

**T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**LORENTZ-MINKOWSKI 3-BOYUTLU UZAYDA YÜZEYLER
ÜZERİNDE EĞRİLERİN DARBOUX GÖRÜNTÜLERİ**

İpek YILMAZ

**Danışman
Prof. Dr. Abdilkadir Ceylan ÇÖKEN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA - 2018**



© 2018 [İpek YILMAZ]

TEZ ONAYI

İpek YILMAZ tarafından hazırlanan "**Lorentz-Minkowski 3-Boyutlu Uzayda Yüzeyler Üzerinde Eğrilerin Darboux Görüntüleri**" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri üyeleri önünde Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

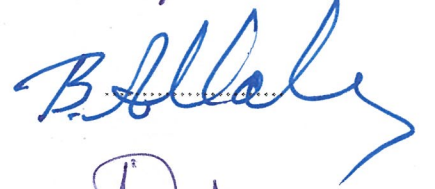
Danışman

Prof. Dr. Abdilkadir Ceylan ÇÖKEN
Akdeniz Üniversitesi



Jüri Üyesi

Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU
Süleyman Demirel Üniversitesi



Jüri Üyesi

Doç. Dr. İsmet AYHAN
Pamukkale Üniversitesi



Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Yasin TUNCER

.....

TAAHHÜTNAME

Bu tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.


İpek YILMAZ

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	3
3. ÖN BİLGİLER	4
3.1. Frenet Vektör Alanları	4
3.2. Eğrilik Çizgisi, Asimtotik Eğri, Jeodezik Eğri	7
3.3. Eğri-Yüzey İkilişinin Eğrilikleri	11
3.4. Darboux Vektörü	14
4. YÜZEYLER ÜZERİNDE EĞRİLERİNİN KÜRESEL DARBOUX GÖRÜNTÜLERİ	16
4.1. Küresel Darboux Görüntülerinin Tekillliği	22
4.2. Birim Kürede Eğriler ve Dualleri	28
4.3. Yüzeylerde Eğrilerin İnvaryantları	31
4.4. Yüzeylerde İsofotik Eğriler	33
5. LORENTZ-MINKOWSKI 3-BOYUTLU UZAYDA EĞRİLERİN SPACELIKE YÜZEYLER ÜZERİNDE LORENTZIAN-DARBOUX GÖRÜNTÜLERİ	36
5.1. Pseudo- Küresel Lorentzian Darboux Görüntülerinin Tekillliği	45
5.2. Legendrian Dualiteleri	50
5.3. Yükseklik Fonksiyonları	52
5.4. Yüzeyler Üzerinde Eğrilerin İnvaryantları	58
5.5. Lorentz-Minkowski 3-Boyutlu Uzayında Düzlem Örnekleri	61
5.5.1. Spacelike düzlemler	61
5.5.2. Hiperbolik düzlem	62
5.5.3. Açılabilir spacelike yüzeyler	62
5.5.4. Bir fonksiyonun grafiği üzerindeki eğriler	65
6. LORENTZ-MINKOWSKI 3-BOYUTLU UZAYDA EĞRİLERİN TIMELIKE YÜZEYLER ÜZERİNDE PSEUDO-KÜRESEL NORMAL DARBOUX GÖRÜNTÜLERİ	67
6.1. Yükseklik Fonksiyonları	71
6.2. Fonksiyonların Dağılımı	79
6.3. Timelike Yüzeyler Üzerindeki Eğri Örnekleri	83
6.4. de Sitter Spacelike Düzlem Eğrileri Boyunca Minkowski Uzayında Lightlike Yüzey	85
7. SONUÇ VE ÖNERİLER	93
KAYNAKLAR	95
ÖZGEÇMİŞ	96

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

LORENTZ-MINKOWSKI 3-BOYUTLU UZAYDA YÜZEYLER ÜZERİNDE EĞRİLERİN DARBOUX GÖRÜNTÜLERİ

İpek YILMAZ

Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Abdilkadir Ceylan ÇÖKEN

Bu tez çalışması yedi bölümden meydana gelmiştir. Birinci bölümde, konu ile ilgili ön bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde, konu ile ilgili daha önce yapılan çalışmalar ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde, tez konusuyla ilgili temel kavramlar verilmiştir. Dördüncü bölümde, yüzeyler üzerinde eğrilerin Darboux görüntüleri incelenmiştir. Burada, Darboux görüntülerinin tekillikleri ifade edilmiştir ve invaryantlar kullanılarak Darboux görüntülerinin tekil noktaları sınıflandırılmıştır. Beşinci bölümde, Lorentz-Minkowski 3-boyutlu uzayda eğrilerin spacelike yüzeyler üzerindeki Lorentzian Darboux görüntüleri ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Altıncı bölümde, Lorentz-Minkowski 3-boyutlu uzayda eğrilerin timelike yüzeyler üzerindeki pseudo-küresel normal Darboux görüntüleri verilmiştir. Son bölümde ise sonuç ve öneriler ifade edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Frenet vektör alanları, eğrilik çizgisi, asimtotik eğri, jeodezik eğri, normal eğrilik, jeodezik burulma, normal Darboux görüntüleri, rektifiyen Darboux görüntüleri, oskülatör Darboux görüntüleri, Lorentzian Darboux görüntüleri, tekillik, yükseklik fonksiyonları, invaryantlar, timelike yüzeylerde eğriler, Minkowski uzayı, lightlike yüzeyler.

2018, 96 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

DARBOUX IMAGES OF CURVES ON SURFACES IN LORENTZ-MINKOWSKI 3-SPACE

İpek YILMAZ

**Süleyman Demirel University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Prof. Dr. Abdilkadir Ceylan ÇÖKEN

This thesis study consist of seven sections. In first section, preliminary information on the subject is given. In the second section, previous work on the subject has been given. In the third section, basic concepts related to thesis are given. In the fourth section, Darboux images of curves on surfaces are examined. Here considered the singularities of Darboux images and the singular points of Darboux images are classified using invariants. In the fifth section, Lorentzian Darboux images of curves on spacelike surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space is discussed in detail. In the sixth section, pseudo-spherical normal Darboux images of curves on a timelike surface in three dimensional Lorentz-Minkowski space is given. In the last section, results and suggestions are expressed.

Keywords: Frenet vector fields, curvature, asymptotic curve, geodesic curve, normal curvature, geodesic torsion, normal Darboux images, rectifying Darboux images, osculating Darboux images, Lorentzian Darboux images, singularities, height functions, invariants, curves on a timelike surface, Minkowski space, lightlike surface.

2018, 96 pages

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması için beni yönlendiren, vakit ayıran, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan kıymetli danışman hocam Prof. Dr. Abdilkadir Ceylan ÇÖKEN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her aşamasında olduğu gibi, tezimin her aşamasında da beni yalnız bırakmayan, maddi ve manevi desteklerini her zaman hissettiğim aileme ve tüm arkadaşlarıma sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

İpek YILMAZ
ISPARTA, 2018



SİMGELER DİZİNİ

B_F	F'nin dallanmış kümesi
D	Darboux vektör alanı
D_F	F'nin diskiriminant kümesi
$\bar{D}$	Darboux görüntüsü
$\bar{D}_n$	Normal Darboux görüntüsü
$\bar{D}_o$	Oskülatör Darboux görüntüsü
$\bar{D}_r$	Rektifiyen Darboux görüntüsü
$\bar{D}_r^T$	Rektifiyen timelike Darboux görüntüsü
$\bar{D}_r^S$	Rektifiyen spacelike Darboux görüntüsü
$\bar{D}_r^L$	Rektifiyen lightlike Darboux görüntüsü
$\bar{D}_o^S$	Oskülatör spacelike Darboux görüntüsü
$\bar{D}_o^L$	Oskülatör lightlike Darboux görüntüsü
$\bar{D}_n^T$	Normal timelike Darboux görüntüsü
$\bar{D}_n^S$	Normal spacelike Darboux görüntüsü
$\bar{D}_n^L$	Normal lightlike Darboux görüntüsü
d_γ	de Sitter normal Darboux görüntüsü
E	Total uzay
$H^2(-1)$	Hiperbolik düzlem
H_n	Teğet yükseklik fonksiyonlarının ailesi
H_r	Binormal yükseklik fonksiyonlarının ailesi
H_o	Normal yükseklik fonksiyonlarının ailesi
H^S	Spacelike yükseklik fonksiyonu
H^T	Timelike yükseklik fonksiyonu
H_r^T	Rektifiyen timelike yükseklik fonksiyonlarının ailesi

H_r^S	Rektifiyen spacelike yükseklik fonksiyonlarının ailesi
H_r^L	Rektifiyen lightlike yükseklik fonksiyonlarının ailesi
H_o^S	Oskülatör spacelike yükseklik fonksiyonlarının ailesi
H_o^L	Oskülatör lightlike yükseklik fonksiyonlarının ailesi
$(h_{v_0}^S _M)^{-1}$	D -parçası
$(h_{v_0}^T _M)^{-1}$	H -parçası
h_γ	Hiperbolik normal Darboux görüntüsü
K	Teğet hiperdüzlem alanı
k_g	Jeodezik eğrilik
k_n	Normal eğrilik
L_i	İsophotik dönüşüm
LC^*	Lightkoni
N	Manifold
S_1^2	de Sitter uzayı
$T_p M$	Teğet uzay
$TP_{v_0, \gamma(s_0)}^T$	Timelike teğet düzlem
$TP_{v_0, \gamma(s_0)}^S$	Spacelike teğet düzlem
$T_{M, \gamma(s_0)}^D$	Teğet D -parçası
$T_{M, \gamma(s_0)}^H$	Teğet H -parçası
$W(L)$	Dalga kümesi
$\gamma^\vee$	Dual eğri
$\langle , \rangle$	İç çarpım
δ	İnvaryant
τ_g	Jeodezik torsiyon
$\ , \ $	Norm

1. GİRİŞ

Eğri üzerindeki bir P noktası eğriyi çizerken T, N, B vektörleri değişirler. T, N, B üç ayaklısının her s anında eksen etrafında ani helis hareketi yaptığı kabul edilir. Bu eksene eğrinin s parametresine karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki “darboux (ani dönme) eksen” denir (Hacısalihoglu, 2000).

Normal düzlemde, rektifiyen düzlemde, oskulator düzlemde eğrinin her noktasında üç özel vektör alanının Darboux çatısı bulunmaktadır. Yüzeylerdeki eğri boyunca vektör alanlarının küresel görüntülerinin tekillikleri vardır. İnvaryantları kullanarak Darboux görüntülerinin tekil noktaları sınıflandırılabilir (Hananoi vd., 2015).

Isophotik eğriler ise bir yüzeyin belirli bir ışık kaynağından gelen ve aynı ışık yoğunluğuna sahip noktaların oluşturduğu eğrilerdir. Işık kaynağı yüzeyden sonsuz uzaklıkta ise ışık ışınları paralel çizgiler olarak kabul edilir. Yüzey normallerinde sabit yönde sabit açı oluştururlar (Hananoi vd., 2015).

Matematik açısından ilginç bir problem ise Öklid uzayının geometrik özellikleri ile Lorentz-Minkowski uzayının geometrik özelliklerinin nasıl farklılaştığıdır. Lorentz-Minkowski 3-boyutlu uzayında spacelike veya timelike yüzey üzerinde eğri ve eğri boyunca özel vektör alanları vardır. Burada ise Lorentz Darboux çatısının temellerini oluşturan legendrian dualiteleri düşünülmektedir. Lorentz-Minkowski uzayında üç çeşit pseudo küre olduğundan, eğri boyunca sekiz Lorentz-Darboux vektörü vardır. Eğri boyunca birim teğet vektörünün üç legendrian duali vardır. Burada geriye kalan eğri boyunca beş Lorentz-Darboux vektörü bulunuyor. Lorentzian Darboux vektörlerinin pseudo-küresel görüntülerinin tekillikleri elde edilmektedir. Sonuç olarak Lorentzian Darboux vektörlerinin tekilliklerini karakterize eden beş Lorentz invaryantı vardır (Ito ve Izumiya, 2016).

Normal Darboux görüntülerinin incelenmesinde başka bir yöntem ise, eğri üzerinde iki fonksiyon tanımlamaktır. Bu fonksiyonlar spacelike yükseklik fonksiyonu H^S ve timelike yükseklik fonksiyonu H^T 'dir. Bu fonksiyonların türevleri bazı koşullarda karakterize edilerek σ_D ve σ_H invaryantları elde edilir. H^S ve H^T 'nin 1. ve 2. türevleri ile hiperbolik uzayda ve de Sitter uzayında özel eğrilere ulaşılır. Bu sayede D -parçası ve H -parçası model eğri olarak kabul edilebilir. Ayrıca fonksiyonların dağılımları teorisinin

uygulaması olarak de sitter normal Darboux görüntüsü ve hiperbolik normal Darboux görüntüsünün tekilliklerinin sınıflandırılmasına ulaşılabilir (Izumiya vd., 2015).



2. KAYNAK ÖZETLERİ

Izumiya vd. (2004), eğrilerin evölütlerini hiperbolik düzlemde tanımlamışlardır. Ayrıca, hiperbolik bir düzlem eğrisinin evölütünün nasıl çizilebileceğini göstermişlerdir.

Chen ve Izumiya (2009), Semi Öklid uzayında pseudo-kürede altı legendrian dualitesini incelemişlerdir.

Izumiya (2009), Minkowski uzayında temel teorem olarak pseudo-kürelerde dört legendrian dualitesini göstermiştir.

Sato (2012), 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında spacelike yüzeyler üzerinde eğrilerin pseudo-küresel evölütlerinin, hiperbolik düzlemdeki evölütlerine benzer olduğu ifade edilmiştir. Spacelike bir yüzeydeki eğrilerin pseudo küresel evölütlerinin tekilliğini ve geometrik özelliklerini araştırmıştır.

Izumiya ve Sato (2013), Lorentz-Minkowski uzayında spacelike altmanifoldlar boyunca lightlike hiperyüzeylerin tekilliklerini araştırmışlardır.

Doğan ve Yaylı (2015), bir isophotik eğrinin yüzeyin normallerinde sabit yönde sabit açı oluşturduğunu elde etmişlerdir.

Hananoi vd. (2015), Frenet-Serret formüllerinden yararlanarak normal düzlemde, oskulator düzlemde ve rektifiyen düzlemde Darboux görüntülerini elde etmişlerdir. Darboux görüntülerinin tekil noktalarını ise invariantlar yardımıyla sınıflandırmışlardır.

Izumiya vd. (2015), Öklid uzayından farklı olarak Lorentz-Minkowski 3-boyutlu uzayında timelike yüzeyler üzerinde eğrilerin pseudo-küresel normal Darboux görüntüleri üzerine çalışmalar yapmışlardır. Pseudo-küresel normal Darboux görüntülerinin tekilliklerini ve geometrik özelliklerini incelemişlerdir.

Nabarro ve Sacramento (2015), de Sitter uzayında ve Minkowski uzayında eğrilerin geometrisini incelemişlerdir. Lightlike noktalarda fokal kümenin tanımlı olmadığını elde etmişlerdir. Tekillik teorisinin tekniklerini kullanarak lightlike noktaların yakınındaki fokal kümeyi araştırmışlardır.

Ito ve Izumiya (2016), Lorentz-Minkowski 3-boyutlu uzayda spacelike yüzeyler üzerinde eğrilerin Lorentzian Darboux görüntülerini elde etmişlerdir.

3. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, tez çalışmasına esas olan tanım ve teoremler verilecektir.

3.1. Frenet Vektör Alanları

Tanım 3.1.1. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$T(s) = \alpha'(s) \quad (3.1.1)$$

eşitliğiyle belirli $T(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 3.1.2. $\mathbb{R}^3$ uzayındaki birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \kappa(s) = \|T'(s)\| \quad (3.1.2)$$

fonsiyonuna, α eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 3.1.3. $\mathbb{R}^3$ uzayındaki birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} T'(s) \quad (3.1.3)$$

eşitliğiyle belirli $N(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birinci dik vektörü (asli normali) denir. N vektör alanına, α eğrisinin birinci dik vektör alanı (asli normal vektör alanı) denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 3.1.4. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$B(s) = T(s) \times N(s) \quad (3.1.4)$$

eşitliğiyle tanımlı $B(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki ikinci dik vektörü (binormali) denir. B vektör alanına, α eğrisinin ikinci dik vektör alanı (binormal vektör alanı) denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 3.1.5. $T(s)$, $N(s)$ ve $B(s)$ vektörlerine, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri denir.

$$\{T(s), N(s), B(s)\}$$

kümesine, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısı denir. T, N, B vektör alanlarına, α eğrisi üstünde Frenet vektör alanları denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 3.1.6. Birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olmak üzere

$$\tau : I \rightarrow \mathbb{R}, \tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle \quad (3.1.5)$$

fonksiyonuna α eğrisinin burulma fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Teorem 3.1.7. Birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B ise

$$T' = \kappa N \quad (3.1.6)$$

$$N' = -\kappa T + \tau B$$

$$B' = -\tau N$$

dir (Sabuncuoğlu, 2010).

İspat. $N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} T'(s)$ eşitliğinden $T' = \kappa N$ dir.

$N' = aT + bN + cB$ olsun. Bu eşitliğin her iki yanının T ile iç çarpımı yapılarak $\langle N', T \rangle = a$ bulunur. Öte yandan

$$\langle N, T \rangle = 0 \Rightarrow \langle N', T \rangle + \langle N, T' \rangle = 0 \quad (3.1.7)$$

$$\langle N', T \rangle = -\langle N, T' \rangle = -\langle N, \kappa N \rangle = -\kappa \quad (3.1.7a)$$

olduğundan $a = -\kappa$ olur.

$N' = aT + bN + cB$ eşitliğinin her iki yanının N ile iç çarpımı yapılarak $\langle N', N \rangle = b$ bulunur. Öte yandan

$$\langle N, N \rangle = 1 \Rightarrow \langle N', N \rangle + \langle N, N' \rangle = 0 \quad (3.1.8)$$

$$2\langle N', N \rangle = 0 \Rightarrow \langle N', N \rangle = 0 \quad (3.1.8a)$$

olduğundan $b = 0$ olur.

$N' = aT + bN + cB$ eşitliğinin her iki yanının B ile iç çarpımı yapılarak $\langle N', B \rangle = c$ bulunur. Öte yandan

$$\langle N, B \rangle = 0 \Rightarrow \langle N', B \rangle + \langle N, B' \rangle = 0 \quad (3.1.9)$$

$$\langle N', B \rangle = -\langle N, B' \rangle = \tau \quad (3.1.9a)$$

olduğundan $c = \tau$ bulunur. Öyleyse $N' = -\kappa T + \tau B$ 'dir.

$B' = dT + eN + fB$ olsun. Bu eşitliğin her iki yanının T ile iç çarpımı yapılarak $\langle B', T \rangle = d$ bulunur. Öte yandan

$$\langle B, T \rangle = 0 \Rightarrow \langle B', T \rangle + \langle B, T' \rangle = 0 \quad (3.1.10)$$

$$\langle B', T \rangle = -\langle B, T' \rangle = -\langle B, \kappa N \rangle = 0 \quad (3.1.10a)$$

olduğundan $d = 0$ olur.

$B' = dT + eN + fB$ eşitliğinin her iki yanının N ile iç çarpımı yapılarak $\langle B', N \rangle = e$ bulunur. Öte yandan

$$\langle B, N \rangle = 0 \Rightarrow \langle B', N \rangle + \langle B, N' \rangle = 0 \quad (3.1.11)$$

$$\langle B', N \rangle = -\langle B, N' \rangle = -\langle B, -\kappa T + \tau B \rangle = -\tau \quad (3.1.11a)$$

olduğundan $e = -\tau$ olur.

$B' = dT + eN + fB$ eşitliğinin her iki yanının B ile iç çarpımı yapılarak $\langle B', B \rangle = f$ bulunur. Öte yandan

$$\langle B, B \rangle = 1 \Rightarrow \langle B', B \rangle + \langle B, B' \rangle = 0 \Rightarrow \langle B', B \rangle = 0 \quad (3.1.12)$$

olduğundan $f = 0$ bulunur. Öyleyse $B' = -\tau N'$ 'dir. Bu teoremdede elde edilen eşitliklere, birim hızlı α eğrisi için Frenet formülleri denir (Sabuncuoğlu, 2010). $\square$

3.2. Eğrilik Çizgisi, Asimtotik Eğri, Jeodezik Eğri

Tanım 3.2.1. $M, \mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey ve $\alpha : I \rightarrow M$ düzenli (regüler) bir eğri olsun. Her $t \in I$ için $\alpha'(t)$ hız vektörü, $\alpha(t)$ noktasında M yüzeyinin bir eğrilik vektörü ise α eğrisine, M yüzeyi içinde bir eğrilik çizgisi veya baş eğri denir. α, M yüzeyi içinde bir eğri olsun. M yüzeyinin birim dik vektör alanı Z ise $Z \circ \alpha$, eğri üstünde bir vektör alanıdır. Bu vektör alanına, α eğrisine kısıtlanmış birim dik vektör alanı denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Teorem 3.2.2. α, M yüzeyi içinde düzenli bir eğri ve Z, M yüzeyinin birim dik vektör alanı olsun. α 'nın eğrilik çizgisi olması için $\{\alpha', (Z \circ \alpha)'\}$ kümesinin lineer bağımlı olması gerekir ve yeter (Sabuncuoğlu, 2010).

İspat. $S(\alpha'(t)) = -D_{\alpha'(t)}Z = -(Z \circ \alpha)'(t)$ 'dir. α, M yüzeyi içinde bir eğrilik çizgisi olsun. Her $t \in I$ için $\alpha'(t)$ hız vektörü, $\alpha(t)$ noktasında M yüzeyinin bir eğrilik vektörü olduğundan t verildiğinde

$$S(\alpha'(t)) = c\alpha'(t) \quad (3.2.1)$$

olacak biçimde bir c sayısı vardır. Bu eşitlikteki $S(\alpha'(t))$ vektörü yerine eşiti olan $-(Z \circ \alpha)'(t)$ vektörü yazılarak $(Z \circ \alpha)'(t) = (-c)\alpha'(t)$ bulunur. Bu eşitlik $(Z \circ \alpha)'(t)$ vektörünün, $\alpha'(t)$ vektörünün lineer bileşimi olduğunu gösterir. Demek ki $\{\alpha'(t), (Z \circ \alpha)'(t)\}$ kümesi lineer bağımlıdır. Her $t \in I$ için böyle olduğundan, $\{\alpha', (Z \circ \alpha)'(s)\}$ kümesi lineer bağımlıdır. Karşıt olarak $\{(Z \circ \alpha)', \alpha'\}$ kümesi lineer bağımlı olsun. Her $t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ olduğundan $(Z \circ \alpha)'(t) = h\alpha'(t)$ olacak biçimde bir h sayısı vardır. Bu eşitlikteki $(Z \circ \alpha)'(t)$ vektörü yerine eşiti olan $-S(\alpha'(t))$ vektörü konularak $S(\alpha'(t)) = -h\alpha'(t)$ elde edilir. Bu son eşitlik, her $\alpha(t)$ noktasında $\alpha'(t)$ vektörünün, şekil operatörünün bir karakteristik vektörü olduğunu gösterir. Şekil operatörünün karakteristik vektörlerine eğrilik vektörü denir. Buna göre α , bir eğrilik çizgisidir. Z, α eğrisi üstünde bir vektör alanı olduğunda $Z'(t)$ vektörü

$$(Z \circ \alpha)'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [Z(\alpha(t+h)) - Z(t)] \quad (3.2.2)$$

eşitliği ile tanımlanır. α , M yüzeyi içinde bir eğrilik çizgisi olmak üzere yüzeyin dik birim vektörü α eğrisi üstüne koyulup değiştirildiğinde dik vektörün ucu, α eğrisinin teğetine paralel olarak değişir. Dairesel dik silindir yüzeyi üstündeki ana doğrular eğrilik çizgileridir. Ana doğrulara dik bir düzlemle silindirin arakesiti olan çemberler, silindir yüzeyi üstünde eğrilik çizgileridir. Bir küre üstündeki büyük çemberler, eğrilik çizgileridir (Sabuncuoğlu, 2010). $\square$

Tanım 3.2.3. $M, \mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey ve $\alpha : I \rightarrow M$ düzenli (regüler) bir eğri olsun. Her $t \in I$ için $\alpha'(t)$ hız vektörü $\alpha(t)$ noktasında M yüzeyinin bir asimtotik vektörü ise α eğrisine, M yüzeyi içinde bir asimtotik eğri denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Uyarı 3.2.4. M yüzeyinin bir p noktasında $\langle S(v_p), v_p \rangle = 0$ eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı bir v_p vektörü varsa bu vektöre bir asimtotik vektör adı verilmişti. v_p bir asimtotik vektör ise

$$\kappa(v_p) = \left\langle S \frac{v_p}{\|v_p\|}, \frac{v_p}{\|v_p\|} \right\rangle = \frac{1}{\|v_p\|^2} \langle S(v_p), v_p \rangle = 0 \quad (3.2.3)$$

olduğundan yüzeyin bir asimtotik vektörü doğrultusundaki normal eğrilik sıfırdır. Karşıt olarak yüzeyin bir teğet vektörü doğrultusundaki normal eğrilik sıfır ise bu teğet vektör bir asimtotik vektördür (Sabuncuoğlu, 2010).

Sonuç 3.2.5. Yüzey üstünde bir asimtotik eğrinin her noktasında, bu eğrinin teğeti doğrultusundaki normal eğrilik sıfırdır. Karşıt olarak M yüzeyi içindeki düzenli bir eğrinin her noktasındaki teğeti doğrultusundaki normal eğrilik sıfır ise bu eğri bir asimtotik eğridir. v_p doğrultusundaki normal eğriliğin mutlak değeri, v_p doğrultusundaki dik kesit eğrisinin eğriliğine eşit olduğundan asimtotik eğrinin her noktasındaki hız vektörü doğrultusundaki dik kesit eğrisinin eğriliği sıfır demektir (Sabuncuoğlu, 2010).

Teorem 3.2.6. α , M yüzeyi içinde düzenli bir eğri ve Z , M yüzeyinin birim dik vektör alanı olsun. α 'nın asimtotik eğri olması için $\langle (Z \circ \alpha)', \alpha' \rangle = 0$ olması gerekir ve yeter (Sabuncuoğlu, 2010).

İspat. $S(\alpha'(t)) = -D_{\alpha'(t)}Z = -(Z \circ \alpha)'(t)$ 'dir. α , M yüzeyi içinde bir asimtotik eğri olsun. Her $t \in I$ için $\alpha'(t)$ vektörü bir asimtotik vektör olduğundan

$\langle S(\alpha'(t)), \alpha'(t) \rangle = 0$ 'dır. Bu eşitlikte $S(\alpha'(t))$ yerine $-(Z \circ \alpha)'(t)$ vektörü konularak $\langle -(Z \circ \alpha)'(t), \alpha'(t) \rangle = 0$ bulunur. Bu eşitlik $\langle (Z \circ \alpha)', \alpha' \rangle = 0$ olduğunu gösterir. $\langle (Z \circ \alpha)', \alpha' \rangle = 0$ olsun. Her $t \in I$ için $\langle (Z \circ \alpha)'(t), \alpha'(t) \rangle = 0$ demektir. Bu eşitlikteki $(Z \circ \alpha)'(t)$ vektörü yerine eşiti olan $-S(\alpha'(t))$ vektörü konularak $\langle S(\alpha'(t)), \alpha'(t) \rangle = 0$ elde edilir. Bu eşitlik $\alpha'(t)$ vektörünün yüzey üzerinde bir asimtotik vektör olduğunu anlatır (Sabuncuoğlu, 2010). $\square$

Sonuç 3.2.7. α, M yüzeyi içinde düzenli bir eğri ve Z, M yüzeyinin birim dik vektör alanı olsun. α 'nın bir asimtotik eğri olması için $\langle \alpha'', Z \circ \alpha \rangle = 0$ olması gerekir ve yeter (Sabuncuoğlu, 2010).

İspat. α, M yüzeyi içinde bir eğri olduğundan $\langle \alpha', Z \circ \alpha \rangle = 0$ 'dır. Bu eşitliğin sol yanı, α eğrisinin tanım aralığından $\mathbb{R}$ 'ye giden düzgün bir fonksiyondur. Bu fonksiyonun türevi alınarak

$$\langle \alpha'', (Z \circ \alpha) \rangle + \langle \alpha', (Z \circ \alpha)' \rangle = 0 \quad (3.2.4)$$

ve buradan

$$\langle \alpha'', Z \circ \alpha \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \alpha', (Z \circ \alpha)' \rangle = 0 \quad (3.2.5)$$

bulunur. Sağ yandaki önerme, α eğrisinin asimtotik eğri olması için gerek ve yeter koşul olduğundan bu önermeye denk olan $\langle \alpha'', (Z \circ \alpha) \rangle = 0$ önermesi de α eğrisinin asimtotik eğri olması için gerekli ve yeterli koşuldur (Sabuncuoğlu, 2010). $\square$

Tanım 3.2.8. $M, \mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey ve $\alpha : I \rightarrow M$ bir eğri olmak üzere M yüzeyinin birim dik vektör alanı Z olsun. α'' vektör alanı, $Z \circ \alpha$ vektör alanının lineer bileşimi ise α eğrisine, M yüzeyi içinde bir jeodezik eğri denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Teorem 3.2.9. α, M içinde bir jeodezik eğri ise hız vektör alanının uzunluğu sabittir ve eğrinin N vektör alanı, $Z \circ \alpha$ vektör alanının lineer bileşimidir. Karşıt olarak M yüzeyi içindeki bir α eğrisinin hız vektör alanının uzunluğu sabit ve N vektör alanı $Z \circ \alpha$ vektör alanının lineer bileşimi ise α eğrisi bir jeodezik eğridir (Sabuncuoğlu, 2010).

İspat. α eğrisinin hız vektör alanının uzunluğu v ile gösterilirse $\alpha' = vT$ 'dir. Buradan

$$\alpha'' = v'T + vT' = v'T + v(v\kappa N) = v'T + v^2\kappa N \quad (3.2.6)$$

bulunur. Önce α , M içinde bir jeodezik eğri olsun. Jeodezik eğri tanımına göre $\alpha'' = \lambda(Z \circ \alpha)$ biçimindedir. Bu eşitlik yukarıdaki eşitliklerle karşılaştırılarak

$$\lambda(Z \circ \alpha) = v'T + v^2\kappa N \quad (3.2.7)$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki yanının T ile iç çarpımı yapılarak $v' = 0$ elde edilir. Öyleyse v sabittir. $\lambda(Z \circ \alpha) = v'T + v^2\kappa N$ eşitliğinde v' yerine eşiti olan sıfır konularak

$$\lambda(Z \circ \alpha) = v^2\kappa N \quad (3.2.8)$$

elde edilir. $v \neq 0$ ve $\kappa \neq 0$ ise $N = \frac{\lambda}{v^2\kappa}(Z \circ \alpha)$ bulunur. $v = 0$ ise $\alpha' = 0$ olur. Buna göre α sabittir. Daha açıkcası α tek noktadır. Bu eğrinin N vektör alanı belirsizdir. Her doğrultuda seçilebilir. Z 'nin lineer bileşimi olduğu varsayılabilir. $\kappa = 0$ ise α eğrisi bir doğrunun alt kümesidir. N vektör alanı yine belirsizdir. Z 'nin lineer bileşimi olduğunu varsayılabilir. Sonuç olarak N vektör alanının $Z \circ \alpha$ vektör alanının lineer bileşimi olduğunu gösterilmiştir. Karşıt olarak M yüzeyi içindeki bir α eğrisinin hız vektör alanının uzunluğu sabit ve N vektör alanı $Z \circ \alpha$ vektör alanının lineer bileşimi olsun. Bu durumda

$$\alpha'' = v'T + v^2\kappa N \quad (3.2.9)$$

eşitliğinden $\alpha'' = v^2\kappa N$ elde edilir. N vektör alanı $Z \circ \alpha$ vektör alanının lineer bileşimi olduğundan $N = \mu(Z \circ \alpha)$ biçimindedir. $\alpha'' = v^2\kappa N$ eşitliğinde N yerine $N = \mu(Z \circ \alpha)$ konularak $\alpha'' = v^2\kappa\mu(Z \circ \alpha)$ bulunur. Bu eşitlik α'' vektör alanının $Z \circ \alpha$ vektör alanının lineer bileşimi olduğunu gösterir. Öyleyse α , bir jeodezik eğridir (Sabuncuoğlu, 2010). $\square$

Örnek 3.2.10. M , $\mathbb{R}^3$ içinde bir düzlem olsun. M içindeki her jeodezik eğrinin bir doğru olduğunu ve karşıt olarak M içindeki her doğrunun bir jeodezik eğri olduğunu gösteriniz (Sabuncuoğlu, 2010).

Solution 3.2.11. M düzleminin birim dik vektör alanı Z ile gösterilsin. α , M içindeki bir jeodezik eğri ise jeodezik eğri tanımına göre $\alpha'' = \lambda(Z \circ \alpha)$ biçimindedir. α eğrisi, M yüzeyi içinde bir eğri olduğundan $\langle \alpha', Z \circ \alpha \rangle = 0$ olur. Bu eşitlikten

$$\langle \alpha'', Z \circ \alpha \rangle + \langle \alpha', (Z \circ \alpha)' \rangle = 0 \quad (3.2.10)$$

bulunur. M bir düzlem olduğundan $(Z \circ \alpha)' = 0$ 'dır. Bunun sonucu olarak yukarıdaki eşitlikten $\langle \alpha'', Z \circ \alpha \rangle = 0$ elde edilir. Bu eşitlikte α'' yerine $\lambda(Z \circ \alpha)$ konularak $\langle \lambda(Z \circ \alpha), Z \circ \alpha \rangle = 0$ ve buradan $\lambda = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $\alpha'' = 0$ 'dır. Bu eşitlik, α eğrisinin bir doğru olduğunu gösterir. Buraya değin M düzlemindeki her bir jeodezik eğrinin bir doğru olduğu gösterilmiştir. Karşıt olarak M düzlemi içinde bir doğru verilsin. Bu doğru,

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \alpha(t) = A + tB \quad (3.2.11)$$

biçiminde verilebilir. $\alpha'' = 0$ olduğundan α'' vektör alanı Z vektör alanının 0 katıdır. Buna göre α eğrisi bir jeodezik eğridir (Sabuncuoğlu, 2010).

