BAZI KONVEKS FONKSİYON SINIFLARI İÇİN YENİ EŞİTSİZLİKLER VE UYGULAMALAR

Yunus Emre DURSUN

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Yrd. Doç. Dr. Mustafa GÜRBÜZ
2017

AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI KONVEKS FONKSİYON SINIFLARI İÇİN YENİ EŞİTSİZLİKLER VE UYGULAMALAR

Yunus Emre DURSUN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

AĞRI

2017

22/05/2017

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum "**Bazı Konveks Fonksiyon Sınıfları İçin Yeni Eşitsizlikler ve Uygulamalar**" adlı tezin tamamen kendi çalışmam olduğunu ve her alıntıya kaynak gösterdiğimi taahhüt eder, tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü arşivlerinde aşağıda belirttiğim koşullarda saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim-Öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

☒ Tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.

☐ Tezim sadece Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi yerleşkelerinden erişime açılabilir.

☐ Tezimin …… yıl süreyle erişime açılmasını istemiyorum. Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım takdirde, tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.

22/05/2017

Yunus Emre DURSUN

T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

TEZ ONAY FORMU

BAZI KONVEKS FONKSİYON SINIFLARI İÇİN YENİ EŞİTSİZLİKLER VE UYGULAMALAR

Yrd. Doç. Dr. Mustafa GÜRBÜZ danışmanlığında, Yunus Emre DURSUN tarafından hazırlanan bu çalışma 22/05/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Alper ÇİLTAŞ İmza :

Üye : Yrd. Doç. Dr. Mustafa GÜRBÜZ İmza :

Üye : Yrd. Doç. Dr. Alper EKİNCİ İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu …/…/201.. tarih ve . . . . / . . . . nolu kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. İbrahim HAN

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAZI KONVEKS FONKSİYON SINIFLARI İÇİN

YENİ EŞİTSİZLİKLER VE UYGULAMALAR

Yunus Emre DURSUN
Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Mustafa GÜRBÜZ

Bu tezde, birinci mertebeden ve genel anlamda n. mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar için elde edilmiş, literatürde mevcut iki farklı lemma ele alınmış, bu lemmalar yardımıyla bazı konveks fonksiyon sınıfları için yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. İlk bölüm giriş niteliğinde olup, bu bölümde konveks fonksiyonlar ve Eşitsizlik Teorisi'nin tarihsel gelişimini içermekte olup literatürde mevcut çalışmalar ile ilgili bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde konveks fonksiyon ve bazı farklı türlerinin tanımları yapılmış, aralarındaki hiyerarşiden bahsedilmiş ve bazı örnekler verilmiştir. Üçüncü bölümde literatürde sıkça rastlanan ve oldukça önemli bazı eşitsizlikler ve tezimizde kullandığımız lemma ve teoremlere yer verilmiştir. Dördüncü bölümde ise önce n. mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar için, ardından birinci mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar için elde edilmiş bir lemma ele alınarak yeni eşitsizlikler kurulmuş, ardından elde edilen eşitsizliklerin bazı özel halleri ortaya konulmuştur. Son olarak bu sonuçlar kullanılarak bazı özel ortalamalara dair uygulamalar verilmiştir. Ayrıca bulguların literatürü desteklediği görülmüştür.

2017, 77 sayfa

Anahtar Kelimeler: Hölder eşitsizliği, Power-mean eşitsizliği ve konveks fonksiyon

ABSTRACT

Master Thesis

NEW INEQUALITIES AND APPLICATIONS FOR SOME CONVEX FUNCTION CLASSES

Yunus Emre DURSUN

Ağrı İbrahim Çeçen University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Asst. Prof. Dr. Mustafa GÜRBÜZ

In this thesis, two different lemmas gathered for first degree and n^{th} degree, in general, differentiable functions have been handled. With the help of these lemmas, new inequalities for some convex classes have been obtained. The first part was introductory part which contained the historical developments of convex functions and Inequality Theory, as well as, some information related to studies in literature. In the second part, definitions of convex function and some kinds of it has been explained, hierarchy between them has been mentioned, and some examples has been given. In the third part, some inequalities which are very important and common, also lemmas and theorems which are used in our thesis were given. In the fourth part, new inequalities have been constructed by dealing with firstly, a lemma gathered for n^{th} degree, in general, differentiable functions, then a lemma gathered for first degree differentiable functions. Then some special cases of gathered inequalities put forward. Finally, by using these results, propositions have been given for some special means. Also it was observed that the gathered results were supported by the literature.

2017, 77 pages

Keywords: Hölder inequality, Power-mean inequality and convex functions.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimi boyunca, tez konumu belirleyip bu konuda çalışmamı sağlayan, çalışmalarımda bilgi ve deneyimleriyle bana rehberlik eden, çalışmalarımın tamamlanması için her türlü şartı sağlayan saygıdeğer danışman hocam;

Sayın Yrd. Doç. Dr. Mustafa GÜRBÜZ'e;

Teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Yüksek lisans eğitimim aşamasında dersleriyle, bilgi ve görüşleriyle bizleri aydınlatan ve bizlere yol gösteren başta Sayın Doç. Dr. Alper ÇİLTAŞ, Sayın Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Alper EKİNCİ olmak üzere tüm hocalarıma da teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak bütün eğitim hayatım boyunca bana destek olan, her zaman yanımda olan aileme ve yine tez yazım aşaması sırasında benden desteklerini esirgemeyen değerli dostlarım Serkan AKTÜRK, Mine ULUDAĞ, Kübra YILMAZ, Selen GÜRBÜZ ve Ebru ÇETİNTAŞ'a teşekkür ediyorum.

Yunus Emre DURSUN
Mayıs 2017

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$C(I)$	Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$D(f)$	f Fonksiyonunun Tanım Kümesi
f'	f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
f''	f Fonksiyonunun İkinci Mertebeden Türevi
I	$\mathbb{R}$'de Bir Aralık
I°	I'nın İçi
$J(I)$	Jensen-Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$JQC(I)$	Jensen-Quasi-Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$K_m(b)$	m −Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$K_m^{\alpha}(b)$	(α, m) −Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$K_n(b)$	n −Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
K_s^2	İkinci Anlamda s −Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$L(I)$	Log −Konveks Fonksiyonlar sınıfı
$L_1[a,b]$	$[a,b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
$\mathcal{L}_r(x,y)$	Genelleştirilmiş Logaritmik Ortalaması
$M_r(x,y;\lambda)$	Kuvvet Ortalaması
Max	Maksimum
Min	Minimum
$P(I)$	P −Fonksiyonlar Sınıfı
$Q(I)$	Godunova-Levin Fonksiyonlar Sınıfı
$QC(I)$	Quasi-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$SV(h,I)$	h −Konkav Fonksiyonlar Sınıfı
$SX(h,I)$	h −Konveks Fonksiyonların Sınıfı

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Konvekslik, tarihi milattan önceki yüzyıllara dayanan bir kavram olmasına karşın matematikte yerini alması 1800'lü yılların son çeyreğini bulmuştur. Bu kavram ilk olarak Hermite tarafından 1883 yılında bulunan bir sonucun Mathesis adlı dergide yayınlanması ile ortaya çıkmıştır. Hadamard'ın da bu konuyla ilgili çalışmaları olsa da bir sonraki yüzyılda çalışmaları ile konveksliği sistemleştiren isim J.L.W.V.Jensen olmuştur. 20 ve 21. yüzyılda hızla gelişen konvekslik çalışmalarının, artan uygulama alanlarıyla analizdeki önemi gittikçe artmakta ve eşitsizlik teorisi, lineer programlama, ekstremum problemleri, optimizasyon, hata hesaplamaları ve oyun teorisi gibi alanlarda kullanımları genişlemektedir.

Konveksliğin tanımı eşitsizlikle yazılabildiğinden Konveks Fonksiyonlar Teorisinde önemli bir yer tutmaktadır. Bu konuda çalışan matematikçiler, farklı konveks fonksiyon sınıfları ($s-$konveks, Godunova-Levin, $log-$konveks, $quasi-$konveks vb.) ve özel ortalamalar (aritmetik, geometrik, logaritmik vb.) için konveksliği uygulamaya, genişletmeye, sadeleştirmeye ve genelleştirme çalışmışlardır. Bu yüzden eşitsizlikler, uygulamalı matematiğin çeşitli konularında sıkça kullanılmış olduğundan oldukça hızlı bir ilerleme göstermiştir. Özellikle son yıllarda birçok farklı alanlardaki uygulamalarda katkısı açıkça görülmektedir. Örneğin, Chebyshev, Ostrowski, Grüss, Hadamard ve Jensen eşitsizliklerinin uygulama alanına bakıldığında önemli bir yere sahip olduğu söylenir.

Eşitsizlikler teorisi için taban teşkil eden ilk çalışma 1934 yılında Hardy, Littlewood ve Polya tarafından yazılan "Inequalities" isimli eserdir (Hardy *et al.* 1952). Eserde konveks fonksiyonlarla eşitsizliklerin ispat yöntemleri ve elde edilmiş bazı sonuçlara rastlanılmaktadır. Ardından Beckenbach ve Bellman'ın yazdığı "Inequalities" diğer bir çalışma olarak karşımıza çıkmaktadır (Beckenbach and Bellman 1961). Bunu Mitrinović'in yazdığı "Analytic Inequalities" çalışması izler (Mitrinović 1970). Bu saydıklarımız bilgi elde etmek için başvurulan temel kaynaklardır. Ayrıca sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler ile ilgili Pečarić 1987 yılında "Convex Functions: Inequalities" adlı eseri yayınlamıştır. Bunlardan başka "Convex Functions" (Roberts and Varberg 1974), “Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives” (Mitrinović et al. 1991), “Classical and New Inequalities in Analysis” (Mitrinović et al. 1993), “Mathematical Inequalities” (Pachpatte 2005) ve “Convex Functions and Their Applications” (Niculescu and Persson 2006) isimli çalışmalar literatürdeki diğer kaynakları oluşturmaktadır. Özellikle Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili yapılan bazı çalışmalar S.S. Dragomir ve C.E.M. Pierce tarafından yazılmış “Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications” isimli kaynakta geliştirilerek bir araya getirilmiş olup alan yazında önemli bir yer tutar (Dragomir and Pearce 2000).

Klasik konvekslik tanımından yararlanılarak daha genel konveks fonksiyon çeşitleri oluşturulmuştur. Bunlardan birisi de “Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer Funktionen in topologischen linearen Raumen” adlı çalışmada tanıtılan $s-$konveks fonksiyonlardır (Breckner 1978). $s-$konveks fonksiyonlarla ilgili özelliklere ve eşitsizliklere “Some remarks on $s-$convex functions” (Hudzik and Maligranda 1994) ve “Inequalıtıes vıa $s-$Convexıty and Log−Convexıty” (Akdemir vd., 2014) adlı çalışmalarda yer verilmiştir. Yapılan literatür taraması sonunda özellikle $s-$konveks fonksiyonlarla ilgili Türkiye’de son 10 yılda yapılan yüksek lisans tezleri “Birinci ve İkinci Anlamda $s-$Konveks Fonksiyonlar için Birkaç Hadamard Tipi İntegral Eşitsizliği” (Kayacan 2008), “Türevleri $s-$Konveks Olan Dönüşümler İçin Bazı Yeni Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler” (Öğülmüş 2014), “$s-$Konveks Fonksiyonlar İçin Ağırlıklı İntegral Eşitsizlikleri” (Yıldırım 2015) ve “Kesirli İntegrallerden Yararlanarak $s-$Konveks Fonksiyonlar İçin Genelleştirilmiş Hermite-Hadamard Tipindeki İntegral Eşitsizlikleri” (Ertuğral 2015) adlı çalışmalardır.

“Neden Matematiksel Eşitsizlikler?” sorusuna Richard Bellman 2. Uluslararası Matematik Eşitsizlikler Konferansı’nda verdiği yanıtta üç bakış açısı olduğunu vurgulamıştır. Birincisi pratiklik sağladığını ve bunun araştırmalarda bir niceliği başka bir nicelik ile belirlenmesinde karşımıza çıktığını söylemiştir. Böylelikle klasik eşitsizliklerin ortaya çıktığını belirtmiştir. İkincisi teorik olarak bakıldığında basitçe sorular sorularak bütün temel teoremlerin oluşturulabileceğini söylemiştir. Üçüncü olarak da estetik açıdan Matematik Müzik ve Resim disiplinlerinin uyumlu olduğunu belirterek oluşturulan eşitsizliklerin göze hitap etmesinin merak uyandırıcı ve ilgi çekici olduğunu vurgulamıştır. Bu yanıttaki emareler bizim içinde eşitsizlik çalışmamız için yeterli nedenlerdir.

