Bu tür optimizasyon problemlerinde kullanılan ve amaç fonksiyonunun diferansiyellenebilirliğini bozan bu terimler, problemlerin çözümünde kullanılacak gradyan ve türeve bağlı önemli metotların kullanımını kısıtlamaktadır. Burada önerilen düzgünleştirme yaklaşımı ile bu problemler için yaygın olarak kullanılan gradyan ve türev tabanlı etkili çözüm metotları kullanılabilir hale getirilmiştir.

Bilindiği gibi yukarıda bahsedilen problemlerin bir tek lokal minimumu (veya bir tek maksimumu) vardır. Oysaki burada üretilen düzgünleştirme yaklaşımı birden çok lokal minimum veya maksimuma sahip olan fonksiyonlar için kullanılabilir niteliktedir. Kabul edelim ki (P) problemi düzgün olmasın ve düzgünlüğü yukarıda bahsi geçen $(\max^p, \min^p, |\cdot|^p)$ terimlerden kaynaklansın. Bu durumda f amaç fonksiyonunun düzgünlüğünü bozan terimleri ile bu terimlere karşılık gelen düzgünleştirme fonksiyonları yer değiştirdiğinde f amaç fonksiyonunun düzgünleştirme fonksiyonu $\tilde{f}(x, \beta)$ elde edilmiş olur.

Buna göre (P) problemi

$$(P') \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+} \tilde{f}(x, \beta)$$

biçiminde yeniden ifade edilir. Burada $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu düzgündür. (P') problemi düzgün olduğu için yaygın olarak kullanılan gradyana dayalı yöntemler çözüm için kullanılabilir hale getirilmiş olur.

4.1.2. Global düzgünleştirme yaklaşımı

$0 < p \leq 1$ olmak üzere $q^p(t) = \max\{t, 0\}^p$ fonksiyonu tanımlansın. Bu fonksiyon için global düzgünleştirme yaklaşımı $\beta > 0$ ve $pr > 1$ olacak biçimdeki $r > 1$ olmak üzere

$$\tilde{q}_r^p(t, \beta) = ((q^p(t))^r + \beta^r)^{\frac{1}{r}}$$

olarak elde edilmiştir.

Lemma 4.8. $0 < p \leq 1$ olmak üzere $\beta > 0$ ve $pr > 1$ olacak şekilde $r > 1$ olsun. Her $t \in \mathbb{R}$ için

$$0 < \tilde{q}_r^p(t, \beta) - q^p(t) \leq \beta$$

olur.

İspat. $r > 1$ ve $\beta > 0$ için

$$0 \leq \tilde{q}_r^p(t, \beta) - q^p(t) = \begin{cases} \beta, & t \leq 0 \\ (t^{pr} + \beta^r)^{\frac{1}{r}} - t^p, & t > 0 \end{cases}$$

elde edilir. $t \leq 0$ için $\tilde{q}_r^p(t, \beta) - q^p(t)$ fark fonksiyonu artandır ve $t \geq 0$ olduğu durumda $\tilde{q}_r^p(t, \beta) - q^p(t)$ fark fonksiyonu azalan bir fonksiyondur. Buradan $\tilde{q}_r^p(t, \beta) - q^p(t)$ fark fonksiyonu maksimum değeri $t = 0$ için elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Lemma 4.9. $\beta > 0$ sabit, $pr_1 > 1$ ve $pr_2 > 1$ olmak üzere $r_1 > r_2 > 1$ olsun. Bu durumda

$$\tilde{q}_{r_1}^p(t, \beta) \leq \tilde{q}_{r_2}^p(t, \beta)$$

elde edilir.

Sonuç 4.10. $\beta \rightarrow 0$ ve $r \rightarrow \infty$ olsun. Bu durumda $\tilde{q}_r^p(t, \beta)$ düzgünleştirme fonksiyonu $q^p(t)$ fonksiyonuna yaklaşıır.

Not 4.3 ve 4.4 de verilen önermeler bu düzgünleştirme yaklaşımı için de geçerlidir.

Bölüm 4.1.1 de belirtildiği gibi $i = 1, 2, \dots, m$ için $g_i(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları sürekli türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere $\theta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $0 < p_i \leq 1$ olmak üzere $\theta(x) = (\sum_{i=1}^m q^{p_i}(g_i(x)))$ biçiminde tanımlansın. Bu fonksiyonun düzgünleştirme fonksiyonu $\tilde{\theta}_r(x, \beta) = (\sum_{i=1}^m \tilde{q}_r^{p_i}(g_i(x), \beta))$ için aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Lemma 4.11. $x \in \mathbb{R}^n$ ve $\beta > 0$ olmak üzere

$$0 \leq \tilde{\theta}_r(x, \beta) - \theta(x) \leq m\beta$$

elde edilir.

İspat. Lemma 4.8 den

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}(x, \beta) - \theta(x) &= \sum_{i=1}^m \tilde{q}_r^{p_i}(g_i(x), \beta) - \sum_{i=1}^m q_{p_i}(g_i(x)) \\ &= \sum_{i=1}^m (\tilde{q}_r^{p_i}(g_i(x), \beta) - q_r^{p_i}(g_i(x))) \\ &\leq m\beta\end{aligned}$$

olduğu görülür. □

Sonuç 4.12. $\beta \rightarrow 0$ için $\tilde{\theta}_r(x, \beta)$ fonksiyonu $\theta(x)$ fonksiyonuna yaklaşıır.

İspat. Lemma 4.11 den

$$0 \leq \tilde{\theta}_r(x, \beta) - \theta(x) \leq m\beta$$

elde edilir. $\beta \rightarrow 0$ iken $\tilde{\theta}(x, \beta) - \theta(x) \rightarrow 0$ sonucuna ulaşılır. □

Düzgünleştirme fonksiyonu ve orjinal fonksiyon arasındaki ilişkiyi, parametre değişikliklerine bağlı olarak değişimi Şekil 4.2 (a), (b), (c) ve (d) ile gösterilmiştir.

Teorem 4.13. $h, \mathbb{R}_+$ üzerinde tanımlı artan (veya azalan) lineer bir fonksiyon olsun. x^* noktası $h(\theta(x))$ fonksiyonunun bir lokal minimumlaştırıcısı ve $\bar{x}$ noktası $h(\tilde{\theta}(x, \beta))$ fonksiyonunun bir lokal minimumlaştırıcısı olsun. Bu durumda $K > 0$ sabit olmak üzere

$$|h(\tilde{\theta}(\bar{x}, \beta)) - h(\theta(x^*))| \leq Km\beta$$

elde edilir. Ayrıca, $\beta \rightarrow 0$ iken $h(\tilde{\theta}(\bar{x}, \beta)) \rightarrow h(\theta(x^*))$ olur.

İspat. h artan fonksiyon olduğundan

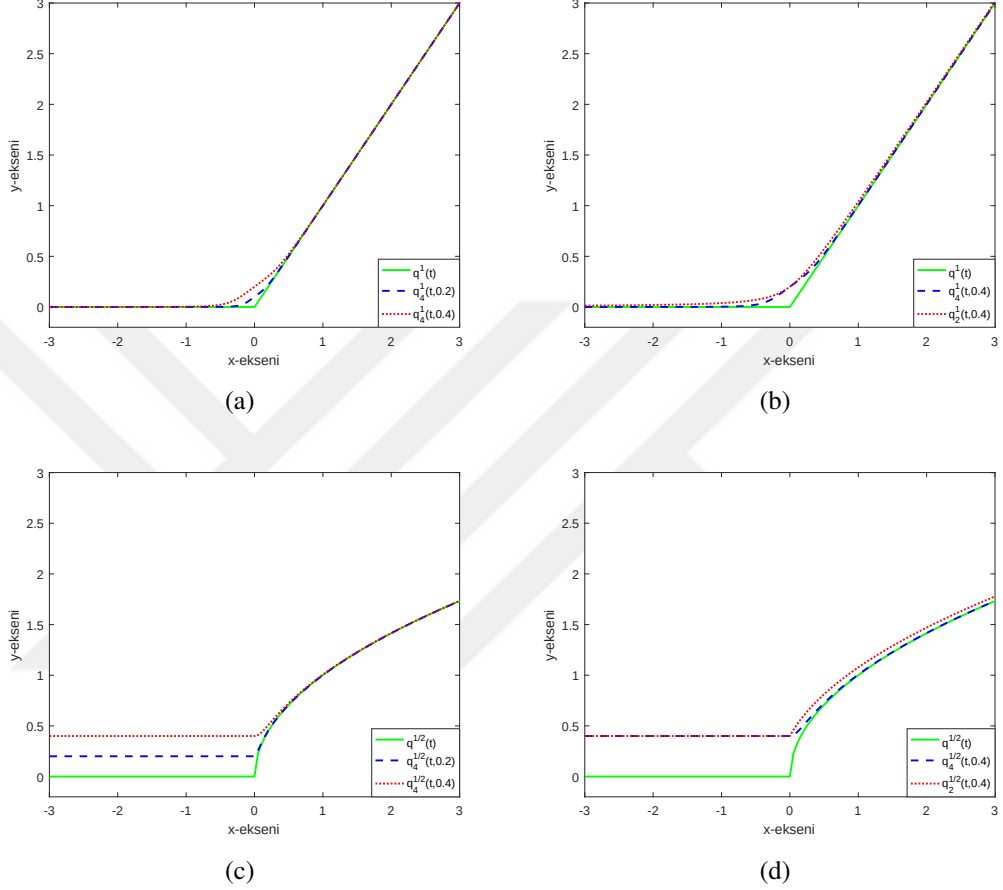
$$\begin{aligned}h(\tilde{\theta}(\bar{x}, \beta)) - h(\theta(\bar{x})) &\leq h(\tilde{\theta}(\bar{x}, \beta)) - h(\theta(x^*)) \\ &\leq h(\tilde{\theta}(x^*, \beta)) - h(\theta(x^*))\end{aligned}$$

elde edilir. h fonksiyonu lineer olduğundan $K > 0$ için

$$h(\tilde{\theta}(x^*, \beta)) - h(\theta(x^*)) = K(\tilde{\theta}(x^*, \beta) - \theta(x^*))$$

$$\leq K \left(\sum_{i=1}^m \mu_{p_i}(0, \beta) \right)$$

bulunur. h azalan fonksiyon olduğunda sonuç benzer şekilde ispatlanır. $\square$



Şekil 4.2. (a) $q^1(t) = \max\{t, 0\}$, $\tilde{q}_4^1(t, 0.3)$ ve $\tilde{q}_4^1(t, 0.8)$ fonksiyonunun (b) $q^1(t)$, $\tilde{q}_4^1(t, 0.5)$ ve $\tilde{q}_{1.5}^1(t, 0.5)$ fonksiyonunun (c) $q^{1/2}(t)$, $\tilde{q}_4^{1/2}(t, 0.1)$ ve $\tilde{q}_4^{1/2}(t, 0.4)$ fonksiyonunun (d) $q^{1/2}(t)$, $\tilde{q}_8^{1/2}(t, 0.5)$ ve $\tilde{q}_4^{1/2}(t, 0.5)$ fonksiyonunun grafiğidir.

4.2. Parçalı Düzgün Fonksiyonlar için Düzgünleştirme Yaklaşımları

Tanım 4.14. $f : (\emptyset \neq \Omega) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu Ω üzerinde sürekli ve

$$f(x) = f_i(x), \quad \forall x \in A_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

olacak şekilde $i = 1, 2, \dots, m$ için $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir fonksiyon ailesi ve bir $A_i \subset \Omega$ ($\cup_{i=1}^m A_i = \Omega$ ve $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \emptyset$) alt küme ailesi varsa f fonksiyonuna parçalı türevlenebilir fonksiyon adı verilir.

Yukarıdaki tanıma göre parçalı türevlenebilir fonksiyon

$$f(x) = \sum_{i=1}^m f_i(x) \chi_{A_i}(x) = \sum_{i=1}^m f(x) \chi_{A_i}(x) \quad (4.2)$$

biçiminde yazılabilir. Burada $\chi_{A_i}(x)$, A_i kümesinin karakteristik fonksiyonudur ve

$$\chi_{A_i}(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_i \\ 0, & x \notin A_i \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 3.18 ve Tanım 4.14 karşılaştırıldığında bu iki tanımın denk olduğu görülür. (4.2) denklemini dikkate alındığında $i = 1, 2, \dots, m$ için f_i fonksiyonları Ω üzerinde türevlenebilir olmasına rağmen f fonksiyonu Ω üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olmadığı görülür. Aslında f fonksiyonunun türevlenebilir (düzgün) olmamasının nedeni $\chi_{A_i}(x)$, $i = 1, 2, \dots, m$ karakteristik fonksiyonların türevlenebilir olmamasıdır. Bu durumda $i = 1, 2, \dots, m$ için $\chi_{A_i}(x)$ fonksiyonları türevlenebilir hale getirilirse, f fonksiyonu da türevlenebilir hale getirilmiş olur.

Reel sayılar kümesinin $\tau = (a_0 = -\infty < a_1 < \dots < a_{m-1} < a_m = \infty)$ parçalanışını göz önünde bulunduralım. r ve k negatif olmayan tam sayılar olmak üzere f fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde $r \leq k$ için C^r sınıfından ve $0 \leq i \leq m-1$ için her bir (a_i, a_{i+1}) aralığı üzerinde C^{k_i} sınıfından bir fonksiyon olsun (yani, f , $r = \min_i k_i$ için C^r sınıfından bir fonksiyon olsun). Bu aşamada f fonksiyonuna çok yakın fakat C^k sınıfından bir fonksiyon inşa edilmesi amaçlanmaktadır. Bu problem analiz edilirse $r = 0$ durumu için f fonksiyonu sadece sürekli bir fonksiyon olacaktır. Bu durumda, f fonksiyonunun düzgünleştirilmesi bu bölümün başlıca amacı olacaktır. Eğer $r \geq 1$ ise problem f fonksiyonunun diferansiyellenebilirlik mertebesinin artırılması olacaktır.

Yukarıdaki açıklamalardan hareketle $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ parçalı düzgün fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in (-\infty, a_1] \\ f_2(x), & x \in (a_1, a_2] \\ \vdots \\ f_m(x), & x \in (a_{m-1}, \infty) \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Burada $i = 1, 2, \dots, m$ için $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $k \geq 1$ için C^k sınıfından $a_1 < a_2 < \dots < a_{m-1}$ reel sayılardır ve f fonksiyonu $a_i, i = 1, 2, \dots, m$ noktalarında düzgün olmasın. Kolaylık açısından f fonksiyonunu

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in (-\infty, s_0] \\ f_2(x), & x \in (s_0, \infty) \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. Tanım 4.14'den faydalananarak f fonksiyonu

$$f(x) = f_1(x)\chi_{(-\infty, s_0]}(x) + f_2(x)\chi_{(s_0, \infty)}(x) \quad (4.3)$$

biçiminde yazılır.

4.2.1. Tek değişkenli parçalı düzgün fonksiyonlar için lokal düzgünleştirme yaklaşımları

Bu bölümde s_0 noktasının bir komşuluğunda karakteristik fonksiyonun parçaları arasında düzgün geçişi sağlayacak fonksiyonlar incelenecektir. İlk olarak, $\chi_{(-\infty, s_0]}(x)$ karakteristik fonksiyonunu ele alalım. Bu parçalı fonksiyonun parçaları arasında düzgün geçişi sağlamak amacıyla $\varepsilon > 0$ sayısı için $s_0 - \varepsilon$ ve $s_0 + \varepsilon$ noktalarında $\chi_{(-\infty, s_0]}(x)$ fonksiyonuyla aynı fonksiyon değeri ve türev değerine sahip düzgünleştirme fonksiyonu inşa edilecektir.

Bezier eğrileri yardımıyla elde edilen düzgünleştirme yaklaşımı

İlk olarak karakteristik fonksiyonun parçalarının birbirine bir Bezier eğrisi kullanılarak bağlanması amaçlanmıştır. Bu fikre dayanarak elde edilen geçiş fonksiyonları $x \in$

$[s_0 - \varepsilon, s_0]$ için

$$q_1(x, \varepsilon) = -\frac{(x - s_0)^2 + 2\varepsilon(x - s_0) - \varepsilon^2}{(2\varepsilon^2)}$$

ve $x \in [s_0, s_0 + \varepsilon]$ için

$$q_2(x, \varepsilon) = \frac{((x - s_0)/\varepsilon - 1)^2}{2}$$

biçiminde tanımlanır. Böylece $\chi_{(-\infty, s_0]}(x)$ karakteristik fonksiyonunun düzgünleştirme fonksiyonu

$$\chi_{(-\infty, s_0]}^b(x, \beta) = \begin{cases} 1, & x < s_0 - \varepsilon \\ q_1(x, \varepsilon), & s_0 - \varepsilon \leq x \leq s_0 \\ q_2(x, \varepsilon), & s_0 \leq x \leq s_0 + \varepsilon \\ 0, & x > s_0 + \varepsilon \end{cases} \quad (4.4)$$

biçiminde tanımlanır. Bu sonuçtan faydalanarak $\chi_{[s_0, \infty)}(x)$ karakteristik fonksiyonu için düzgünleştirme fonksiyonu

$$\chi_{[s_0, \infty)}^b(x, \beta) = \begin{cases} 0, & x < s_0 - \varepsilon, \\ 1 - q_1(x, \varepsilon), & s_0 - \varepsilon \leq x \leq s_0 \\ 1 - q_2(x, \varepsilon), & s_0 \leq x \leq s_0 + \varepsilon \\ 1, & x > s_0 + \varepsilon \end{cases} \quad (4.5)$$

biçiminde elde edilir.

f fonksiyonunun (4.3) şeklindeki ifadesinde karakterisitik fonksiyonlar $\chi_{(-\infty, s_0]}(x)$ ve $\chi_{[s_0, \infty)}(x)$ fonksiyonlarının yerine (4.4) ve (4.5) eşitlikleri ile verilen fonksiyonlar kullanılırsa, f fonksiyonunun düzgünleştirme fonksiyonu elde edilmiş olur. Bu fonksiyon $f^b(x, \varepsilon)$ ile gösterilir ve

$$f^b(x, \varepsilon) = f_1(x)\chi_{(-\infty, s_0]}^b(x, \varepsilon) + f_2(x)\chi_{[s_0, \infty)}^b(x, \varepsilon) \quad (4.6)$$

biçiminde ifade edilir. Eğer f_1 ve f_2 fonksiyonları C^1 sınıfına ait ise $f^b(x, \varepsilon)$ fonksiyonu C^1 sınıfına aittir.

Lemma 4.15. $A = [s_0, \infty)$ (veya $A = (-\infty, s_0)$) olmak üzere

$$(i.) \quad 1 - \chi_A^b(x, \varepsilon) = \chi_{A^c}^b(x),$$

(ii.) $\chi_A^b(x, \varepsilon)$ fonksiyonu C^1 sınıfındandır,

(iii.) $\varepsilon \rightarrow 0$ iken $\chi_A^b(x, \varepsilon) \rightarrow \chi_A(x)$ olur.

İspat.

(i.) (4.4) ve (4.5) ifadelerinden görülmektedir.

(ii.) İspatı açıktır.

(iii.) $\varepsilon \rightarrow 0$ iken $\chi_A^{l_k}(x, \varepsilon) \rightarrow \chi_A(x)$ olur.

□

Lemma 4.16. $A = [s_0, \infty)$ (veya $A = (-\infty, s_0)$) olmak üzere $\chi_A(x)$, A kümesinin karakteristik fonksiyonu ve $\chi_A^b(x, \varepsilon)$ bu karakteristik fonksiyonun (4.4) denkleminde tanımlandığı gibi düzgünleştirme fonksiyonu olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$|\chi_A^b(x, \varepsilon) - \chi_A(x)| \leq \frac{1}{2} \quad (4.7)$$

olur.

İspat. $\varepsilon > 0$ ve $A = [s_0, \infty)$ olsun. $[s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon]$ kümesinin dışında $\chi_A^b(x, \varepsilon)$ ve $\chi_A(x)$ fonksiyonları birbirine eşittir. Bundan dolayı $x \in [s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon]$ aralığında eşitsizliğin sağlandığını göstermek yeterli olacaktır. $x \in [s_0 - \varepsilon, 0]$ için

$$|\chi_A^b(x, \varepsilon) - \chi_A(x)| = |1 - q_1(x, \varepsilon)| \leq \frac{1}{2}$$

ve $x \in [0, s_0 + \varepsilon]$ için

$$|\chi_A^b(x, \varepsilon) - \chi_A(x)| = |q_2(x, \varepsilon)| \leq \frac{1}{2}$$

elde edilir. Böylece (4.7) eşitsizliği elde edilmiş olur.

□

Teorem 4.17. f_1 ve f_2 fonksiyonları C^1 sınıfına ait olsun. f fonksiyonu (4.3) denkleminde tanımlanan sürekli ve parçalı düzgün fonksiyon olmak üzere (4.6) ile

tanımlanan $f^b(x, \varepsilon)$ düzgünleştirme fonksiyonu $\varepsilon > 0$ için C^1 sınıfındandır. Aynı zamanda $\varepsilon \rightarrow 0$ iken $f^b(x, \varepsilon) \rightarrow f(x)$ 'dir.

İspat. $\varepsilon > 0$ için $\chi^b(-\infty, s_0](x, \varepsilon)$ ve $\chi^b(s_0, \infty)(x, \varepsilon)$ karakteristik fonksiyonun düzgünleştirme fonksiyonları C^1 sınıfına aittir. f_1 ve f_2 fonksiyonları C^1 sınıfına ait olduğundan $f_1(x)\chi^b(-\infty, s_0](x, \varepsilon)$ ve $f_2(x)\chi^b(s_0, \infty)(x, \varepsilon)$ çarpım fonksiyonları C^1 sınıfına aittir. (4.6) ifadesinden $f^b(x, \varepsilon)$ fonksiyonu C^1 sınıfına ait olduğu görülür. $\square$

Polinom fonksiyonlar kullanılarak elde edilen düzgünleştirme yaklaşımı

Burada karakteristik fonksiyonun birbirinden kopuk parçaları arasına bir polinom fonksiyonun geçiş fonksiyonu olarak kullanılarak karakteristik fonksiyonun düzgünleştirme fonksiyonunun elde edilmesi amaçlanmıştır. Bu fikre dayanarak elde edilen geçiş fonksiyonu $x \in [s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon]$ olmak üzere

$$P_1(x - s_0) = \frac{1}{4\varepsilon^3}(x - s_0)^3 - \frac{3}{4\varepsilon}(x - s_0) + \frac{1}{2}$$

biçiminde tanımlanır. Böylece $\chi_{(-\infty, s_0]}(x)$ karakteristik fonksiyonunun düzgünleştirme fonksiyonu

$$\chi_{(-\infty, s_0]}^{l_1}(x, \varepsilon) = \begin{cases} 1, & x \in (-\infty, s_0 - \varepsilon) \\ P_1(x - s_0), & x \in [s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon] \\ 0, & x \in (s_0 + \varepsilon, \infty) \end{cases} \quad (4.8)$$

biçiminde tanımlanır. Bu sonuçtan faydalanarak $\chi_{[s_0, \infty)}(x)$ karakteristik fonksiyonu için düzgünleştirme fonksiyonu

$$\chi_{[s_0, \infty)}^{l_2}(x, \varepsilon) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, s_0 - \varepsilon) \\ P_1(-(x - s_0)), & x \in [s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon] \\ 1, & x \in (s_0 + \varepsilon, \infty) \end{cases} \quad (4.9)$$

biçiminde elde edilir. f fonksiyonunun (4.3) şeklindeki ifadesinde $\chi_{(-\infty, s_0]}(x)$ ve $\chi_{[s_0, \infty)}(x)$ karakteristik fonksiyonlarının yerine (4.8) ve (4.9) eşitlikleri ile verilen fonksiyonlar kullanılırsa, f fonksiyonunun düzgünleştirme fonksiyonu elde edilmiş

olur. Bu fonksiyon $f^{l_1}(x, \varepsilon)$ ile gösterilir ve

$$f^{l_1}(x, \varepsilon) = f_1(x)\chi_{(-\infty, s_0]}^{l_1}(x, \varepsilon) + f_2(x)\chi_{(s_0, \infty)}^{l_1}(x, \varepsilon)$$

biçiminde ifade edilir. Eğer f_1 ve f_2 fonksiyonları $k \geq 1$ için C^k sınıfına ait ise $f^{l_1}(\cdot, \varepsilon)$ fonksiyonu C^1 sınıfına aittir.

Eğer fonksiyonun C^2 sınıfına ait olması arzu ediliyorsa, karakteristik fonksiyon için geçiş fonksiyonunu yeniden inşa etmek gerekir. $\chi_{(-\infty, s_0]}(x)$ ve $\chi_{(s_0, \infty)}(x)$ fonksiyonlarının düzgünleştirme fonksiyonlarında $P_2(x - s_0)$ ve $P_2(-(x - s_0))$ geçiş fonksiyonları kullanılırsa istenilen elde edilmiş olur. Burada

$$P_2(x - x_0) = \frac{3}{16\varepsilon^5}(x - x_0)^5 - \frac{10}{16\varepsilon^3}(x - x_0)^3 + \frac{15}{16\varepsilon}(x - x_0) + \frac{1}{2}$$

olarak tanımlanır. Genel olarak problemin çözümü için amaç fonksiyonunun C^1 veya C^2 sınıfından olması yeterli olur. Eğer fonksiyonun $k \geq 3$ için C^k sınıfına ait olması isteniyorsa, geçiş fonksiyonu olarak P_k fonksiyonu $\chi_{(-\infty, s_0]}^{l_k}(x, \varepsilon)$ ve $\chi_{(s_0, \infty)}^{l_k}(x, \varepsilon)$ karakteristik fonksiyonlarının düzgünleştirme fonksiyonu olarak kullanılması gerekir. Elde edilen

$$f^{l_k}(x, \varepsilon) = f_1(x)\chi_{(-\infty, s_0]}^{l_k}(x, \varepsilon) + f_2(x)\chi_{(s_0, \infty)}^{l_k}(x, \varepsilon) \quad (4.10)$$

fonksiyonu C^k sınıfından olacaktır.

Karakteristik fonksiyonların düzgünleştirme fonksiyonları ile ilgili sonuçlar aşağıda sunulmuştur.

Lemma 4.18. $k \geq 1$ pozitif tam sayı ve $A = [s_0, \infty)$ (veya $A = (-\infty, s_0)$) olmak üzere

- (i.) $1 - \chi_A^{l_k}(x, \varepsilon) = \chi_{A^c}^{l_k}(x, \varepsilon)$,
- (ii.) $\chi_A^{l_k}(x, \varepsilon)$ fonksiyonu C^k sınıfındandır,
- (iii.) $\varepsilon \rightarrow 0$ iken $\chi_A^{l_k}(x, \varepsilon) \rightarrow \chi_A(x)$ olur.

İspat.

(i.) $\varepsilon > 0$ ve $A = [s_0, \infty)$ olmak üzere

$$1 - \chi_A^{l_k}(x, \varepsilon) = \begin{cases} 1, & x \in (-\infty, s_0 - \varepsilon) \\ 1 - P_k(x - s_0), & x \in [s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon] \\ 0, & x \in (s_0 + \varepsilon, \infty) \end{cases}$$

elde edilir. $1 - P_k(x - s_0) = P_k(-(x - s_0))$ olduğundan istenilen eşitlik elde edilir.

(ii.) İspatı açıktır.

(iii.) $\varepsilon \rightarrow 0$ iken $\chi_A^{l_k}(x, \varepsilon) \rightarrow \chi_A(x)$ olur.

□

Lemma 4.19. $A = [s_0, \infty)$ (veya $A = (-\infty, s_0)$) olmak üzere $\chi_A(x)$ A kümesinin karakteristik fonksiyonu ve $\chi_A^{l_k}(x, \varepsilon)$ bu karakteristik fonksiyonun (4.8) denkleminde tanımlandığı gibi düzgünleştirme fonksiyonu olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$|\chi_A^{l_k}(x, \varepsilon) - \chi_A(x)| \leq \frac{1}{2} \quad (4.11)$$

olur.

İspat. $\varepsilon > 0$ ve $A = [s_0, \infty)$ olsun. $[s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon]$ kümesinin dışında $\chi_A^{l_k}(x, \varepsilon)$ ve $\chi_A(x)$ fonksiyonları birbirine eşittir. Bu yüzden $x \in [s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon]$ aralığı üzerinde eşitsizliğin sağlandığını göstermek yeterli olacaktır. $x \in [s_0 - \varepsilon, 0]$ için

$$|\chi_A^{l_k}(x, \varepsilon) - \chi_A(x)| = |P_k(x - s_0)| \leq \frac{1}{2}$$

ve $x \in [0, s_0 + \varepsilon]$ için

$$|\chi_A^{l_k}(x, \varepsilon) - \chi_A(x)| = |P_k(x - s_0) - 1| \leq \frac{1}{2}$$

olur. Böylece (4.11) eşitsizliği elde edilmiş olur. □

Teorem 4.20. f_1 ve f_2 fonksiyonları C^k sınıfına ait olsun. f fonksiyonu (4.3) denkleminde tanımlanan sürekli ve parçalı düzgün fonksiyon olmak üzere (4.10) ile

tanımlanan $f^{l_k}(x, \varepsilon)$ fonksiyonu $\varepsilon > 0$ için C^k sınıfındandır. Ayrıca, $\varepsilon \rightarrow 0$ iken $f^{l_k}(x, \varepsilon) \rightarrow f(x)$ 'dir.

İspat. $k \geq 1$ ve $\varepsilon > 0$ için $\chi^{l_k}(-\infty, s_0](x, \varepsilon)$ ve $\chi^{l_k}(s_0, \infty)(x, \varepsilon)$ karakteristik fonksiyonun düzgünleştirme fonksiyonları C^k sınıfına aittir. f_1 ve f_2 fonksiyonları C^k sınıfına ait olduğundan $f_1(x)\chi^{l_k}(-\infty, s_0](x, \varepsilon)$ ve $f_2(x)\chi^{l_k}(s_0, \infty)(x, \varepsilon)$ çarpım fonksiyonları C^k sınıfına aittir. (4.2) ifadesinden $f^{l_k}(x, \varepsilon)$ fonksiyonu C^k sınıfına ait olduğu görülür. $\square$

Teorem 4.20 den $0 < r < k$ için f fonksiyonu C^r sınıfından ise $f^{l_p}(x, \varepsilon)$ fonksiyonu $p = k - r$ ve her $\varepsilon > 0$ için C^k sınıfına aittir.

Teorem 4.21. $f(x)$ ve $f^{l_k}(x, \varepsilon)$ fonksiyonları sırasıyla (4.3) ve (4.10) ifadelerindeki gibi tanımlansın. Her $\varepsilon > 0$ ve $x \in \mathbb{R}$ için

$$|f^{l_k}(x, \varepsilon) - f(x)| \leq \frac{1}{2}|f_1(x) - f_2(x)| \quad (4.12)$$

olur.

İspat. Herhangi bir ε ve $x \notin I = [s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon]$ için $f^{l_k}(x, \varepsilon) = f(x)$. Dolayısıyla I üzerinde (4.12) eşitsizliğinin sağlandığını göstermek yeterli olacaktır.

$x \in [s_0 - \varepsilon, s_0]$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} |f^{l_k}(x, \varepsilon) - f(x)| &= \left| f_1(x) \left(\chi_{(-\infty, s_0]}^{l_k}(x, \varepsilon) - \chi_{(-\infty, s_0]}(x) \right) \right. \\ &\quad \left. + f_2(x) \left(\chi_{(s_0, \infty)}^{l_k}(x, \varepsilon) - \chi_{(s_0, \infty)}(x) \right) \right| \\ &= \left| f_1(x) \left(\chi_{(-\infty, s_0]}^{l_k}(x, \varepsilon) - 1 \right) + f_2(x) \chi_{(s_0, \infty)}^{l_k}(x, \varepsilon) \right| \\ &= \left| -f_1(x) \chi_{(s_0, \infty)}^{l_k}(x, \varepsilon) + f_2(x) \chi_{(s_0, \infty)}^{l_k}(x, \varepsilon) \right| \end{aligned}$$

elde edilir. $[s_0 - \varepsilon, s_0]$ aralığında $\chi_{(s_0, \infty)}^{l_k}(x, \varepsilon)$ fonksiyonu en fazla $\frac{1}{2}$ değerini aldığından

$$|f^{l_k}(x, \varepsilon) - f(x)| \leq \frac{1}{2}|f_2(x) - f_1(x)| \quad (4.13)$$

ifadesine ulaşılır. Benzer şekilde $x \in [s_0, s_0 + \varepsilon]$ için

$$|f^{l_k}(x, \varepsilon) - f(x)| = \left| f_1(x) \chi_{(-\infty, s_0]}^{l_k}(x, \varepsilon) + f_2(x) \left(\chi_{(s_0, \infty)}^{l_k}(x, \varepsilon) - 1 \right) \right|$$

$$= \left| f_1(x) \chi_{(-\infty, s_0]}^{l_k}(x, \varepsilon) - f_2(x) \chi_{(-\infty, s_0]}^{l_k}(x, \varepsilon) \right|$$

bulunur ve

$$|f^{l_k}(x, \varepsilon) - f(x)| \leq \frac{1}{2} |f_1(x) - f_2(x)| \quad (4.14)$$

ifadesi elde edilir. (4.13) ve (4.14) den I üzerinde (4.12) eşitsizliği elde edilir. $\square$

4.2.2. Tek değişkenli parçalı düzgün fonksiyonlar için global düzgünleştirme yaklaşımı

Bu bölümde tek değişkenli fonksiyonlar için lokal düzgünleştirme yaklaşımına alternatif olarak global düzgünleştirme yaklaşımı geliştirilecektir. Öncelikle $\chi_{(-\infty, s_0]}(x)$ fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyonun düzgünleştirme fonksiyonu $\varepsilon > 0$ için

$$\chi_{(-\infty, s_0]}^g(x, \varepsilon) = \frac{\arctan\left(-\frac{x-s_0}{\varepsilon}\right) + \frac{\pi}{2}}{\pi} \quad (4.15)$$

olarak elde edilmiştir. Benzer şekilde $\chi_{(-\infty, s_0]}(x)$ fonksiyonu için düzgünleştirme fonksiyonu

$$\chi_{(-\infty, s_0]}^g(x, \varepsilon) = \frac{\arctan\left(\frac{x-s_0}{\varepsilon}\right) + \frac{\pi}{2}}{\pi} \quad (4.16)$$

olarak elde edilmiştir.

Bu karakteristik fonksiyonların düzgünleştirme fonksiyonları f fonksiyonunun (4.1) formülünde yer alan karakteristik fonksiyonlar ile yer değiştirilirse f fonksiyonunun düzgünleştirme fonksiyonu

$$f^g(x, \varepsilon) = f_1(x) \chi_{(-\infty, s_0]}^g(x, \varepsilon) + f_2(x) \chi_{(s_0, \infty)}^g(x, \varepsilon) \quad (4.17)$$

biçiminde elde edilir. Eğer $f_1 \in C^{k_1}$, $f_2 \in C^{k_2}$ ve $k = \min\{k_1, k_2\}$ ise $f^g(x, \varepsilon)$ fonksiyonu C^k sınıfına ait olur.

Lemma 4.22. $k \geq 1$ pozitif tam sayı ve $A = [s_0, \infty)$ (veya $A = (-\infty, s_0)$) olmak üzere

$$(i.) \quad 1 - \chi_A^g(x, \varepsilon) = \chi_{A^c}^g(x, \varepsilon),$$

(ii.) $\chi_A^g(x, \varepsilon)$ fonksiyonu C^k sınıfındandır,

(iii.) $\varepsilon \rightarrow 0$ iken $\chi_A^g(x, \varepsilon) \rightarrow \chi_A(x)$ olur.

İspat.

(i.) $\varepsilon > 0$ ve $A = [s_0, \infty)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} 1 - \chi_A^g(x, \varepsilon) &= 1 - \frac{\arctan\left(-\frac{x-s_0}{\varepsilon}\right) + \frac{\pi}{2}}{\pi} \\ &= \frac{\arctan\left(\frac{x-s_0}{\varepsilon}\right) + \frac{\pi}{2}}{\pi} \\ &= \chi_{A^c}^g(x, \varepsilon) \end{aligned}$$

elde edilir.

(ii.) İspatı açıktır.

(iii.) $\varepsilon \rightarrow 0$ iken $\chi_A^g(x, \varepsilon) \rightarrow \chi_A(x)$ olduğu görülür.

□

Lemma 4.23. $A = [s_0, \infty)$ (veya $A = (-\infty, s_0)$) olmak üzere $\chi_A(x)$ A kümesinin karakteristik fonksiyonu ve $\chi_A^g(x, \varepsilon)$ bu karakteristik fonksiyonun (4.15) denkleminde tanımlandığı gibi düzgünleştirme fonksiyonu olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$|\chi_A^g(x, \varepsilon) - \chi_A(x)| \leq \frac{1}{2} \quad (4.18)$$

olur.

İspat. $\varepsilon > 0$ ve $A = [s_0, \infty)$ olsun. $x \in [s_0 - \varepsilon, 0]$ için

$$|\chi_A^g(x, \varepsilon) - \chi_A(x)| = \left| \frac{\arctan\left(-\frac{x-s_0}{\varepsilon}\right) + \frac{\pi}{2}}{\pi} \right| \leq \frac{1}{2}$$

ve $x \in [0, a + \varepsilon]$ için

$$|\chi_A^g(x, \varepsilon) - \chi_A(x)| = \left| \frac{\arctan\left(-\frac{x-s_0}{\varepsilon}\right) + \frac{\pi}{2}}{\pi} - 1 \right| \leq \frac{1}{2}$$

bulunur. Böylece (4.18) eşitsizliği elde edilmiş olur. $\square$

Teorem 4.24. f_1 ve f_2 fonksiyonları C^k sınıfına ait olsun. f fonksiyonu (4.3) denkleminde tanımlanan sürekli ve parçalı düzgün fonksiyon olmak üzere (4.17) ile tanımlanan $f^g(x, \varepsilon)$ fonksiyonu $\varepsilon > 0$ için C^k sınıfındandır. Buna ek olarak $\varepsilon \rightarrow 0$ iken $f^{l_k}(x, \varepsilon) \rightarrow f(x)$ 'dir.