3.3. Eğri-Yüzey İkilisinin Eğrilikleri

$\mathbb{R}^3$ 'de bir M yüzeyi içinde birim hızlı bir $\alpha : I \rightarrow M$ eğrisi verilsin. Yüzeyin birim dik vektör alanı Z olsun. α eğrisinin birim teğet vektör alanı T olmak üzere

$$(Z \circ \alpha) \times T = Y \quad (3.3.1)$$

eşitliğiyle tanımlanan Y vektör alanı göz önüne alınsın. Vektörel çarpımın özelliklerinden dolayı $\{T(s), Y(s), (Z \circ \alpha)(s)\}$ kümesi, $T_{\alpha(s)}\mathbb{R}^3$ uzayının ortonormal bir tabanı olur. Bu tabana, (α, M) eğri-yüzey ikilisinin çatısı denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 3.3.1. $\alpha : I \rightarrow M$ birim hızlı eğri olsun.

$$\kappa_n(s) = \langle \alpha''(s), (Z \circ \alpha)(s) \rangle \quad (3.3.2)$$

eşitliğiyle belirli $\kappa_n(s)$ sayısına, (α, M) eğri-yüzey ikilisinin $\alpha(s)$ noktasındaki normal eğriliği denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 3.3.2. $\alpha : I \rightarrow M$ birim hızlı bir eğri olsun.

$$\kappa_g(s) = \langle \alpha''(s), Y(s) \rangle \quad (3.3.3)$$

eşitliğiyle belirli $\kappa_g(s)$ sayısına, (α, M) eğri-yüzey ikilisinin $\alpha(s)$ noktasındaki jeodezik eğriliği denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 3.3.3. $\alpha : I \rightarrow M$ birim hızlı eğri olsun.

$$t_r(s) = -\langle (Z \circ \alpha)'(s), Y(s) \rangle \quad (3.3.4)$$

eşitliğiyle belirli $t_r(s)$ sayısına, (α, M) eğri-yüzey ikilisinin $\alpha(s)$ noktasındaki jeodezik burulması denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 3.3.4. $\alpha : I \rightarrow M$ birim hızlı bir eğri olmak üzere κ_n, κ_g, t_r fonksiyonlarına, (α, M) eğri-yüzey ikilisinin eğrilikleri denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Teorem 3.3.5. α, M içinde birim hızlı bir eğri olsun. (α, M) eğri-yüzey ikilisinin eğrilikleri κ_n, κ_g, t_r olduğuna göre

$$\begin{aligned} T' &= \kappa_g Y + \kappa_n (Z \circ \alpha) \\ Y' &= -\kappa_g T + t_r (Z \circ \alpha) \\ (Z \circ \alpha)' &= -\kappa_n T - t_r Y \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

dir (Sabuncuoğlu, 2010).

Teorem 3.3.6. $\alpha : I \rightarrow M$ eğrisi verildiğinde (α, M) eğri-yüzey ikilisinin eğrilikleri κ_n, κ_g, t_r olduğuna göre

$$\begin{aligned} \kappa_n &= \frac{1}{v^2} \langle \alpha'', (Z \circ \alpha) \rangle \\ \kappa_g &= \frac{1}{v^2} \langle \alpha'', Y \rangle \\ \tau_r &= -\frac{1}{v} \langle (Z \circ \alpha)', Y \rangle \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

dir (Sabuncuoğlu, 2010).

Teorem 3.3.7. $\alpha : I \rightarrow M$ eğrisi verildiğinde (α, M) eğri-yüzey ikilisi için

$$\begin{aligned} T' &= v[\kappa_g Y + \kappa_n(Z \circ \alpha)] \\ Y' &= v[-\kappa_g T + t_r(Z \circ \alpha)] \\ (Z \circ \alpha)' &= v(-\kappa_n T - t_r Y) \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

dir (Sabuncuoğlu, 2010).

Teorem 3.3.8. $\alpha : I \rightarrow M$ düzenli eğrisinin bir asimtotik eğri olması için $\kappa_n = 0$ olması gerekir ve yeter (Sabuncuoğlu, 2010).

İspat. α bir asimtotik eğri olsun. $\langle \alpha'', (Z \circ \alpha) \rangle = 0$ 'dır. $\kappa_n = 0$ elde edilir. Karşıt olarak $\kappa_n = 0$ ise $\langle \alpha'', (Z \circ \alpha) \rangle = 0$ olur. O halde α bir asimtotik eğridir (Sabuncuoğlu, 2010).

□

Teorem 3.3.9. $\alpha : I \rightarrow M$ eğrisi bir jeodezik eğri ise $\kappa_g = 0$ 'dır. Karşıt olarak $\alpha : I \rightarrow M$ eğrisinin hız vektörünün uzunluğu sabit ve $\kappa_g = 0$ ise $\alpha : I \rightarrow M$ eğrisi bir jeodezik eğridir (Sabuncuoğlu, 2010).

İspat. α bir jeodezik eğri olsun. Jeodezik eğri tanımına göre $\alpha'' = \lambda(Z \circ \alpha)$ biçimindedir.

$$\kappa_g = \frac{1}{v^2} \langle \alpha'', Y \rangle = \frac{1}{v^2} \langle \lambda(Z \circ \alpha), Y \rangle = \frac{\lambda}{v^2} \langle (Z \circ \alpha), Y \rangle = 0 \quad (3.3.8)$$

bulunur. Karşıt olarak α eğrisinin hız vektörünün uzunluğu sabit ve $\kappa_g = 0$ olsun. Bu durumda $T' = v[\kappa_g Y + \kappa_n(Z \circ \alpha)]$ eşitliğinden $T' = v\kappa_n(Z \circ \alpha)$ bulunur. $\alpha' = vT$ eşitliğinden

$$\alpha'' = v'T + vT' = v'T + v(v\kappa_n(Z \circ \alpha)) = v'T + v^2\kappa_n(Z \circ \alpha) \quad (3.3.9)$$

elde edilir. v sabit olduğundan $v' = 0$ 'dır. Buna göre $\alpha'' = v^2\kappa_n(Z \circ \alpha)$ olur. Bu eşitlik α eğrisinin bir jeodezik eğri olduğunu gösterir (Sabuncuoğlu, 2010). □

Teorem 3.3.10. $\alpha : I \rightarrow M$ düzenli eğrisinin bir eğrilik çizgisi olması için $t_r = 0$ olması gerekir ve yeter (Sabuncuoğlu, 2010).

İspat. α bir eğrilik çizgisi olsun. Bu durumda $\{\alpha', (Z \circ \alpha)'\}$ kümesi lineer bağımlıdır. α düzenli bir eğri olduğundan her $t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ 'dır. Öyleyse

$$(Z \circ \alpha)' = \lambda \alpha' \quad (3.3.10)$$

biçimindedir. $(Z \circ \alpha)' = v(-\kappa_n T - t_r Y)$ olduğundan $\lambda \alpha' = v(-\kappa_n T - t_r Y)$ elde edilir. $\alpha' = vT$ olduğundan $\lambda T = -\kappa_n T - t_r Y$ ve buradan $(\lambda + \kappa_n)T + t_r Y = 0$ bulunur. T ile Y lineer bağımsız olduğundan $\lambda + \kappa_n = 0$ ve $t_r = 0$ olur. Karşıt olarak $t_r = 0$ olsun. Bu durumda $(Z \circ \alpha)' = v(-\kappa_n T - t_r Y)$ eşitliğinden $(Z \circ \alpha)' = -v\kappa_n T$ elde edilir. $\alpha' = vT$ olduğundan $(Z \circ \alpha)' = -\kappa_n \alpha'$ olur. Bu eşitlik $\{\alpha', (Z \circ \alpha)'\}$ kümesinin lineer bağımlı olduğunu gösterir. O halde α bir eğrilik çizgisidir (Sabuncuoğlu, 2010). $\square$

3.4. Darboux Vektörü

Eğri üzerindeki bir P noktası eğriyi çizerken T, N, B vektörleri değişirler. Eğrinin T, N, B üç ayaklısının her s anında, bir eksen etrafında, bir ani helis hareketi yaptığı kabul edilir. Bu eksene eğrinin bu s parametresine karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Darboux (ani dönme) eksenini denir. Bu eksenin yön ve doğrultusunu veren vektör,

$$W = \tau T + \varkappa B = N \wedge N' \quad (3.4.1)$$

olup, eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki Darboux vektörü adını alır. Burada

$$W = N \wedge N' \quad (3.4.2)$$

olduğu,

$$N \wedge N' = \begin{vmatrix} T & N & B \\ 0 & 1 & 0 \\ -\varkappa & 0 & \tau \end{vmatrix} \quad (3.4.3)$$

ifadesinden kolayca görülebilir. B ile W arasındaki açı ϕ ile gösterilirse

$$\varkappa = \|W\| \cos \phi \quad (3.4.5)$$

$$\tau = \|W\| \sin \phi \quad (3.4.6)$$

elde edilir.

W Darboux vektörü yönündeki birim vektör C ise $\|W\| = \sqrt{\varkappa^2 + \tau^2} > 0$ olmak üzere,

$$C = \frac{\tau}{\|\vec{W}\|}T + \frac{\varkappa}{\|\vec{W}\|}B \quad (3.4.7)$$

olur. $\varkappa$ ve τ 'nin değerleri burada yerlerine konursa,

$$C = \sin \phi T + \cos \phi B \quad (3.4.8)$$

olduğu görülür (Hacısalıhoğlu, 2000).



4. YÜZEYLER ÜZERİNDE EĞRİLERİN KÜRESEL DARBOUX GÖRÜNTÜLERİ

$\mathbb{R}^3$ Öklid uzayı ve $U \subset \mathbb{R}^2$ açık küme olmak üzere $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ lokal bir gömme dönüşümüyle bir $M = X(U)$ düzgün yüzeyi verilsin. $\bar{\gamma}(t) = (u(t), v(t))$ olmak üzere $\bar{\gamma} : I \rightarrow U$ bir gömme olsun. M yüzeyi üzerinde düzenli bir eğri $\gamma = X \circ \bar{\gamma} : I \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ olsun. $p = X(u, v)$ olmak üzere yüzey üzerinde birim normal vektör alanı n ,

$$n(p) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}(u, v) \quad (4.1)$$

olarak tanımlanır. Burada $a, b \in \mathbb{R}^3$ ve $a \times b$ dış çarpım işlemidir. $\mathbb{R}^3$ uzayında γ uzay eğrisi olduğu için yay-uzunluk parametresi $\gamma(s) = X(u(s), v(s))$ olarak tanımlanır. $\gamma'(s) = d\gamma/ds(s)$ olmak üzere $\gamma(s)$ 'nin birim teğet vektör alanı $t(s) = \gamma'(s)$ 'dir. γ boyunca M 'nin birim normal vektör alanı $n_\gamma(s) = n \circ \gamma(s)$ ve $b(s) = n_\gamma(s) \times t(s)$ 'dir. γ boyunca $\{t(s), b(s), n_\gamma(s)\}$ ortonormal taban olmak üzere buna γ boyunca Darboux çatı denir. Buna göre Frenet-Serret formülleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$t'(s) = \kappa_g(s)b(s) + \kappa_n(s)n_\gamma(s) \quad (4.2)$$

$$b'(s) = -\kappa_g(s)t(s) + \tau_g(s)n_\gamma(s) \quad (4.3)$$

$$n'_\gamma(s) = -\kappa_n(s)t(s) - \tau_g(s)b(s) \quad (4.4)$$

(Hananoi vd., 2015).

$t' = at + bn_\gamma + cb$ eşitliğinin her iki yanının t ile iç çarpımı yapılarak,

$$\langle t', t \rangle = a\langle t, t \rangle + b\langle n_\gamma, t \rangle + c\langle b, t \rangle \quad (4.5)$$

$$\langle t', t \rangle = a$$

$$\langle t', t \rangle + \langle t, t' \rangle = 0 \Rightarrow 2\langle t', t \rangle = 0 \Rightarrow \langle t', t \rangle = 0$$

$$a = 0$$

bulunur.

$t' = at + bn_\gamma + cb$ eşitliğinin her iki yanının b ile iç çarpımı yapılarak,

$$\langle t', b \rangle = a\langle t, b \rangle + b\langle n_\gamma, b \rangle + c\langle b, b \rangle \quad (4.6)$$

$$\langle t', b \rangle = c$$

$$t' = \gamma'' \Rightarrow \langle \gamma'', b \rangle = \kappa_g$$

bulunur.

$t' = at + bn_\gamma + cb$ eşitliğinin her iki yanının n_γ ile iç çarpımı yapılarak,

$$\langle t', n_\gamma \rangle = a\langle t, n_\gamma \rangle + b\langle n_\gamma, n_\gamma \rangle + c\langle b, n_\gamma \rangle \quad (4.7)$$

$$\langle t', n_\gamma \rangle = b$$

$$t' = \gamma'' \Rightarrow \langle \gamma'', n_\gamma \rangle = \kappa_n$$

bulunur. O halde $t' = \kappa_g b + \kappa_n n_\gamma$ ve

$$t'(s) = \kappa_g(s)b(s) + \kappa_n(s)n_\gamma(s) \quad (4.8)$$

elde edilir. Diğer Frenet-Serret formülleri de benzer şekilde elde edilebilir (Sabuncuoğlu, 2010).

$$\langle t'(s), b(s) \rangle = \kappa_g(s) \quad (4.9)$$

$$\langle t'(s), n_\gamma(s) \rangle = \kappa_n(s)$$

$$\langle b'(s), n_\gamma(s) \rangle = \tau_g(s)$$

olduğundan,

$$\kappa_g(s) = \langle t'(s), b(s) \rangle = \det(\gamma'(s), \gamma''(s), n_\gamma(s)) \quad (4.10)$$

$$\kappa_n(s) = \langle t'(s), n_\gamma(s) \rangle = \langle \gamma''(s), n_\gamma(s) \rangle$$

$$\tau_g(s) = \langle b'(s), n_\gamma(s) \rangle = \det(\gamma'(s), n_\gamma(s), n'_\gamma(s))$$

bulunur. $\mathbb{R}^3$ uzayında $\langle a, b \rangle$ doğal iç çarpımdır. Burada $\kappa_g(s)$ jeodezik eğrilik, $\kappa_n(s)$ normal eğrilik ve $\tau_g(s)$ jeodezik torsiyondur (Hananoi vd., 2015).

1) M yüzeyinde γ bir asimtotik eğridir gerek ve yeter şart $\kappa_n = 0$ olmalıdır. Böylece,

$$\begin{aligned}\kappa_n(s) &= \langle t'(s), n_\gamma(s) \rangle \\ \kappa_n(s) &= \langle \gamma''(s), n_\gamma(s) \rangle\end{aligned}\tag{4.11}$$

ve $\gamma''(s) = \lambda n$ olduğundan yerine yazılarak,

$$\begin{aligned}\kappa_n(s) &= \langle \lambda n, n_\gamma(s) \rangle \\ \kappa_n(s) &= \lambda \langle n, n_\gamma(s) \rangle \\ \kappa_n(s) &= 0\end{aligned}\tag{4.11a}$$

elde edilir (Sabuncuoğlu, 2010).

2) M yüzeyinde γ bir jeodezik eğridir gerek ve yeter şart $\kappa_g = 0$ olmalıdır. γ bir jeodezik eğri olsun. $\gamma'' = \lambda n$ biçimindedir. O halde,

$$\begin{aligned}\kappa_g &= \frac{1}{v^2} \langle \gamma'', b \rangle = \frac{1}{v^2} \langle \lambda n, b \rangle = \frac{\lambda}{v^2} \langle n, b \rangle = 0 \\ k_g &= 0\end{aligned}\tag{4.12}$$

bulunur (Sabuncuoğlu, 2010).

3) M yüzeyinde γ bir eğrilik çizgisidir gerek ve yeter şart $\tau_g = 0$ olmalıdır.

γ 'nın eğrilik çizgisi olması için $\{\gamma', n'\}$ kümesi lineer bağımlı olmalıdır. γ düzenli bir eğri olduğundan her $t \in I$ için $\gamma'(t) \neq 0$ 'dır. Öyleyse,

$$n' = \lambda \gamma'\tag{4.13}$$

biçimindedir. $(n') = v(-\kappa_n t - \tau_g b)$ olduğundan $\lambda \gamma' = v(-\kappa_n t - \tau_g b)$ elde edilir.

$\gamma' = vt$ olduğundan $\lambda t = -\kappa_n t - \tau_g b$ ve buradan $(\lambda + \kappa_n)t + \tau_g b = 0$ bulunur. t ile b lineer bağımsız olduğundan $\lambda + \kappa_n = 0$ ve $\tau_g = 0$ olur (Sabuncuoğlu, 2010).

γ boyunca üç vektör alanı tanımlansın. Bunlar sırasıyla,

$$\begin{aligned} D_n(s) &= -\kappa_n(s)b(s) + \kappa_g(s)n_\gamma(s) \\ D_r(s) &= \tau_g(s)t(s) + \kappa_g(s)n_\gamma(s) \\ D_o(s) &= \tau_g(s)t(s) - \kappa_n(s)b(s) \end{aligned} \quad (4.14)$$

olarak elde edilir. Böylece γ boyunca normal vektör alanı $D_n(s)$, rektifiyen vektör alanı $D_r(s)$ ve oskülatör vektör alanı $D_o(s)$ 'dir. Ayrıca her Darboux vektör alanının küresel görüntüsü aşağıdaki gibi tanımlanır. Burada $D_n(s)$ Darboux vektörü olmak üzere,

$$\begin{aligned} D_n(s) &= -\kappa_n(s)b(s) + \kappa_g(s)n_\gamma(s) \\ \|D_n(s)\| &= \sqrt{\langle D_n(s), D_n(s) \rangle} \\ \|D_n(s)\| &= \sqrt{\langle -\kappa_n(s)b(s) + \kappa_g(s)n_\gamma(s), -\kappa_n(s)b(s) + \kappa_g(s)n_\gamma(s) \rangle} \\ \|D_n(s)\| &= \sqrt{\kappa_n(s)^2 + \kappa_g(s)^2} \end{aligned} \quad (4.15)$$

bulunur. Buna göre Darboux vektörü yönündeki birim vektör $\overline{D_n}(s)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \overline{D_n}(s) &= \frac{-\kappa_n(s)}{\|D_n(s)\|}b(s) + \frac{\kappa_g(s)}{\|D_n(s)\|}n_\gamma(s) \\ \overline{D_n}(s) &= \frac{-\kappa_n(s)}{\sqrt{\kappa_n(s)^2 + \kappa_g(s)^2}}b(s) + \frac{\kappa_g(s)}{\sqrt{\kappa_n(s)^2 + \kappa_g(s)^2}}n_\gamma(s) \\ \overline{D_n}(s) &= \frac{-\kappa_n(s)b(s) + \kappa_g(s)n_\gamma(s)}{\sqrt{\kappa_n(s)^2 + \kappa_g(s)^2}}, (\kappa_n(s), \kappa_g(s)) \neq (0, 0) \end{aligned} \quad (4.16)$$

elde edilir. $D_r(s)$ Darboux vektör olmak üzere,

$$\begin{aligned}
D_r(s) &= \tau_g(s)t(s) + \kappa_g(s)n_\gamma(s) \\
\|D_r(s)\| &= \sqrt{\langle D_r(s), D_r(s) \rangle} \\
\|D_r(s)\| &= \sqrt{\langle \tau_g(s)t(s) + \kappa_g(s)n_\gamma(s), \tau_g(s)t(s) + \kappa_g(s)n_\gamma(s) \rangle} \\
\|D_r(s)\| &= \sqrt{\tau_g(s)^2 + \kappa_g(s)^2}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

bulunur. Böylece Darboux vektörü yönündeki birim vektör $\overline{D_r}(s)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\overline{D_r}(s) &= \frac{\tau_g(s)}{\|D_r(s)\|}t(s) + \frac{\kappa_g(s)}{\|D_r(s)\|}n_\gamma(s) \\
\overline{D_r}(s) &= \frac{\tau_g(s)}{\sqrt{\tau_g(s)^2 + \kappa_g(s)^2}}t(s) + \frac{\kappa_g(s)}{\sqrt{\tau_g(s)^2 + \kappa_g(s)^2}}n_\gamma(s) \\
\overline{D_r}(s) &= \frac{\tau_g(s)t(s) + \kappa_g(s)n_\gamma(s)}{\sqrt{\tau_g(s)^2 + \kappa_g(s)^2}}, (\tau_g(s), \kappa_g(s)) \neq (0, 0)
\end{aligned} \tag{4.18}$$

elde edilir. $D_o(s)$ Darboux vektörü olmak üzere,

$$D_o(s) = \tau_g(s)t(s) - \kappa_n(s)b(s) \tag{4.19}$$

$$\|D_o(s)\| = \sqrt{\langle D_o(s), D_o(s) \rangle}$$

$$\|D_o(s)\| = \sqrt{\langle \tau_g(s)t(s) - \kappa_n(s)b(s), \tau_g(s)t(s) - \kappa_n(s)b(s) \rangle}$$

$$\|D_o(s)\| = \sqrt{\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2}$$

bulunur. Böylece Darboux vektörü yönündeki birim vektör $\overline{D_o}(s)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\overline{D_o}(s) &= \frac{\tau_g(s)}{\|D_o(s)\|}t(s) - \frac{\kappa_n(s)}{\|D_o(s)\|}b(s) \\
\overline{D_o}(s) &= \frac{\tau_g(s)}{\sqrt{\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2}}t(s) - \frac{\kappa_n(s)}{\sqrt{\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2}}b(s) \\
\overline{D_o}(s) &= \frac{\tau_g(s)t(s) - \kappa_n(s)b(s)}{\sqrt{\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2}}, (\kappa_n(s), \tau_g(s)) \neq (0, 0)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

elde edilir (Hananoi vd., 2015).

Üç küresel görüntü,

$$\overline{D}_n : I \rightarrow S^2; \quad (\kappa_n(s), \kappa_g(s)) \neq (0, 0) \quad (4.21)$$

$$\overline{D}_r : I \rightarrow S^2; \quad (\tau_g(s), \kappa_g(s)) \neq (0, 0) \quad (4.22)$$

$$\overline{D}_o : I \rightarrow S^2; \quad (\kappa_n(s), \tau_g(s)) \neq (0, 0) \quad (4.23)$$

şeklinde verilir. Bunlar sırasıyla γ boyunca küresel normal Darboux görüntüsü, küresel rektifiyen Darboux görüntüsü ve küresel oskütör Darboux görüntüsü olarak ifade edilir (Hananoi vd., 2015).

Diğer yandan silhouette eğri kavramı dikkate alınacaktır. $M \subset \mathbb{R}^3$ bir yüzey ve M üzerindeki birim normal vektör alanı n olsun. $k \in S^2$ bir birim vektörü için, k yönündeki ortogonal izdüşümün silhouette eğrisi $\{p \in M \mid \langle n(p), k \rangle = 0\}$ olarak tanımlanır. Aslında, k yönündeki ortogonal izdüşümün tekil noktalar kümesidir. Silhouette eğri kavramı teoride önemli bir rol oynamaktadır (Cipolla ve Giblin, 2000). Ayrıca bir yüzeyin normal silindirini tanıtmaktadır. σ düzgün bir eğri ve v sıfır olmayan bir vektör ise parametrelendirilirse $F(t, u) = \sigma(t) + uv$ elde edilir. Burada v doğrultman vektörüdür. $\mathbb{R}^3$ uzayında M bir yüzey ve N silindir yüzeyi olsun. M yüzeyinde N normal silindir yüzeyi ise $M \cap N \neq \emptyset$ ve herhangi $p \in M \cap N$ için $T_p N$, $n(p)$ normal vektörünü içerir. Bu durumda M ve N çapraz olarak kesişirler. $M \cap N$, C düzenli eğrisidir. C , M yüzeyinin normal silindirik parçasıdır. N yerel olarak $F(t, u) = \sigma(t) + uv$ tarafından parametrelendirilirse,

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, u) = \sigma'(t) \text{ ve } \frac{\partial F}{\partial u}(t, u) = v \quad (4.24)$$

elde edilir. Böylece N normali,

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, u) \times \frac{\partial F}{\partial u}(t, u) = \sigma'(t) \times v \quad (4.25)$$

ile ifade edilir. C , $\gamma(s)$ tarafından parametrelendirilirse burada s , γ 'nın yay-uzunluk parametresidir. N yerel olarak $F(s, u) = \gamma(s) + uv$ ile parametrelendirilir. C boyunca N 'nin birim normal vektör alanı $b(s)$ olmak üzere $\langle b(s), v \rangle = 0$ 'dır (Hananoi vd., 2015).

4.1. Küresel Darboux Görüntülerinin Tekillliği

Bu bölümde, küresel normal Darboux görüntüsünün, rektifiyen Darboux görüntüsünün ve oskulator Darboux görüntüsünün tekilliklerinin sınıflandırma sonucu sunulacaktır.

$\overline{D}_n(s)$ normal Darboux görüntüsü ise,

$$\overline{D}_n(s) = \frac{-\kappa_n(s)b(s) + \kappa_g(s)n_\gamma(s)}{\sqrt{\kappa_n(s)^2 + \kappa_g(s)^2}} \quad (4.1.1)$$

olmak üzere buradan $\overline{D}_n(s)$ 'nin türevi alınarak,

$$\begin{aligned} \overline{D}_n'(s) = & \frac{(-\kappa_n'(s)b(s) - \kappa_n(s)b'(s) + \kappa_g'(s)n_\gamma(s))}{\kappa_n(s)^2 + \kappa_g(s)^2} \\ & + \frac{\kappa_g(s)n_\gamma'(s)(\sqrt{\kappa_n(s)^2 + \kappa_g(s)^2})}{\kappa_n(s)^2 + \kappa_g(s)^2} \\ & - \frac{\left(\frac{2\kappa_n(s)\kappa_n'(s) + 2\kappa_g(s)\kappa_g'(s)}{2\sqrt{\kappa_n(s)^2 + \kappa_g(s)^2}} \right) (-\kappa_n(s)b(s) + \kappa_g(s)n_\gamma(s))}{\kappa_n(s)^2 + \kappa_g(s)^2} \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

bulunur. Ayrıca $t'(s) = \kappa_g(s)b(s) + \kappa_n(s)n_\gamma(s)$, $(\kappa_g(s), \kappa_n(s)) \neq (0,0)$ olduğundan,

$$T_t(s) = \frac{t'(s)}{\|t'(s)\|} = \frac{\kappa_g(s)b(s) + \kappa_n(s)n_\gamma(s)}{\sqrt{\kappa_n^2(s) + \kappa_g^2(s)}} \quad (4.1.3)$$

$t(s)$ eğrisinin birim teğet vektörüdür. $t(s) \times T_t(s) = \overline{D}_n(s)$ olduğundan t boyunca sabban çatısı $\{t(s), T_t(s), \overline{D}_n(s)\}$ olur. $\overline{D}_n(s)$, t 'nin dualidir. Buradan,

$$\begin{aligned} \overline{D}_n'(s) &= -\delta_n(s)T_t(s) \\ -\delta_n(s) &= \langle \overline{D}_n'(s), T_t(s) \rangle \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

elde edilir. Bunun anlamı, $t(s)$ küresel eğrisinin jeodezik eğriliği $\frac{1}{\sqrt{k_g(s)^2 + k_n(s)^2}}\delta_n(s)$ 'dir. Buradan,

$$\begin{aligned}
& -\kappa'_n(s)b(s)(\kappa_n^2(s) + \kappa_g^2(s)) \\
& -\kappa_n(s)b'(s)(\kappa_n^2(s) + \kappa_g^2(s)) \\
& +\kappa'_g(s)n_\gamma(s)(\kappa_n^2(s) + \kappa_g^2(s)) \\
& +\kappa_g(s)n'_\gamma(s)(\kappa_n^2(s) + \kappa_g^2(s)) \\
-\delta_n(s) = \langle \overline{D}_n'(s), T_t(s) \rangle &= \left\langle \frac{(\kappa_n^2(s) + \kappa_g^2(s))^{3/2}}{(\kappa_n^2(s) + \kappa_g^2(s))^{3/2}}, \right. \\
& \left. \begin{aligned}
& -(\kappa_n(s)^2 \kappa'_n(s)b(s)) \\
& -\kappa_n(s)\kappa'_n(s)\kappa_g(s)n_\gamma(s) \\
& -\kappa_g(s)\kappa'_g(s)\kappa_n(s)b(s) \quad \kappa_g(s)b(s) \\
& +\kappa_g(s)^2 \kappa'_g(s)n_\gamma(s) \quad +\kappa_n(s)n_\gamma(s) \\
& \left. + \frac{(\kappa_n^2(s) + \kappa_g^2(s))^{3/2}}{(\kappa_n^2(s) + \kappa_g^2(s))^{3/2}}, \frac{(\kappa_n^2(s) + \kappa_g^2(s))^{3/2}}{\sqrt{\kappa_n^2(s) + \kappa_g^2(s)}} \right\rangle
\end{aligned} \right.
\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

elde edilir. Burada gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$-\delta_n(s) = \frac{-\tau_g(s)\kappa_n^2(s) - \tau_g(s)\kappa_g^2(s) + \kappa_n(s)\kappa'_g(s) + \kappa'_n(s)\kappa_g(s)}{\kappa_n^2(s) + \kappa_g^2(s)} \tag{4.1.6}$$

bulunur. Buradan, $\delta_n(s) = \tau_g(s) - \frac{\kappa_n(s)\kappa'_g(s) - \kappa'_n(s)\kappa_g(s)}{\kappa_n^2(s) + \kappa_g^2(s)}$, $(\kappa_n(s), \kappa_g(s)) \neq (0, 0)$ elde edilir.

$\overline{D}_r(s)$ rektifiyen Darboux görüntüsü ise,

$$\begin{aligned}
\overline{D}_r(s) &= \frac{\tau_g(s)t(s) + \kappa_g(s)n_\gamma(s)}{\sqrt{\tau_g(s)^2 + \kappa_g(s)^2}} \text{ olduğundan } \overline{D}_r(s) \text{'nin türevi alınarak,} \tag{4.1.7} \\
\overline{D}_r'(s) &= \frac{\tau'_g(s)t(s) + \tau_g(s)t'(s) + \kappa'_g(s)n_\gamma(s) + \kappa_g(s)n'_\gamma(s)(\sqrt{\tau_g(s)^2 + \kappa_g(s)^2})}{\tau_g(s)^2 + \kappa_g(s)^2} \\
&\quad - \frac{\left(\frac{2\tau_g(s)\tau'_g(s) + \kappa_g(s)\kappa'_g(s)}{2\sqrt{\tau_g(s)^2 + \kappa_g(s)^2}} \right) (\tau_g(s)t(s) + \kappa_g(s)n_\gamma(s))}{\tau_g(s)^2 + \kappa_g(s)^2}
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca $b'(s) = -k_g(s)t(s) + \tau_g(s)n_\gamma(s)$ olduğundan,

$$T_b(s) = \frac{b'(s)}{\|b'(s)\|} = \frac{-\kappa_g(s)t(s) + \tau_g(s)n_\gamma(s)}{\sqrt{\kappa_g^2(s) + \tau_g^2(s)}}, \quad (\kappa_g(s), \tau_g(s)) \neq (0, 0) \quad (4.1.8)$$

$b(s)$ eğrisinin birim teğet vektörüdür. $b(s)$ boyunca sabban çatısı $\{b(s), T_b(s), \overline{D_r}(s)\}$ şeklindedir. Buradan

$$\overline{D_r}'(s) = -\delta_r(s)T_b(s) \quad (4.1.9)$$

$$-\delta_r(s) = \langle \overline{D_r}'(s), T_b(s) \rangle$$

elde edilir. $\overline{D_r}(s)$, $b(s)$ 'nin dualidir. Bunun anlamı $b(s)$ 'nin jeodezik eğriliği $\frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2(s) + \tau_g^2(s)}}\delta_r(s)$ 'dir. Buradan,

$$\begin{aligned} -\delta_r(s) &= \langle \overline{D_r}'(s), T_b(s) \rangle = \left\langle \begin{aligned} &\tau_g'(s)t(s)(\tau_g^2(s) + \kappa_g^2(s)) \\ &+ \tau_g(s)t'(s)(\tau_g^2(s) + \kappa_g^2(s)) \\ &+ \kappa_g'(s)n_\gamma(s)(\tau_g^2(s) + \kappa_g^2(s)) \\ &+ \kappa_g(s)n_\gamma'(s)(\tau_g^2(s) + \kappa_g^2(s)) \end{aligned}, \frac{1}{(\tau_g^2(s) + \kappa_g^2(s))^{3/2}} \right\rangle \quad (4.1.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-(\tau_g^2(s)\tau_g'(s)t(s) \\ &+ \tau_g(s)\kappa_g(s)\tau_g'(s)n_\gamma(s) \\ &+ \kappa_g(s)\kappa_g'(s)\tau_g(s)t(s) - \kappa_g(s)t(s) \\ &+ \frac{\kappa_g^2(s)\kappa_g'(s)n_\gamma(s)}{(\tau_g^2(s) + \kappa_g^2(s))^{3/2}}, \frac{+\tau_g(s)n_\gamma(s)}{\sqrt{\tau_g^2(s) + \kappa_g^2(s)}} \rangle \end{aligned}$$

bulunur ve gerekli hesaplamalar yapılarak,

$$-\delta_r(s) = \frac{-\kappa_n(s)\kappa_g^2(s) - \kappa_n(s)\tau_g^2(s) + \kappa_g(s)\tau_g'(s) + \kappa_g'(s)\tau_g(s)}{\kappa_g^2(s) + \tau_g^2(s)} \quad (4.1.11)$$

bulunur ve buradan, $\delta_r(s) = \kappa_n(s) - \frac{\kappa_g(s)\tau_g'(s) - \kappa_g'(s)\tau_g(s)}{\kappa_g^2(s) + \tau_g^2(s)}$ elde edilir.