Bu çalışmada, farklı türden konveks fonksiyonlar ayrıntılı olarak incelenmiştir. Bu amaçla Erden ve Sarıkaya (2015) tarafından elde edilen bir lemmaya p −konveks, $quasi$ −konveks ve m −konveks fonksiyon sınıfının özellikleri, integraller için mutlak değer özelliği, Hölder eşitsizliği ve power-mean eşitsizliğinin özellikleri kullanılarak yeni teoremler ispatlanmıştır. Ayrıca Yıldız (2014) tarafından elde edilen bir lemmaya s −konveks fonksiyon sınıfının özellikleri, integraller için mutlak değer özelliği, Hölder eşitsizliği ve power-mean eşitsizliğinin özellikleri kullanılarak yeni teoremler ispatlanmıştır. Diğer yandan elde edilen teoremlere bazı özel ortalamalar için uygulamalar yazılmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

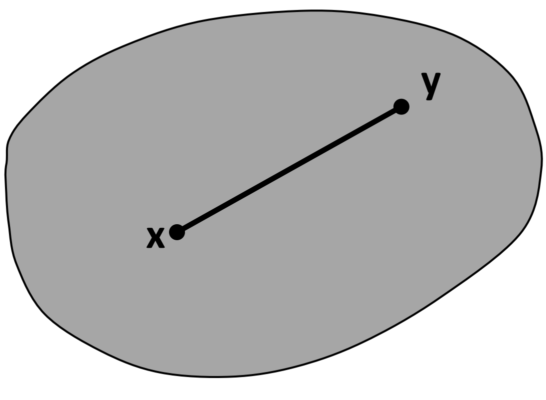
2.1. Genel Kavramlar

Bu bölümde, taban teşkil eden tanım ve teoremlerle birlikte bazı örnekler de verilmiştir.

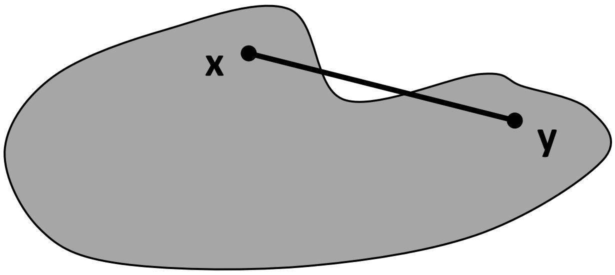
Tanım 2.1.1. (Konveks Küme): “L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

$$B = \{z \in L: z = \alpha x + (1-\alpha)y, \qquad 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1-\alpha)y$ eşitliğindeki x ve y’nin katsayıları için $\alpha + (1-\alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $\alpha, 1-\alpha$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayıları alınabilir. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir” (Bayraktar 2000).



Şekil 2.1. Konveks küme



Şekil 2.2. Konveks olmayan küme

Aralıklar reel eksen üzerindeki konveks kümelere örnek verilebilir.

Tanım 2.1.2. (J −Konveks Fonksiyon): "I,ℝ'de bir aralık olmak üzere her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna I üzerinde Jensen anlamında konveks veya J −konveks fonksiyon denir" (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.3. (Kesin J −Konveks Fonksiyon): "Her $x, y \in I$ ve $x \neq y$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

oluyorsa f fonksiyonuna I üzerinde kesin J −konveks fonksiyon denir" (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.4. (Konveks Fonksiyon): "I, ℝ'de bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \tag{2.1}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eğer (2.1) eşitsizliği $x \neq y$ ve $\alpha \in (0,1)$ için kesin ise bu durumda f fonksiyonuna kesin konvekstir denir" (Pečarić *et al*. 1992).

Örnek 2.1.1. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$ fonksiyonu I üzerinde konveks fonksiyondur.

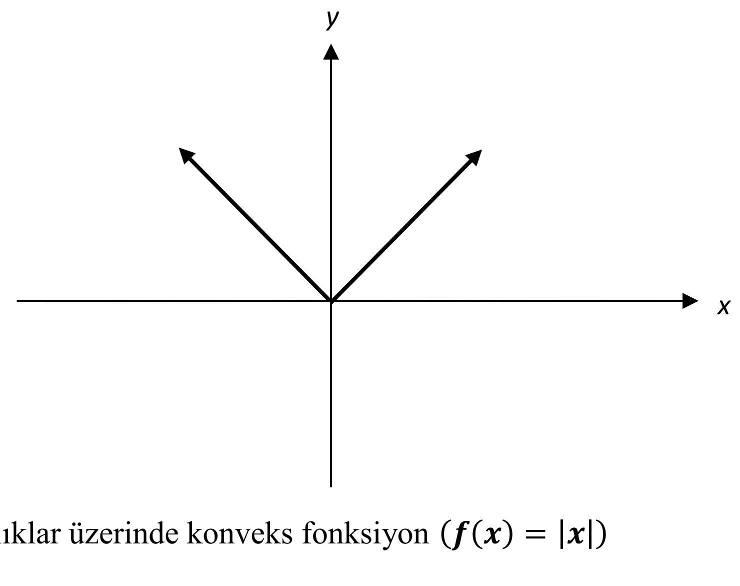
Çözüm: f'nin konveks olduğunu göstermek için $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ olduğunda

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

olduğunu göstermeliyiz. Buna göre

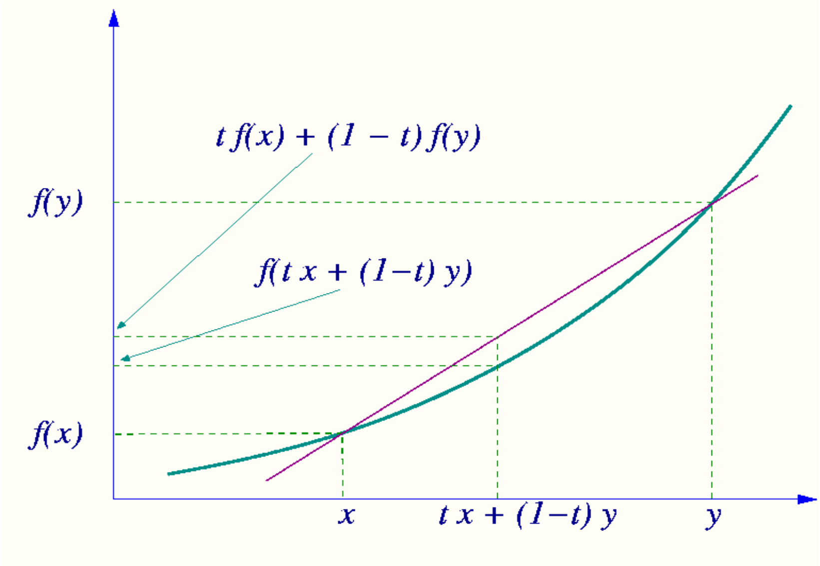
$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &= |tx + (1-t)y| \\ &\leq |tx| + |(1-t)y| \quad \text{(Üçgen Eşitsizliğinden yazılır.)} \\ &= t|x| + (1-t)|y| \\ &= tf(x) + (1-t)f(y) \end{aligned}$$

elde edilir. İlk ve son ifadeden f fonksiyonunun konveksliği ispatlanmış olur.



Şekil 2.3. Aralıklar üzerinde konveks fonksiyon $(\boldsymbol{f(x) = |x|})$

Konveks fonksiyonun geometrik anlamı aşağıdaki gibidir:



Şekil 2.4. Konveks fonksiyon

Geometrik olarak $tx + (1 - t)y$ noktasının f fonksiyonunu altındaki görüntüsü, aynı t değeri için $(x, f(x))$ ve $(y, f(y))$ noktalarının lineer bileşiminden küçük veya eşit kalıyorsa fonksiyon konvekstir denir. Yani bu iki noktayı birleştiren kiriş(doğru parçası) her zaman eğrinin $[x, y]$ aralığında kalan kısmının üzerinde veya üstündedir. Konkav fonksiyon için kiriş f fonksiyonunun grafiğinin $[x, y]$ aralığında kalan kısmının üzerinde veya altındadır.

Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı, $[a, b]$ aralığında konveks (konkav) ve x_0 noktasında diferensiyellenebilen bir fonksiyon ise $x \in (a, b)$ için

$$f(x) - f(x_0) \leq (\geq) f'(x_0)(x - x_0) \tag{2.2}$$

eşitsizliği yazılır. Yani (a, b) aralığında diferensiyellenebilen konveks fonksiyon (2.2) eşitsizliğini sağlar (Roberts and Varberg 1973).

Tanım 2.1.5. (m −Konveks Fonksiyon): “$f: [0, b] \to \mathbb{R}$ ve $b > 0$ olsun. Her $x, y \in [0, b]$, $t \in [0,1]$ ve $m \in [0,1]$için

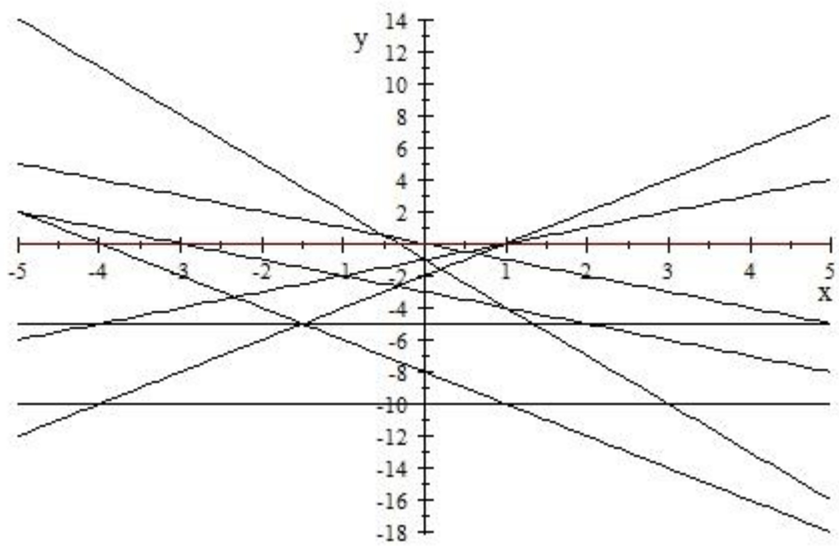
$$f(tx + m(1 - t)y) \leq tf(x) + m(1 - t)f(y)$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonuna m −konvekstir denir” (Toader 1984).

Burada $f(0) \leq 0$ olmak şartıyla $[0, b]$ aralığında tanımlı bütün m −konveks fonksiyonların sınıfı $K_m(b)$ ile gösterilir.

Örnek 2.1.2. “$r > 0$, $f: [0, r] \to \mathbb{R}$, $x \in [0, r]$ olmak üzere $f(x) = ax + b$ şeklindeki $(a, b \in \mathbb{R};\ a \neq 0)$ doğrusal fonksiyonlar $b \leq 0$ için m −konveks fonksiyondur” (Gürbüz 2013).

Doğrusal m −konveks fonksiyonlar,

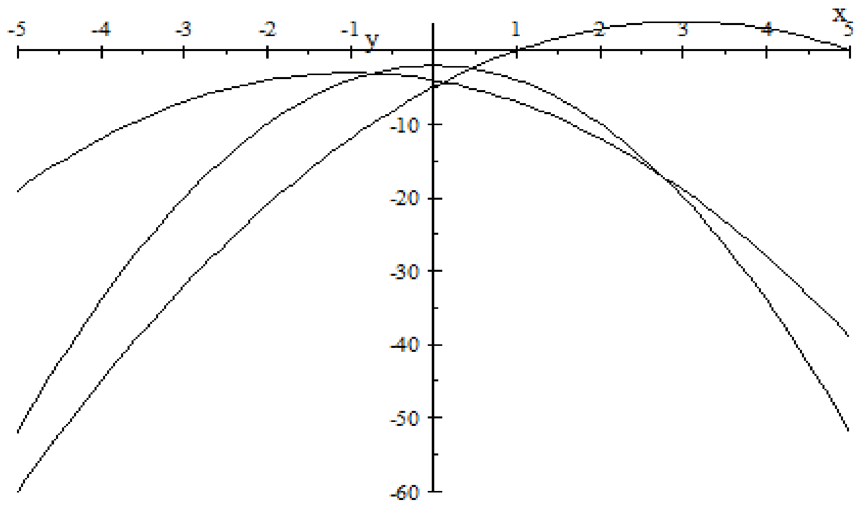


Şekil 2.5. Doğrusal m −konveks fonksiyonlar (Gürbüz 2013).

gibi görsel olarak örneklendirilebilir. Yani, grafiği y ekseninin pozitif kısmını kesmeyen her doğrusal fonksiyon m −konvekstir.