İspat. $\varepsilon > 0$ için $\chi^g(-\infty, s_0](x, \varepsilon)$ ve $\chi^g(s_0, \infty)(x, \varepsilon)$ karakteristik fonksiyonunun düzgünleştirme fonksiyonları C^∞ sınıfına aittir. f_1 ve f_2 fonksiyonları C^k sınıfına ait olduğundan $f_1(x)\chi^g(-\infty, s_0](x, \varepsilon)$ ve $f_2(x)\chi^g_{(s_0, \infty)}(x, \varepsilon)$ çarpım fonksiyonları C^k sınıfına aittir. (4.17) ifadesinden $f^g(x, \varepsilon)$ fonksiyonunun C^k sınıfına ait olduğu görülür. $\square$

Teorem 4.25. $f(x)$ ve $f^g(x, \varepsilon)$ fonksiyonları sırasıyla (4.3) ve (4.17) ifadelerindeki gibi tanımlansın. Her $\varepsilon > 0$ ve $x \in \mathbb{R}$ için

$$|f^g(x, \varepsilon) - f(x)| \leq \frac{1}{2}|f_1(x) - f_2(x)| \quad (4.19)$$

olur.

İspat. $x \leq s_0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} |f^g(x, \varepsilon) - f(x)| &= \left| f_1(x) \left(\chi^g_{(-\infty, s_0]}(x, \varepsilon) - \chi_{(-\infty, s_0]}(x) \right) \right. \\ &\quad \left. + f_2(x) \left(\chi^g_{(s_0, \infty)}(x, \varepsilon) - \chi_{(s_0, \infty)}(x) \right) \right| \\ &= \left| f_1(x) \left(\chi^g_{(-\infty, s_0]}(x, \varepsilon) - 1 \right) + f_2(x) \chi^g_{(s_0, \infty)}(x, \varepsilon) \right| \\ &= \left| -f_1(x) \chi^g_{(s_0, \infty)}(x, \varepsilon) + f_2(x) \chi^g_{(s_0, \infty)}(x, \varepsilon) \right| \end{aligned}$$

elde edilir. $\chi^g_{(s_0, \infty)}$ fonksiyonu $(-\infty, s_0]$ aralığı üzerinde en fazla $\frac{1}{2}$ değerini alacağından

$$|f^g(x, \varepsilon) - f(x)| \leq \frac{1}{2}|f_2(x) - f_1(x)| \quad (4.20)$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde $x \geq s_0$ için

$$\begin{aligned} |f^g(x, \varepsilon) - f(x)| &= \left| f_1(x) \chi^g_{(-\infty, s_0]}(x, \varepsilon) + f_2(x) \left(\chi^g_{(s_0, \infty)}(x, \varepsilon) - 1 \right) \right| \\ &= \left| f_1(x) \chi^g_{(-\infty, s_0]}(x, \varepsilon) - f_2(x) \chi^g_{(-\infty, s_0]}(x, \varepsilon) \right| \end{aligned}$$

ve

$$|f^g(x, \varepsilon) - f(x)| \leq \frac{1}{2} |f_1(x) - f_2(x)| \quad (4.21)$$

elde edilir. (4.20) ve (4.21) ifadelerinden (4.19) eşitsizliği elde edilir. $\square$

Örnek 4.26. $f(x) = |x|$ fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

parçalı fonksiyon olarak ifade edilir. $f_1(x) = -x$ ve $f_2(x) = x$ parça fonksiyonları C^∞ olmasına rağmen f fonksiyonu düzgün olmayıp, sadece C^0 sınıfına aittir. $\varepsilon > 0$ için f fonksiyonunun lokal düzgünleştirme fonksiyonu

$$f^{l_1}(x, \varepsilon) = -x\chi_{(-\infty, 0]}^{l_1}(x, \varepsilon) + x\chi_{(0, \infty)}^{l_1}(x, \varepsilon)$$

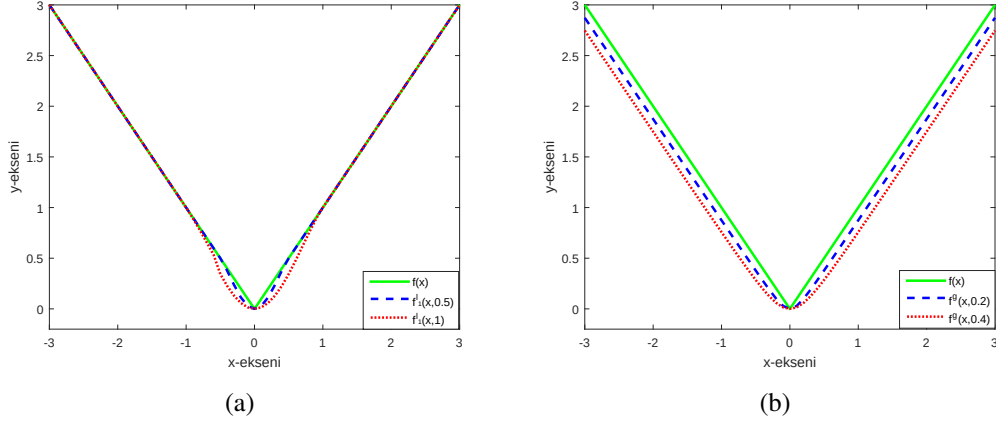
C^1 sınıfına aittir. Eğer $\chi^{l_1}(-\infty, 0](x, \varepsilon)$ ve $\chi^{l_1}(0, \infty)(x, \varepsilon)$ fonksiyonları yerine $k > 1$ için $\chi^{l_k}(-\infty, 0](x, \varepsilon)$ ve $\chi^{l_k}(0, \infty)(x, \varepsilon)$ fonksiyonları kullanılırsa f fonksiyonu C^k sınıfına ait bir fonksiyon olacaktır. Benzer şekilde global düzgünleştirme fonksiyonları kullanılarak elde edilen düzgünleştirme fonksiyonu

$$f^g(x, \varepsilon) = -x\chi_{(-\infty, 0]}^g(x, \varepsilon) + x\chi_{(0, \infty)}^g(x, \varepsilon)$$

C^∞ sınıfına aittir. Bunlara ek olarak bu iki düzgünleştirme fonksiyonu düzgünlüğün bozulduğu nokta olan $s_0 = 0$ noktasında f fonksiyonu ile aynı değere sahiptir. f ve lokal düzgünleştirme fonksiyonu $f^{l_1}(x, \varepsilon)$ Şekil 4.3 (a) da, f ve $f^g(x, \varepsilon)$ global düzgünleştirme fonksiyonu Şekil 4.3 (b) de sunulmuştur.

4.3. Çok Değişkenli Parçalı Düzgün Fonksiyonlar için Düzgünleştirme Yaklaşımları

Bu bölümde tek değişkenli fonksiyonlar için verilen düzgünleştirme yaklaşımları genişletilerek çok değişkenli parçalı düzgün fonksiyonların iki farklı formülü için düzgünleştirme yaklaşımları sunulacaktır.



Şekil 4.3. (a) $f(x)$ ve $f^1(x, \varepsilon)$ fonksiyonunun (b) $f(x)$ ve $f^2(x, \varepsilon)$ fonksiyonunun grafiğidir.

4.3.1. Dikdörtgensel bölgeler üzerinde tanımlı fonksiyonlar için düzgünleştirme yaklaşımları

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ parçalı düzgün bir fonksiyon ve $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ olsun. $i = 1, 2, \dots, n$ için $D_i = (-\infty, s_i]$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} f_{1,\dots,1}(x), & x \in D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n \\ f_{1,\dots,1,2}(x), & x \in D_1 \times D_2 \times \dots \times D_{n-1} \times D_n^c \\ f_{1,\dots,1,2,1}(x), & x \in D_1 \times \dots \times D_{n-2} \times D_{n-1}^c \times D_n \\ f_{1,\dots,1,2,2}(x), & x \in D_1 \times \dots \times D_{n-2} \times D_{n-1}^c \times D_n^c \\ \vdots \\ f_{2,\dots,2}(x), & x \in D_1^c \times \dots \times D_2^c \end{cases}$$

ile tanımlansın. f fonksiyonu önceki bölümlerde formüle edildiği gibi

$$\begin{aligned} f(x) = & f_{1,\dots,1}(x) \prod_{i=1}^n \chi_{D_i}(x_i) + f_{1,\dots,1,2}(x) \left(\prod_{i=1}^{n-1} \chi_{D_i}(x_i) \right) \chi_{D_n^c}(x_n) \quad (4.22) \\ & + f_{1,\dots,1,2,1}(x) \left(\prod_{i=1}^{n-2} \chi_{D_i}(x_i) \right) \chi_{D_{n-1}^c}(x_{n-1}) \chi_{D_n}(x_n) \\ & + f_{1,\dots,1,2,2}(x) \left(\prod_{i=1}^{n-2} \chi_{D_i}(x_i) \right) \chi_{D_{n-1}^c}(x_{n-1}) \chi_{D_n^c}(x_n) \\ & + \dots + f_{2^n}(x) \prod_{i=1}^n \chi_{D_i^c}(x_i) \end{aligned}$$

biçiminde yazılır. Burada, $x_i, x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ noktasının i -inci bileşeni olmak üzere

$$\chi_{D_i}(x_i) = \begin{cases} 1, & x_i \leq s_i \\ 0, & x_i > s_i \end{cases}$$

ve

$$\chi_{D_i^c}(x_i) = \begin{cases} 0, & x_i \leq s_i \\ 1, & x_i > s_i \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer parça fonksiyonlar C^k sınıfına ait ise (4.22) denklemindeki $\chi_{D_i}(x_i)$ ve $\chi_{D_i^c}(x_i)$ karakteristik fonksiyonları yerine karşılık gelen $k \geq 1$ için lokal düzgünleştirme fonksiyonları $\chi_{D_i}^{l_k}(x_i, \varepsilon)$ ve $\chi_{D_i^c}^{l_k}(x_i, \varepsilon)$ veya global düzgünleştirme fonksiyonları $\chi_{D_i}^g(x_i, \varepsilon)$ ve $\chi_{D_i^c}^g(x_i, \varepsilon)$ kullanılarak elde edilen fonksiyon, f fonksiyonunun düzgünleştirme fonksiyonu olacaktır. Böylelikle eldeki parçalı düzgün fonksiyon tüm tanım bölgesi üzerinde düzgün bir fonksiyon olacaktır.

Çoğu çalışmanın konusunu oluşturan $n = 2$ durumu için lokal ve global düzgünleştirme yaklaşımları aşağıda sunulmuştur.

Lokal düzgünleştirme yaklaşımı

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ parçalı düzgün bir fonksiyon ve $s = (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^n$ olsun. $i = 1, 2$ için $D_i = (-\infty, s_i]$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} f_{1,1}(x), & x \in D_1 \times D_2 \\ f_{1,2}(x), & x \in D_1 \times D_2^c \\ f_{2,1}(x), & x \in D_1^c \times D_2 \\ f_{2,2}(x), & x \in D_1^c \times D_2^c \end{cases} \quad (4.23)$$

olacak şekilde tanımlansın. $j_1, j_2 = 0, 1$ ve $0 \leq k_1 < k$ olmak üzere $f_{j_1, j_2} \in C^k$ ve $f \in C_1^k$ olsun. Buradan $f(x)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} f(x) = & f_{1,1}(x)\chi_{D_1}(x_1)\chi_{D_2}(x_2) + f_{1,2}(x)\chi_{D_1}(x_1)\chi_{D_2^c}(x_2) \\ & + f_{2,1}(x)\chi_{D_1^c}(x_1)\chi_{D_2}(x_2) + f_{2,2}(x)\chi_{D_1^c}(x_1)\chi_{D_2^c}(x_2) \end{aligned} \quad (4.24)$$

biçiminde tekrar ifade edilebilir. Bölüm 4.2 de verilen karakteristik fonksiyonlar için lokal düzgünleştirme yaklaşımlarından birisi kullanılarak $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} f^{lk}(x, \varepsilon) = & f_{1,1}(x) \chi_{D_1}^{lk}(x_1, \varepsilon) \chi_{D_2}^{lk}(x_2, \varepsilon) + f_{1,2}(x) \chi_{D_1}^{lk}(x_1, \varepsilon) \chi_{D_2^c}^{lk}(x_2, \varepsilon) \\ & + f_{2,1}(x) \chi_{D_1^c}^{lk}(x_1, \varepsilon) \chi_{D_2}^{lk}(x_2, \varepsilon) + f_{2,2}(x) \chi_{D_1}^{lk}(x_1, \varepsilon) \chi_{D_2^c}^{lk}(x_2, \varepsilon) \end{aligned} \quad (4.25)$$

şeklinde f fonksiyonunun düzgünleştirme fonksiyonu elde edilir.

Teorem 4.27. $i, j_1, j_2 = 1, 2$ ve $k \geq 1$ olmak üzere f_{j_1, j_2} fonksiyonları C^k sınıfına ait ve f fonksiyonu (4.24) gibi tanımlansın. f fonksiyonunun $\varepsilon > 0$ olmak üzere $f^{lk}(x, \varepsilon)$ düzgünleştirme fonksiyonu C^k sınıfına aittir. Buna ek olarak $\varepsilon \rightarrow 0$ iken $f^{lk}(x, \varepsilon) \rightarrow f(x)$ 'dir.

İspat. $k \geq 1$ ve $\varepsilon > 0$ için $\chi^{lk}(-\infty, s_0](x_i, \varepsilon)$ ve $\chi^{lk}(s_0, \infty)(x_i, \varepsilon)$ karakteristik fonksiyonun düzgünleştirme fonksiyonları C^k sınıfına aittir. Her bir $i = 1, 2, \dots, n$ için f_i fonksiyonları C^k sınıfına ait olduğundan $f_i(x) \prod_{i=1}^n \chi^{lk}(x_i, \varepsilon)$ fonksiyonları da C^k sınıfına aittir. (4.25) ifadesinden $f^{lk}(x, \varepsilon)$ fonksiyonunun C^k sınıfına ait olduğu görülür. $\square$

$j_1, j_2 = 1, 2$ için f_{j_1, j_2} fonksiyonları $0 \leq p_1 < p$ ve $0 \leq q_1 < q$ olmak üzere $C^{p, q}$ sınıfına ait ve f fonksiyonu C^{p_1, q_1} sınıfına ait olarak tanımlansın. Lokal düzgünleştirme yaklaşımını kullanarak f fonksiyonunun düzgünleştirme fonksiyonunu $C^{p, q}$ sınıfına ait olacak şekilde elde etmek mümkündür. Eğer karakteristik fonksiyonların yerine $p_2 = p - p_1$ olmak üzere $\chi^{lp_2}(x_1, \varepsilon)$ (veya $\chi^{lp}(x_1, \varepsilon)$) ve $q_2 = q - q_1$ olmak üzere $\chi^{lq_2}(x_2, \varepsilon)$ (veya χ^{lq}) düzgünleştirme fonksiyonları kullanılırsa elde edilen fonksiyon f^{lp_2, q_2} (veya $f^{lp, q}$) $C^{p, q}$ sınıfına ait olur.

Teorem 4.28. $f, \mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon ve $f^{lk}(x, \varepsilon)$ fonksiyonu (4.25) ifadesinde olduğu gibi tanımlansın. Bu durumda $\varepsilon > 0, x \in \mathbb{R}^n$ için

$$A(x) = \max_{t=0,1} \max_{\substack{k,l=0,1 \\ k+l=1}} |(f_{2-k,2-l} - f_{2-t,2-t})(x)|$$

ve

$$\begin{aligned}
B(x) &= \frac{1}{4} |(f_{1,1} + f_{2,2} - f_{1,2} - f_{2,1})(x)| \\
&\quad + \frac{1}{2} \max_{\substack{k,l=0,1 \\ k+l=1}} |(f_{2-k,2-l} - f_{1,1})(x)| \\
&\quad + \frac{1}{2} \max_{\substack{k,l=0,1 \\ k+l=1}} |(f_{2-l,2-k} - f_{2,2})(x)|
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$|f^{lk}(x, \varepsilon) - f(x)| \leq \max \{A(x), B(x)\} \quad (4.26)$$

olur.

İspat. Her bir $\varepsilon > 0$ için $S = ((s_1 - \varepsilon, s_1 + \varepsilon) \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times (s_2 - \varepsilon, s_2 + \varepsilon))$ bölgesi dışında $\tilde{f}(x, \varepsilon)$ ve $f(x)$ fonksiyonları birbirine eşittir. Böylelikle (4.26) eşitsizliğinin S üzerinde sağlandığını göstermek yeterli olacaktır. İspatı yaparken iki önemli durum göz önünde bulundurulacaktır.

Durum 1:

$x \in (s_1, s_1 + \varepsilon) \times (s_2 + \varepsilon, \infty)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
|f^{lk}(x, \varepsilon) - f(x)| &= \left| f_{1,1}(x) \chi_{D_1}^{lk}(x_1, \varepsilon) \chi_{D_2}^{lk}(x_2, \varepsilon) + f_{1,2}(x) \chi_{D_1}^{lk}(x_1, \varepsilon) \chi_{D_2^c}^{lk}(x_2, \varepsilon) \right. \\
&\quad + f_{2,1}(x) \chi_{D_1^c}^{lk}(x_1, \varepsilon) \chi_{D_2}^{lk}(x_2, \varepsilon) + f_{2,2}(x) \chi_{D_1}^{lk}(x_1, \varepsilon) \chi_{D_2^c}^{lk}(x_2, \varepsilon) \\
&\quad - f_{1,1}(x) \chi_{D_1}(x_1) \chi_{D_2}(x_2) + f_{1,2}(x) \chi_{D_1}(x_1) \chi_{D_2^c}(x_2) \\
&\quad \left. + f_{2,1}(x) \chi_{D_1^c}(x_1) \chi_{D_2}(x_2) + f_{2,2}(x) \chi_{D_1}(x_1) \chi_{D_2^c}(x_2) \right| \\
&= \left| f_{1,1}(x) \left(\chi_{D_1}^{lk}(x, \varepsilon) - 1 \right) + f_{2,1}(x) \chi_{D_1^c}^{lk}(x, \varepsilon) \right|
\end{aligned}$$

elde edilir. $\tilde{\chi}_{D_1}(x, \varepsilon) - 1 = -\tilde{\chi}_{D_1^c}(x, \varepsilon)$ ve $\tilde{\chi}_{D_1^c}$ fonksiyonu $x \in D_1$ için en fazla $\frac{1}{2}$ değerini alacağından

$$|f^{lk}(x, \varepsilon) - f(x)| \leq \frac{1}{2} |(f_{2,1} - f_{1,1})(x)| \quad (4.27)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Benzer şekilde $(x) \in (s_1 - \varepsilon, s_1) \times (s_0^2 + \varepsilon, \infty)$ için

$$|f^{lk}(x, \varepsilon) - f(x)| \leq \frac{1}{2} |(f_{1,1} - f_{2,1})(x, y)|$$

eşitsizliğine ulaşılır. Yukarıdaki sonuçlara göre $x \in (s_1 - \varepsilon, s_1 + \varepsilon) \times (-\infty, s_2 - \varepsilon)$ olmak üzere

$$|f^{lk}(x, \varepsilon) - f(x)| \leq \frac{1}{2} |(f_{2,2} - f_{1,2})(x)|, \quad (4.28)$$

$x \in (s_1 + \varepsilon, \infty) \times (s_2 - \varepsilon, s_2 + \varepsilon)$ olmak üzere

$$|f^{lk}(x, \varepsilon) - f(x)| \leq \frac{1}{2} |(f_{1,1} - f_{1,2})(x)| \quad (4.29)$$

ve $x \in (-\infty, s_1 - \varepsilon) \times (s_2 - \varepsilon, s_2 + \varepsilon)$ olmak üzere

$$|f^{lk}(x\varepsilon) - f(x)| \leq \frac{1}{2} |(f_{2,1} - f_{2,2})(x, y)| \quad (4.30)$$

eşitsizlikleri elde edilir. (4.27), (4.28), (4.29) ve (4.30) eşitsizliklerinden faydalanarak

$$|f^{lk}(x, \varepsilon) - f(x)| \leq \max_{t=0,1} \max_{\substack{k,l=0,1 \\ k+l=1}} |(f_{2-k,2-l} - f_{2-t,2-t})(x)| \quad (4.31)$$

olduğu görülür.

Durum 2:

$x \in (s_1, s_1 + \varepsilon) \times (s_2, s_2 + \varepsilon)$ durumunu ele alalım. Böylece,

$$\begin{aligned} |f^{lk}(x\varepsilon) - f(x)| &= \left| f_{1,1}(x) \left(\chi_{D_1^k}^{l_k}(x_1, \varepsilon) \chi_{D_2^k}^{l_k}(x_2, \varepsilon) - 1 \right) + f_{1,2}(x) \chi_{D_1^k}^{l_k}(x_1, \varepsilon) \chi_{D_2^k}^{l_k}(x_2, \varepsilon) \right. \\ &\quad \left. + f_{2,1}(x) \chi_{D_1^c}^{l_k}(x_1, \varepsilon) \chi_{D_2^k}^{l_k}(x_2, \varepsilon) + f_{2,2}(x) \chi_{D_1^c}^{l_k}(x_1, \varepsilon) \chi_{D_2^c}^{l_k}(x_2, \varepsilon) \right| \\ &= \left| (f_{1,1}(x) - f_{1,2}(x) - f_{2,1}(x, y) + f_{2,2}(x)) \chi_{D_1^k}^{l_k}(x_1, \varepsilon) \chi_{D_2^k}^{l_k}(x_2, \varepsilon) \right. \\ &\quad \left. + (f_{1,2}(x) - f_{1,1}(x)) \chi_{D_1^c}^{l_k}(x_1, \varepsilon) + (f_{2,1}(x) - f_{1,1}(x)) \chi_{D_2^c}^{l_k}(x, \varepsilon) \right| \end{aligned}$$

elde edilir. $\chi_{D_1^c}^{l_k}(x_1, \varepsilon)$ ve $\chi_{D_2^c}^{l_k}(x_2, \varepsilon)$ karakteristik fonksiyonları sırasıyla $x_1 \in (s_1, s_1 + \varepsilon)$ ve $x_2 \in (s_2, s_2 + \varepsilon)$ için en fazla $\frac{1}{2}$ değerlerini alacaklardır. Buradan

$$\begin{aligned} |f^{lk}(x, \varepsilon) - f(x)| &\leq \frac{1}{4} |(f_{1,1} + f_{2,2} - f_{1,2} - f_{2,1})(x)| \\ &\quad + \frac{1}{2} |(f_{1,2} - f_{1,1})(x)| + \frac{1}{2} |(f_{2,1} - f_{1,1})(x)| \end{aligned}$$

elde edilir. Bu sonuçtan hareketle $x \in (s_1, s_1 + \varepsilon) \times (s_2 - \varepsilon, s_2)$ için

$$\begin{aligned} |f^{l_k}(x, \varepsilon) - f(x)| &\leq \frac{1}{4} |(f_{1,2} + f_{2,1} - f_{1,1} - f_{2,2})(x)| \\ &\quad + \frac{1}{2} |(f_{1,1} - f_{1,2})(x)| + \frac{1}{2} |(f_{2,2} - f_{2,1})(x)| \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Benzer şekilde $x \in (s_1 - \varepsilon, s_1) \times (s_2, s_2 + \varepsilon)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} |f^{l_k}(x, \varepsilon) - f(x)| &\leq \frac{1}{4} |(f_{2,1} + f_{1,2} - f_{1,1} - f_{2,2})(x)| \\ &\quad + \frac{1}{2} |(f_{1,1} - f_{2,1})(x)| + \frac{1}{2} |(f_{1,1} - f_{2,1})(x)| \end{aligned}$$

ve $x \in (s_1 - \varepsilon, s_1) \times (s_2 - \varepsilon, s_2)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} |f^{l_k}(x, \varepsilon) - f(x)| &\leq \frac{1}{4} |(f_{1,1} + f_{2,2} - f_{2,1} - f_{1,2})(x)| \\ &\quad + \frac{1}{2} |(f_{1,2} - f_{2,2})(x)| + \frac{1}{2} |(f_{2,1} - f_{2,2})(x)| \end{aligned}$$

sonuçlarına ulaşılır.

Yukarıda elde edilen eşitsizlikler dikkate alınarak

$$\begin{aligned} |f^{l_k}(x, \varepsilon) - f(x)| &\leq \frac{1}{4} |(f_{1,1} + f_{2,2} - f_{1,2} - f_{2,1})(x)| \\ &\quad + \frac{1}{2} \max_{\substack{k,l=0,1 \\ k+l=1}} |(f_{2-k,2-l} - f_{1,1})(x)| \\ &\quad + \frac{1}{2} \max_{\substack{k,l=0,1 \\ k+l=1}} |(f_{2-l,2-k} - f_{2,2})(x)| \end{aligned} \quad (4.32)$$

sonucu elde edilir. (4.31) ve (4.32) eşitsizlikleri göz önünde bulundurulursa (4.26) ifadesi elde edilir. $\square$

Global düzgünleştirme yaklaşımı

f fonksiyonu (4.23) ve (4.24) ifadelerinde verildiği gibi tanımlansın. Bölüm 4.3 de verilen karakteristik fonksiyonlar için global düzgünleştirme yaklaşımı kullanılarak

$\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} f^g(x, \varepsilon) = & f_{1,1}(x) \chi_{D_1}^g(x_1, \varepsilon) \chi_{D_2}^g(x_2, \varepsilon) + f_{1,2}(x) \chi_{D_1}^g(x_1, \varepsilon) \chi_{D_2^c}^g(x_2, \varepsilon) \\ & + f_{2,1}(x) \chi_{D_1^c}^g(x_1, \varepsilon) \chi_{D_2}^g(x_2, \varepsilon) + f_{2,2}(x) \chi_{D_1^c}^g(x_1, \varepsilon) \chi_{D_2^c}^g(x_2, \varepsilon) \end{aligned} \quad (4.33)$$

f fonksiyonunun düzgünleştirme fonksiyonu elde edilir.

Teorem 4.29. $i, j_1, j_2 = 1, 2$ ve $k \geq 1$ olmak üzere f_{j_1, j_2} fonksiyonları C^k sınıfına ait ve f fonksiyonu (4.24) gibi tanımlansın. f fonksiyonunun $\varepsilon > 0$ olmak üzere $f^g(x, \varepsilon)$ düzgünleştirme fonksiyonu C^k sınıfına aittir. Ayrıca $\varepsilon \rightarrow 0$ iken $f^g(x, \varepsilon) \rightarrow f(x)$ 'dir.

İspat. $i = 1, 2, k \geq 1$ ve $\varepsilon > 0$ için $\chi^g D_i(x_i, \varepsilon)$ ve $\chi^g D_i^c(x_i, \varepsilon)$ karakteristik fonksiyonun düzgünleştirme fonksiyonları C^∞ sınıfına aittir. Her bir $j_1, j_2 = 1, 2$ için f_{j_1, j_2} fonksiyonları C^k sınıfına ait olduğundan $f_{j_1, j_2}(x) \chi^g(x_1, \varepsilon) \chi^g(x_2, \varepsilon)$ fonksiyonları da C^k sınıfına aittir. (4.33) ifadesindeki $f^g(x, \varepsilon)$ fonksiyonunun C^k sınıfına ait olduğu görülür. $\square$

$j_1, j_2 = 1, 2$ için f_{j_1, j_2} fonksiyonları $0 \leq p_1 < p$ ve $0 \leq q_1 < q$ olmak üzere $C^{p, q}$ sınıfına ait ve f fonksiyonu C^{p_1, q_1} sınıfına ait $n = 2$ olmak üzere (4.23) ifadesinde olduğu gibi tanımlansın. Eğer global düzgünleştirme fonksiyonları kullanılırsa elde edilen fonksiyon f^g fonksiyonu $C^{p, q}$ sınıfına ait olur.

Teorem 4.30. $f, \mathbb{R}^n$ üzerinde (4.23) biçiminde tanımlı bir fonksiyon ve $f^g(x, \varepsilon)$ fonksiyonu (4.33) ifadesinde olduğu gibi tanımlansın. Bu durumda $\varepsilon > 0, x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} |f^g(x, \varepsilon) - f(x)| \leq & \frac{1}{4} |(f_{1,1} + f_{2,2} - f_{1,2} - f_{2,1})(x)| \\ & + \frac{1}{2} \max_{\substack{k, l=0,1 \\ k+l=1}} |(f_{2-k, 2-l} - f_{1,1})(x)| \\ & + \frac{1}{2} \max_{\substack{k, l=0,1 \\ k+l=1}} |(f_{2-l, 2-k} - f_{2,2})(x)| \end{aligned}$$

olur.

İspat. İspat dört farklı bölge ayrı ayrı dikkate alınarak yapılacaktır. $x \in D_1 \times D_2$ olsun.

Bu durumda

$$\begin{aligned}
 |f^g(x\varepsilon) - f(x)| &= \left| f_{1,1}(x) \left(\chi_{D_1}^g(x_1, \varepsilon) \chi_{D_2}^g(x_2, \varepsilon) - 1 \right) + f_{1,2}(x) \chi_{D_1}^g(x_1, \varepsilon) \chi_{D_2^c}^g(x_2, \varepsilon) \right. \\
 &\quad \left. + f_{2,1}(x) \chi_{D_1^c}^g(x_1, \varepsilon) \chi_{D_2}^g(x_2, \varepsilon) + f_{2,2}(x) \chi_{D_1^c}^g(x_1, \varepsilon) \chi_{D_2^c}^g(x_2, \varepsilon) \right| \\
 &= \left| (f_{1,1}(x) - f_{1,2}(x) - f_{2,1}(x, y) + f_{2,2}(x)) \chi_{D_1}^g(x_1, \varepsilon) \chi_{D_2}^g(x_2, \varepsilon) \right. \\
 &\quad \left. + (f_{1,2}(x) - f_{1,1}(x)) \chi_{D_1}^g(x_1, \varepsilon) + (f_{2,1}(x) - f_{1,1}(x)) \chi_{D_2}^g(x, \varepsilon) \right|
 \end{aligned}$$

elde edilir. $\chi_{D_1^c}^g(x_1, \varepsilon)$ ve $\chi_{D_2^c}^g(x_2, \varepsilon)$ karakteristik fonksiyonları sırasıyla $x \in D_1$ için en fazla $\frac{1}{2}$ değerlerini alacaklardır. Buradan

$$\begin{aligned}
 |f^g(x, \varepsilon) - f(x)| &\leq \frac{1}{4} |(f_{1,1} + f_{2,2} - f_{1,2} - f_{2,1})(x)| \\
 &\quad + \frac{1}{2} |(f_{1,2} - f_{1,1})(x, y)| + \frac{1}{2} |(f_{2,1} - f_{1,1})(x)|
 \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $x \in D_1 \times D_2^c$ için

$$\begin{aligned}
 |f^g(x, \varepsilon) - f(x)| &\leq \frac{1}{4} |(f_{1,2} + f_{2,1} - f_{1,1} - f_{2,2})(x)| \\
 &\quad + \frac{1}{2} |(f_{1,1} - f_{1,2})(x)| + \frac{1}{2} |(f_{2,2} - f_{2,1})(x)|
 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Benzer şekilde $x \in D_1^c \times D_2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
 |f^g(x, \varepsilon) - f(x)| &\leq \frac{1}{4} |(f_{2,1} + f_{1,2} - f_{1,1} - f_{2,2})(x)| \\
 &\quad + \frac{1}{2} |(f_{1,1} - f_{2,1})(x)| + \frac{1}{2} |(f_{1,1} - f_{2,1})(x)|
 \end{aligned}$$

ve $x \in D_1^c \times D_2^c$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
 |f^g(x, \varepsilon) - f(x)| &\leq \frac{1}{4} |(f_{1,1} + f_{2,2} - f_{2,1} - f_{1,2})(x)| \\
 &\quad + \frac{1}{2} |(f_{1,2} - f_{2,2})(x)| + \frac{1}{2} |(f_{2,1} - f_{2,2})(x)|
 \end{aligned}$$

sonuçlarına ulaşılır.

Yukarıda elde edilen eşitsizlikler dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
|f^g(x, \varepsilon) - f(x)| &\leq \frac{1}{4} |(f_{1,1} + f_{2,2} - f_{1,2} - f_{2,1})(x)| \\
&\quad + \frac{1}{2} \max_{\substack{k,l=0,1 \\ k+l=1}} |(f_{2-k,2-l} - f_{1,1})(x)| \\
&\quad + \frac{1}{2} \max_{\substack{k,l=0,1 \\ k+l=1}} |(f_{2-l,2-k} - f_{2,2})(x)|
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. İspat tamamlanmış olur. $\square$

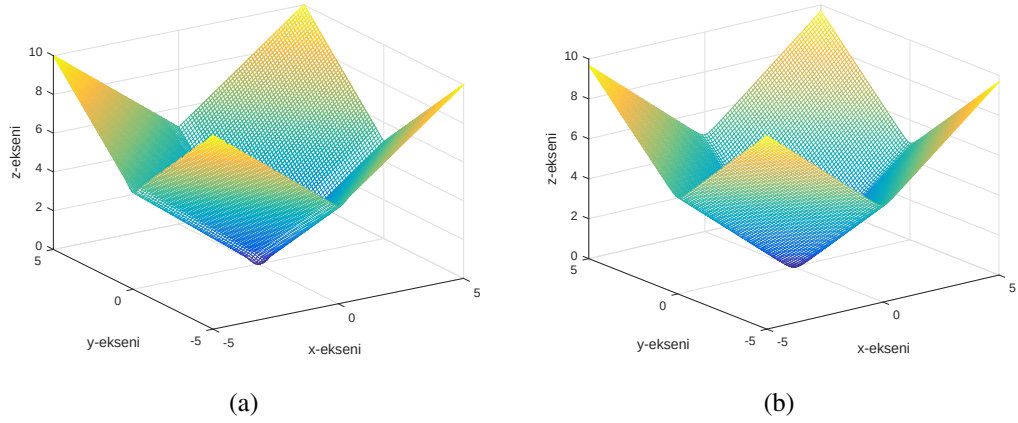
Örnek 4.31. $f(x_1, x_2) = |x_1| + |x_2|$ fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon parçalı fonksiyon olarak

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2, & (x_1, x_2) \in [0, \infty) \times [0, \infty), \\ f_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2, & (x_1, x_2) \in [0, \infty) \times (-\infty, 0], \\ f_3(x_1, x_2) = -x_1 + x_2, & (x_1, x_2) \in (-\infty, 0] \times [0, \infty), \\ f_4(x_1, x_2) = -x_1 - x_2, & (x_1, x_2) \in (-\infty, 0] \times (-\infty, 0]. \end{cases}$$

biçiminde yazılır. Bilindiği gibi f_1, f_2, f_3 ve f_4 parça fonksiyonları C^∞ olmasına rağmen f fonksiyonu düzgün olmayıp sadece C^0 sınıfına aittir. $A = [0, \infty)$ olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ düzgünleştirme fonksiyonu

$$\begin{aligned}
f^s(x_1, x_2, \varepsilon) &= f_1(x_1, x_2) \chi_A^s(x_1, \varepsilon) \chi_A(x_2, \varepsilon) + f_2(x_1, x_2) \chi_A^s(x_1, \varepsilon) \chi_{A^c}(x_2, \varepsilon) \\
&\quad + f_3(x_1, x_2) \chi_A^s(x_1, \varepsilon) \chi_{A^c}^s(x_2, \varepsilon) + f_4(x_1, x_2) \chi_{A^c}^s(x_1, \varepsilon) \chi_{A^c}^s(x_2, \varepsilon)
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. Burada χ^s ile karakteristik fonksiyonun düzgünleştirme fonksiyonunu belirtmektedir. $\chi_A^s(x_1, \varepsilon)$ ve $\chi_{A^c}^s(x_2, \varepsilon)$ fonksiyonları yerine $\chi_A^{l_1}(x_1, \varepsilon)$ ve $\chi_{A^c}^{l_1}(x_2, \varepsilon)$ lokal düzgünleştirme fonksiyonları kullanılarak elde edilen f^{l_1} fonksiyonu $C^{1,1}$ sınıfına ait olacaktır. Benzer şekilde global düzgünleştirme fonksiyonları kullanılarak elde edilen düzgünleştirme fonksiyonu C^∞ sınıfına aittir. f ve lokal düzgünleştirme fonksiyonu $f^{l_1}(x_1, x_2, \varepsilon)$ Şekil 4.4 (a), f ve $f^g(x_1, x_2, \varepsilon)$ global düzgünleştirme fonksiyonu Şekil 4.4 (b) de sunulmuştur.



Şekil 4.4. (a) $f^{l1}(x, 0.5)$ lokal düzgünleştirme fonksiyonunun (b) $f^g(x, 0.25)$ global düzgünleştirme fonksiyonunun grafiğidir.

4.3.2. Bir eğri ile birbirinden ayrılan bölgeler üzerinde tanımlı fonksiyonlar için düzgünleştirme yaklaşımı

İlk olarak $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, f_1, f_2 ve a fonksiyonları $\mathbb{R}^n$ üzerinde sürekli türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in D = \{x \in \mathbb{R}^n : a(x) \leq 0\} \\ f_2(x), & x \in D^c = \{x \in \mathbb{R}^n : a(x) \geq 0\} \end{cases} \quad (4.34)$$

biçiminde tanımlansın. Kabul edelim ki, f fonksiyonu $D \cap D^c = \{x \in \mathbb{R}^n : a(x) = 0\}$ üzerinde düzgün fonksiyon olmasın. f fonksiyonu

$$f(x) = f_1(x)\chi_D(x) + f_2(x)\chi_{D^c}(x) \quad (4.35)$$

biçiminde tanımlanabilir. Burada

$$\chi_D(x) = \begin{cases} 1, & a(x) \leq 0 \\ 0, & a(x) \geq 0 \end{cases}$$

ve

$$\chi_{D^c}(x) = \begin{cases} 0, & a(x) \leq 0 \\ 1, & a(x) \geq 0 \end{cases}$$

olarak ifade edilmiştir. Benzer düşünceyle $\chi_D(x)$ ve $\chi_{D^c}(x)$ fonksiyonlarının düzgünleştirme fonksiyonları, karşılık gelen düzgünleştirme fonksiyonları ile yer değiştirdiğinde elde edilen

$$f^{l_k}(x, \varepsilon) = f_1(x)\chi_D^{l_k}(x, \varepsilon) + f_2(x)\chi_{D^c}^{l_k}(x, \varepsilon) \quad (4.36)$$

fonksiyonu f fonksiyonunun düzgünleştirme fonksiyonudur. Buna göre karakteristik fonksiyonların lokal düzgünleştirme fonksiyonları $k \geq 1$ pozitif tam sayı olmak üzere

$$\chi_D^{l_k}(x, \varepsilon) = \begin{cases} 1, & a(x) \leq -\varepsilon \\ P_k(a(x)), & -\varepsilon \leq a(x) \leq \varepsilon \\ 0, & a(x) \geq \varepsilon \end{cases}$$

ve

$$\chi_{D^c}^{l_k}(x, \varepsilon) = \begin{cases} 0, & a(x) \leq -\varepsilon \\ P_k(-a(x)), & -\varepsilon \leq a(x) \leq \varepsilon \\ 1, & a(x) \geq \varepsilon \end{cases}$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.32. $k \geq 1$ tam sayı olmak üzere f_1 ve f_2 fonksiyonları C^k sınıfından f fonksiyonu (4.35) denkleminde tanımlandığı gibi olsun. (4.36) ifadesinde verilen $f^{l_k}(x, \varepsilon)$ fonksiyonu $\varepsilon > 0$ için C^k sınıfına aittir. Ayrıca $\varepsilon \rightarrow 0$ iken $f^{l_k}(x, \varepsilon) \rightarrow f(x)$ 'dir.