$\overline{D}_o(s)$ oskülatör Darboux görüntüsü ise,

$$\begin{aligned}\overline{D}_o(s) &= \frac{\tau_g(s)t(s) - \kappa_n(s)b(s)}{\sqrt{\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2}} \text{ olduğundan } \overline{D}_o(s) \text{'nin türevi alınarak,} \quad (4.1.12) \\ \overline{D}_o'(s) &= \frac{(\tau_g'(s)t(s) + \tau_g(s)t'(s) - \kappa_n'(s)b(s) - \kappa_n(s)b'(s))(\sqrt{\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2})}{\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2} \\ &\quad - \frac{\left(\frac{2\kappa_n(s)\kappa_n'(s) + 2\tau_g(s)\tau_g'(s)}{2\sqrt{\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2}} \right) (\tau_g(s)t(s) - \kappa_n(s)b(s))}{\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2}\end{aligned}$$

olur. Ayrıca $n_\gamma'(s) = -\kappa_n(s)t(s) - \tau_g(s)b(s)$, $(\kappa_n(s), \tau_g(s)) \neq (0, 0)$ olduğundan,

$$T_{n_\gamma}(s) = \frac{-\kappa_n(s)t(s) + \tau_g(s)b(s)}{\sqrt{\kappa_n^2(s) + \tau_g^2(s)}} \quad (4.1.13)$$

$n_\gamma(s)$ eğrisinin birim teğet vektörüdür. $n_\gamma(s)$ boyunca sabban çatısı $\{n_\gamma(s), T_{n_\gamma}(s), \overline{D}_o(s)\}$ şeklindedir. Buradan,

$$\overline{D}_o'(s) = -\delta_o(s)T_{n_\gamma}(s) \quad (4.1.14)$$

$$-\delta_o(s) = \langle \overline{D}_o'(s), T_{n_\gamma}(s) \rangle$$

elde edilir. Öyle ki $\overline{D}_o(s)$, $n_\gamma(s)$ 'nin dualidir ve $n_\gamma(s)$ 'nin jeodezik eğriliği $\frac{1}{\sqrt{\kappa_n^2(s) + \tau_g^2(s)}}\delta_o(s)$ 'dir Buna göre,

$$\begin{aligned}
& \tau'_g(s)t(s)(\kappa_n^2(s) + \tau_g^2(s)) \\
& + \tau_g(s)t'(s)(\kappa_n^2(s) + \tau_g^2(s)) \\
& - \kappa'_n(s)b(s)(\kappa_n^2(s) + \tau_g^2(s)) \\
& - \kappa_n(s)b'(s)(\kappa_n^2(s) + \tau_g^2(s)) \\
- \delta_o(s) = & \langle \overline{D_o}'(s), T_{n_\gamma}(s) \rangle = \left\langle \frac{-(\kappa_n(s)\kappa'_n(s)\tau_g(s)t(s) - \kappa_n^2(s)\kappa'_n(s)b(s) + \tau_g^2(s)\tau'_g(s)t(s) - \kappa_n(s)t(s) - \tau_g(s)b(s))}{(\kappa_n^2(s) + \tau_g^2(s))3/2}, \frac{-\kappa_n(s)t(s) + \tau_g(s)b(s)}{\sqrt{\kappa_n^2(s) + \tau_g^2(s)}} \right\rangle
\end{aligned} \tag{4.1.15}$$

bulunur ve gerekli hesaplamalar yapılarak,

$$- \delta_o(s) = \frac{-\tau'_g(s)\kappa_n(s) - \tau_g^2(s)\kappa_g(s) + \kappa'_n(s)\tau_g(s) - \kappa_n^2(s)\kappa_g(s)}{\kappa_n^2(s) + \tau_g^2(s)} \tag{4.1.16}$$

bulunur ve buradan, $\delta_o(s) = \kappa_g(s) + \frac{\kappa_n(s)\tau'_g(s) - \kappa'_n(s)\tau_g(s)}{\kappa_n^2(s) + \tau_g^2(s)} (\kappa_n(s), \tau_g(s)) \neq (0, 0)$ elde edilir (Hananoi vd., 2015).

(M, γ) 'nın üç invaryantı aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\delta_n(s) = \tau_g(s) - \frac{\kappa_n(s)\kappa'_g(s) - \kappa'_n(s)\kappa_g(s)}{\kappa_n^2(s) + \kappa_g^2(s)} \text{ ise } (\kappa_n(s), \kappa_g(s)) \neq (0, 0), \tag{4.1.17}$$

$$\delta_r(s) = \kappa_n(s) - \frac{\kappa_g(s)\tau'_g(s) - \kappa'_g(s)\tau_g(s)}{\kappa_g^2(s) + \tau_g^2(s)} \text{ ise } (\kappa_g(s), \tau_g(s)) \neq (0, 0), \tag{4.1.18}$$

$$\delta_o(s) = \kappa_g(s) + \frac{\kappa_n(s)\tau'_g(s) - \kappa'_n(s)\tau_g(s)}{\kappa_n^2(s) + \tau_g^2(s)} \text{ ise } (\kappa_n(s), \tau_g(s)) \neq (0, 0). \tag{4.1.19}$$

$\kappa(s) = \sqrt{\kappa_n^2(s) + \kappa_g^2(s)}$ ve $\delta_n(s) = \tau(s)$ olduğundan $\mathbb{R}^3$ uzayındaki γ birim hızlı eğrisinin eğriliği $\kappa(s)$ ve torsiyonu $\tau(s)$ 'dir. δ_n , δ_r ve δ_o invaryantları kullanarak $\overline{D_n}$, $\overline{D_r}$ ve $\overline{D_o}$ 'nün tekil noktaları sınıflandırılabilir (Hananoi vd., 2015).

Teorem 4.1.1. M yüzeyi üzerinde $\gamma: I \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri olsun.

(A) $(\kappa_n(s), \kappa_g(s)) \neq (0, 0)$ olmak üzere aşağıdakiler ifade edilir:

(1) $\overline{D}_n$ normal Darboux görüntüsü s_0 'da tekil değildir gerek ve yeter şart $\delta_n(s_0) \neq 0$ 'dır.

(2) $\overline{D}_n$ normal Darboux görüntüsü s_0 'da dönüm noktası C ile yerel diffeomorfiktir gerek ve yeter şart $\delta_n(s_0) = 0$ ve $\delta'_n(s_0) \neq 0$ 'dır.

B) $(\kappa_g(s), \tau_g(s)) \neq (0, 0)$ olmak üzere aşağıdakiler ifade edilir:

(1) $\overline{D}_r$ rektifiyen Darboux görüntüsü s_0 'da tekil değildir gerek ve yeter şart $\delta_r(s_0) \neq 0$ 'dır.

(2) $\overline{D}_r$ rektifiyen Darboux görüntüsü s_0 'da dönüm noktası C ile yerel diffeomorfiktir gerek ve yeter şart $\delta_r(s_0) = 0$ ve $\delta'_r(s_0) \neq 0$ 'dır.

C) $(\kappa_n(s), \tau_g(s)) \neq (0, 0)$ olmak üzere aşağıdakiler ifade edilir:

(1) $\overline{D}_o$ oskülatör Darboux görüntüsü s_0 'da tekil değildir gerek ve yeter şart $\delta_o(s_0) \neq 0$ 'dır.

(2) $\overline{D}_o$ oskülatör Darboux görüntüsü s_0 'da dönüm noktası C ile yerel diffeomorfiktir gerek ve yeter şart $\delta_o(s_0) = 0$ ve $\delta'_o(s_0) \neq 0$ 'dır (Hananoi vd., 2015).

İspat. $t'(s) = \kappa_g(s)b(s) + \kappa_n(s)n_\gamma(s)$ 'dir. $(\kappa_g(s), \kappa_n(s)) \neq (0, 0)$ olmak üzere,

$$T_t(s) = \frac{\kappa_g(s)b(s) + \kappa_n(s)n_\gamma(s)}{\sqrt{\kappa_g^2(s) + \kappa_n^2(s)}} \quad (4.1.20)$$

$t(s)$ eğrisinin birim teğet vektörüdür. $t(s) \times T_t(s) = \overline{D}_n(s)$ olduğundan t boyunca sabban çatısı $\{t(s), T_t(s), \overline{D}_n(s)\}$ 'dir. $\overline{D}_n(s)$, t 'nin dualidir. O halde,

$$\overline{D}_n'(s) = -\delta_n(s)T_t(s) \quad (4.1.21)$$

ile ifade edilir Bunun anlamı ise $\frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2(s) + \kappa_n^2(s)}}\delta_n(s), t(s)$ küresel eğrisinin jeodezik

eğriliğidir. Ayrıca, $(\kappa_g(s), \tau_g(s)) \neq (0, 0)$ olmak üzere birim teğet vektör alanı

$$T_b(s) = \frac{-\kappa_g(s)t(s) + \tau_g(s)b(s)}{\sqrt{\kappa_g^2(s) + \tau_g^2(s)}} \quad (4.1.22)$$

olsun. $b(s)$ boyunca sabban çatısı $\{b(s), T_b(s), \overline{D_r}(s)\}$ 'dir. O halde,

$$\overline{D_r}'(s) = -\delta_r(s)T_b(s) \quad (4.1.23)$$

olduğu gösterilebilir. $\overline{D_r}, b(s)$ 'nin dualidir ve bunun anlamı $\frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2(s) + \tau_g^2(s)}} \delta_r(s)$, $b(s)$ 'nin jeodezik eğriliğidir. $(\kappa_n(s), \tau_g(s)) \neq (0, 0)$ olmak üzere,

$$T_{n_\gamma}(s) = \frac{-\kappa_n(s)t(s) + \tau_g(s)n_\gamma(s)}{\sqrt{\kappa_n^2(s) + \tau_g^2(s)}} \quad (4.1.24)$$

vektör alanı ve $n_\gamma(s)$ boyunca sabban çatısı $\{n_\gamma(s), T_{n_\gamma}(s), \overline{D_o}(s)\}$ 'dir. O halde,

$$\overline{D_o}'(s) = -\delta_o(s)T_{n_\gamma}(s) \quad (4.1.25)$$

olduğu gösterilebilir öyle ki $\overline{D_o}, n_\gamma$ 'nin dualidir ve $\frac{1}{\sqrt{k_n^2(s) + \tau_g^2(s)}} \delta_o(s)$ $n_\gamma(s)$ 'nin jeodezik eğriliğidir (Hananoi vd., 2015). $\square$

4.2. Birim Kürede Eğriler ve Dualleri

Bu bölümde S^2 birim küresinde M yüzeyi ele alınacaktır. $\gamma: I \rightarrow S^2$ düzenli bir eğri olsun. s yay-uzunluk parametresi olsun. $\gamma(s)$ 'nin birim teğet vektörü $t(s) = \gamma'(s)$ 'dir. Bu durumda $n_\gamma(s) = \gamma(s)$ ve $b(s) = \gamma(s) \times t(s)$ olarak seçilsin. $\gamma(s)$ boyunca $\{\gamma(s), t(s), b(s)\}$ Darboux çatısıdır ve buna $\gamma(s)$ boyunca Sabban çatısı da denir. $k_n(s) = -1$ ve $\tau_g(s) = 0$ 'dır Böylece Frenet-Serret formülleri şu şekilde verilir:

$$\gamma'(s) = t(s) \quad (4.2.1)$$

$$t'(s) = \kappa_g(s)b(s) + \kappa_n(s)n_\gamma(s)$$

$$t'(s) = \kappa_g(s)b(s) - \gamma(s)$$

$$b'(s) = -\kappa_g(s)t(s) + \tau_g(s)n_\gamma(s)$$

$$b'(s) = -\kappa_g(s)t(s)$$

Birim küredeki γ eğrisinin dual eğrisi $\frac{\pi}{2}$ tarafından bir γ^V eğrisi olarak tanımlanır. Dual eğri γ^V , γ orjinal eğrisinin Gauss dönüşümü olarak kabul edilebilir. Yukarıdaki

gösterimle γ 'nın duali $\gamma^V(s) = b(s)$ 'dir. Bu nedenle s_0 , γ^V 'nin tekil bir noktasıdır gerek ve yeter şart $\kappa_g(s_0) = 0$ olmalıdır (Porteous, 2004).

Önerme 4.2.1. $\gamma^V(s)$ dual eğrisi, s_0 'da dönüm noktasına sahiptir gerek ve yeter şart $\kappa_g(s_0) = 0$ ve $\kappa'_g(s_0) \neq 0$ 'dır. $\gamma(s_0)$ noktası, $\kappa_g(s_0) = 0$ ve $\kappa'_g(s_0) \neq 0$ iken γ 'nın sıradan dönüm noktası olduğu söylenir. $\kappa_g(s_0) = 0$ gerek ve yeter şart γ büyük çemberin bir parçasıdır. Bu durum γ^V 'nin sabit olduğu koşulu ile eşdeğerdir. Bu nedenle,

$$H : I \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad H(s, v) = \langle \gamma(s), v \rangle \quad (4.2.2)$$

şeklinde yükseklik fonksiyonu tanımlanabilir (Porteous, 2004).

Teğet yükseklik fonksiyonlarının ailesi, binormal yükseklik fonksiyonlarının ailesi ve normal yükseklik fonksiyonlarının ailesi ise;

$$\begin{aligned} H_n & : I \times S^2 \rightarrow \mathbb{R} ; \quad H_n(s, v) = \langle t(s), v \rangle \\ H_r & : I \times S^2 \rightarrow \mathbb{R} ; \quad H_r(s, v) = \langle b(s), v \rangle \\ H_o & : I \times S^2 \rightarrow \mathbb{R} ; \quad H_o(s, v) = \langle n_\gamma(s), v \rangle \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

şeklinde tanımlanır (Hananoi vd., 2015).

Önerme 4.2.2. $h_v(s) = H(s, v)$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler vardır:

- (1) $h_v(s) = h'_v(s) = 0$ gerek ve yeter şart $v = \pm \gamma^V(s)$ 'dir.
- (2) $h_v(s) = h'_v(s) = h''_v(s) = 0$ gerek ve yeter şart $v \pm \gamma^V(s)$ ve $\kappa_g(s) = 0$ 'dir.
- (3) $h_v(s) = h'_v(s) = h''_v(s) = h'''_v(s) = 0$ gerek ve yeter şart $v = \pm \gamma^V(s)$ ve $\kappa_g(s) = \kappa'_g(s) = 0$ 'dır.

$H(x, v) = \langle x, v \rangle$ ile $H : S^2 \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlansın. $h_v(x) = H(x, v)$ 'dir. $h_v = h_v \circ \gamma$ olduğundan $v_0 = \gamma^V(s_0)$ için yukarıdaki önerme (1)'in anlamı, γ 'nın $p_0 = \gamma(s_0)$ 'daki büyük çember $h_{v_0}^{-1}(s_0)$ ile teğet olduğu anlamına gelir. $h_{v_0}^{-1}(s_0)$, γ 'nın $p_0 = \gamma(s_0)$ 'daki büyük çemberi olarak adlandırılır ve $TG_{p_0}\gamma$ ile

gösterilir. γ ve teğet büyük çember $TG_{p_0}\gamma$, $p_0 = \gamma(s_0)$ 'da $k+1$ kantağa sahipse $h_v(s_0) = h_v^{-1}(s_0) = \dots = h_v^{(k)}(s_0) = 0$ ve $h_v^{k+1}(s_0) \neq 0$ 'dır (Hananoi vd., 2015).

Önerme 4.2.3. γ ve $TG_{p_0}\gamma$ teğet büyük çember $p_0 = \gamma(s_0)$ 'da üçüncü mertebeden kontaktır gerek ve yeter şart dual eğri $\gamma^V(s)$, s_0 'da dönüm noktasına sahip olmasıdır (Hananoi vd., 2015).

Uyarı 4.2.4. $\gamma(s) = n_\gamma(s)$, $\kappa_n(s) = -1$ ve $\tau_g(s) = 0$ olduğundan $\delta_o(s) = \kappa_g(s)$ 'dir. Bununla birlikte $t(s)$, $b(s)$ ve $n_\gamma(s)$, $\gamma: I \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ eğrisi için küresel eğrilerdir. Öte yandan γ eğrisinin evolütleri $\varepsilon_\gamma^\pm$, γ eğrisinin normal jeodezik ailesinin zarf eğrisi olarak tanımlanır. γ 'nın evolütlerinin birim teğet vektörü $t(s)$ tarafından verilen küresel eğrinin dualleri olduğu bilinmektedir. Frenet-Serret formülleri tarafından, $\bar{D}_n(s) = \frac{-\kappa_n(s)b(s) + \kappa_g(s)n_\gamma(s)}{\sqrt{\kappa_n^2(s) + \kappa_g^2(s)}}$ olduğundan $n_\gamma(s) = \gamma(s)$ ve $\kappa_n(s) = -1$ alınır;

$$\varepsilon_\gamma^\pm(s) = \pm t^V(s) = \frac{\pm(\kappa_g(s)\gamma(s) + b(s))}{\sqrt{\kappa_g^2(s) + 1}} \quad (4.2.4)$$

elde edilir (Porteous, 2004).

Önerme 4.2.5. $\gamma: I \rightarrow S^2$ birim hızlı küresel eğrisi için aşağıdaki koşullar eşdeğerdir.

- (1) γ , çemberin bir bölümüdür,
- (2) κ_g jeodezik eğriliği sabittir,
- (3) $\kappa_g[t] \equiv 0$,
- (4) t , büyük çemberin bir bölümüdür,
- (5) γ 'nın evolütleri sabit vektörlerdir,
- (6) γ^V , çemberin bir bölümüdür (Hananoi vd., 2015).

İspat. $\gamma: I \rightarrow S_+^2$ genel parametrelili γ eğrisinin jeodezik eğriliği şu şekilde hesaplanabilir.

$\kappa_g(s) = \langle t'(s), b(s) \rangle = \det(\gamma'(s), \gamma''(s), n_\gamma(s))$ olduğundan $n_\gamma(s) = \gamma(s)$ alınır,

$$\kappa_g(t) = \frac{\det(\gamma(t), \gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3} \quad (4.2.5)$$

elde edilir. Böylece $t(s)$ 'nin jeodezik eğriliği,

$$\kappa_g[t](s) = \frac{\det(t(s), t'(s), t''(s))}{\|t'(s)\|^3} = \frac{\kappa_g'(s)}{(\sqrt{\kappa_g^2(s) + 1})^3} \quad (4.2.6)$$

biçiminde ifade edilir. Böylece (1), (2), (3) ve (4) koşulları eşdeğerdir. Buna göre evolütler t 'nin dualleri olduğundan (4) ve (5) koşulları eşdeğerdir. Buradan,

$$\langle \gamma^V(s), \varepsilon_\gamma^\pm(s) \rangle = \langle b(s), \varepsilon_\gamma^\pm(s) \rangle = \frac{\pm 1}{\sqrt{\kappa_g^2(s) + 1}} \quad (4.2.7)$$

bulunur. $\langle \gamma^V(s), \varepsilon_\gamma^\pm(s) \rangle$ sabittir gerek ve yeter şart $\kappa_g(s)$ sabittir. Bunun anlamı (5) ve (6) koşulları eşdeğerdir. Evolütler γ çemberinin merkezinin yönünü verir (yani, $\pm t^V$) (Hananoi vd., 2015). $\square$

Sonuç 4.2.6. $\gamma : I \rightarrow S^2$ sabit jeodezik eğrilikli çember ve $\kappa_g \neq 0$ olsun. γ 'nın merkezinin yönü,

$$\frac{\pm(k_g(s)\gamma(s) + b(s))}{\sqrt{k_g^2 + 1}} \quad (4.2.8)$$

ile verilir (Hananoi vd., 2015).

4.3. Yüzeylerde Eğrilerin İnvaryantları

Bu bölümde δ_n , δ_r , δ_o invaryantlarının geometrik anlamlarını ele alınacaktır. O halde şu teorem verilebilir:

Teorem 4.3.1. M yüzeyi üzerinde $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri olsun.

(A) $(\kappa_n(s), \kappa_g(s)) \neq (0, 0)$ olmak üzere aşağıdaki koşullar eşdeğerdir:

- (1) $\overline{D_n}(s)$ normal Darboux görüntüsü sabittir,
- (2) Normal Darboux görüntüsünün tekil noktası $\delta_n(s) \equiv 0$,
- (3) γ , bir düzlem eğrisidir.
- (4) $t(s)$ büyük çemberin bir bölümüdür.

(B) $(\kappa_g(s), \tau_g(s)) \neq (0, 0)$ olmak üzere aşağıdaki koşullar eşdeğerdir:

- (1) $\overline{D_r}(s)$ rektifiyen Darboux görüntüsü sabittir,
- (2) Rektifiyen Darboux görüntüsünün tekil noktası $\delta_r(s) \equiv 0$,
- (3) γ , M 'nin normal silindirik parçasıdır.
- (4) $b(s)$ büyük çemberin bir bölümüdür.

(C) $(\kappa_n(s), \tau_g(s)) \neq (0, 0)$ olmak üzere aşağıdaki koşullar eşdeğerdir:

- (1) $\overline{D_o}(s)$ oskülatör Darboux görüntüsü sabittir,

(2) Oskülatör Darboux görüntüsünün tekil noktası $\delta_o(s) \equiv 0$,

(3) γ , bir silhoutte eğridir.

(4) $n_\gamma(s)$ büyük çemberin bir bölümüdür (Hananoi vd., 2015).

İspat.

- (A) Bir uzay eğrisi olarak γ 'nın eğriliğinin $\kappa(s) = \sqrt{\kappa_g^2(s) + \kappa_n^2(s)}$ olduğu bilinir. Bu nedenle $(\kappa_n(s), \kappa_g(s)) \neq (0, 0)$ şartı γ eğrisinin Frenet eğrisi olduğu anlamına gelir. $\tau(s) = \delta_n(s)$ 'den dolayı (A) iddiası γ uzay eğrisinde klasik bir sonuçtur.
- (B) $\overline{D_r}'(s) = -\delta_r(s)T_b(s)$ olduğundan $\overline{D_r}(s)$ yalnızca $\delta_r(s) \equiv 0$ ise sabittir. Bu nedenle (1) ve (2) koşulları eşdeğerdir. Koşul (3) varsayılırsa, $v \in S^2$ vektörü var ve öyle ki $\langle b(s), v \rangle \equiv 0$ 'dır. $v = \lambda t(s) + \mu n_\gamma(s)$ olacak şekilde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vardır. $\langle b(s), v \rangle \equiv 0$ olduğundan $-\kappa_g(s)\lambda + \tau_g(s)\mu = 0$ ve böylece $v = \overline{D_r}(s)$ elde edilir. Koşul (1) sağlandı. $\overline{D_r}(s)$ sabit olsun. $v = \overline{D_r}(s) \in S^2$ olmak üzere $\overline{D_r}(s)$ 'nin tanımı ile $\langle b(s), v \rangle = \langle b(s), \overline{D_r}(s) \rangle \equiv 0$ 'dır. Bu yüzden koşul (1) ve (3) sağlandı.
- (C) $\overline{D_o}'(s) = -\delta_o(s)T_{n_\gamma}(s)$ olduğundan $\overline{D_o}(s)$ yalnızca $\delta_o(s) \equiv 0$ ise sabittir. Bu nedenle (1) ve (2) koşulları eşdeğerdir. Koşul (3) varsayılırsa, $k \in S^2$ vektörü var ve öyle ki $\langle n_\gamma(s), k \rangle \equiv 0$ 'dır. $k = \lambda t(s) + \mu b(s)$ olacak şekilde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vardır. $\langle n_\gamma'(s), k \rangle \equiv 0$ olduğundan $-\kappa_n(s)\lambda - \tau_g(s)\mu = 0$ ve böylece $k = \overline{D_o}(s)$ elde edilir. Koşul (1) sağlandı. $\overline{D_o}(s)$ sabit olsun. $k = \overline{D_o}(s) \in S^2$ olmak üzere $\overline{D_o}(s)$ 'nin tanımı ile $\langle n_\gamma(s), k \rangle = \langle n_\gamma(s), \overline{D_o}(s) \rangle \equiv 0$ 'dır. Bu yüzden koşul (1) ve (3) eşdeğerdir. $\frac{1}{\sqrt{k_g^2 + k_n^2}}\delta_n, \frac{1}{\sqrt{k_g^2 + \tau_g^2}}\delta_r, \frac{1}{\sqrt{k_n^2 + \tau_g^2}}\delta_o$, sırasıyla t, b, n_γ 'nin jeodezik eğrilikleridir. Koşul (4) her bir durum için eşdeğer bir koşul olarak eklenebilir. Böylece ispat tamamlanır (Hananoi vd., 2015).

□

Önerme 4.3.2. M yüzeyinde $\gamma: I \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri olsun.

- (A) $(\kappa_n(s), \kappa_g(s)) \neq (0, 0)$ olmak üzere $\overline{D_n}(s)$, $p_0 = \overline{D_n}(s_0)$ 'da dönüm noktasına sahiptir gerek ve yeter şart $t(s)$ ve p_0 'daki teğet büyük çember üçüncü mertebeden kontaklıdır.
- (B) $(\kappa_g(s), \tau_g(s)) \neq (0, 0)$ olmak üzere $\overline{D_r}(s)$, $p_0 = \overline{D_r}(s_0)$ 'da dönüm noktasına sahiptir gerek ve yeter şart $b(s)$ ve p_0 'daki teğet büyük çember üçüncü mertebeden kontaklıdır.
- (C) $(\kappa_n(s), \tau_g(s)) \neq (0, 0)$ olmak üzere $\overline{D_o}(s)$, $p_0 = \overline{D_o}(s_0)$ 'da dönüm noktasına

sahiptir gerek ve yeter şart $n_\gamma(s)$ ve p_0 'daki teğet büyük çember üçüncü mertebeden kontaklıdır (Hananoi vd. 2015).

4.4. Yüzeylerde İsofotik Eğriler

Bu bölümde yüzeyler üzerindeki isofotik eğriler karakterize edilecektir. Bir yüzeyin isofotik eğrisi, belirli ışık kaynağından gelen aynı ışık yoğunluğuna sahip olan noktaları içeren bir eğridir. Işık kaynağı yüzeyden sonsuz uzakta ise ışık ışınları paralel çizgiler olarak düşünülebilir. Bu durumda bir isofotik eğri n_γ normali sabit bir yönde açı oluşturacak şekilde $\gamma: I \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ eğrisidir. γ bir isofotik eğridir gerek ve yeter şart $\langle d, n_\gamma(s) \rangle$ sabittir öyle ki d birim vektörü vardır (Martini, 1986).

Teorem 4.4.1. M yüzeyinde $\gamma: I \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri ve

$(\kappa_n(s), \tau_g(s)) \neq (0, 0)$ olsun. O halde aşağıdaki koşullar eşdeğerdir:

- (1) γ isofotik eğridir,
- (2) n_γ, S^2 'de çemberin bir bölümüdür,
- (3) $\bar{\delta}_o(s) = \frac{1}{\sqrt{\kappa_n^2(s) + \tau_g^2(s)}} \delta_o(s)$ sabittir,
- (4) $\langle d, \bar{D}_o(s) \rangle$ 'nin sabit olduğu bir d birim vektörü vardır,
- (5) $\bar{D}_o(s), S^2$ 'de çemberin bir bölümüdür (Hananoi vd., 2015).

İspat. γ , bir isofotik eğridir gerek ve yeter şart $\langle n_\gamma(s), d \rangle$ olmak üzere bir d birim vektörü vardır. Son durum, n_γ 'nın (2) koşulu ile eşdeğerli $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, d \rangle = c\}$ düzleminin S^2 birim küresi ile kesiştiği anlamına gelmektedir. Yukarıdaki ile aynı nedenden dolayı (4) ve (5) koşulları eşdeğerdir. n_γ küresel eğrisinin jeodezik eğriliği $\bar{\delta}_o(s)$ 'dir. (2) ve (3) koşullarının eşdeğer olduğunu görülebilir. $\bar{D}_o, n_\gamma$ 'nın duali olduğundan (2) ve (5) koşulları eşdeğerdir. Böylece ispat tamamlanır (Hananoi vd., 2015). □

$(\kappa_n(s), \tau_g(s)) \neq (0, 0)$ olmak üzere (2) ve (5) koşulları ile çemberlerin merkezi kesişir ve

$$d = \frac{\pm(\bar{\delta}_o(s)n_\gamma(s) + \bar{D}_o(s))}{\sqrt{\bar{\delta}_o^2(s) + 1}} = \frac{\pm(\delta_o(s)n_\gamma(s) + \sqrt{\kappa_n^2(s) + \tau_g^2(s)}\bar{D}_o(s))}{\sqrt{\delta_o^2(s) + (\kappa_n^2(s) + \tau_g^2(s))}} \quad (4.4.1)$$

şeklinde ifade edilir. Bu durumda,

$$\langle d, n_\gamma(s) \rangle = \frac{\pm\delta_o(s)}{\sqrt{\delta_o^2(s) + 1}} \text{ ve } \langle d, \bar{D}_o(s) \rangle = \frac{\pm 1}{\sqrt{\bar{\delta}_o^2(s) + 1}} \quad (4.4.2)$$

elde edilir. Ayrıca $\kappa_n(s) \neq 0$ ise,

$$\bar{\delta}_o(s) = \left(\frac{\kappa_n^2}{(\kappa_n^2 + \tau_g^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau_g}{\kappa_n} \right)' + \frac{\kappa_g}{\sqrt{\kappa_n^2 + \tau_g^2}} \right) (s) \quad (4.4.3)$$

elde edilir. Sağ taraf Doğan ve Yaylı tarafından elde edilen $\mu(s)$ invariantıdır. $\kappa_n(s) = 0$ olsa bile $\bar{\delta}_o(s)$ invariantı tanımlanabilir. γ bir isophotik eğri olsun. O halde $\bar{D}_o(s) = t(s)$ gerek ve yeter şart γ bir asimtotik eğridir yani $\kappa_n(s) \equiv 0$ 'dır. Bu durumda γ 'nın teğet vektörü sabit yönde sabit bir açı oluşturur ve eğri genelleştirilmiş helis olarak adlandırılır. Eğer bir uzay eğrisi olarak γ 'nın temel normali n_γ 'ya eşitse γ bir jeodeziktir yani $\kappa_g(s) \equiv 0$ 'dır. γ isophotik eğri olduğu için γ 'nın temel normali sabit yönde sabit bir açı oluşturur. Böyle bir eğri eğik helis olarak adlandırılır (Izumiya ve Takeuchi, 2004). γ bir eğrilik çizgisi ise $\bar{\delta}_o(s) = \pm\kappa_g(s)/\kappa_n(s)$ şeklindedir. $(\kappa_g\kappa_n' - \kappa_g'\kappa_n)(s) \equiv 0$ 'dır. Diğer yandan $\tau(s)$ uzay eğrisi olarak γ 'nın torsiyonudur ve

$$\tau(s) = \tau_g(s) + \frac{\kappa_g(s)\kappa_n'(s) - \kappa_g'(s)\kappa_n(s)}{\kappa_g^2(s) + \kappa_n^2(s)} \quad (4.4.4)$$

biçiminde gösterilir. Bu nedenle $\tau_g(s) \equiv 0$, $\tau(s) \equiv 0$ olduğundan γ bir düzlem eğrisidir (Doğan ve Yaylı, 2015). O halde aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.4.2. $(\kappa_n(s), \tau_g(s)) \neq (0, 0)$ ve $\gamma: I \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir isophotik eğri olmak üzere aşağıdaki koşullar vardır:

- (1) γ , M yüzeyi üzerinde bir jeodeziktir gerek ve yeter şart γ eğik bir helistir
- (2) γ , M yüzeyi üzerinde bir asimtotik eğridir gerek ve yeter şart γ genelleştirilmiş bir helistir

(3) γ , M yüzeyi üzerinde bir eğrilik çizgisidir gerek ve yeter şart γ bir düzlem eğrisidir (Doğan ve Yaylı, 2015).



5. LORENTZ-MINKOWSKI 3-BOYUTLU UZAYDA EĞRİLERİN SPACELIKE YÜZEYLER ÜZERİNDE LORENTZIAN-DARBOUX GÖRÜNTÜLERİ

$\mathbb{R}^3$, 3-boyutlu bir vektör uzayı olsun. Herhangi $x = (x_0, x_1, x_2), y = (y_0, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3$ için x ile y nin pseudo-skalar çarpımı $\langle x, y \rangle = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2$ ile tanımlanır. $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ile gösterilen uzay Lorentz-Minkowski 3-boyutlu uzayı olarak adlandırılır. Bunun yerine $\mathbb{R}_1^3$ kullanılır. $x \in \mathbb{R}_1^3$ sıfırdan farklı vektör olmak üzere $\langle x, x \rangle > 0, \langle x, x \rangle < 0$ ve $\langle x, x \rangle = 0$ olduğunda x sırasıyla spacelike, timelike ve lightlike olarak tanımlanır. $x \in \mathbb{R}_1^3$ vektörünün normu $\|x\| = \sqrt{|\langle x, x \rangle|}$ şeklindedir. $v \in \mathbb{R}_1^3$ sıfırdan farklı bir vektör ve $c \in \mathbb{R}$ gerçekte sayı olmak üzere pseudo-normal v ile bir düzlem,

$$P(v, c) = \{x \in \mathbb{R}_1^3 \mid \langle x, v \rangle = c\} \quad (5.1)$$

biçiminde tanımlanır. $P(v, c)$ spacelike düzlem, timelike düzlem ya da lightlike düzlem ise v timelike, spacelike ya da lightlike olarak tanımlanır. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında 3 pseudo-küre şu şekilde verilir;

Hiperbolik düzlem

$$H^2(-1) = \{x \in \mathbb{R}_1^3 \mid \langle x, x \rangle = -1\} \quad (5.2)$$

de Sitter uzayı

$$S_1^2 = \{x \in \mathbb{R}_1^3 \mid \langle x, x \rangle = 1\} \quad (5.3)$$

ve Lightkoni

$$LC^* = \{x \in \mathbb{R}_1^3 \setminus \{0\} \mid \langle x, x \rangle = 0\} \quad (5.4)$$

dır (Ito ve Izumiya, 2016).

$H_0^2(-r)$, spacelike bir yüzeydir. Gerçekten bu yüzey için yerel parametrizasyon,

$$\theta_H \in \mathbb{R}, 0 \leq \phi \leq 2\pi, r \text{ sabit}$$

$$x(\theta_H, \phi) = (r \sinh \theta_H \cos \phi, r \sinh \theta_H \sin \phi, r \cosh \theta_H) \quad (5.5)$$

eşitliği ile verilir. Buna göre,

$$\begin{aligned} x_{\theta_H} &= (r \cosh \theta_H \cos \phi, r \cosh \theta_H \sin \phi, r \sinh \theta_H) \\ x_\phi &= (-r \sinh \theta_H \sin \phi, r \sinh \theta_H \cos \phi, 0) \\ x_{\theta_H} \times x_\phi &= r \sinh \theta_H (r \sinh \theta_H \cos \phi, r \sinh \theta_H \sin \phi, r \cosh \theta_H) \end{aligned} \quad (5.6)$$

ve

$$\langle x_{\theta_H} \times x_\phi, x_{\theta_H} \times x_\phi \rangle = -r^4 \sinh^2 \theta_H < 0 \quad (5.7)$$

bulunur. O halde, $N = \frac{x_{\theta_H} \times x_\phi}{|x_{\theta_H} \times x_\phi|}$ birim normal vektör alanı timelike, dolayısıyla

$H_0^2(-1)$ spacelike bir yüzeydir.