Örnek 2.1.3. “$r > 0, f: [0, r] \to \mathbb{R}$, $(a, b, c \in \mathbb{R})$ olmak üzere $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, c \leq 0$ şeklindeki 2. dereceden polinom fonksiyon m −konvekstir” (Gürbüz 2013).

Görsel olarak; grafiği y −ekseninin pozitif kısmını kesmeyen ve konkav olan her 2. dereceden polinom fonksiyon m −konveks fonksiyondur.



Şekil 2.6. m −konveks olan ikinci dereceden polinom fonksiyonlar

Pavić ve Ardıç (2016) konveks fonksiyonların, tanım kümelerinin iç noktalarında sürekli olduğunu, buna karşın m −konveks fonksiyonların tanım kümelerinin iç noktalarında sürekli olmayabileceğini ifade etmiş ve "1" noktasında sürekli olmayan, fakat $m \in (0,1/2]$ için m −konveks olan (2.3) vermişlerdir.

Örnek 2.1.4.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 \le x < 1 \\ \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}, & 1 \le x \le 2 \end{cases} \tag{2.3}$$

fonksiyonu her $m \in (0,1/2]$ için m −konvekstir ve $x = 1$ için süreksizdir.

Tanım 2.1.6. (h −Konveks Fonksiyon): "$h: J \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon ve $h \not\equiv 0$ olsun. $f: I \to \mathbb{R}$ negatif olmayan fonksiyonu her $x, y \in I$ ve $\alpha \in (0,1)$ için

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le h(\alpha)f(x) + h(1-\alpha)f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna h −konveks fonksiyon veya $SX(h, I)$ sınıfına aittir denir" (Varošanec 2007).

Bu eşitsizlik yön değiştirirse, bu durumda f'ye h −konkav fonksiyon veya $SV(h, I)$ sınıfına aittir denir. Eğer $h(\alpha) = \alpha$ alınırsa, bu takdirde tüm negatif olmayan konveks fonksiyonlar $SX(h, I)$ sınıfına ve tüm negatif olmayan konkav fonksiyonlar

$SV(h,I)$ sınıfına aittir. $h(\alpha)=\frac{1}{\alpha}$ alınırsa, $SX(h,I)$ sınıfı $Q(I)$ sınıfını; $h(\alpha)=1$ alınırsa, $P(I)$ sınıfını ve $h(\alpha)=\alpha^s,\ s\in(0,1)$ alınırsa, K_s^2 sınıfını içereceği açıktır.

Örnek 2.1.5. **"**h fonksiyonu her $\alpha\in(0,1)$ için $h(\alpha)\geq\alpha$ şartını sağlayan negatif olmayan bir fonksiyon olsun (örneğin $k\leq 1$ ve $x>0$ için $h_k=x^k$ fonksiyonu bu özelliğe sahiptir). f fonksiyonu I üzerinde negatif olmayan konveks fonksiyon ise; $x,y\in I,\alpha\in(0,1)$ için,

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y)\leq\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)\leq h(\alpha)f(x)+h(1-\alpha)f(y)$$

yazılabilir. Bu, $f\in SX(h,I)$ anlamına gelir. Benzer şekilde h fonksiyonu, $\alpha\in(0,1)$ için $h(\alpha)\leq\alpha$ şartını sağlıyorsa f negatif olmayan konkav fonksiyonu $SV(h,I)$ sınıfına ait olur" (Varošanec 2007).

Örnek 2.1.6. "$x>0,\ k<0$ olmak üzere $h_k(x)=x^k$ verilsin. Bu durumda;

$$f:I=[a,b]\to\mathbb{R},\qquad f(x)=\begin{cases}1, & x\neq\dfrac{a+b}{2}\\ 2^{1-k}, & x=\dfrac{a+b}{2}\end{cases}$$

fonksiyonu konveks değildir ama h_k $-$konvekstir" (Varošanec 2007).

Tanım 2.1.7. (Birinci Anlamda s −Konveks Fonksiyon): "$\alpha,\beta\geq 0,\ \alpha^s+\beta^s=1$ ve $s\in(0,1]$ olmak üzere tüm $u,v\in\mathbb{R}_+$ için $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(\alpha u+\beta v)\leq\alpha^s f(u)+\beta^s f(v)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f'ye birinci anlamda s −konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı K_s^1 ile gösterilir. Eşitsizlik yön değiştirirse f fonksiyonu birinci anlamda s −konkav fonksiyon olarak adlandırılır" (Orlicz 1961).

Tanım 2.1.8. (İkinci Anlamda s −Konveks Fonksiyon): "$\alpha,\beta\geq 0,\alpha+\beta=1$ ve $s\in(0,1]$ olmak üzere tüm $u,v\in\mathbb{R}_+$ için $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ fonksiyonu eğer

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f'ye ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı K_s^2 ile gösterilir. Eşitsizlik yön değiştirirse f fonksiyonu ikinci anlamda $s-$konkav fonksiyon olarak adlandırılır" (Breckner 1978).

Yukarıda verilen her iki $s-$konvekslik tanımı $s = 1$ için bilinen konveksliğe dönüşür.

Önerme 2.1.1 "$f \in K_s^2$ ise f, $[0, \infty)$ üzerinde negatif olmayan bir fonksiyondur" (Hudzik and Maligranda 1994).

İspat: $u \in R_+$ için,

$$f(u) = f\left(\frac{u}{2} + \frac{u}{2}\right) \leq \frac{f(u)}{2^s} + \frac{f(u)}{2^s} = 2^{1-s} f(u)$$

alalım. Buradan $2^{1-s} f(u) \geq 0$ olur ve buradan $f(u) \geq 0$ olur.

.**Örnek 2.1.7.** "$s \in (0,1)$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olsun. $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(t) = \begin{cases} a, & t = 0 \\ bt^s + c, & t > 0 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde

i. $b \geq 0$ ve $c \leq a$ ise $f \in K_s^1$
ii. $b \geq 0$ ve $c < a$ ise $f, (0, \infty)$ üzerinde azalmayandır fakat $[0, \infty)$ üzerinde azalmayan değildir.
iii. $b \geq 0$ ve $0 \leq c \leq a$ ise $f \in K_s^2$
iv. $b > 0$ ve $c < 0$ ise $f \notin K_s^2$

durumları vardır" (Hudzik and Maligranda 1994).

İspat: (i)'nin ispatında açık olmayan iki durum vardır:

1. $u, v > 0$ olsun. O halde $\alpha u + \beta v > 0$ olur ve

$f(\alpha u + \beta v) = b(\alpha u + \beta v)^s + c \leq b(\alpha^s u^s + \beta^s v^s) + c$

$= b(\alpha^s u^s + \beta^s v^s) + c(\alpha + \beta)$

$\leq b(\alpha^s u^s + \beta^s v^s) + c(\alpha^s + \beta^s)$

$= \alpha^s(bu^s + c) + \beta^s(bv^s + c)$

$= \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$

2. $v > u = 0$ ve $\beta > 0$ olsun. O halde $\alpha u + \beta v > 0$ olur ve

$f(\alpha 0 + \beta v) = f(\beta v) = b(\beta v)^s + c = b(\beta^s v^s) + c(\alpha + \beta)$

$\leq b(\beta^s v^s) + c(\alpha^s + \beta^s) = c\alpha^s + \beta^s(bv^s + c)$

$\leq \alpha^s a + \beta^s(bv^s + c) = \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$

elde edilir. Benzer şekilde (iii) ifadesini ispat edebiliriz. (ii)'nin ispatı açıktır. (iv)'nin ispatı yeterince küçük u değerleri için f negatif olacağından Önerme 2.1.1 ifadesinden hemen görülür.

Tanım 2.1.9. (Quasi-Konveks Fonksiyon): "$f: S \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $S \subset \mathbb{R}$ boştan farklı konveks küme olsun. $\forall x, y \in S$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq max\{f(x), f(y)\}$$

ise f' ye $quasi$ −konveks fonksiyon denir" (Dragomir and Pearce 1998).

"Eğer

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)<max\{f(x),f(y)\}$$

ise f'ye strictly $quasi$ $-$konveks fonksiyon denir. Aynı şartlar altında

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\geq max\{f(x),f(y)\}$$

ise f'ye $quasi$ $-$konkav fonksiyon ve

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)>max\{f(x),f(y)\}$$

ise f'ye strictly $quasi$ $-$konkav fonksiyon denir" (Dragomir and Pearce 1998).

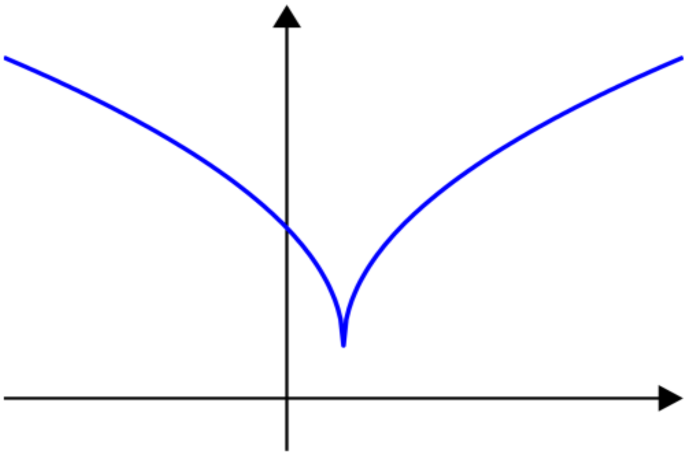
Tanım 2.1.10. "f hem $quasi$ $-$konveks hem de $quasi$ $-$konkav ise f'ye $quasi$ $-$monotonik fonksiyon denir" (Greenberg and Pierskalla 1970).

Sonuç 2.1.1. Konveks olan bir fonksiyon $quasi$ $-$konveks fonksiyondur. Bu önermenin tersi her zaman doğru değildir.

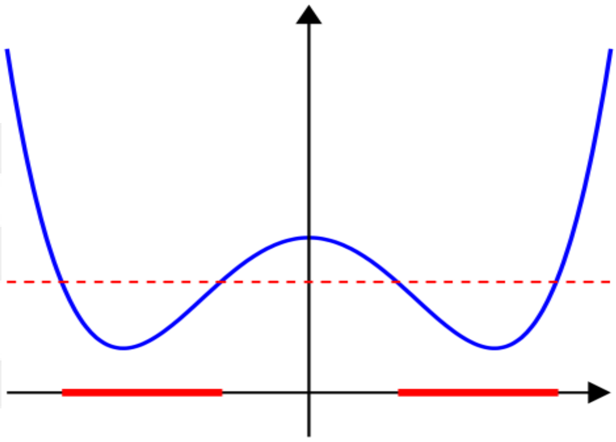
Örnek 2.1.8. "g: $[-2,2]\to\mathbb{R}$,

$$g(t)=\begin{cases}1, & t\in[-2,-1]\\ t^2, & t\in(-1,2]\end{cases}$$

fonksiyonu $[-2,2]$ aralığında konveks değildir. Fakat g fonksiyonu $[-2,2]$ aralığında $quasi$ $-$konveks fonksiyondur" (Ion 2007).



Şekil 2.7. $Quasi$ -konveks olup konveks olmayan fonksiyon



Şekil 2.8. $Quasi$ $-$konveks olmayan fonksiyon

Tanım 2.1.11. (Godunova-Levin Fonksiyonu): “$f: I \to \mathbb{R}$ negatif olmayan fonksiyonu $x, y \in I,\ \lambda \in (0,1)$ olmak üzere

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \frac{f(x)}{\lambda} + \frac{f(y)}{1-\lambda}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f’ye Godunova-Levin fonksiyonu veya $Q(I)$ sınıfına aittir denir.

Bu tanıma denk olarak; $f \in Q(I)$ ve $x, y, z \in I$ ise, bu takdirde

$$f(x)(x-y)(x-z) + f(y)(y-x)(y-z) + f(z)(z-x)(z-y) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır" (Godunova and Levin 1985).

Tanım 2.1.12. ($\boldsymbol{P}$ −Fonksiyonu): "$f: I \to \mathbb{R}$ negatif olmayan fonksiyonu $x, y \in I$, $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq f(x) + f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f'ye $P -$ fonksiyonu veya $P(I)$ sınıfına aittir denir" (Dragomir *et al.* 1995).

Tanımlardan açıkça tüm negatif olmayan konveks fonksiyonlar $Q(I)$ sınıfına ait olduğu görülür. Ayrıca $Q(I) \supset P(I)$ ve $P(I)$ sınıfından fonksiyonlar negatif olmayan konveks ve Quasi-konveks fonksiyonları içermektedir.