İspat. $k \geq 1$ ve $\varepsilon > 0$ için $\chi_D^{l_k}(x, \varepsilon)$ ve $\chi_{D^c}^{l_k}(x, \varepsilon)$ karakteristik fonksiyonların düzgünleştirme fonksiyonları C^k sınıfına aittir. f_1 ve f_2 fonksiyonları C^k sınıfına ait olduklarından $f_1(x)\chi_D^{l_k}(x, \varepsilon)$ ve $f_2(x)\chi_{D^c}^{l_k}(x, \varepsilon)$ fonksiyonları C^k sınıfına aittir. (4.36) denklemi dikkate alındığında $f^{l_k}(x, \varepsilon)$ fonksiyonunun C^k sınıfına ait olduğu görülür. $\square$

Teorem 4.33. $f(x)$ ve $f^{l_k}(x, \varepsilon)$ fonksiyonları sırasıyla (4.35) ve (4.36) ifadelerindeki gibi tanımlansın. $\varepsilon > 0$ ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$|f^{l_k}(x, \varepsilon) - f(x)| \leq \frac{1}{2}|f_1(x) - f_2(x)| \quad (4.37)$$

olur.

İspat. $\varepsilon > 0$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ için $a(x) < -\varepsilon$ veya $a(x) > \varepsilon$ ise $f^{l_k}(x, \varepsilon) = f(x)$ olduğundan (4.37) denkleminin $S = \{x \in \mathbb{R}^n : -\varepsilon \leq a(x) \leq \varepsilon\}$ üzerinde sağlandığını göstermek yeterlidir. $x \in S_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : -\varepsilon \leq a(x) \leq 0\}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} |f^{l_k}(x, \varepsilon) - f(x)| &= \left| f_1(x) \left(\chi_D^{l_k}(x, \varepsilon) - \chi_D(x) \right) + f_2(x) \left(\chi_{D^c}^{l_k}(x, \varepsilon) - \chi_{D^c}(x) \right) \right| \\ &= \left| f_1(x) \left(\chi_D^{l_k}(x, \varepsilon) - 1 \right) + f_2(x) \chi_{D^c}^{l_k}(x, \varepsilon) \right| \\ &= \left| -f_1(x) \chi_{D^c}^{l_k}(x, \varepsilon) + f_2(x) \chi_{D^c}^{l_k}(x, \varepsilon) \right| \end{aligned}$$

elde edilir. $\chi_{D^c}^{l_k}(x, \varepsilon)$ fonksiyonu S_1 üzerinde en fazla $\frac{1}{2}$ değerini aldığından

$$|f^{l_k}(x, \varepsilon) - f(x)| \leq \frac{1}{2} |f_2(x) - f_1(x)| \quad (4.38)$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde $x \in S_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq a(x) \leq \varepsilon\}$ için

$$\begin{aligned} |f^{l_k}(x, \varepsilon) - f(x)| &= \left| f_1(x) \chi_D^{l_k}(x, \varepsilon) + f_2(x) \left(\chi_{D^c}^{l_k}(x, \varepsilon) - 1 \right) \right| \\ &= \left| f_1(x) \chi_D^{l_k}(x, \varepsilon) - f_2(x) \chi_D^{l_k}(x, \varepsilon) \right| \end{aligned}$$

elde edilir ve

$$|f^{l_k}(x, \varepsilon) - f(x)| \leq \frac{1}{2} |f_1(x) - f_2(x)| \quad (4.39)$$

sonucuna ulaşılır. (4.38) ve (4.39) eşitsizliklerinden S üzerinde (4.37) eşitsizliğinin sağlandığı görülür. $\square$

Benzer şekilde karakteristik fonksiyonların global düzgünleştirme fonksiyonları

$$\chi_D^g(x, \varepsilon) = \frac{\arctan\left(-\frac{a(x)}{\varepsilon}\right) + \frac{\pi}{2}}{\pi}$$

ve

$$\chi_{D^c}^g(x, \varepsilon) = \frac{\arctan\left(\frac{a(x)}{\varepsilon}\right) + \frac{\pi}{2}}{\pi}$$

olarak elde edilmiştir. $\chi_D(x)$ ve $\chi_{D^c}(x)$ karakteristik fonksiyonlarının düzgünleştirme fonksiyonları kullanılarak f fonksiyonunun düzgünleştirme fonksiyonu

$$f^g(x, \varepsilon) = f_1(x)\chi_D^g(x, \varepsilon) + f_2(x)\chi_{D^c}^g(x, \varepsilon) \quad (4.40)$$

tanımlanır. Global düzgünleştirme yaklaşımı için aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Teorem 4.34. $k \geq 1$ tam sayı olmak üzere f_1 ve f_2 fonksiyonları C^k sınıfından f fonksiyonu (4.35) denkleminde tanımlandığı gibi olsun. (4.40) ifadesinde verilen $f^g(x, \varepsilon)$ fonksiyonu $\varepsilon > 0$ için C^k sınıfına aittir. Ayrıca $\varepsilon \rightarrow 0$ iken $f^g(x, \varepsilon) \rightarrow f(x)$ 'dir.

İspat. $k \geq 1$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için $\chi_D^g(x, \varepsilon)$ ve $\chi_{D^c}^g(x, \varepsilon)$ karakteristik fonksiyonların düzgünleştirme fonksiyonları C^∞ sınıfına aittir. f_1 ve f_2 fonksiyonları C^k sınıfına ait olduğundan $f_1(x)\chi_D^g(x, \varepsilon)$ ve $f_2(x)\chi_{D^c}^g(x, \varepsilon)$ fonksiyonları C^k sınıfına aittir. (4.40) ifadesi göz önüne alındığında $f^g(x, \varepsilon)$ fonksiyonunun C^k sınıfına ait olduğu görülür. $\square$

Teorem 4.35. $f(x)$ ve $f^g(x, \varepsilon)$ fonksiyonları sırasıyla (4.35) ve (4.40) ifadelerindeki gibi tanımlansın. $\varepsilon > 0$ ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$|f^g(x, \varepsilon) - f(x)| \leq \frac{1}{2}|f_1(x) - f_2(x)| \quad (4.41)$$

olur.

İspat. $a(x) \leq 0$ olacak şekildeki $x \in \mathbb{R}^n$ noktaları için

$$\begin{aligned} |f^g(x, \varepsilon) - f(x)| &= |f_1(x)(\chi_D^g(x, \varepsilon) - \chi_D(x)) + f_2(x)(\chi_{D^c}^g(x, \varepsilon) - \chi_{D^c}(x))| \\ &= |f_1(x)(\chi_D^g(x, \varepsilon) - 1) + f_2(x)\chi_{D^c}^g(x, \varepsilon)| \\ &= |-f_1(x)\chi_{D^c}^g(x, \varepsilon) + f_2(x)\chi_{D^c}^g(x, \varepsilon)| \end{aligned}$$

elde edilir ve $a(x) < 0$ olacak şekildeki x noktaları için $\chi_{D^c}^g$ en fazla $\frac{1}{2}$ değerini alacağından

$$|f^g(x, \varepsilon) - f(x)| \leq \frac{1}{2}|f_2(x) - f_1(x)| \quad (4.42)$$

sonucu elde edilir. Benzer şekilde $a(x) \leq 0$ olacak şekildeki $x \in \mathbb{R}^n$ noktaları için

$$\begin{aligned} |f^g(x, \varepsilon) - f(x)| &= |f_1(x)\chi_D^g(x, \varepsilon) + f_2(x)(\chi_{D^c}^g(x, \varepsilon) - 1)| \\ &= |f_1(x)\chi_D^g(x, \varepsilon) - f_2(x)\chi_D^g(x, \varepsilon)| \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır ve

$$|f^g(x, \varepsilon) - f(x)| \leq \frac{1}{2}|f_1(x) - f_2(x)| \quad (4.43)$$

elde edilir. (4.42) ve (4.43) denklemlerinden (4.41) eşitsizliği elde edilir. $\square$

Örnek 4.36.

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} -\sin(x_1^2) + \exp(-x_2^2) + 6, & x_2 - \sin(2x_1) \leq 0 \\ \log(x_1^2 + 1) + 3\cos(x_2^2) - 1, & x_2 - \sin(2x_1) > 0 \end{cases}$$

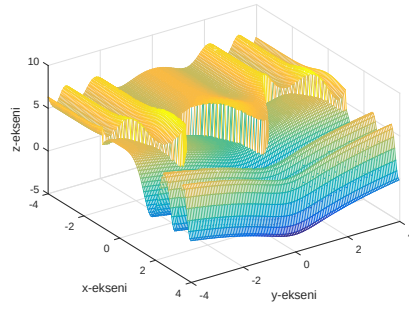
fonksiyonunu tanımlayalım. f fonksiyonu iki parçadan oluşmaktadır (bkz Şekil 4.5 (a)). Parçalar $x_2 - \sin(x) = 0$ eğrisi ile birbirinden ayrılmıştır. (bkz Şekil 4.5 (b)). f fonksiyonu bu eğri üzerinde sürekli dahi değildir. Her bir $\varepsilon > 0$ için lokal düzgünleştirme yaklaşımı uygulandığında

$$f^{l_1}(x, \varepsilon) = f_1(x)\chi_D^{l_1}(x, \varepsilon) + f_2(x)\chi_{D^c}^{l_1}(x, \varepsilon)$$

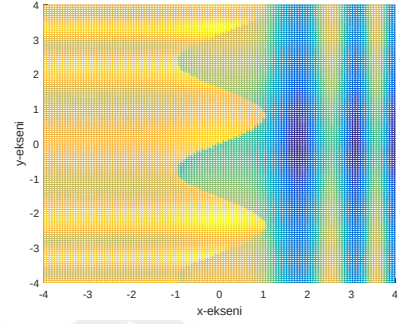
düzgünleştirme fonksiyonu elde edilir. f fonksiyonu sürekli bile değil iken düzgünleştirme fonksiyonu sürekli türevlenebilir bir fonksiyondur (C^1 sınıfındandır). Her $\varepsilon > 0$ için f fonksiyonunun global düzgünleştirme yaklaşımı uygulanarak elde edilen düzgünleştirme fonksiyonu

$$f^g(x, \varepsilon) = f_1(x)\chi_D^g(x, \varepsilon) + f_2(x)\chi_{D^c}^g(x, \varepsilon)$$

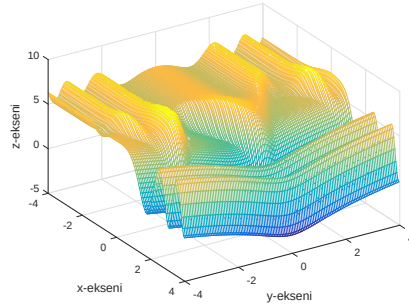
biçiminde elde edilir. f_1 ve f_2 fonksiyonları C^∞ sınıfına ait olduğundan $f^g(x, \varepsilon)$ fonksiyonu da C^∞ sınıfına ait olur. Şekil 4.5 (c) ve (d) sırasıyla lokal ve global düzgünleştirme yaklaşımları uygulanarak elde edilen düzgünleştirme fonksiyonlarının grafiği verilmiştir.



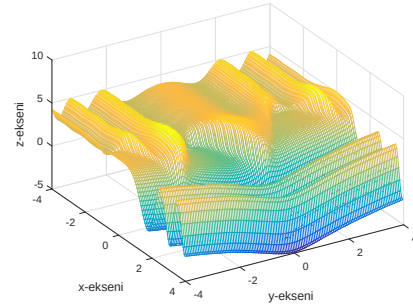
(a)



(b)



(c)



(d)

Şekil 4.5. (a) f fonksiyonunun grafiği, (b) f fonksiyonunun grafiğinin üstten görünümü
(c) $f^{l_1}(x, 0.5)$ lokal düzgünleştirme fonksiyonu grafiği, (d) $f^g(x, 0.5)$ global düzgünleştirme fonksiyonunun grafiğidir.

5. YENİ GLOBAL OPTİMİZASYON METOTLARI

Bu bölümde tezin ana konusunu oluşturan $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$(P) \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

problemi ele alınacaktır. Burada f , $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı reel değerli sürekli kısmi türevlere sahip, global konveks ve sonlu sayıda lokal minimuma sahip olan bir fonksiyondur.

Yukarıda (P) problemi tanımlanırken f amaç fonksiyonunun sürekli kısmi türevlere sahip olması şartı konulmuştur. Bölüm 4 de önerilen düzgünleştirme çalışmaları göz önünde bulundurulduğunda f amaç fonksiyonunun parçalı düzgün veya $0 < p \leq 1$ için “ $\max^p$, $\min^p$, $|\cdot|^p$ ” tipi operatörleri içeren fonksiyonlar sınıfına ait bir fonksiyon olması yeterli olacaktır. Eğer f amaç fonksiyonu düzgün (sürekli terevlenebilir) bir fonksiyon değilse fonksiyon düzgünleştirildikten sonra bölümün devamında verilen global optimizasyon metotları uygulanır.

Global optimizasyon metotlarının önemli bir kısmı lokal minimum bulma metotlarını belirli bir düzen içerisinde kullanarak çalışmaktadır. Bu metotların doğru sonuca ulaşmalarının önündeki en önemli engel mevcut lokal minimumdan daha alttaki lokal minimuma nasıl erişileceğidir. Bu bölümde amaç fonksiyonun daha alttaki lokal minimumlara ulaşmasını kolaylaştıracak yardımcı fonksiyon yaklaşımı üzerine inşa edilen yöntemler, elde edilen sonuç ve algoritmalara yer verilecektir.

5.1. Düzgün İniş Metodu ve Algoritması

(P) problemi için f amaç fonksiyonunun lokal minimumu x_k^* noktasını herhangi bir lokal minimum bulma metodu kullanarak bulunduğunu varsayalım. Bu aşamada $\phi(x, x_k^*) := \min\{f(x), f(x_k^*)\}$ fonksiyonu ele alındığında $\phi(x, x_k^*)$ fonksiyonunun x_k^* lokal minimumundan daha alttaki lokal minimumları f fonksiyonunun x_k^* lokal minimumundan daha alttaki lokal minimumları ile aynıdır. Üstelik f fonksiyonunun x_k^* lokal minimumundan daha üstteki lokal minimumları $\phi(x, x_k^*)$ fonksiyonu için kesin

minimum değildir. Bu özellikten hareket ile ilk lokal minimum bulunduktan sonra daha alttaki lokal minimumları bulmak için f amaç fonksiyonu yerine $\phi(x, x_k^*)$ fonksiyonunun minimumları aranır. global optimizasyon yöntemlerinin önündeki engellerden birisi ortadan kaldırılmış olur.

Diğer yandan ϕ fonksiyonu düzgün bir fonksiyon değildir. Dolayısıyla gradyan veya türev tabanlı lokal minimum bulma algoritmaları ϕ fonksiyonunun lokal minimumlarını bulmak için kullanılamaz. Fakat bu sorun önceki bölümde önerilen düzgünleştirme yaklaşımları yardımı ile giderilebilir. ϕ fonksiyonuna düzgünleştirme yaklaşımı kullanılarak elde edilen fonksiyon için gradyan tabanlı lokal minimum bulma metotları kullanılabilir. O halde $\phi(x, x_k^*)$ fonksiyonu için Bölüm 4.1.1 de üretilen düzgünleştirme fonksiyonu kullanılırsa $\beta > 0$ ve $p = 1$ için

$$\tilde{\phi}_\beta(x, x_k^*) = f(x_k^*) - \tilde{q}^p(f(x_k^*) - f(x), \beta)$$

düzgünleştirme fonksiyonu elde edilir.

Teorem 5.1. Her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$0 \leq \phi(x, x_k^*) - \tilde{\phi}_\beta(x, x_k^*) \leq \mu_1(0, \beta) \quad (5.1)$$

elde edilir.

İspat. $x \in \mathbb{R}^n$ ve $\beta > 0$

$$\phi(x, x_k^*) - \tilde{\phi}_\beta(x, x_k^*) \leq \tilde{q}^1(f(x_k^*) - f(x), \beta) - q^1(f(x_k^*) - f(x))$$

elde edilir ve Lemma 4.1 den

$$\tilde{q}^1(f(x_k^*) - f(x), \beta) - q^1(f(x_k^*) - f(x)) \leq \mu_1(0, \beta)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

$\tilde{\phi}_\beta$ fonksiyonu değeri $f(x_k^*)$ değerinden daha büyük noktalarda sabit bir değer alacaktır. Bu durum lokal minimum bulma algoritmalarının etkinliğini azaltacak ve zaman kaybına

sebeup olacaktır. Bu sorundan kurtulmak amacıyla $\tilde{\phi}$ fonksiyonuna yeni bir terim eklenecektir. Bu terim (ϕ fonksiyonu) $\mathbb{R}_+$ üzerinde tanımlı ve

- i. $\phi(t) > 0$,
- ii. $\phi'(t) < 0$,
- iii. $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0$

özelliklerini sağlayan fonksiyondur. Örneğin; ϕ fonksiyonu $\frac{\pi}{2} - \arctan(t)$, $\exp(-t)$ ve $\frac{1}{1+t}$ olarak seçilebilir. Sonuç olarak elde edilen yardımcı fonksiyon

$$\tilde{\phi}_\beta^\alpha(x, x_k^*) = f(x_k^*) - \tilde{q}^1(f(x_k^*) - f(x), \beta) + \alpha\phi(\|x - x_k^*\|^2)$$

biçiminde tanımlanır.

Teorem 5.2. x_k^* noktası f fonksiyonunun bir lokal minimum noktası olsun. Bu durumda $\tilde{\phi}_\beta^\alpha(x, x_k^*)$ fonksiyonu Ω_1 kümesi üzerinde bir duraksama noktasına sahip değildir.

İspat. $x \in \Omega_1$ ve $x \neq x_k^*$ olmak üzere $\tilde{\phi}_\beta^\alpha(x, x_k^*) = f(x_k^*) + \alpha\phi(\|x - x_k^*\|^2)$ ve $\nabla \tilde{\phi}_\beta^\alpha(x, x_k^*) = \alpha \nabla \phi(\|x - x_k^*\|^2) \neq 0$ elde edilir. İspat tamamlanmış olur. $\square$

Teorem 5.3. x_k^* noktası f fonksiyonunun bir lokal minimum noktası olsun. f fonksiyonunun x_k^* noktasından daha altta x_{k+1}^* lokal minimumu var ise $\bar{x}$ noktası $\tilde{\phi}_\beta^\alpha(x, x_k^*)$ fonksiyonunun lokal minimumu olmak üzere $\bar{x} \in S(x_{k+1}^*)$ 'dir.

İspat. f fonksiyonu global konveks ve sonlu sayıda lokal minimuma sahip olsun. $\tilde{\phi}_\beta^\alpha(x, x_k^*)$ fonksiyonunun bir lokal minimumunun var olduğunu gösterelim. f fonksiyonunun x_k^* noktasından daha altta bir lokal minimumu var olsun. Bu durumda $\Omega_3 = \{x : f(x) \leq f(x_k^*), x \in \Omega\}$ kümesi boştan farklı bir kümedir. f fonksiyonu sürekli olduğu için Ω_3 kümesi kapalıdır. Üstelik Ω sınırlı kümesi tarafından kapsandığı için sınırlıdır. Bu nedenle $\tilde{\phi}_\beta^\alpha(x, x_k^*)$ fonksiyonu Ω_3 kümesinde bir lokal minimuma sahiptir. f fonksiyonunun x_k^* noktasından daha alttaki lokal minimumunu x_{k+1}^* ile $\tilde{\phi}_\beta^\alpha(x, x_k^*)$ fonksiyonunun lokal minimumunu $\bar{x}$ ile tanımlayalım. Buradan

$$\nabla \tilde{\phi}_\beta^\alpha(\bar{x}, x_k^*) = \nabla f(\bar{x}) + \alpha \nabla \phi(\|\bar{x} - x_k^*\|^2) = 0$$

olduğu görülür. Böylelikle $\nabla f(\bar{x}) = -\alpha \nabla \varphi(\|\bar{x} - x_k^*\|^2)$ elde edilir. $\varphi(\|x - x_k^*\|^2)$ fonksiyonunun özelliklerinden

$$(\bar{x} - x_k^*) \nabla f(\bar{x}) = (\bar{x} - x_k^*) (-\alpha \nabla \varphi(\|\bar{x} - x_k^*\|^2)) > 0$$

sonucuna ulaşılır. Yeterince küçük bir α değeri için $(\bar{x} - x_k^*) \approx (x_{k+1}^* - x_k^*)$ olur ve $\|\bar{x} - x_k^*\| \geq \|x_{k+1}^* - x_k^*\|$ olduğundan $(\bar{x} - x_k^*)$ ve $(x_{k+1}^* - x_k^*)$ vektörleri aynı doğrultuya sahiptir. Dolayısıyla

$$(\bar{x} - x_{k+1}^*) (-\alpha \nabla \varphi(\|\bar{x} - x_k^*\|^2)) > 0$$

sonucuna ulaşılır. □

Algoritma 1

- Adım 0. – $k = 1, \beta = 0.1, \alpha = 0.5, \varepsilon = 10^{-2}, \varepsilon = 10^{-20}$
 – Maksimum yön sayısı $N, i = 1, 2, \dots, N$ için birim vektörler d_i , başlangıç noktası x_0 ve Ω kümesinin sınırlarını belirle, $i = 1$ olarak ayarla
 – $\varphi(t)$ fonksiyonunu belirle.
- Adım 1. $f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasından başlayarak x_k^* noktasını bul.
- Adım 2. $\tilde{\phi}_\beta^\alpha(x, x_k^*)$ fonksiyonunu kur.
- Adım 3. $x_0 = x_k^* + \varepsilon d_i$ noktasından başlayarak $\tilde{\phi}_\beta^\alpha(x, x_k^*)$ fonksiyonunun minimumunu ara ve bulunan minimumu x_s olarak ata.
- Adım 4. Eğer $x_s \in \Omega$ ise Adım 6'ya git; aksi halde Adım 5'e git.
- Adım 5. Eğer $i < N$ ise $i = i + 1$ ata ve Adım 3'e git; aksi halde Adım 7 ye git.
- Adım 6. $x_0 = x_s$ ata ve Adım 1'e git.
- Adım 7. Eğer $\tilde{\phi}_\beta^\alpha(x, x_k^*)$ fonksiyonunun gradyanı Ω dışındaki noktalarda sıfır oluyorsa, $|f(x_k^*) - f(x_{k-1}^*)| \leq \varepsilon$ ise algoritmayı durdur $x^* = x_k^*$ global minimumlaştırıcı olarak sonuçlandır; aksi taktirde $i = i + 1$ al ve Adım 3'e git.
-

Algoritma 1'in en önemli unsuru $\tilde{\phi}_\beta^\alpha(x, x_k^*)$ fonksiyonudur. Eğer bulunan x_k^* noktası f fonksiyonunun global minimumlaştırıcısı değil ise, daha alt seviyedeki bir lokal minimumunun yuvasında bu fonksiyonun x_s lokal minimumlaştırıcısı vardır. Buna

ek olarak bu yardımcı fonksiyonun bu kullanışlı özellikleri α ve β parametrelerinden bağımsızdır.

Teorem 5.4. Her $\varepsilon > 0$ ve yeterince büyük bir j iterasyon sayısı için Algoritma 1'den üretilen bir x_k^j noktası ve $k = 1, 2, \dots, m$ ve $j = 1, 2, \dots$ için

$$|f(x_k^j) - f(x_k^*)| < \varepsilon$$

vardır ve $x^* \in \Omega$ için

$$f(x^*) < \dots < f(x_2^*) < f(x_1^*)$$

olur.

İspat. f global konveks olduğundan fonksiyonun bütün lokal minimumlarını içeren bir $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ vardır. Uygun lokal minimum bulma metodu kullanıldığında (Steepest Descent Metodu) Ω kümesinde $\lim_{j \rightarrow \infty} x_k^j = x_k^*$ olacak şekilde (x_k^j) azalan dizisi ($f(x_k^j) > f(x_k^{j+1})$) biçiminde) elde edilir.

Teorem 5.2 den $\tilde{\phi}_\beta^\alpha(x, x_k^*)$ fonksiyonu üst yuvalarda bir lokal minimuma sahip olamayacağı görülür. Teorem 5.3 den

$$f(x^*) < \dots < f(x_2^*) < f(x_1^*)$$

olacak şekilde sonlu sayıda elemanı olan dizi elde edilir. Böylelikle Algoritma 1 Adım 3 de elde edilen $x_s \in B(x^*)$ noktasına $m - 1$ -iterasyonda ulaşılır. Son olarak x_s noktasından başlayarak uygulanan lokal minimum bulma metodu ile $\bar{x}$ noktası, x^* global minimum noktaya yaklaşık olarak (tolerans değeri dikkate alınarak) elde edilir.

□

Algoritmanın işleyişi ile ilgili olarak aşağıdaki önemli uyarılar dikkate alınmalıdır:

- $\tilde{\phi}_\beta^\alpha(x, x_k^*)$ fonksiyonu x_k^* noktasında lokal maksimuma sahip olmak zorunda değildir. Fakat $\tilde{\phi}_\beta^\alpha(x, x_k^*)$ fonksiyonu Ω_1 kümesi üzerinde herhangi bir noktada lokal maksimum yapan noktaya sahip olabilmektedir.

- Algoritma 1 in uygulanabilmesi için bir lokal minimum bulma yöntemine ihtiyaç vardır. Newton, Steepest Descent, Quasi Newton yöntemlerinden biri kullanılabilir.

5.2. Estetik İniş Metodu ve Algoritması

Bu bölümde farklı bir düzgünleştirme yaklaşımıyla elde edilen yardımcı fonksiyon kullanılacaktır. Yöntem, amaç fonksiyonunun bulunan lokal minimumlara göre yardımcı fonksiyonlar kurarak adım adım global minimumu bulmaya dayanmaktadır. Özetle yöntemin işleyişi şöyledir:

1. f fonksiyonuna lokal minimum bulma metodu uygulanarak lokal minimum x_k^* ve karşılık gelen değeri $f(x_k^*)$ bulunur ve 2. Adıma geçilir.
2. $\phi(x, x_k^*) := \min\{f(x), f(x_k^*)\}$ fonksiyonu kurulur ve bu fonksiyona lokal minimum bulma yöntemi uygulanarak x_{k+1}^* lokal minimumu bulunur. Belirtilmelidir ki $f(x_{k+1}^*) \leq f(x_k^*)$ dir.
3. $x_k^* = x_{k+1}^*$ olarak alınır ve 2. Adıma geri dönülür. Varsayım 2 ye dayanarak sonlu sayıda iterasyon sonucunda f fonksiyonunun global minimumuna ulaşılır.

Bu yöntemin ana fikri $\phi(x, x_k^*)$ fonksiyonunun f fonksiyonunun x_k^* noktasından daha büyük değerlere sahip lokal minimumlarının $\phi(x, x_k^*)$ fonksiyonunun lokal minimumu olmamasıdır.

Lemma 5.5. *f düzgün bir fonksiyon ve x_k^* noktası f fonksiyonunun bir lokal minimumlaştırıcısı olsun. f fonksiyonunun x_k^* lokal minimumundan daha küçük değere sahip lokal minimumları $\phi(x, x_k^*)$ fonksiyonunun da lokal minimumlarıdır fakat f fonksiyonunun x_k^* lokal minimumundan daha büyük değere sahip lokal minimumları $\phi(x, x_k^*)$ fonksiyonunun lokal minimumu değildir.*

$\phi(x, x_k^*)$ fonksiyonunun düzgün bir fonksiyon olmadığı açıktır. Bu nedenle türev tabanlı lokal minimum bulma algoritmaları bu fonksiyon için kullanışlı değildir. Bu problemi

düzgünleştirme yaklaşımı kullanarak çözmek mümkündür. $\phi(x, x_k^*)$ fonksiyonu

$$\phi(x, x_k^*) = f(x_k^*) + \min\{f(x) - f(x_k^*), 0\}$$

olacak şekilde yeniden yazılabildiği gibi $A_k = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) - f(x_k^*) < 0\}$ kümesi için $\chi_{A_k} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ biçiminde tanımlanan

$$\chi_{A_k}(x) = \begin{cases} 1 & x \in A_k \\ 0 & x \notin A_k \end{cases}$$

A_k kümesinin karakteristik fonksiyonu kullanılarak

$$\phi(x, x_k^*) = f(x_k^*) + (f(x) - f(x_k^*)) \chi_{A_k}(x) \quad (5.2)$$

biçiminde ifade edilir. (5.2) denkleminde yer alan karakteristik fonksiyon yerine Bezier eğrileri yardımıyla elde edilen karakteristik fonksiyonun düzgünleştirme fonksiyonu kullanılarak

$$\tilde{\phi}(x, x_k^*, \beta) = f(x_k^*) + (f(x) - f(x_k^*)) \tilde{\chi}_{A_k}(x, \beta)$$

düzgün fonksiyon elde edilir. Burada karakteristik fonksiyonun düzgünleştirme fonksiyonu $t = f(x) - f(x_k^*)$ olmak üzere

$$\tilde{\chi}_{A_k}(x, \beta) = \begin{cases} 0 & t > \beta \\ q_1(t, \beta) & 0 \leq t \leq \beta \\ q_2(t, \beta) & -\beta \leq t \leq 0 \\ 1 & t < -\beta \end{cases}$$

ile tanımlanmıştır.

Teorem 5.6. $\beta > 0$ ve x_k^* noktası f fonksiyonunun bir lokal minimumu olsun. Buna göre;

i. $\tilde{\phi}(x, x_k^*, \beta)$ fonksiyonu düzgündür,

ii. $x \in \mathbb{R}^n$ için $0 \leq \tilde{\phi}(x, x_k^*, \beta) - \phi(x, x_k^*) \leq \beta/2$,

iii. $\beta \rightarrow 0$ için $\tilde{\phi}(x, x_k^*, \beta) \rightarrow \phi(x, x_k^*)$ 'dir.

İspat. i. $\tilde{\chi}_{A_k}(x, \beta)$ fonksiyonu düzgün olduğundan $\tilde{\phi}(x, x_k^*, \beta)$ fonksiyonu da düzgündür.

ii. $f(x) - f(x_k^*) > \beta$ durumunda $\tilde{\chi}_{A_k}(x, \beta) = \chi_{A_k}(x) = 0$ elde edilir. Ayrıca, $\tilde{\phi}(x, x_k^*, \beta) - \phi(x, x_k^*) = 0$ olduğu görülür. Benzer olarak $f(x) - f(x_k^*) < -\beta$ için $\tilde{\chi}_{A_k}(x, \beta) = \chi_{A_k}(x) = 0$ ve $\tilde{\phi}(x, x_k^*, \beta) - \phi(x, x_k^*) = 0$ sonucu elde edilir.

$0 \leq f(x) - f(x_k^*) \leq \beta$ olsun. Bu durumda $0 \leq \tilde{\chi}_{A_k}(x, \beta) \leq 1/2$ ve $\chi_{A_k}(x) = 0$ olduğu için

$$\tilde{\phi}(x, x_k^*, \beta) - \phi(x, x_k^*) = (f(x) - f(x_k^*)) (\tilde{\chi}_{A_k}(x, \beta) - \chi_{A_k}(x)) \leq \beta/2$$

elde edilir. Benzer olarak $-\beta \leq f(x) - f(x_k^*) \leq 0$ için $1/2 \leq \tilde{\chi}_{A_k}(x, \beta) \leq 1$ ve $\chi_{A_k}(x) = 1$ olup

$$\tilde{\phi}(x, x_k^*, \beta) - \phi(x, x_k^*) = (f(x) - f(x_k^*)) (\tilde{\chi}_{A_k}(x, \beta) - \chi_{A_k}(x)) \leq \beta/2$$

sonucuna ulaşılır.

iii. $\beta \rightarrow 0$ iken sonuç açıktır. □

$\tilde{\phi}(x, x_k^*, \beta)$ fonksiyonu $f(x) > f(x_k^*)$ olduğu durumda sabit fonksiyona eşittir. Bu durum $\tilde{\phi}(x, x_k^*, \beta)$ fonksiyonunu minimize ederken hesaplama maliyetlerini artırmasına neden olabilmektedir. Bu nedenle $\phi(x, x_k^*, \beta)$ fonksiyonuna $\mathbb{R}_+$ üzerinde tanımlı aşağıdaki özellikleri sağlayan φ terimi (fonksiyonu) eklenecektir.

i. $\varphi(t) > 0$,

ii. $\varphi'(t) < 0$,

iii. $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$.

φ fonksiyonuna örnek olarak $\frac{\pi}{2} - \arctan(t)$, $\exp(-t)$ and $\frac{1}{1+t}$ fonksiyonları verilebilir. Sonuç olarak Estetik İniş fonksiyonu $\alpha > 0$ parametre olmak üzere

$$\tilde{\phi}(x, x_k^*, \beta, \alpha) = f(x_k^*) + (f(x) - f(x_k^*)) \tilde{\chi}_{A_k}(x, \beta) + \alpha \varphi(\|x - x_k^*\|^2)$$

elde edilir.

Teorem 5.7. x_k^* noktası f fonksiyonunun bir lokal minimumu olsun. $\tilde{\phi}(x, x_k^*, \beta, \alpha)$ fonksiyonu $x \in \Omega_1 \setminus \{x_k^*\}$ kümesinde duraksama noktasına sahip değildir.

İspat. Her $x \in \Omega_1$ için $x \neq x_k^*$ olmak üzere $\tilde{\phi}(x, x_k^*, \beta, \alpha) = f(x_k^*) + \alpha \varphi(\|x - x_k^*\|^2)$ olup $\nabla \tilde{\phi}(x, x_k^*, \beta, \alpha) = \alpha \nabla \varphi(\|x - x_k^*\|^2) \neq 0$ olur. $\square$

Teorem 5.8. x_k^* noktası f fonksiyonunun bir lokal minimumu olsun. x_{k+1}^* noktası f fonksiyonunun x_k^* lokal minimumundan daha küçük değere sahip bir lokal minimumu olsun. Bu durumda $\bar{x} \in S(x_{k+1}^*)$ olacak şekilde $\tilde{\phi}(x, x_k^*, \beta, \alpha)$ fonksiyonunun $\bar{x}$ lokal minimumu vardır.

İspat. İlk olarak $\tilde{\phi}(x, x_k^*, \beta, \alpha)$ fonksiyonunun bir lokal minimumunun var olduğu ispatlanacaktır. f fonksiyonu x_k^* noktasında bir lokal minimuma sahip olsun. Bu durumda $\Omega_3 = \{x : f(x) \leq f(x_k^*), x \in \Omega\}$ kümesinin boştan farklı bir küme olduğu görülür. Buna ek olarak, Ω_3 kümesi f sürekli olduğu için kapalıdır ve sınırlı olan Ω kümesi tarafından kapsandığı için sınırlıdır. O halde $\tilde{\phi}(x, x_k^*, \beta, \alpha)$ fonksiyonunun Ω_3 kümesinde lokal minimumu vardır.

f fonksiyonunun x_k^* lokal minimumundan daha küçük değere sahip lokal minimumuna x_{k+1}^* diyelim. $\bar{x}$ noktası $\tilde{\phi}(x, x_k^*, \beta, \alpha)$ fonksiyonunun bir lokal minimumu olmak üzere

$$\nabla \tilde{\phi}(\bar{x}, x_k^*, \beta, \alpha) = \nabla f(\bar{x}) + \alpha \nabla \varphi(\|\bar{x} - x_k^*\|^2) = 0$$

sonucuna ulaşılır. Buradan $\nabla f(\bar{x}) = -\alpha \nabla \varphi(\|\bar{x} - x_k^*\|^2)$ olduğu görülür. $\varphi(\|x - x_k^*\|^2)$ fonksiyonunun tanımından

$$(\bar{x} - x_k^*) \nabla f(\bar{x}) = (\bar{x} - x_k^*) (-\alpha \nabla \varphi(\|\bar{x} - x_k^*\|^2)) > 0$$

elde edilir. Yeterince küçük α değerleri için $\bar{x}$ noktası x_{k+1}^* noktasına dolayısıyla $(\bar{x} - x_k^*)$ vektörü $(x_{k+1}^* - x_k^*)$ vektörüne yaklaşır ve $\|\bar{x} - x_k^*\| \geq \|x_{k+1}^* - x_k^*\|$ elde edilir. Böylece $(\bar{x} - x_k^*)$ ve $(\bar{x} - x_{k+1}^*)$ vektörlerinin aynı yönde olduğu görülür. Buradan

$$(\bar{x} - x_k^*) \nabla f(\bar{x}) = (\bar{x} - x_{k+1}^*) (-\alpha \nabla \varphi(\|\bar{x} - x_k^*\|^2)) > 0$$

elde edilir ve $\bar{x} \in S(x_{k+1}^*)$ olduğu görülür. $\square$

Algoritma 2

- Adım 0. – $k = 1, \beta = 0.1, \alpha = 1, \varepsilon = 10^{-2}$,
– Maksimum yön sayısı $N, i = 1, 2, \dots, N$ için birim vektörler d_i , başlangıç noktası x_0 , maksimum iterasyon sayısı m ve Ω kümesinin sınırlarını belirle, $i = 1$ olarak ayarla.
– $\varphi(t)$ fonksiyonunu belirle.
- Adım 1. x_0 noktasından başlayarak f fonksiyonunun k –ıncı lokal minimumunu bul.
- Adım 2.
$$\tilde{\phi}(x, x_k^*, \beta, \alpha) = f(x_k^*) + (f(x) - f(x_k^*)) \tilde{\chi}_{A_k}(x, \beta) + \alpha \varphi(\|x - x_k^*\|^2),$$
 fonksiyonu kur.
- Adım 3. $x_0 = x_k^* + \varepsilon d_i$ noktalarından başlayarak lokal minimum bulan algortimaları kullanarak $\tilde{\phi}(x, x_k^*, \beta, \alpha)$ fonksiyonunu minimize et ve bulunan noktayı x_s olarak ata.
- Adım 4. $x_s \in \Omega$ ise Adım 5'e git; aksi halde Adım 6'ya git.
- Adım 5. $x_0 = x_s$ al ve Adım 1'e git.
- Adım 6. $i \geq D$ veya $k \geq m$ ise algortimayı durdur $x^* = x_k^*$ olarak global minimum olarak sonuçlandır; aksi halde $i = i + 1$ al ve Adım 3'e git.
-

Eğer her seferinde farklı lokal minimumlar bulunursa Algoritma 2 sonlu sayıda iterasyon yaparak global minimuma ulaşacaktır. Dolayısıyla, Algoritma 2 de durma kriteri olarak kullanılacak olan N sayısı yeterince büyük seçilmelidir. α ve β parametrelerine algoritmanın başlangıcında karar verilir ve döngü boyunca bir daha değiştirilmez. Algoritma 2 bir probleme uygulandığında lokal minimum aramak için herhangi bir lokal minimum bulma algoritması kullanılır.