$S_1^2(-r)$ timelike bir yüzeydir. Gerçekten bu yüzeyin bir yerel parametrizasyonu da,

$$\theta_L \in \mathbb{R}, 0 \leq \phi \leq 2\pi, r \text{ sabit}$$

$$x(\theta_L, \phi) = (r \cosh \theta_L \cos \phi, r \cosh \theta_L \sin \phi, r \sinh \theta_L) \quad (5.8)$$

eşitliği ile verilir. Buna göre,

$$\begin{aligned} x_{\theta_L} &= (r \sinh \theta_L \cos \phi, r \sinh \theta_L \sin \phi, r \cosh \theta_L) \\ x_\phi &= (-r \cosh \theta_L \sin \phi, r \cosh \theta_L \cos \phi, 0) \\ x_{\theta_L} \times x_\phi &= -r \cosh \theta_L (r \cosh \theta_L \cos \phi, r \cosh \theta_L \sin \phi, r \sinh \theta_L) \end{aligned} \quad (5.9)$$

ve

$$\langle x_{\theta_L} \times x_\phi, x_{\theta_L} \times x_\phi \rangle = r^4 \cosh^2 \theta_L < 0 \quad (5.10)$$

bulunur. O halde, $N = \frac{x_{\theta_L} \times x_\phi}{|x_{\theta_L} \times x_\phi|}$ vektör alanı spacelike olup, $S_1^2(-r)$ timelike bir yüzeydir.

LC^* lightlike bir yüzeydir. Bu yüzeyin yerel parametrizasyonu,

$$x(\phi, v) = (v \cos \phi, v \sin \phi, v); \quad v \in \mathbb{R}; \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi \quad (5.11)$$

eşitliği ile verilir. Buna göre,

$$\begin{aligned} x_\phi &= (-v \sin \phi, v \cos \phi, 0) \\ x_v &= (\cos \phi, \sin \phi, 1) \\ x_\phi \times x_v &= (v \cos \phi, v \sin \phi, v) \end{aligned} \quad (5.12)$$

ve

$$\langle x_\phi \times x_v, x_\phi \times x_v \rangle = 0 \quad (5.13)$$

bulunur. O halde, $N = x_\phi \times x_v$ lightlike vektör alanı ve dolayısıyla LC^* lightlike bir yüzeydir (Uğurlu ve Gürdal, 2015).

Sabit eğrilikler ile pseudo-küreler üzerinde eğriler tanımlanabilir. $H^2(-1)$ 'nin bir düzlemle kesişimi tarafından tanımlanan eğriye hiperbolik doğru denir. Eğer orjin boyunca bir düzlemle kesişiyorsa timelike düzlem denir. de Sitter uzayında S_1^2 üzerindeki bir eğri orjin boyunca spacelike düzlemle kesişirse jeodezik pseudo-küre olarak tanımlanır. Üstelik, S_1^2 üzerindeki bir eğri orjinden uzakta lightlike düzlemle kesişirse de sitter-horocycle olarak tanımlanır. $\mathbb{R}^3$ 'de $a = (a_0, a_1, a_2)$, $b = (b_0, b_1, b_2)$ ve $e = (e_0, e_1, e_2)$ standart baz olmak üzere,

$$a \wedge b = \begin{vmatrix} -e_0 & e_1 & e_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} \quad (5.14)$$

şeklinde tanımlanır (Ito ve Izumiya, 2016).

Spacelike yüzeylerde eğrilerin bazı temel kavramları verilecektir. $U \subset \mathbb{R}^2$ açık küme olmak üzere $X : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ spacelike gömme olsun. $M = X(U)$ olacak şekilde X gömmesiyle M ve N belirlenebilir. Burada $T_p M$ teğet uzayı herhangi $p = X(u)$ 'daki spacelike vektörlerden oluştuğu takdirde X spacelike bir gömme olur. $\bar{\gamma} : I \rightarrow U$ düzenli

bir eğri olsun. $\gamma(s) = X(\bar{\gamma}(s))$ tarafından $\gamma: I \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ eğrisini tanımlanabilir. γ , M spacelike yüzeyi üzerinde bir eğridir. γ spacelike eğrisi s yay-uzunluğu tarafından yeniden parametrelendirilebilir. $\gamma(s)$ 'nin spacelike birim teğet vektörü $t(s) = \gamma'(s)$ 'dir. X spacelike gömme olduğundan $M = X(U)$ boyunca $p = X(u)$ için timelike birim normal vektör alanı n ,

$$n(p) = \frac{X_{u_1}(u) \wedge X_{u_2}(u)}{\|X_{u_1}(u) \wedge X_{u_2}(u)\|} \quad (5.15)$$

şeklinde tanımlanır. $\langle n, e_0 \rangle < 0$ ise n yönlendirilecektir. n yönlendirildiğinde M 'nin yönü seçilecektir. γ boyunca timelike birim normal vektör alanı n_γ 'dır. $n_\gamma(s) = n \circ \gamma(s)$ olarak tanımlanır. Bu nedenle $b(s) = t(s) \wedge n_\gamma(s)$ ile tanımlanan spacelike birim normal vektör alanı $b(s) \in N_p(M)$ oluşturulabilir. O halde $\langle n_\gamma(s), n_\gamma(s) \rangle = -1$, $\langle n_\gamma, b \rangle = 0$, $\langle b, b \rangle = 1$. γ boyunca Lorentzian Darboux çatısı olarak adlandırılan $\{t(s), n_\gamma(s), b(s)\}$ pseudo-ortonormal çatısı vardır (Ito ve Izumiya, 2016). Böylece aşağıdaki Frenet-Serret formülleri vardır;

$t' = at + bn_\gamma + cb$ eşitliğinin her iki yanının t ile iç çarpımı yapılarak,

$$\begin{aligned} \langle t, t' \rangle &= a\langle t, t \rangle + b\langle n_\gamma, t \rangle + c\langle b, t \rangle \\ \langle t', t \rangle &= a \end{aligned} \quad (5.16)$$

ve

$$\langle t, t \rangle = 1 \Rightarrow \langle t', t \rangle + \langle t, t' \rangle = 0 \quad (5.16a)$$

$$2\langle t, t' \rangle = 0 \Rightarrow \langle t, t' \rangle = 0$$

$a = 0$ bulunur.

$t' = at + bn_\gamma + cb$ eşitliğinin her iki yanının n_γ ile iç çarpımı yapılarak,

$$\begin{aligned} \langle t', n_\gamma \rangle &= a\langle t, n_\gamma \rangle + b\langle n_\gamma, n_\gamma \rangle + c\langle b, n_\gamma \rangle \\ \langle t', n_\gamma \rangle &= b \end{aligned} \quad (5.17)$$

ve

$$t' = \gamma'' \Rightarrow \langle \gamma'', n_\gamma \rangle = \kappa_n \quad (5.17a)$$

bulunur.

$t' = at + bn_\gamma + cb$ eşitliğinin her iki yanı b ile iç çarpım yapılarak,

$$\langle t', b \rangle = a\langle t, b \rangle + b\langle n_\gamma, b \rangle + c\langle b, b \rangle \quad (5.18)$$

$$\langle t', b \rangle = c$$

ve

$$t' = \gamma'' \Rightarrow \langle \gamma'', b \rangle = \kappa_g \quad (5.18a)$$

bulunur. O halde $t' = \kappa_n n_\gamma + \kappa_g b$ bulunur ve

$$t'(s) = \kappa_n(s)n_\gamma(s) + \kappa_g(s)b(s) \quad (5.19)$$

elde edilir.

$n'_\gamma = dt + en_\gamma + fb$ eşitliğinin her iki yanının t ile iç çarpımı yapılarak,

$$\langle n'_\gamma, t \rangle = d\langle t, t \rangle + e\langle n_\gamma, t \rangle + f\langle b, t \rangle \quad (5.20)$$

$$\langle n'_\gamma, t \rangle = d$$

ve

$$\langle n_\gamma, t \rangle = 0 \Rightarrow \langle n'_\gamma, t \rangle + \langle t', n_\gamma \rangle = 0 \quad (5.20a)$$

$$\langle n'_\gamma, t \rangle = -\langle t', n_\gamma \rangle = -\langle \gamma'', n_\gamma \rangle = \kappa_n$$

bulunur.

$n'_\gamma = dt + en_\gamma + fb$ eşitliğinin her iki yanının n_γ ile iç çarpımı yapılarak,

$$\langle n'_\gamma, n_\gamma \rangle = d\langle t, n_\gamma \rangle + e\langle n_\gamma, n_\gamma \rangle + f\langle b, n_\gamma \rangle \quad (5.21)$$

$$\langle n'_\gamma, n_\gamma \rangle = e$$

ve

$$\langle n_\gamma, n_\gamma \rangle = 1 \Rightarrow \langle n'_\gamma, n_\gamma \rangle + \langle n_\gamma, n'_\gamma \rangle = 0 \quad (5.21a)$$

$$2\langle n'_\gamma, n_\gamma \rangle = 0 \Rightarrow \langle n'_\gamma, n_\gamma \rangle = 0$$

$e = 0$ bulunur.

$n'_\gamma = dt + en_\gamma + fb$ eşitliğinin her iki yanının b ile iç çarpımı yapılarak,

$$\langle n'_\gamma, b \rangle = d\langle t, b \rangle + e\langle n_\gamma, b \rangle + f\langle b, b \rangle \quad (5.22)$$

$$\langle n'_\gamma, b \rangle = f$$

ve

$$\langle n'_\gamma, b \rangle + \langle b', n_\gamma \rangle = 0 \quad (5.22a)$$

$$\langle n'_\gamma, b \rangle = -\langle b', n_\gamma \rangle = \tau_g$$

O halde, $n'_\gamma = \kappa_n t + \tau_g b$ bulunur ve

$$n'_\gamma(s) = \kappa_n(s)t(s) + \tau_g(s)b(s) \quad (5.23)$$

elde edilir.

$b' = gt + hn_\gamma + mb$ eşitliğinin her iki yanının t ile iç çarpımı yapılarak,

$$\langle b', t \rangle = g\langle t, t \rangle + h\langle n_\gamma, t \rangle + m\langle b, t \rangle \quad (5.24)$$

$$\langle b', t \rangle = g$$

ve

$$\langle b', t \rangle + \langle t', b \rangle = 0 \quad (5.24a)$$

$$\langle b', t \rangle = -\langle t', b \rangle = -\langle \gamma', b \rangle = -\kappa_g$$

bulunur.

$b' = gt + hn_\gamma + mb$ eşitliğinin her iki yanının n_γ ile iç çarpımı yapılarak,

$$\begin{aligned}\langle b', n_\gamma \rangle &= g\langle t, n_\gamma \rangle + h\langle n_\gamma, n_\gamma \rangle + m\langle b, n_\gamma \rangle \\ \langle b', n_\gamma \rangle &= h = \tau_g\end{aligned}\tag{5.25}$$

bulunur.

$b' = gt + hn_\gamma + mb$ eşitliğinin her iki yanının b ile iç çarpımı yapılarak,

$$\begin{aligned}\langle b', b \rangle &= g\langle t, b \rangle + h\langle n_\gamma, b \rangle + m\langle b, b \rangle \\ \langle b', b \rangle &= m\end{aligned}\tag{5.26}$$

ve

$$\langle b', b \rangle + \langle b, b' \rangle = 0\tag{5.26a}$$

$$2\langle b', b \rangle = 0 \Rightarrow \langle b', b \rangle = 0$$

$m = 0$ bulunur. O halde $b' = -\kappa_g t + \tau_g n_\gamma$ bulunur ve

$$b'(s) = -\kappa_g(s)t(s) + \tau_g(s)n_\gamma(s)\tag{5.27}$$

elde edilir (Sabuncuoğlu, 2010).

$\kappa_n(s) = -\langle t'(s), n_\gamma(s) \rangle$, $\kappa_g(s) = \langle t'(s), b(s) \rangle$ ve $\tau_g(s) = -\langle b'(s), n_\gamma(s) \rangle$ 'dir. γ 'nın geometrik karakterizasyonları κ_g , κ_n ve τ_g invaryantlarıdır. γ bir jeodezik eğri ise, eğrilik vektörü $t'(s)$ yüzeyin pseudo-normal bileşenine sahiptir γ bir asimtotik eğri ise, $t'(s)$ yüzeyin teğet bileşenine sahiptir. γ temel eğri ise $n'_\gamma(s)$, γ 'nın teğet yönüne eşittir (Ito ve Izumiya, 2016).

γ jeodezik eğri ise $\kappa_g \equiv 0$ olmalıdır. Buradan,

$$\begin{aligned}
\gamma'' &= \lambda n \\
\kappa_g &= \frac{1}{v^2} \langle \gamma'', b \rangle = \frac{1}{v^2} \langle \lambda n, b \rangle = \frac{\lambda}{v^2} \langle n, b \rangle = 0 \\
\kappa_g &= 0
\end{aligned} \tag{5.28}$$

elde edilir (Sabuncuoğlu, 2010).

γ asimtotik eğri ise $\kappa_n \equiv 0$ olmalıdır. Buradan,

$$\begin{aligned}
\kappa_n(s) &= \langle t'(s), n_\gamma(s) \rangle \\
\kappa_n(s) &= \langle \gamma''(s), n_\gamma(s) \rangle
\end{aligned} \tag{5.29}$$

ve $\gamma''(s) = \lambda n$ olduğundan yerine yazılarak,

$$\begin{aligned}
\kappa_n(s) &= \langle \lambda n, n_\gamma(s) \rangle \\
\kappa_n(s) &= \lambda \langle n, n_\gamma(s) \rangle \\
\kappa_n(s) &= 0
\end{aligned}$$

elde edilir (Sabuncuoğlu, 2010).

γ temel eğri ise $\tau_g \equiv 0$ olmalıdır.

γ 'nın temel eğri olması için $\{\gamma', n'_\gamma\}$ kümesi lineer bağımlı olmalıdır. γ düzenli bir eğri olduğundan her $t \in I$ için $\gamma'(t) \neq 0$ 'dır. $n'_\gamma = \lambda \gamma' = v(-\kappa_n t - \tau_g b)$ elde edilir. $\gamma' = vt$ olduğundan $\lambda t = -\kappa_n t - \tau_g b$ ve buradan $(\lambda + \kappa_n)t + \tau_g b = 0$ 'dır. t ile b lineer bağımsız olduğundan $\lambda + \kappa_n = 0$, $\tau_g = 0$ elde edilir (Sabuncuoğlu, 2010).

γ boyunca 5 pseudo-küresel Lorentzian-Darboux görüntüsü şu şekilde tanımlanır;

$D_r(s)$ Darboux vektörü olmak üzere,

$$\begin{aligned}
D_r(s) &= \tau_g(s)t(s) - \kappa_g(s)n_\gamma(s) \\
\|D_r(s)\| &= \sqrt{\langle D_r(s), D_r(s) \rangle} \\
\|D_r(s)\| &= \sqrt{\langle \tau_g(s)t(s) - \kappa_g(s)n_\gamma(s), \tau_g(s)t(s) - \kappa_g(s)n_\gamma(s) \rangle} \\
\|D_r(s)\| &= \sqrt{\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2}
\end{aligned} \tag{5.30}$$

ve buradan, $\bar{D}_r(s) = \frac{D_r(s)}{\|D_r(s)\|} = \frac{\tau_g(s)}{\sqrt{\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2}}t(s) - \frac{\kappa_g(s)}{\sqrt{\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2}}n_\gamma(s)$ elde edilir. O halde,

$$(A) \quad \bar{D}_r^T : I \rightarrow H^2(-1); \bar{D}_r^T(s) = \frac{\tau_g(s)t(s) - \kappa_g(s)n_\gamma(s)}{\sqrt{\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2}}, \kappa_g(s)^2 > \tau_g(s)^2$$

$$(B) \quad \bar{D}_r^S : I \rightarrow S_1^2; \bar{D}_r^S(s) = \frac{\tau_g(s)t(s) - \kappa_g(s)n_\gamma(s)}{\sqrt{\tau_g(s)^2 - \kappa_g(s)^2}}, \tau_g(s)^2 > \kappa_g(s)^2$$

$$(C) \quad \bar{D}_r^L : I \rightarrow LC^*; \bar{D}_r^L(s) = \frac{\tau_g(s)t(s) - \kappa_g(s)n_\gamma(s)}{\sqrt{\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2}} + b(s), \kappa_g(s)^2 > \tau_g(s)^2$$

elde edilir (Ito ve Izumiya, 2016).

$D_o(s)$ Darboux vektörü olmak üzere,

$$\begin{aligned} D_o(s) &= \tau_g(s)t(s) - \kappa_n(s)b(s) \\ \|D_o(s)\| &= \sqrt{\langle D_o(s), D_o(s) \rangle} \\ \|D_o(s)\| &= \sqrt{\langle \tau_g(s)t(s) - \kappa_n(s)b(s), \tau_g(s)t(s) - \kappa_n(s)b(s) \rangle} \\ \|D_o(s)\| &= \sqrt{\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2} \end{aligned} \tag{5.31}$$

ve buradan, $\bar{D}_o(s) = \frac{D_o(s)}{\|D_o(s)\|} = \frac{\tau_g(s)}{\sqrt{\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2}}t(s) - \frac{\kappa_n(s)}{\sqrt{\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2}}b(s)$, elde edilir. O halde,

$$(D) \quad \bar{D}_o^S : I \rightarrow S_1^2; \bar{D}_o^S(s) = \frac{\tau_g(s)t(s) - \kappa_n(s)b(s)}{\sqrt{\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2}}, (\kappa_n(s), \tau_g(s)) \neq (0, 0),$$

$$(E) \quad \bar{D}_o^L : I \rightarrow LC^*; \bar{D}_o^L(s) = \frac{\tau_g(s)t(s) - \kappa_n(s)b(s)}{\sqrt{\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2}} + n_\gamma(s), (\kappa_n(s), \tau_g(s)) \neq (0, 0).$$

elde edilir (Ito ve Izumiya, 2016).

(A) pseudo-küresel rektifiyen timelike Darboux görüntüsü, (B) pseudo-küresel rektifiyen spacelike Darboux görüntüsü, (C) pseudo-küresel rektifiyen lightlike Darboux görüntüsü, (D) pseudo-küresel oskulator spacelike Darboux görüntüsü, (E) pseudo-küresel oskulator lightlike Darboux görüntüsü, olarak tanımlanmıştır. Ayrıca, oskulator timelike Darboux görüntüsünün tanımlanacağı belirtilir (Ito ve Izumiya, 2016).

Uyarı 5.0.3. γ boyunca ekstra 3 pseudo-küresel Darboux görüntüsü tanımlanabilir. $D_n(s)$ Darboux vektör olmak üzere,

$$\begin{aligned} D_n(s) &= \kappa_g(s)n_\gamma(s) + \kappa_n(s)b(s) \\ \|D_n(s)\| &= \sqrt{\langle D_n(s), D_n(s) \rangle} \\ \|D_n(s)\| &= \sqrt{\langle \kappa_g(s)n_\gamma(s) + \kappa_n(s)b(s), \kappa_g(s)n_\gamma(s) + \kappa_n(s)b(s) \rangle} \\ \|D_n(s)\| &= \sqrt{\kappa_g(s)^2 - \kappa_n(s)^2} \end{aligned} \quad (5.32)$$

ve buradan $\bar{D}_n(s) = \frac{D_n(s)}{\|D_n(s)\|} = \frac{\kappa_g(s)}{\sqrt{\kappa_g(s)^2 - \kappa_n(s)^2}}n_\gamma(s) + \frac{\kappa_n(s)}{\sqrt{\kappa_g(s)^2 - \kappa_n(s)^2}}b(s)$ elde edilir. O halde,

$$(F) \quad \bar{D}_n^T : I \rightarrow H^2(-1); \bar{D}_n^T(s) = \frac{\kappa_g(s)n_\gamma(s) + \kappa_n(s)b(s)}{\sqrt{\kappa_g(s)^2 - \kappa_n(s)^2}}, \kappa_g(s)^2 > \kappa_n(s)^2$$

$$(G) \quad \bar{D}_n^S : I \rightarrow S_1^2; \bar{D}_n^S(s) = \frac{\kappa_g(s)n_\gamma(s) + \kappa_n(s)b(s)}{\sqrt{\kappa_n(s)^2 - \kappa_g(s)^2}}, \kappa_n(s)^2 > \kappa_g(s)^2$$

$$(H) \quad \bar{D}_n^L : I \rightarrow LC^*; \bar{D}_n^L(s) = \frac{k_g(s)n_\gamma(s) + k_n(s)b(s)}{\sqrt{\kappa_g(s)^2 - \kappa_n(s)^2}} + t(s), \kappa_g(s)^2 > \kappa_n(s)^2$$

elde edilir (Ito ve Izumiya, 2016). (F) ve (G)'nin tekillikleri ve geometrik anlamları araştırıldı. Benzer sonuçlar (H) için elde edilebilir (Sato, 2012).

5.1. Pseudo- Küresel Lorentzian Darboux Görüntülerinin Tekillikği

Bu bölümde pseudo-küresel Lorentzian Darboux görüntülerinin tekilliklerinin bir sınıflandırma sonucu sunulacaktır. (M, γ) 'nin 5 invaryantı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\bar{D}_r(s) = \frac{\tau_g(s)t(s) - \kappa_g(s)n_\gamma(s)}{\sqrt{\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2}} \text{ olduğundan } \bar{D}_r(s) \text{'nin türevi alınarak,} \quad (5.1.1)$$

$$\begin{aligned}
(\overline{D}'_r)(s) &= \frac{(\tau'_g(s)t(s) + \tau_g(s)t'(s) - \kappa'_g(s)n_\gamma(s))}{\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2} \\
&\quad - \frac{\kappa_g(s)n'_\gamma(s)(\sqrt{\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2})}{\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2} \\
&\quad - \frac{\left(\frac{2\kappa_g(s)\kappa'_g(s) - 2\tau_g(s)\tau'_g(s)}{2\sqrt{\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2}} \right) (\tau_g(s)t(s) - \kappa_g(s)n_\gamma(s))}{\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2}
\end{aligned} \tag{5.1.2}$$

$$\begin{aligned}
\overline{D}'_r(s) &= \frac{\begin{aligned} &\tau'_g(s)t(s)(\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2) \\ &+ \tau_g(s)t'(s)(\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2) \\ &- \kappa'_g(s)n_\gamma(s)(\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2) \\ &- \kappa_g(s)n'_\gamma(s)(\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2) \end{aligned}}{(\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2)3/2} \\
&\quad - \frac{\begin{aligned} &(\kappa_g(s)\kappa'_g(s)\tau_g(s)t(s) - \kappa_g(s)^2\kappa'_g(s)n_\gamma(s)) \\ &- \tau_g(s)^2\tau'_g(s)t(s) + \tau_g(s)\tau'_g(s)\kappa_g(s)n_\gamma(s) \end{aligned}}{(\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2)3/2}
\end{aligned} \tag{5.1.3}$$

elde edilir. Burada, $\frac{b'(s)}{\|b'(s)\|} = \frac{-\kappa_g(s)t(s) + \tau_g(s)n_\gamma(s)}{\sqrt{\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2}}$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
-\delta_r(s) &= \langle \overline{D}'_r(s), T_b(s) \rangle = \langle \begin{aligned} &\tau'_g(s)t(s)(\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2) \\ &+ \tau_g(s)t'(s)(\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2) \\ &- \kappa'_g(s)n_\gamma(s)(\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2) \\ &- \kappa_g(s)n'_\gamma(s)(\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2) \end{aligned} \\
&\quad - \frac{(\kappa_g(s)\kappa'_g(s)\tau_g(s)t(s) - \kappa_g(s)^2\kappa'_g(s)n_\gamma(s))}{(\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2)3/2} \\
&\quad - \tau_g(s)^2\tau'_g(s)t(s) + \tau_g(s)\tau'_g(s)\kappa_g(s)n_\gamma(s) \\
&\quad + \frac{\tau_g(s)\tau'_g(s)\kappa_g(s)n_\gamma(s)}{(\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2)3/2}, \frac{-\kappa_g(s)t(s) + \tau_g(s)n_\gamma(s)}{\sqrt{\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2}} \rangle
\end{aligned} \tag{5.1.4}$$

Buradan gerekli hesaplamalar yapılarak,

$$(A) \quad \delta_r^T(s) = \kappa_n(s) - \frac{\kappa_g(s)\tau'_g(s) - \kappa'_g(s)\tau_g(s)}{\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2}, \quad \kappa_g(s)^2 > \tau_g(s)^2,$$

$$(B) \quad \delta_r^S(s) = \kappa_n(s) + \frac{\kappa_g(s)\tau'_g(s) - \kappa'_g(s)\tau_g(s)}{\tau_g(s)^2 - \kappa_g(s)^2}, \quad \tau_g(s)^2 > \kappa_g(s)^2,$$

$$(C) \quad \delta_r^L(s) = \kappa_n(s) - \frac{\kappa_g(s)\tau'_g(s) - \kappa'_g(s)\tau_g(s)}{\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2} + \sqrt{\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2}, \quad \kappa_g(s)^2 > \tau_g(s)^2,$$

elde edilir (Ito ve Izumiya, 2016).

$$\bar{D}_o(s) = \frac{\tau_g(s)t(s) - \kappa_n(s)b(s)}{\sqrt{\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2}} \text{ olmak üzere } \bar{D}_o(s) \text{'nin türevi alınarak,} \quad (5.1.5)$$

$$\begin{aligned} \bar{D}_o'(s) = & \frac{\tau'_g(s)t(s) + \tau_g(s)t'(s) - \kappa'_n(s)b(s)}{\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2} \\ & - \frac{\kappa_n(s)b'(s)(\sqrt{\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2})}{\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2} \\ & - \frac{\left(\frac{2\kappa_g(s)\kappa'_g(s) - 2\tau_g(s)\tau'_g(s)}{2(\sqrt{\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2})} \right) (\tau_g(s)t(s) - \kappa_n(s)b(s))}{\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2} \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

$$\begin{aligned} \bar{D}_o'(s) = & \frac{\tau'_g(s)t(s)(\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2) + \tau_g(s)t'(s)(\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2) - \kappa'_n(s)b(s)(\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2) - \kappa_n(s)b'(s)(\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2)}{(\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2)3/2} \\ & - \frac{(\kappa_g(s)\kappa'_g(s)\tau_g(s)t(s) - \kappa_g(s)\kappa'_g(s)\kappa_n(s)b(s) - \tau_g^2(s)\tau'_g(s)t(s) + \tau_g(s)\tau'_g(s)\kappa_n(s)b(s))}{(\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2)3/2} \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

elde edilir. Burada, $\frac{n'_\gamma(s)}{\|n'_\gamma(s)\|} = \frac{\kappa_n(s)t(s) + \tau_g(s)b(s)}{\sqrt{\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2}}$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
& \langle \tau'_g(s)t(s)(\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2) \\
& + \tau_g(s)t'(s)(\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2) \\
& - \kappa'_n(s)b(s)(\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2) \\
& - \kappa_n(s)b'(s)(\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2) \\
& - (\kappa_g(s)\kappa'_g(s)\tau_g(s)t(s) \\
& - \kappa_g(s)\kappa'_g(s)\kappa_n(s)b(s) \\
& - \tau_g(s)^2\tau'_g(s)t(s) \quad \kappa_n(s)t(s) \\
& + \tau_g(s)\tau'_g(s)\kappa_n(s)b(s) \quad + \tau_g(s)b(s) \rangle \\
-\delta_o(s) = \langle \bar{D}'_o(s), T_{n_\gamma}(s) \rangle = & \left\langle \frac{(\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2)3/2}{(\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2)3/2}, \frac{\sqrt{\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2}}{\sqrt{\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2}} \right\rangle
\end{aligned} \tag{5.1.8}$$

buradan gerekli hesaplamalar yapılarak,

$$(D) \quad \delta_o^S(s) = \kappa_g(s) + \frac{\kappa_n(s)\tau'_g(s) - \kappa'_n(s)\tau_g(s)}{\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2}, \quad (\kappa_n(s), \tau_g(s)) \neq (0, 0),$$

$$(E) \quad \delta_o^L(s) = \kappa_g(s) + \frac{\kappa_n(s)\tau'_g(s) - \kappa'_n(s)\tau_g(s)}{\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2} + \sqrt{\kappa_n(s)^2 + \tau_g(s)^2}, \quad (\kappa_n(s), \tau_g(s)) \neq (0, 0),$$

elde edilir. Pseudo-küresel Lorentzian Darboux görüntülerinin tekil noktaları yukarıdaki invaryantlar kullanarak sınıflandırılabilir (Ito ve Izumiya, 2016).

Sırasıyla t' , n'_γ , b' normalizasyonları olarak tanımlanan 3 vektör alanı şu şekilde verilir:

$$\begin{aligned}
T_t(s) &= \frac{\kappa_n(s)n_\gamma(s) + \kappa_g(s)b(s)}{\sqrt{\kappa_g(s)^2 - \kappa_n(s)^2}}, \\
T_{n_\gamma}(s) &= \frac{\kappa_n(s)t(s) + \tau_g(s)b(s)}{\sqrt{\kappa_g(s)^2 + \tau_g(s)^2}}, \\
T_b(s) &= \frac{-\kappa_g(s)t(s) + \tau_g(s)n_\gamma(s)}{\sqrt{\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2}}
\end{aligned} \tag{5.1.9}$$

(Ito ve Izumiya, 2016).

Teorem 5.1.1. $M \subset \mathbb{R}_1^3$ yüzeyinde $\gamma : I \rightarrow M$ bir birim hızlı bir eğri olsun öyle ki $\|t'(s)\| \neq 0$ ve $\|b'(s)\| \neq 0$ 'dır.

(A) $\kappa_g^2(s_0) > \tau_g^2(s_0)$ olmak üzere o halde aşağıdaki verilenler vardır:

(1) $\overline{D}_r^T$ rektifiyen timelike Darboux görüntüsü, s_0 'da tekil değildir gerek ve yeter şart $\delta_r^T(s_0) \neq 0$ 'dır.

(2) $\overline{D}_r^T$ rektifiyen timelike Darboux görüntüsü, s_0 'daki dönüm noktası C ile yerel diffeomorfiktir gerek ve yeter şart $\delta_r^T(s_0) = 0$ ve $(\delta_r^T)'(s_0) \neq 0$ 'dır.

(B) $\tau_g^2(s_0) > \kappa_g^2(s_0)$ olmak üzere o halde aşağıdaki verilenler vardır:

(1) $\overline{D}_r^S$ rektifiyen spacelike Darboux görüntüsü, s_0 'da tekil değildir gerek ve yeter şart $\delta_r^S(s_0) \neq 0$ 'dır.

(2) $\overline{D}_r^S$ rektifiyen spacelike Darboux görüntüsü, s_0 'daki dönüm noktası C ile yerel diffeomorfiktir gerek ve yeter şart $\delta_r^S(s_0) = 0$ ve $(\delta_r^S)'(s_0) \neq 0$ 'dır.

(C) $\kappa_g(s_0)^2 > \tau_g(s_0)^2$ olmak üzere o halde aşağıdaki verilenler vardır:

(1) $\overline{D}_r^L$ rektifiyen lightlike Darboux görüntüsü, s_0 'da tekil değildir gerek ve yeter şart $\delta_r^L(s_0) \neq 0$ 'dır.

(2) $\overline{D}_r^L$ rektifiyen lightlike Darboux görüntüsü, s_0 'daki dönüm noktası C ile yerel diffeomorfiktir gerek ve yeter şart $\delta_r^L(s_0) = 0$ ve $(\delta_r^L)'(s_0) \neq 0$ 'dır.

(D) $(\kappa_n(s), \tau_g(s)) \neq (0, 0)$ olmak üzere o halde aşağıdaki verilenler vardır:

(1) $\overline{D}_o^S$ oskülatör spacelike Darboux görüntüsü, s_0 'da tekil değildir gerek ve yeter şart $\delta_o^S(s_0) \neq 0$ 'dır.

(2) $\overline{D}_o^S$ oskülatör spacelike Darboux görüntüsü, s_0 'daki dönüm noktası C ile yerel diffeomorfiktir gerek ve yeter şart $\delta_o^S(s_0) = 0$ ve $(\delta_o^S)'(s_0) \neq 0$ 'dır.

(E) $(\kappa_n(s), \tau_g(s)) \neq (0, 0)$ olmak üzere o halde aşağıdaki verilenler vardır:

(1) $\overline{D}_o^L$ oskülatör lightlike Darboux görüntüsü, s_0 'da tekil değildir gerek ve yeter şart $\delta_o^L(s_0) \neq 0$ 'dır.

(2) $\overline{D}_o^L$ oskülatör lightlike Darboux görüntüsü, s_0 'daki dönüm noktası C ile yerel diffeomorfiktir gerek ve yeter şart $\delta_o^L(s_0) = 0$ ve $(\delta_o^L)'(s_0) \neq 0$ 'dır. Burada $C = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 = x_2^3\}$ semi-kübik paraboldür (Ito ve Izumiya, 2016).

İspat. Burada yalnızca (A) için ispat verilecektir. □

(A)(1) $\overline{D}_r^T(s)$ için basit hesaplamalarla $(\overline{D}_r^T(s))' = \delta_r^T(s)T_b(s)$ elde edilir. $\overline{D}_r^T(s)$, $s = s_0$ 'da tekil değildir gerek ve yeter şart $\delta_r^T(s_0) \neq 0$ 'dır.

(2) $h_{r,v}^T$, A_2 -tekilliğine sahiptir gerek ve yeter şart $\delta_r^T(s_0) = 0$, $(\delta_r^T)'(s_0) \neq 0$ ve $v = \overline{D}_r^T(s)$ olmalıdır. H_r^T , $h_{r,v}^T$ 'nin R -versal dağılımıdır. H_r^T 'nin diskriminant kümesi $\overline{D}_r^T$ 'nin görüntüsüdür. H_r^T 'nin diskriminantı C ile yerel olarak diffeomorfiktir (Ito ve Izumiya, 2016).