Tanım 2.1.13. (Logaritmik Konveks Fonksiyon): "I, $\mathbb{R}$'de bir aralık $f: I \to [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq [f(x)]^{\alpha}[f(y)]^{(1-\alpha)}$$

eşitsizliği sağlanırsa, f fonksiyonuna log −konvekstir denir. $f = exp(log f)$ olduğundan log −konveks fonksiyon konvekstir. Fakat tersi her zaman doğru değildir" (Pečarić *et al.* 1992).

Tanım 2.1.14. (Süreklilik): "$f: S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in S$ ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$x \in S \text{ ve } |x - x_0| < \delta \text{ için } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f, x_0'da süreklidir denir" (Bayraktar 2010).

Tanım 2.1.15. (Starshaped Fonksiyon) "$b > 0$ olmak üzere $f: [0, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $x \in [0, b]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx) \leq tf(x)$$

şartını sağlıyorsa bu fonksiyona starshaped fonksiyon denir" (Toader 1984).

Tanım 2.1.16. (Bazı Özel Ortalamalar): Bu kısımda a, b pozitif iki reel sayının bazı ortalamalar verilecektir.

"(1) Aritmetik ortalama:

$$A = A(a,b) \coloneqq \frac{a+b}{2},$$

(2) Geometrik ortalama:

$$G = G(a,b) \coloneqq \sqrt{ab},$$

(3) Harmonik ortalama:

$$H = H(a,b) \coloneqq \frac{2ab}{a+b}$$

(4) Logaritmik ortalama:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(a,b) \coloneqq \begin{cases} a, & a = b \\ \dfrac{b-a}{lnb - lna}, & a \neq b \end{cases}$$

(5) Identric ortalama:

$$I = I(a,b) \coloneqq \begin{cases} a, & a = b \\ \dfrac{1}{e}\left(\dfrac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}, & a \neq b \end{cases}$$

(6) p-Logaritmik ortalama:

$$\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(a,b) := \begin{cases} \left[\dfrac{b^{p+1} - a^{p+1}}{(p+1)(b-a)}\right]^{\frac{1}{p}} , & a \neq b \\ a , & a = b \end{cases} \qquad ; \quad a, b \geq 0.$$

Bu ortalamalar arasında

$$H \leq G \leq \mathcal{L} \leq I \leq A$$

sıralaması vardır" (Bullen *et al.* 1988; Bullen 2003).

Tanım 2.1.17. (Ağırlıklı Aritmetik Ortalama): "$x_i \in [a,b]$, $p_i > 0$ ve $P_n := \sum_{i=1}^{n} p_i > 0$ $(i = 1,2,\dots,n)$ olmak üzere

$$A_n(x,p) := \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

şeklindeki ifadeye x_i $(i = 1,2,\dots,n)$ sayılarının p_i $(i = 1,2,\dots,n)$ ağırlıklı aritmetik ortalaması denir" (Mitrinović *et al.* 1993).

Tanım 2.1.18. (Gama ve Beta Fonksiyonu): "Euler, gamma fonksiyonunun integral temsilini

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \qquad x > 0$$

olarak ifade eder" (Kannappan 2009). Beta fonksiyonu;

$$\beta(x,y) = \int_0^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt, \qquad x, y > 0$$

şeklindedir (Dragomir *et al.* 2000). "Bu eşitlik Euler tipli Beta fonksiyonu ya da birinci çeşit Euler integrali olarak adlandırılır. Bu fonksiyonların,

i) $\beta(x+1,y)=\frac{x}{x+y}\beta(x,y),\quad x,y>0$

ii) $\beta(1,y)=\frac{1}{y}\,,\qquad y>0$

iii) $\beta(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt=\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\qquad x,y>0$

iv) $\beta(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},\quad x,y>0$

v) $\beta(x,y)=\beta(y,x),\quad x,y>0$

vi) $\beta(x,x)=2^{1-2x}\beta\left(x,\frac{1}{2}\right),\quad x>0$

gibi özellikleri vardır” (Jeffrey and Dai 2008).

Literatürden bilinir ki gama ve beta fonksiyonları sırasıyla $(0,\infty)$ ve $(0,\infty)^2$’de logaritmik konveks fonksiyonlardır.

Teorem 2.1.1. (Üçgen Eşitsizliği): “Herhangi x,y reel sayıları için

$$|x+y|\leq|x|+|y|,$$

$$\big||x|-|y|\big|\leq|x-y|,$$

$$\big||x|-|y|\big|\leq|x+y|$$

ve tümevarım metoduyla

$$|x_1+\cdots+x_n|\leq|x_1|+\cdots+|x_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir” (Mitrinović *et al*. 1993).

Teorem 2.1.2. (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu): “f, $[a,b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b|f(x)|dx\qquad(a<b)$$

eşitsizliği geçerlidir” (Mitrinović *et al*. 1993).

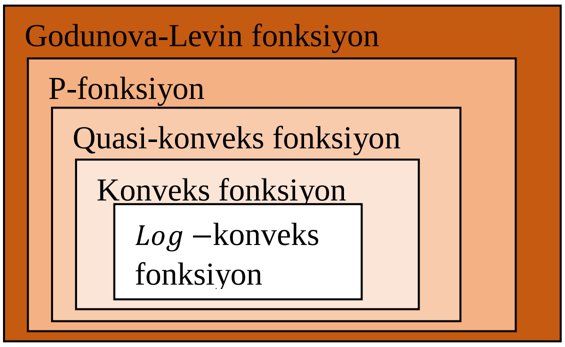
2.2. Bazı Konveks Fonksiyon Sınıflarının Hiyerarşisi

Fonksiyonlar teorisi çalışmalarında yeni sonuçlar ve genelleştirmeler elde etmek için kimi zaman fonksiyonun şartlarında bazı kısıtlamalar yapmak gerekirken kimi zamanda fonksiyona ek özellikler katmak gerekir. Çünkü fonksiyonlar aynı anda birçok özelliği sağlayabilir veya bir fonksiyon sınıfı başka bir fonksiyon sınıfıyla bazı özellikleri itibariyle benzerlik gösterebilir. Çalışmalarımızda farklı türden konveks fonksiyonlar için çeşitli integral eşitsizlikleri ispatlarken, bu eşitsizliklerin belli özel durumlar için başka konvekslik sınıfları içinde sağlandığını açıkça görebiliriz. Dolayısıyla buradan konveks fonksiyonlar arasında özellikleri açısından bir hiyerarşi olduğu gerçeğine ulaşılır. Fakat bu hiyerarşide tüm konvekslik sınıflarını beraber değerlendirmek oldukça güç olduğu için aralarındaki ilişki, tanımları ve özellikleri yardımıyla şu şekilde oluşturulabilir;

Teorem 2.2.1. “$I \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere, Log −Konveks fonksiyonlar sınıfı, (negatif olmayan) Konveks fonksiyonlar sınıfı, (negatif olmayan) Quasi-konveks fonksiyonlar sınıfı, P −fonksiyonlar sınıfı ve Godunova-Levin fonksiyonlar sınıfı sırasıyla $L(I)$, $C(I)$, $QC(I)$, $P(I)$, $Q(I)$ ile gösterilirse;

$$L(I) \subset C(I) \subset QC(I) \subset P(I) \subset Q(I)$$

olduğu görülür” (Kavurmacı 2012).



Şekil 2.9. Godunova-Levin, $\boldsymbol{P}$ −fonksiyon, Quasi-konveks fonksiyon, Konveks fonksiyon ve $\boldsymbol{log}$ −konveks fonksiyon sınıflarının ilişkisi

Lemma 2.2.1. “Eğer f fonksiyonu $m-$konveks fonksiyonlar sınıfına ait ise f fonksiyonu starshaped fonksiyondur” (Toader 1988).

Lemma 2.2.2. “Eğer f fonksiyonu $m-$konveks fonksiyon ve $0 \leq n < m \leq 1$ ise f fonksiyonu $n-$konveks fonksiyondur (Toader 1988). Yukarıdaki lemmalar yardımıyla; $0 \leq n \leq m \leq 1$ olmak üzere, konveks fonksiyonlar sınıfı, $m-$konveks fonksiyonlar sınıfı, $n-$konveks fonksiyonlar sınıfı ve starshaped fonksiyonlar sınıfı sırasıyla $K(b)$, $K_m(b)$, $K_n(b)$, $S^*(b)$ ile gösterilirse;

$$K(b) \subset K_m(b) \subset S^*(b)$$

olduğu görülür” (Toader 1988).

Şekil 2.10. Konveks fonksiyon, $\boldsymbol{m}-$konveks fonksiyon, $\boldsymbol{n}-$konveks fonksiyon ve starshaped fonksiyon sınıflarının ilişkisi

$h-$konveks fonksiyon tanımından açıkça görülebilir ki; eğer $h(t) = t$ seçilirse negatif olmayan konveks fonksiyonlar veya eşitsizliğin yön değiştirmesinde negatif olmayan konkav fonksiyonlar, $h(t) = \frac{1}{t}$ seçilirse fonksiyon $Q(I)$ sınıfından, eğer $h(t) = 1$ sabit fonksiyonu olarak seçilirse $P(I)$ sınıfından fonksiyon, eğer $h(t) = t^s$ seçilirse burada $s \in (0,1)$ olmak üzere K_s^2sınıfından konveks bir fonksiyon elde edileceği aşikârdır. Bu bilgiler ışığında $h(t)$ fonksiyonun bazı özel değerleri için;

$$C(I) \subset SX(h, I), \qquad P(I) \subset SX(h, I), \qquad K_s^2 \subset SX(h, I)$$

yazılabilir. Burada h fonksiyonu negatif olmayan fonksiyon olduğu için negatif olmayan konveks fonksiyonlar $SX(h,I)$ sınıfının alt kümesidir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Konveks Fonksiyonlar İçin Bazı Eşitsizlikler

Bu bölümde konveks fonksiyonlarda için kullanılan temel teoremler verilmiştir.

Teorem 3.1.1. (Hermite-Hadamard Eşitsizliği): "I, $\mathbb{R}$'de bir aralık, $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir" (Pečarić *et al.* 1992).

Teorem 3.1.2. (Hölder Eşitsizliği): "$a = (a_1, \dots, a_n)$ ve $b = (b_1, \dots, b_n)$ reel veya kompleks sayıların iki n −lisi olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olmak üzere

(a) $p > 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

(b) $p < 0$ veya $q < 0$ ise,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizlikleri geçerlidir" (Mitrinović 1970).

Teorem 3.1.3. (İntegraller için Hölder Eşitsizliği): "$p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g, $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir" (Mitrinović *et al*. 1993).

Ayrıca Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olan power-mean eşitsizliği de aşağıdaki gibi ifade edilir.

Sonuç 3.1.1. (Power Mean Eşitsizliği): $q \geq 1$ olsun. f ve g, $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)| dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 3.1.4. (Young Eşitsizliği): "$a, b > 0$ ve $p, q > 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik durumu sadece $a^p = b^q$ durumunda sağlanır" (Mitrinovic 1970, s.49.)

Teorem 3.1.5. "$a, b \in [0, \infty)$, $a < b$, $s \in (0,1]$ olmak üzere $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ ikinci anlamda s −konveks fonksiyonu verilsin. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir" (Dragomir and Fitzpatrick, 1999).

$$2^{s-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{s+1}.$$

Burada $k = \frac{1}{s+1}$ mümkün olan en iyi sabittir.

Lemma 3.1.1. "f: $[a,b] \to \mathbb{R}$, $n-$ kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $f^n \in L[a,b]$ olsun. Bu durumda $n \geq 1$ doğal sayısı için;

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a) + (-1)^k f^{(k)}(b)}{(k+1)!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{k+1}$$
$$+ (-1)^n \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}n!}\left\{\int_0^1 (t-1)^n f^{(n)}\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)a\right)dt\right.$$
$$\left. + \int_0^1 (1-t)^n f^{(n)}\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)b\right)dt\right\}$$

eşitliği sağlanır" (Yıldız 2014).

İspat: Matematiksel tümevarımla yapılır. $n = 1$ için ifadenin doğruluğu aşağıdaki işlemle görülebilir.