5.2.1. Alternatif estetik iniş metodu

Bu bölümde Estetik İniş fonksiyonuna benzer nitelik taşıyan fakat farklı düzgünleştirme yaklaşımı kullanılarak elde edilen Alternatif Estetik İniş fonksiyonu ve algoritması sunulacaktır. x_k^* ile f fonksiyonunun lokal minimumu, f_k^* ile x_k^* noktasının karşılık gelen değeri temsil edilsin. $\phi(x, x_k^*) := \min\{f(x), f(x_k^*)\}$ ve $A_k = \{t \in \mathbb{R} : t = f(x) - f_k^* < 0\}$

kümesi için $\chi_{A_k} : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$, A_k kümesinin

$$\chi_{A_k}(x) = \begin{cases} 1, & f(x) - f_k^* < 0 \\ 0, & f(x) - f_k^* \geq 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan karakteristik fonksiyonu olmak üzere ϕ fonksiyonu

$$\phi(x, x_k^*) = f_k^* + (f(x) - f_k^*) \chi_{A_k}(x) \quad (5.3)$$

biçiminde ifade edilebilir. Lokal düzgünleştirme yaklaşımı kullanılarak ϕ fonksiyonunun

$$\tilde{\phi}(x, x_k^*, \beta) = f_k^* + (f(x) - f_k^*) \tilde{\chi}_{A_k}(x, \beta)$$

düzgünleştirme fonksiyonu elde edilir. Burada

$$q(x, \beta) = \frac{1}{4\beta^3} (f(x) - f_k^*)^3 - \frac{3}{4\beta} (f(x) - f_k^*) + \frac{1}{2}$$

olmak üzere $\chi_{A_k}^{l_1}(x, \beta)$ fonksiyonu

$$\chi_{A_k}^{l_1}(x, \beta) = \begin{cases} 0, & f(x) - f_k^* > \beta \\ q(x, \beta), & -\beta \leq f(x) - f_k^* \leq \beta \\ 1, & f(x) - f_k^* < -\beta \end{cases}$$

biçiminde tanımlanmıştır.

Teorem 5.9. $\beta > 0$ ve x_k^* noktası f fonksiyonunun bir lokal minimumu olmak üzere;

- i. $\tilde{\phi}(x, x_k^*, \beta)$ fonksiyonu düzgündür,
- ii. $\beta \rightarrow 0$ iken $\tilde{\phi}(x, x_k^*, \beta)$ fonksiyonu $\phi(x, x_k^*)$ fonksiyonuna yaklaşır.

$\tilde{\phi}(x, x_k^*, \beta)$ fonksiyonu $f(x) > f(x_k^*)$ olduğu durumlarda x noktaları için sabit fonksiyona eşittir. Bu durum $\tilde{\phi}(x, x_k^*, \beta)$ fonksiyonunu minimize ederken hesaplama maliyetlerini artırmasına neden olabilir. Üstelik parametreye bağlı olarak bulunan lokal minimum noktadan başka bir lokal minimum noktaya geçişi zorlaştırabilir. Önceki bölümde

olduğu gibi aynı özelliklere sahip $\phi(x, x_k^*, \beta)$ fonksiyonuna $\mathbb{R}_+$ üzerinde tanımlı φ fonksiyonu eklenir. Sonuç olarak Alternatif Estetik İniş fonksiyonu $\alpha > 0$ parametre olmak üzere

$$\tilde{\phi}(x, x_k^*, \beta, \alpha) = f(x_k^*) + (f(x) - f(x_k^*)) \chi_{A_k}^{l_1}(x, \beta) + \alpha \varphi(\|x - x_k^*\|^2)$$

elde edilir.

Teorem 5.10. x_k^* noktası f fonksiyonunun bir lokal minimumu olsun. $\tilde{\phi}(x, x_k^*, \beta, \alpha)$ fonksiyonu $x \in \Omega_1$ kümesinde duraksama noktasına sahip değildir.

İspat. Her $x \in \Omega_1$ için $x \neq x_k^*$ olmak üzere $\tilde{\phi}(x, x_k^*, \beta, \alpha) = f(x_k^*) + \alpha \varphi(\|x - x_k^*\|^2)$ olup $\nabla \tilde{\phi}(x, x_k^*, \beta, \alpha) = \alpha \nabla \varphi(\|x - x_k^*\|^2) \neq 0$ olur. $\square$

Teorem 5.11. x_k^* noktası f fonksiyonunun bir lokal minimumu olsun. x_{k+1}^* noktası f fonksiyonunun x_k^* lokal minimumundan daha küçük değere sahip bir lokal minimumu olsun. Bu durumda $\bar{x} \in S(x_{k+1}^*)$ olacak şekilde $\tilde{\phi}(x, x_k^*, \beta, \alpha)$ fonksiyonunun $\bar{x}$ lokal minimumu vardır.

İspat. x_k^* noktası f amaç fonksiyonunun bir lokal minimum noktası olsun. Bu durumda $\Omega_3 = \{x : f(x) \leq f(x_k^*), x \in \Omega\}$ kümesinin boştan farklı bir küme olduğu görülür. Buna ek olarak, Ω_3 kümesi f sürekli olduğu için kapalıdır ve sınırlı olan Ω kümesi tarafından kapsandığı için sınırlıdır. O halde $\tilde{\phi}(x, x_k^*, \beta, \alpha)$ fonksiyonunun Ω_3 kümesinde lokal minimumu vardır.

f fonksiyonunun x_k^* lokal minimumundan daha küçük değere sahip lokal minimumu x_{k+1}^* olsun. $\bar{x}$ noktası $\tilde{\phi}(x, x_k^*, \beta, \alpha)$ fonksiyonunun bir lokal minimumu olmak üzere

$$\nabla \tilde{\phi}(\bar{x}, x_k^*, \beta, \alpha) = \nabla f(\bar{x}) + \alpha \nabla \varphi(\|\bar{x} - x_k^*\|^2) = 0$$

sonucuna ulaşılır. Buradan $\nabla f(\bar{x}) = -\alpha \nabla \varphi(\|\bar{x} - x_k^*\|^2)$ olduğu görülür. $\varphi(\|x - x_k^*\|^2)$ fonksiyonunun tanımından

$$(\bar{x} - x_k^*) \nabla f(\bar{x}) = (\bar{x} - x_k^*) (-\alpha \nabla \varphi(\|\bar{x} - x_k^*\|^2)) > 0$$

elde edilir. Yeterince küçük α değerleri için $\bar{x}$ noktası x_{k+1}^* noktasına $(\bar{x} - x_k^*)$ vektörü ise $(x_{k+1}^* - x_k^*)$ vektörüne yaklaşıp ve $\|\bar{x} - x_k^*\| \geq \|x_{k+1}^* - x_k^*\|$ elde edilir. Böylece $(\bar{x} - x_k^*)$ ve $(\bar{x} - x_{k+1}^*)$ vektörlerinin aynı yönde olduğu görülür. Buradan

$$(\bar{x} - x_k^*) \nabla f(\bar{x}) = (\bar{x} - x_{k+1}^*) (-\alpha \nabla \varphi(\|\bar{x} - x_k^*\|^2)) > 0$$

elde edilir ve $\bar{x} \in S(x_{k+1}^*)$ olduğu görülür. □

Algoritma 3

- Adım 0. – $k = 1, \beta = 0.1, \alpha = 0.5, \varepsilon = 10^{-2}, \varepsilon = 10^{-20}, R = 10, i=1$ olarak ata,
 – α parametresi için üst sınır $M, i = 1, 2, \dots, N$ olmak üzere d_i yönleri ve Ω kümesinin sınırlarını belirle .
 – $H(t)$ fonksiyonunu seç.
- Adım 1. x_0 noktasından başlayarak f fonksiyonunu minimize et ve bulunan noktayı x_k^* olarak ata.
- Adım 2. $\tilde{\phi}(x, x_k^*, \beta, \alpha)$ fonksiyonunu kur.
- Adım 3. $x_0 = x_k^* + \varepsilon d_i$ noktalarını kullanarak $\tilde{\phi}(x, x_k^*, \beta, \alpha)$ fonksiyonunu minimize et ve bulunan noktayı x_s olarak ata.
- Adım 4. $x_s \in \Omega$, ise Adım 5'e git; aksi halde Adım 6'ya git.
- Adım 5. $x_0 = x_s$ al ve Adım 1'e git.
- Adım 6. $i < N$ ise $i = i + 1$ al ve Adım 3'e git; aksi halde Adım 7'ye git.
- Adım 7. $\alpha \geq M$ veya $\nabla \tilde{\phi}(x, x_k^*, \beta, \alpha)$ arama bölgesi dışında 0 oluyorsa veya $|f_k^* - f_{k-1}^*| \leq \varepsilon$ ise algoritmayı durdur $x^* = x_k^*$ olacak şekilde global minimum olarak ata; aksi halde $\alpha = \alpha R$ al ve Adım 2 ye git.
-

Yardımcı fonksiyon kullanılarak çalışan global optimizasyon sürecinin işleyişi Algoritma 3 ile verilmiştir. Alternatif Estetik İniş Metodu için kullanılan yardımcı fonksiyon ile Estetik İniş Metodu için kullanılan yardımcı fonksiyon birbirine benzer niteliklere sahip olsa da Algoritma 2 ve Algoritma 3 birbirinden farklı yapılara sahiplerdir. Algoritma 3'te α parametresi döngü içerisinde güncellenmekte belli bir değeri aşınca durma kriteri olarak kullanılmaktadır.

5.3. Yeni Düzgün İniş Metodu ve Algoritmaları

Herhangi bir $t \in \mathbb{R}$ için f fonksiyonu

$$f(x) = \max\{f(x) - t, 0\} + \min\{f(x) - t, 0\} + t \quad (5.4)$$

biçiminde ifade edilebilir. Denk olarak

$$q_1(x, t) = \begin{cases} 0, & f(x) - t < 0 \\ 1, & f(x) - t \geq 0 \end{cases}$$

ve

$$q_2(x, t) = \begin{cases} 1, & f(x) - t < 0, \\ 0, & f(x) - t \geq 0. \end{cases}$$

olmak üzere

$$f(x) = (f(x) - t)q_1(x, t) + (f(x) - t)q_2(x, t) + t \quad (5.5)$$

biçiminde tanımlanır. Yukarıdaki 5.5 formülasyonunda f fonksiyonu iki parçaya ayrılmıştır. Üst parça $\phi(x, t) = (f(x) - t)q_1(x, t)$, t değerinden daha büyük değerler alan ve alt parça $\psi(x, t) = (f(x) - t, 0)q_2(x, t)$, t değerinden daha küçük değerler alan fonksiyonlardır. f fonksiyonunun global minimumunu ararken bilinen t değerinden daha büyük değerler alan yerlerde aramak zaman kaybı olacaktır. Bu kaybı önlemek amacıyla $\phi(x, t)$ fonksiyonunun yerine bu noktalar üzerinde tanımlı yeni bir fonksiyon kullanılacaktır. Aslında hiçbir yerde lokal minimumu olmayan

$$\varphi(x, t) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\arctan(x_j - l_j) + \arctan(-(x_j - u_j)) + \pi}{\pi} \right) q_1(x, t) \quad (5.6)$$

fonksiyonu (5.5) ifadesinde $\phi(x, t)$ fonksiyonunun yerine kullanılacaktır. Böylece yeni fonksiyon

$$S_f(x, t) = \varphi(x, t) + \psi(x, t) + t \quad (5.7)$$

biçiminde olacaktır. Fakat $\varphi(x, t)$ ve $\psi(x, t)$ fonksiyonlarının tanımından dolayı $S_f(x, t)$ fonksiyonu düzgün olmayan bir fonksiyon olabilir. Bu fonksiyonun düzgünlüğünü bozan terimler $\varphi(x, t)$ ve $\psi(x, t)$ fonksiyonlarının bünyesinde bulunan $q_1(x, t)$ ve $q_2(x, t)$ terimleridir. Eğer $q_1(x, t)$ ve $q_2(x, t)$ terimleri düzgünleştirilir ve (5.7) ifadesinde yerine

yazılırsa elde edilen fonksiyon düzgün olacaktır. Geçiş fonksiyonları olarak

$$P_{\varepsilon}(-(f(x) - t)) = \frac{1}{4\varepsilon^3} (-(f(x) - t))^3 - \frac{3}{4\varepsilon} (-(f(x) - t)) + 1/2$$

ve

$$P_{\varepsilon}((f(x) - t)) = \frac{1}{4\varepsilon^3} (f(x) - t)^3 - \frac{3}{4\varepsilon} (f(x) - t) + 1/2$$

olmak üzere $q_1(x, t)$ ve $q_2(x, t)$ fonksiyonlarının düzgünleştirme fonksiyonları

$$\tilde{q}_1(x, t, \varepsilon) = \begin{cases} 0, & f(x) - t < -\varepsilon \\ P_{\varepsilon}(-(f(x) - t)), & -\varepsilon \leq f(x) - t \leq \varepsilon \\ 1, & f(x) - t > \varepsilon \end{cases}$$

ve

$$\tilde{q}_2(x, t, \varepsilon) = \begin{cases} 1, & f(x) - t < -\varepsilon \\ P_{\varepsilon}((f(x) - t)), & -\varepsilon \leq f(x) - t \leq \varepsilon \\ 0, & f(x) - t > \varepsilon \end{cases}$$

fonksiyonları elde edilir. Bu fonksiyonlar $\varphi(x, t)$ ve $\psi(x, t)$ fonksiyonlarında kullanılarak

$$\tilde{\varphi}(x, t, \varepsilon) = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\arctan(x_j - l_j) + \arctan(-(x_j - u_j)) + \pi}{\pi} \right) \tilde{q}_1(x, t, \varepsilon)$$

ve

$$\tilde{\psi}(x, t, \varepsilon) = (f(x) - t) \tilde{q}_2(x, t, \varepsilon)$$

düzgünleştirme fonksiyonları elde edilir. Son olarak $\varepsilon > 0$ için

$$\tilde{S}_f(x, t, \varepsilon) = \tilde{\varphi}(x, t, \varepsilon) + \tilde{\psi}(x, t, \varepsilon) + t \quad (5.8)$$

yardımcı fonksiyonu elde edilmiş olur. Bu fonksiyonun özellikleri ile ilgili aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 5.12. $t \in \mathbb{R}$ olsun. $\tilde{S}_f(x, t, \varepsilon)$ fonksiyonu $j = 1, 2, \dots, n$ ve $x_j^m = \frac{l_j + u_j}{2}$ için $x \in \Omega_1 \setminus \{x^m\}$ üzerinde bir duraksama noktasına sahip değildir.

İspat. $\Omega_1(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) - t > \varepsilon\}$ kümesini ve f^* ile f fonksiyonunun global minimum değeri olarak tanımlayalım. $\Omega_1(\varepsilon) \subset \Omega_1$ olduğu kolayca görülebilir. İspat için iki farklı durum söz konusudur.

Durum 1: $t \leq f^*$ olsun $\Omega_1(\varepsilon) = \mathbb{R}^n = \Omega_1$ olup $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\tilde{S}_f(x, t, \varepsilon) = \tilde{\varphi}(x, t, \varepsilon) + t$$

olup bu fonksiyon $\mathbb{R}^n$ üzerinde lokal minimuma sahip değildir. Üstelik $x_j^m = \frac{l_j + u_j}{2}$, $j = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{x^m\}$ için bir duraksama noktasına da sahip değildir.

Durum 2: $t > f^*$ olsun yeterince küçük $\varepsilon > 0$ için $\Omega_1(\varepsilon) \neq \emptyset$ ve $x \in \Omega_1(\varepsilon)$ için

$$\tilde{S}_f(x, t, \varepsilon) = \tilde{\varphi}(x, t, \varepsilon) + t$$

olur. $\tilde{\varphi}(x, t, \varepsilon)$ fonksiyonu $\mathbb{R}^n \setminus \{x^m\}$ üzerinde duraksama noktasına sahip olmadığından, $\tilde{S}_f(x, t, \varepsilon)$ fonksiyonu $\Omega_1(\varepsilon) \setminus \{x^m\}$ üzerinde bir duraksama noktasına sahip değildir. $\varepsilon \rightarrow 0$ iken $\bigcup \Omega_1(\varepsilon) = \Omega_1$ olduğundan istenilen elde edilir. $\square$

Teorem 5.13. $t \in \mathbb{R}$ ve $x_k^* \in \mathbb{R}^n$ olsun. x_k^* noktasının t değerinden daha küçük değerli bir lokal minimum olması için gerek ve yeter koşul x_k^* noktasının $\tilde{S}_f(x, t, \varepsilon)$ fonksiyonunun lokal minimumu olmasıdır.

İspat. İspatın yeterlilik tarafı zor değildir. $f_k^* \leq t$ ve $x_k^* \in \Omega_2$ olduğundan $q_1(x, t, \varepsilon) = 0$ ve $q_2(x, t, \varepsilon) = 1$ olup

$$\tilde{S}_f(x, t, \varepsilon) = f(x)$$

elde edilir. Gereklilik kısmı için $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \mathbb{R}^n$ ve $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ olduğundan x_k^* noktasının Ω_1 veya Ω_2 kümesine ait olması gerekir. Teorem 5.12 den $x_k^* \notin \Omega_1$ sonucu elde edilir. Böylelikle $x_k^* \in \Omega_2$ ve

$$\tilde{S}_f(x, t, \varepsilon) = f(x)$$

olur. x_k^* noktası S_f fonksiyonunun lokal minimumu olduğundan f fonksiyonunun da lokal minimumudur. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

Bir global optimizasyon sürecinde 5.7 ifadesiyle tarif edilen fonksiyonun önemli avantajları vardır. Bunlardan bazıları aşağıda sıralanmıştır.

- i. $\tilde{S}_f$ fonksiyonu düzgün olduğu için türev veya gradyan tabanlı lokal minimum bulma metotları probleme uygulanabilmektedir.
- ii. Verilen bir t değerinden daha büyük bir değer sahip lokal minimum noktalar $\tilde{S}_f$ fonksiyonunun lokal minimumu değildir.
- iii. Verilen bir t değerinden daha küçük bir değere sahip lokal minimum noktalar $\tilde{S}_f$ fonksiyonunda lokal minimumlarıdır aynı zamanda amaç fonksiyonunun bu lokal minimum noktadaki değeri ile $\tilde{S}_f$ fonksiyonunun bu noktalardaki değeri birbiriyle aynıdır.
- iv. $\tilde{S}_f$ fonksiyonu sadece düzgünleştirme parametresine sahiptir.

5.3.1. Düzgün iniş metodunun klasik algoritması

Burada klasik yardımcı fonksiyon yaklaşımlarında kullanılan algoritma eldeki yeni yardımcı fonksiyon ve onun özelliklerine göre yeniden dizayn edilerek sunulacaktır. Global optimizasyon algoritması Algoritma 4 de verilmiştir.

Global optimizasyon algoritması verilmeden önce belirtilmelidir ki $\varepsilon > 0$ yeterince küçük seçilmelidir. Eğer ε küçük seçilmezse değeri eldeki lokal minimum değerine çok yakın olan (aralarındaki ε sayısından küçük olan) lokal minimumlar kaybedilebilir.

Algoritma 4 de Adım 1 için iki seçenek vardır. f_{min} değeri herhangi bir lokal minimum değeri bularak veya algoritma kullanıcısı herhangi bir f_{min} değeri tahminide bulunarak algoritmayı başlatabilir. Fakat bu değer f^* değerinden daha küçük olmamalıdır.

Teorem 5.14. $k = 1, 2, \dots, m$ olmak üzere $\{x_k^*\}$ noktaları Algoritma 4 tarafından üretilsin. Bu durumda $x_k^* \in \Omega$ ve

$$f(x_{k+1}^*) < f(x_k^*)$$

Algoritma 4

- Adım 0. $k = 1$, $\varepsilon = 10^{-4}$, maksimum fonksiyon değerlendirme adedi K , maksimum yön sayısı N , $i = 1, 2, \dots, N$ için birim yön vektörleri d_i ve Ω kümesinin sınırlarını belirle.
- Adım 1. x_0 noktasından başlayarak x_k^* noktasını bul ve karşılık gelen değeri $t = f_{\min}$ olarak ata veya $t = f_{\min}$ direkt olarak tahmin et.
- Adım 2. $\tilde{S}_f(x, f_{\min}, \varepsilon)$ fonksiyonunu kur.
- Adım 3. $x_0 = x_k^* + \varepsilon d_i$ noktasından başlayarak $\tilde{S}_f(x, f_{\min}, \varepsilon)$ fonksiyonunun minimumunu ara ve bulunan minimumu x_s olarak ata.
- Adım 4. $x_s \in \Omega$ ise Adım 5; aksi halde Adım 6'ya git.
- Adım 5. $x_{k+1} = x_s$ ve $f_{\min} = f(x_{k+1}^*)$ al ve Adım 2'ye git.
- Adım 6. Eğer $i \geq N$ veya toplam fonksiyon değerlendirmesi K sayısını geçerse algortimayı durdur $x^* = x_k^*$ olarak belirle; aksi halde $i = i + 1$ Adım 3'e git.
-

sağlanır.

İspat. $\{x_k^*\}$ noktaları f amaç fonksiyonunun lokal minimum noktalarından olduğu ve f amaç fonksiyonu global konveks olduğu için $x_k^* \in \Omega$ kolayca elde edilir. f fonksiyonu m tane lokal minimuma sahip olsun. Bu durumda Teorem 5.12 ve 5.13 den $k = 1, 2, \dots, m - 1$ için

$$f(x_{k+1}^*) < f(x_k^*)$$

olduğu görülür. □

Algoritmanın işleyişi ile ilgili olarak, Algoritma 4 ün uygulanabilmesi için bir lokal minimum bulma yöntemine ihtiyaç vardır. Newton, Steepest Descent, Quasi Newton yöntemlerinden herhangi biri kullanılabilir.

5.3.2. Yeni bir lokal minimum araştırma stratejisi

Bu bölümde klasik yardımcı fonksiyon algoritmasından farklı bir anlayışa dayalı yeni başlangıç noktaları üreten metot kullanılarak yeni bir global optimizasyon algoritması sunulacaktır.

Hesaplama maliyetlerini düşürmek adına Ω optimizasyon bölgesine homojen şekilde dağılan ve uygun noktaları seçen bir yöntemin kurulması amaçlanmaktadır. Kısaca “PDS algoritması” olarak adlandırılan bu yeni strateji iki ana fazdan oluşmaktadır. Bunlar “dağıtma” ve “seçme” olarak belirlenmiştir.

Dağıtma fazı için $\Omega_{0,0} = [l_j, u_j]^n \subset \mathbb{R}^n$ hiperküpünü düşünelim. İlk olarak $\Omega_{0,0}$ bölgesinin x_{m_0} orta noktası $j = 1, 2, \dots, n$ için

$$x_{m_{0,0}}^j = \frac{u_j + l_j}{2} \quad (5.9)$$

ile elde edilir. Daha sonra $r = 1, 2, \dots, 2^p$ olmak üzere x_{m_0} noktasının köşe olduğu $D_{1,r}$ alt küpleri ve bu küplerin orta noktalarını $j = 1, 2, \dots, n$ ve $r = 0, 1$ olmak üzere

$$x_{m_{1,r}}^j = \frac{l_j + x_{m_0}^j}{2} + rx_{m_0}^j$$

formülü ile bulunur. Sonraki adımlar için $p = 0, 1, 2, \dots$ ve $r = 1, 2, \dots, 2^p$ için $D_{p,r}$ küplerini ve bu küplerin orta noktalarını $j = 1, 2, \dots, n$ ve $r = 0, 1, 2, \dots, 2^p - 1$ için

$$x_{m_{p-1}}^j = \frac{u_j + l_j}{2 * p}$$

olmak üzere

$$x_{m_{p,r}}^j = \frac{l_j + x_{m_{p-1}}^j}{2} + rx_{m_{p-1}}^j$$

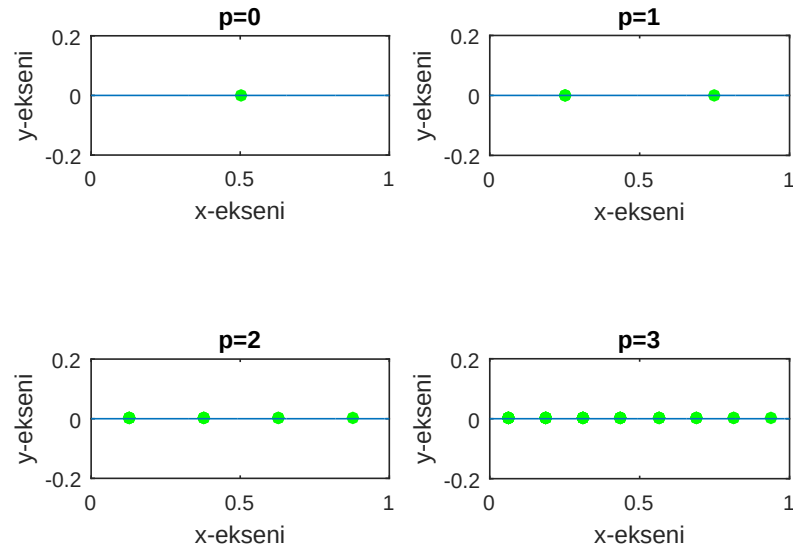
ile elde edilir.

$n = 1$ için nokta dağıtma fazı Şekil 5.1 ile gösterilmiştir. Benzer şekilde $n = 2$ için nokta dağıtma fazı Şekil 5.2 ile gösterilmiştir.

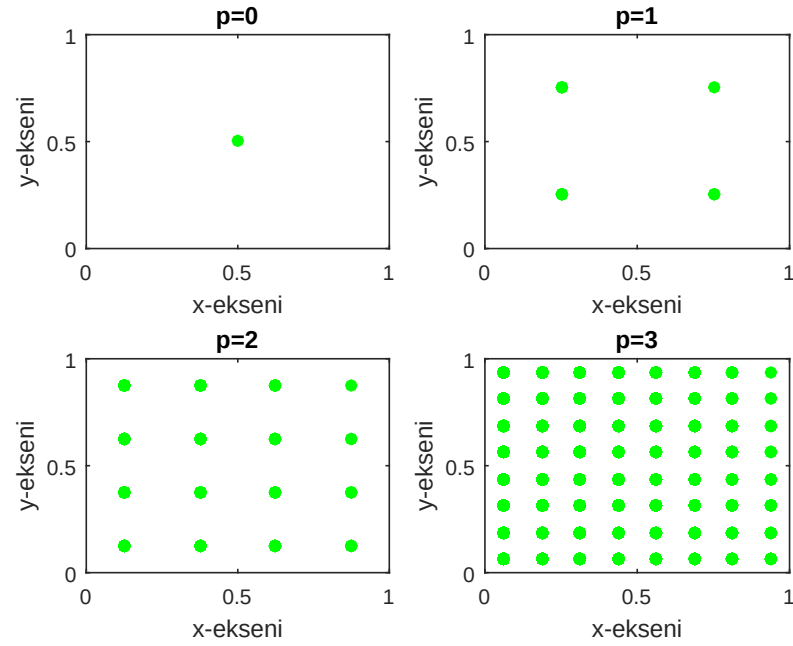
Seçme fazı için uygun olan noktaya ulaşıncaya dağıtma fazını durdurma kriteri dizayn edilmiştir. $f(x) > t$ için

$$\tilde{S}_f(x, t, \varepsilon) = \tilde{\varphi}(x, t, \varepsilon) + t$$

olduğundan $\tilde{S}_f(x, t, \varepsilon) = \tilde{\varphi}(x, t, \varepsilon) + t$ olacak şekildeki x noktaları uygun noktalar değildir. Eğer bir x_s noktası için $\tilde{S}_f(x_s, t, \varepsilon) \neq \varphi(x_s, t, \varepsilon) + t$ oluyorsa bu durumda x_s uygun bir noktadır. $t \leq f^*$ olduğu durumda her nokta için $\tilde{S}_f(x, t, \varepsilon) = \varphi(x, t, \varepsilon)$



Şekil 5.1. $n = 1$ için PDS algoritmasının uygulanışı.



Şekil 5.2. $n = 2$ için PDS algoritmasının uygulanışı.

olacaktır. Bu yaklaşıma dayalı nokta dağıtma ve seçme algoritması “PDS Algoritması” adı altında sunulmuştur.

PDS Algoritması:

Adım 0. $r = 1$, t değerini ve p pozitif tam sayısını belirle.

Adım 1. x_{m_p} noktasını $j = 1, 2, \dots, n$ için $x_{m_p}(j) = \frac{u(j)+l(j)}{2p}$ hesapla.

Adım 2. $i_j = 0, 1/r, \dots, 2 - 1/r$, $j = 1, 2, \dots, n$ için d_r noktalarını

$$d_r(j) = \frac{i_j + m_j}{2}.$$

hesapla ve Adım 3’e git

Adım 3. $\tilde{\varphi}(d_r, t, \varepsilon)$ ve $\tilde{S}_f(d_r, t, \varepsilon)$ değerlerini hesapla ve Adım 4’e git.

Adım 4. $\tilde{\varphi}(d_r, t, \varepsilon) = \tilde{S}_f(d_r, t, \varepsilon)$ ise dur ve d_r yi başlangıç noktası olarak belirle, aksi halde $r = r + 1$ al ve Adım 5’e git.

Adım 5. $r \geq 2^{np}$ algoritmayı durdur; aksi halde Adım 3’e git.

PDS Algoritması kullanılarak elde edilen noktaların kümesi Ω içinde yoğundur. Bir başka ifadeyle $p \rightarrow \infty$ iken PDS Algoritması kullanılarak Ω bölgesindeki hemen her nokta minimum bulmak için elden geçirilmiş olur. PDS Algoritması için dağıtma yöntemi olarak Ω bölgesi içine düzenli olarak yerleştirilen hiperdikdörtgenlerin orta noktaları kullanılmıştır. Bu dağıtma yöntemi yerine farklı yöntemler uygulanabilmektedir (örneğin; simpleks parçaların orta noktaları gibi). Ayrıca PDS Algoritması için seçme kriteri olarak fonksiyon değerleri dikkate alınmıştır. Seçme kriteri olarak Dağıtma fazında yardımcı fonksiyonun gradyan değeri veya DIRECT (Jones vd., 1993) metodunda kullanıldığı gibi Lipschitz sabitleri de kullanılabilir. PDS algoritması kullanılarak oluşturulan yeni metot Algoritma 5 ile verilmiştir.

Teorem 5.15. $k = 1, 2, \dots, m$ olmak üzere $\{x_k^*\}$ noktaları Algoritma 5 tarafından üretilsin. Bu durumda $x_k^* \in \Omega$ ve

$$f(x_{k+1}^*) < f(x_k^*)$$

Algoritma 5

- Adım 0. $k = 1$, $p = 1$, $r = 1$, $\varepsilon = 10^{-4}$, maksimum fonksiyon değerlendirme sayısı K , $N \geq 1$ sayısı ve Ω kümesinin sınırlarını belirle.
- Adım 1. Herhangi bir x_0 noktasından başlayarak bir lokal minimum bul ve $f_{\min}$ hesapla veya tahmini $f_{\min}$ değeri gir.
- Adım 2. $\tilde{S}_f(x, f_{\min}, \varepsilon)$ fonksiyonunu kur.
- Adım 3. PDS Algoritmasını çalıştır, eğer d_r noktasını sonuç olarak verirse bu noktadan başlayarak $\tilde{S}_f(x, f_{\min}, \varepsilon)$ fonksiyonunu minimize et ve bu noktayı x_s olarak ata ve Adım 4'e git ; aksi halde Adım 6'ya git.
- Adım 4. $x_s \in \Omega$ ise Adım 5'e git; değilse Adım 6'ya git.
- Adım 5. $x_{k+1} = x_s$, ve $f_{\min} = f(x_{k+1}^*)$ olarak güncelle ve Adım 2'ye git.
- Adım 6. $r \leq r^{np}$ ise $r = r + 1$ al ve Adım 3'e git; aksi halde Adım 7'ye git.
- Adım 7. $p \geq N$ veya toplam fonksiyon değerlendirme sayısı K sayısından büyük veya $\|f(x_{k+1}) - f(x_k)\| < \varepsilon$ ise algoritmayı durdur ve $x^* = x_k^*$ global minimum olarak belirle; aksi halde $p = p + 1$ ve $r = 1$ al ve Adım 3'e git.
-

sağlanır.

İspat. $\{x_k^*\}$ noktaları f amaç fonksiyonunun lokal minimum noktalarından olduğu ve f global konveks olduğu için $x_k^* \in \Omega$ kolayca elde edilir. f fonksiyonu m tane lokal minimuma sahip olsun. Teorem 5.12 ve 5.13 den $k = 1, 2, \dots, m - 1$ için

$$f(x_{k+1}^*) < f(x_k^*)$$

olduğu görülür. □

Algoritma 5 in işleyişi ile ilgili olarak: Uygulanabilmesi için bir lokal minimum bulma yöntemine ihtiyaç vardır. Newton, Steepest Descent, Quasi Newton yöntemlerinden biri kullanılabilir. Burada Algoritma 1, 2, 3 ve 4'ten farklı olarak daha alt seviyedeki lokal minimumlara ulaşmak amacıyla yeni bir strateji uygulanmıştır.

6. UYGULAMALAR

6.1. Düzgünleştirme Yaklaşımlarının Uygulamaları

Burada Bölüm 4.1.2’de verilen düzgünleştirme yaklaşımının kısıtlı optimizasyon problemlerini çözmek için kullanılan ceza fonksiyonu metodu ve Bölüm 4.2 de verilen düzgünleştirme yaklaşımının düzgünleştirme problemlerine uygulamalarına yer verilecektir.

6.1.1. Düzgünleştirme yaklaşımının kısıtlı optimizasyon problemleri için ceza fonksiyonu metoduna uygulanması

Ceza fonksiyonu lineer olmayan kısıtlı optimizasyon problemlerinin çözümü için kullanılan metotlardan birisidir. Genel olarak kısıtlı optimizasyon problemi (KOP)

$$(KOP) \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ s.t. \quad g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

biçiminde ifade edilir. Burada $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı ve $g_i(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i \in I = \{1, 2, \dots, m\}$ fonksiyonları sürekli türevlenebilir fonksiyonlardır. Problemin çözüm kümesi G_0 ($G_0 := \{x \in \mathbb{R}^n | g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m\}$) olsun. G_0 kümesinin boştan farklı bir küme olduğunu varsayalım.

(KOP) problemin tam ceza fonksiyonu

$$\tilde{F}_p(x, \rho) := f(x) + \rho \sum_{i=1}^m \max\{g_i(x), 0\}^p, \quad p \in (0, 1]$$

olmak üzere

$$(KOP_p) \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} F_p(x, \rho)$$

biçiminde kısıtsız optimizasyon problemi olarak tanımlanır. Fakat (KOP_p) probleminde bulunan $F_p(x, \rho)$ fonksiyonunun tanımında “max” tipinde operatörler bulunduğundan genellikle düzgün fonksiyon değildir. Bu fonksiyona Bölüm 4.1.2 de sunulan

düzgünleştirme yaklaşımı uygulandığında

$$\tilde{F}_p(x, \rho, r, \beta) = f(x) + \rho \sum_{i=1}^m q_r^p(g_i(x), \beta)$$

düzgün fonksiyonu elde edilir. Buna göre $(K\tilde{O}P_p)$ problemi

$$(K\tilde{O}P_p) \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} \tilde{F}_p(x, \rho, r, \beta)$$

biçiminde ifade edilir.

$\tilde{F}_p(x, \rho, r, \beta)$ fonksiyonu ve $(K\tilde{O}P_p)$ problemi ile ilgili aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 6.1. $x \in \mathbb{R}^n$, $p \in (0, 1]$, $\beta > 0$ ve $r > 1$ olsun. Bu durumda

$$0 \leq \tilde{F}_p(x, \rho, r, \beta) - F_p(x, \rho) \leq \frac{m}{2} \rho \beta$$

olur.

İspat. Lemma 4.1 den

$$\begin{aligned} \tilde{F}_p(x, \rho, r, \beta) - F_p(x, \rho) &= \rho \sum_{i=1}^m q_r^p(g_i(x), \beta) - \rho \sum_{i=1}^m q(g_i(x)) \\ &= \rho \sum_{i=1}^m (q_r^p(g_i(x), \beta) - q(g_i(x))) \\ &\leq \frac{m}{2} \rho \beta \end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 6.2. r sabit olmak üzere $\{\beta_j\} \rightarrow 0$ ve x_j noktaları $\rho > 0$ için $(K\tilde{O}P_p)$ probleminin çözümleri olsun. $\bar{x}$ noktası $\{x^j\}$ dizisinin limit noktası olsun. Bu durumda $\bar{x}$ noktası (KOP_p) için bir çözümdür.

İspat. Sonuç 4.10 ve Teorem 4.7 den ispat elde edilir. □

Teorem 6.3. β sabit olmak üzere $\{r_j\} \rightarrow \infty$ ve x_j noktaları $\rho > 0$ için $(\tilde{KOP}_\rho)$ probleminin çözümleri olsun. $\bar{x}$ noktası $\{x^j\}$ dizisinin limit noktası olsun. Bu durumda $\bar{x}$ noktası (KOP_ρ) için bir çözümdür.

İspat. Sonuç 4.10 ve Teorem 4.7 den ispat elde edilir. □

Teorem 6.4. x^* noktası (KOP_ρ) probleminin bir çözümü ve $\bar{x}$ noktası ise $(\tilde{KOP}_\rho)$ probleminin bir çözümü olsun. Bu durumda

$$0 \leq \tilde{F}_\rho(\bar{x}, \rho, r, \beta) - F_\rho(x^*, \rho) \leq \frac{m\rho\beta}{2}$$

olur.