5.2. Legendrian Dualiteleri

Bu bölümde Legendrian alt manifoldlarının ve kontak manifoldların bazı özelliklerini gözden geçirilecektir. N , $2n + 1$ -boyutlu düzgün manifold ve K , N üzerinde teğet hiperdüzlem alanı olsun. Yerel olarak böyle bir alan 1-form α 'ların sıfır alanı olarak tanımlanır. N 'nin herhangi noktasında $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$ ise K teğet hiperdüzlem alanı non-dejeneredir. K , non-dejener bir hiperdüzlem alanıysa (N, K) 'nin bir kontak manifold olduğu söylenir. Bu durumda K bir kontak yapı olarak adlandırılır ve α kontak bir biçimdir. $\phi : N \rightarrow N'$ olmak üzere (N, K) ve (N', K') kontak manifoldları arasında diffeomorfizm olmalıdır. ϕ bir kontak diffeomorfizm ise $d\phi(k) = K'$ 'dir. $\phi : N \rightarrow N'$ olacak şekilde kontak diffeomorfizm varsa, (N, K) ve (N', K') diffeomorfik kontaklıdır. A alt manifold ve $i : L \subset N$ olmak üzere (N, K) kontak manifold ise herhangi $x \in L$ için $\dim L = n$ ve $di_x(T_x L) \subset K_{i(x)}$ olacak şekilde Legendrian olduğu söylenebilir. E total uzayı bir kontak yapısı ile döşenmiş ve Legendrian alt manifoldlarının liflerine sahipse, $\pi : E \rightarrow M$ Legendrian fibrasyonudur. Legendrian alt manifoldu için $i : L \subset E$, $\pi \circ i : L \rightarrow M$ Legendrian dönüşümüdür. Legendrian dönüşümünün $\pi \circ i$ görüntüsüne dalga kümesi denir ve $W(L)$ ile gösterilir. Herhangi $z \in E$ için z etrafında $\pi(x, p, y) = (x, y)$ olacak şekilde ve kontak yapısı 1-formla verilen yerel koordinat sistemi $(x, p, y) = (x_1, \dots, x_m, p_1, \dots, p_m, y)$ olduğu bilinmektedir. $\alpha = dy - \sum_{i=1}^m p_i dx_i$ (Arnol'd vd., 1986). Lorentz-Minkowski pseudo-kürelerinde spacelike hiperyüzeylerin çalışılması için temel dualite teorisi gösterilmiştir (Izumiya, 2009). Aşağıdaki 4 çift fibrasyon vardır:

(1) (a) $H^2(-1) \times S_1^2 \supset \Delta_1 = \{(v, \omega) \mid \langle v, \omega \rangle = 0\},$

(b) $\pi_{11} : \Delta_1 \rightarrow H^2(-1), \pi_{12} : \Delta_1 \rightarrow S_1^2,$

(c) $\theta_{11} : \langle dv, \omega \rangle|_{\Delta_1}, \theta_{12} = \langle v, d\omega \rangle|_{\Delta_1}.$

(2) (a) $H^2(-1) \times LC^* \supset \Delta_2 = \{(v, \omega) \mid \langle v, \omega \rangle = -1\},$

$$(b) \pi_{21} : \Delta_2 \rightarrow H^2(-1), \pi_{22} : \Delta_2 \rightarrow LC^*,$$

$$(c) \theta_{21} : \langle dv, \omega \rangle | \Delta_2, \theta_{22} = \langle v, d\omega \rangle | \Delta_2.$$

$$(3) (a) LC^* \times S_1^2 \supset \Delta_3 = \{(v, \omega) \mid \langle v, \omega \rangle = 1\},$$

$$(b) \pi_{31} : \Delta_3 \rightarrow LC^*, \pi_{32} : \Delta_3 \rightarrow S_1^2,$$

$$(c) \theta_{31} = \langle dv, \omega \rangle | \Delta_3, \theta_{32} = \langle v, d\omega \rangle | \Delta_3.$$

$$(4) (a) LC^* \times LC^* \supset \Delta_4 = \{(v, \omega) \mid \langle v, \omega \rangle = -2\},$$

$$(b) \pi_{41} : \Delta_4 \rightarrow LC^*, \pi_{42} : \Delta_4 \rightarrow LC^*,$$

$$(c) \theta_{41} : \langle dv, \omega \rangle | \Delta_4, \theta_{42} = \langle v, d\omega \rangle | \Delta_4$$

$$\pi_{i1}(v, \omega) = v, \pi_{i2}(v, \omega) = \omega, \langle dv, \omega \rangle = -\omega_0 dv_0 + \sum_{i=1}^2 \omega_i dv_i \text{ ve}$$

$\langle v, d\omega \rangle = -v_0 d\omega_0 + \sum_{i=1}^2 v_i d\omega_i$ 'dir. Temel dualite teoremi aşağıdaki teoremdir (Izumiya, 2009).

Teorem 5.2.1. Önceki paragrafta olduğu gibi aynı ifadelerle her (Δ_i, K_i) ($i = 1, 2, 3, 4$) kontak manifolddur ve π_{ij} ($j = 1, 2$) her ikisinde Legendrian fibrasyonudur. Bu kontak manifoldlar birbirleriyle diffeomorfik kontak halindedir. Aşağıdaki ekstra fibrasyon vardır:

$$(5) (a) S_1^2 \times S_1^2 \supset \Delta_5 = \{(v, \omega) \mid \langle v, \omega \rangle = 0\}$$

$$(b) \pi_{51} : \Delta_5 \rightarrow S_1^2, \pi_{52} : \Delta_5 \rightarrow S_1^2$$

$$(c) \theta_{51} = \langle dv, \omega \rangle | \Delta_5, \theta_{52} = \langle v, d\omega \rangle | \Delta_5$$

$\pi_{5j} : \Delta_5 \rightarrow S_1^2, j = 1, 2$ olmak üzere (Δ_5, K_5) kontak manifolddur. Herhangi (Δ_i, K_i) , $i = 1, 2, 3, 4$ diffeomorfik kontak olmayan Legendrian fibrasyonlarıdır. $i : L \rightarrow \Delta_i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ olacak şekilde bir Legendrian alt manifoldu verildiğinde $\pi_{i1}(i(L))$ ve $\pi_{i2}(i(L))$ ikilisinin Δ_i -dualinin tersi olduğunu söylenir (Chen ve Izumiya, 2009).

Teorem 5.2.2. $M \subset \mathbb{R}_1^3$ spacelike yüzeyi üzerinde $\gamma : I \rightarrow M$ bir birim hızlı eğri olsun öyle ki $\|t'(s)\| \neq 0$ ve $\|b'(s)\| \neq 0$ 'dır.

$$(1) (\kappa_n(s), \tau_g(s)) \neq (0, 0) \text{ ise } n_\gamma, \overline{D}_o^S, \text{nin } \Delta_1\text{-dualidir.}$$

$$(2) (\kappa_n(s), \tau_g(s)) \neq (0, 0) \text{ ise } n_\gamma, \overline{D}_o^L, \text{nin } \Delta_2\text{-dualidir.}$$

$$(3) \kappa_g(s)^2 > \tau_g(s)^2 \text{ ise } b, \overline{D}_r^T, \text{nin } \Delta_1\text{-dualidir.}$$

(4) $\kappa_g(s)^2 > \tau_g(s)^2$ ise $b, \bar{D}_r^L$ 'nin $\triangle_3$ -dualidir.

(5) $\tau_g(s)^2 > \kappa_g(s)^2$ ise $b, \bar{D}_r^S$ 'nin $\triangle_5$ -dualidir (Ito ve Izumiya, 2016).

İspat. Burada yalnızca (1) için ispatı verilecektir. □

(1) $L_1(s) = (n_\gamma(s), \bar{D}_o^S(s))$ ile verilen $L_1 : I \rightarrow \triangle_1$ bir dönüşüm olsun. $\langle n_\gamma(s), \bar{D}_o^S(s) \rangle = 0$ ve $L_1^* \theta_{11} = \langle n'_\gamma(s), \bar{D}_o^S(s) \rangle = 0$ 'dır. Bu yüzden L_1 isophotik dönüşümdür öyle ki $n_\gamma, \bar{D}_o^S(s)$ 'nin $\triangle_1$ -dualidir. Böylece dönüşümler aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$L_2 : I \rightarrow \triangle_2 ; L_2(s) = (n_\gamma(s), \bar{D}_o^L(s)), \quad (5.2.1)$$

$$L_3 : I \rightarrow \triangle_1 ; L_3(s) = (b(s), \bar{D}_r^T(s)),$$

$$L_4 : I \rightarrow \triangle_3 ; L_4(s) = (b(s), \bar{D}_r^L(s)),$$

$$L_5 : I \rightarrow \triangle_5 ; L_5(s) = (b(s), \bar{D}_r^S(s)).$$

L_i ($i = 2, 3, 4, 5$)'in isophotik dönüşüm olduğunu gösterilebilir. Bunun anlamı (2), (3), (4) ve (5)'e dayanır (Ito ve Izumiya, 2016).

5.3. Yükseklik Fonksiyonları

$\|t'(s)\| \neq 0$ ve $\|b'(s)\| \neq 0$ olmak üzere $\gamma : I \rightarrow M \subset \mathbb{R}_1^3$ üzerinde 5 fonksiyon ailesi şu şekilde tanımlanır:

$$H_r^T : I \times H_+^2(-1) \rightarrow \mathbb{R} ; (s, v) \mapsto \langle b(s), v \rangle, \quad (5.3.1)$$

$$H_r^S : I \times S_1^2 \rightarrow \mathbb{R} ; (s, v) \mapsto \langle b(s), v \rangle,$$

$$H_r^L : I \times LC^* \rightarrow \mathbb{R} ; (s, v) \mapsto \langle b(s), v \rangle - 1,$$

$$H_o^S : I \times S_1^2 \rightarrow \mathbb{R} ; (s, v) \mapsto \langle n_\gamma(s), v \rangle,$$

$$H_o^L : I \times LC^* \rightarrow \mathbb{R} ; (s, v) \mapsto \langle n_\gamma(s), v \rangle + 1.$$

Herhangi v için, $h_{r,v}^T(s) = H_r^T(s, v)$, $h_{r,v}^S(s) = H_r^S(s, v)$, $h_{r,v}^L(s) = H_r^L(s, v)$, $h_{o,v}^S(s) = H_o^S(s, v)$, $h_{o,v}^L(s) = H_o^L(s, v)$ ile gösterilir (Ito ve Izumiya, 2016).

Önerme 5.3.1. $M \subset \mathbb{R}_1^3$ spacelike yüzeyinde $\gamma : I \rightarrow M$ birim hızlı eğri olsun öyle ki $\|t'(s)\| \neq 0$ ve $\|b'(s)\| \neq 0$ 'dır. O halde aşağıda verilenler vardır:

(A) Herhangi $(s, v) \in I \times H^2(-1)$ olmak üzere aşağıdaki verilenler vardır:

(1) $h_{r,v}^T(s) = 0$ gerek ve yeter şart $-\lambda^2 + \mu^2 = 1$ olacak şekilde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vardır ve

$$v = \lambda t(s) + \mu n_\gamma(s) \quad (5.3.2)$$

dir.

(2) $h_{r,v}^T(s) = (h_{r,v}^T)'(s) = 0$ gerek ve yeter şart $\kappa_g(s)^2 > \tau_g(s)^2$ ve $v = \pm \bar{D}_r^T(s)$ 'dir.

(3) $h_{r,v}^T(s) = (h_{r,v}^T)'(s) = (h_{r,v}^T)''(s) = 0$ gerek ve yeter şart $\kappa_g(s)^2 > \tau_g(s)^2$, $\delta_r^T(s) = 0$ ve $v = \pm \bar{D}_r^T(s)$ 'dir.

(4) $h_{r,v}^T(s) = (h_{r,v}^T)'(s) = (h_{r,v}^T)''(s) = (h_{r,v}^T)'''(s) = 0$ gerek ve yeter şart $\kappa_g(s)^2 > \tau_g(s)^2$, $\delta_r^T(s) = 0$, $(\delta_r^T)'(s) = 0$ ve $v = \pm D_r^T(s)$ 'dir.

(B) Herhangi $(s, v) \in I \times S_1^2$ olmak üzere aşağıdaki verilenler vardır:

(1) $h_{r,v}^S(s) = 0$ gerek ve yeter şart $-\lambda^2 + \mu^2 = -1$ olacak şekilde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vardır öyle ki

$$v = \lambda t(s) + \mu n_\gamma(s) \quad (5.3.3)$$

dir.

(2) $h_{r,v}^S(s) = (h_{r,v}^S)'(s) = 0$ gerek ve yeter şart $\tau_g(s)^2 > \kappa_g(s)^2$, $\delta_r^S(s) = 0$ ve $v = \pm \bar{D}_r^S(s)$ 'dir.

(3) $h_{r,v}^S(s) = (h_{r,v}^S)'(s) = (h_{r,v}^S)''(s) = 0$ gerek ve yeter şart $\tau_g(s)^2 > \kappa_g(s)^2$, $\delta_r^S(s) = 0$ ve $v = \pm \bar{D}_r^S(s)$ 'dir.

(4) $h_{r,v}^S(s) = (h_{r,v}^S)'(s) = (h_{r,v}^S)''(s) = (h_{r,v}^S)'''(s) = 0$ gerek ve yeter şart $\tau_g(s)^2 > \kappa_g(s)^2$, $\delta_r^S(s) = 0$, $(\delta_r^S)'(s) = 0$ ve $v = \pm \bar{D}_r^S(s)$ 'dir.

(C) Herhangi $(s, v) \in I \times LC^*$ olmak üzere aşağıdaki verilenler vardır:

(1) $h_{r,v}^L(s) = 0$ gerek ve yeter şart $\lambda^2 - \mu^2 = -1$ olacak şekilde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vardır öyle ki

$$v = \lambda t(s) + \mu n_\gamma(s) + b(s) \quad (5.3.4)$$

dir.

(2) $h_{r,v}^L(s) = (h_{r,v}^L)'(s) = 0$ gerek ve yeter şart $\kappa_g(s)^2 > \tau_g(s)^2$ ve $v = \pm \bar{D}_r^L(s)$ 'dir.

(3) $h_{r,v}^L(s) = (h_{r,v}^L)'(s) = (h_{r,v}^L)''(s) = 0$ gerek ve yeter şart $\kappa_g(s)^2 > \tau_g(s)^2$, $\delta_r^L(s) = 0$ ve $v = \pm \bar{D}_r^L(s)$ 'dir.

(4) $h_{r,v}^L(s) = (h_{r,v}^L)'(s) = (h_{r,v}^L)''(s) = (h_{r,v}^L)'''(s) = 0$ gerek ve yeter şart $\kappa_g(s)^2 > \tau_g(s)^2$, $\delta_r^L(s) = 0$, $(\delta_r^L)'(s) = 0$ ve $v = \pm \bar{D}_r^L(s)$ 'dir.

(D) $(\kappa_n(s), \tau_g(s)) \neq (0, 0)$ olmak üzere herhangi $(s, v) \in I \times S_1^2$ için aşağıdaki verilenler vardır:

(1) $h_{o,v}^S(s) = 0$ gerek ve yeter şart $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ olacak şekilde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vardır öyle ki

$$v = \lambda t(s) + \mu b(s) \quad (5.3.5)$$

dir.

(2) $h_{o,v}^S(s) = (h_{o,v}^S)'(s) = 0$ gerek ve yeter şart $v = \pm \bar{D}_o^S(s)$ 'dir.

(3) $h_{o,v}^S(s) = (h_{o,v}^S)'(s) = (h_{o,v}^S)''(s) = 0$ gerek ve yeter şart $\delta_o^S(s) = 0$ ve $v = \pm \bar{D}_o^S(s)$ 'dir.

(4) $h_{o,v}^S(s) = (h_{o,v}^S)'(s) = (h_{o,v}^S)''(s) = (h_{o,v}^S)'''(s) = 0$ gerek ve yeter şart $\delta_o^S(s) = 0$, $(\delta_o^S)'(s) = 0$ ve $v = \pm \bar{D}_o^S(s)$ 'dir.

(E) $(\kappa_n(s), \tau_g(s)) \neq (0, 0)$ olmak üzere herhangi $(s, v) \in I \times LC^*$ için aşağıdaki verilenler vardır:

(1) $h_{o,v}^L(s) = 0$ gerek ve yeter şart $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ olacak şekilde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vardır öyle ki

$$v = \lambda t(s) + \mu b(s) + n_\gamma(s) \quad (5.3.6)$$

dir.

(2) $h_{o,v}^L(s) = (h_{o,v}^L)'(s) = 0$ gerek ve yeter şart $v = \pm \bar{D}_o^L(s)$ 'dir.

(3) $h_{o,v}^L(s) = (h_{o,v}^L)'(s) = (h_{o,v}^L)''(s) = 0$ gerek ve yeter şart $\delta_o^L(s) = 0$ ve $v = \pm \bar{D}_o^L(s)$ 'dir.

(4) $h_{o,v}^L(s) = (h_{o,v}^L)'(s) = (h_{o,v}^L)''(s) = (h_{o,v}^L)'''(s) = 0$ gerek ve yeter şart $\delta_o^L(s) = 0$, $(\delta_o^L)'(s) = 0$ ve $v = \pm \bar{D}_o^L(s)$ 'dir (Ito ve Izumiya, 2016).

İspat. $\|t'(s)\| \neq 0$, $\|b'(s)\| \neq 0$ gerek ve yeter şart $-\kappa_n(s)^2 + \kappa_g(s)^2 \neq 0$, $\kappa_g(s)^2 - \tau_g(s)^2 \neq 0$ olmalıdır.

(A) Düz ileriye doğru hesaplamalar yapılarak,

$$\begin{aligned}
h_{r,v}^T &= \langle b, v \rangle, \\
(h_{r,v}^T)' &= \langle -\kappa_g t + \tau_g n_\gamma, v \rangle, \\
(h_{r,v}^T)'' &= \langle (-\kappa_g' + \kappa_n \tau_g) t - (\kappa_g^2 - \tau_g^2) b + (\tau_g' - \kappa_g \kappa_n) n_\gamma, v \rangle, \\
(h_{r,v}^T)''' &= \langle (-\kappa_g'' + \kappa_n' \tau_g + 2\kappa_n \tau_g' + \kappa_g^3 - \kappa_g \tau_g^2 - \kappa_n^2 \kappa_g) t \\
&\quad + (-3\kappa_g \kappa_g' + 3\tau_g \tau_g') b + (\tau_g'' - \kappa_g \kappa_n' - 2\kappa_n \kappa_g' + \tau_g^3 \\
&\quad + \kappa_n^2 \tau_g - \kappa_g^2 \tau_g) n_\gamma, v \rangle.
\end{aligned} \tag{5.3.7}$$

elde edilir. $\{t(s), n_\gamma(s), b(s)\}$ çatısı γ boyunca $\mathbb{R}_1^3$ uzayının pseudo-ortonormal çatısıdır. $v = \lambda t(s) + \mu n_\gamma(s) + \eta b(s)$ 'dir.

□

1. $h_{r,v}^T = 0$, $\eta = 0$ öyle ki $v = \lambda t(s) + \mu n_\gamma(s)$ 'dir. Burada v timelike olur. $\mu^2 > \lambda^2$ olduğundan $\mu \neq 0$ 'dır. Böylece ispat tamamlanır (A), (1).
2. $(h_{r,v}^T)' = 0$ olması $-\lambda \kappa_g - \mu \tau_g = 0$ olduğu anlamına gelir. Bu nedenle, $\kappa_g v = \kappa_g \lambda t + \kappa_g \mu n_\gamma = -\mu(\tau_g t - \kappa_g n_\gamma)$ 'dir. Böylece $\tau_g^2 \leq \kappa_g^2$ olacak şekilde $-\kappa_g^2 = \mu^2(\tau_g^2 - \kappa_g^2)$ vardır. $\kappa_g^2(s)^2 - \tau_g(s)^2 \neq 0$, $\tau_g^2 < \kappa_g^2$ ve

$$v = \pm \frac{\tau_g t - \kappa_g n_\gamma}{\sqrt{\kappa_g^2 - \tau_g^2}} = \pm \overline{D}_r^T \tag{5.3.8}$$

dir.

3. $(h_{r,v}^T)'' = 0$ koşulu eklenirse buradan,

$$\kappa_n - \frac{\kappa_g \tau_g' - \kappa_g' \tau_g}{\kappa_g^2 - \tau_g^2} = 0 \tag{5.3.9}$$

elde edilir. Böylece $\delta_r^T = 0$ bulunur.

4. $(h_{r,v}^T)''' = 0$ koşulu eklenirse buradan,

$$\kappa_n'(\kappa_g^2 - \tau_g^2) + 2(\kappa_g \kappa_g' - \tau_g \tau_g')(\delta_r^T + \frac{\kappa_g \tau_g' - \kappa_g' \tau_g}{\kappa_g^2 - \tau_g^2}) \tag{5.3.10}$$

$$-\kappa_g \tau_g'' - \kappa_g'' \tau_g = 0$$

elde edilir.

$$(\delta_r^T)' = \kappa_n' + \frac{2(\kappa_g \kappa_g' - \tau_g \tau_g')(\kappa_g \tau_g' - \kappa_g' \tau_g)}{(\kappa_g^2 - \tau_g^2)^2} - \frac{(\kappa_g \tau_g'' - \kappa_g'' \tau_g)}{(\kappa_g^2 - \tau_g^2)} \quad (5.3.11)$$

olduğundan $(\delta_r^T)' = 0$ koşulu ile $\delta_r^T = 0$ bulunur.

(B), (C), (D) ve (E) durumları için, sırasıyla $h_{r,v}^S$, $h_{r,v}^L$, $h_{o,v}^S$ ve $h_{o,v}^L$ türevleri için (A)'daki benzer hesaplamalar yapılabilir (Ito ve Izumiya, 2016).

Burada fonksiyonlar için tekillik teorisi üzerinde bazı genel sonuçlar kullanılacaktır.

$F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (s_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $f(s) = F_{x_0}(s, x_0)$ olmak üzere f, F 'nin r -parametrelili dağılımı olarak adlandırılır. $1 \leq p \leq k$ için $f^{(p)}(s_0) = 0$ ve $f^{(k+1)}(s_0) \neq 0$ ise f, s_0 'da A_k -tekilliğine sahiptir. f, s_0 'da $A_{\geq k}$ tekilliğine sahipse her $1 \leq p \leq k$ için $f^{(p)}(s_0) = 0$ 'dır. F, f 'nin bir dağılımı ve $f(s), s_0$ 'da A_k -tekilliğine sahiptir. s_0 'daki $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ kısmi türevinin $(k-1)$ -jüti, $j^{(k-1)}(\frac{\partial F}{\partial x_i}(s, x_0))(s_0) = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{ji}(s-s_0)^j, i = 1, \dots, r$ ile verilir. O zaman $k \times r$ katsayılı matris $(\alpha_{ji})_{j=0, \dots, k-1; i=1, \dots, r}$ ve rankı $k(k \leq r)$ ise, F, R -versal dağılımı olarak adlandırılır. Yukarıdaki kavramlarla ortaya çıkan önemli bir küme sunulacaktır. F 'nin diskriminant kümesi;

$$D_F = \{x \in \mathbb{R}^r \mid F = \frac{\partial F}{\partial s} = 0, (s, x)\} \quad (5.3.12)$$

ile ifade edilir (Bruce ve Giblin, 1992).

Teorem 5.3.2. $f(s)$ 'nin s_0 'da A_2 -tekilliği olan r -parametrelili dağılımı $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (s_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. F bir R -versal dağılımı ise, $D_F, C \times \mathbb{R}^{n-1}$ 'e yerel olarak diffeomorftir. Herhangi v için $H_r^T, H_r^S, H_r^L, H_o^T$ ve H_o^L ' sırasıyla $h_{r,v}^T(s), h_{r,v}^S(s), h_{r,v}^L(s), h_{o,v}^T(s)$ ve $h_{o,v}^L(s)$ 'lerin dağılımlarıdır (Ito ve Izumiya, 2016).

Önerme 5.3.3. $M \subset \mathbb{R}_1^3$ spacelike yüzeyi üzerinde $\gamma : I \rightarrow M$ birim hızlı eğridir öyle ki $\|t'(s)\| \neq 0$ ve $\|b'(s)\| \neq 0$ 'dır. O halde aşağıdaki verilenler vardır:

- (A) $h_{r,v}^T$ s_0 'da A_2 -tekilliğine sahipse $H_r^T, h_{r,v}^T$ 'nin R -versal dağılımıdır.
- (B) $h_{r,v}^S$ s_0 'da A_2 -tekilliğine sahipse $H_r^S, h_{r,v}^S$ 'nin R -versal dağılımıdır.
- (C) $h_{r,v}^L$ s_0 'da A_2 -tekilliğine sahipse $H_r^L, h_{r,v}^L$ 'nin R -versal dağılımıdır.
- (D) $h_{o,v}^S$ s_0 'da A_2 -tekilliğine sahipse $H_o^S, h_{o,v}^S$ 'nin R -versal dağılımıdır.

(E) $h_{o,v}^L$ s_0 'da A_2 -tekilliğine sahipse $H_o^L, h_{o,v}^L$ 'nin R -versal dağılımıdır (Ito ve Izumiya, 2016).

İspat. Burada sadece (A) için ispat verilecektir. Diğer durumlar (A) ile benzerdir. $\square$

(A) $v = (\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}, x_1, x_2) \in H_+^2(-1)$ ve $b = (b_0(s), b_1(s), b_2(s))$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} H_r^T(s, v) &= -b_0(s)\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1} + b_1(s)x_1 + b_2(s)x_2 \\ \frac{\partial H_r^T}{\partial x_1}(s, v) &= -b_0(s)\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}} + b_1(s), \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

$$\frac{\partial H_r^T}{\partial x_2}(s, v) = -b_0(s)\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}} + b_2(s)$$

dir.

Bu nedenle $H_r^T(s, v)$ 'nin 2-jeti;

$$\begin{aligned} j^2 \frac{\partial H_r^T}{\partial x_1}(s_0, v) &= \left(-b_0(s_0)\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}} + b_1(s_0) \right) \\ &+ \left(-b'_0(s_0)\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}} + b'_1(s_0) \right) (s - s_0) \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

$$\begin{aligned} j^2 \frac{\partial H_r^T}{\partial x_2}(s_0, v) &= \left(-b_0(s_0)\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}} + b_2(s_0) \right) \\ &+ \left(-b'_0(s_0)\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}} + b'_2(s_0) \right) (s - s_0) \end{aligned} \quad (5.3.15)$$

olarak elde edilir. Buradan,

$$A = \begin{pmatrix} -b_0(s_0)\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}} + b_1(s_0) & -b_0(s_0)\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}} + b_2(s_0) \\ -b'_0(s_0)\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}} + b'_1(s_0) & -b'_0(s_0)\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}} + b'_2(s_0) \end{pmatrix} \quad (5.3.16)$$

matrisi elde edilir. A 'nın determinanı ise,

$$\begin{aligned}
 \det A &= \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}} (x_1(b'_0 b_2 - b_0 b'_2) + x_2(b_0 b'_1 - b'_0 b_1)) \\
 &\quad + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1} (b'_2 b_1 - b_2 b'_1) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}} \langle (b_2 b'_1 - b_1 b'_2, b_2 b'_0 - b'_2 b_0, b_0 b'_1 - b'_0 b_1), (\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}, x_1, x_2) \rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}} \langle (b \wedge b'), v \rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}} | b \ b' \ v |
 \end{aligned} \tag{5.3.17}$$

dir. $h_{r,v}^T$ s_0 'da A_2 -tekilliğine sahipse $v = \pm \bar{D}_r^T(s)$ ve $b'(s) = -\kappa_g(s)t(s) + \tau_g(s)n_\gamma(s)$ olur. $\{b, b', v\}$ kümesi lineer bağımsız ve $\text{rank} A = 2$ 'dir. Bu sebeple $H_r^T, h_{r,v}^T$ 'nin R -versal dağılımıdır (Ito ve Izumiya, 2016).

5.4. Yüzeyler Üzerinde Eğrilerin İnvaryantları

Bu bölümde $\delta_r^T, \delta_r^S, \delta_r^L, \delta_o^S, \delta_o^L$ invaryantlarının geometrik anlamları düşünülecektir. Özellikle her invaryant kaybolduğunda yüzeydeki orjinal eğri hakkında ne söylenebilir. Bu amaçla, Lorentz-Minkowski uzayındaki silindirler düşünülecektir. $\mathbb{R}_1^3$ 'teki silindir bir regle yüzeydir. $F, F(t, u) = \sigma(t) + uv$ ile parametrelendirilirse, σ düzgün bir eğri ve v sıfırdan farklı bir vektördür. v doğrultman vektörüdür. F spacelike silindir, timelike silindir ya da lightlike silindir olduğunda v sırasıyla spacelike, timelike ya da lightlike olarak tanımlanır. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında M bir yüzey N ise bir silindir olsun. N, M 'nin pseudo-normal silindiri ise herhangi $p \in M \cap N$ için $M \cap N \neq 0$ ve $T_p N, n(p)$ pseudo-normal vektörünü içermelidir. Bu durumda M ve N kesişirler ve $M \cap N, C$ düzenli eğrisidir. C 'ye M 'nin pseudo-normal silindir parçası denir. N doğrultmanı pseudo-normal spacelike silindir ise N spacelike, pseudo-normal timelike silindir ise N timelike olarak tanımlanır. N lightlike değildir. $N, F(t, u) = \sigma(t) + uv$ ile yerel olarak parametrelendirilirse;

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, u) = \sigma'(t) \text{ ve } \frac{\partial F}{\partial u}(t, u) = v, \tag{5.4.1}$$

öyle ki N 'nin pseudo-normali şu şekilde verilir;

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, u) \times \frac{\partial F}{\partial u}(t, u) = \sigma'(t) \times v. \quad (5.4.2)$$

C düzenli eğrisi $\gamma(s)$ ile parametrelendirilirse, s 'nin γ 'nın yay-uzunluk parametresi olduğu yerde N yerel olarak $F(s, u) = \gamma(s) + uv$ ile parametrelendirilir. N 'ye F tarafından bir yön verilmiştir. C boyunca N 'nin birim normal vektörü $b(s)$ ve $\langle b(s), v \rangle = 0$ 'dır. Öte yandan M ve N 'nin teğet düzlemleri, $M \cap N$ 'nin herhangi noktasında kesişirse N 'ye oskülatör silindir denir. Bu durumda $C = M \cap N$ 'ye M 'nin oskülatör silindirinin parçası denir. Oskülatör silindir daima spacelike olduğuna dikkat çekilmektedir. N , $F(t, u) = \sigma(t) + uv$ ile yerel olarak parametrelendirilirse C 'nin γ parametresi için C boyunca N 'nin birim normal vektörü n_γ ve $\langle n, v \rangle = 0$ 'dır. Herhangi $p \in M \cap N$ için $M \cap N \neq \emptyset$ ve $\langle n(p), v \rangle = -1$ ise N hiperbolik lightlike silindir olarak adlandırılır. v , N 'nin lightlike doğrultmanıdır. Bu durumda, M ile N kesişir öyle ki $C = M \cap N$ düzenli bir eğridir. C , M 'nin hiperbolik lightlike silindir parçasıdır. Herhangi $p \in M \cap N$ için $M \cap N \neq \emptyset$ ve $\langle b(p), v \rangle = 1$ ise N de Sitter lightlike silindir olarak adlandırılır. Burada v , N 'nin lightlike doğrultmanıdır. Bu durumda M ve N kesişir öyle ki $C = M \cap N$ düzenli bir eğridir. C , M 'nin de Sitter lightlike silindir parçası olarak adlandırılır. Yukarıdaki iki durumda da v lightlike olur (Ito ve Izumiya, 2016).

Teorem 5.4.1. $M \subset \mathbb{R}_1^3$ yüzeyi üzerinde $\gamma : I \rightarrow M$ birim hızlı bir eğri olsun öyle ki $\|t'(s)\| \neq 0$ ve $\|b'(s)\| \neq 0$ 'dır.

(A) $\kappa_g(s)^2 > \tau_g(s)^2$ olmak üzere aşağıdaki koşullar eşdeğerdir:

- (1) $\overline{D}_r^T(s)$ rektifiyen timelike Darboux görüntüsü sabit bir vektör,
- (2) Rektifiyen timelike Darboux görüntüsünün tekil noktası $\delta_r^T(s) \equiv 0$,
- (3) $\gamma(I)$, M 'nin timelike pseudo-normal silindir parçası,
- (4) $b(I)$, $H^2(-1)$ 'deki hiperbolik çizginin bir alt kümesidir.

(B) $\tau_g(s)^2 > \kappa_g(s)^2$ olmak üzere aşağıdaki koşullar eşdeğerdir:

- (1) $\overline{D}_r^S(s)$ rektifiyen spacelike Darboux görüntüsü sabit bir vektör,
- (2) Rektifiyen spacelike Darboux görüntüsünün tekil noktası $\delta_r^S(s) \equiv 0$,
- (3) $\gamma(I)$, M 'nin spacelike pseudo-normal silindir parçası,

- (4) $b(I)$, S_1^2 'deki jeodezik pseudo-çemberin bir alt kümesidir.
- (C) $\kappa_g(s)^2 > \tau_g(s)^2$ olmak üzere aşağıdaki koşullar eşdeğerdir:
- (1) $\overline{D}_r^L(s)$ rektifiyen lightlike Darboux görüntüsü sabit bir vektör,
 - (2) Rektifiyen lightlike Darboux görüntüsünün tekil noktası $\delta_r^L(s) \equiv 0$,
 - (3) $\gamma(I)$, M' 'nin de Sitter lightlike silindir parçası,
 - (4) $b(I)$, S_1^2 'deki de Sitter horocyclenin bir alt kümesidir.
- (D) $(\kappa_n(s), \tau_g(s)) \neq (0, 0)$ olmak üzere aşağıdaki koşullar eşdeğerdir:
- (1) $\overline{D}_o^S(s)$ oskülatör spacelike Darboux görüntüsü sabit bir vektör,
 - (2) Oskülatör spacelike Darboux görüntüsünün tekil noktası $\delta_o^S(s) \equiv 0$,
 - (3) $\gamma(I)$, M' 'nin pseudo-oskülatör silindir parçası,
 - (4) $n_\gamma(I)$, S_1^2 'deki jeodezik hiperbolün bir alt kümesidir.
- (E) $(\kappa_n(s), \tau_g(s)) \neq (0, 0)$ olmak üzere aşağıdaki koşullar eşdeğerdir:
- (1) $\overline{D}_o^L(s)$ oskülatör lightlike Darboux görüntüsü sabit bir vektör,
 - (2) Oskülatör lightlike Darboux görüntüsünün tekil noktası $\delta_o^L(s) \equiv 0$,
 - (3) $\gamma(I)$, M' 'nin hiperbolik lightlike silindir parçası,
 - (4) $n_\gamma(I)$, $H^2(-1)$ 'deki horocyclenin bir alt kümesidir (Ito ve Izumiya, 2016).