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$
$$= \frac{b-a}{4}\left\{\int_0^1 (t-1)f'\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)a\right)dt\right.$$
$$\left. + \int_0^1 (t-1)f'\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)b\right)dt\right\}.$$

İfadenin n için doğru olduğunu kabul edilip $n+1$ için doğruluğu gösterilmelidir. Bunun için;

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a) + (-1)^k f^{(k)}(b)}{(k+1)!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{k+1}$$
$$+(-1)^{n+1} \frac{(b-a)^{n+2}}{2^{n+2}(n+1)!}\left\{\int_0^1 (t-1)^{n+1} f^{(n+1)}\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)a\right)dt\right.$$
$$\left. + \int_0^1 (1-t)^{n+1} f^{(n+1)}\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)b\right)dt\right\}.$$

Böylece;

$$I=\frac{(b-a)^{n+2}}{2^{n+2}(n+1)!}\left\{\int_0^1 (t-1)^{n+1} f^{(n+1)}\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)a\right)dt\right.$$
$$\left.+\int_0^1 (1-t)^{n+1} f^{(n+1)}\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)b\right)dt\right\}$$

olup kısmi integrasyon yardımıyla

$$I=\frac{(b-a)^{n+2}}{2^{n+2}(n+1)!}\left\{(t-1)^{n+1}\frac{f^{(n)}\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)a\right)}{\frac{b-a}{2}}\right|_0^1$$
$$\left.-\frac{n+1}{\frac{b-a}{2}}\int_0^1 (t-1)^{n} f^{(n)}\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)a\right)dt\right\}$$
$$+\frac{(b-a)^{n+2}}{2^{n+2}(n+1)!}\left\{(1-t)^{n+1}\frac{f^{(n)}\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)b\right)}{\frac{a-b}{2}}\right|_0^1$$
$$\left.+\frac{n+1}{\frac{a-b}{2}}\int_0^1 (1-t)^{n} f^{(n)}\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)b\right)dt\right\}$$
$$=\frac{(-1)^{n+2}(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}f^{(n)}(a)-\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}n!}$$
$$\times\left[\int_0^1 (t-1)^{n} f^{(n)}\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)a\right)dt\right]+\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}f^{(n)}(b)-\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}n!}$$
$$\times\left[\int_0^1 (1-t)^{n} f^{(n)}\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)b\right)dt\right]$$

bulunur. Şimdi de matematiksel tümevarım hipotezinden yararlanarak

$$\frac{1}{(-1)^n}\int_a^b f(t)dt=\frac{1}{(-1)^n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)+(-1)^k f^{(k)}(b)}{(k+1)!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{k+1}+(-1)^{n+2}$$
$$\times\left[\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}f^{(n)}(a)\right]+\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}f^{(n)}(b)-I$$

elde edilir. Her iki taraf $(-1)^n$ ile çarpılırsa;

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a) + (-1)^k f^{(k)}(b)}{(k+1)!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{k+1}$$
$$+ (-1)^{n+1}\frac{(b-a)^{n+2}}{2^{n+2}(n+1)!}\left\{\int_0^1 (t-1)^{n+1} f^{(n+1)}\left(t\frac{a+b}{2}\right.\right.$$
$$\left.\left. + (1-t)a\right)dt + \int_0^1 (1-t)^{n+1} f^{(n+1)}\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)b\right)dt\right\}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 3.1.2. "$f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dönüşümü I° kümesinde türevlenebilir olsun. $a, b \in I^\circ$, $a < b$ ve $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ olsun. $f', g \in L[a,b]$ ise her $x \in [a,b]$ ve $\lambda \in [0,1]$ için;

$$\int_a^b P_\lambda(x,t) f'(t)dt = (1-\lambda) f(x) \int_a^b g(s)ds$$

$$+\lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds + f(b)\int_x^b g(s)ds\right) - \int_a^b g(s)f(s)ds$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada

$$P_\lambda(x,t) := \begin{cases} (1-\lambda)\int_a^t g(s)ds + \lambda\int_x^t g(s)ds & , a \le t < x \\ (1-\lambda)\int_b^t g(s)ds + \lambda\int_x^t g(s)ds & , x \le t \le b \end{cases}$$"

(Erden and Sarıkaya 2015).

İspat: Kısmi integrasyon yardımıyla

$$\int_a^b P_\lambda(x,t) f'(t)dt = \int_a^x \left[(1-\lambda)\int_a^t g(s)ds + \lambda\int_x^t g(s)ds\right] f'(t)dt$$

$$+ \int_x^b \left[(1-\lambda)\int_b^t g(s)ds + \lambda\int_x^t g(s)ds\right] f'(t)dt$$

$$= \left[(1-\lambda)\int_a^t g(s)ds + \lambda\int_x^t g(s)ds\right] f(t)\Big|_{t=a}^{x} - \int_a^x g(s)f(s)ds$$

$$+\left[(1-\lambda)\int_b^t g(s)ds+\lambda\int_x^t g(s)ds\right]f(t)\Big|_{t=x}^{b}-\int_x^b g(s)f(s)ds$$

$$=(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds$$
$$+\lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds+f(b)\int_x^b g(s)ds-\int_a^b g(s)f(s)\,ds\right)$$

bulunur. İspat tamamlanır.

Teorem 3.1.6. "$f: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dönüşümü I° kümesinde türevlenebilir olsun. $a,b\in I^{\circ}$, $a<b$ ve $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ dönüşümü $[a,b]$ üzerinde sürekli olsun. $|f'|$, $[a,b]$ üzerinde konveks ise, her $x\in[a,b]$ ve $\lambda\in[0,1]$ için;

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds-\int_a^b g(s)f(s)ds+\lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds+f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq\frac{\|g\|_{[a,x],\infty}}{6(b-a)}\{|f'(a)|(x-a)^2[(1-\lambda)(3b-a-2x)+\lambda(3b-2a-x)]$$
$$+(2-\lambda)|f'(b)|(x-a)^3\}$$

$$+\frac{\|g\|_{[x,b],\infty}}{6(b-a)}\{(2-\lambda)|f'(a)|(b-x)^3$$
$$+|f'(b)|(b-x)^2[(1-\lambda)(b-3a+2x)+\lambda(2b-3a+x)]\}$$

$$\leq\frac{\|g\|_{[a,b],\infty}}{6(b-a)}\{|f'(a)|(x-a)^2[(1-\lambda)(3b-a-2x)+\lambda(3b-2a-x)]$$
$$+|f'(a)|(2-\lambda)(b-x)^3+|f'(b)|(2-\lambda)(x-a)^3$$
$$+|f'(b)|(b-x)^2[(1-\lambda)(b-3a+2x)+\lambda(2b-3a+x)]\}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\|g\|_{[a,b],\infty}=sup_{s\in[a,b]}|g(s)|$ olduğundan yararlanılmıştır" (Erden and Sarıkaya 2015).

Teorem 3.1.7. "$f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü I° kümesinde türevlenebilir ve $|f'| \in L[a,b]$, $a, b \in I^{\circ}$, $a < b$ olsun. $g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü $[a,b]$ üzerinde sürekli olsun. $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde konveks, $q > 1$ ise her $x \in [a,b]$ ve $\lambda \in [0,1] \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için;

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds - \int_a^b g(s)f(s)ds + \lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds + f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq \left(\frac{(1-\lambda)^{p+1} - \lambda^{p+1}}{(p+1)(1-2\lambda)}\right)^{\frac{1}{p}} (b-a)^{\frac{1}{q}} \left[(x-a)^{p+1} + (b-x)^{p+1}\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\times \left[\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}} \|g\|_{[a,b],\infty}$$

ve $\lambda = \frac{1}{2}$ için

$$\left|\frac{f(x)}{2}\int_a^b g(s)ds + \frac{1}{2}\left[f(a)\int_a^x g(s)ds + f(b)\int_x^b g(s)ds\right] - \int_a^b g(s)f(s)ds\right|$$

$$\leq \frac{\|g\|_{[a,b],\infty}(b-a)^{\frac{1}{q}}}{2}\left[\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}} \left[(x-a)^{p+1} + (b-x)^{p+1}\right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır" (Erden and Sarıkaya 2015).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin Bazı Yeni Eşitsizlikler

Bu aşamada Yıldız (2014) tarafından elde edilen bir lemmaya s −konveks fonksiyon sınıfı kullanılarak yeni eşitsizlikler elde edilecektir.

Teorem 4.1.1. $f:[a,b] \subset \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, n. mertebeden türevlenebilir fonksiyon, $f^{(n)} \in L[a,b]$ ve $\left|f^{(n)}\right| \in K_s^2$ olsun. $n \in N$ ve $s \in (0,1]$ reel sayısı için;

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a) + (-1)^k f^{(k)}(b)}{(k+1)!} \left(\frac{b-a}{2}\right)^{k+1}\right| \le \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1} n!}$$

$$\times \left\{2\beta(s+1, n+1) \left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + \frac{1}{n+s+1}\left(\left|f^{(n)}(a)\right| + \left|f^{(n)}(b)\right|\right)\right\}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemma 3.1.1. ve integraller için üçgen eşitsizliğinden yararlanarak

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a) + (-1)^k f^{(k)}(b)}{(k+1)!} \left(\frac{b-a}{2}\right)^{k+1}\right|$$

$$\le \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1} n!} \left\{\int_0^1 (1-t)^n \left|f^{(n)}\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)a\right)\right| dt\right.$$

$$\left. + \int_0^1 (1-t)^n \left|f^{(n)}\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)b\right)\right| dt\right\}$$

bulunur. Sonra $\left|f^{(n)}\right|$ ifadesinin ikinci anlamda s −konveks fonksiyon oluşu kullanılarak

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a) + (-1)^k f^{(k)}(b)}{(k+1)!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{k+1}\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}n!}\left\{\int_0^1 (1-t)^n \left(t^s \left|f^{(n)}\left(t\frac{a+b}{2}\right)\right| + (1-t)^s\left|f^{(n)}(a)\right|\right) dt\right.$$

$$\left. + \int_0^1 (1-t)^n \left(t^s \left|f^{(n)}\left(t\frac{a+b}{2}\right)\right| + (1-t)^s\left|f^{(n)}(b)\right|\right) dt\right\}$$

$$= \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}n!}\left\{\int_0^1 \left((1-t)^n t^s \left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + (1-t)^n(1-t)^s\left|f^{(n)}(a)\right|\right) dt\right.$$

$$\left. + \int_0^1 \left((1-t)^n t^s \left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + (1-t)^n(1-t)^s\left|f^{(n)}(b)\right|\right) dt\right\}$$

elde edilir. Basit matematiksel işlemler ve β fonksiyonu yardımıyla

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a) + (-1)^k f^{(k)}(b)}{(k+1)!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{k+1}\right| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}n!}$$

$$\times\left\{2\beta(s+1, n+1)\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + \frac{1}{n+s+1}\left(\left|f^{(n)}(a)\right| + \left|f^{(n)}(b)\right|\right)\right\}$$

bulunur.Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.2 $f: [a,b] \subset \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, n. mertebeden türevlenebilir fonksiyon, $f^{(n)} \in L[a,b]$ ve $\left|f^{(n)}\right|^q \in K_s^2$ olsun. $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ şartını sağlayan her p, q ve $s \in (0,1]$ reel sayısı ile n doğal sayısı için;

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a) + (-1)^k f^{(k)}(b)}{(k+1)!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{k+1}\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}n!\,(np+1)^{\frac{1}{p}}(s+1)^{\frac{1}{q}}}$$

$$\times\left\{\left(\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{q}+\left|f^{(n)}(a)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{q}+\left|f^{(n)}(b)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemma 3.1.1.ve integraller için üçgen eşitsizliğinden yararlanarak

$$\left|\int_a^b f(t)dt-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)+(-1)^k f^{(k)}(b)}{(k+1)!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{k+1}\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}n!}\left\{\int_0^1 (1-t)^n\left|f^{(n)}\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)a\right)\right|dt\right.$$

$$\left.+\int_0^1 (1-t)^n\left|f^{(n)}\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)b\right)\right|dt\right\}$$

elde edilir. İntegraller için Hölder Eşitsizliği kullanılarak

$$\left|\int_a^b f(t)dt-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)+(-1)^k f^{(k)}(b)}{(k+1)!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{k+1}\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}n!}\left\{\left(\int_0^1 (1-t)^{np}\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f^{(n)}\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)a\right)\right|^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_0^1 (1-t)^{np}\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f^{(n)}\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)b\right)\right|^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

yazılır. Ardından $\left|f^{(n)}\right|^q$ ifadesinin ikinci anlamda s −konveks fonksiyon oluşu kullanılarak

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)+(-1)^k f^{(k)}(b)}{(k+1)!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{k+1}\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}n!}\left\{\left(\int_0^1 (1-t)^{np}\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left(t^s\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right.\right.\right.$$

$$\left.\left. + (1-t)^s\left|f^{(n)}(a)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_0^1 (1-t)^{np}\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left(t^s\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + (1-t)^s\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

bulunur. Basit matematiksel işlemler yapılarak

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)+(-1)^k f^{(k)}(b)}{(k+1)!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{k+1}\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}n!\,(np+1)^{\frac{1}{p}}(s+1)^{\frac{1}{q}}}$$

$$\times\left\{\left(\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + \left|f^{(n)}(a)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + \left|f^{(n)}(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

elde edilir ki bu istenen sonuçtur.