İspat. Teorem 4.7 den $0 \leq \tilde{F}_\rho(\bar{x}, \rho, r, \beta) - F_\rho(\bar{x}, \rho)$ olup

$$\begin{aligned} \tilde{F}_\rho(\bar{x}, \rho, r, \beta) - F_\rho(\bar{x}, \rho) &\leq \tilde{F}_\rho(\bar{x}, \rho, r, \beta) - F_\rho(x^*, \rho) \\ &\leq \tilde{F}_\rho(x^*, \rho, r, \beta) - F_\rho(x^*, \rho) \\ &\leq \frac{m\rho\beta}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Tanım 6.5. $\beta > 0$ için

$$g_i(x_\beta) \leq \beta, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

oluyorsa x_β noktasına (KOP) problemi için β -uygun çözüm denir.

Teorem 6.6. x^* noktası (KOP_ρ) problemi için bir çözüm ve $\bar{x}$ noktası $(\tilde{KOP}_\rho)$ problemi için bir çözüm olsun. x^* noktası (KOP) problemi için bir çözüm ve $\bar{x}$ noktası (KOP) problemi için β -uygun çözüm ise

$$-\frac{m\rho\beta}{2} \leq f(\bar{x}) - f(x^*) \leq 0$$

olur.

İspat. $\sum_{i=1}^m q(g_i(x^*)) = 0$ olduğundan $0 \leq \tilde{F}_p(\bar{x}, \rho, r, \beta) - F_p(x^*, \rho)$ olup

$$\begin{aligned}\tilde{F}_p(\bar{x}, \rho, r, \beta) - F_p(x^*, \rho) &= f(\bar{x}) + \rho \sum_{i=1}^m q_r^p(g_i(\bar{x}), \beta) - \left(f(x^*) + \rho \sum_{i=1}^m q_r^p(g_i(x^*), \beta) \right) \\ &\leq \frac{m\rho\beta}{2}\end{aligned}$$

ve

$$-\rho \sum_{i=1}^m q_r^p(g_i(\bar{x}), \beta) \leq f(\bar{x}) - f(x^*) \leq -\rho \sum_{i=1}^m q_r^p(g_i(\bar{x}), \beta) + \frac{m\rho\beta}{2}$$

elde edilir. Lemma 4.1, den

$$-\frac{m\rho\beta}{2} \leq f(\bar{x}) - f(x^*) \leq 0$$

sonucuna ulaşılır. □

Algoritma A

- Adım 1. x^0 başlangıç noktasını belirle. $\beta_0 > 0$, $\rho_0 > 0$, $r_0 > 1$, $0 < \eta < 1$ ve $N > 1$ parametrelerini belirle $j = 0$ alarak Adım 2 ye git.
- Adım 2. x^j noktasını başlangıç noktası olarak kullan ve $(\tilde{KOP}_p)$ problemini çöz. x^{j+1} çözüm olsun Adım 3 git.
- Adım 3. x^{j+1} noktası (KOP) problemi için β -uygun ise algoritmayı durdur ve x^{j+1} çözüm olarak sonuçlandır; değilse $\rho_{j+1} = N\rho_j$, $\beta_{j+1} = \eta\beta_j$, $r_{j+1} = Nr_j$ ve $j = j + 1$ alarak Adım 2 ye git.
-

Teorem 6.7. $\rho \in [\rho_0, \infty)$, $\beta \in (0, \beta_0]$ ve $r \in (1, r_0]$ için

$$\operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \tilde{F}_p(x, \rho, r, \beta) \neq \emptyset$$

$\eta N < 1$ için x^j noktaları Algoritma A tarafından üretilsin. $\{x^j\}$ bir limit noktasına sahip ise x^j , (P) problemi için bir çözümdür.

İspat. $\bar{x}$ noktası $\{x^j\}$ dizisinin limit noktası olsun. Bu durumda $J \subset \mathbb{N}$ vardır öyleki $j \in J$ için $x^j \rightarrow \bar{x}$. Buna göre $\bar{x}$ noktasının (P) problemi için optimal çözüm olduğu gösterilecektir. Eğer (i) $\bar{x} \in G_0$ ve (ii) $f(\bar{x}) \leq \inf_{x \in G_0} f(x)$ olduğu gösterilirse ispat tamamlanmış olacaktır.

- i. Aksine $\bar{x} \notin G_0$ olsun. Yani yeterince büyük $j \in J$ için $\delta_0 > 0$ ve $i_0 \in \{1, 2, \dots, m\}$ vardır öyle ki

$$g_{i_0}(x^j) \geq \delta_0 > 0$$

elde edilir. x^j noktası parametrelerin j -inci değerine göre ρ_j, β_j, r_j minimum nokta olduğundan $x \in G_0$

$$\begin{aligned} F_p(x^j, \rho_j, r_j, \beta_j) &= f(x^j) + \rho_j(\delta_0 + \frac{\tau_j}{2}) + \frac{(m-1)}{2}\rho_j\beta_j \\ &= f(x^j) + \rho_j\delta_0 + \frac{m}{2}\rho_j\beta_j \\ &\leq f(x) + \frac{m}{2}\rho_j\beta_j \end{aligned}$$

elde edilir. $j \rightarrow \infty$ için $\rho \rightarrow \infty$, $\rho_j\beta_j \rightarrow 0$ ve $\rho_j\delta_0 \rightarrow \infty$ olduğundan $f(x)$ fonksiyonu G_0 üzerinde sonsuz değerler alır. Bu ise f fonksiyonunun G_0 üzerinde sınırlı olması ile çelişir.

- ii. *Algoritma A'* nın 2. adımı düşünüldüğünde her bir $x \in G_0$ için

$$\tilde{F}_p(x^j, \rho_j, r_j, \beta_j) \leq \tilde{F}_p(x, \rho_j, r_j, \beta_j) = f(x) + \frac{1}{2}m\rho_j\beta_j$$

elde edilir. $j \rightarrow \infty$ iken $f(\bar{x}) \leq f(x)$ olduğu görülür.

□

Algoritma A'nın etkinliğini ölçmek amacıyla literatürdeki önemli problemler üzerine Algoritma A uygulanmıştır. Sonuçlar detaylı olarak çizelgelerde sunulularak bu sonuçlar üzerindeki değerlendirmelere yer verilmiştir. Ayrıca literatürdeki diğer metotlar ile kıyaslama yapılarak üretilen metodun literatürdeki yeri belirtilmiştir. Çizelgelerde kullanılan kısaltmalar aşağıda sıralanmıştır.

- j : İterasyon sayısı
 x^j : j -inci iterasyonda bulunan nokta
 ρ_j : j -inci iterasyondaki ceza fonksiyonu parametresi
 β_j ve r_j : j -inci iterasyonda düzgünleştirme parametresi
 $g_i(x^j)$: x^j noktasında kısıt fonksiyon değeri

$\tilde{F}_p(x^j, \rho_j, r_j, \beta_j) : x^j$ noktasında $\tilde{F}_p$ fonksiyonunun değeri.

$f(x^j) : x^j$ noktasında objektif fonksiyonun değeri

Problem 6.8. (Lian, 2012) çalışmasında verilen

$$\begin{aligned} \min f(x) &= x_1^2 + x_2^2 - \cos(17x_1) - \cos(17x_2) + 3 \\ \text{s.t.} \quad g_1(x) &= (x_1 - 2)^2 + x_2^2 - 1.6^2 \leq 0 \\ g_2(x) &= x_1^2 + (x_2 - 3)^2 - 2.7^2 \leq 0 \\ 0 &\leq x_1 \leq 2, \quad 0 \leq x_2 \leq 2 \end{aligned}$$

kısıtlı optimizasyon problemini ele alalım. $x^0 = (1, 1)$ başlangıç noktası parametre değerleri $\rho_0 = 10$, $\beta_0 = 0.01$, $r = 2$, $\eta_0 = 0.1$ ve $N = 3$ olarak seçilmiştir. Buna göre elde edilen sonuçlar Çizelge 6.1 ve 6.2 ile verilmiştir. $p = 1$ ve $p = 2/3$ için Algoritma A uygulandığında global minimum nokta olarak $x^* = (0.7254, 0.3993)$ ve karşılık gelen değer 1.8376 olarak elde edilmiştir. (Lian, 2012; Xu vd., 2011), çalışmalarında da $x^* = (0.72540669, 0.3992805)$ noktası global minimum nokta ve 1.837623 ise karşılık gelen değer olarak belirtilmiştir.

Çizelge 6.1. Algoritma A'nın $p = 1$ durumunda Problem 6.8 için uygulanması ile elde edilen sonuçlardır.

j	x^{j+1}	ρ_j	β_j	r_j	$g_1(x^j)$	$g_2(x^j)$	$\tilde{F}_p(x^j, \rho_j, r_j, \beta_j)$	$f(x^j)$
0	(0.7253, 0.3994)	10	0.01	2	-0.7757	-0.0008	1.8414	1.8390
1	(0.7254, 0.3993)	30	0.001	6	-0.7759	-0.0001	1.8378	1.8378
2	(0.7254, 0.3993)	90	0.0001	18	-0.7759	-0.0000	1.8376	1.8376

Çizelge 6.2. Algoritma A'nın $p = 2/3$ durumunda Problem 6.8 için uygulanması ile elde edilen sonuçlardır.

j	x^{j+1}	ρ_j	β_j	r_j	$g_1(x^j)$	$g_2(x^j)$	$\tilde{F}_p(x^j, \rho_j, r_j, \beta_j)$	$f(x^j)$
0	(0.7254, 0.3993)	10	0.01	2	-0.7759	0.0000	1.8915	1.8375
1	(0.7254, 0.3993)	30	0.001	6	-0.7759	-0.0000	1.8538	1.8376
2	(0.7254, 0.3993)	90	0.0001	18	-0.7765	-0.0000	1.8376	1.8376

Problem 6.9. (Xu vd., 2011) çalışmasında verilen

$$\begin{aligned} \min f(x) &= 1000 - x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 \\ \text{s.t.} \quad g_1(x) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 25 = 0 \end{aligned}$$

$$g_2(x) = (x_1 - 5)^2 + x_2^2 + x_3^2 - 25 = 0$$

$$g_3(x) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 + (x_3 - 5)^2 - 25 \leq 0$$

kısıtlı optimizasyon problemini ele alalım. Başlangıç noktası $x^0 = (2, 2, 2)$, $\rho_0 = 10$, $\tau_0 = 0.1$, $r = 2$, $\eta_0 = 0.1$ ve $N = 3$ parametre değerleri olarak seçilmiştir. Buna göre elde edilen sonuçlar Çizelge 6.3 ve 6.4 ile verilmiştir. $p = 1$ ve $p = 2/3$ için Algoritma A uygulandığında global minimum nokta olarak sırasıyla $x^* = (2.5000, 4.2196, 0.9721)$ ve $x^* = (2.5000, 4.2210, 0.9661)$ ve karşılık gelen değer ikisi içinde 944.2157 olarak elde edilmiştir. Xu vd. (2011), çalışmasında da $x^* = (2.500000, 4.221305, 0.964666)$ noktası global minimum nokta ve 944.2157 ise karşılık gelen değer olarak belirtilmiştir. Algoritma A iki durum içinde (Xu vd., 2011) çalışmasından daha az iterasyon yaparak sonuca ulaşmıştır.

Çizelge 6.3. Algoritma A'nın $p = 1$ durumunda Problem 6.9 için uygulanması ile elde edilen sonuçlardır.

j	x^{j+1}	ρ_j	β_j	r_j	$g_1(x^j)$	$g_2(x^j)$	$g_3(x^j)$	$\tilde{F}_p(x^j, \rho_j, r_j, \beta_j)$	$f(x^j)$
0	(2.4998, 4.1199, 1.3332)	10	0.01	2	0.0002	0.0022	-4.5292	944.4283	944.3943
1	(2.5000, 4.2165, 0.9856)	30	0.001	6	0.0001	0.0000	-2.0204	944.2221	944.2161
2	(2.5000, 4.2193, 0.9732)	90	0.0001	18	0.0000	-0.0000	-1.9255	944.2175	944.2157
3	(2.5000, 4.2196, 0.9721)	270	0.00001	54	0.0000	0.0000	-1.9171	944.2157	944.2157

Çizelge 6.4. Algoritma A'nın $p = 2/3$ durumunda Problem 6.9 için uygulanması ile elde edilen sonuçlardır.

j	x^{j+1}	ρ_j	β_j	r_j	$g_1(x^j)$	$g_2(x^j)$	$g_3(x^j)$	$\tilde{F}_p(x^j, \rho_j, r_j, \beta_j)$	$f(x^j)$
0	(2.5000, 4.2157, 0.9890)	10	0.01	2	0.0000	-0.0000	-2.0468	944.2176	944.2164
1	(2.5000, 4.2210, 0.9658)	30	0.001	6	0.0000	0.0000	-1.8687	944.2159	944.2157
2	(2.5000, 4.2210, 0.9661)	90	0.0001	18	0.0000	0.0000	-1.8708	944.2157	944.2157

Problem 6.10. (Lian, 2012) çalışmasında verilen Rosen-Suzuki

$$\min f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2 - 5x_1 - 21x_3 + 7x_4$$

$$\text{s.t.} \quad g_1(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1 + x_2 + x_4 - 5 \leq 0$$

$$g_2(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 8 \leq 0$$

$$g_3(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 - x_1 - x_4 - 10 \leq 0$$

kısıtlı optimizasyon problemini ele alalım.

Başlangıç noktası $x^0 = (0,0,0,0)$ ve parametre değerleri $\rho_0 = 10$, $\tau_0 = 0.1$, $r = 2$, $\eta_0 = 0.1$ ve $N = 3$ olarak seçilmiştir. Algoritma A Problem 6.10'a uygulanarak elde edilen sonuçlar Çizelge 6.5 ve 6.6 ile sunulmuştur. $p = 1$ ve $p = 2/3$ için Algoritma A uygulandığında global minimum nokta olarak sırasıyla $x^* = (0.1697, 0.8358, 2.0084, -0.9651)$ ve $x^* = (0.1788, 0.8189, 2.0119, -0.9588)$ ve karşılık gelen değerler -44.2338 ve -44.2322 olarak elde edilmiştir.

(Lian, 2012), çalışmasında da $x^* = (0.1684621, 0.8539065, 2.000167, -0.9755604)$ noktası global minimum nokta ve $f(x^*) = -44.23040$ karşılık gelen değer olarak ve (Xu vd., 2011) çalışmasında da $x^* = (0.1684621, 0.8539065, 2.000167, -0.9755604)$ noktası global minimum nokta ve $f(x^*) = -44.23040$ karşılık gelen değer olarak belirtilmiştir.

Algoritma A iki durum içinde (Lian, 2012) çalışmasından daha iyi nümerik sonuçlar vermiştir. (Xu vd., 2011) çalışmasında belirtilen değerlere yaklaşık sonuçlar elde edilmesine rağmen daha az iterasyon yaparak sonuca ulaşmıştır.

Çizelge 6.5. Algoritma A'nın $p = 1$ durumunda Problem 6.10 için uygulanması ile elde edilen sonuçlardır.

j	x^{j+1}	ρ_j	β_j	r_j	$g_1(x^j)$	$g_2(x^j)$	$g_3(x^j)$	$\tilde{F}_p(x^j, \rho_j, r_j, \beta_j)$	$f(x^j)$
0	(0.1694, 0.8354, 2.0085, -0.9650)	10	0.01	2	-0.0016	-0.0008	-1.8836	-44.2272	-44.2311
1	(0.1698, 0.8352, 2.0087, -0.9648)	30	0.001	6	-0.0002	-0.0001	-1.8849	-44.2334	-44.2334
2	(0.1697, 0.8358, 2.0084, -0.9651)	90	0.0001	18	-0.0000	-0.0000	-1.8821	-44.2338	-44.2338

Çizelge 6.6. Algoritma A'nın $p = 2/3$ durumunda Problem 6.10 için uygulanması ile elde edilen sonuçlardır.

j	x^{j+1}	ρ_j	β_j	r_j	$g_1(x^j)$	$g_2(x^j)$	$g_3(x^j)$	$\tilde{F}_p(x^j, \rho_j, r_j, \beta_j)$	$f(x^j)$
0	(0.4004, -0.5628, 1.2750, -1.4773)	10	0.01	2	-3.9762	0.0006	-2.1390	-30.3027	-30.3933
1	(0.1785, 0.8238, 2.0092, -0.9602)	30	0.001	6	0.0000	-0.0063	1.9480	-44.2177	-44.2204
2	(0.1763, 0.8292, 2.0136, -0.9548)	90	0.0001	18	-0.0000	-0.0000	-1.9610	-44.2321	-44.2322
3	(0.1788, 0.8189, 2.0119, -0.9588)	270	0.00001	10	-0.0000	-0.0000	-1.9609	-44.2322	-44.2322

Problem 6.11. (Xu vd., 2011) çalışmalarında verilen

$$\begin{aligned}
\min f(x) &= 10x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 + 4x_6 \\
\text{s.t.} \quad &g_1(x) = x_1 + x_2 - 10 = 0 \\
&g_2(x) = -x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\
&g_3(x) = -x_2 - x_3 + x_5 + x_6 = 0 \\
&g_4(x) = 10x_1 - 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 - 16 \leq 0
\end{aligned}$$

$$g_5(x) = x_1 + 4x_3 + x_5 - 10 \leq 0$$

$$0 \leq x_1 \leq 12, 0 \leq x_2 \leq 18$$

$$0 \leq x_3 \leq 5, 0 \leq x_4 \leq 12$$

$$0 \leq x_5 \leq 1, 0 \leq x_6 \leq 16$$

kısıtlı optimizasyon problemini ele alalım.

Başlangıç noktası $x^0 = (0, 0, \dots, 0)$ ve parametre değerleri $\rho_0 = 300$, $\beta_0 = 0.01$, $\eta_0 = 0.1$, $r_0 = 8$ ve $N = 3$ olarak seçilmiştir. Algoritma A Problem 6.11 için uygulanarak elde edilen sonuçlar Çizelge 6.7 ve 6.8 ile sunulmuştur. $p = 1$ ve $p = 2/3$ durumlarında Algoritma A problemin çözümü için uygulandığında global minimum nokta olarak sırasıyla $x^* = (1.6227, 8.3773, 0.0216, 0.6037, 0.9974, 7.4015)$ ve $x^* = (1.7593, 8.2407, 0.3756, 0.3837, 1.0000, 7.6164)$ ve karşılık gelen değerler 117.0182 ve 117.0071 olarak elde edilmiştir.

(Xu vd., 2011) çalışmasında problemin çözümü olan $x^* = (1.650682, 8.349318, 0.091775, 0.558907, 1.00000, 7.441092)$ global minimum nokta ve $f(x^*) = 117.000004$ karşılık gelen değer olarak belirtilmiştir.

Algoritma A iki durum içinde (Xu vd., 2011) çalışması ile kıyaslandığında birbirine benzer sonuçların elde edildiği gözlemlenmektedir. (Xu vd., 2011) çalışmasında yeni düzgünleştirme yaklaşımı ile birlikte 3 farklı algoritma sunulmuştur. Bu çalışmasında Algoritma II doğru sonucu bulamamış ve Algoritma I, II ve III sırasıyla 4, 3 ve 13 iterasyon yaparak sonuca ulaşmıştır. Oysaki $p = 1$ ve $p = 2/3$ için Algoritma A, 3 iterasyonda sonuca ulaşmıştır.

Çizelge 6.7. Algoritma A'nın $p = 1$ durumunda Problem 6.11 için uygulanması ile elde edilen sonuçlardır.

j	x^{j+1}	ρ_j	β_j	r_j	$g_1(x^j)$	$g_2(x^j)$	$g_3(x^j)$	$g_4(x^j)$	$g_5(x^j)$	$F_p(x^j, \rho_j, r_j, \beta_j)$	$f(x^j)$
0	(1.6193, 8.3810, 0.0225, 0.6025, 0.9937, 7.4094)	300	0.01	2	0.0003	-0.0007	-0.0004	-0.0322	-7.2972	117.3817	117.0762
1	(1.6227, 8.3773, 0.0216, 0.6037, 0.9974, 7.4015)	900	0.001	6	0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	-7.2936	117.0272	117.0182
2	(1.6227, 8.3773, 0.0216, 0.6037, 0.9974, 7.4015)	2700	0.0001	18	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-7.2935	117.0186	117.0182

Bu dört farklı problem değerlendirildiğinde burada üretilen metot kullanılarak literatürdeki benzer metotlardan daha iyi sonuçlar elde edildiği gösterilmiştir. Diğer taraftan Bölüm 4 de önerilen düzgünleştirme yaklaşımlarından sadece birisi

Çizelge 6.8. Algoritma A'nın $p = 2/3$ durumunda Problem 6.11 için uygulanması ile elde edilen sonuçlardır.

j	x^{j+1}	ρ_j	β_j	r_j	$g_1(x^j)$	$g_2(x^j)$	$g_3(x^j)$	$g_4(x^j)$	$g_5(x^j)$	$\bar{F}_p(x^j, \rho_j, r_j, \beta_j)$	$f(x^j)$
0	(1.7607, 8.2408, 0.3754, 0.3831, 1.0002, 7.6153)	300	0.01	8	0.0015	-0.0021	-0.0007	0.0056	-5.7376	129.8649	117.0035
1	(1.7593, 8.2407, 0.3756, 0.3837, 1.0000, 7.6164)	900	0.001	24	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0068	-5.7383	117.2997	117.0071
2	(1.7593, 8.2407, 0.3756, 0.3837, 1.0000, 7.6164)	2700	0.0001	72	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0068	-5.7383	117.0071	117.0071

kullanılmıştır. Diğer düzgünleştirme yaklaşımları kullanılarak buradaki çalışmaya benzer ceza fonksiyonu oluşturma çalışmaların yapılması da mümkündür.

6.1.2. Düzgünleştirme yaklaşımlarının interpolasyon problemlerine uygulamaları

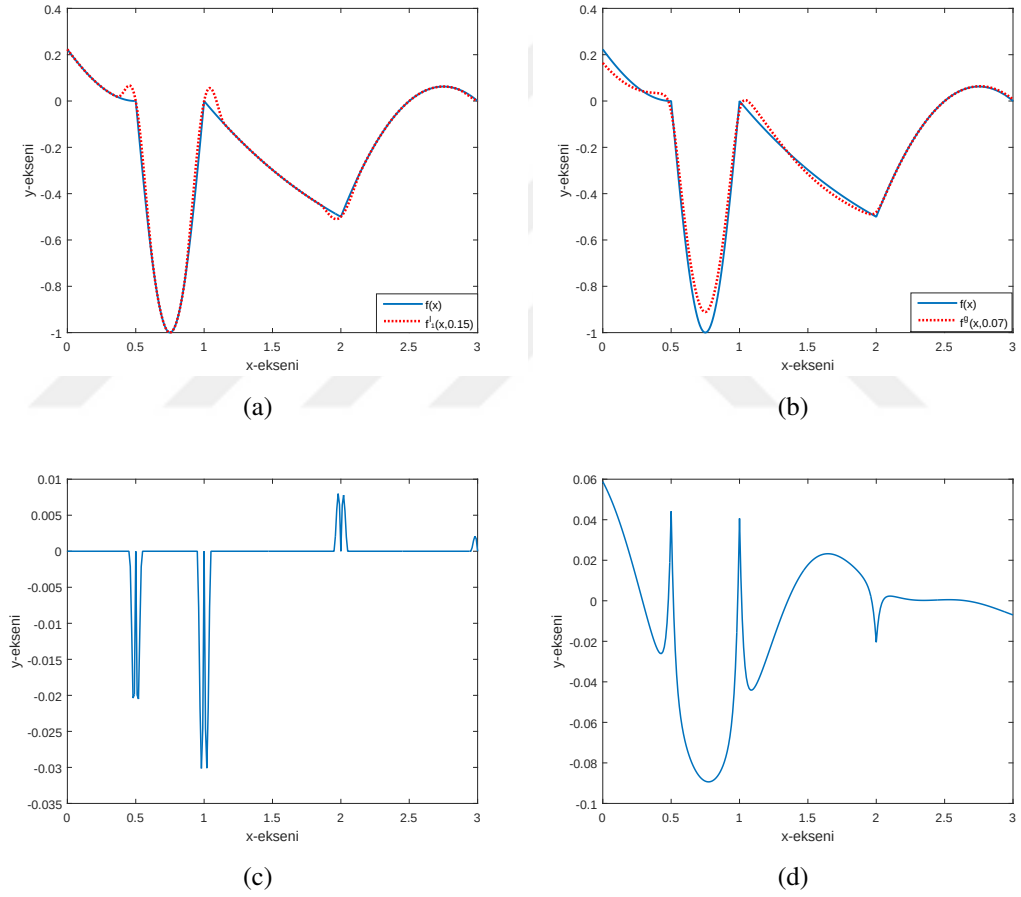
Düzgünleştirme yaklaşımları düzgün olmayan optimizasyon problemlerinde olduğu gibi interpolasyon problemlerinde düzgün model fonksiyon elde etme amacıyla da kullanılmaktadır. Burada Bölüm 4.2 ve 4.3 de verilen düzgünleştirme yaklaşımları düzgün olmayan 1 ve 2 boyutlu problemlerin düzgünleştirilmesi için kullanılmıştır.

Problem 6.12 (Bir Boyutlu Eğri Düzgünleştirme Problemi). (Mazroui vd., 2005) çalışmasında verilen

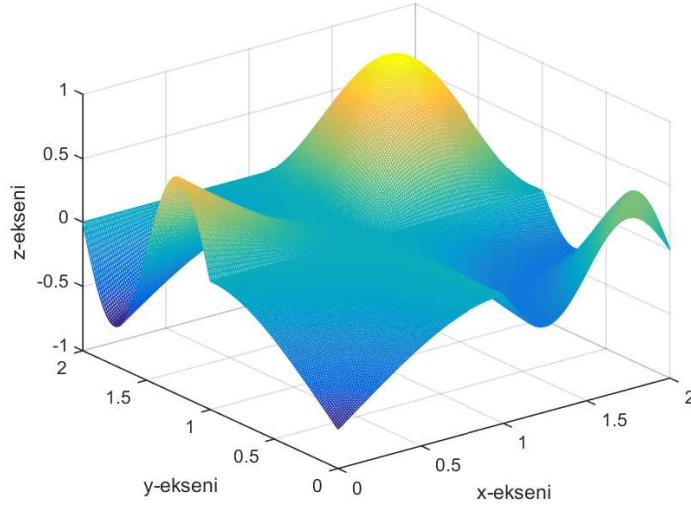
$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \ln\left(1 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right), & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ f_2(x) = \sin(2\pi x), & x \in [\frac{1}{2}, 1] \\ f_3(x) = (1-x) \exp\left(\frac{-\ln 2}{2}x\right), & x \in [1, 2] \\ f_4(x) = (3-x)\left(x - \frac{5}{2}\right), & x \in [2, 3] \end{cases} \quad (6.1)$$

fonksiyonunu ele alalım. f_1, f_2, f_3 ve f_4 fonksiyonları düzgün fonksiyon olmasına rağmen f fonksiyonu $[0, 3]$ aralığında düzgün bir fonksiyon değildir. $P_1(x)$ geçiş fonksiyonunu kullanarak $\varepsilon = 0.15$ olmak üzere lokal düzgünleştirme yaklaşımını uyguladığımızda elde edilen $f^{l_1}(x, 0.15)$ fonksiyonu C^1 sınıfından f fonksiyonunun düzgünleştirme fonksiyonudur. $f(x)$ ve $f^{l_1}(x, 0.15)$ fonksiyonlarının grafikleri Şekil 6.1 (a) da sunulmuştur. Global düzgünleştirme yaklaşımını $\varepsilon = 0.07$ alarak uyguladığımızda elde edilen $f^g(x, 0.07)$ fonksiyonu, f fonksiyonunun düzgünleştirme fonksiyonudur ve C^∞ sınıfındandır. $f(x)$ ve $f^g(x, 0.07)$ fonksiyonunun grafiği Şekil 6.1 (b) de sunulmuştur. Bu düzgünleştirme yaklaşımları yardımıyla düzgün olmayan bir fonksiyon ile çok küçük

hatalarla benzer özelliklere sahip fakat düzgünlüğünü koruyan yaklaşım fonksiyonları inşa etmek mümkün hale gelmiştir. Şekil 6.1 (c) ve (d) de orjinal fonksiyon ile sırasıyla lokal ve global düzgünleştirme fonksiyonları ile orjinal fonksiyon arasındaki hata değerleri grafik olarak sunulmuştur. Grafikler incelendiğinde hata değerlerinin oldukça küçük olduğu gözlemlenir. (Mazroui vd., 2005) çalışmasında daha karmaşık bir yol seçilerek yaklaşım fonksiyonları elde edilirken, bu çalışmada çok daha basit ve kolay uygulanabilecek düzgünleştirme yaklaşımları kullanılarak düzgünleştirme fonksiyonu elde edilmiştir. Üstelik bu yaklaşımda hata değerlerinin kontrolü çok daha kolay bir şekilde sağlanmaktadır.



Şekil 6.1. (a) $f(x)$ ve $f^l(x, 0.15)$, (b) $f(x)$ ve $f^g(x, 0.07)$, (c) $f(x) - f^l(x, 0.15)$, (d) $f(x) - f^g(x, 0.07)$ fonksiyonunun grafiğidir.



Şekil 6.2. $f(x)$ fonksiyonunun grafiğidir.

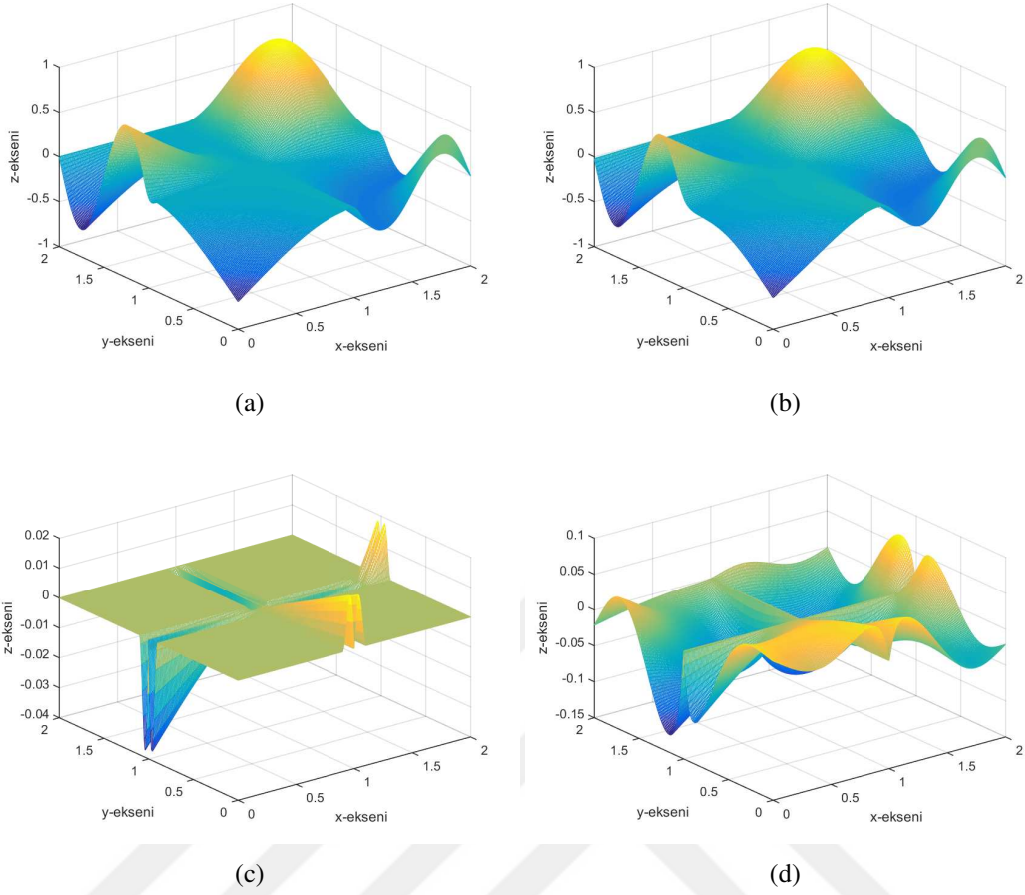
Problem 6.13 (İki Boyutlu Yüzey Düzgünleştirme Problemi). (Mazroui vd., 2007) çalışmasında verilen

$$f(x = (x_1, x_2)) = \begin{cases} -\ln(1 + (x_1 - 1)^2(x_2 - 1)^2), & (x_1, x_2) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ \sin(2\pi x_1) \ln(1 + (x_2 - 1)^2), & (x_1, x_2) \in [1, 2] \times [0, 1] \\ \sin(2\pi(x_1 - 1)(x_2 - 1)) / 3, & (x_1, x_2) \in [0, 1] \times [1, 2] \\ \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2), & (x_1, x_2) \in [1, 2] \times [1, 2] \end{cases} \quad (6.2)$$

fonksiyonunu ele alalım. f fonksiyonu $[0, 2] \times [0, 2]$ bölgesinde sürekli fakat düzgün fonksiyon değildir. Fonksiyonun grafiği Şekil 6.2 de gösterilmiştir. f fonksiyonuna lokal düzgünleştirme yaklaşımı uygulanarak düzgün bir fonksiyon elde etmek mümkündür.

Bu fonksiyona lokal ve global düzgünleştirme yaklaşımları uygulanarak elde edilen düzgünleştirme fonksiyonları sırasıyla Şekil 6.3 (a) ve (b) de verilmiştir. Orjinal fonksiyon ile düzgünleştirme fonksiyonları arasındaki fark (hata) Şekil 6.3 (c) ve (d) de verilmiştir. Grafik incelendiğinde hatanın çok düşük olduğu görülecektir. Üstelik bu hata değerleri ε parametresi ile kontrol edilebilmektedir.

Mazroui vd. (2007) çalışmasında iki değişkenli fonksiyonlar için düzgünleştirme yaklaşımı Mazroui vd. (2005) çalışmasının bir genelleştirmesi olarak verilmiştir. Bu çalışmada bir ve iki değişkenli örnekler üzerinde durulmuştur fakat bu düzgünleştirme



Şekil 6.3. (a) $f^{l_1}(x, 0.5)$, (b) $f^g(x, 0.5)$, (c) $f(x) - f^{l_1}(x, 0.5)$, (d) $f(x) - f^g(x, 0.5)$ fonksiyonunun grafiğidir.

yaklaşımı $n \geq 2$ içinde kullanışlıdır. Ayrıca Problem 6.13 de bölgeler bir doğru ile birbirinden ayrılmıştır. Bölüm 4 de gösterildiği gibi eğriler ile birbirinden ayrılan bölgeler üzerinde tanımlı parçalı düzgün fonksiyonları tamamıyla düzgün hale getirmek burada sunulan düzgünleştirme yaklaşımlarıyla mümkün hale gelmiştir.

6.2. Global Optimizasyon Metotlarının Test Problemlerine Uygulaması

Bu bölümde global optimizasyon algoritmalarının test problemlerine uygulamalarıyla elde edilen sonuçlar sunulmaktadır. Bu çalışmada önerilen global optimizasyon metotlarının her biri için bilgisayar program kodları oluşturulmuştur. Her bir algoritma hem düzgün hemde düzgün olmayan test problemleri için uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlar ilgili çizelgelerde detaylı olarak sunulmaktadır. Ayrıca elde edilen sonuçlara göre önerilen metotlar kendi aralarında ve literatürde mevcut olan metotlar ile kıyaslanmıştır. Bu kıyaslamalara ait sonuçlar ilgili çizelgelerde sunulmaktadır.

Global optimizasyon metotları belirtirken aşağıdaki kısaltmalar kullanılacaktır.

SDA : Düzgün İniş Metodu (Algoritma 1)

EDA : Estetik İniş Metodu (Algoritma 2)

FDA : Alternatif Estetik İniş Metodu (Algoritma 3)

NDA : Yeni Düzgün İniş Metodu (Algoritma 4)

PDS-NDA : Düzenli Nokta Dağıtımli Düzgün İniş Metodu (Algoritma 5)

6.2.1. Global optimizasyon metotlarının düzgün test problemlerine uygulaması

Metotlar ilk olarak aşağıda inşa ettiğimiz test problemine uygulanacaktır. Ayrıca metotların işleyişi bu problem üzerinde gösterilecektir.

Problem 6.14.

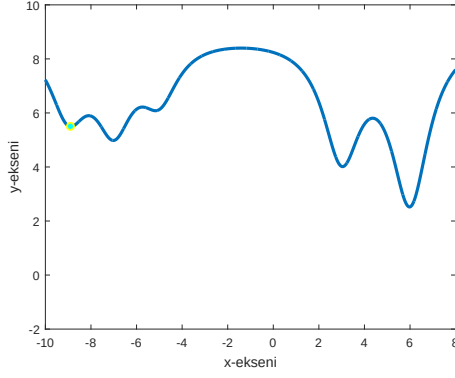
$$\min_{x \in [-10, 8]} f(x) = 9 - \sum_{i=1}^5 \frac{a_i}{1 + (x - b_i)^2}$$

problemini ele alalım. Burada $i = 1, 2, \dots, 5$ için a_i ve b_i reel sayılardır ve her bir i için karşılık gelen değerler Çizelge 6.9 de gösterilmiştir.