İspat. (B) ve (D)'nin ispatı (A)'nın ispatı ile benzerdir. (E)'nin ispatı (C)'nin ispatı ile benzerdir. Bu nedenle yalnızca (A) ve (C) için ispat verilecektir. $\square$

- (A) $(\overline{D}_r^T(s))' = \delta_r^T(s)T_b(s)$ olduğundan (1) ve (2) koşulları eşdeğerdir. (3) koşulu varsayılırsa, $v \in H_+^2(-1)$ var öyle ki $\langle b(s), v \rangle \equiv 0$ 'dır. Bu yüzden $v = \lambda t(s) + \mu n_\gamma(s)$ olacak şekilde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vardır. $\langle b(s), v \rangle \equiv 0$ olduğundan $\langle b'(s), v \rangle \equiv 0$ 'dır. $-\lambda k_g(s) - \mu \tau_g(s) = 0$ ve $v = \overline{D}_r^T(s)$ 'dır. Bu eşitlik (1) koşulunun varlığını destekler. Buradan, $\overline{D}_r^T(s)$ sabit vektördür ve $v = \overline{D}_r^T(s) \in H_+^2(-1)$ 'dir. Çünkü $\langle b(s), v \rangle = \langle b(s), \overline{D}_r^T(s) \rangle = 0$ iken (3) koşulu sağlanır. Yukarıdaki eşitlik $b(s) \in P(v, 0)$ anlamına gelir. Bu ise b görüntüsünün $P(v, 0) \cap H^2(-1)$ hiperbolik çizgisinin alt kümesi olduğu anlamına gelir. Bu yüzden (4) koşulu sağlanır. $v \in H^2(-1)$ öyle ki $\langle b(s), v \rangle = 0$ 'dır. $v = \lambda t(s) + \mu n_\gamma(s)$ olacak şekilde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vardır. $\langle b(s), v \rangle = 0$ olduğundan $\langle b'(s), v \rangle = 0$ öyle ki $-\lambda k_g(s) - \mu \tau_g(s) = 0$ elde edilir. Buradan $v = \overline{D}_r^T(s)$ 'dır. Bu yüzden (1) koşulu sağlandı.
- (C) $(\overline{D}_r^L(s))' = \delta_r^L(s)T_b(s)$ olduğundan (1) ve (2) koşulları eşdeğerdir. (3)

koşulu varsayılırsa, $v \in LC^*$ öyle ki $\langle b(s), v \rangle = 1$ 'dir. $\alpha = v - b(s)$ olsun. $\langle \alpha, \alpha \rangle = -1$ öyle ki $\alpha \in H^2(-1)$ 'dir. $\langle b(s), \alpha \rangle = 0$ olduğundan $\langle b'(s), \alpha \rangle = 0$ 'dır. Bu ise α , b 'nin Δ_1 -duali demektir. (A)'ya benzer durumlarla $v = \overline{D}_r^T(s) + b(s) = \overline{D}_r^L(s)$ olması için $\overline{D}_r^T(s) = v - b(s)$ kullanılır. Bu yüzden (1) koşulu sağlandı. (1) koşulu sağlandığından dolayı $v = \overline{D}_r^L(s)$ için $\langle b(s), v \rangle = 1$ 'dir. (3) koşulu sağlandı. Eğer (1) koşulu sağlanıyorsa $\langle b(s), \overline{D}_r^L(s) \rangle = 1$ öyle ki b 'nin görüntüsü de Sitter horocyclenin alt kümesidir. (4) koşulunu varsayılırsa $\langle b(s), v \rangle = -1$ olacak şekilde $v \in LC^*$ vardır. $v = \lambda t(s) + \mu n_\gamma(s)$ olacak şekilde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vardır. $\langle b(s), v \rangle = -1$ olduğundan $\langle b'(s), v \rangle = 0$ 'dır. Bunun anlamı $-\lambda k_g(s) - \mu \tau_g(s)$ öyle ki $v = \overline{D}_r^L(s)$ 'dir. (1) koşulu sağlanır (Ito ve Izumiya, 2016).

5.5. Lorentz-Minkowski 3-Boyutlu Uzayında Düzlem Örnekleri

5.5.1. Spacelike düzlemler

$M = \mathbb{R}_0^2 = \{x = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}_1^3 \mid x_0 = 0\}$ olsun. Öklid düzleminde birim hızlı $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}_0^2$ eğrisi vardır. Bu durumda, $n_\gamma(s) = e_0$, $t(s) = \gamma'(s)$, $b(s) = e_0 \wedge t(s)$ 'dir. $n'_\gamma = e'_0 \equiv 0$, $\kappa_n(s) \equiv \tau_g(s) \equiv 0$ alınır;

$$t'(s) = \kappa_n(s)n_\gamma(s) + \kappa_g(s)b(s), \quad (5.5.1.1)$$

$$t'(s) = \kappa(s)b(s),$$

$$b'(s) = -\kappa_g(s)t(s) + \tau_g(s)n_\gamma(s),$$

$$b'(s) = -\kappa(s)b(s),$$

$$n'_\gamma(s) = \kappa_n(s)t(s) + \tau_g(s)b(s),$$

$$n'_\gamma(s) = 0,$$

elde edilir. Burada Öklid düzlem eğrisi olarak γ 'nın eğriliği $\kappa(s) = \kappa_g(s) = \langle t'(s), b(s) \rangle$ 'dir. Bu durumda Lorentzian-Darboux vektörleri;

$\bar{D}_r^T(s) = \pm n_\gamma(s) = \pm e_0$, $\bar{D}_r^L(s) = \pm n_\gamma(s) + b(s) = \pm e_0 + b(s)$, $\bar{D}_o^S(s) = \pm b(s)$ ve $\bar{D}_o^L(s) = \pm b(s) + e$. Burada $\bar{D}_r^S(s)$ iyi tanımlı değildir. Bu yüzden $\bar{D}_o^S, \bar{D}_o^L, \bar{D}_r^L$ Öklid düzlem eğrisi olarak eğrinin bir Gauss dönüşümüne karşılık gelir. $\delta_r^T(s) \equiv 0$, $\delta_r^L(s) = \pm \kappa_g(s) = \pm \kappa(s)$ ve $\delta_o^S(s) = \delta_o^L(s) = \kappa_g(s) = \kappa(s)$ dir (Ito ve Izumiya, 2016).

5.5.2. Hiperbolik düzlem

$M = H^2(-1)$ olsun. Birim hızlı $\gamma: I \rightarrow H^2(-1)$ eğrisi için $n_\gamma(s) = \gamma(s)$ ve $t(s) = \gamma'(s)$ alınabilir. O zaman $\{t, \gamma, b\}$ Lorentzian-Darboux çatısıdır ve buna Lorentzian-Sabban çatısı da denir. $\kappa_n(s) \equiv 1$ ve $\tau_g(s) \equiv 0$ ’dır. Böylece;

$$\begin{aligned} t'(s) &= \kappa_n(s)n_\gamma(s) + \kappa_g(s)b(s), \\ t'(s) &= \gamma(s) + \kappa_g(s)b(s), \\ \gamma'(s) &= t(s), \\ b'(s) &= -\kappa_g(s)t(s) + \tau_g(s)n_\gamma(s), \\ b'(s) &= -\kappa_g(s)t(s). \end{aligned} \tag{5.5.2.1}$$

elde edilir. Bu durumda Lorentzian Darboux vektörleri $\bar{D}_r^T(s) = \pm \gamma(s)$, $\bar{D}_r^L(s) = \pm \gamma(s) + b(s)$, $\bar{D}_o^S(s) = \pm b(s)$ ve $\bar{D}_o^L(s) = \gamma(s) \pm b(s)$ ’dir. $\bar{D}_r^S(s)$ burada iyi tanımlı değildir. $\delta_r^T(s) = 1$, $\delta_r^L(s) = 1 \pm \kappa_g(s)$, $\delta_o^S(s) = \kappa_g(s)$ ve $\delta_o^L(s) = \kappa_g(s) \pm 1$ ’dir. $\bar{D}_r^L = \pm \bar{D}_o^L$ ’nin hiperbolik Gauss işaretleri olarak adlandırıldığı söylenebilir (Izumiya vd., 2003).

5.5.3. Açılabilir spacelike yüzeyler

$M = X(\mathbb{R}^2)$ ve $X(x, y) = (\sqrt{x^2 + 1}, x, y)$ spacelike bir gömme olsun. Düz ileri hesaplamalarla $n(x, y) = (-\sqrt{x^2 + 1}, -x, 0)$ ’dır. M üzerinde tanımlanan eğri $\gamma(s) = (\sqrt{s^2 + 1}, s, f(s))$ olsun. $\gamma'(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{s^2 + 1}}, 1, f'(s)\right)$ ’dir. Burada s yay-uzunluk parametresidir gerek ve yeter şart $f'(s)^2(s + 1) = s^2$ olmalıdır. Bu durumda, γ ’nın birim teğet vektörü $t(s) = \gamma'(s)$ ’dir. $n_\gamma(s) = (-\sqrt{s^2 + 1}, -s, 0)$ ve

$$b(s) = \left(-sf'(s), -f'(s)\sqrt{s^2+1}, \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} \right) \quad (5.5.3.1)$$

elde edilir. Buradan,

$$\kappa_g(s) = \frac{sf'(s) + f''(s)(s^2+1)}{(s^2+1)^{3/2}}, \quad \kappa_n(s) = \frac{-1}{s^2+1}, \quad \tau_g(s) = \frac{f'(s)}{\sqrt{s^2+1}} \quad (5.5.3.2)$$

olduğundan

$$(\tau_g t - \kappa_g n_\gamma)(s) = \left(\frac{2sf'(s) + f''(s)(s^2+1)}{s^2+1}, \frac{f'(s)(s^2+1) + sf''(s)(s^2+1)}{(s^2+1)^{3/2}}, \frac{f''(s)}{\sqrt{s^2+1}} \right) \quad (5.5.3.3)$$

ve

$$(\tau_g t - \kappa_n b)(s) = \left(0, 0, \frac{2f'(s)(s^2+1) + 1}{(s^2+1)^{3/2}} \right) \quad (5.5.3.4)$$

elde edilir. $2f'(s)(s^2+1) + 1 \neq 0$ ise $\overline{D}_o^S(s) = (0, 0, 1)$ ve $\overline{D}_o^L(s) = (-\sqrt{s^2+1}, -s, 1)$ 'dir. $X(x, y) = (\sqrt{x^2+1}, x, 0) + y(0, 0, 1)$ 'in $(0, 0, 1)$ doğrultmanlı bir silindir olduğunu ifade edilebilir. Açılabilir yüzeylerden bir tanesi silindirdir. Böylece $\mathbb{R}_1^3$ 'teki açılabilir yüzeylerde genelde spacelike düşünülür. M açılabilir yüzeyi $F_{(c, \xi)}(t, u) = c(t) + u\xi(t)$ regle yüzeyi tarafından parametrelendirilirse burada $c(t)$ baz eğrisi olarak adlandırılan düzgün bir eğridir ve $\xi(t)$ yönlendirilmiş eğri olarak adlandırılan $\|\xi(t)\| = 1$ ile düzgün bir eğridir. Böylece,

$$\frac{\partial F_{(c, \xi)}}{\partial t}(t, u) = c(t) + u\xi(t), \quad \frac{\partial F_{(c, \xi)}}{\partial u}(t, u) = \xi(t) \quad (5.5.3.5)$$

elde edilir ve öyle ki (t, u) düzenli noktasındaki birim pseudo-normal vektör,

$$n(t, u) = \frac{1}{l}((c + u\xi) \wedge \xi)(t, u) = \frac{1}{l}((c \wedge \xi) + u(\xi \wedge \xi))(t, u) \quad (5.5.3.6)$$

olarak tanımlanır. $l(t, u) = \|\partial F_{(c, \xi)}/\partial t \wedge \partial F_{(c, \xi)}/\partial u\|(t, u)$ 'dur. $F_{(c, \xi)}$ açılabilir bir yüzeydir gerek ve yeter şart herhangi (t, u) için $n(t, u)$ ile $c(t)$ ortogonal olmalıdır. Bu nedenle yukarıdaki koşul $\det(c(t), \xi(t), \xi(t)) = 0$ ile eşdeğerdir. Ayrıca $n(t, u)$ timelike ise F spacelike açılabilir yüzey olarak tanımlanır. $\xi(t)$ spacelike açılabilir yüzey için spacelike bir vektördür. γ 'nın yay uzunluk parametresi s olmak üzere M üzerindeki bir eğrinin,

$$\gamma(s) = c(t(s)) + u(s)\xi(t(s)) \quad (5.5.3.7)$$

ile parametrelendirildiği düşünülebilir. $l(s) = \|\partial F_{(c,\xi)}/\partial t \wedge \partial F_{(c,\xi)}/\partial u\|(t(s), u(s))$ olmak üzere γ boyunca birim normal vektör,

$$n_\gamma = \frac{1}{l}((c + u\xi) \wedge \xi) = \frac{1}{l}((c \wedge \xi) + u(\xi \wedge \xi)) \quad (5.5.3.8)$$

biçimindedir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} t &= u'\xi + t'(c + u\xi) \\ b &= \frac{1}{l}(\{c + u\xi\} \wedge \xi) \wedge t \\ &= \frac{1}{l}(\langle c + u\xi, t \rangle \xi - \langle \xi, t \rangle (c + u\xi)) \end{aligned} \quad (5.5.3.9)$$

ile ifade edilir. Buradan,

$$n'_\gamma = \frac{t'}{l}(c \times \xi + c \wedge \xi) + \left(\frac{1}{l}\right)' c \wedge \xi + \frac{t'u}{l} \xi \wedge \xi + \left(\frac{u}{l}\right)' \xi \wedge \xi \quad (5.5.3.10)$$

elde edilir. Bu nedenle,

$$d(s) = \det(c(t(s)) + u(s)\xi(t(s)), c(t(s)) + u(s)\xi(t(s)), \xi(t(s))) \quad (5.5.3.11)$$

olmak üzere,

$$\kappa_n(s) = -\frac{t'^2(s)d(s)}{l(s)}, \quad \tau_g(s) = \frac{t'(s)d(s)}{l^2(s)} \langle \xi(t(s)), t(s) \rangle \quad (5.5.3.12)$$

dir. $(\kappa_n(s), \tau_g(s)) \neq (0, 0)$, $d(s) \neq 0$ ve $t'(s) \neq 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \tau_g t - \kappa_n b &= \frac{t'd}{l^2}(\langle \xi, t \rangle (u'\xi + t'(c + u\xi)) \\ &\quad + t'(\langle c + u\xi, t \rangle \xi - \langle \xi, t \rangle (c + u\xi))) \\ &= \frac{t'd}{l^2} \langle u'\xi + t'(c + u\xi), t \rangle \xi \\ &= \frac{t'd}{l^2} \langle t, t \rangle \xi = \frac{t'd}{l^2} \xi \end{aligned} \quad (5.5.3.13)$$

dir. O halde $(\tau_g t - \kappa_n b)(s)$, $\xi(t(s))$ doğrultman eğrisine paraleldir (Ito ve Izumiya, 2016).

Önerme 5.5.1. $M, F_{(c,\xi)}(t, u) = c(t) + u\xi(t)$ tarafından parametrelendirilmiş spacelike açılabilir bir yüzey olsun. M üzerindeki $\gamma(s) = c(t(s)) + u(s)\xi(t(s))$ eğrisi için $\bar{D}_o^S(s) = \pm\xi(t(s))$ γ boyunca pseudo-küresel oskülatör spacelike Darboux görüntüsü'dür. γ boyunca pseudo-küresel oskülatör lightlike Darboux görüntüsü ise;

$$\bar{D}_o^L(s) = \frac{1}{l(s)}(\pm\xi(t(s)) + c(t(s)) \wedge \xi(t(s)) + u(s)(\xi(t(s))\xi(t(s)))) \quad (5.5.3.14)$$

biçiminde verilir (Ito ve Izumiya, 2016).

5.5.4. Bir fonksiyonun grafiği üzerindeki eğriler

Bu bölümde benzer örnekler düşünülecektir.

$$f(0,0) = 0 \text{ ve } \partial f / \partial x(0,0) = \partial f / \partial y(0,0) = 0$$

ile parametrelendirilmiş yüzey $X(x,y) = (f(x,y), x, y)$ olsun. Burada, $f_x = \partial f / \partial x$, $f_y = \partial f / \partial y$, $X_x = \partial X / \partial x = (f_x, 1, 0)$ ve $X_y = \partial X / \partial y = (f_y, 1, 0)$ olarak tanımlanır. X spacelike gömme olduğundan $\|X_x\| = -f_x^2 + 1 > 0$, $\|X_y\| = -f_y^2 + 1 > 0$ ve birim timelike normal vektör alanı,

$$n(p) = \frac{X_x(u) \wedge X_y(u)}{\|X_x(u) \wedge X_y(u)\|} = \frac{-1}{\sqrt{1 - f_x^2 - f_y^2}}(1, f_x, f_y) \quad (5.5.4.1)$$

ile ifade edilir. Burada $-1 + f_x^2 + f_y^2 < 0$ ve $p = X(u) = X(x, y)$ 'dir. $\gamma(x) = X(x, 0) = (f(x, 0), x, 0)$ bir eğri ve $f(x, y)$ düzgün

fonksiyondur. Burada $\frac{d\gamma}{dx} = \gamma$, $f_x = f_x(x, 0)$ ve $f_y(x, 0)$ 'dir.

$\gamma(x) = (f_x, 1, 0)$, $t(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - f_x^2}}(f_x, 1, 0)$ birim teğet vektör alanı,

$$n_\gamma(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - f_x^2 - f_y^2}}(1, f_x, f_y) \text{ ve } b(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - f_x^2 - f_y^2} \sqrt{1 - f_x^2}}(f_y, f_x f_y, 1 - f_x^2)$$

iki birim normal vektör alanlarıdır. Gerekli hesaplamalarla;

$$\kappa_g(x) = \left\langle \frac{dt}{ds}(x), b(x) \right\rangle = \frac{-f_y f_{xx}}{(1 - f_x^2)^{\frac{3}{2}} (1 - f_x^2 - f_y^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.5.4.2)$$

ve

$$\kappa_n(x) = \left\langle \frac{dt}{ds}(x), n_\gamma(x) \right\rangle = \frac{f_{xx}}{(1-f_x^2)(1-f_x^2-f_y^2)^{1/2}} \quad (5.5.4.3)$$

elde edilir ve burada s yay-uzunluk parametresidir. Böylece,

$$\begin{aligned} \tau_g(x) &= \left\langle b(x), \frac{dn_\gamma}{ds}(x) \right\rangle \\ &= \frac{1}{(1-f_x^2)(1-f_x^2-f_y^2)^2} \{f_y^2 f_{yx} - f_x^2 f_y^2 f_{yx} + f_x f_y f_{xx} \\ &\quad + f_{xx} f_x f_y^3 - f_x^3 f_y f_{xx} - f_{yx} + 2f_{yx} f_x^2 - f_{yx} f_x^4\} \end{aligned} \quad (5.5.4.4)$$

elde edilir. Özel durum düşünülürse,

$$f(x, y) = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 \quad (5.5.4.5)$$

olarak ifade edilir. $f_{yx}(0,0) = a_{11}$, $f_{yxx}(0, 0) = 2a_{21}$, $f_{xx}(0, 0) = 2a_{20}$, $f_{xxx}(0,0) = 6a_{30}$ 'dır. Bu ise,

$$\begin{aligned} \kappa_g(0) &= 0, \kappa'_g(0) = -2a_{11}a_{20}, \\ \kappa_n(0) &= a_{20}, \kappa'_n(0) = 6a_{30}, \\ \tau_g(0) &= -a_{11}, \tau'_g(0) = -a_{11}, \end{aligned} \quad (5.5.4.6)$$

olarak gösterilebilir. $\kappa_g(0) = 0$ olduğundan $\tau_g(0) = -a_{11} \neq 0$ olduğu zaman $\overline{D}_r^S$, 0 'a kapalı olarak tanımlanabilir. $\delta_r^S(0) = -a_{20}$ ve $(\delta_o^S)'(0) = 6(a_{30} - 2a_{11}a_{20}a_{21})$ 'dir. Dolayısıyla $a_{20} = 0$ ve $a_{30} \neq 0$ ise $\overline{D}_r^S$ dönüm noktası C ile yerel olarak diffeomorfiktir. Bu yüzden $\overline{D}_r^T$ ve $\overline{D}_s^L$, 0 'a kapalı olarak tanımlanır çünkü $\kappa_g(0) = 0$ 'dır. $\overline{D}_o^S$ ve $\overline{D}_o^L$ için örnekler oluşturulabilir. Bunlar oldukça karmaşıktır bu yüzden bunlar atlanacaktır. Tabi ki genel eğri olan $\gamma(s) = (f(x(s), y(s)), x(s), y(s))$ düşünülürse başka örnekler olabilir (Sato, 2012).

6. LORENTZ-MINKOWSKI 3-BOYUTLU UZAYDA EĞRİLERİN TIMELIKE YÜZEYLER ÜZERİNDE PSEUDO-KÜRESEL NORMAL DARBOUX GÖRÜNTÜLERİ

$\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayı olmak üzere $\mathbb{R}^3$ vektör uzayında herhangi $x = (x_0, x_1, x_2)$ ve $y = (y_0, y_1, y_2)$ için pseudo-skalar çarpım, $\langle x, y \rangle = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2$ olarak tanımlanır (O'Neill, 1983; Ratcliffe, 2006). Sıfırdan farklı $x \in \mathbb{R}_1^3$ vektörü spacelike ise $\langle x, x \rangle > 0$, lightlike ise $\langle x, x \rangle = 0$, timelike ise $\langle x, x \rangle < 0$ 'dır. $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ spacelike ise her $t \in I$ için $\gamma'(t)$ spacelike vektördür. $\gamma(t)$ lightlike nokta ise $\gamma'(t)$ lightlike vektördür. $x \in \mathbb{R}_1^3$ vektörünün normu $\|x\| = \sqrt{|\langle x, x \rangle|}$ ile tanımlanır. Sıfırdan farklı vektör $v \in \mathbb{R}_1^3$ ve c gerçekte sayı için pseudo-normal v ile bir düzlem,

$$P(v, c) = \{x \in \mathbb{R}_1^3 \mid \langle x, v \rangle = c\} \quad (6.1)$$

şeklinde tanımlanır. $P(v, c)$ spacelike düzlem, timelike düzlem ya da lightlike düzlem ise v timelike, spacelike ya da lightlike olarak tanımlanır.

Hiperbolik uzay,

$$H^2(-1) = \{x \in \mathbb{R}_1^3 \mid \langle x, x \rangle = -1\} \quad (6.2)$$

de Sitter uzayı,

$$S_1^2 = \{x \in \mathbb{R}_1^3 \mid \langle x, x \rangle = 1\} \quad (6.3)$$

ve Lightkoni

$$LC^* = \{x \in \mathbb{R}_1^3 \setminus \{0\} \mid \langle x, x \rangle = 0\} \quad (6.4)$$

olarak tanımlanır.

Ayrıca,

$$H_+^2(-1) = \{x \in \mathbb{R}_1^3 \mid \langle x, x \rangle = -1, x_0 > 0\} \quad (6.5)$$

$$H_-^2(-1) = \{x \in \mathbb{R}_1^3 \mid \langle x, x \rangle = -1, x_0 < 0\} \quad (6.6)$$

olmak üzere hiperbolik uzay $H^2(-1) = H_+^2(-1) \cup H_-^2(-1)$ ile verilir (Izumiya vd., 2015).

$H_0^2(-r)$, spacelike bir yüzeydir. Gerçekten bu yüzey için yerel parametrizasyon,

$$\theta_H \in \mathbb{R}, 0 \leq \phi \leq 2\pi, r \text{ sabit}$$

$$x(\theta_H, \phi) = (r \sinh \theta_H \cos \phi, r \sinh \theta_H \sin \phi, r \cosh \theta_H) \quad (6.7)$$

eşitliği ile verilir. Buna göre,

$$\begin{aligned} x_{\theta_H} &= (r \cosh \theta_H \cos \phi, r \cosh \theta_H \sin \phi, r \sinh \theta_H) \\ x_\phi &= (-r \sinh \theta_H \sin \phi, r \sinh \theta_H \cos \phi, 0) \\ x_{\theta_H} \times x_\phi &= r \sinh \theta_H (r \sinh \theta_H \cos \phi, r \sinh \theta_H \sin \phi, r \cosh \theta_H) \end{aligned} \quad (6.8)$$

ve

$$\langle x_{\theta_H} \times x_\phi, x_{\theta_H} \times x_\phi \rangle = -r^4 \sinh^2 \theta_H < 0 \quad (6.9)$$

bulunur. O halde, $N = \frac{x_{\theta_H} \times x_\phi}{|x_{\theta_H} \times x_\phi|}$ birim normal vektör alanı timelike, dolayısıyla

$H_0^2(-1)$ spacelike bir yüzeydir.

$S_1^2(-r)$ timelike bir yüzeydir. Gerçekten bu yüzeyin bir yerel parametrizasyonu da,

$$\theta_L \in \mathbb{R}, 0 \leq \phi \leq 2\pi, r \text{ sabit}$$

$$x(\theta_L, \phi) = (r \cosh \theta_L \cos \phi, r \cosh \theta_L \sin \phi, r \sinh \theta_L) \quad (6.10)$$

eşitliği ile verilir. Buna göre,

$$\begin{aligned}
x_{\theta_L} &= (r \sinh \theta_L \cos \phi, r \sinh \theta_L \sin \phi, r \cosh \theta_L) \\
x_\phi &= (-r \cosh \theta_L \sin \phi, r \cosh \theta_L \cos \phi, 0) \\
x_{\theta_L} \times x_\phi &= -r \cosh \theta_L (r \cosh \theta_L \cos \phi, r \cosh \theta_L \sin \phi, r \sinh \theta_L)
\end{aligned} \tag{6.11}$$

ve

$$\langle x_{\theta_L} \times x_\phi, x_{\theta_L} \times x_\phi \rangle = r^4 \cosh^2 \theta_L < 0 \tag{6.12}$$

bulunur. O halde, $N = \frac{x_{\theta_L} \times x_\phi}{|x_{\theta_L} \times x_\phi|}$ vektör alanı spacelike olup, $S_1^2(-r)$ timelike bir yüzeydir.

LC^* lightlike bir yüzeydir. Bu yüzeyin yerel parametrizasyonu,

$$x(\phi, v) = (v \cos \phi, v \sin \phi, v); \quad v \in \mathbb{R}; \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi \tag{6.13}$$

eşitliği ile verilir. Buna göre,

$$\begin{aligned}
x_\phi &= (-v \sin \phi, v \cos \phi, 0) \\
x_v &= (\cos \phi, \sin \phi, 1) \\
x_\phi \times x_v &= (v \cos \phi, v \sin \phi, v)
\end{aligned} \tag{6.14}$$

ve

$$\langle x_\phi \times x_v, x_\phi \times x_v \rangle = 0 \tag{6.15}$$

bulunur. O halde, $N = x_\phi \times x_v$ lightlike vektör alanı ve dolayısıyla LC^* lightlike bir yüzeydir (Uğurlu ve Gürdal, 2015).

$\mathbb{R}^3$ 'de $\{e_0, e_1, e_2\}$ standart baz olmak üzere herhangi $x = (x_0, x_1, x_2)$, $y = (y_0, y_1, y_2) \in \mathbb{R}_1^3$ için x ile y 'nin pseudo vektör çarpımı,

$$x \wedge y = \begin{vmatrix} -e_0 & e_1 & e_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \end{vmatrix} \tag{6.16}$$

şeklinde tanımlanır.

$U \subset \mathbb{R}^2$ açık küme ve $X : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ timelike gömme olsun. $M = X(U)$ ile X gömmesi boyunca M ve U belirlenebilir. X timelike gömme ise herhangi $p = X(u)$ için teğet uzayı $T_p M$ timelike düzlemdir. $\bar{\gamma} : I \rightarrow U$ düzenli bir eğri olsun. $\gamma(s) = X(\bar{\gamma}(s))$ ile $\gamma : I \rightarrow M \subset \mathbb{R}_1^3$ eğrisi tanımlanabilir. γ , M timelike yüzeyi üzerinde bir eğridir. γ eğrisinin spacelike, timelike veya lightlike noktalar olabileceği gözlemlenebilir. γ 'nın spacelike veya timelike olması durumunda s yay-uzunluğu ile yeniden parametrelendirilebilir. Dolayısıyla $\gamma(s)$ 'nin birim teğet vektörü $t(s) = \gamma'(s)$ 'dir. X timelike bir gömme olduğundan $p = X(u)$ için $M = X(U)$ boyunca birim spacelike normal vektör alanı n ,

$$n(p) = \frac{X_{u_1}(u) \times X_{u_2}(u)}{\|X_{u_1}(u) \times X_{u_2}(u)\|} \quad (6.17)$$

olarak tanımlanır. γ boyunca birim spacelike normal vektör alanı n_γ vardır ve $n_\gamma(s) = n \circ \gamma(s)$ olarak tanımlanır. Bu nedenle, $b(s) = n_\gamma(s) \wedge t(s)$ ile verilen $b(s)$ binormal vektörü oluşturulabilir. $\langle v, e_0 \rangle < 0$ ise v vektörü yönlendirilecektir. M 'nin yönü seçilirse γ spacelike olduğundan b yönlendirilecektir. $\langle t(s), t(s) \rangle = \varepsilon(\gamma(s))$, $\langle n_\gamma(s), n_\gamma(s) \rangle = 1$, $\langle n_\gamma(s), b(s) \rangle = 0$ ve $\langle b(s), b(s) \rangle = -\varepsilon(\gamma(s))$ ve $\varepsilon(\gamma(s)) = \text{sign}(t(s))$ 'dir. γ spacelike ise 1, timelike ise -1 'dir. $\{b(s), n_\gamma(s), t(s)\}$ pseudo-ortonormal çatı ise $\gamma(s)$ spacelike, $\{t(s), b(s), n_\gamma(s)\}$ pseudo-ortonormal çatı ise $\gamma(s)$ timelike olur. Buna $\gamma(s)$ boyunca Lorentzian-Darboux çatısı denir. $k_n(s) = \langle n_\gamma(s), t'(s) \rangle$, $k_g(s) = \langle b(s), t'(s) \rangle$, $\tau_g(s) = \langle n_\gamma(s), b'(s) \rangle$ ve $\varepsilon(\gamma(s)) = \text{sign}(t(s))$ olmak üzere aşağıdaki Frenet-Serret formülleri vardır:

$$\begin{aligned} t'(s) &= k_g(s)b(s) + k_n(s)n_\gamma(s) \\ t'(s) &= -\varepsilon(\gamma(s))k_g(s)b(s) + k_n(s)n_\gamma(s) \\ b'(s) &= -k_g(s)t(s) + \tau_g(s)n_\gamma(s) \\ b'(s) &= \tau_g(s)n_\gamma(s) - \varepsilon(\gamma(s))k_g(s)t(s) \\ n'_\gamma(s) &= -k_n(s)t(s) - \tau_g(s)b(s) \\ n'_\gamma(s) &= \varepsilon(\gamma(s))\tau_g(s)b(s) - \varepsilon(\gamma(s))k_n(s)t(s) \end{aligned} \quad (6.18)$$

$t'(s) = 0$ olması durumunda $k_n(s) = 0$ ve $k_g(s) = 0$ 'dır. Pseudo-küresel normal Darboux görüntülerini tanımlamak için $t'(s) \neq 0$ olarak kabul edilir (Izumiya vd., 2015).

6.1. Yükseklik Fonksiyonları

Bu bölümde, M timelike yüzeyinde eğri üzerinde iki fonksiyon ailesi bulunduğundan bahsedilecektir. Bunlar, spacelike yükseklik fonksiyonlarının ailesi ve timelike yükseklik fonksiyonlarının ailesidir. Ayrıca, pseudo-küresel normal Darboux görüntülerini tanımlanacaktır. M timelike yüzeyinde yükseklik fonksiyonlarının ailesi $\gamma: I \rightarrow M \subset \mathbb{R}_1^3$ eğrisi üzerinde,

$$H^S: I \times S_1^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad (s, v) \mapsto \langle \gamma(s), v \rangle$$

şeklinde tanımlanır. H^S , M yüzeyindeki spacelike yükseklik fonksiyonlarının ailesi olarak adlandırılır. Herhangi sabit $v \in S_1^2$ için $h_v^S(s) = H^S(s, v)$ 'dir. H^S ailesi $\mathbb{R}_1^3$ 'teki timelike düzlemler γ 'nın kontaklığını ölçer. Genel olarak A_k , $1 \leq k \leq 3$ ile sabitlenir. A_k tekliklerini karakterize eden koşullar bir sonraki önermeden elde edilebilir. γ herhangi $s \in I$ için geçerli olduğu eğri ise H^S 'nin dallanmış kümesi tanımlanmamaktadır. $t'(s) \neq 0$ olması $k_n(s) \neq 0$ ya da $k_g(s) \neq 0$ olması anlamına gelmektedir (Izumiya vd., 2015).

Önerme 6.1.1. $k_g^2(s) > \varepsilon(\gamma(s))k_n^2(s)$ ve $t'(s) \neq 0$ olmak üzere γ , s yay-uzunluğu ile parametrelendirilmiş spacelike ya da timelike bir eğri olsun. Herhangi $(s, v) \in I \times S_1^2$ için aşağıdaki verilenler vardır:

- (1) $(h_v^S)'(s) = 0$ gerek ve yeter şart $v = \mu b(s) + \lambda n_\gamma(s)$ olacak şekilde $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ vardır
öyle ki $-\varepsilon(\gamma(s))\mu^2 + \lambda^2 = 1$ 'dir.
- (2) $(h_v^S)'(s) = (h_v^S)''(s) = 0$ gerek ve yeter şart

$$v = \pm \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s) - \varepsilon(\gamma(s))k_n^2(s)}} (k_n(s)b(s) - k_g(s)n_\gamma(s)) \quad (6.1.1)$$

dir.

- (3) $(h_v^S)'(s) = (h_v^S)''(s) = (h_v^S)'''(s) = 0$ gerek ve yeter şart

$$v = \pm \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s) - \varepsilon(\gamma(s))k_n^2(s)}} (k_n(s)b(s) - k_g(s)n_\gamma(s)), \quad (6.1.2)$$

$\sigma_D(s) = 0$ ve $\sigma_D(s) = (k'_g k_n + \varepsilon k_g^2 \tau_g - k_g k'_n - k_n^2 \tau_g)(s)$ 'dir.

(4) $(h_v^S)'(s) = (h_v^S)''(s) = (h_v^S)'''(s) = (h_v^S)^4(s) = 0$ gerek ve yeter şart

$$v = \pm \frac{1}{k_g^2(s) - \varepsilon(\gamma(s))k_n^2(s)} (k_n(s)b(s) - k_g(s)n_\gamma(s)), \quad (6.1.3)$$

$\sigma_D(s) = 0$ ve $(\sigma_D)'(s) = 0$ 'dır (Izumiya vd., 2015).

İspat. Önermeyi göstermek için Frenet-Serret formülleri kullanılır. $\square$

(1) Buradan,

$$(h_v^S)'(s) = \langle \gamma'(s), v \rangle = \langle t'(s), v \rangle = 0 \quad (6.1.4)$$

dir. $v = \mu b(s) + \lambda n_\gamma(s)$ olacak şekilde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vardır $v \in S_1^2$ olduğundan $-\varepsilon(\gamma(s))\mu^2 + \lambda^2 = 1$ 'dir.