Teorem 4.1.3 $f:[a,b]\subset\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, n. mertebeden türevlenebilen fonksiyon, $f^{(n)}\in L[a,b]$ ve $\left|f^{(n)}\right|^q\in K_s^2$ olsun. Her $q\geq 1$, $s\in(0,1]$ reel sayıları ve n doğal sayısı için;

$$\left|\int_a^b f(t)dt-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)+(-1)^k f^{(k)}(b)}{(k+1)!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{k+1}\right|$$

$$\leq\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}n!\,(n+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left\{\left(\beta(n+1,s+1)\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+\frac{1}{n+s+1}\left|f^{(n)}(a)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\left(\beta(n+1,s+1)\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+\frac{1}{n+s+1}\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemma 3.1.1.ve integraller için üçgen eşitsizliğinden yararlanarak

$$\left|\int_a^b f(t)dt-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)+(-1)^k f^{(k)}(b)}{(k+1)!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{k+1}\right|$$

$$\leq\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}n!}\left\{\int_0^1(1-t)^n\left|f^{(n)}\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)a\right)\right|dt\right.$$
$$\left.+\int_0^1(1-t)^n\left|f^{(n)}\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)b\right)\right|dt\right\}$$

elde edilir. Sonra İntegraller için power-mean eşitsizliği kullanılarak

$$\left|\int_a^b f(t)dt-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)+(-1)^k f^{(k)}(b)}{(k+1)!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{k+1}\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}n!}\left\{\left(\int_0^1 (1-t)^n dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\right.$$

$$\times\left(\int_0^1 (1-t)^n \left|f^{(n)}\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_0^1 (1-t)^n dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 (1-t)^n \left|f^{(n)}\left(t\frac{a+b}{2}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+(1-t)b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

bulunur. Ardından $\left|f^{(n)}\right|^q$ ifadesinin ikinci anlamda s −konveks fonksiyon oluşu kullanılarak

$$\left|\int_a^b f(t)dt-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)+(-1)^k f^{(k)}(b)}{(k+1)!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{k+1}\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}n!\,(n+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left\{\left(\int_0^1 (1-t)^n\left(t^s\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+(1-t)^s\left|f^{(n)}(a)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left.+\left(\int_0^1 (1-t)^n\left(t^s\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+(1-t)^s\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

elde edilir. Basit matematiksel işlemler ve β fonksiyonu yardımıyla

$$\left|\int_a^b f(t)dt-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)+(-1)^k f^{(k)}(b)}{(k+1)!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{k+1}\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}n!\,(n+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left\{\left(\beta(n+1,s+1)\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{q}+\frac{1}{n+s+1}\left|f^{(n)}(a)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\beta(n+1,s+1)\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{q}+\frac{1}{n+s+1}\left|f^{(n)}(b)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

yazılır. Böylece ispat tamamlanır.

Bu aşamada Erden ve Sarıkaya (2015) tarafından elde edilen bir lemmaya farklı türden konveks fonksiyon sınıfları kullanılarak yeni eşitsizlikler elde edilecektir.

Teorem 4.1.4 $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu, I° kümesinde türevlenebilir olsun. $a, b \in I$, $a < b$ ve $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere $[a,b]$ üzerinde $|f'| \in P(I)$ ise $\lambda \in [0,1]$ ve $x \in [a,b]$ için;

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds-\int_a^b g(s)f(s)ds+\lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds+f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty}\left\{\frac{(x-a)^2}{2}(|f'(a)|+|f'(b)|)\right\}$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty}\left\{\frac{(b-x)^2}{2}(|f'(a)|+|f'(b)|)\right\}$$

$$\leq \|g\|_{[a,b],\infty}\left\{\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{2}(|f'(a)|+|f'(b)|)\right\}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemma 3.1.2. ve üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds-\int_a^b g(s)f(s)ds+\lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds+f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq \int_a^b |P_\lambda(x,t)||f'(t)|dt$$

$$\leq \int_a^x \left((1-\lambda)\left|\int_a^t g(s)ds\right| + \lambda\left|\int_x^t g(s)ds\right|\right)\left|f'\left(\frac{b-t}{b-a}a + \frac{t-a}{b-a}b\right)\right| dt$$

$$+\int_x^b \left((1-\lambda)\left|\int_b^t g(s)ds\right| + \lambda\left|\int_x^t g(s)ds\right|\right)\left|f'\left(\frac{b-t}{b-a}a + \frac{t-a}{b-a}b\right)\right| dt$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty} \int_a^x \big((1-\lambda)(t-a) + \lambda(x-t)\big)\left|f'\left(\frac{b-t}{b-a}a + \frac{t-a}{b-a}b\right)\right| dt$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty} \int_x^b \big((1-\lambda)(b-t) + \lambda(t-x)\big)\left|f'\left(\frac{b-t}{b-a}a + \frac{t-a}{b-a}b\right)\right| dt$$

elde edilir. $|f'|$ fonksiyonunun $P(I)$ sınıfına ait oluşu ile

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds - \int_a^b g(s)f(s)ds + \lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds + f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty} \int_a^x \big((1-\lambda)(t-a) + \lambda(x-t)\big)(|f'(a)| + |f'(b)|)dt$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty} \int_x^b \big((1-\lambda)(b-t) + \lambda(t-x)\big)(|f'(a)| + |f'(b)|)dt$$

$$= \|g\|_{[a,x],\infty}\left\{|f'(a)|(1-\lambda)\int_a^x (t-a)dt + (1-\lambda)|f'(b)|\int_a^x (t-a)dt \right.$$
$$\left. + \lambda|f'(a)|\int_a^x (x-t)dt + \lambda|f'(b)|\int_a^x (x-t)dt\right\}$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty}\left\{(1-\lambda)|f'(a)|\int_x^b (b-t)dt + (1-\lambda)|f'(b)|\int_x^b (b-t)dt\right.$$

$$+\lambda|f'(a)|\int_x^b (t-x)dt+\lambda|f'(b)|\int_x^b (t-x)dt\Big\} \qquad (4.1)$$

bulunur.

$$I_1=\int_a^x (t-a)dt=\int_a^x (x-t)dt=\frac{(x-a)^2}{2}$$

$$I_2=\int_x^b (b-t)dt=\int_x^b (t-x)dt=\frac{(b-x)^2}{2}$$

ifadeleri (4.1) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds-\int_a^b g(s)f(s)ds+\lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds+f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty}\left\{\frac{(x-a)^2}{2}(|f'(a)|+|f'(b)|)\right\}$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty}\left\{\frac{(b-x)^2}{2}(|f'(a)|+|f'(b)|)\right\}$$

elde edilir. Böylece eşitsizliğin sol tarafının ispatı tamamlanır. Eşitsizliğin sağ tarafının ispatı ise $\|g\|_{[a,x],\infty}\leq\|g\|_{[a,b],\infty}$ ve $\|g\|_{[x,b],\infty}\leq\|g\|_{[a,b],\infty}$ ifadelerinden yararlanılarak kolayca görülebilir.

Teorem 4.1.5 $f\colon I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ fonksiyonu, $I°$ kümesinde türevlenebilir olsun. $a,b\in I$, $a<b$ ve $g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere $[a,b]$ üzerinde $|f'|^q\in P(I)$ ise $x\in[a,b]$, $\lambda\in[0,1]$, $p>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ şartı altında

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds-\int_a^b g(s)f(s)ds+\lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds+f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty}\left\{\left(\frac{(-a+x)^{p+1}}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}(x-a)^{\frac{1}{q}}(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty}\left\{\left(\frac{(b-x)^{p+1}}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}(b-x)^{\frac{1}{q}}(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$\leq \|g\|_{[a,b],\infty}\left\{\frac{((x-a)^2+(b-x)^2)(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}}}{(p+1)^{\frac{1}{q}}}\right\}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemma 3.1.2. ve üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds-\int_a^b g(s)f(s)ds+\lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds+f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq \int_a^b |P_\lambda(x,t)||f'(t)|dt$$

$$\leq \int_a^x\left((1-\lambda)\left|\int_a^t g(s)ds\right|+\lambda\left|\int_x^t g(s)ds\right|\right)|f'(t)|\,dt$$
$$+\int_x^b\left((1-\lambda)\left|\int_b^t g(s)ds\right|+\lambda\left|\int_x^t g(s)ds\right|\right)|f'(t)|\,dt$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty}\left\{(1-\lambda)\int_a^x\big((t-a)|f'(t)|\big)dt+\lambda\int_a^x(x-t)|f'(t)|\,dt\right\}$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty}\left\{(1-\lambda)\int_x^b\big((b-t)|f'(t)|\big)dt+\lambda\int_x^b(t-x)|f'(t)|\,dt\right\}$$

yazılır. Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds-\int_a^b g(s)f(s)ds+\lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds+f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty}\left\{(1-\lambda)\left(\int_a^x (t-a)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^x |f'(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\lambda\left(\int_a^x (x-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^x |f'(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty}\left\{(1-\lambda)\left(\int_x^b (b-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_x^b |f'(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\lambda\left(\int_x^b (t-x)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_x^b |f'(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

elde edilir. $|f'|^q$ fonksiyonunun $P(I)$ sınıfına ait oluşu ve $t=\frac{b-t}{b-a}a+\frac{t-a}{b-a}b$ olduğu kullanılarak

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds-\int_a^b g(s)f(s)ds+\lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds+f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty}\left\{(1-\lambda)\left(\int_a^x (t-a)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^x (|f'(a)|^q+|f'(b)|^q)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\lambda\left(\int_a^x (x-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^x (|f'(a)|^q+|f'(b)|^q)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty}\left\{(1-\lambda)\left(\int_x^b (b-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_x^b (|f'(a)|^q+|f'(b)|^q)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\lambda\left(\int_x^b (t-x)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_x^b (|f'(a)|^q+|f'(b)|^q)\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

bulunur. Basit matematiksel işlemler yapılarak

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds-\int_a^b g(s)f(s)ds+\lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds+f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty}\left\{\left(\frac{(-a+x)^{p+1}}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}(x-a)^{\frac{1}{q}}(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty}\left\{\left(\frac{(b-x)^{p+1}}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}(b-x)^{\frac{1}{q}}(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

elde edilir. Böylece eşitsizliğin sol tarafının ispatı tamamlanır. Eşitsizliğin sağ tarafının ispatı ise $\|g\|_{[a,x],\infty}\leq\|g\|_{[a,b],\infty}$ ve $\|g\|_{[x,b],\infty}\leq\|g\|_{[a,b],\infty}$ ifadelerinden yararlanılarak kolayca görülebilir.

Teorem 4.1.6 $f\colon I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ fonksiyonu, I° kümesinde türevlenebilir olsun. $a,b\in I$, $a<b$ ve $g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere $[a,b]$ üzerinde $|f'|^q\in P(I)$ ise $x\in[a,b]$, $\lambda\in[0,1]$ ve $q\geq 1$ şartı altında

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds-\int_a^b g(s)f(s)ds+\lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds+f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty}\left\{\frac{(x-a)^2}{2}(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty}\left\{\frac{(b-x)^2}{2}(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$\leq \|g\|_{[a,b],\infty}\left\{\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{2}(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemma 3.1.2. ve üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds-\int_a^b g(s)f(s)ds+\lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds+f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq \int_a^b |P_\lambda(x,t)||f'(t)|dt$$

$$\leq \int_a^x \left((1-\lambda)\left|\int_a^t g(s)ds\right|+\lambda\left|\int_x^t g(s)ds\right|\right)|f'(t)|\,dt$$
$$+\int_x^b \left((1-\lambda)\left|\int_b^t g(s)ds\right|+\lambda\left|\int_x^t g(s)ds\right|\right)|f'(t)|\,dt$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty}\left\{(1-\lambda)\int_a^x \big((t-a)|f'(t)|\big)dt+\lambda\int_a^x (x-t)|f'(t)|\,dt\right\}$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty}\left\{(1-\lambda)\int_x^b \big((b-t)|f'(t)|\big)dt+\lambda\int_x^b (t-x)|f'(t)|\,dt\right\}$$

yazılır. Power-mean eşitsizliği kullanılarak

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds-\int_a^b g(s)f(s)ds+\lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds+f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty}\left\{(1-\lambda)\left(\int_a^x (t-a)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_a^x (t-a)|f'(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\lambda\left(\int_a^x (x-t)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_a^x (x-t)|f'(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty}\left\{(1-\lambda)\left(\int_x^b (b-t)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_x^b (b-t)|f'(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$+\lambda\left(\int_x^b (t-x)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_x^b (t-x)|f'(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg\}$$

yazılır. $|f'|^q$ fonksiyonunun $P(I)$ sınıfına ait oluşu ve $t=\frac{b-t}{b-a}a+\frac{t-a}{b-a}b$ olduğu kullanılarak

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds-\int_a^b g(s)f(s)ds+\lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds+f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty}\Bigg\{(1-\lambda)\left(\frac{(x-a)^2}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_a^x (t-a)(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q)dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\lambda\left(\frac{(x-a)^2}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_a^x (x-t)(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q)dt\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg\}$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty}\Bigg\{(1-\lambda)\left(\frac{(b-x)^2}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_x^b (b-t)(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q)dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\lambda\left(\frac{(b-x)^2}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_x^b (t-x)(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q)dt\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg\}$$

bulunur. Basit matematiksel işlemler yapılarak

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds-\int_a^b g(s)f(s)ds+\lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds+f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty}\left\{\frac{(x-a)^2}{2}(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty}\left\{\frac{(b-x)^2}{2}(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. Eşitsizliğin sağ tarafının ispatı $\|g\|_{[a,x],\infty} \leq \|g\|_{[a,b],\infty}$ ve $\|g\|_{[x,b],\infty} \leq \|g\|_{[a,b],\infty}$ ifadelerinden yararlanılarak kolayca görülebilir.