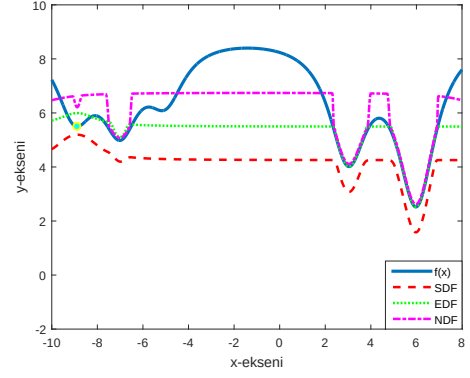
Çizelge 6.9. Problem 6.14 için a_i ve b_i değerleridir.

i	1	2	3	4	5
a_i	2.7	3	2	4.3	6
b_i	-9	-7	-5	3	6

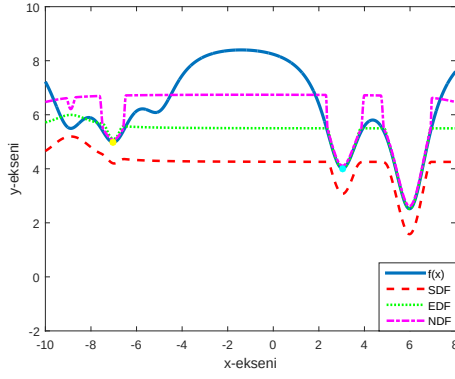
f fonksiyonu yaklaşık olarak $x \approx -9, -7, -5, 3$ ve 6 noktaları civarında lokal minimum noktalara sahip ve fonksiyon $x^* \approx 6$ civarında global minimuma ulaşmaktadır. Fonksiyonun grafiği Şekil 6.4 (a) da gösterilmiştir. SDA, EDA ve NDA için $x_0 = -10$ başlangıç noktası kullanılarak ilk lokal minimum $x_1^* = -8.9787$ ve karşılık gelen değer $f(x_1^*) = 5.4949$ elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen lokal minimum noktaya göre yardımcı fonksiyonlar kurulmuştur (bkz Şekil 6.4 (b)). Yardımcı fonksiyonlar SDA, EDA ve NDA algoritmalarında belirtilen adımlar uygulanarak SDA ve EDA için $x_2^* = -7.0190$ ve karşılık gelen değer $f(x_2^*) = 4.9812$ olarak NDA için $x_2^* = 3.0417$ ve



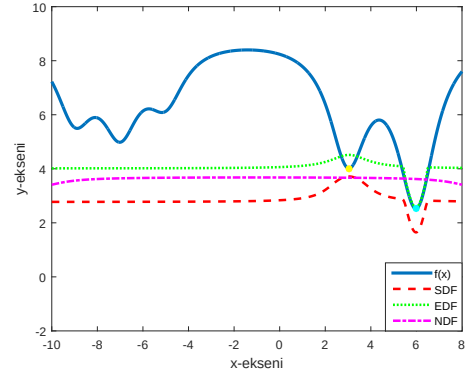
(a)



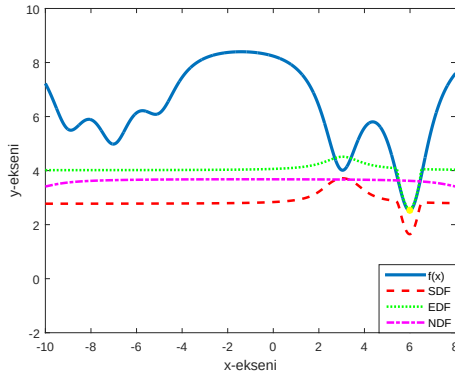
(b)



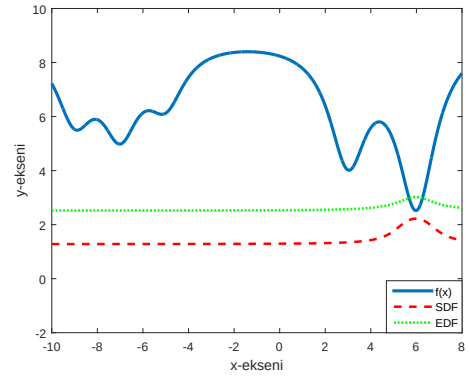
(c)



(d)



(e)



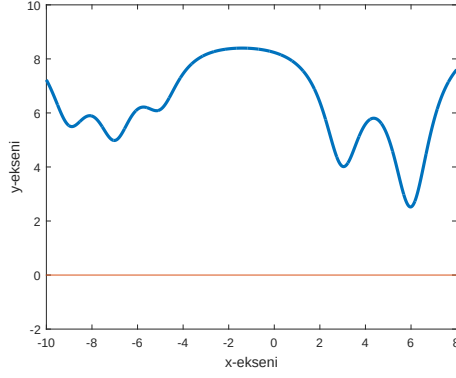
(f)

Şekil 6.4. $f(x)$ amaç fonksiyonunun global minimumu bulunana kadar SDF, EDF, NDF fonksiyonlarının adım adım grafikleridir.

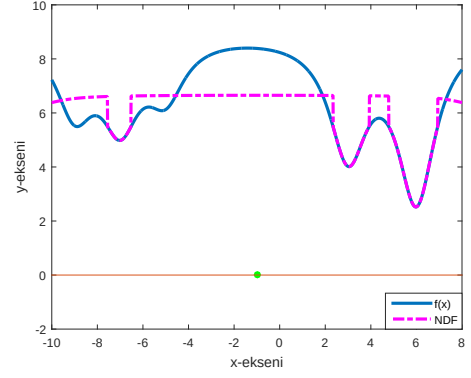
karşılık gelen değer $f(x_2^*) = 4.0138$ olarak elde edilmiştir (bkz Şekil 6.4 (c)). Bu yeni elde edilen noktalara göre yardımcı fonksiyonlar tekrar kurulmuş algoritma prosedürü işletilmeye devam edilmiştir. SDA ve EDA için $x_3^* = 3.0417$ ve karşılık gelen değer $f(x_3^*) = 4.0138$ olarak NDA için $x_3^* = 5.9774$ ve karşılık gelen değer $f(x_3^*) = 2.5210$ olarak elde edilmiştir (bkz Şekil 6.4 (d)). Elde edilen yeni noktalara göre yardımcı fonksiyonlar yeniden kurulmuş ve algoritma prosedürü işletilmeye devam edilmiştir. SDA ve EDA algoritması $x_4^* = 5.9774$ ve karşılık gelen değer $f(x_4^*) = 2.5210$ olarak elde edilirken NDA algoritması için kullanılan yardımcı fonksiyon belirtilen aralıkta herhangi bir lokal minimuma sahip değildir ve global minimuma erişmiştir (bkz Şekil 6.4 (e)). SDA ve EDA algoritmaları eldeki noktalara göre tekrar kurulmuştur. Bu adımda SDA ve EDA metotlarında global minimuma erişmiştir (bkz Şekil 6.4 (f)). Benzer şekilde $x_0 = -10$ noktasından başlayarak PDS-NDA algoritması uygulanmıştır. Bu uygulamanın sonucu olarak elde edilen sonuçlar adım adım grafikler halinde Şekil 6.5 (a), (b), (c), (d), (e) ve (f) de sunulmuştur.

Üretilen metot ve algoritmalar literatürde sıkça kullanılan test problemleri (Hedar, 2005) üzerine uygulanmıştır. Bu test problemlerinin listesi ve özellikleri Çizelge 6.10 ile sunulmaktadır. Metotların aynı probleme 10 kez farklı başlangıç noktaları kullanılarak uygulanması neticesinde elde edilen en düşük fonksiyon değeri ($f\text{-best}$), ortalama fonksiyon değeri ($f\text{-mean}$), en düşük toplam fonksiyon değerlendirme sayısı ($f\text{-eval}$), ortalama toplam fonksiyon değerlendirme sayısı ($f\text{-eval-m}$), ortalama iterasyon sayısı (iter-m) ve bu 10 denemedeki başarı oranı çizelgelerde sunulmuştur.

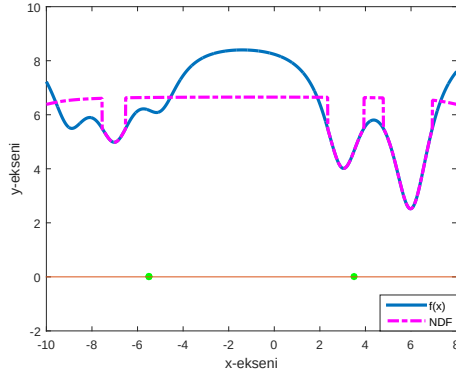
SDA boyutu 2 ile 50 arasında değişen 50 test problemine uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlar Çizelge 6.11 de verilmiştir. SDA uygulamasında her bir problem için en az %50 başarı elde edilmiştir. Toplamdaki başarı %83.4 olmuştur. $f\text{-best}$ ve $f\text{-mean}$ değerleri gerçek değerlere oldukça yakın olacak şekilde elde edilmiştir. Ortalama iterasyon ve fonksiyon değerlendirme sayısı problemlerin boyutu ve lokal minimum sayısına göre düzenli bir şekilde değişmektedir. Bununla birlikte aynı boyuttaki problemlerde birbirine yakın fonksiyon değerlendirme sayıları elde edilmiştir. Bu bulgular metodun boyuta göre tutarlı sonuçlar verdiğini göstermektedir. SDA uygulanarak elde edilen iterasyon sayıları ve fonksiyon değerlendirme sayıları muadil metotlar ile rekabet edebilecek niteliktedir.



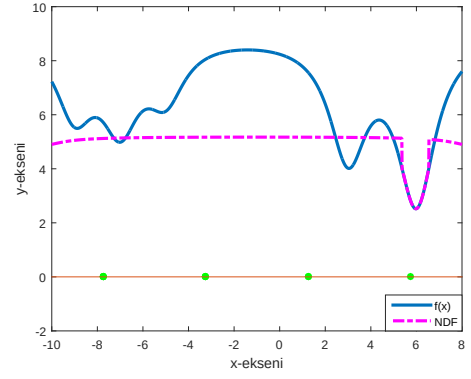
(a)



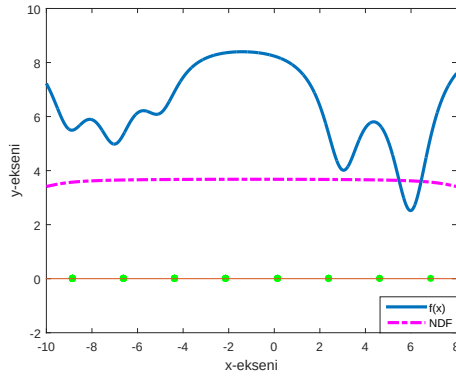
(b)



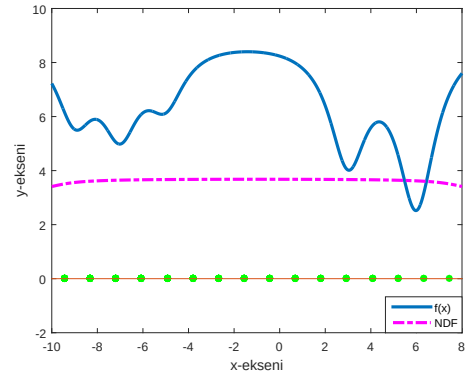
(c)



(d)



(e)



(f)

Şekil 6.5. $f(x)$ amaç fonksiyonunun global minimumu bulunana kadar PDS-NDA uygulamasıyla elde edilen grafiklerdir.

Çizelge 6.10. Test problemlerinin listesidir.

No.	Fonksiyon Adı	Boyutu n	Optimizasyon Bölgesi	Minimum değeri
1	İki boyutlu fonksiyon $c = 0.5$	2	$[-3, 3]^2$	0
2	İki boyutlu fonksiyon $c = 0.2$	2	$[-3, 3]^2$	0
3	İki boyutlu fonksiyon $c = 0.05$	2	$[-3, 3]^2$	0
4	3-hörgüçlü deve sırtı fonksiyonu	2	$[-3, 3]^2$	0
5	6-hörgüçlü deve sırtı fonksiyonu	2	$[-3, 3]^2$	-1.0316
6	Treccani fonksiyonu	2	$[-3, 3]^2$	0
7	Goldstein-Price fonksiyonu	2	$[-3, 3]^2$	3.0000
8	Shubert fonksiyonu	2	$[-10, 10]^2$	-186.73091
9	Rastrigin fonksiyonu	2	$[-3, 3]^2$	-2.0000
10	Beale fonksiyonu	2	$[-4.5, 4.5]^2$	0
11	Bohachevsky 1 fonksiyonu	2	$[-100, 100]^2$	0
12	Bohachevsky 2 fonksiyonu	2	$[-100, 100]^2$	0
13	Bohachevsky 3 fonksiyonu	2	$[-100, 100]^2$	0
14	Booth fonksiyonu	2	$[-10, 10]^2$	0
15	Branin fonksiyonu	2	$[-5, 10] \times [10, 15]$	0.3979
16	Easom fonksiyonu	2	$[-100, 100]^2$	-1.0000
17	Matyas fonksiyonu	2	$[-10, 10]^2$	0
18, 19, 20, 21	Ackley fonksiyonu	2, 5, 10, 50	$[-10, 10]^n$	0
22, 23, 24, 25	Rastrigin fonksiyonu	2, 5, 10, 50	$[-5.12, 5.12]^n$	0
26, 27, 28, 29	Sin-square I fonksiyonu	2, 3, 5, 7	$[-10, 10]^n$	0
30, 31, 32, 33	Sin-square I fonksiyonu	10, 20, 30, 50	$[-10, 10]^n$	0
34	(H3) Hartman fonksiyonu	3	$[0, 1]^3$	-3.8628
35	Colville fonksiyonu	4	$[-10, 10]^4$	0
36	Perm fonksiyonu	4	$[-4, 4]^4$	0
37	Power-sum fonksiyonu	4	$[0, 4]^4$	0
38	(S5) Shekel fonksiyonu	4	$[0, 10]^4$	-10.1532
39	(S7) Shekel fonksiyonu	4	$[0, 10]^4$	-10.4029
40	(S10) Shekel fonksiyonu	4	$[0, 10]^4$	-10.5364
41	(H6) Hartman fonksiyonu	6	$[0, 1]^6$	-3.3224
42	Griewank fonksiyonu	10	$[-600, 600]^{10}$	0
43	Trid fonksiyonu	10	$[-100, 100]^{10}$	-210
44	Powell fonksiyonu	24	$[-4, 5]^{24}$	0
45	Dixon ve Price fonksiyonu	25	$[-10, 10]^{25}$	0
46	Schwefel fonksiyonu	30	$[-500, 500]^{30}$	0
47	Rosenbrock fonksiyonu	50	$[-5.12, 5.12]^{50}$	0
48	Sphere fonksiyonu	50	$[-5.12, 5.12]^{50}$	0
49	Sum squares fonksiyonu	50	$[-10, 10]^{50}$	0
50	Zakharov fonksiyonu	50	$[-5, 5]^{50}$	0

EDA ve FDA algoritmalarının test problemlerine uygulanmaları sonucu elde edilen sonuçlar sırasıyla Çizelge 6.12 ve 6.13 ile verilmiştir. EDA uygulamasında her bir problem için en az %50 başarı elde edilmekle birlikte toplamdaki başarı %82 olmuştur. Benzer şekilde FDA uygulaması sonucu en az %50 başarı elde edilmekle birlikte toplamdaki başarı %82.8 olmuştur. EDA ve FDA algoritmalarının ikisi içinde $f - best$ ve $f - mean$ değerleri gerçek değerlere oldukça yakın olacak şekilde elde edilmiştir. EDA ve FDA da kullanılan yardımcı fonksiyonlar birbirlerine benzer bir yapıya sahip olsada algoritmaları birbirinden farklıdır. Bu nedenle FDA uygulamasında EDA uygulamasına göre daha fazla fonksiyon değerlendirme sayısı olsada toplam

Çizelge 6.11. SDA uygulaması ile elde edilen nümerik sonuçlardır.

Problem No.	n	iter-m	f-best	f-mean	f.eval	f.eval-m	SR
1	2	1	$1.3627e-15$	$2.6336e-15$	455	525	6/10
2	2	1.2	$1.8611e-17$	$4.9236e-15$	525	602.3	9/10
3	2	1.25	$5.8383e-16$	$1.2974e-14$	522	588	8/10
4	2	1.25	$1.2045e-16$	$4.8662e-15$	418	484.6	8/10
5	2	1.25	-1.0316	-1.0316	429	535.2	8/10
6	2	1	$5.9990e-32$	$2.5251e-15$	432	452.2	10/10
7	2	1.67	3.0000	3.0000	875	910.9	9/10
8	2	2.5	-186.7309	-186.7309	807	980	6/10
9	2	3.5	-2.0000	-2.0000	536	550	10/10
10	2	1	$1.2451e-13$	$2.1462e-13$	602	633	9/10
11	2	2	$8.8818e-16$	$1.8874e-15$	277	277	6/10
12	2	1	0	$1.8596e-15$	279	287.5	10/10
13	2	1.8	$1.6190e-14$	$2.1927e-14$	634	802.4	6/10
14	2	1	$2.9259e-16$	$9.2305e-15$	422	518.2	10/10
15	2	1	0.3979	0.3979	421	422.4	10/10
16	2	1.75	-1.0000	-1.0000	60	363.1	8/10
17	2	1	$2.2100e-15$	$7.6392e-14$	423	429	10/10
18	2	1.6	$4.5610e-11$	$1.7622e-10$	529	722.6	10/10
19	5	1	$9.5945e-11$	$1.5620e-10$	6422	9910.5	6/10
20	10	4.8	$4.9387e-11$	$1.8783e-10$	5585	13274	10/10
21	50	2	$1.0504e-10$	$1.6413e-10$	13664	14869	6/10
22	2	2.29	0	0	710	1237.6	7/10
23	5	1	0	0	1805	1809.8	6/10
24	10	3.2	0	0	7364	11145	10/10
25	50	5.3	0	0	104680	218000	10/10
26	2	1.6	$6.7281e-15$	$9.1842e-15$	429	488.6	10/10
27	3	5.5	$5.3359e-15$	$1.0884e-14$	3522	8375.5	7/10
28	5	1.2	$7.6184e-15$	$1.0744e-13$	9766	11808	7/10
29	7	1.6	$4.2631e-15$	$3.9543e-13$	22525	41791	5/10
30	10	2.5	$3.0622e-14$	$7.515e-07$	4991	8726.3	6/10
31	20	2.3	$4.772e-15$	$2.0576e-12$	16746	18503	7/10
32	30	2.5	$1.3135e-13$	$1.7377e-12$	39005	50985	6/10
33	50	2.3	$3.3376e-13$	$2.5202e-12$	41731	73442	6/10
34	3	1.25	-3.8628	-3.8628	1908	2466.4	8/10
35	4	1	$5.1247e-07$	$5.3989e-07$	835	849.7	10/10
36	4	1	$2.1255e-06$	$2.5793e-06$	1518	1648.3	6/10
37	4	1	$1.4856e-07$	$8.5938e-05$	1067	2646.4	10/10
38	4	1	-10.1532	-10.1532	1273	1347.3	6/10
39	4	1.9	-10.4293	-10.4293	1178	1792.7	10/10
40	4	2.1	-10.5321	-10.5321	1187	1890.5	10/10
41	6	1	-3.0425	-3.0425	1742	1749.4	10/10
42	10	1.2	$4.4688e-12$	$7.2146e-12$	1058	1109.3	8/10
43	10	1	-210.0000	-210.0000	884	973.7	10/10
44	24	1	$2.1056e-11$	$7.0853e-08$	25770	26269	10/10
45	25	1	$3.4592e-13$	$3.4592e-13$	79342	89342	5/10
46	30	4.75	$3.8183e-04$	$3.8183e-04$	1164	25764	5/10
47	50	1	$6.1548e-05$	$4.6622e-04$	99772	99815	5/10
48	50	1	$8.0681e-15$	$1.0376e-13$	90933	90994	10/10
49	50	1	$2.1336e-08$	$1.0615e-06$	93614	93620	10/10
50	50	1	$2.636e-14$	$2.9770e-05$	93152	93562	10/10

Çizelge 6.12. EDA uygulaması ile elde edilen nümerik sonuçlardır.

Problem No.	n	iter-m	f-best	f-mean	f.eval	f.eval-m	SR
1	2	2.2	$8.8891e-16$	$2.6488e-15$	577	616.25	6/10
2	2	1.4	$7.1480e-16$	$8.2095e-15$	391	405	8/10
3	2	1.33	$5.2832e-16$	$2.3936e-15$	390	400.4	9/10
4	2	1	$1.4743e-16$	$7.9223e-15$	541	545.5	8/10
5	2	1	-1.0316	-1.0316	591	734.6	10/10
6	2	1	$1.5575e-15$	$6.0281e-15$	591	599.1	10/10
7	2	1.22	3.0000	3.0000	625	700.9	9/10
8	2	2.8	-186.7309	-186.7309	669	1078.7	10/10
9	2	4	-2.0000	-2.0000	486	1102	6/10
10	2	1	$6.3734e-14$	$2.0382e-13$	571	581.9	7/10
11	2	2	0	$1.9428e-16$	568	814.5	6/10
12	2	2	$1.1102e-16$	$1.5265e-16$	579	807	6/10
13	2	1.2	0	$1.1458e-14$	597	640.1	10/10
14	2	1	$4.2532e-15$	$9.7256e-15$	541	542.1	10/10
15	2	1	0.3979	0.3979	544	545.2	10/10
16	2	1.83	-1.0000	-1.0000	588	666.3	6/10
17	2	1	$4.4400e-15$	$2.3461e-13$	549	594	10/10
18	2	3.7	$5.3987e-11$	$1.9646e-10$	684	1540.2	10/10
19	5	1	$5.1117e-11$	$1.5592e-10$	6044	7422.5	6/10
20	10	1.8	$1.3834e-10$	$1.3834e-10$	5127	6619.3	10/10
21	50	1.8	$1.6272e-10$	$1.6272e-10$	107666	145063	10/10
22	2	2.4	0	0	625	884.3	10/10
23	5	1	0	0	6334	6377	6/10
24	10	3.2	0	0	6388	10972	10/10
25	50	4.2	0	0	143854	28659.2	10/10
26	2	1.9	$9.3612e-15$	$9.6479e-15$	442	673.2	10/10
27	3	1.33	$6.7019e-15$	$3.0522e-14$	1856	2432.5	6/10
28	5	1.2	$7.9898e-15$	$1.9403e-14$	7224	8434	6/10
29	7	1.67	$2.7523e-15$	$2.3663e-13$	27667	42438	6/10
30	10	1.8	$1.2847e-14$	$1.6595e-13$	5431	9009.3	6/10
31	20	2	$4.3544e-15$	$7.8110e-13$	25774	29627.7	7/10
32	30	1.6	$1.4371e-12$	$1.4846e-12$	40644	48623	6/10
33	50	2.5	$3.8401e-14$	$6.5307e-13$	97667	101200	6/10
34	3	2	-3.8628	-3.8628	1691	1711.1	8/10
35	4	1	$5.1247e-07$	$5.3991e-07$	1495	1504.2	10/10
36	4	1	$2.1255e-06$	$3.0358e-06$	2311	2270.8	5/10
37	4	1	$1.4831e-07$	$1.5082e-07$	3005	3503.1	9/10
38	4	1.5	-10.1532	-10.1532	1552	2077.8	10/10
39	4	1.4	-10.4293	-10.4029	1589	1990.6	10/10
40	4	1.6	-10.5321	-10.5321	1553	2106.6	10/10
41	6	1	-3.0425	-3.0425	2902	2905.9	10/10
42	10	1.22	$3.9738e-12$	$6.8682e-12$	980	1241.3	9/10
43	10	1	-210.0000	-210.0000	780	852.6	10/10
44	24	1	$1.4318e-10$	$2.7552e-09$	26326	28025	10/10
45	25	1	$4.5207e-13$	$4.5207e-13$	722350	722690	5/10
46	30	3.6	$3.8183e-04$	$3.8183e-04$	1026	31698	5/10
47	50	1	$6.3789e-06$	$6.3789e-06$	102150	102180	5/10
48	50	1	$3.4521e-15$	$2.1272e-14$	104960	104980	10/10
49	50	1	$8.6853e-12$	$2.3284e-10$	107680	107680	10/10
50	50	1	$1.3515e-14$	$4.6564e-13$	106670	107430	10/10

Çizelge 6.13. FDA uygulaması ile elde edilen nümerik sonuçlardır.

Problem No.	n	iter-m	f-best	f-mean	f.eval	f.eval-m	SR
1	2	1.58	$1.0829e-15$	$4.1446e-15$	504	645.4	7/10
2	2	1.25	$3.0245e-15$	$1.1500e-14$	485	505.8	8/10
3	2	1.43	$9.2191e-16$	$1.2757e-14$	431	522.8	7/10
4	2	1	$1.4745e-15$	$8.1885e-14$	443	449	8/10
5	2	1	-1.0316	-1.0316	442	462	10/10
6	2	1	$-1.6687e-15$	$7.5839e-15$	440	452.4	10/10
7	2	1.5	3.0000	3.0000	527	741.3	10/10
8	2	1.8	-186.7309	-186.7309	528	908.8	8/10
9	2	2.33	-2.0000	-2.0000	573	1103.7	6/10
10	2	1	$6.3713e-14$	$1.7293e-13$	490	509	7/10
11	2	1	0	$1.2212e-15$	517	541.5	6/10
12	2	1.5	$1.9429e-15$	$2.5664e-15$	663	671.5	8/10
13	2	1	$2.2538e-17$	$3.2654e-14$	587	592	6/10
14	2	1	$1.0297e-14$	$1.1478e-14$	468	470.5	10/10
15	2	1	0.3979	0.3979	462	464.7	10/10
16	2	2	-1.0000	-1.0000	564	615.8	8/10
17	2	1	$4.8317e-15$	$2.5860e-13$	456	459	10/10
18	2	1.7	$2.4624e-11$	$2.2067e-10$	516	838.3	7/10
19	5	1.4	$5.0339e-11$	$1.5063e-10$	4290	6175.9	7/10
20	10	2.2	$2.3928e-11$	$1.3864e-10$	4939	8388.4	10/10
21	50	2.8	$1.2627e-11$	$2.8357e-10$	103480	158770	10/10
22	2	2	0	0	520	920	6/10
23	5	2	0	0	1168	12507.5	6/10
24	10	2.8	0	0	5938	9749.8	10/10
25	50	3.5	0	0	107086	182604	10/10
26	2	1.63	$5.9509e-15$	$8.9916e-15$	413	632.7	8/10
27	3	1.5	$7.4537e-15$	$3.5161e-14$	1912	2544.4	7/10
28	5	1.29	$5.6667e-15$	$6.4088e-14$	6534	8348.1	7/10
29	7	1.6	$8.6046e-14$	$2.4496e-13$	11731	17647	5/10
30	10	1.6	$3.3611e-14$	$7.5959e-13$	4280	5503.2	5/10
31	20	1.83	$2.4067e-14$	$4.5329e-12$	17959	20865.7	6/10
32	30	1.67	$5.2201e-13$	$5.5266e-12$	37953	45585	5/10
33	50	3	$1.2854e-13$	$2.2943e-12$	93233	126440	6/10
34	3	2	-3.8628	-3.8628	2812	5360	10/10
35	4	1	$5.1247e-07$	$5.3534e-07$	895	908.6	10/10
36	4	1	$1.2412e-06$	$1.9686e-06$	1487	1789.2	6/10
37	4	1	$1.4882e-07$	$1.4957e-07$	1072	2785.3	7/10
38	4	2	-10.1532	-10.1532	955	1371.6	8/10
39	4	1.8	-10.4029	-10.4029	993	1210.4	10/10
40	4	2.2	-10.5321	-10.5321	1127	1359.6	9/10
41	6	1	-3.0425	-3.0425	1993	2004.5	10/10
42	10	1	$2.7532e-12$	$6.7075e-7$	938	1054	10/10
43	10	1	-210.0000	-210.0000	781	845.8	10/10
44	24	1	$1.0050e-10$	$1.5798e-08$	28201	28100.5	10/10
45	25	1	$4.9303e-13$	$4.9303e-13$	20031	21232	10/10
46	30	2.6	$3.8183e-04$	$3.8183e-04$	1085	17278	5/10
47	50	1	$5.9846e-03$	$2.8545e-02$	91657	96639	5/10
48	50	1	$1.2286e-17$	$4.4971e-13$	1073	13626	10/10
49	50	1	$2.1391e-09$	$1.0334e-06$	108971	109058.2	10/10
50	50	1	$1.3571e-13$	$1.9391e-12$	109025	109281.8	10/10

Çizelge 6.14. NDA uygulaması ile elde edilen nümerik sonuçlardır.

Problem No.	n	iter-m	f-best	f-mean	f.eval	feval-m	SR
1	2	1.7	$1.2436e-15$	$3.5544e-15$	744	784.3	10/10
2	2	1.63	$3.5740e-16$	$3.4262e-15$	146	321.5	8/10
3	2	1.5	$6.0891e-16$	$6.0802e-15$	115	185.5	8/10
4	2	1.2	$1.3076e-16$	$9.5804e-15$	70	111.2	10/10
5	2	1.6	-1.0316	-1.0316	440	468.5	10/10
6	2	1	$5.1080e-17$	$4.1635e-15$	88	113.9	10/10
7	2	1.3	3.0000	3.0000	428	489.4	7/10
8	2	1.5	-186.7309	-186.7309	443	517.5	7/10
9	2	2	-2	-2	560	647.9	7/10
10	2	1	$1.2452e-13$	$2.1463e-13$	663	677	8/10
11	2	1.6	$2.5535e-15$	$2.6534e-15$	580	604.2	10/10
12	2	2	$3.8857e-15$	$3.8857e-15$	577	617	9/10
13	2	1.6	$1.409983e-14$	$1.7030e-14$	570	603.1	10/10
14	2	1	$1.0297e-14$	$1.1478e-14$	557	559.9	10/10
15	2	1	0.3979	0.3979	3056	3062.1	10/10
16	2	1.9	-1.0000	-1.0000	660	696.6	10/10
17	2	1	$4.8317e-15$	$2.5860e-13$	76	81.9	10/10
18	2	1.6	$1.9363e-11$	$1.3276e-10$	690	719.8	10/10
19	5	1.4	$1.7523e-10$	$2.5130e-10$	1316	1353.3	10/10
20	10	1.8	$1.2292e-10$	$2.0788e-10$	2381	2507.4	10/10
21	50	2	$1.7150e-10$	$4.0270e-10$	12637	12710.9	10/10
22	2	1.5	0	0	493	536	8/10
23	5	2	0	0	1422	1516.5	8/10
24	10	1.5	0	0	2612	2788.8	8/10
25	50	2	0	0	13946	14217	10/10
26	2	1.4	$2.5537e-15$	$2.2370e-14$	269	294.	10/10
27	3	1.6	$6.2475e-15$	$1.2867e-14$	340	415.7	10/10
28	5	1.8	$4.9214e-15$	$1.3083e-13$	1382	1446.5	10/10
29	7	1.8	$2.2909e-14$	$1.2062e-13$	1886	2047.2	10/10
30	10	1.8	$4.5316e-14$	$8.3490e-13$	2993	3176.9	10/10
31	20	2	$7.7837e-13$	$3.3519e-12$	6657	7054.3	10/10
32	30	2	$3.4893e-13$	$3.1311e-12$	11094	11587.2	10/10
33	50	1.75	$3.2375e-12$	$1.8850e-9$	16704	19040.8	8/10
34	3	2	-3.8628	-3.8628	762	786	10/10
35	4	1	$5.1247e-07$	$5.3533e-07$	309	338	10/10
36	4	1	$2.2231e-06$	$2.4216e-06$	1255	1365	6/10
37	4	1	$1.4867e-07$	$1.5029e-07$	1057	2647.7	9/10
38	4	1	-10.1532	-10.1532	1214	1248.3	6/10
39	4	1	-10.4029	-10.4029	1206	1254	6/10
40	4	1	-1.05321	-1.05321	1213	1243	6/10
41	6	1	-3.0425	-3.0425	892	898.3	10/10
42	10	1	$4.3227e-12$	$5.1150e-12$	458	2309	10/10
43	10	1	-210.0000	-210.0000	3714	3796	10/10
44	24	1	$7.5816e-11$	$1.0596e-07$	6686	7233.7	10/10
45	25	1	$4.3861e-13$	$4.3861e-13$	8082	10079	6/10
46	30	2.3	$3.8183e-04$	$3.8183e-04$	777	13086	6/10
47	50	1.2	$5.9846e-03$	$2.8545e-02$	16770	28797	6/10
48	50	1	$1.3824e-15$	$6.2815e-15$	9907	102927	10/10
49	50	1	$2.3865e-13$	$8.6742e-12$	13801	138238	10/10
50	50	1	$7.7892e-14$	$8.1919e-13$	12157	125728	10/10

Çizelge 6.15. PDS-NDA uygulaması ile elde edilen nümerik sonuçlardır.

Problem No.	n	iter-m	f-best	f-mean	f.eval	f.eval-m	SR
1	2	3.6	$6.2724e-15$	$8.2087e-15$	367	355.2	10/10
2	2	1.5	$1.5896e-15$	$6.0110e-14$	39	92.2	10/10
3	2	1.4	$6.1822e-16$	$3.5587e-13$	30	104.5	10/10
4	2	1.8	$9.9711e-15$	$1.0136e-14$	36	94.8	10/10
5	2	1	-1.0316	-1.0316	33	49	10/10
6	2	4	$5.5297e-17$	$2.3738e-15$	299	318.3	10/10
7	2	1.5	3.0000	3.0000	60	129.3	10/10
8	2	3.8	-186.7309	-186.7309	194	413.5	10/10
9	2	5.6	-2	-2	110	131	10/10
10	2	4	$2.2942e-14$	$2.3116e-12$	38	42.1	10/10
11	2	4	$1.7763e-15$	$2.0477e-15$	58	280.4	9/10
12	2	1	$1.7763e-15$	$1.7763e-15$	58	80	10/10
13	2	2.4	$2.2204e-16$	$5.0515e-16$	33	50	10/10
14	2	1	$8.5623e-16$	$6.8928e-12$	27	33	10/10
15	2	4	$3.978874e-01$	$3.9788e-01$	196	266.6	10/10
16	2	1	-1.0000	-1.0000	69	69	10/10
17	2	4	$9.351140e-16$	$9.3511e-16$	95	495	10/10
18	2	2	$8.8817e-16$	$8.8817e-16$	72	472	10/10
19	5	2	$8.8818e-16$	$8.8818e-16$	83	145.6	10/10
20	10	2	$1.229212e-10$	$1.2292e-10$	387	4893	10/10
21	50	2.4	$8.111645e-11$	$2.8948e-10$	1567	38522	10/10
22	2	2.4	0	0	88	90.4	10/10
23	5	2	0	0	117	163.6	10/10
24	10	2	$1.4211e-14$	$1.4211e-14$	235	272.4	10/10
25	50	2	0	0	1312	1485.4	10/10
26	2	2.1	$7.3809e-15$	$3.6758e-14$	39	105	10/10
27	3	1.8	$4.3170e-15$	$8.3800e-14$	106	125	10/10
28	5	2	$4.6244e-15$	$1.4865e-14$	149	221.6	10/10
29	7	33	$4.1190e-14$	$7.1735e-14$	1781	6723.6	10/10
30	10	4.6	$1.4094e-13$	$8.0636e-13$	366	1217.8	10/10
31	20	3	$2.6477e-13$	$1.2642e-12$	725	2078.2	10/10
32	30	3	$2.6238e-13$	$1.3462e-12$	1095	2851.7	10/10
33	50	3.5	$1.4265e-12$	$6.7255e-12$	6597	4985.6	10/10
34	3	2	-3.8627	-3.8627	96	286	9/10
35	4	2.8	$4.5422e-13$	$5.2105e-13$	160	338.5	10/10
36	4	1	$7.1763e-05$	$7.1763e-05$	185	185	8/10
37	4	16	$5.619e-07$	$5.619e-07$	586	5892.3	8/10
38	4	2.5	-10.1532	-10.1532	100	423	10/10
39	4	2.5	-10.4029	-10.4029	110	422	10/10
40	4	2.1	-10.5321	-10.5321	90	419	10/10
41	6	1	-3.0425	-3.0425	154	617	8/10
42	10	2.2	$1.082e-12$	$4.2179e-12$	407	519.6	10/10
43	10	1	-210.0000	-210.0000	264	281.6	10/10
44	24	2.5	$5.4602e-09$	$3.7827e-06$	600	1643	10/10
45	25	3	$3.4100e-13$	$6.7172e-13$	4812	4836.4	10/10
46	30	2.3	$3.8183e-04$	$3.8183e-04$	5812	8836.4	5/10
47	50	1	$1.1423e-09$	$4.3755e-06$	2397	3724	10/10
48	50	1	$8.1725e-13$	$8.1725e-13$	1481	1496.3	10/10
49	50	1	$2.2725e-13$	$2.9318e-13$	1734	2142	10/10
50	50	7	0	$8.7817e-13$	5678	6289.7	10/10

başarı EDA uygulamasına göre daha yüksektir. Önerilen diğer metotlardan elde edilen sonuçlara göre iki algoritmanın da performansı kabul edilebilir niteliktedir.

NDA algoritması test problemlerine uygulanarak edilen sonuçlar Çizelge 6.11 de verilmiştir. NDA uygulamasında her bir problem için en az %60 başarı elde edilmiştir. Toplamdaki başarı %87.4 olmuştur. Bu algoritmada kullanılan yardımcı fonksiyon SDA, EDA ve FDA algoritmalarında kullanılan yardımcı fonksiyonlardan farklı bir yapıya sahiptir. NDA kullanılarak elde edilen $f - best$ ve $f - mean$ değerleri gerçek değerlere oldukça yakın olacak şekilde elde edilmiştir. Ortalama iterasyon ve fonksiyon değerlendirme sayısı problemlerin boyutu ve lokal minimum sayısına göre değişmektedir. SDA, EDA ve FDA algoritmalarına göre düşük boyutlu problemlerde daha az fonksiyon değerlendirme sayısı ile sonuca ulaşmıştır. NDA, yüksek boyutlu problemler için diğerleri ile hemen hemen aynı sayıda fonksiyon değerlendirme yaparak sonuca ulaşmıştır. PDS-NDA algoritmasında NDA ile aynı yardımcı fonksiyonu farklı bir algoritma düzeni içinde kullanılmıştır. Bu yeni algoritma başarı oranını %50 olmasına rağmen toplam başarı %97.4 olarak elde edilmiştir. Diğer metotlara göre başarı oranı en yüksek olan metot PDS-NDA metodudur. Bu sonuçlar “Nokta Dağıtma ve Seçme” algoritmasının nümerik olarak faydalı bir yaklaşım olduğunu destekler niteliktedir. Bununla birlikte sonuca ulaşmak için kullanılan fonksiyon değerlendirme sayısı oldukça azalmıştır. Fonksiyon değerlendirme sayısı en düşük olan metot da PDS-NDA metodudur. Başarı oranının yüksek olmasında algoritmanın başarısının yanında eldeki test fonksiyonlarının global minimum noktalarının bulunduğu yerin nokta dağılımına çoğu zaman denk gelmesinin de önemli rolü vardır.

Çizelge 6.16’de önerilen metotların test problemleri üzerinde ortalama iterasyon ve ortalama fonksiyon değerlendirme sayıları toplu olarak sunulmaktadır. Önerilen bütün metotlardan test problemleri üzerinde başarılı sonuçlar elde edildiğini belirtmek mümkündür. Bununla birlikte test problemlerinin çoğunda PDS-NDA metodunun daha az fonksiyon değerlendirme sayısı ile sonuca ulaştığı görülmektedir.