(2) $(h_v^S)'(s) = (h_v^S)''(s) = 0$ gerek ve yeter şart $\langle t'(s), \mu b(s) + \lambda n_\gamma(s) \rangle = 0$ 'dır. Buradan $-\varepsilon(\gamma(s))\mu^2 + \lambda^2 = 1$ elde edilir. Bu eşitlik $k_g(s)\mu + k_n(s)\lambda = 0$ ve $-\varepsilon(\gamma(s))\mu^2 + \lambda^2 = 1$ ile eşdeğerdir. Bunun anlamı, $\mu^2(k_g^2(s) - \varepsilon(\gamma(s))k_n^2(s)) = k_n^2(s)$ demektir. Bu nedenle, $k_g^2(s) > \varepsilon(\gamma(s))k_n^2(s)$ ve

$$v = \pm \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s) - \varepsilon(\gamma(s))k_n^2(s)}} (k_n(s)b(s) - k_g(s)n_\gamma(s)) \quad (6.1.5)$$

dir.

(3) $(h_v^S)'(s) = (h_v^S)''(s) = (h_v^S)'''(s) = 0$ gerek ve yeter şart $(k'_g k_n + \varepsilon k_g^2 \tau_g - k_g k'_n - k_n^2 \tau_g)(s) = 0$ 'dır. Öyleyse,

$\sigma_D(s) = (k'_g k_n + \varepsilon k_g^2 \tau_g - k_g k'_n - k_n^2 \tau_g)(s)$ olduğundan

$(\sigma_D)'(s) = k''_g k_n + 2\varepsilon k_g k'_g \tau_g + \varepsilon k_g^2 \tau'_g - k_g k''_n - 2k_n k'_n \tau_g - k_n^2 \tau'_g)(s)$ 'dir.

Fakat $(h_v^S)'(s) = (h_v^S)''(s) = (h_v^S)'''(s) = (h_v^S)^4(s) = 0$ gerek ve yeter şart

$(k''_g k_n + 2\varepsilon k_g k'_g \tau_g + \varepsilon k_g^2 \tau'_g - k_g k''_n - 2k_n k'_n \tau_g - k_n^2 \tau'_g)(s) = 0$ olmalıdır. Böylece

(4) koşuluda ispatlanmıştır (Izumiya vd., 2015).

Yukarıdaki önerme σ_D invaryantını ortaya çıkarır. Yukarıdaki hesaplamalarla $d_\gamma : I \rightarrow S_1^2$ eğrisi tanımlanabilir.

$$t'(s) = -\varepsilon(\gamma(s))k_g(s)b(s) + k_n(s)n_\gamma(s) \quad (6.1.6)$$

olduğundan,

$$\|t'(s)\| = \sqrt{k_g^2(s) - \varepsilon(\gamma(s))k_n^2(s)} \quad (6.1.7)$$

ve

$$\frac{t'(s)}{\|t'(s)\|} = \frac{-\varepsilon(\gamma(s))k_g(s)b(s) + k_n(s)n_\gamma(s)}{\sqrt{k_g^2(s) - \varepsilon(\gamma(s))k_n^2(s)}} \quad (6.1.8)$$

elde edilir. O halde, $k_g^2(s) - \varepsilon(\gamma(s))k_n^2(s) > 0$ ise,

$$d_\gamma(s) = \frac{k_g(s)}{\sqrt{k_g^2(s) - \varepsilon(\gamma(s))k_n^2(s)}}n_\gamma(s) - \frac{k_n(s)}{\sqrt{k_g^2(s) - \varepsilon(\gamma(s))k_n^2(s)}}b(s) \quad (6.1.9)$$

dir. γ 'nın de Sitter normal Darboux görüntüsü d_γ olarak tanımlanır (Sato,2012; Hananoi vd., 2015).

Yardımcı Teorem 6.1.2. $d'_\gamma(s) = 0$ gerek ve yeter şart $\sigma_D(s) = 0$ olmalıdır. Yani herhangi $s \in I$ için γ 'nın de Sitter normal Darboux görüntüsünün sabit olması için $\sigma_D(s) = 0$ olmalıdır (Izumiya vd., 2015).

İspat.

$$d'_\gamma(s) = \left(\frac{-k'_n k_g + k_n k'_g + \varepsilon k_g^2 \tau_g - k_n^2 \tau_g}{(k_g^2 - \varepsilon k_n^2) \sqrt{k_g^2 - \varepsilon k_n^2}} \right)(s) (k_g(s)b(s) - \varepsilon k_n(s)n_\gamma(s)) \quad (6.1.10)$$

Bu nedenle $d'_\gamma(s) = 0$ gerek ve yeter şart $\sigma_D(s) = (-k'_n k_g + k_n k'_g + \varepsilon k_g^2 \tau_g - k_n^2 \tau_g)(s) = 0$ olmalıdır (Izumiya vd., 2015). $\square$

Yükseklik fonksiyonlarının ailesi $\gamma: I \rightarrow M \subset \mathbb{R}_1^3$ eğrisi üzerinde tanımlanır. M timelike yüzeyi üzerinde,

$$H^T: I \times H^2(-1) \rightarrow \mathbb{R}; (s, v) \mapsto \langle \gamma(s), v \rangle$$

biçiminde gösterilir. γ 'nın M üzerindeki timelike yükseklik fonksiyonlarının ailesi H^T olarak adlandırılır. Herhangi sabit $v \in H^2(-1)$ için $h_v^T(s) = H^T(s, v)$ 'dir. H^T ailesi, $\mathbb{R}_1^3$ 'deki spacelike düzlemlerle γ 'nın kontaklığını ölçer. Genel olarak A_k , $1 \leq k \leq 3$ ile

sabitlenir A_k tekiliğini karakterize eden koşullar bir sonraki önermeden anlaşılabilir. Herhangi $(s, v) \in I \times H^2(-1)$ için $(h_v^T)'(s) = 0$ gerek ve yeter şart $v = \mu b(s) + \lambda n_\gamma(s)$ olacak şekilde $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ vardır öyle ki $-\varepsilon(\gamma(s))\mu^2 + \lambda^2 = -1$ 'dir (Izumiya vd., 2015).

Uyarı 6.1.3 ((a)). γ 'nın timelike eğri yani $\varepsilon(\gamma(s)) = -1$ olduğu durumda bazı $s \in I$ için $(h_s^T)'(s) = 0$ olacak şekilde $v \in H^2(-1)$ yoktur. Bu yüzden, timelike bir eğri için H^T 'nin dallanmış kümesinin boş olduğunu görülür. Bu durumda, M timelike yüzeyinde sadece γ spacelike eğrisi düşünülür.

(b) $k_n^2(s) \leq k_g^2(s)$ olmak üzere h_v^T yükseklik fonksiyonu s 'de $A_{\geq 2}$ tekiliğine sahip değildir. Diğer bir deyişle, herhangi $s \in I$ için γ spacelike eğri ise eşitsizlik sağlanır. H^T 'nin dallanmış kümesi tanımlı değildir (Izumiya vd., 2015).

Önerme 6.1.4. $k_n^2(s) > k_g^2(s)$ ve $t'(s) \neq 0$ ile γ spacelike bir eğri olsun. Herhangi $(s, v) \in I \times H^2(-1)$ için aşağıdaki verilenler vardır:

(1) $(h_v^T)'(s) = 0$ gerek ve yeter şart $v = \mu b(s) + \lambda n_\gamma(s)$ olacak şekilde $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ vardır öyle ki $-\mu^2 + \lambda^2 = -1$ 'dir.

(2) $(h_v^T)'(s) = (h_v^T)''(s) = 0$ gerek ve yeter şart

$$v = \pm \frac{1}{\sqrt{k_n^2(s) - k_g^2(s)}} (k_n(s)b(s) - k_g(s)n_\gamma(s)) \quad (6.1.11)$$

dir.

(3) $(h_v^T)'(s) = (h_v^T)''(s) = (h_v^T)'''(s) = 0$ gerek ve yeter şart

$$v = \pm \frac{1}{\sqrt{k_n^2(s) - k_g^2(s)}} (k_n(s)b(s) - k_g(s)n_\gamma(s)), \quad (6.1.12)$$

$\sigma_H(s) = 0$ ve $\sigma_H(s) = (k_g k_n' + k_n^2 \tau_g - k_g' k_n - k_g^2 \tau_g)(s)$ 'dir.

(4) $(h_v^T)'(s) = (h_v^T)''(s) = (h_v^T)'''(s) = (h_v^T)^{(4)}(s) = 0$ gerek ve yeter şart

$$v = \pm \frac{1}{\sqrt{k_n^2(s) - k_g^2(s)}} (k_n(s)b(s) - k_g(s)n_\gamma(s)), \quad (6.1.13)$$

$\sigma_H(s) = 0$ ve $(\sigma_H)'(s) = 0$ 'dır (Izumiya vd., 2015).

İspat. Önermeyi ispatlamak için γ 'nın spacelike olduğu durumda Frenet-Serret tipi formüller kullanılır. $\square$

(1) Buradan,

$$(h_v^T)'(s) = \langle \gamma'(s), v \rangle = \langle t(s), v \rangle = 0 \quad (6.1.14)$$

elde edilir. $v = \mu b(s) + \lambda n_\gamma(s)$ olacak şekilde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vardır. $v \in H^2(-1)$ olduğundan $-\mu^2 + \lambda^2 = -1$ 'dir.

(2) $(h_v^T)'(s) = (h_v^T)''(s) = 0$ gerek ve yeter şart $-\mu^2 + \lambda^2 = 1$ ile $\langle t'(s), \mu b(s) + \lambda n_\gamma(s) \rangle = 0$ olmalıdır. Bu eşitlik, $k_g(s)\mu + k_n(s)\lambda = 0$ ve $-\mu^2 + \lambda^2 = -1$ ile eşdeğerdir. Bu ise, $\mu^2(k_n^2(s) - k_g^2(s)) = k_n^2(s)$ anlamına gelir. Bu nedenle $k_n^2(s) > k_g^2(s)$ olmak üzere,

$$v = \pm \frac{1}{k_n^2(s) - k_g^2(s)} (k_n(s)b(s) - k_g(s)n_\gamma(s)) \quad (6.1.15)$$

dir.

(3) $(h_v^T)'(s) = (h_v^T)''(s) = (h_v^T)'''(s) = 0$ gerek ve yeter şart $(k_g k_n' + k_n^2 \tau_g - k_g' k_n - k_g^2 \tau_g) = 0$ olmalıdır.

$\sigma_H(s) = (k_g k_n' + k_n^2 \tau_g - k_g' k_n - k_g^2 \tau_g)(s)$ olduğundan,

$(\sigma_H)'(s) = (k_g k_n'' - k_g'' k_n + 2k_n k_n' \tau_g + k_n^2 \tau_g' - 2k_g k_g' \tau_g - k_g^2 \tau_g')(s)$ 'dir. Fakat

$(h_v^T)'(s) = (h_v^T)''(s) = (h_v^T)'''(s) = (h_v^T)^{(4)}(s) = 0$ gerek ve yeter şart

$(k_g k_n'' - k_g'' k_n + 2k_n k_n' \tau_g + k_n^2 \tau_g' - 2k_g k_g' \tau_g - k_g^2 \tau_g')(s) = 0$ olmalıdır. Böylece

(4) koşulu ispatlanmıştır (Izumiya vd., 2015).

Yukarıdaki önerme σ_H invariantını ortaya çıkarır ve hesaplamalarla $h_\gamma : I \rightarrow H^2(-1)$ eğrisi tanımlanır. $k_n^2(s) - k_g^2(s) > 0$ ise,

$$h_\gamma(s) = -\frac{k_g(s)}{\sqrt{k_n^2(s) - k_g^2(s)}} n_\gamma(s) + \frac{k_n(s)}{\sqrt{k_n^2(s) - k_g^2(s)}} b(s), \quad (6.1.16)$$

dir. γ 'nın hiperbolik normal Darboux görüntüsü h_γ olarak tanımlanır (Sato, 2012; Hananoi vd., 2015).

h_γ hiperbolik normal Darboux görüntüsü $H_+^2(-1)$ ya da $H_-^2(-1)$ parçalarına sahiptir.

Burada sadece h_γ 'nın $H_+^2(-1)$ 'de olduğunu düşünülüyor. $h_\gamma, H_+^2(-1)$ 'de yer alıyorsa

$-h_\gamma$ yerine h_γ kabul edilir. Gerekirse daha küçük bir I aralığı alınır böylece $h_\gamma(I),$

$H_+^2(-1)$ 'in yakınında olur (Izumiya vd., 2015).

Yardımcı Teorem 6.1.5. $h'_\gamma(s) = 0$ gerek ve yeter şart $\sigma_H(s) = 0$ olmalıdır. Diğer bir deyişle γ 'nın hiperbolik normal Darboux görüntüsü sabittir gerek ve yeter şart herhangi $s \in I$ için $\sigma_H(s) = 0$ olmalıdır (Izumiya vd., 2015).

İspat.

$$h'_\gamma(s) = \left(\frac{-k_n k'_g + k'_n k_g - k_g^2 \tau_g + k_n^2 \tau_g}{(k_n^2 - k_g^2) \sqrt{k_n^2 - k_g^2}} \right) (s) (k_n(s) n_\gamma(s) - k_g(s) b(s)) \quad (6.1.17)$$

Bu nedenle, $h'_\gamma(s) = 0$ gerek ve yeter şart $\sigma_H(s) = (k'_n k_g - k_n k'_g - k_g^2 \tau_g + k_n^2 \tau_g)(s) = 0$ olmalıdır (Izumiya vd., 2015). $\square$

γ 'nın pseudo-küresel normal Darboux görüntüleri d_γ ve h_γ 'dır. Normal Darboux görüntüsü $d_\gamma(s) = v_0$ sabittir gerek ve yeter şart $\sigma_D(s) \equiv 0$ 'dır. Bu durumda, $h_{v_0}^S$ sabittir yani $\langle \gamma(s), v_0 \rangle = c$ olacak şekilde bir $c \in \mathbb{R}$ vardır. $P(v_0, c)$ timelike bir düzlemdir ve bu $\text{Im } \gamma \subset P(v_0, c) \cap M$ anlamına gelir. $v \in S_1^2$ için $P(v, c) \cap M$ formundaki eğriler M üzerindeki model eğrilerdir. Buna M 'nin de Sitter-parçası denir. Burada $P(v, c) \cap M$ 'nin düzenli eğri olması için D -parçasının $k_n \neq 0$ olduğu belirtilirken aksi takdirde $P(v, c) \cap M$ tekil bir eğridir. Gerçekten $k_n(s_0) = 0$ ise $v = -n_\gamma(s_0)$ ya da $v = n_\gamma(s_0)$ olduğu için $d_\gamma(s_0) = v$ vardır ve böylece $P(v, c_0)$, M 'nin teğet düzlemi $T_{\gamma(s_0)} M$ 'dir. $c_0 = h_v^S(s_0)$ olmak üzere $P(v, c_0) \cap M$ tekil bir noktaya sahiptir çünkü üç boyutlu uzayda iki yüzeyin çapraz olmayan kesişimidir. Aynı şekilde $v \in H^2(-1)$ için $P(v, c) \cap M$ ile verilen M 'nin hiperbolik parçası tanımlanır. $v \in H^2(-1)$ için $P(v, c)$ spacelike düzlemdir ve M ise timelike yüzey olduğundan H -parçası daima düzenli bir eğridir (Izumiya vd., 2015).

Önerme 6.1.6 ((a)). $k_g^2(s) > \varepsilon(\gamma(s)) k_n^2(s)$ ve $t'(s) \neq 0$ olmak üzere yay-uzunluğu tarafından parametrelendirilmiş $\gamma: I \rightarrow M$ spacelike ya da timelike eğrisinin de Sitter normal Darboux görüntüsü sabittir. $v_0 \in S_1^2$ ve herhangi $s \in I$ için $\sigma_D = 0$ ise γ , $P(v_0, c) \cap M$ ile verilen M 'nin D -parça eğrisinin bir bölümüdür.

(b) $k_g^2(s) > k_n^2(s)$ ve $t'(s) \neq 0$ ile yay-uzunluğu tarafından parametrelendirilmiş $\gamma: I \rightarrow M$ spacelike eğrisinin hiperbolik normal Darboux görüntüsü sabittir.

$v_0 \in H_+^2(-1)$ ve herhangi $s \in I$ için $\sigma_H = 0$ ise $\gamma, P(v_0, c) \cap M$ ile verilen M 'nin H -parça eğrisinin bir bölümüdür.

Sonuç olarak, pseudo-küresel normal Darboux görüntülerinin sabit olması yani $h'_\gamma \equiv 0$ ve $d'_\gamma \equiv 0$ olması ya da invaryantlarının sıfıra eşdeğer olması durumunda γ, M üzerinde bir model eğridir gerek ve yeter şart pseudo-küresel normal Darboux görüntüleri sabittir. σ_D ve σ_H invaryantlarının geometrisini incelemek için eğriler ve yüzeyler arasındaki kontak mertebeleri tanımlanacaktır (Izumiya vd., 2015).

Tanım 6.1.7. $F : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ($F|_M : M \rightarrow \mathbb{R}$) daldırılsın ve $\gamma : I \rightarrow M$ düzenli bir eğri olsun. γ ve $F^{-1}(0)$, s_0 'da k . mertebeden kontaktır $f(s) = F \circ \gamma(s)$ fonksiyonu ile $f(s_0) = f'(s_0) = \dots = f^k(s_0) = 0$ ve $f^{(k+1)}(s_0) \neq 0$ elde edilir. Bu yüzden f, s_0 'da A_k tekilliğine sahiptir. Aşağıdaki fonksiyonların ailesi tanıtılacaktır:

$$H^S : \mathbb{R}_1^3 \times S_1^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, v) \mapsto \langle x, v \rangle$$

Herhangi $v \in S_1^2$ için $h_v^S(x) = H^S(x, v)$ olarak tanımlanır. Buradan,

$$h_v^S(s) = \langle \gamma(s), v \rangle = H^S(\gamma(s), v) = h_v^S(\gamma(s)) \quad (6.1.18)$$

elde edilir. Ayrıca, $s_0 \in I$ ile $v_0 = d_\gamma(s_0)$ verildiğinde, $(h_{v_0}^S|_M)^{-1}(c)$, M 'nin bir D -parçasıdır. $c_0 = h_{v_0}^S(s_0)$ olmak üzere $(h_{v_0}^S)^{-1}(c_0) = P(v_0, c_0)$, $\gamma(s_0)$ 'da γ 'ya teğettir, $v_0 = d_\gamma(s_0)$ 'a göre $\gamma(s_0)$ 'daki γ 'nın timelike teğet düzlemi $TP_{v_0, \gamma(s_0)}^T = P(v_0, c_0)$ ile gösterilir. (Izumiya vd., 2015).

Yardımcı Teorem 6.1.8. $\gamma : I \rightarrow M$ yay-uzunluk parametresi s olan spacelike ya da timelike bir eğri olsun. Burada $k_g^2(s) - \varepsilon(\gamma(s))k_n^2(s) > 0$, $t'(s) \neq 0$, $c_0 = h_{v_0}^S(s_0)$ ve $v_0 = d_\gamma(s_0)$ 'dır. $k_n(s_0) \neq 0$ ise D -parçası olan $(h_{v_0}^S|_M)^{-1}(c_0)$, $\gamma(s_0)$ 'da tekil değildir ve $\sigma_D \neq 0$ 'dır. O halde, $\gamma(s_0)$ 'da γ 'ya teğet olan M 'nin D -parça eğrisi vardır (Izumiya vd., 2015).

İspat. $\gamma(s_0)$ 'da D -parçası olan $(h_{v_0}^S|_M)^{-1}(c_0)$ ve γ çapraz olarak kesişsinler. $P(v_0, c_0)$, γ 'ya teğet olduğundan ve $P(v_0, c_0)$ D -parçasını içerdiği için $\gamma(s_0)$ ve D -parçasına teğet

vektör M teğet düzlemini üretir. Bu nedenle $P(v_0, c_0)$ bir düzlemdir yani D -parçası tekildir ve bir çelişki vardır (Izumiya vd., 2015). $\square$

$\sigma_D \equiv 0$ ise γ, M 'nin D -parça eğrisinin bir bölümüdür. $\sigma_D \neq 0$ ise γ ve D -parça eğrisi teğettir. Bu sonuçlarla, bir eğride M ile kesişen timelike teğet düzlemi gözlemlenir. D -parçası $(h_{v_0}^S|_M)^{-1}(c_0)$ ile $\gamma(s_0)$ 'daki γ 'nın teğet D -parçası ise $TP_{M, \gamma(s_0)}^T$ ile gösterilir. γ ve $TP_{v_0, \gamma(s_0)}^T, \gamma(s_0)$ 'da üçüncü mertebeden kontaklıdır gerek ve yeter şart $\sigma_D(s_0) = 0$ ve $(\sigma_D)'(s_0) \neq 0$ olmalıdır. $k_n(s_0) \neq 0$ olduğunda yukarıdaki koşullarla γ ve $T_{M, \gamma(s_0)}^D$ 'nın $\gamma(s_0)$ 'da üçüncü mertebeden kontağa sahip olduğu durumu eşdeğerdir (Izumiya vd., 2015).

Önerme 6.1.9. $k_g^2(s) - \varepsilon(\gamma(s))k_n^2(s) > 0$ ve $\|t'(s)\| \neq 0$ olmak üzere $\gamma: I \rightarrow M, s$ yay uzunluk parametresi ile spacelike yada timelike bir eğri olsun. Aşağıdaki koşullar eşdeğerdir:

- (1) $v_0 = d_\gamma(s_0)$ olmak üzere γ ve timelike teğet düzlemi $TP_{v_0, \gamma(s_0)}^T$, üçüncü mertebeden kontaklıdır,
- (2) $\sigma_D(s_0) = 0$ ve $\sigma_D'(s_0) \neq 0$ 'dır.
- (3) $k_n(s_0) \neq 0$ ise γ 'nın $\gamma(s_0)$ 'daki teğet D -parçası $T_{M, \gamma(s_0)}^D$ tekil değildir. γ ve teğet D -parçası $T_{M, \gamma(s_0)}^D$ üçüncü mertebeden kontaklıdır (Izumiya vd., 2015).

İspat. $v_0 = d_\gamma(s_0)$ ve $c_0 = h_{v_0}^S(s_0)$ için, $F(x) = \widetilde{h_{v_0}^S} = \langle x, v_0 \rangle - c_0$ ile $F = \widetilde{h_{v_0}^S}: \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}$ biçiminde tanımlanır. $f = F \circ \gamma$ 'dır. Böylece ispat tamamlanır (Izumiya vd., 2015). $\square$

Bir H -parçası her zaman düzenli eğridir. Ayrıca timelike yükseklik fonksiyonlarının ailesi,

$$H^T: \mathbb{R}_1^3 \times H_+^2(-1) \rightarrow \mathbb{R}; \quad (x, v) \mapsto \langle x, v \rangle$$

olarak tanımlanır. Yukarıdaki durumla tamamen aynı koşullarla, $v_0 = h_\gamma(s_0)$ 'a göre, $\gamma(s_0)$ 'daki γ 'nın spacelike teğet düzlemi ve $\gamma(s_0)$ 'daki γ 'nın teğet H -parçası kavramları vardır. Bunlar sırasıyla $TP_{v_0, \gamma(s_0)}^S$ ve $T_{M, \gamma(s_0)}^H$ olarak gösterilir. Bu durumda, teğet H -parçası daima $\gamma(s_0)$ 'da tekil değildir (Izumiya vd., 2015).

Yardımcı Teorem 6.1.10. $\gamma: I \rightarrow M, s$ yay-uzunluğu ile parametrelendirilmiş spacelike

bir eğri olsun. Burada, $k_n^2(s) - k_g^2(s) > 0$, $t'(s) \neq 0$, $c_0 = h_{v_0}^T(s_0)$ ve $v_0 = h_\gamma(s_0)$ 'dır. $\sigma_H \neq 0$ ise H -parçası $(h_{v_0}^T|_M)^{-1}(c_0)$, $\gamma(s_0)$ 'daki γ 'ya teğet M 'nin eğrisidir. $\sigma_H \equiv 0$ ise γ , M 'nin H -parça eğrisinin bir bölümüdür. Eğer $\sigma_H \neq 0$ ise γ ve M 'nin H -parça eğrisi teğettir. Bu sonuçlarla bir eğride M 'yi kesen spacelike bir teğet düzlem kullanıldığı görülür. Bir sonraki sonuçlarda sadece spacelike eğrisi göz önüne alınmalıdır (Izumiya vd., 2015).

Önerme 6.1.11. $\gamma: I \rightarrow M$, s yay-uzuluğu ile parametrelendirilmiş spacelike eğri olsun. $k_n^2(s) - k_g^2(s) > 0$ ve $t'(s) \neq 0$ olmak üzere aşağıdaki koşullar eşdeğerdir:

- (1) $v_0 = h_\gamma(s_0)$ olmak üzere γ ve $TP_{v_0, \gamma(s_0)}^S$ spacelike teğet düzlemi üçüncü mertebeden kontaktır,
- (2) $\sigma_H(s_0) = 0$ ve $\sigma'_H(s_0) \neq 0$ 'dır,
- (3) γ ve teğet H -parçası $T_{M, \gamma(s_0)}^H$, üçüncü mertebeden kontaktır (Izumiya vd., 2015).

6.2. Fonksiyonların Dağılımı

Bu bölümde, pseudo-küresel normal Darboux görüntülerinin tekilliği incelenerek yeni sonuçlar elde etmek için dağılım teorisinde iyi bilinen bir teorem kullanılacaktır.

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (s_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$$

bir fonksiyon olsun. $f(s) = F_{x_0}(s)$ olmak üzere F , f 'nin bir r -parametrelili dağılımı olarak adlandırılır. $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ 'nin s_0 'daki kısmi türevinin $(k-1)$ -jetti

$$j^{k-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(s, x_0)\right)(s_0) = \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{ji} s^j, \quad i = 1, \dots, r \quad (6.2.1)$$

olarak tanımlanır. F , $(k-1) \times r$ katsayılı matris ve rankı $k-1$ ise F 'ye (p) -versal dağılımı denir. F 'nin dallanmış kümesi;

$$B_F = \{x \in \mathbb{R}^r \mid \frac{\partial F}{\partial s}(s, x) = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(s, x) = 0, (s, x) \text{'deki bazı } s \text{'ler için}\} \quad (6.2.2)$$

şeklinde tanımlanır (Bruce ve Giblin, 1992).

Teorem 6.2.1. s_0 'da A_k tekilliği olan ve f nin r -parametreli dağılımı,

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (s_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$$

olsun. F bir p -versal dağılımı ve $k = 3$ ise $C = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 = x_2^3\}$ olmak üzere B_F , x_0 'da diffeomorfiktir (Izumiya vd., 2015).

Önerme 6.2.2. $t'(s) \neq 0$ ve $\gamma : I \rightarrow M$ yay uzunluğu tarafından parametrelendirilen bir eğri olsun.

(1) γ timelike eğrisi için $B_{H^S} = \{d_\gamma(s) \mid s \in I\}$ olur ve B_{H^T} boştur.

(2) Spacelike eğri için ise,

(a) $k_g^2(s) - k_n^2(s) > 0$ ise $B_{H^S} = \{d_\gamma(s) \mid s \in I\}$ olur ve B_{H^T} boştur.

(b) $k_g^2(s) - k_n^2(s) < 0$ ise B_{H^S} boştur ve $B_{H^T} = \{h_\gamma(s) \mid s \in I\}$ 'dir.

Bir sonraki sonuçta, h_v^S 'nin s_0 'da A_3 tekilliğine sahip olması durumunda $t'(s_0) \neq 0$ koşuluna ihtiyaç vardır (Izumiya vd., 2015).

Önerme 6.2.3. $t'(s_0) \neq 0$ ve $\gamma : I \rightarrow M$, s yay-uzunluğu ile parametrelendirilmiş spacelike ya da timelike eğrisi için,

(1) h_v^S, s_0 'da A_3 tekilliğine sahipse H^S, s_0 'da h_v^S 'nin p -versal dağılımıdır.

Spacelike γ eğrisi için:

(2) h_v^T, s_0 'da A_3 tekilliğine sahipse H^T, s_0 'da h_v^T 'nin p -versal dağılımıdır (Izumiya vd., 2015)

İspat.

(1) $\gamma(s) = (x_0(s), x_1(s), x_2(s), x_3(s))$ ve $v = (v_0, v_1, \sqrt{1 + v_0^2 - v_1^2}) \in S_1^2$ olmak üzere,

$$H^S(s, v) = -x_0(s)v_0 + x_1(s)v_1 + x_2(s)\sqrt{1 + v_0^2 - v_1^2} \quad (6.2.3)$$

ve

$$\frac{\partial H^S}{\partial v_0} = -x_0(s) + \frac{v_0}{\sqrt{1+v_0^2-v_1^2}}x_2(s) \quad (6.2.4)$$

$$\frac{\partial H^S}{\partial v_1} = x_1(s) - \frac{v_1}{\sqrt{1+v_0^2-v_1^2}}x_2(s)$$

$$\frac{\partial^2 H^S}{\partial s \partial v_0} = -x'_0(s) + \frac{v_0}{\sqrt{1+v_0^2-v_1^2}}x'_2(s) \quad (6.2.5)$$

$$\frac{\partial^2 H^S}{\partial s \partial v_1} = x'_1(s) - \frac{v_1}{\sqrt{1+v_0^2-v_1^2}}x'_2(s)$$

$$\frac{\partial^3 H^S}{\partial s^2 \partial v_0} = -x''_0(s) + \frac{v_0}{\sqrt{1+v_0^2-v_1^2}}x''_2(s) \quad (6.2.6)$$

$$\frac{\partial^3 H^S}{\partial s^2 \partial v_1} = x''_1(s) - \frac{v_1}{\sqrt{1+v_0^2-v_1^2}}x''_2(s)$$

dir. Buradan,

$$A = \begin{pmatrix} -x'_0(s) + \frac{v_0}{\sqrt{1+v_0^2-v_1^2}}x'_2(s) & x'_1(s) - \frac{v_1}{\sqrt{1+v_0^2-v_1^2}}x'_2(s) \\ -x''_0(s) + \frac{v_0}{\sqrt{1+v_0^2-v_1^2}}x''_2(s) & x''_1(s) - \frac{v_1}{\sqrt{1+v_0^2-v_1^2}}x''_2(s) \end{pmatrix} \quad (6.2.7)$$

matrisi elde edilir. $k_g^2(s) > \varepsilon(\gamma(s))k_n^2(s)$, $\sigma_D(s) = 0$ ve $\sigma'_D(s) \neq 0$ olmak üzere,

$$v = \pm \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s) - \varepsilon(\gamma(s))k_n^2(s)}}(k_n(s)b(s) - k_g(s)n_\gamma(s)), \quad (6.2.8)$$

dir. (1) iddiasını ispatlamak için, matrisin tekil olmadığı yani $\det A \neq 0$ olduğu gösterilmelidir. A matrisinin determinanı ise,

$$\begin{aligned}
\det A &= ((x'_0, x'_1, x'_2) \wedge (x''_0, x''_1, x''_2)) \begin{pmatrix} \frac{v_0}{\sqrt{1+v_0^2-v_1^2}} \\ -\frac{v_1}{\sqrt{1+v_0^2-v_1^2}} \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{1+v_0^2-v_1^2}} (t \wedge (-\varepsilon(\gamma(s))k_g(s)b(s) + k_n(s)n_\gamma(s)) \begin{pmatrix} -v_0 \\ \frac{v_1}{\sqrt{1+v_0^2-v_1^2}} \end{pmatrix} \\
&= \pm \frac{\sqrt{k_g^2(s) - \varepsilon(\gamma(s))k_n^2(s)}}{\sqrt{1+v_0^2-v_1^2}} \neq 0
\end{aligned} \tag{6.2.9}$$

elde edilir. Aynı şekilde timelike yükseklik fonksiyonu H^T göz önünde bulundurularak bunun ispatı yapılabilir (2) (Izumiya vd., 2015).

□

Önceki sonuçların bir sonucu olarak, pseudo- küresel Darboux görüntüler, invaryantlar, parça eğrileri ve teğet düzlem ile γ 'nın kontaklığını ifade eden şu teoremler vardır:

Teorem 6.2.4. $\gamma : I \rightarrow M$ spacelike ya da timelike düzenli bir eğri olsun. O halde aşağıdaki koşullar vardır:

- (1) $\sigma_D(s_0) \neq 0$ ise de Sitter normal Darboux görüntüsü s_0 'da düzenlidir.
- (2) Aşağıdaki koşullar eşdeğerdir:
 - (i) $C = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 = x_2^3\}$ olmak üzere s_0 yakınındaki de Sitter normal darboux görüntüsü dönüm noktası C ile diffeomorftur;
 - (ii) $\sigma_D(s_0) = 0$ ve $\sigma'_D(s_0) \neq 0$ 'dır;
 - (iii) γ ve timelike teğet düzlemi $TP_{v_0, \gamma(s_0)}^T$ üçüncü mertebeden kontaklıdır;
 - (iv) $k_n(s_0) \neq 0$ ise $\gamma(s_0)$ 'daki γ 'nın teğet D -parçası $T_{M, \gamma(s_0)}^D$ tekil değildir. γ ve teğet D -parçası $T_{M, \gamma(s_0)}^D$ üçüncü mertebeden kontaklıdır (Izumiya vd., 2015).

İspat.

□

- (1) $d'_\gamma(s) = 0$ gerek ve yeter şart $\sigma_D(s) = 0$ olmalıdır. Bunun anlamı, $\sigma_D(s_0) \neq 0$ ise de Sitter normal Darboux görüntüsü s_0 'da düzenlidir.

- (2) H^S 'nin dallanmış kümesi,

$$B_{H^s} = \left\{ v = \pm \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s) - \varepsilon(\gamma(s))k_n^2(s)}} (k_n(s)b(s) - k_g(s)n_\gamma(s)) \right\} \quad (6.2.10)$$

şeklinde tanımlanır. $\sigma_D(s_0) = 0$ ve $\sigma'_D(s_0) \neq 0$ ise dallanmış küme ile dönüm noktası yerel diffeomorfiktir (Izumiya vd., 2015).

Teorem 6.2.5. $\gamma: I \rightarrow M$ spacelike düzenli bir eğri olsun. O halde aşağıdaki verilenler vardır:

- (1) $\sigma_H(s_0) \neq 0$ ise, hiperbolik Darboux görüntüsü s_0 'da düzenlidir.
- (2) Aşağıdaki koşullar denktir:
 - (i) s_0 yakınındaki hiperbolik normal Darboux görüntüsü dönüm noktası C ile diffeomorfiktir;
 - (ii) $\sigma_H(s_0) = 0$ ve $\sigma'_H(s_0) \neq 0$ 'dır;
 - (iii) γ ve spacelike teğet düzlemi $TP_{v_0, \gamma(s_0)}^S$ üçüncü mertebeden kontaktır;
 - (iv) γ ve teğet H -parçası $T_{M, \gamma(s_0)}^H$ üçüncü mertebeden kontaktır (Izumiya vd., 2015).