Teorem 4.1.7 $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, I° kümesinde türevlenebilir olsun. $a, b \in I$, $a < b$ ve $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere $[a,b]$ üzerinde $|f'| \in QC(I)$ ise $\lambda \in [0,1]$ ve $x \in [a,b]$ için;

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds - \int_a^b g(s)f(s)ds + \lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds + f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty} max\{|f'(a)|,|f'(b)|\}\frac{(x-a)^2}{2}$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty} max\{|f'(a)|,|f'(b)|\}\frac{(b-x)^2}{2}$$

$$\leq \|g\|_{[a,b],\infty} max\{|f'(a)|,|f'(b)|\}\left\{\frac{(x-a)^2}{2}+\frac{(b-x)^2}{2}\right\}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemma 3.1.2. ve üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds - \int_a^b g(s)f(s)ds + \lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds + f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq \int_a^b |P_\lambda(x,t)||f'(t)|dt$$

$$\leq \int_a^x \left((1-\lambda)\left|\int_a^t g(s)ds\right| + \lambda\left|\int_x^t g(s)ds\right|\right)\left|f'\left(\frac{b-t}{b-a}a+\frac{t-a}{b-a}b\right)\right|dt$$

$$+\int_x^b \left((1-\lambda)\left|\int_b^t g(s)ds\right| + \lambda\left|\int_x^t g(s)ds\right|\right)\left|f'\left(\frac{b-t}{b-a}a+\frac{t-a}{b-a}b\right)\right|dt$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty} \int_a^x \big((1-\lambda)(t-a)+\lambda(x-t)\big) \left| f'\left(\frac{b-t}{b-a}a+\frac{t-a}{b-a}b\right)\right| dt$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty} \int_x^b \big((1-\lambda)(b-t)+\lambda(t-x)\big) \left| f'\left(\frac{b-t}{b-a}a+\frac{t-a}{b-a}b\right)\right| dt$$

elde edilir. $|f'|$ fonksiyonunun $quasi-$konveks oluşu ile

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds-\int_a^b g(s)f(s)ds+\lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds+f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty} \int_a^x \big((1-\lambda)(t-a)+\lambda(x-t)\big) max\{|f'(a)|,|f'(b)|\}dt$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty} \int_x^b \big((1-\lambda)(b-t)+\lambda(t-x)\big) max\{|f'(a)|,|f'(b)|\}dt$$

$$= \|g\|_{[a,x],\infty} max\{|f'(a)|,|f'(b)|\}\left\{(1-\lambda)\int_a^x (t-a)dt+\lambda\int_a^x (x-t)dt\right\}$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty} max\{|f'(a)|,|f'(b)|\}\left\{(1-\lambda)\int_x^b (b-t)dt+\lambda\int_x^b (t-x)dt\right\} \quad (4.2)$$

eşitsizliği bulunur.

$$I_3=\int_a^x (t-a)dt=\int_a^x (x-t)dt=\frac{(x-a)^2}{2}$$

$$I_4=\int_x^b (b-t)dt=\int_x^b (t-x)dt=\frac{(b-x)^2}{2}$$

ifadeleri (4.2) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds-\int_a^b g(s)f(s)ds+\lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds+f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty} max\{|f'(a)|, |f'(b)|\} \frac{(x-a)^2}{2}$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty} max\{|f'(a)|, |f'(b)|\} \frac{(b-x)^2}{2}$$

elde edilir. Böylece eşitsizliğin sol tarafının ispatı tamamlanır. Eşitsizliğin sağ tarafının ispatı ise $\|g\|_{[a,x],\infty} \leq \|g\|_{[a,b],\infty}$ ve $\|g\|_{[x,b],\infty} \leq \|g\|_{[a,b],\infty}$ ifadelerinden yararlanılarak kolayca görülebilir.

Teorem 4.1.8 $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $I°$ kümesinde türevlenebilir olsun. $a, b \in I$, $a < b$ ve $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere $[a,b]$ üzerinde $|f'|^q \in QC(I)$ ise $x \in [a,b]$, $\lambda \in [0,1]$, $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ şartı altında

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds - \int_a^b g(s)f(s)ds + \lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds + f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty}\left\{max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\}^{\frac{1}{q}}\left(\frac{(-a+x)^{p+1}}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}(x-a)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty}\left\{max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\}^{\frac{1}{q}}\left(\frac{(b-x)^{p+1}}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}(b-x)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$\leq \|g\|_{[a,b],\infty}\left\{max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\}^{\frac{1}{q}}\frac{(x-a)^2 + (b-x)^2}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\right\}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemma 3.1.2. ve üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds - \int_a^b g(s)f(s)ds + \lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds + f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq \int_a^b |P_\lambda(x,t)||f'(t)|dt$$

$$\leq \int_a^x \left((1-\lambda) \left| \int_a^t g(s)ds \right| + \lambda \left| \int_x^t g(s)ds \right| \right) |f'(t)|\, dt$$

$$+ \int_x^b \left((1-\lambda) \left| \int_b^t g(s)ds \right| + \lambda \left| \int_x^t g(s)ds \right| \right) |f'(t)|\, dt$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty} \left\{ (1-\lambda) \int_a^x \big((t-a)|f'(t)| \big) dt + \lambda \int_a^x (x-t)|f'(t)|\, dt \right\}$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty} \left\{ (1-\lambda) \int_x^b \big((b-t)|f'(t)| \big) dt + \lambda \int_x^b (t-x)|f'(t)|\, dt \right\}$$

yazılır. Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\left| (1-\lambda)f(x) \int_a^b g(s)ds - \int_a^b g(s)f(s)ds + \lambda \left(f(a) \int_a^x g(s)ds + f(b) \int_x^b g(s)ds \right) \right|$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty} \left\{ (1-\lambda) \left(\int_a^x (t-a)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^x |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$\left. +\lambda \left(\int_a^x (x-t)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^x |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\}$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty} \left\{ (1-\lambda) \left(\int_x^b (b-t)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_x^b |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$\left. +\lambda \left(\int_x^b (t-x)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_x^b |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\}$$

bulunur. $|f'|^q$ fonksiyonunun $quasi-$konveks oluşu ve $t=\frac{b-t}{b-a}a+\frac{t-a}{b-a}b$ olduğu kullanılarak

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds-\int_a^b g(s)f(s)ds+\lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds+f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty}\left\{(1-\lambda)\left(\int_a^x (t-a)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^x max\{|f'(a)|^q,|f'(b)|^q\}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\lambda\left(\int_a^x (x-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^x max\{|f'(a)|^q,|f'(b)|^q\}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty}\left\{(1-\lambda)\left(\int_x^b (b-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_x^b max\{|f'(a)|^q,|f'(b)|^q\}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\lambda\left(\int_x^b (t-x)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_x^b max\{|f'(a)|^q,|f'(b)|^q\}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

yazılır. Basit matematiksel işlemler yapılarak

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds-\int_a^b g(s)f(s)ds+\lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds+f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty}\left\{(max\{|f'(a)|^q,|f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}}\left(\frac{(-a+x)^{p+1}}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}(x-a)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty}\left\{(max\{|f'(a)|^q,|f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}}\left(\frac{(b-x)^{p+1}}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}(b-x)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. Eşitsizliğin sağ tarafının ispatı ise $\|g\|_{[a,x],\infty}\leq\|g\|_{[a,b],\infty}$ ve $\|g\|_{[x,b],\infty}\leq\|g\|_{[a,b],\infty}$ ifadelerinden yararlanılarak kolayca görülebilir.

Teorem 4.1.9 $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, I° kümesinde türevlenebilir olsun. $a, b \in I$, $a < b$ ve $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere $[a,b]$ üzerinde $|f'|^q \in QC(I)$ ise $x \in [a,b]$, $\lambda \in [0,1]$ ve $q \geq 1$ şartı altında

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds - \int_a^b g(s)f(s)ds + \lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds + f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty}\left\{\frac{(x-a)^2}{2}(max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty}\left\{\frac{(b-x)^2}{2}(max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$\leq \|g\|_{[a,b],\infty}\left\{\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{2}(max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemma 3.1.2. ve üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds - \int_a^b g(s)f(s)ds + \lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds + f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq \int_a^b |P_\lambda(x,t)||f'(t)|dt$$

$$\leq \int_a^x \left((1-\lambda)\left|\int_a^t g(s)ds\right| + \lambda\left|\int_x^t g(s)ds\right|\right)|f'(t)|\,dt$$

$$+\int_x^b \left((1-\lambda)\left|\int_b^t g(s)ds\right| + \lambda\left|\int_x^t g(s)ds\right|\right)|f'(t)|\,dt$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty}\left\{(1-\lambda)\int_a^x \big((t-a)|f'(t)|\big)dt + \lambda\int_a^x (x-t)|f'(t)|\,dt\right\}$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty}\left\{(1-\lambda)\int_x^b \big((b-t)|f'(t)|\big)dt+\lambda\int_x^b (t-x)|f'(t)|\,dt\right\}$$

yazılır. Power-mean eşitsizliği kullanılarak

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds-\int_a^b g(s)f(s)ds+\lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds+f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty}\left\{(1-\lambda)\left(\int_a^x (t-a)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_a^x (t-a)|f'(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\lambda\left(\int_a^x (x-t)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_a^x (x-t)|f'(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty}\left\{(1-\lambda)\left(\int_x^b (b-t)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_x^b (b-t)|f'(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\lambda\left(\int_x^b (t-x)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_x^b (t-x)|f'(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

yazılır. $|f'|^q$ fonksiyonunun $quasi-$konveks oluşu ve $t=\frac{b-t}{b-a}a+\frac{t-a}{b-a}b$ olduğu kullanılarak

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds-\int_a^b g(s)f(s)ds+\lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds+f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty}\left\{(1-\lambda)\left(\frac{(a-x)^2}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_a^x (t-a)max\{|f'(a)|^q,|f'(b)|^q\}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\lambda\left(\frac{(a-x)^2}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_a^x (x-t)max\{|f'(a)|^q,|f'(b)|^q\}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty}\left\{(1-\lambda)\left(\frac{(b-x)^2}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_x^b (b-t)max\{|f'(a)|^q,|f'(b)|^q\}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\lambda\left(\frac{(b-x)^2}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_x^b (t-x)max\{|f'(a)|^q,|f'(b)|^q\}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

bulunur. Basit matematiksel işlemler yapılarak

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds-\int_a^b g(s)f(s)ds+\lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds+f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty}\left\{\frac{(a-x)^2}{2}\left(max\{|f'(a)|^q,|f'(b)|^q\}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty}\left\{\frac{(b-x)^2}{2}\left(max\{|f'(a)|^q,|f'(b)|^q\}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

elde edilir. Böylece ispatın ilk bölümü tamamlanır. Eşitsizliğin sağ tarafının ispatı ise $\|g\|_{[a,x],\infty} \leq \|g\|_{[a,b],\infty}$ ve $\|g\|_{[x,b],\infty} \leq \|g\|_{[a,b],\infty}$ ifadelerinden yararlanılarak kolayca görülebilir.