Çizelge 6.17’de önerilen metotlar ile literatürde var olan metotlar arasında ortalama fonksiyon değerlendirme sayısı bakımından kıyaslamalara yer verilmiştir. Sonuçlar

Çizelge 6.16. Önerilen metotların iterasyon ve fonksiyon değerlendirme sayısıdır.

No.	n	SDA		EDA		FDA		NDA		PDS-NDA	
		iter-m	f.eval-m	iter-m	f.eval-m	iter-m	f.eval-m	iter-m	f.eval-m	iter-m	f.eval-m
1	2	1	498.7	1	616.25	1.6	645.4	1.7	597.3	3.6	355.2
2	2	1.2	541.1	1	606	1.25	505.8	1.63	321.5	1.5	92.2
3	2	1.15	480.2	1.33	704	1.43	522.8	1.5	185.5	1.4	104.5
4	2	1.25	484.6	1	545.5	1	449	1.2	111.2	1.8	94.8
5	2	1.25	535.2	1	734.6	1	462	1.6	468.5	1	49
6	2	1	452.2	1	599.1	1	452.4	1	113.9	4	318.3
7	2	1.67	910.9	1.22	700.9	1.5	741.3	1.3	489.4	1.5	129
8	2	2.5	980	2.8	1078.7	1.8	908.8	1.5	517.5	3.8	413.5
9	2	3.5	550	4	1102	2.33	1103.7	2	647.9	5.6	131
10	2	1	633	1	581.9	1	509	1	677	4	42.1
11	2	2	277	2	814.5	1	541.5	1.6	604.2	4	280.4
12	2	1	287.5	2	807	1.5	671.5	2	617	1	39
13	2	1.8	802.4	1.2	640.1	1	592	1.6	603.1	2.4	48
14	2	1	518.2	1	542.1	1	470.5	1	559.9	1	33
15	2	1	422.4	1	545.2	1	464.7	1	3062.1	4	266.6
16	2	1.75	363.4	1.83	666.3	2	615.8	1.9	696.6	1	69
17	2	1	429	1	594	1	459	1	81.9	4	495
18	2	1.6	722.6	3.7	1540.2	1.7	838.9	1.6	719.8	2	472
19	5	1	9910.5	1	7422.5	1.4	6175.9	1.4	1353.3	2	145.6
20	10	4.8	13274	1.8	6619.3	2.2	8388.4	1.8	2507.4	2	4893
21	50	2	14869	1.8	145063	2.8	158770	2	12710.9	2.4	38522
22	2	2.28	1237.6	2.4	884.3	2	920	1.5	536	2.4	90.4
23	5	1	1809.8	1	6377	2	12507.5	2	1516.5	2	163.6
24	10	3.2	11145	3.2	10972	2.8	9749.5	1.5	2788.8	2	272.4
25	50	5.3	218000	4.2	286592	3.5	182604	2	14217	2	1485.4
26	2	1.6	488.6	1.9	673.2	1.63	632.7	1.4	294	2.1	105
27	3	5.5	8375.5	1.33	2432.5	1.5	2544.2	1.6	415.7	1.8	125
28	5	1.2	11808	1.2	8434	1.29	8348.1	1.8	1446.5	2	221.6
29	7	1.6	41791	1.67	42438	1.6	17647	1.8	2047.2	33	6723.6
30	10	2.5	8726.3	1.8	9009.3	1.6	5503.2	1.8	3176.9	4.6	1217.8
31	20	2.3	18503	2	29627.9	1.83	20865.2	2	7054.3	3	2078.2
32	30	2.5	509854	1.6	48623	1.67	45585	2	11587.2	3	2851.7
33	50	2.3	73442	2.5	101200	3	12644	1.75	19040.8	3.5	4985.6
34	3	1.25	2466.2	2	1711.1	2	5360	2	786	2	96
35	4	1	849.7	1	1504.2	1	21232	1	338	2.8	338.5
36	4	1	1648.3	1	2270.8	1	1789.2	1	1365	1	185
37	4	1	2646.3	1	3503.1	1	2785.3	1	2647.7	16	5892.3
38	4	1	1347.3	1.5	2077.8	2	1371.6	1	1248.3	2.5	423
39	4	1.9	1792.7	1.4	1990.6	1.8	1210.4	1	1254	2.5	422
40	4	2.1	1890.5	1.6	2106.6	2	1359.6	1	1243	2.1	419
41	6	1	1749.4	1	2905.9	1	2004.5	1	898.3	1	617
42	10	1.2	1109.2	1.22	1241.3	1	1054	1	2309	2.2	519.6
43	10	1	973.7	1	852.6	1	845.8	1	3796	2	281.6
44	24	1	26269	1	28025	1	28100.5	1	7233.7	2.5	1643
45	25	1	79342	1	722690	1	21232	1	10079	3	4836.4
46	30	4.75	25764	3.6	31698	2.6	17278	2.3	13086	2.3	8836.4
47	50	1	99815	1	102180	1	96639	1.2	28797	1	3724
48	50	1	90933	1	104980	1	136260	1	102927	1	1496.3
49	50	1	93620	1	107680	1	109058.2	1	138238	1	2142
50	50	1	93562	1	107430	1	109281.8	1	125728	7	6289.7

incelendiğinde önerilen metotların test problemlerinin %66'sında daha az fonksiyon değerlendirme sayısı ile sonuca ulaştığı görülmektedir.

Bütün bu kıyaslamalar neticesinde PDS-NDA metodunun geliştirilerek daha iyi sonuçların mümkün olabileceğini göstermektedir.

Çizelge 6.17. Önerilen metotlar ile literatürdeki metotların kıyaslamalarıdır.

No.	n	SDA	EDA	FDA	NDA	PDS-NDA	Gao vd. (2015)	El-Gindy vd. (2016)	Wei vd. (2014)	Liu (2009)	BIRECT
1	2	498.7	616.25	645.4	597.3	355.2	345.3	778	297	455.8	—
2	2	541.1	606	505.8	321.5	92.2	—	310	255	635	—
3	2	480.2	704	522.8	185.5	104.5	—	977	374	619.8	—
4	2	484.6	545.5	449	111.2	94.8	—	577	74	379	—
5	2	535.2	734.6	462	468.5	49	283.2	279	74	224.7	334
6	2	452.2	599.1	452.4	113.9	318.3	—	265	72	214.3	—
7	2	910.9	700.9	741.3	489.4	129	177141	—	80	321.2	274
8	2	980	1078.7	908.8	517.5	413.5	355	635	78	627.1	1780
9	2	550	1102	1103.7	647.9	131	285	315	814	642.1	—
10	2	633	581.9	509	677	42.1	—	—	102	—	436
11	2	277	814.5	541.5	604.2	280.4	—	—	226	—	476
12	2	287.5	807	671.5	617	39	—	—	—	—	478
13	2	802.4	640.1	592	603.1	48	—	—	—	—	480
14	2	518.2	542.1	470.5	559.9	33	—	—	77	—	194
15	2	422.4	545.2	464.7	3062.1	266.6	490	—	202	217.2	242
16	2	363.4	666.3	615.8	696.6	69	—	—	207	—	16420
17	2	429	594	459	81.9	495	—	—	207	—	94
18	2	722.6	1540.2	838.9	719.8	472	34556.5	—	—	—	202
19	5	9910.5	7422.5	6175.9	1353.3	145.6	—	—	—	—	1268
20	10	13274	6619.3	8388.4	2507.4	4893	123436.6	—	—	—	47792
21	50	14869	145063	158770	12710.9	38522	> 10 ⁷	—	—	—	—
22	2	1237.6	884.3	920	536	90.4	527.5	—	—	687.6	180
23	5	1809.8	6377	12507.5	1516.5	163.6	—	—	—	1906	1394
24	10	11145	10972	9749.5	2788.8	272.4	4334.5	—	18613	—	40254
25	50	218000	286592	182604	14217	1485.4	345452.6	—	—	—	—
26	2	488.6	673.2	632.7	294	105	—	549	634	596.8	—
27	3	8375.5	2432.5	2544.2	415.7	125	—	1283	638	1023.1	—
28	5	11808	8434	8348.1	1446.5	221.6	—	5291	—	2025.4	—
29	7	41791	42438	17647	2047.2	6723.6	—	12793	6090	3799.6	—
30	10	8726.3	9009.3	5503.2	3176.9	1217.8	10393.7	33810	6020	11747	—
31	20	18503	29627.9	20865.2	7054.3	2078.2	—	96223	—	45254.3	—
32	30	509854	48623	45585	11587.2	2851.7	69915	> 10 ⁶	—	44194.1	—
33	50	73442	101200	12644	19040.8	4985.6	56512.5	> 10 ⁶	—	249833	—
34	3	2466.2	1711.1	5360	786	96	—	—	3241	—	352
35	4	849.7	1504.2	21232	338	338.5	—	—	167	—	794
36	4	1648.3	2270.8	1789.2	1365	185	—	—	103	—	> 500000
37	4	2646.3	3503.1	2785.3	2647.7	5892.3	—	—	103	—	10856
38	4	1347.3	2077.8	1371.6	1248.3	423	45601	—	116	820.1	1200
39	4	1792.7	1990.6	1210.4	1254	422	13232.5	—	209	870.2	1180
40	4	1890.5	2106.6	1359.6	1243	419	50245	—	507	839.4	1140
41	6	1749.4	2905.9	2004.5	898.3	617	29404	—	827	1674.8	764
42	10	1109.2	1241.3	1054	2309	519.6	—	—	643	—	—
43	10	973.7	852.6	845.8	3796	281.6	—	—	642	—	1656
44	24	26269	28025	28100.5	7233.7	1643	—	—	681517	—	—
45	25	79342	722690	21232	10079	4836.4	—	—	16266	—	—
46	30	25764	31698	17278	13086	8836.4	—	—	—	—	—
47	50	99815	102180	96639	28797	3724	—	—	316406	—	—
48	50	90933	104980	136260	102927	1496.3	—	—	6215	—	—
49	50	93620	107680	109058.2	138238	2142	—	—	6277	—	—
50	50	93562	107430	109281.8	125728	6289.7	—	—	316356	—	—

6.2.2. Global optimizasyon metotlarının düzgün olmayan test problemlerine uygulaması

İlk olarak aşağıdaki düzgün olmayan hatta Lipschitz sürekli olmayan amaç fonksiyonuna sahip problemi ele alalım.

Problem 6.15.

$$\min_{x \in [-10, 8]} g(x) = - \sum_{i=1}^3 \frac{a_i}{1 + |x - b_i|^{p_i}} + \sum_{j=1}^2 c_j \max\{x - d_j, 0\}$$

problemini ele alalım. Burada $i = 1, 2, 3$ ve $j = 1, 2$ için a_i , b_i , c_j ve d_j reel sayılardır.

Her i ve j için karşılık gelen değerler Çizelge 6.18 de gösterilmiştir.

Çizelge 6.18. Problem 6.15 için a_i ve b_i değerleridir.

i	1	2	3	j	1	2
a_i	0.8	3.1	1.7	c_j	2	-5
b_i	-3	0	4	d_j	3	6
p_i	2	2/3	1	-	-	-

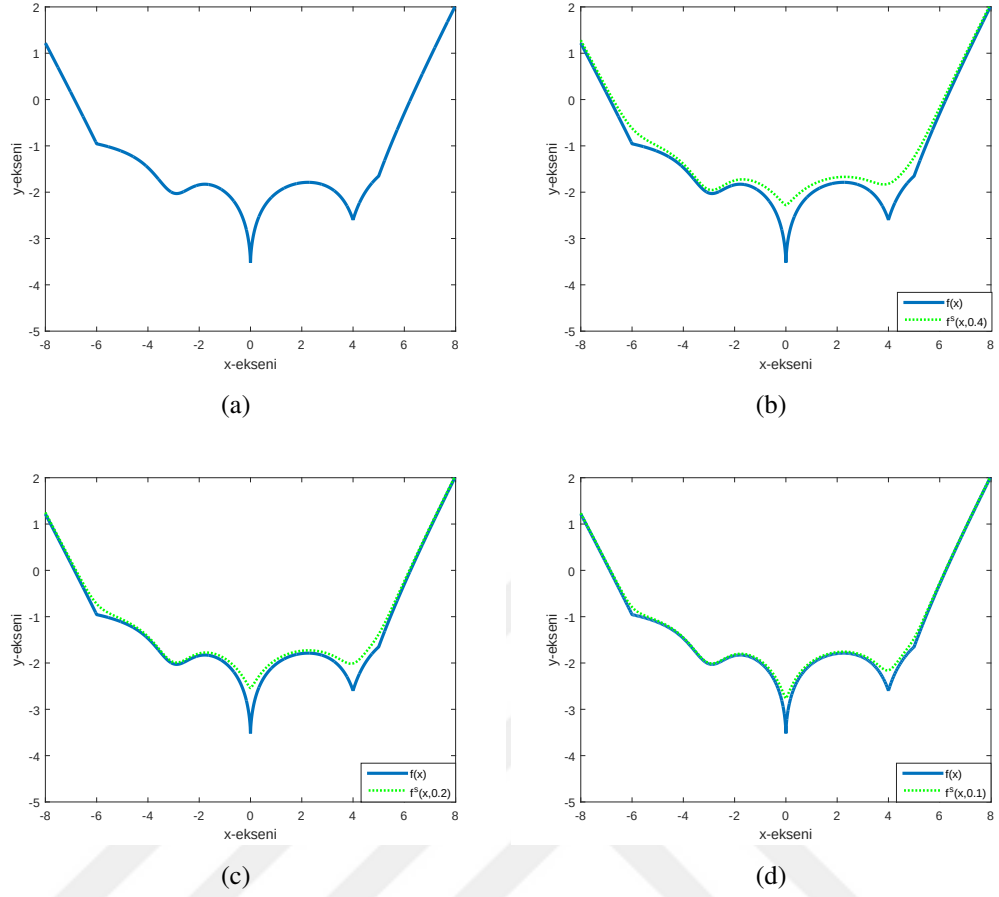
g amaç fonksiyonu yaklaşık olarak $x \approx -3, 0$ ve 4 noktaları civarında lokal minimum noktalara sahip ve fonksiyon $x^* = 0$ noktasında global minimuma sahiptir. Fonksiyonun global minimum değeri $g(x^*) = -3.5200$ dir. g fonksiyonunun grafiği Şekil 6.6 (a) da gösterilmiştir. Amaç fonksiyonu düzgün bir fonksiyon olmadığı için öncelikle düzgünleştirme tekniklerinden herhangi biri uygulanarak düzgün hale getirilebilmektedir. Burada Bölüm 4.1.1 de önerilen düzgünleştirme yaklaşımı kullanılmıştır. Bu düzgünleştirme süreci Şekil 6.6 (b), (c) ve (d) görselleştirilmiştir. Problem 6.14 de olduğu gibi minimize edilmiştir. Benzer şekilde tekrar yardımcı fonksiyon kurulup gerekli işlemler yapıldığında global minimum $x^* = 1.8874e - 15$ ve karşılık gelen değer $g^* = -3.5169$ olarak elde edilmiştir.

Üretilen metotlar test problemleri üzerine uygulanmıştır. Bu test problemlerinin listesi ve özellikleri Çizelge 6.19 ile sunulmaktadır. Metotların aynı probleme 10

Çizelge 6.19. Düzgün olmayan test problemlerinin listesidir.

No.	Fonksiyon Adı	n	Optimizasyon Bölgesi	Minimum değeri
1	Problem 1 Kethi-Cherif ve Ziadi (2014)	1	$[-10, 10]^n$	1
2	Problem 2 Kethi-Cherif ve Ziadi (2014)	1	$[-10, 10]^n$	1
3	Problem 3 Kethi-Cherif ve Ziadi (2014)	2	$[-10, 10]^n$	2
4	Problem 6 Zhang vd. (2004)	2	$[-10, 10]^n$	-3
5	Problem 7 Zhang vd. (2004)	2	$[-10, 10]^n$	-2.718283
6	Problem 1 Ek-1	2	$[-10, 10]^n$	-3.7608
7	Problem 2 Ek-1	3	$[-10, 10]^n$	0
8	Problem 3 Ek-1	5	$[-10, 10]^n$	0
9,10,11,12	Problem 7 Kethi-Cherif ve Ziadi (2014)	2,3,4,5	$[-10, 10]$	0
13,14,15	Problem 7 Kethi-Cherif ve Ziadi (2014)	10,20,50	$[-10, 10]$	0

kez farklı başlangıç noktaları kullanarak uygulanması neticesinde elde edilen en düşük fonksiyon değeri (f-best), ortalama fonksiyon değeri (f-mean), en düşük toplam fonksiyon değerlendirme sayısı (f.eval), ortalama toplam fonksiyon değerlendirme sayısı (f.eval-m), ortalama iterasyon sayısı (iter-m) ve bu 10 denemede başarı oranı çizelgelerde sunulmuştur.



Şekil 6.6. f fonksiyonunun düzgünleştirme fonksiyonlarının grafikleridir.

Çizelge 6.20. SDA uygulaması ile elde edilen nümerik sonuçlardır.

No.	n	iter-m	f-best	f-mean	f.eval	f.eval-m	SR
1	1	1.5	1.0000	1.0000	136	228.9	10/10
2	1	1	1.0000	1.0000	146	192.3	10/10
3	2	1	2.0000	2.0000	964	993.9	10/10
4	2	1	-3.0000	-3.0000	964	997.4	10/10
5	2	1.4	-2.7183	-2.7183	838	1091.3	10/10
6	2	1	-3.7608	-3.7608	752	803.83	8/10
7	3	1	$2.020e-8$	$2.0227e-08$	275	548.13	8/10
8	5	1	$3.3703e-07$	$5.8617e-07$	597	1123.8	8/10
9	2	1	$9.891124e-09$	$1.420279e-08$	337	353.2	10/10
10	3	1	$3.704902e-09$	$1.484894e-08$	2375	2412.9	10/10
11	4	1	$1.752125e-09$	$1.175097e-08$	1379	1420.6	10/10
12	5	1	$2.971384e-09$	$2.653584e-08$	10618	10678	10/10
13	10	1	$7.130299e-09$	$3.810501e-08$	5077	5157.5	10/10
14	20	1	$2.343689e-08$	$1.138960e-07$	17097	17216	10/10
15	50	1	$9.108731e-08$	$2.178712e-07$	90014	92314	10/10

Çizelge 6.21. EDA uygulaması ile elde edilen nümerik sonuçlardır.

No.	n	iter-m	f.best	f-mean	f.eval	f.eval-m	SR
1	1	1	1.00000	1.0000	168	199.8	8/10
2	1	1.13	1.00000	1.0000	146	190.1	8/10
3	2	1	2.00000	2.0000	708	752.1	10/10
4	2	1	-3.0000	-3.0000	721	765.1	10/10
5	2	2.8	-2.7182	-2.7181	758	1579.5	10/10
6	2	1	-3.7608	-3.7605	951	1044	8/10
7	3	1	0	$3.2102e-07$	1626	2232.9	8/10
8	5	1	$4.1871e-07$	$6.5614e-07$	4893	7894.2	8/10
9	2	1	$1.8964e-09$	$1.1512e-08$	555	585.2	10/10
10	3	1	$6.2561e-09$	$1.7106e-08$	3635	3715.8	10/10
11	4	1	$7.0349e-09$	$1.9192e-08$	866	902.1	10/10
12	5	1	$1.9327e-09$	$1.8143e-08$	7573	7609	10/10
13	10	1	$1.8019e-08$	$4.2175e-08$	5188	5250.6	10/10
14	20	1	$2.5415e-08$	$9.6126e-08$	18228	18334.6	10/10
15	50	1	$2.8964e-08$	$1.9305e-07$	106750	107051.6	10/10

Çizelge 6.22. FDA uygulaması ile elde edilen nümerik sonuçlardır.

No.	n	iter-m	f-best	f-mean	f.eval	f.eval-m	SR
1	1	1	1.0000	1.0000	155	175.7	10/10
2	1	1	1.0000	1.0000	129	158.8	10/10
3	2	1	2.0000	2.0000	613	651.9	10/10
4	2	1	-3.0000	-3.0000	639	677.4	10/10
5	2	1.83	-2.7183	-2.7182	480	895.5	6/10
6	2	1	-3.7598	-3.7592	325	657.5	6/10
7	3	1	$2.0203e-06$	$2.0203e-06$	1413	3164.8	8/10
8	5	1	$3.5215e-07$	$5.6443e-07$	6381	6867.1	8/10
9	2	1	$4.2419e-09$	$1.3489e-08$	531	555.6	10/10
10	3	1	$8.6240e-09$	$1.6631e-08$	3061	3076.6	10/10
11	4	1	$1.8332e-09$	$1.1924e-08$	1018	1023.8	10/10
12	5	1	$6.3059e-09$	$2.1812e-08$	4410	4458.2	10/10
13	10	1	$1.3969e-08$	$4.1596e-08$	4151	4141.2	10/10
14	20	1	$2.2397e-08$	$8.9103e-08$	18122	18280.2	10/10
15	50	1	$7.8380e-08$	$1.8243e-07$	42511	42718	10/10

SDA boyutu 1 ile 50 arasında değişen 15 düzgün olmayan test problemine uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlar Çizelge 6.20 de verilmiştir. SDA uygulamasında her bir problem için en az %80 başarı elde edilmiştir. Toplamdaki başarı %96 olmuştur. $f - best$ ve $f - mean$ değerleri gerçek değerlere oldukça yakın olarak elde edilmiştir. Ortalama iterasyon ve fonksiyon değerlendirme sayısı problemlerin boyutu ve lokal minimum sayısına göre değişmektedir.

Çizelge 6.23. NDA uygulaması ile elde edilen nümerik sonuçlardır.

No.	n	iter-m	f-best	f-mean	f.eval	f.eval-m	SR
1	1	1.5	1.0000	1.0000	213	287.3	10/10
2	1	1.8	1.0000	1.0000	190	265.5	10/10
3	2	1	2.0000	2.0000	882	902	10/10
4	2	1	-3.0000	-3.0000	875	909.7	10/10
5	2	1.8	-2.7183	-2.7183	723	748.5	10/10
6	2	1.5	-3.7600	-3.7587	1008	1117	4/10
7	3	1	$3.9975e-08$	$3.9975e-08$	1103	1181.5	8/10
8	5	1.2	$1.5812e-06$	$1.5812e-6$	2416	2508.9	10/10
9	2	1	$5.0553e-09$	$6.2647e-09$	850	886.5	10/10
10	3	1	$7.5000e-06$	$7.5000e-06$	1143	1188.8	10/10
11	4	1	$4.1000e-05$	$1.0000e-05$	451	979.70	10/10
12	5	1	$1.2500e-05$	$1.2500e-05$	1631	1714.6	10/10
13	10	1	$2.5000e-05$	$2.5000e-05$	3160	3223.8	10/10
14	20	1	$5.0000e-05$	$5.0000e-05$	6006	6114.6	10/10
15	50	1	$1.2500e-05$	$1.2500e-05$	16617	16864	10/10

Çizelge 6.24. PDS-NDA uygulaması ile elde edilen nümerik sonuçlardır.

No.	n	iter-m	f-best	f-mean	f.eval	f.eval-m	SR
1	1	1.8	1.0000	1.0000	172	144.1	10/10
2	1	1.8	1.0000	1.0000	149	147	10/10
3	2	2	2.0000	2.0000	376	377.8	8/10
4	2	1.9	-3.000	-3.0000	1612	1497.3	10/10
5	2	2	-2.7183	-2.7183	68	126.1	10/10
6	2	1.5	-3.7606	-3.7587	140	288	6/10
7	3	3	$4.1381e-07$	$4.1381e-07$	1041	1041	8/10
8	5	1.2	0	$1.3912e-08$	2416	2508.9	10/10
9	2	1	$4.2092e-09$	$5.0823e-07$	117	157.8	10/10
10	3	1	$2.1089e-08$	$2.4720e-06$	128	207.6	10/10
11	4	1	$2.2318e-08$	$2.3582e-05$	195	298.9	10/10
12	5	1	$2.7547e-08$	$1.9772e-05$	296	379.2	10/10
13	10	1.8	$7.4424e-08$	$2.0504e-05$	502	888.5	10/10
14	20	2.8	$5.0936e-08$	$1.1222e-07$	2389	2684.1	10/10
15	50	2.7	$1.2290e-07$	$7.0377e-06$	4113	5888.3	10/10

EDA ve FDA algoritmalarının test problemlerine uygulanmaları sonucu elde edilen sonuçlar sırasıyla Çizelge 6.21 ve 6.22 ile verilmiştir. EDA uygulamasında her bir problem için en az %80 başarı elde edilmekle birlikte toplamdaki başarı %93 olmuştur. Benzer şekilde FDA uygulaması sonucu en az %70 başarı elde edilmekle birlikte toplamdaki başarı %93.2 olmuştur. EDA ve FDA algoritmalarının ikisi içinde $f - best$ ve $f - mean$ değerleri gerçek değerlere oldukça yakın olacak şekilde elde edilmiştir. EDF ve FDF fonksiyonları birbirine benzer bir yapıya sahip olsada algoritmaları

Çizelge 6.25. Önerilen metotların düzgün olmayan test problemleri üzerinde nümerik kıyaslamalarıdır.

Problem No.	n	SDA		FDA		FDA		NDA		PDS-NDA	
		iter-m	f.eval-m	iter-m	f.eval-m	iter-m	f.eval-m	iter-m	f.eval-m	iter-m	f.eval-m
1	1	1.5	228.9	1	199.8	1	175.7	1.5	287.3	1.8	144.1
2	1	1	192.3	1.13	190.1	1	158.8	1.8	265.5	1.8	147
3	2	1	993.9	1	752.1	1	651.9	1	902	2	377.8
4	2	1	997.4	1	765.1	1	677.4	1	909.7	1.9	1497.3
5	2	1.4	1091.3	2.8	1579.5	1.83	895.5	1.8	748.5	2	126.1
6	2	1	803.8	1	1044	1	657.5	1.5	1117	1.5	288
7	3	1	548.13	1	2232.9	1	3164.8	1	1181.5	3	1041
8	5	1	1123.8	1	7894.2	1	6867.1	1.2	2508.9	1.2	2508.9
9	2	1	353.2	1	585.2	1	555.6	1	157.8	1	157.8
10	3	1	2412.9	1	3715.8	1	3076.6	1	207.6	1	207.6
11	4	1	1420.6	1	902.1	1	1023.8	1	298.6	1	298.6
12	5	1	10678	1	7609	1	4458.2	1	379.2	1	379.2
13	10	1	5157.5	1	5250.6	1	4141.2	1	888.5	1.8	888.5
14	20	1	17216	1	18334.6	1	18280.2	1	2684.1	2.8	2684.1
15	50	1	92314	1	107051.6	1	42718	1	5888.3	2.7	5888.3

birbirinden farklıdır. Bu nedenle FDA uygulamasında, EDA uygulamasına göre daha fazla fonksiyon değerlendirme sayısı olsada toplam başarı EDA uygulamasına göre daha yüksektir.

NDA algoritması uygulanarak edilen sonuçlar Çizelge 6.23’de verilmiştir. NDA uygulamasında her bir problem için en az %80 başarı elde edilmiştir. Toplamdaki başarı %97.2 olmuştur. Bu algoritma içinde $f - best$ ve $f - mean$ değerleri gerçek değerlere oldukça yakın bir şekilde elde edilmiştir. Ortalama iterasyon ve fonksiyon değerlendirme sayısı problemlerin boyutu ve lokal minimum sayısına göre değişmektedir. SDA, EDA ve FDA algoritmalarına göre düşük boyutlu problemlerde daha az fonksiyon değerlendirme sayısı ile sonuca ulaşmıştır. Yüksek boyutlu problemlerde diğer metotlar ile hemen hemen aynı sayıda fonksiyon değerlendirme yaparak sonuca ulaşmıştır. PDS-NDA algoritması kullanılarak elde edilen sonuçlar Çizelge 6.24 ile verilmiştir. PDS-NDA algoritmasında NDA ile aynı yardımcı fonksiyonu farklı bir algoritma düzeni içinde kullanılmıştır. Bu algoritmanın başarı oranı %80 olmasına rağmen toplam başarı %96 olarak elde edilmiştir.

Çizelge 6.25 ile önerilen metotların test problemleri üzerinde ortalama iterasyon ve fonksiyon değerlendirme sayısı sunulmaktadır. Test problemlerinin çoğunda PDS-NDA yaklaşımının daha başarılı olduğu gözlemlenmektedir.

Çizelge 6.26 ile önerilen metot ile literatürde mevcut olan bir metodun düzgün olmayan test problemleri üzerinde, ortalama fonksiyon değerlendirme sayısı bakımından

Çizelge 6.26. Önerilen metotların literatürde mevcut olan bir metot ile düzgün olmayan problemler üzerinde kıyaslamalarıdır.

Problem No	n	SDA	EDA	FDA	NDA	PDS-NDA	Cherif vd.
1	1	228.9	199.8	175.7	287.3	144.1	362
2	1	192.3	190.1	158.8	265.5	147	524
3	2	993.9	752.1	651.9	902	377.8	1136
4	2	997.4	765.1	677.4	909.7	1497.3	—
5	2	1091.3	1579.5	895.5	748.5	126.1	—
6	2	803.8	1044	657.5	1117	288	—
7	3	548.13	2232.9	3164.8	1181.5	1041	—
8	5	1123.8	7894.2	6867.1	2508.9	2508.9	—
9	2	353.2	585.2	555.6	886.5	157.8	1212
10	3	2412.9	3715.8	3076.6	1188.8	207.6	1678
11	4	1420.6	902.1	1023.8	979.7	298.6	2614
12	5	10678	7609	4458.2	1714.6	379.2	3484
13	10	5157.5	5250.6	4141.2	3223.8	888.5	10344
14	20	17216	18334.6	18280.2	6114.6	2684.1	42446
15	50	92314	107051.6	42718	16864	5888.3	—

kıyaslanması amacıyla oluşturulmuştur. Önerilen metotların literatürde var olan metotdan daha başarılı olduğu gözlemlenmektedir.

6.3. Düzgünleştirme Yaklaşımı ve Global Optimizasyonun Moleküler Yapı Problemlerine Uygulanması

Burada düzgünleştirme yaklaşımı kullanılarak ($C_4H_9NO_3$) Theronine molekülünün iki farklı torsion açısına bağlı olarak değişen enerji fonksiyonu diferansiyellenebilir olacak şekilde kurulacaktır. Daha sonra fonksiyonun global minimumu Bölüm 5’de verilen metotlar yardımıyla bulunacaktır. Böylelikle ham enerji verilerinden yola çıkarak molekülün minimum enerjili yapısı elde edilmiş olacaktır.

($C_4H_9NO_3$) theronine molekülü için enerji değerleri DFT metodu kullanılarak elde edilmiştir. Hesaplamalarda ($SC1 = C2C1C4O7$ ve $SC2 = C1C2O6H13$) torsion açıları alınmış ve 20° artışlarla toplamda 360° olacak şekilde her bir açı değeri için enerji değeri hesaplanmıştır.

İlk torsion açısı 6.78° ’den başlayarak 20° artışlarla 346.78° ’ye kadar hesaplanmıştır. İkinci torsion açısı ise 19° ’den başlayarak 20° artışlarla 359° ’ye kadar hesaplanmıştır. Bu iki açı değerinin her bir durumu için enerji değeri hesaplanarak ham veriler elde

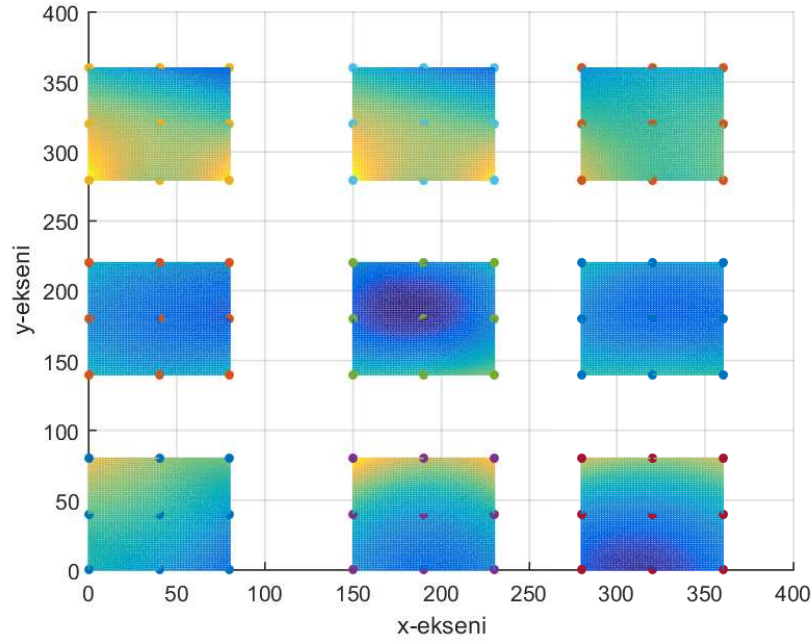
edilmiştir. Detaylar için (Sahiner vd., 2016b) incelenebilir. Model fonksiyonun kurulumu ve global optimum noktanın tayini için Algoritma B takip edilecektir.

Algoritma B

- Adım 0. – D bölgesinin $i, j = 1, 2, \dots, m$ için $D_{i,j}$ alt bölgelerini belirle.
 – Her bir bölgeden 9 kontrol noktası belirle ve bunları $i, j = 1, 2, \dots, m$ için $Q_{i,j}$ matrisi olarak ata.
- Adım 1. Her bir $Q_{i,j}$ matrisi için Bezier yüzeylerini inşa et ve bu yüzey parçaları olan $f_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, m$ fonksiyonlarını hesapla.
- Adım 2. Her bir $D_{i,j}$ kümesi için karakteristik fonksiyonları ve bu fonksiyonların düzgünleştirme fonksiyonlarını inşa et.
- Adım 3. $\tilde{f}(x, y, \epsilon) = \sum_{i,j=1}^n f_{i,j}(x, y, \epsilon) \tilde{\chi}_{D_{i,j}}(x, y, \epsilon)$ olacak şekilde objektif fonksiyonu kur.
- Adım 4. $\tilde{f}(x, y, \epsilon)$ fonksiyonun global minimumunu bulmak için global optimizasyon metotlarını kullanarak çözümle.
-

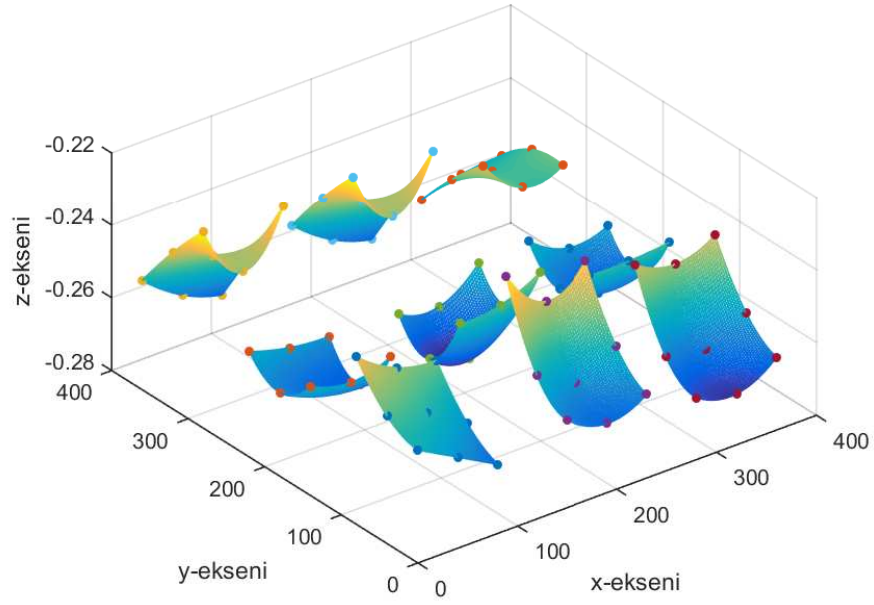
Bütün deney verileri $[0, 360] \times [0, 360]$ kümesi içinde olduğu için tanım kümesi olarak $D = [0, 360] \times [0, 360]$ olarak belirlenmiştir. Bu aşamadan sonra $D_{1,1} = [0, 80] \times [0, 80]$, $D_{1,2} = [0, 80] \times [140, 220]$, $D_{1,3} = [0, 80] \times [280, 360]$, $D_{2,1} = [150, 230] \times [0, 80]$, $D_{2,2} = [150, 230] \times [140, 220]$, $D_{2,3} = [150, 230] \times [280, 360]$, $D_{3,1} = [280, 360] \times [0, 80]$, $D_{3,2} = [280, 360] \times [140, 220]$ ve $D_{3,3} = [280, 360] \times [280, 360]$ olacak şekilde D bölgesini birbiri ile bağlantısı olmayan 9 farklı bölge inşa edilmiştir. Her bir bölgede 9 kontrol noktası belirlenmiştir. Bölgeler ve kontrol noktaları Şekil 6.7 de gösterilmiştir. Bu bölgeler üzerinde ayrı ayrı Bezier yüzeyleri kurulmuştur. Bu yüzey parçaları Şekil 6.8’de gösterilmiştir (–438 sayısı 0 sayısına denk getirilerek çizilmiştir). Elde edilen yüzey parçaları parametrik formdadır. Bu aşamada parametrik formdan kartezyen forma dönüştürülerek her bir yüzey parçası bir fonksiyon ile temsil edilmiştir. $i, j = 1, \dots, 3$ için $D_{i,j}$ alt bölgeleri üzerinde tanımlı $f_{i,j}$ fonksiyonları:

$$\begin{aligned}
 f_{1,1}(x, y) &= (13x^2y^2)/10240000000 - (21x^2y)/2560000000 - (27xy^2)/2560000000 \\
 &\quad + (47xy)/6400000 - (3x)/20000 + (7y^2)/3200000 + y/80000 - 249/1000, \\
 f_{1,2}(x, y) &= (x^2y^2)/2560000000 - (x^2y)/6400000 + (103x^2)/6400000 + (xy)/1600000 \\
 &\quad - (19x)/80000 + (13y^2)/3200000 - (59y)/40000 - 197/1600, \\
 f_{1,3}(x, y) &= (29x^2y^2)/10240000000 - (489x^2y)/2560000000 + (103x^2)/320000
 \end{aligned}$$



Şekil 6.7. $\Omega = [0, 360] \times [0, 360]$ kümesinin alt bölgelerinin grafiğidir.

$$\begin{aligned}
 & -(11xy^2)/51200000 + (919xy)/6400000 - (241x)/10000 - y^2/1600000 \\
 & + y/10000 - 41/200, \\
 f_{2,1}(x,y) &= (3x^2y^2)/10240000000 + (3x^2y)/256000000 + (9x^2)/3200000 \\
 & - (67xy^2)/512000000 - (43xy)/12800000 - (173x)/160000 \\
 & + (363y^2)/20480000 + (583y)/2560000 - 5027/32000, \\
 f_{2,2}(x,y) &= -(7x^2y^2)/5120000000 + (33x^2y)/64000000 - (113x^2)/2560000 \\
 & + (133xy^2)/256000000 - (627xy)/3200000 + (10783x)/640000 \\
 & - (2063y^2)/5120000 + (9737y)/640000 - 199213/128000, \\
 f_{2,3}(x,y) &= (29x^2y^2)/10240000000 - (489x^2y)/256000000 + (103x^2)/320000 \\
 & - (109xy^2)/102400000 + (9173xy)/12800000 - (9653x)/80000 \\
 & + (9761y^2)/102400000 - (164909y)/2560000 + 34087/3200, \\
 f_{3,1}(x,y) &= (x^2y^2)/10240000000 - (3x^2y)/256000000 + (9x^2)/3200000 \\
 & - (21xy^2)/256000000 + (11xy)/1280000 - (141x)/80000 \\
 & + (63y^2)/3200000 - (121y)/80000 + 1/100, \\
 f_{3,2}(x,y) &= -(x^2y^2)/20480000000 + (13x^2y)/64000000 - (19x^2)/1024000 \\
 & + (83xy^2)/256000000 - (27xy)/200000 + (7909x)/640000
 \end{aligned}$$



Şekil 6.8. Alt bölgeler üzerinde kurulan Bezier yüzeylerinin grafiğidir.

$$\begin{aligned}
 f_{3,3}(x,y) = & -(151y^2)/3200000 + (399y)/20000 - 3341/1600, \\
 & (x^2y^2)/512000000 - (23x^2y)/128000000 + (31x^2)/800000 \\
 & -(9xy^2)/64000000 + (203xy)/1600000 - (27x)/1000 + (3y^2)/128000 \\
 & -(1703y)/80000 + 4293/1000,
 \end{aligned}$$

olarak elde edilmiştir. Diğer yandan bu yüzey parçaları ortak kenarlara sahip değildir ve mevcut durum itibariyle düzgünleştirme yaklaşımı kullanılarak düzgün bir fonksiyon elde edilmesi mümkün değildir. Düzgünleştirme yaklaşımı üzerinde bazı düzenlemeler yapılarak bu parçaları düzgünlüğü bozmayacak şekilde birleştirmek mümkün olacaktır.