6.3. Timelike Yüzeyler Üzerindeki Eğri Örnekleri

Bu bölümde timelike yüzey üzerinde iki eğri örneği düşünülmektedir. Timelike düzlemdeki eğriler R_1^2 ve de Sitter uzayındaki eğriler S_1^2 'dir. Bu durumda, pseudo-küresel normal Darboux görüntüleriyle ilgili örnekler aşağıda verilmiştir (Izumiya vd., 2015).

Örnek 6.3.1. $M = \mathbb{R}_1^2 = \{x = (x_0, x_1, x_2) \mid x_2 = 0\}$ olmak üzere $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ bir düzlem eğrisi olsun. Bu durumda $n_\gamma = e_2$, $t(s) = \gamma'(s)$ ve $b(s) = e_2 \wedge t(s)$ 'dir. Burada $k_n(s) \equiv \tau_g(s) \equiv 0$ ve $k_g = \langle b(s), t'(s) \rangle = -\varepsilon(\gamma(s))k(s)$ olarak alınırsa Minkowski düzleminde aşağıdaki Frenet-Serret formülleri vardır:

$$b'(s) = \tau_g(s)n_\gamma(s) - \varepsilon(\gamma(s))k_g(s)t(s) \quad (6.3.1)$$

$$b'(s) = k(s)t(s)$$

$$t'(s) = -\varepsilon(\gamma(s))k_g(s)b(s) + k_n(s)n_\gamma(s)$$

$$t'(s) = k(s)b(s)$$

(Saloom ve Tari, 2012). Burada $\sigma_D \equiv 0$ ve γ 'nın de Sitter normal Darboux görüntüsü sabittir. $d_\gamma(s) = n_\gamma = e_2$ 'dir. D -parçasının $\mathbb{R}_1^2$ olduğu anlamına gelir çünkü $M = P(e_2, c) \cap M$ 'dir. $k_n \equiv 0$ ise hiperbolik normal Darboux görüntüleri yoktur. $\mathbb{R}_1^2$ 'deki γ 'nın evolütlerinin incelendiği gözlemlenmektedir (Saloom ve Tari, 2012). Yukarıdaki tüm durumlarda evolütler $\mathbb{R}_1^3$ 'de γ 'nın fokal yüzeyinin kesişimi ile verilir (Nabarro ve Sacramento, 2015). Bu nedenle γ 'nın fokal yüzeyinin S_1^2 de Sitter pseudo-küresini benzersiz bir noktada kestiğine ve fokal yüzeyinin $H^2(-1)$ hiperbolik pseudo-küresini kesmediğine karar verilir. Verilen örnekte $k_n \equiv 0$ olduğundan $M = P(e_2, c) \cap M$ ve γ 'nın de Sitter normal Darboux görüntüsü ile bile M üzerinde bir model eğri olarak düşünülmediği görülür (Izumiya vd., 2015).

Örnek 6.3.2. $M = S_1^2$ olmak üzere $\gamma: I \rightarrow S_1^2$ yay uzunluğu ile parametrelendirilmiş eğri olsun. Bu durumda, $n_\gamma(s) = \gamma(s)$, $t(s) = \gamma'(s)$, $\|t(s)\| = 1$ ve $b(s) = n_\gamma(s) \wedge t(s)$ 'dir. Bu nedenle, $\tau_g(s) = 0$, $k_n(s) = -\varepsilon(\gamma(s))$ 'dir. γ spacelike ise $\varepsilon(\gamma(s)) = 1$, γ timelike ise $\varepsilon(\gamma(s)) = -1$ 'dir. Frenet-Serret formülleri ile aşağıdaki formüller vardır:

$$t'(s) = -\varepsilon(\gamma(s))k_g(s)b(s) + k_n(s)n_\gamma(s) \quad (6.3.2)$$

$$t'(s) = -\varepsilon(\gamma(s))\gamma(s) - \varepsilon(\gamma(s))k_g(s)b(s)$$

$$\gamma'(s) = t(s)$$

$$b'(s) = \tau_g(s)n_\gamma(s) - \varepsilon(\gamma(s))k_g(s)t(s)$$

$$b'(s) = -\varepsilon(\gamma(s))k_g(s)t(s)$$

(Nabarro ve Sacramento, 2015). İnvaryantların hesaplanmasıyla $\sigma_D(s) = -\varepsilon k'_g(s)$ ve $\sigma_H(s) = k'_g(s)$ elde edilir. $k_g^2(s) > \varepsilon(\gamma(s))$ olmak üzere, γ 'nın de Sitter normal Darboux görüntüsü,

$$d_{\gamma}(s) = \frac{k_g(s)}{\sqrt{k_g^2(s) - \varepsilon(\gamma(s))}} n_{\gamma}(s) + \frac{\varepsilon(\gamma(s))}{\sqrt{k_g^2(s) - \varepsilon(\gamma(s))}} b(s) \quad (6.3.3)$$

şeklinde tanımlanır. $k_g^2(s) < 1$ ise γ sadece spacelike iken γ 'nın hiperbolik normal Darboux görüntüsü,

$$h_{\gamma}(s) = -\frac{k_g(s)}{\sqrt{1 - k_g^2(s)}} n_{\gamma}(s) - \frac{1}{\sqrt{1 - k_g^2(s)}} b(s) \quad (6.3.4)$$

şeklinde tanımlanır. Burada de Sitter normal Darboux görüntülerinin tekil noktaları $k'_g = 0$ olduğu noktalardır. de Sitter normal Darboux görüntüsünün ve hiperbolik normal Darboux görüntüsünün s_0 'da düzenli olması için $k'_g(s_0) \neq 0$ olmalıdır. Çünkü $\sigma_D(s_0) = -\varepsilon k'_g(s_0) \neq 0$ ve $\sigma_H(s_0) = k'_g(s_0) \neq 0$ 'dır. Bu nedenle, pseudo-küresel normal Darboux görüntülerinin dönüm noktaları $k'_g(s_0) = 0$ ve $k''_g(s) \neq 0$ noktalarına karşılık gelir (Izumiya vd., 2015).

6.4. de Sitter Spacelike Düzlem Eğrileri Boyunca Minkowski Uzayında Lightlike Yüzey

Bu bölümde S_1^2 deki γ spacelike eğrisinin de Sitter normal Darboux görüntüsünün γ boyunca lightlike yüzeyle olan ilişkisini araştırıldı. $\gamma : I \rightarrow S_1^2$ yay uzunluğu ile parametrelendirilmiş spacelike bir eğri olsun. O halde, γ 'nın Frenet-Serret tipi formülleri şu şekilde verilir:

$$\gamma'(s) = t(s) \quad (6.4.1)$$

$$t'(s) = -\gamma(s) - k_g(s)n(s)$$

$$n'(s) = -k_g(s)t(s)$$

Burada, γ 'nın jeodezik eğriliği $k_g(s) = \langle \gamma''(s), n(s) \rangle$ 'dir. Yüzeyin, düzenli noktalarındaki her teğet düzlem lightlike ise yüzeyin lightlike olduğu söylenir. Spacelike altmanifoldlar boyunca lightlike hiperyüzeyin tanımını takiben γ boyunca lightlike yüzeyler $LS_{\gamma}^{\pm} : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ dönüşümleri ile

$$LS_{\gamma}^{\pm}(s, \mu) = \gamma(s) + \mu(n(s) \pm \gamma(s)) \quad (6.4.2)$$

şeklinde tanımlanır. LS_γ^+ ile LS_γ yazılabilir. O halde,

$$\begin{aligned}\frac{\partial LS_\gamma}{\partial s} &= (1 - \mu k_g(s) + \mu)t(s) \\ \frac{\partial LS_\gamma}{\partial \mu} &= n(s) + \gamma(s)\end{aligned}\quad (6.4.3)$$

şeklinde tanımlıdır. $k_g(s) = 1$ ise $\left\{ \frac{\partial LS_\gamma}{\partial s}, \frac{\partial LS_\gamma}{\partial \mu} \right\}$ lineer bağımsızdır. $k_g(s) \neq 1$ ise $\left\{ \frac{\partial LS_\gamma}{\partial s}, \frac{\partial LS_\gamma}{\partial \mu} \right\}$ lineer bağımlıdır gerek ve yeter şart $1 - \mu k_g(s) + \mu = 0$ 'dır. Bu nedenle (s, μ) , LS_γ 'nın tekil noktasıdır gerek ve yeter şart $\mu = \frac{1}{k_g(s) - 1}$ 'dır. Altmanifoldun lightlike fokal noktası spacelike altmanifold boyunca lightlike hiperyüzeyin kritik değer kümesi olarak tanımlanır. $k_g(s) \neq 1$ olmak üzere γ 'nın lightlike fokal noktası

$$\beta(s) = LS_\gamma(s, \mu(s)) = \left(\frac{k_g(s)}{k_g(s) - 1} \right) \gamma(s) + \left(\frac{1}{k_g(s) - 1} \right) n(s), \quad (6.4.4)$$

eğrisi ile verilir. $\langle \beta(s), \beta(s) \rangle = \frac{k_g^2(s) - 1}{(k_g(s) - 1)^2}$ olduğundan,

$$\beta(s) = \begin{pmatrix} \text{spacelike ise } k_g^2(s) - 1 > 0, \\ \text{lightlike ise } k_g(s) = -1, \\ \text{timelike ise } k_g(s)^2 - 1 < 0. \end{pmatrix} \quad (6.4.5)$$

dir. $\Phi(x) = \frac{x}{\|x\|}$ ile $\Phi : \mathbb{R}_1^3 \setminus LC^* \rightarrow H^2(-1) \cup S_1^2$ dönüşümü tanımlansın. $S = \{x \in \mathbb{R}_1^3 \mid \langle x, x \rangle > 0\}$ ve $T = \{x \in \mathbb{R}_1^3 \mid \langle x, x \rangle < 0\}$ olmak üzere $\mathbb{R}_1^3 \setminus LC^* = S \cup T$ 'dir. Bu nedenle izdüşüm $\Phi^S = \Phi|_S : S \rightarrow S_1^2$ ve $\Phi^T = \Phi|_T : T \rightarrow H^2(-1)$ olarak ifade edilir. $k_g^2(s) - 1 > 0$ olmak üzere,

$$\Phi^S \circ \beta(s) = \frac{k_g(s)}{\sqrt{k_g^2(s) - 1}} \gamma(s) + \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s) - 1}} n(s) \quad (6.4.6)$$

dir. Bu ise γ 'nın de Sitter normal Darboux görüntüsü olan d_γ ile aynı anlama gelir (Nabarro ve Sacramento, 2015). Diğer yandan, $k_g^2(s) - 1 < 0$ olmak üzere,

$$\Phi^T \circ \beta(s) = -\frac{k_g(s)}{\sqrt{1 - k_g^2(s)}} \gamma(s) - \frac{1}{\sqrt{1 - k_g^2(s)}} n(s) \quad (6.4.7)$$

dir. Bu ise γ 'nın hiperbolik normal Darboux görüntüsü ile aynı anlama gelir (Nabarro ve Sacramento, 2015). Böylece,

$$\beta_\gamma^S = \{\beta(s) \mid s \in I, k_g^2(s) > 1\} \quad (6.4.8)$$

$$\beta_\gamma^T = \{\beta(s) \mid s \in I, k_g^2(s) < 1\} \quad (6.4.9)$$

şeklinde tanımlanır. β_γ^S , γ 'nın lightlike fokal noktasının spacelike bölümü, β_γ^T ise γ 'nın lightlike fokal noktasının timelike bölümüdür. $\beta_\gamma^S(\beta_\gamma^T)$ izdüşümünün de Sitter normal Darboux görüntüsü ya da hiperbolik normal Darboux görüntüsü olduğu gösterilebilir. $I_{>1} = \{s \in I \mid k_g^2(s) > 1\}$ ve $I_{<1} = \{s \in I \mid k_g^2(s) < 1\}$ olmak üzere,

$$\Phi^S(\beta_\gamma^S) = d_\gamma(I_{>1}) \text{ ve } \Phi^T(\beta_\gamma^T) = h_\gamma(I_{<1}) \quad (6.4.10)$$

dir (Izumiya ve Sato, 2013).

Teorem 6.4.1. $k_g^2(s) \neq \pm 1$ ve $\gamma : I \rightarrow S_1^2$, s yay-uzunluğu ile parametrelendirilmiş spacelike bir eğri olsun. de Sitter normal Darboux görüntüsü γ 'nın lightlike fokal noktasının spacelike bölümünün Φ^S tarafından izdüşümüdür (Izumiya vd., 2015).

Spacelike eğri ve lightlike yüzey arasında ilişki kurmak için de Sitter uzayında spacelike eğri üzerinde bir fonksiyon ailesi düşünölsün. $\gamma : I \rightarrow S_1^2$ yay uzunluğu ile parametrelendirilmiş spacelike eğri olsun. $D(s, v) = \langle \gamma(s) - v, \gamma(s) - v \rangle$ ile uzaklık kare fonksiyonlarının ailesi,

$$D : I \times \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

olarak tanımlanır. $D_v(s) = D(s, v)$ ile gösterilir. Her $s \in I$ için $n(s)$ timelike olur çünkü $\langle n(s), n(s) \rangle = -\langle \gamma(s), \gamma(s) \rangle = -1$ 'dir. Aşağıdaki önermede $\langle t'(s), t'(s) \rangle \neq 0$ koşuluyla $1 - k_g^2(s) \neq 0$ olarak kabul edilebilir. Diğer bir deyişle $k_g(s) \neq \pm 1$ olmasıdır (Izumiya vd., 2015).

Önerme 6.4.2. $\langle t'(s), t'(s) \rangle \neq 0$ ve $\gamma : I \rightarrow S_1^2$, s yay-uzunluğu ile parametrelendirilmiş spacelike bir eğri olsun. O halde aşağıdaki verilenler vardır:

(1) $D_v(s) = D'_v(s) = 0$ gerek ve yeter şart $v = \gamma(s) + \mu(n(s) \pm \gamma(s))$ olacak şekilde $\mu \in \mathbb{R}$ vardır.

(2) $D_v(s) = D'_v(s) = D''_v(s) = 0$ gerek ve yeter şart

$$v = \gamma(s) + \frac{1}{k_g(s) \pm 1} (n(s) \pm \gamma(s)) \quad (6.4.11)$$

dir.

(3) $D_v(s) = D'_v(s) = D''_v(s) = D'''_v(s) = 0$ gerek ve yeter şart

$$v = \gamma(s) + \frac{1}{k_g(s) \pm 1} (n(s) \pm \gamma(s)) \text{ ve } k'_g(s) = 0 \quad (6.4.12)$$

dir.

(4) $D_v(s) = D'_v(s) = D''_v(s) = D'''_v(s) = D^{(4)}_v(s) = 0$ gerek ve yeter şart

$$v = \gamma(s) + \frac{1}{k_g(s) \pm 1} (n(s) \pm \gamma(s)), \quad k'_g(s) = 0 \text{ ve } k''_g(s) = 0 \quad (6.4.13)$$

dır (Izumiya vd., 2015).

İspat.

(1) $D'_v(s) = \langle \gamma(s) - v, t(s) \rangle = 0$ olduğundan $\gamma(s) - v = \lambda \gamma(s) + \bar{\mu}(n(s))$ olacak şekilde $\bar{\mu}, \lambda \in \mathbb{R}$ vardır. $D_v(s) = D'_v(s) = 0$ gerek ve yeter şart $\lambda = \pm \mu$ olarak seçilir ve buradan $v = \gamma(s) - \bar{\mu}(n(s) \pm \gamma(s))$ bulunur. $\bar{\mu} \in \mathbb{R}$ iken $\mu = -\bar{\mu}$ alınabilir ve buradan $v = \gamma(s) + \mu(n(s) \pm \gamma(s))$ elde edilir.

(2) $\frac{1}{2}D''_v(s) = 1 + \langle \gamma(s) - v, -\gamma(s) - k_g(s)n(s) \rangle$ ve $D_v(s) = D'_v(s) = D''_v(s) = 0$ gerek ve yeter şart $\mu = \frac{1}{k_g(s) \pm 1}$ ve

$$v = \gamma(s) + \frac{1}{k_g(s) \pm 1} (n(s) \pm \gamma(s)) \quad (6.4.14)$$

dir.

(3) $\frac{1}{2}D'''_v(s) = \langle \gamma(s) - v, (k_g^2(s) - 1)t(s) - k'_g(s)n(s) \rangle$ ve

$D_v(s) = D'_v(s) = D''_v(s) = D'''_v(s) = 0$ gerek ve yeter şart

$$v = \gamma(s) + \frac{1}{k_g(s) \pm 1} (n(s) \pm \gamma(s)) \text{ ve } k'_g(s) = 0 \quad (6.4.15)$$

dır.

(4) Ek olarak,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}D_v^{(4)}(s) = & \langle \gamma(s) - v, -(k_g^2(s) - 1)\gamma(s) + 3k_g(s)k'_g(s)t(s) - (k_g(s)(k_g^2(s) - 1) \\ & + k''_g(s))n(s) \rangle + 4\langle t(s), (k_g^2(s) - 1)t(s) - k'_g(s)n(s) \rangle \\ & + 3\langle -\gamma(s) - k_g(s)n(s), -\gamma(s) - k_g(s)n(s) \rangle \end{aligned}$$

dir. Böylece ispat tamamlanmıştır (Izumiya vd., 2015).

□

$F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (s_0, v_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $f(s) = F_{v_0}(s)$ olmak üzere F, f nin r -parametresi olarak adlandırılır. Dağılım ile ilgili önemli bir küme sunulacaktır. F 'nin diskiriminant kümesi,

$$\mathfrak{S}_F = \left\{ v \in \mathbb{R}^r \mid F(s, v) = \frac{\partial F}{\partial s}(s, v) = 0, \text{ bazı } s \in \mathbb{R} \right\} \quad (6.4.16)$$

dir. $\mathfrak{S}_D^\pm = \{\gamma(s) + \mu n(s) \pm \gamma(s) \mid s \in I, \mu \in \mathbb{R}\}$ olmak üzere $D(s, v)$ uzaklık kare fonksiyonlarının ailesinin diskiriminant kümesi $\mathfrak{S}_D^\pm = \mathfrak{S}_D^+ \cup \mathfrak{S}_D^-$ ile verilir. γ, S_1^2 'de spacelike eğri ise $\mathfrak{S}_D$ lightlike yüzeylerle kesişir.

$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ yay uzunluğu ile parametrelendirilmiş spacelike ya da timelike eğri olsun. γ 'nın eğriliği $k(s) = \|\gamma''(s)\|$ olarak tanımlanır (Pei ve Sano, 2000). γ 'nın eğriliği $k(s) \neq 0$ ve torsiyonu $\tau(s) \neq 0$ olsun. γ 'nın fokal yüzeyi,

$$B(s, \mu) = \gamma(s) + \frac{\varepsilon(\gamma(s))}{\delta(\gamma(s)k(s))}n(s) + \mu(b(s)) \quad (6.4.17)$$

ile verilir. $\mu \in \mathbb{R}$ ve $\delta(\gamma(s)) = \text{sign}(n(s))$ 'dir. n spacelike ise 1, timelike ise -1 'dir. Fokal yüzeyinin kıvrım eğrisi ise,

$$B(s) = \gamma(s) + \frac{\varepsilon(\gamma(s))}{\delta(\gamma(s))k(s)}n(s) + \mu(s)b(s) \quad (6.4.18)$$

olarak verilir. $\mu(s) = \frac{k'(s)}{\varepsilon(\gamma(s))\delta(\gamma(s))k^2(s)\tau(s)}$ ve burada uzaklık kare fonksiyonu $A_{\geq 3}$ tekilliğine sahiptir. ρ tarafından kıvrım eğrisi $B(s)$ ile gösterilir (Nabarro ve Sacramento,

2015). Öyleyse $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ spacelike ya da timelike eğrisi için aşağıda verilenler vardır (Izumiya vd., 2004; Nabarro ve Sacramento, 2015).

(a) γ spacelike eğrisinin B fokal yüzeyi, $\mathbb{R}_1^3$ 'deki timelike yüzeydir ve γ timelike eğri ise B spacelike yüzeydir;

(b) γ 'nın de Sitter normal Darboux görüntüsü $B \cap S_1^2$ eğrisidir;

(c) γ 'nın hiperbolik normal Darboux görüntüsü $B \cap H^2(-1)$ eğrisidir;

(d) B fokal yüzeyinin tekil eğrisi, ρ kıvrım eğrisidir.

(a) ile (d)'nin $\gamma: I \rightarrow S_1^2$ için doğru olduğu gözlemlenir. Ayrıca spacelike eğri $\gamma: I \rightarrow S_1^2$ için γ 'nın lightlike fokal noktası β ile aşağıdaki bilgiler vardır:

(e) β 'nın S_1^2 'deki izdüşümü γ 'nın de Sitter normal Darboux görüntüsüdür;

(f) β 'nın $H^2(-1)$ 'deki izdüşümü γ 'nın hiperbolik normal Darboux görüntüsüdür (Izumiya vd., 2015).

Yukarıdaki sonuçlara göre, $\mathfrak{S}_D^+$ diskriminant kümesinin ve B dallanmış kümesinin uzaklık kare fonksiyonunun türevleri boyunca analizinin yapılması için aşağıdaki sonuçlara ihtiyaç vardır (Izumiya vd., 2015).

Önerme 6.4.3. $\langle t'(s_0), t'(s_0) \rangle \neq 0$ ve $\gamma: I \rightarrow S_1^2$, s yay uzunluğu ile parametrelendirilmiş spacelike bir eğri olsun. D_v , s_0 'da A_3 tekilliğine sahipse D , s_0 'da D_v 'nin bir versal dağılımıdır (Izumiya vd., 2015).

İspat. $\gamma(s) = (x_0(s), x_1(s), x_2(s))$ ve $v = (v_0, v_1, v_2)$ olmak üzere,

$$D(s, v) = -(x_0(s) - v_0)^2 + (x_1(s) - v_1)^2 + (x_2(s) - v_2)^2 \quad (6.4.19)$$

ve

$$\frac{\partial D}{\partial v_0} = 2(x_0(s) - v_0), \quad \frac{\partial D}{\partial v_1} = -2(x_1(s) - v_1), \quad \frac{\partial D}{\partial v_2} = -2(x_2(s) - v_2) \quad (6.4.20)$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial s \partial v_0} = 2x_0'(s), \quad \frac{\partial^2 D}{\partial s \partial v_1} = -2x_1'(s), \quad \frac{\partial^2 D}{\partial s \partial v_2} = -2x_2'(s) \quad (6.4.21)$$

$$\frac{\partial^3 D}{\partial s^2 \partial v_0} = 2x_0''(s), \quad \frac{\partial^3 D}{\partial s^2 \partial v_1} = -2x_1''(s), \quad \frac{\partial^3 D}{\partial s^2 \partial v_2} = -2x_2''(s) \quad (6.4.22)$$

dir. Buradan,

$$A = \begin{pmatrix} -2(x_0(s) - v_0) & -2(x_1(s) - v_1) & -2(x_2(s) - v_2) \\ 2x'_0(s) & -2x'_1(s) & -2x'_2(s) \\ 2x''_0(s) & -2x''_1(s) & -2x''_2(s) \end{pmatrix} \quad (6.4.23)$$

matrisi elde edilir. D_v, A_3 tekiliğine sahiptir gerek ve yeter şart

$$v = \gamma(s) + \frac{1}{k_g(s) \pm 1} (n(s) \pm \gamma(s)), k'_g(s) \neq 0 \text{ ve } k''_g(s) \neq 0 \quad (6.4.24)$$

olmalıdır. Bunu ispatlamak için tekil olmayan matris başka bir deyişle $\det A \neq 0$ olduğu gösterilmelidir. Böylece A 'nın determinanı,

$$\begin{aligned} \det A &= 8 \langle (x_0, x_1, x_2), (x'_0, x'_1, x'_2) \wedge (x''_0, x''_1, x''_2) \rangle \\ &\quad - 8 \langle (v_0, v_1, v_2), (x'_0, x'_1, x'_2) \wedge (x''_0, x''_1, x''_2) \rangle \\ &= 8 \langle \gamma(s) - v, \gamma'(s) \wedge \gamma''(s) \rangle \\ &= 8 \left\langle \frac{-1}{k_g(s) \pm 1} (n(s) \pm \gamma(s)), n(s) + k_g(s) \gamma(s) \right\rangle = \pm 8 \neq 0 \end{aligned} \quad (6.4.25)$$

dır. O halde D, s 'de D_v 'nin versal dağılımıdır (Izumiya vd., 2015). $\square$

Önerme 6.4.4. $\langle t'(s), t'(s) \rangle \neq 0$ ve $\gamma: I \rightarrow S_2^1, s$ yay-uzunluğu ile parametrelendirilmiş spacelike eğri olsun. O halde aşağıdaki verilenler vardır:

- (i) γ 'nın β lightlike fokal noktası $B \cap \mathfrak{S}_D^+$ eğrisidir;
- (ii) $k'_g(s) = 0$ olmak üzere genel olarak β 'nın tekil noktaları $v = \beta(s)$ 'ler, $\beta \cap \rho$ tarafından verilen izole noktalardır. $k''_g(s) \neq 0$ ise $\mathfrak{S}_D^+, B$ 'nin kıvrım eğrisini tam olarak β 'nın tekil noktalarında kesen çatalla yerel olarak diffeomorftir. β eğrisi s_0 'da düzenlidir gerek ve yeter şart $k'_g(s_0) \neq 0$ ve β 'nın düzenli parçası B 'nin düzenli parçasını kapsar;
- (iii) β 'nın spacelike bölümünün tekil noktaları β_γ^S 'lar de Sitter normal Darboux görüntüsünün tekil noktalarına izdüşümlenir;
- (iv) β 'nın timelike bölümünün tekil noktaları β_γ^T 'lar hiperbolik normal Darboux görüntüsünün tekil noktalarına izdüşümlenir (Izumiya vd., 2015)

İspat.

- (i) $v \in \mathbb{R}_1^3$ ile verilen β 'nin lightlike fokal noktası vardır öyle ki $D_v(s) = D'_v(s) = D''_v(s) = 0$ 'dır. Yani, $B \cap \mathfrak{S}_D^+$ olmalıdır.

□

(ii)

$$\beta'(s) = \frac{-k'_g(s)}{(k_g^2(s) - 1)^2} \gamma(s) + \frac{k'_g(s)}{(k_g^2(s) - 1)^2} n(s) \quad (6.4.26)$$

olduğundan $\beta'(s) = 0$ gerek ve yeter şart $k'_g(s) = 0$ 'dır. β 'nin tekil noktaları $D_v(s) = D'_v(s) = D''_v(s) = D'''_v(s) = 0$ 'dır. Başka bir deyişle β 'nin tekil noktaları ρ kıvrım eğrisinin noktalarıdır. Genel olarak $k'_g \neq 0$ olarak kabul edilir aksi takdirde J aralığı vardır ve burada her $s \in J$ için $k'_g(s) = 0$ ve $k''_g(s) = 0$ 'dır. Bu sebeple D_v , s 'de $A_{\geq 4}$ tekilliğine sahiptir. $k'_g(s) = 0$ ve $k''_g(s) \neq 0$ ise D ailesi $D_v(s)$ 'nin versal dağılımıdır ve $\mathfrak{S}_D^+$ yerel diffeomorfiktir (Bruce ve Giblin, 1992).

- (iii) ve (iv) gerçeği ile s , β 'nin tekil noktasıdır gerek ve yeter şart $k'_g(s) = 0$ 'dır. s , de Sitter normal Darboux görüntüsünün ya da hiperbolik normal Darboux görüntüsünün tekil bir noktasını vermelidir (Nabarro ve Sacramento, 2015).

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

D Darboux vektörü ve $\overline{D}$ Darboux vektörü yönündeki birim vektör olmak üzere $D = \tau T + \varkappa B = N \wedge N'$ olduğu durumda Darboux vektörü adını alır. B ile W arasındaki açı ϕ ile gösterilirse $\varkappa = \|W\| \cos \phi$ ve $\tau = W \sin \phi$ olur. Burada $\|D\| = \sqrt{\varkappa^2 + \tau^2} > 0$ olmak üzere $\overline{D} = \frac{\tau}{\|D\|}T + \frac{\varkappa}{\|D\|}B$ 'dir. $\varkappa$ ile τ 'nin değerleri burada yerine konursa $\overline{D} = \sin \phi T + \cos \phi B$ olduğu görülür. Buna dayanarak Darboux görüntüler ifade edilmiştir.

Darboux görüntüler uzun süreden beri incelenen bir konu olmuştur. Bu konuda yapılan çalışmaları genişletmek için Öklid uzayında ve Lorentz-Minkowski uzayında Darboux görüntüler ifadesi verilmiştir.

Öklid uzayında yüzeyler üzerinde eğrilerin küresel Darboux görüntüleri Hananoi vd., (2015), Lorentz-Minkowski uzayında spacelike yüzeylerde eğrilerin Lorentzian Darboux görüntüleri Ito ve Izumiya (2016) ve Lorentz-Minkowski uzayında timelike yüzeylerde pseudo-küresel normal Darboux görüntüleri Izumiya vd., (2015). Darboux görüntüler Öklid uzayında normal düzlemde, rektifiyen düzlemde veya oskülatör düzlemde tanımlanabilir. Lorentz-Minkowski uzayında ise rektifiyen timelike Darboux görüntüsü, rektifiyen spacelike Darboux görüntüsü, rektifiyen lightlike Darboux görüntüsü, oskülatör spacelike Darboux görüntüsü, oskülatör lightlike Darboux görüntüsü, normal timelike Darboux görüntüsü, normal spacelike Darboux görüntüsü ve normal lightlike Darboux görüntüsü olarak ifade edilir. Ayrıca, normal Darboux görüntüleri için hiperbolik normal Darboux görüntüleri ve de Sitter normal Darboux görüntüleri incelenmiştir. İnvaryantlar kullanılarak Darboux görüntülerinin tekil noktaları sınıflandırılabilir.

Çalışmanın devamı olarak Lorentz-Minkowski 3-boyutlu uzayında spacelike yüzeylerde eğrilerin pseudo-küresel involütleri veya Lorentz-Minkowski 3-boyutlu uzayında timelike yüzeylerde eğrilerin pseudo-küresel involütleri çalışılabilir. Ayrıca, Lorentz-Minkowski 3-boyutlu uzayında spacelike yüzeylerde eğrilerin pseudo-küresel evolütleri veya Lorentz-Minkowski 3-boyutlu uzayında timelike yüzeylerde eğrilerin pseudo-küresel evolütleri kavramları incelenebilir.

KAYNAKLAR

- Arnol'd, V.I., Gusein-Zade, S.M., Varchenko, A.N., 1986. Singularities of Differentiable Maps. Birkhauser, 396p, Boston.
- Bruce, J.W., Giblin P.J., 1992. Curves and Singularities. Cambridge Universty press, 321p, Cambridge.
- Chen, L., Izumiya, S., 2009. A mandala of Legendrian dualities for pseudo-spheres in Semi-Euclidean space. Proceedings of the Japan Academy, 85, 49-54.
- Cipolla, R., Giblin, P.J., 2000. Visual Motion of Curves and Surfaces. Cambridge University Press, 184p, Cambridge.
- Doğan, F., Yayli, Y., 2015. On isophote curve and its characterizations. 39, 650-664.
- Hacısalıhoğlu, H.H., 2000. Diferansiyel Geometri. Ankara Üniversitesi, 269s, Ankara.
- Hananoi, S., Ito, N., Izumiya, S., 2015. Spherical Darboux images of curves on surfaces. Beitr. Algebra Geom. 56, 1-11
- Ito, N., Izumiya, S., 2016. Lorentzian Darboux images of curves on spacelike surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space. 13, 1-19.
- Izumiya, S., Pei, D.H., Sano, T., 2003. Singularities of hyperbolic Gauss maps. Proc. London Math. Soc. 86, 485-512.
- Izumiya, S., Takeuchi, N., 2004. New special curves and developable surfaces. Turk. J. Math. 28, 153-163.
- Izumiya, S., Pei, D. H., Sano, T., Torii, E., 2004. Evolutes of hyperbolic plane curves. Acta Math. Sin. 20 (3) 543-550.
- Izumiya, S., 2009. Legendrian dualities and spacelike hypersurfaces in the lightcone. Moscow Mathematical Journal 9, 325-357.
- Izumiya, S., Sato, T., 2013. Lightlike hypersurface along spacelike submanifolds in Minkowski spacetime. J. Geom. Phys. 71, 30-52.

Izumiya, S., Nabarro, A.C., Sacramento, J., 2015. Pseudo-spherical normal Darboux images of curves on a timelike surface in three dimensional Lorentz-Minkowski space. *Journal of Geometry and Physics* 97, 105-118.

Martini, H., 1986. Parallel beleuchtung konvexer Körper mit glatten Rändern, *Beitr. Algebra. Geom.* 21, 109-124.

Nabarro, A. C., Sacramento, A.J., 2015. Focal set of curves in the Minkowski space near lightlike points. submitted for publication. 1-21

O'Neill, B., 1983. *Semi-Riemannian Geometry with Applications Relativity*. Academic Press Inc. Ltd., 468p, London.

Pei, D., Sano, T., 2000. The focal developable and the binormal indicatrix of a nonlightlike curve in Minkowski 3-space. *Tokyo J. Math.* 23, 211-225.

Porteous, I. R., 2004. Some remarks on duality in S^3 , *Geometry and topology of caustics*, Banach Center Publ. Polish Acad. Sci., Warsaw. 50, 217-226.

Ratchliffe, J., 2006. *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. Springer, 782p, Nashville, Tennessee.

Sabuncuoğlu, A., 2010. *Diferansiyel Geometri*. Nobel Yayın Dağıtım Tic. Ltd. Şti, 522s, Ankara.

Saloom, A., Tari, F., 2012. Curves in the Minkowski plane and their contact with pseudo-circles. *Geom. Dedicata* 159, 109-124.

Sato, T., 2012. Pseudo-spherical evolutes of curves on a spacelike surface in three dimensional Lorentz-Minkowski space. *Journal of geometry* 103 (2), 319-331.

Uğurlu, H.H., Gürdal, O., 2015. $\mathbb{R}_1^3$ Lorentz-Minkowski uzayında Lorentz ve hiperbolik koordinat sistemleri. Erişim Tarihi: 01.12.2015. <https://www.researchgate.net/DOI/10.1314/RG.2.1.2699.1442>.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : İpek YILMAZ
Doğum Yeri ve Yılı : Köln/ALMANYA, 1992
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce
Eposta : ipekyilmaz1788@gmail.com



Eğitim Durumu

Lise : Adana Şehit Temel Cingöz Anadolu Lisesi, 2006-2010
Lisans : Isparta Süleyman Demirel Üniversitesi, 2010-2014

Mesleki Deneyim

Matematik Öğretmeni, Antalya Özel Kaplan Etüt ve Eğitim Merkezi, 2015-2017.