Birinci değişken x için $[0, 360]$ aralığının $a_0 = 0$, $a_1 = 80$, $a_2 = 150$, $a_3 = 230$, $a_4 = 280$, $a_5 = 360$ parçalanışını ele alalım. $[a_0, a_1]$ üzerinde bir Bezier yüzeyi var iken $[a_1, a_2]$ boşluk olarak bırakılmıştır fakat bu alan D bölgesinin içerisinde. Bu yüzden hem yüzey parçasını koruyan hemde boşluğu dolduran aşağıdaki düzgünleştirilmiş

karakteristik fonksiyon

$$\tilde{\chi}_{[a_0,a_1]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a_0, a_1] \\ P(x-b_1), & x \in [a_1, a_2] \\ 0, & x \in [a_2, a_5] \end{cases}$$

inşa edilmiştir. Benzer şekilde $\tilde{\chi}_{[a_2,a_3]}$ fonksiyonu

$$\tilde{\chi}_{[a_3,a_4]}(x, \varepsilon) = \begin{cases} 0, & x \in [a_0, a_1] \\ P_1(-(x-b_1)), & x \in [a_1, a_2] \\ 1, & x \in [a_2, a_3] \\ P_1((x-b_2)), & x \in [a_3, a_4] \\ 0, & x \in [a_4, a_5] \end{cases}$$

ve $\tilde{\chi}_{[a_4,a_5]}$ fonksiyonu

$$\tilde{\chi}_{[a_4,a_5]}(x, \varepsilon) = \begin{cases} 0, & x \in [a_0, a_3] \\ P_1(-(x-b_2)), & x \in [a_3, a_4] \\ 1, & x \in [a_4, a_5] \end{cases}$$

biçiminde tanımlanmıştır. Burada $i = 1, 2$ için $b_i = \frac{a_{2i}-a_{2i-1}}{2}$ ve $\varepsilon_i = \frac{a_{2i}+a_{2i-1}}{2}$ olmak üzere

$$P_1(x-b_i) = \frac{1}{4\varepsilon_i^3}(x-b_i)^3 - \frac{3}{4\varepsilon_i}(x-b_i) + \frac{1}{2}$$

ile tanımlanmıştır. y değişkeni için $[0, 360]$ aralığının $c_0 = 0$, $c_1 = 80$, $c_2 = 140$, $c_3 = 220$, $c_4 = 280$, $c_5 = 360$ parçalanışı ele alınmıştır. Benzer şekilde karakteristik fonksiyonlar

$$\tilde{\chi}_{[c_0,c_1]}(y, \varepsilon_i) = \begin{cases} 1, & y \in [c_0, c_1] \\ P_1(y-d_1), & y \in [c_1, c_2] \\ 0, & y \in [c_2, c_5] \end{cases}$$

fonksiyonu

$$\tilde{\chi}_{[c_2, c_3]}(y, \varepsilon) = \begin{cases} 0, & y \in [c_0, c_1] \\ P_1(-(x - d_1)), & y \in [c_1, c_2] \\ 1, & y \in [c_2, c_3] \\ P_1((x - d_2)), & y \in [c_3, c_4] \\ 0, & y \in [c_4, c_5] \end{cases}$$

fonksiyonu ve

$$\tilde{\chi}_{[c_4, c_5]}(y, \varepsilon) = \begin{cases} 0, & y \in [c_0, c_3] \\ P_1(-(y - d_2)), & y \in [c_3, c_4] \\ 1, & y \in [c_4, c_5] \end{cases}$$

fonksiyonu ile tanımlanmıştır. Burada $i = 1, 2$ için $d_i = \frac{c_{2i} - c_{2i-1}}{2}$ ve $\varepsilon_i = \frac{c_{2i} + c_{2i-1}}{2}$ olmak üzere

$$P_1(y - d_i) = \frac{1}{4\varepsilon_i^3}(x - d_i)^3 - \frac{3}{4\varepsilon_i}(x - d_i) + \frac{1}{2}$$

biçiminde tanımlanmıştır. Karakteristik fonksiyonların düzgünleştirme fonksiyonlarını kullanarak

$$\tilde{f}(x, y, \varepsilon) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 f_{i,j}(x, y) \tilde{\chi}_{[a_{2i}, a_{2i+1}]}(x, \varepsilon) \tilde{\chi}_{[c_{2j}, c_{2j+1}]}(y, \varepsilon)$$

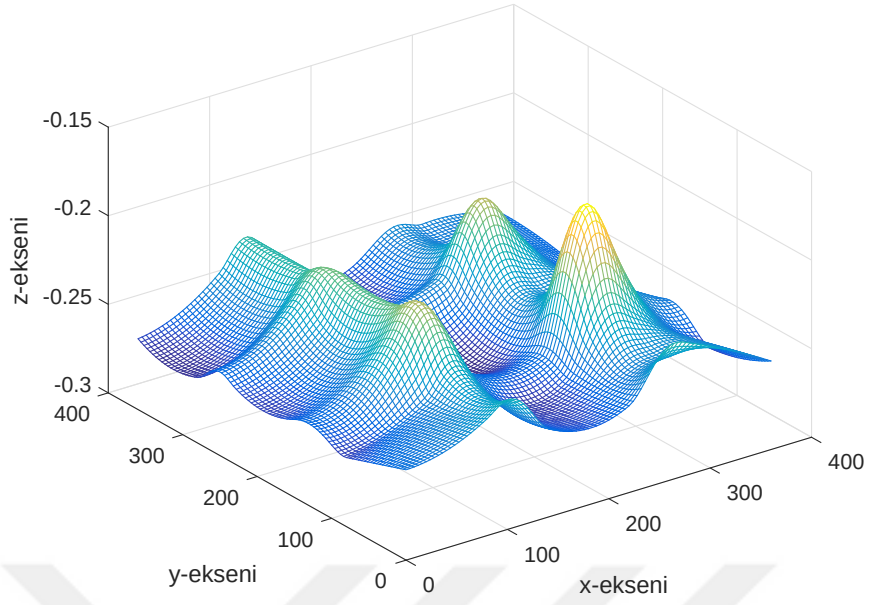
fonksiyonu elde edilmiştir. $\tilde{f}(x, \varepsilon)$ fonksiyonunun grafiği Şekil 6.9 ile sunulmuştur. Amaç fonksiyonu inşa edildikten sonra global optimizasyon problemi

$$(M\tilde{Y}P) \quad \min_{(x,y) \in [0,360] \times [0,360]} \tilde{f}(x, y, \varepsilon)$$

biçiminde tanımlanır. Burada amaç fonksiyonu

$$\tilde{f}(x, y, \varepsilon) = \sum_{i,j=1}^3 f_{i,j}(x, y) \tilde{\chi}_{D_{i,j}}(x, y, \varepsilon)$$

biçiminde tanımlanmıştır. $(M\tilde{Y}P)$ problemi Bölüm 5.2.1 de verilen Alternatif Estetik İniş metodu kullanılarak çözülmüştür. Amaç fonksiyonunun global minimum noktası $x^* = (181.6167, 187.5836)$ ve karşılık gelen değeri $\tilde{f}(x^*) = -438.2678$ olarak bulunmuştur. Problemin çözümü ile ilgili detaylar Çizelge 6.27'de sunulmuştur.



Şekil 6.9. $\tilde{f}(x, y, \epsilon)$ fonksiyonunun grafiğidir.

Çizelge 6.27. Sayısal sonuçlardır.

k	α	β	x_0	x_k^*	f_k^*
1	0.5	0.1	(160.0000, 280.0000)	(190.2613, 277.4205)	-438.2412
2	0.5	0.1	(190.2613, 277.4205)	(329.0062, 186.9678)	-438.2625
3	0.5	0.1	(329.0062, 186.9678)	(181.6167, 187.5836)	-438.2678

Bu uygulamayla gerçek hayat problemlerinden elde edilen ham veriden yola çıkarak oluşturulan bir model fonksiyon ve bu fonksiyonun optimum noktalarını tayin eden bir metodoloji elde edilmiştir.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında düzgün olmayan fonksiyonlara düzgün fonksiyonlar ile yaklaşmayı amaçlayan yeni düzgünleştirme yaklaşımlarına, bu yaklaşımlara bağlı inşa edilen yeni global optimizasyon metotlarına ve belirtilen yaklaşım ve metotların çeşitli alanlardaki uygulamalarına yer verilmiştir.

Yeni düzgünleştirme çalışmaları kullanılarak optimizasyon, Bilgisayar Yardımıyla Geometrik Dizayn ve matematiksel modelleme alanlarına önemli katkılar sağlanmıştır. Düzgün olmayan fonksiyonların optimizasyonu için bu fonksiyonların düzgünleştirme fonksiyonlarını elde edip, gradyan ve türev tabanlı optimizasyon metotlarının kullanılabilir hale getirilmesi en önemli katkılardandır. Böylelikle literatürde önemli yeri olan ve düzgün olmadığı için çözümünün zor olduğu bazı kısıtlı optimizasyon problemleri (tam ceza fonksiyonu metodu), min-maks problemleri ve ters tanımlı problemler (inverse problems) için yeni ve kullanışlı çözüm yöntemleri elde edilmiştir. Ayrıca parçalı düzgün fonksiyonlar sınıfı için yeni bir tanım verilmiştir. Parçalı düzgün fonksiyonların tümüyle düzgünleştirilmesi amacıyla üretilen yaklaşımlar 1 – boyutlu ve n – boyutlu problemler için ilk kez bu tezde sunulmuştur. Buna ek olarak doğrular ile birbirinden ayrılan bölgeler üzerinde tanımlı parçalı düzgün fonksiyonlar için düzgünleştirme yaklaşımlarının yanı sıra eğriler ile birbirinden ayrılan bölgeler üzerinde tanımlı parçalı düzgün fonksiyonlar için de düzgünleştirme yaklaşımları sunulmuştur.

Bu tez çalışmasında 4 farklı tipte yardımcı fonksiyona bağlı 5 farklı global optimizasyon metodu inşa edilmiştir. Her bir metodun algoritması ve buna bağlı ilgili program kodları oluşturulmuştur. Bu metotlar düzgün fonksiyonlara direkt olarak uygulanabilmektedir. Düzgün olmayan fonksiyonlara ise düzgünleştirme yaklaşımı uygulandıktan sonra uygulanabilir. Diferansiyellenemeyen fonksiyonlar için global optimizasyon metotları oldukça sınırlı sayıdadır. Bu çalışmada verilen metotlar, çeşitliliği artırarak global optimizasyon problemlerinin çözümünde yeni metotlar olarak literatüre kazandırılmıştır. Yöntemlerin etkinliği inşa edilen örnekler ve test problemleri üzerinde nümerik olarak sınanmıştır. Bu testlerden elde edilen sonuçlar çizelgelerde sunulmuştur. Bu çalışmada üretilen metotlar kendi aralarında ve diğer metotlarla kıyaslanmıştır. Kendi aralarında yapısal üstünlükleri ve belli problemlerdeki üstünlükleri araştırılmıştır. Önerilen

metotlarla güncel metotlar kıyaslandığında birbirlerine farklı noktalarda üstünlük sağladığı görülmüştür. Hatta bazı üstün yönleri önerilen metotları, mevcut metotlara göre daha ön plana çıkarmaktadır. Ayrıca her bir metot diferansiyellenemeyen amaç fonksiyonlarına sahip test problemleri üzerine uygulanmış, sonuçlar kendi arasında ve mevcut metotlar ile kıyaslanmıştır. Eldeki veriler ışığında bu tezde sunulan global optimizasyon metotlarının literatürde bulunan metotlardan daha başarılı olduğu gözlemlenmiştir.

Bölüm 4 ve 5’de elde edilen teorik bulgular önemli problemlerin çözümü için kullanılmıştır. Kısıtlı optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılan tam ceza fonksiyonunun düzgünleştirilmesi için Bölüm 4.1.2 de önerilen düzgünleştirme yaklaşımı kullanılmıştır. Ayrıca düzgünleştirme yaklaşımı ile birlikte çalışan yeni bir algoritma oluşturulmuş ve ilgili bilgisayar programı inşa edilmiştir. Program bazı test problemlerine uygulanarak yöntemin etkinliği nümerik olarak da sınanmıştır. Elde edilen sonuçlar mevcut algoritmalarla kıyaslandığında eldeki algoritmanın literatürdeki algoritmalar ile yarışır nitelikte olduğu görülmüştür. Üstelik bazı problemlerde daha üstün performans ortaya koyduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Bilgisayar Yardımıyla Geometrik Dizayn alanının günümüzde olduğu gibi gelecekte de güncelliğini koruyacağı ön görülmektedir. Bu alanda yüzey kaynaştırma problemleri önemli yer tutmaktadır. Bu problemlerle özellikle uçak, otomotiv ve savunma sanayi alanlarında sıkça karşılaşılmaktadır. Bu tez çalışmasında sunulan bazı düzgünleştirme çalışmaları yüzey kaynaştırma problemlerinin çözümü için uygulanmıştır. Uygulamada birbirinden bağımsız iki yüzey parçasının estetiğinin bozulmadan birbirine bağlanması mümkün hale getirilmiştir. Bu uygulama ile ilgili program kodları yazılmış, literatürde var olan örnek problemlerin çözümü yapılmış ve görselleştirilmiştir.

Bu tez çalışmasında düzgünleştirme yaklaşımı kullanılarak bir molekülün potansiyel enerjisinin ilgili torsion açılara bağlı değişiminin matematiksel modellemesi yapılmıştır. Düzgünleştirme çalışmaları bir deney verisinin matematiksel modelinin oluşturulması için kullanılmıştır. Veri kümesi ilk olarak küçük parçalara ayrılmış ve her bir parça bilinen yöntemler ile modellenmiştir. Bu küçük parçalar yeni düzgünleştirme yaklaşımı kullanılarak birleştirilmiştir. Böylece bir bütünü meydana getiren kapsamlı

bir matematiksel model ortaya çıkmıştır. Üstelik elde edilen model fonksiyon düzgün olduğundan fonksiyonun optimizasyonu için türev ve gradyan tabanlı optimizasyon algoritmaları kullanılabilir niteliktedir. Nitekim Bölüm 5’de verilen global optimizasyon metolarından biri kullanılarak model fonksiyonun global minimum noktası bulunmuştur.

Bu tez çalışmasında sunulan düzgünleştirme yaklaşımları ve global optimizasyon metotları temel alınarak daha farklı alanlara uygulamalar yapılabilir. Ayrıca yeni teorik sonuçlar üretilebilir. Örneğin kısıtlı optimizasyon problemlerin çözümü için burada sunulan metotlar güncellenebilir. Benzer şekilde tam sayılı programlama veya karışık tam sayılı programlama problemleri için bu metotların farklı versiyonları üretilebilir. Aynı zamanda benzer yardımcı fonksiyonlar için farklı algoritmalar geliştirilerek daha hızlı ve kesin global optimizasyon metotları üretilebilir.

Bu öneriler ışığında hazırlanan bu tez çalışmasının birçok alana rehberlik edeceği ve yapılacak bilimsel çalışmalara yön vermesi arzulanmaktadır.

KAYNAKLAR

- Arandiga, F., Cohen, A., Donat, R., Dyn, N., 2005. Interpolation and approximation of piecewise smooth functions. *SIAM J. Numer. Anal.*, 43, 41–57.
- Aslam, M., Riemenschneider, S., Shen, L., 2008. Smoothing transforms for wavelet approximation of piecewise smooth functions. *IET Image Process.*, 2, 239–248.
- Astolfi, A., 2006. Optimization: An Introduction. Lecture Notes “<http://www3.imperial.ac.uk/pls/portallive/docs/1/7288263.PDF>”.
- Bagirov, A., 2013. Hyperbolic smoothing functions for nonsmooth minimization. *Optimization*, 62, 759–782.
- Bagirov, A., Kar Mitsa, N., Makela, M.M., 2014. Introduction to Nonsmooth Optimization. Springer, New York.
- Bazaraa, M.S., Sherali, H.D., Chitharanjan, M.S., 2013. Nonlinear Programming: Theory and Algorithms. Wiley, New York.
- Belkhatir, B., Zidna, A., 2009. Construction of flexible blending parametric surfaces via curves. *Math. Comput. Simulat.*, 79(12), 3599–3608.
- Ben-Tal, A., Teboulle, M., 1989. Smoothing technique for nondifferentiable optimization problems. Springer-Verlag, Heidelberg.
- Bertsekas, D., 1975. Nondifferentiable optimization via approximation. *Mathematical Programming Study*, 3, 1–25.
- Butz, A., 1968. Space Filling Curves and Mathematical Programming. *Information and Control*, 12, 314–330.
- Campana, E.F., Liuzzi, G., Lucidi, S., Peri, D., Piccialli, V., Pinto, A., 2009. New global optimization methods for ship design problems. *Optim. Eng.*, 10, 533–555.
- Cetin, B.C., Barhen, J., Burdick, J.W., 1993. Terminal repeller unconstrained subenergy tunneling (TRUST) for fast global optimization. *J. Optimiz. Theory App.*, 77, 97–126.
- Chen, C., Mangasarian, O., 1996. A class of smoothing functions for nonlinear and mixed complementarity problem. *Comput. Optim. Appl.*, 5, 91–138.
- Chen, X., 2012. Smoothing methods for nonsmooth, nonconvex minimization. *Math. Program.*, 134, 71–99.
- Chen, X., Ng, M.K., Zhang, C., 2012. Non-lipschitz l_p -regularization and box constrained model for image processing. *IEEE Trans. Image. Process.*, 21, 4709–4721.

- Chen, X., Zhou, W., 2010. Smoothing nonlinear conjugate gradient method for image restoration using nonsmooth nonconvex minimization. *SIAM J. Imaging Sciences*, 2, 765–790.
- Chen, Y., Wan, Z., 2015. A locally smoothing method for mathematical programs with complementarity constraints. *ANZIAM J.*, 56, 299–315.
- Cheng, J., Gao, X.S., 2003. Constructing blending surfaces for two arbitrary surfaces. *MM Research Preprints*, 22, 14–28.
- Clarke, F.H., 1983. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. Wiley, New York.
- Demyanov, V.F., Rubinov, A.M., 1995. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. Verlag Peter Lang, Frankfurt.
- Dixon, L., Szegö, G., 1975. *Towards Global Optimization 1*. North-Holland, Amsterdam.
- Dixon, L., Szegö, G., 1978. *Towards Global Optimization 2*. North-Holland, Amsterdam.
- Dorigo, M., Maniezzo, V., Colorni, A., 1991. Positive feedback as a search strategy. Technical Rep. 91-016 Politecnico Milano.
- El-Gindy, T.M., Salim, M.S., Ahmet, A.I., 2016. A new filled function method applied to unconstrained global optimization. *Appl. Math. Comput.*, 273, 1246–1256.
- Falk, J.E., Soland, R.M., 1969. An algorithm for separable nonconvex programming problems. *Management Science*, 15, 550–569.
- Fan, L., Wang, Y., Liu, X., Jia, L., 2015. MEEF: A Minimum-Elimination-Escape Function method for multimodal optimization problems. *Math. Probl. Eng.*, Article ID 782536, 16 pages.
- Farin, G.E., 2002. *Curves and surfaces for CAGD: a practical guide*. Morgan Kaufmann, San Francisco.
- Farin, G.E., Hoschek, J., Kim, M.S., 2002. *Handbook of computer aided geometric design*. Elsevier, Amsterdam.
- Fleming, W., 1977. *Functions of Several Variables*. Springer-Verlag, New York.
- Gao, Y., Yang, Y., You, M., 2015. A new filled function method for global optimization. *Appl. Math. Comput.*, 268, 685–695.
- Ge, R.P., 1987. The theory of filled function method for finding global minimizers of nonlinearly constrained minimization problems. *Comput. Math.*, 31, 1–9.
- Ge, R.P., 1990. A filled function method for finding a global minimizer of a function of several variables. *Math. Programm.*, 46(1-3), 191–204.

- Glover, F., 1989. Tabu Search-part I. *ORSA journal on Computing*, 3, 190–206.
- Glover, F., 1990. Tabu Search-part II. *ORSA journal on Computing*, 1, 4–32.
- Griewank, A., Walther, A., 2016. First-and second-order optimality conditions for piecewise smooth objective functions by continuous optimization. *Optim. Method Softw.*, 31, 904–930.
- Guida, A., 2015. A Branch and Bound Algorithm for the Global Optimization and its Improvements. Ph.D. thesis, Università degli Studi di Firenze.
- Han, X., 2009. A degree by degree recursive construction of Hermite spline interpolants. *J. Comput. Appl. Math.*, 225, 113–123.
- Hartmann, E., 1995. Blending an implicit with a parametric surface. *Comput. Aided Geom. D.*, 12(8), 825–835.
- Hedar, A., 2005. Test functions for unconstrained global optimization.
- Holland, J.H., 1975. *Adaptation in natural and artificial systems*,. University of Michigan Press, Ann Arbor.
- Horst, R., Pardalos, P., 1995. *Handbook of Global Optimization, Nonconvex Optimization and Its Application*. Kluwer, Dordrecht.
- Horst, R., Tuy, H., 1990. *Global Optimization*. Springer-Verlag, Berlin.
- Jones, D.R., Perttunen, C., Stuckman, B.E., 1993. Lipschitzian optimization without the Lipschitz constant. *J. Optim. Theory Opt.*, 79, 157–181.
- Jongen, H.T., Pallaschke, D., 1988. On linearization and continuous selection of functions. *Optimization*, 19, 343–353.
- Kennedy, J., Eberhart, R., 1997. Particle swarm optimization. *IEEE International Conference on Neural Networks*, 1, 1942–1948.
- Kethi-Cherif, A., Ziadi, A., 2014. Global descent method for constrained continuous global optimization. *Appl. Math. Comput.*, 244, 209–221.
- Kiranyaz, S., Ince, T., Gabbouj, M., 2014. *Multidimensional Particle Swarm Optimization for Machine Learning and Pattern Recognition*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- Kirkpatrick, S., Gelatt, C.D., Vecchi, P.M., 1983. Optimization by Simulated Annealing. *Science*, 220, 671–680.
- Kreyszig, E., 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley and Sons, New York.
- Lampariello, F., Liuzzi, G., 2015. A filling function method for unconstrained global optimization. *Computational Optimization and Applications*, 61(3), 713–729.

- Land, A.H., Doig, A.G., 1960. An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems. *Econometrica*, 28, 497–520.
- Lera, D., Sergeyev, Y.D., 2015. Deterministic global optimization using space-filling curves and multiple estimates of Lipschitz and Hölder constants. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 23(1), 328–342.
- Levy, A., Montalvo, A., 1985. The tunneling algorithm for the global minimization of functions. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 6, 15–29.
- Lian, S.J., 2012. Smoothing approximation to l_1 exact penalty for inequality constrained optimization. *Appl. Math. Comput.*, 219, 3113–3121.
- Lin, H., Gao, Y., Wang, Y., 2014. A continuously differentiable filled function method for global optimization. *Numer. Algor.*, 66, 511–523.
- Lipman, Y., Levin, D., 2010. Approximating piecewise-smooth functions. *IMA J. Numer. Anal.*, 30, 1159–1183.
- Liu, B., 2009. On smoothing exact penalty function for nonlinear constrained optimization problem. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 30, 259–270.
- Liu, H., Wang, Y., Guan, S., Liu, X., 2017. A new filled function method for unconstrained global optimization. *Int. J. Comput. Math.*, 0(0), 1–14.
- Lucidi, S., Piccialli, V., 2002. New Classes of Globally Convexized Filled Functions for Global Optimization. *Journal of Global Optimization*, 24(2), 219–236.
- Mazroui, A., Mraoui, H., Sbibih, D., Tijini, A., 2007. A new method for smoothing surfaces and computing Hermite interpolants. *BIT Numerical Mathematics*, 47(3), 613–635.
- Mazroui, A., Sbibih, D., Tijini, A., 2005. A simple method for smoothing functions and compressing Hermite data. *Adv. Comput. Math.*, 23(3), 279–297.
- Meng, Z., Dang, C., Jiang, M., Shen, R., 2011. A smoothing objective penalty function algorithm for inequality constrained optimization problems. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 32, 806–820.
- Ng, C., Li, D., Zhang, L., 2010. Global descent method for global optimization. *SIAM J. Optim.*, 20(6), 3161–3184.
- Ng, C.K., 2003. High performance continuous/discrete global optimization methods. Ph.D. thesis, The Chinese University of Hong Kong.
- Nikolova, M., 2013. On l_1 data fitting and concave regularization for image recovery. *SIAM J. Sci. Comput.*, 35, 397–430.

- Nowak, I., Smolka, J., Nowak, A.J., 2011. Application of Bezier surfaces to the 3-D inverse geometry problem in continuous casting. *Inverse Probl. Sci. Eng.*, 19(1), 75–86.
- Özmen, A., Weber, G.W., Batmaz, İ., Kropat, E., 2011. RCMARS: Robustification of CMARS with different scenarios under polyhedral uncertainty set. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 16(12), 4780–4787.
- Paulavicius, R., Chiter, L., Zilinskas, J., 2017. Global optimization based on bisection of rectangles, fuction values at diagonals, and a set of Lipschitz constants. *J. Glob. Optim.*, 21, DOI:10.1007/s10898–016–0485–6.
- Paulavicius, R., Sergeyev, Y.D., Kvasov, D.E., Zilinskas, J., 2014. Globally biased DISIMPL algorithm for expensive global optimization. *J. Glob. Optim.*, 59, 545–567.
- Paulavicius, R., Zilinskas, J., A., G., 2011. Parallel branch and bound for global optimization with combination of Lipschitz bounds. *Optim. Method. Softw.*, 26(3), 487–498.
- Pinar, M., Zenios, S., 1994. On smoothing exact penalty functions for convex constrained optimization. *SIAM J. Optimiz.*, 4, 468–511.
- Prandoni, P., Vetterli, M., 1999. Approximation and compression of piecewise smooth sunctions. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 357, 2573–2591.
- Qi, L., Tseng, P., 2007. On almost smooth functions and piecewise smooth functions. *Nonlinear Anal.*, 67, 773–794.
- Rao, S.S., 2009. *Engineering Optimization Theory and Practice*. John Wiley and Sons, New Jersey.
- Rockafellar, R., 2003. A property of piecewise smooth functions. *Comput. Optim. Appl.*, 357, 247–250.
- Rockafellar, R.T., Wets, R.J.B., 1998. *Variational Analysis*. Springer, Berlin.
- Sahiner, A., Kapusuz, G., Yilmaz, N., 2016a. A new smoothing approach to exact penalty functions for inequality constrained optimization problems. *Numer. Algebra, Cont. Optim.*, 6, 161–173.
- Sahiner, A., Uzun, F., Kapusuz, G., Yilmaz, N., 2016b. Completed Optimised Structure of Threonine Molecule by Fuzzy Logic Modelling. *Z. Naturforsch.*, 71(4), 381–386.
- Sahiner, A., Yilmaz, N., Demirozer, O., 2014. Mathematical modeling and application of filled function method in entomology. *Int. Journal Pest Manage.*, 60(3), 232–237.

- Sahiner, A., Yilmaz, N., Kapusuz, G., 2017. A descent global optimization method based on smoothing techniques via Bezier curves. *Carpathian J. Math.*, 33(3), 373–380.
- Sergeyev, Y.D., Strongin, R., D., L., 2013. *Introduction to global optimization exploiting space-filling curves*. Springer, New York.
- Storn, R., 1997. Differential Evolution: A simple and efficient heuristic strategy for global optimization over continuous spaces. *J. Glob. Optim.*, 11, 341–359.
- Strogin, R.G., Sergeyev, Y.D., 2000. *Global Optimization with Nonconvex Constraints: Sequential and Paralel Algorithms*. Kluwer Academic Publishers, Dordech.
- Vazquez, F.G., Gunzel, H., Ruckmann, J.J., 2001. On logarithmic smoothing of the maximum function. *Ann. Oper. Res.*, 101, 209–220.
- Venkataraman, P., 2011. Solution of inverse ODE using Bezier functions. *Inverse Probl. Sci. Eng.*, 19(4), 529–549.
- Wang, Y., Fang, W., Wu, T., 2009. A cut-peak function method for global optimization. *J. Comput. Appl. Math.*, 230(3), 135–142.
- Weber, G., Batmaz, I., Koksai, G., 2012a. CMARS: a new contribution to nonparametric regression with multivariate adaptive regression splines supported by continuous optimization. *Inverse. Probl. Eng.*, 20, 371–400.
- Weber, G.W., Batmaz, İ., Köksai, G., Taylan, P., Yerlikaya-Özkurt, F., 2012b. CMARS: a new contribution to nonparametric regression with multivariate adaptive regression splines supported by continuous optimization. *Inverse. Probl. Eng.*, 20(3), 371–400.
- Wei, F., Wang, Y., Lin, H., 2014. A new filled function method with two parameters for global optimization. *J. Optim. Theory Appl.*, 163, 510–527.
- Wu, H., Zhang, P., Lin, G.H., 2015. Smoothing approximations for some piecewise smooth functions. *J. Oper. Res. Soc. China*, 3(3), 317–329.
- Wu, Z., Bai, F., Yang, X., Zhang, L., 2004. An exact lower order penalty function and its smoothing in nonlinear programming. *Optimization*, 53, 51–68.
- Wu, Z., Bai, F.S., Lee, H.W.J., Yang, Y.J., 2007. A filled function method for constrained global optimization. *J. Glob. Optim.*, 39, 495–507.
- Wu, Z.Y., Li, D., Zhang, L.S., 2011. Global descent methods for unconstrained global optimization. *J. Glob. Optim.*, 50(3), 379–396.
- Xavier, A., 2010. The hyperbolic smoothing clustering method. *Patt. Recog.*, 43, 731–737.

- Xavier, A., Oliveira, A., 2005. Optimal covering of plane domains by circles via hyperbolic smoothing. *J. Glob. Optim.*, 31, 493–504.
- Xu, X., Meng, Z., Sun, J., Shen, R., 2011. A penalty function method based on smoothing lower order penalty function. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235, 4047–4058.
- Xu, Y., Zhang, Y., Wang, S.G., 2015. A modified tunneling function method for non-smooth global optimization and its application in artificial neural network. *Appl. Math. Model.*, 39, 6438–6450.
- Xu, Z., Huang, H. and Pardalos, P., Xu, C., 2001. Filled function for unconstrained global optimization. *J. Glob. Optim.*, 20(1), 49–65.
- Yang, Y., Shang, Y., 2006. A new filled function method for unconstrained global optimization. *Appl. Math. Comput.*, 173, 501–512.
- Ye, X., Liang, Y., Nowacki, H., 1996. Geometric continuity between adjacent Bézier patches and their constructions. *Comput. Aided Geom. D.*, 13(6), 521–548.
- Yin, H., 2015. An adaptive smoothing method for continuous minimax problems. *Asia-Pac. J. Oper. Res.*, 32, 759–782.
- Zang, I., 1980. A smoothing out technique for min-max optimization. *Math. Program.*, 19, 61–77.
- Zangwil, W.I., 1967. Nonlinear programming via penalty functions. *Management Science*, 13, 344–358.
- Zhang, L.S., Ng, C.K., Li, D., Tian, W.W., 2004. A new filled function method for global optimization. *J. Glob. Optim.*, 28, 17–43.
- Zhigljavsky, A., Zilinskas, A., 2008. *Stochastic Global Optimization*. Springer, New York.
- Ziadi, R., Bencherif-Madini, A., R., E., 2016. Continuous global optimization through the generation of parametric curves. *Appl. Math. Comput.*, 282, 65–83.
- Zilinskas, J., 2008. Branch and bound with simplicial partitions for global optimization. *Math. Model. Anal.*, 13(1), 145–159.

EKLER

EK-1

Problem 1.

$$\min_{[-10,10]^2} f(x) = - \left(\frac{1}{1 + (x_1 + 5)^2 + (x_2 + 5)^2} + \frac{1}{1 + |x_1 + 3| + |x_2 + 3|} \right. \\ \left. + \frac{1}{1 + (x_1 + 1)^{2/3} + (x_2 + 1)^{2/3}} + \frac{1}{1 + (x_1 - 2)^{2/4} + (x_2 - 2)^{2/4}} \right. \\ \left. + \frac{3}{1 + (x_1 - 4)^{2/5} + (x_2 - 4)^{2/5}} + \frac{1}{1 + (x_1 - 6)^{2/5} + (x_2 - 6)^{2/5}} \right)$$

olmak üzere global minimum nokta $x^* = (4, 4)$ ve fonksiyonun global minimum değeri $f^* = -3.7608$ dir.

Problem 2.

$$\min_{[-10,10]^3} f(x) = \ln(|x_1 + 1| + |x_2 + 2| + |x_3 + 3| + 1) + x_1^{2/3} + x_2^{2/3} + x_3^{2/3} \\ + \ln(|x_1 - 1| + |x_2 - 2| + |x_3 - 3| + 1) - \ln(49);$$

olmak üzere global minimum nokta $x^* = (0, 0, 0)$ ve fonksiyonun global minimum değeri $f^* = 0$ dir.

Problem 3.

$$\min_{[-10,10]^5} f(x) = \ln(|x_1 + 1| + |x_2 + 2| + |x_3 + 3| + |x_4 + 4| + |x_5 + 5| + 1) \\ + x_1^{2/3} + x_2^{2/3} + x_3^{2/3} + x_4^{2/3} + x_5^{2/3} \\ + \ln(|x_1 - 1| + |x_2 - 2| + |x_3 - 3| + |x_4 - 4| + |x_5 - 5| + 1) - \ln(256)$$

olmak üzere global minimum nokta $x^* = (0, \dots, 0)$ ve fonksiyonun global minimum değeri $f^* = 0$ dir.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Nurullah YILMAZ
Doğum Yeri ve Yılı : Keçiören 1989
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dili : İngilizce, İtalyanca
Eposta : nurullahyilmaz@sdu.edu.tr



Eğitim Durumu

Lise : Mustafa Hakan Güvençer Anadolu Lisesi, 2006
Lisans : Ahi Evran Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2010
Yüksek Lisans : Ahi Evran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 2012

Mesleki Deneyim

SDÜ Fen Edebiyat Fakültesi : 2012-(halen)

Yayınları

Sahiner, A., Yilmaz, N., Kapusuz, G. 2018. A Novel Modeling and Smoothing Technique in Global Optimization, J. Ind. Manag. Optim. doi:10.3934/jimo.2018035.

Sahiner, A., Yilmaz, N., Kapusuz, G. 2017. A Descent Global Optimization Method Based on Smoothing Techniques via Bezier Curves, Carpathian J. Math. 33 (3), 373–380.

- Yilmaz, N., Sahiner, A., 2017. New Global optimization Method for Unconstrained Continuous Optimization, AIP Conference Proceedings, Vol. 1863 250002-1–4
- Sahiner, A., Yilmaz N., Kapusuz, G. 2017. A new Mathematical Modeling Approach for the Energy of Threonine Molecule, AIP Conference Proceedings, Vol. 1863 250003-1–4
- Sahiner, A., Uzun, F., Kapusuz, G., Yilmaz, N. 2016. Completed Optimized Structure of Threonine Molecule by Fuzzy Logic Modeling, Z Naturforsch A, 71(4), 381—386.
- Sahiner, A., Kapusuz, G., Yilmaz, N. 2016. A new smoothing approach to exact penalty functions for inequality constrained optimization problems, Numer. Algebra Cont. Optim., 6 (2), 161–173.
- Akbay, R., Sahiner, A., Yilmaz, N. 2016. Determining of The Achievement of Students by Using Classical and Modern Optimization Techniques, Eurasian J Phys Chem. 8 (1), 3–13.
- Sahiner, A., Ucar, N. , Yilmaz, N. 2015. New Optimization Techniques in Mechanical Characterization for β -Sn Single Crystals, Oxidation Communications, 38 (1), 166–174.
- Sahiner, A., Yilmaz, N., Demirozer, O. 2014. Mathematical Modeling and an Application of the Filled Function Method in Entomology, Int. J. Pest Manage., 60 (3), 232–237.
- Sahiner, A., Yilmaz, N. 2014. Multiple Sequences in Cone Metric Spaces, TWMS J. App. Eng. Math., 4 (2), 226–233.