Teorem 4.1.10 $f:[0,\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $(0,\infty)$ kümesinde türevlenebilir olsun. $0 < a < b < \infty$ ve $g:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere $[0,\infty)$ üzerinde $|f'|$, $m-$konveks ve $f' \in L_1([0,\infty))$ ise $m \in (0,1]$, $\lambda \in [0,1]$ ve $x \in [a,b]$ için;

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds-\int_a^b g(s)f(s)ds+\lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds+f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq \frac{\|g\|_{[a,x],\infty}}{6(b-a)}\left\{(1-\lambda)|f'(a)|(x-a)^2(3b-a-2x)\right.$$

$$+2(1-\lambda)m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|(x-a)^3+\lambda|f'(a)|(x-a)^2(3b-2a-x)$$

$$\left.+\lambda m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|(x-a)^3\right\}$$

$$+\frac{\|g\|_{[x,b],\infty}}{6(b-a)}\left\{2(1-\lambda)|f'(a)|(b-x)^3\right.$$

$$+(1-\lambda)m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|(b-x)^2(b-3a+2x)+\lambda|f'(a)|(b-x)^3$$

$$\left.+\lambda m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|(b-x)^2(2b-3a+x)\right\}$$

$$\leq\frac{\|g\|_{[a,b],\infty}}{6(b-a)}\left\{(1-\lambda)|f'(a)|[(x-a)^2(3b-a-2x)+2(b-x)^3]\right.$$

$$+(1-\lambda)m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|[2(x-a)^3+(b-x)^2(b-3a+2x)]$$

$$+\lambda|f'(a)|[(x-a)^2(3b-2a-x)+(b-x)^3]$$

$$\left.+\lambda m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|[(x-a)^3+(b-x)^2(2b-3a+x)]\right\}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemma 3.1.2. ve üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds-\int_a^b g(s)f(s)ds+\lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds+f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq\int_a^b|P_\lambda(x,t)||f'(t)|dt$$

$$\leq\int_a^x\left((1-\lambda)\left|\int_a^t g(s)ds\right|+\lambda\left|\int_x^t g(s)ds\right|\right)\left|f'\left(\frac{b-t}{b-a}a+\frac{t-a}{b-a}b\right)\right|dt$$

$$+\int_x^b\left((1-\lambda)\left|\int_b^t g(s)ds\right|+\lambda\left|\int_x^t g(s)ds\right|\right)\left|f'\left(\frac{b-t}{b-a}a+\frac{t-a}{b-a}b\right)\right|dt$$

$$\leq\|g\|_{[a,x],\infty}\int_a^x\big((1-\lambda)(t-a)+\lambda(x-t)\big)\left|f'\left(\frac{b-t}{b-a}a+\frac{m(t-a)}{m(b-a)}b\right)\right|dt$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty}\int_x^b\big((1-\lambda)(b-t)+\lambda(t-x)\big)\left|f'\left(\frac{b-t}{b-a}a+\frac{m(t-a)}{m(b-a)}b\right)\right|dt$$

elde edilir. $|f'|$ fonksiyonunun $m-$ konveks oluşu ile

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds-\int_a^b g(s)f(s)ds+\lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds+f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty}\left\{\int_a^x\big((1-\lambda)(t-a)+\lambda(x-t)\big)\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{b-t}{b-a}|f'(a)|+\frac{m(t-a)}{(b-a)}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|\right]dt\right\}$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty}\left\{\int_x^b\big((1-\lambda)(b-t)+\lambda(t-x)\big)\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{b-t}{b-a}|f'(a)|+\frac{m(t-a)}{(b-a)}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|\right]dt\right\}$$

$$=\|g\|_{[a,x],\infty}\left\{\frac{(1-\lambda)|f'(a)|}{(b-a)}\int_a^x(t-a)(b-t)dt\right.$$

$$+\frac{(1-\lambda)m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|}{(b-a)}\int_a^x(t-a)^2dt+\frac{\lambda|f'(a)|}{(b-a)}\int_a^x(x-t)(b-t)dt$$

$$\left.+\frac{\lambda m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|}{(b-a)}\int_a^x(x-t)(t-a)dt\right\}$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty}\left\{\frac{(1-\lambda)|f'(a)|}{(b-a)}\int_x^b(b-t)^2dt\right.$$

$$+\frac{(1-\lambda)m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|}{(b-a)}\int_x^b(b-t)(t-a)dt$$

$$+\frac{\lambda|f'(a)|}{(b-a)}\int_x^b (t-x)(b-t)dt$$

$$\left.+\frac{\lambda m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|}{(b-a)}\int_x^b (t-x)(t-a)dt\right\} \tag{4.3}$$

eşitsizliği bulunur.

$$I_5=\int_a^x (t-a)(b-t)dt=-\frac{(a-x)^2(a-3b+2x)}{6}$$

$$I_6=\int_a^x (t-a)^2 dt=-\frac{(a-x)^3}{3}$$

$$I_7=\int_a^x (x-t)(b-t)dt=-\frac{(a-x)^2(2a-3b+x)}{6}$$

$$I_8=\int_a^x (x-t)(t-a)dt=-\frac{(a-x)^3}{6}$$

$$I_9=\int_x^b (b-t)^2 dt=\frac{(b-x)^3}{3}$$

$$I_{10}=\int_x^b (b-t)(t-a)dt=-\frac{(b-x)^2(3a-b-2x)}{6}$$

$$I_{11}=\int_x^b (t-x)(b-t)dt=\frac{(b-x)^3}{6}$$

$$I_{12}=\int_x^b (t-x)(t-a)dt=-\frac{(b-x)^2(3a-2b-x)}{6}$$

ifadeleri (4.3) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds-\int_a^b g(s)f(s)ds+\lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds+f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty}\left\{\frac{(1-\lambda)|f'(a)|}{(b-a)}\left(-\frac{(a-x)^2(a-3b+2x)}{6}\right)\right.$$

$$+\frac{(1-\lambda)m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|}{(b-a)}\left(-\frac{(a-x)^3}{3}\right)$$

$$+\frac{\lambda|f'(a)|}{(b-a)}\left(-\frac{(a-x)^2(2a-3b+x)}{6}\right)$$

$$\left.+\frac{\lambda m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|}{(b-a)}\left(-\frac{(a-x)^3}{6}\right)\right\}$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty}\left\{\frac{(1-\lambda)|f'(a)|}{(b-a)}\left(\frac{(b-x)^3}{3}\right)+\frac{(1-\lambda)m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|}{(b-a)}\right.$$

$$\times\left(-\frac{(b-x)^2(3a-b-2x)}{6}\right)+\frac{\lambda|f'(a)|}{(b-a)}\left(\frac{(b-x)^3}{6}\right)$$

$$\left.+\frac{\lambda m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|}{(b-a)}\left(-\frac{(b-x)^2(3a-2b-x)}{6}\right)\right\}$$

elde edilir. Böylece eşitsizliğin sol tarafının ispatı tamamlanır. Eşitsizliğin sağ tarafının ispatı ise $\|g\|_{[a,x],\infty}\leq\|g\|_{[a,b],\infty}$ ve $\|g\|_{[x,b],\infty}\leq\|g\|_{[a,b],\infty}$ ifadelerinden yararlanılarak kolayca görülebilir.

Teorem 4.1.11 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu, $(0,\infty)$ kümesinde türevlenebilir olsun. $0<a<b<\infty$ ve $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere $[0,\infty)$ üzerinde $|f'|^q$, m −konveks ve $f'\in L_1([0,\infty))$ ise $m\in(0,1]$, $x\in[a,b]$, $\lambda\in[0,1]$, $p>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ şartı altında

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds - \int_a^b g(s)f(s)ds + \lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds + f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty}\frac{(x-a)^2}{2^{\frac{1}{q}}(p+1)^{\frac{1}{p}}(b-a)^{\frac{1}{q}}}$$

$$\times\left[|f'(a)|^q(2b-a-x) + m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q(x-a)\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty}\frac{(b-x)^2}{2^{\frac{1}{q}}(p+1)^{\frac{1}{p}}(b-a)^{\frac{1}{q}}}$$

$$\times\left[|f'(a)|^q(b-x) + m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q(b-2a+x)\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \|g\|_{[a,b],\infty}\left\{\frac{(x-a)^2}{2^{\frac{1}{q}}(p+1)^{\frac{1}{p}}(b-a)^{\frac{1}{q}}}\left[|f'(a)|^q(2b-a-x) + m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q(x-a)\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$+\frac{(b-x)^2}{2^{\frac{1}{q}}(p+1)^{\frac{1}{p}}(b-a)^{\frac{1}{q}}}\left[|f'(a)|^q(b-x) + m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q(b-2a+x)\right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemma 3.1.2. ve üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds - \int_a^b g(s)f(s)ds + \lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds + f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq \int_a^b |P_\lambda(x,t)||f'(t)|dt$$

$$\leq \int_a^x \left((1-\lambda)\left|\int_a^t g(s)ds\right| + \lambda\left|\int_x^t g(s)ds\right|\right)|f'(t)|\,dt$$

$$+\int_x^b \left((1-\lambda)\left|\int_b^t g(s)ds\right| + \lambda\left|\int_x^t g(s)ds\right|\right)|f'(t)|\,dt$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty}\left\{(1-\lambda)\int_a^x \big((t-a)|f'(t)|\big)dt + \lambda\int_a^x (x-t)|f'(t)|\,dt\right\}$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty}\left\{(1-\lambda)\int_x^b \big((b-t)|f'(t)|\big)dt + \lambda\int_x^b (t-x)|f'(t)|\,dt\right\}$$

yazılır. Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds - \int_a^b g(s)f(s)ds + \lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds + f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty}\left\{(1-\lambda)\left(\int_a^x (t-a)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^x |f'(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left. + \lambda\left(\int_a^x (x-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^x |f'(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty}\left\{(1-\lambda)\left(\int_x^b (b-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_x^b |f'(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\lambda\left(\int_x^b (t-x)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_x^b |f'(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

elde edilir. $|f'|^q$ fonksiyonunun m −konveks oluşu ve $t=\frac{b-t}{b-a}a+\frac{m(t-a)}{m(b-a)}b$ olduğu kullanılarak

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds-\int_a^b g(s)f(s)ds+\lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds+f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty}\left\{(1-\lambda)\left(\frac{(-a+x)^{p+1}}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\right.$$

$$\times\left[\frac{|f'(a)|^q}{b-a}\int_a^x(b-t)dt+\frac{m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q}{b-a}\int_a^x(t-a)dt\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\left.+\lambda\left(\frac{(-a+x)^{p+1}}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\frac{|f'(a)|^q}{b-a}\int_a^x(b-t)dt+\frac{m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q}{b-a}\int_a^x(t-a)dt\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty}\left\{(1-\lambda)\left(\frac{(b-x)^{p+1}}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\right.$$

$$\times\left[\frac{|f'(a)|^q}{b-a}\int_x^b(b-t)dt+\frac{m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q}{b-a}\int_x^b(t-a)dt\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\left.+\lambda\left(\frac{(b-x)^{p+1}}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\frac{|f'(a)|^q}{b-a}\int_x^b(b-t)dt+\frac{m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q}{b-a}\int_x^b(t-a)dt\right]^{\frac{1}{q}}\right\} \tag{4.4}$$

$$I_{13}=\int_a^x(b-t)dt=\frac{(a-x)(a-2b+x)}{2}$$

$$I_{14}=\int_a^x (t-a)dt=\frac{(a-x)^2}{2}$$

$$I_{15}=\int_x^b (b-t)dt=\frac{(b-x)^2}{2}$$

$$I_{16}=\int_x^b (t-a)dt=-\frac{(b-x)(2a-b-x)}{2}$$

ifadeleri (4.4) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds-\int_a^b g(s)f(s)ds+\lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds+f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty}\left\{(1-\lambda)\left(\frac{(-a+x)^{p+1}}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\right.$$

$$\times\left[\frac{|f'(a)|^q(a-x)(a-2b+x)+m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q(a-x)^2}{2(b-a)}\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\lambda\left(\frac{(-a+x)^{p+1}}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\frac{|f'(a)|^q(a-x)(a-2b+x)+m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q(a-x)^2}{2(b-a)}\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty}\left\{(1-\lambda)\left(\frac{(b-x)^{p+1}}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\right.$$

$$\times\left[\frac{|f'(a)|^q(b-x)^2-m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q(b-x)(2a-b-x)}{2(b-a)}\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\lambda\left(\frac{(b-x)^{p+1}}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\frac{|f'(a)|^q(b-x)^2-m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q(b-x)(2a-b-x)}{2(b-a)}\right]^{\frac{1}{q}}\Bigg\}$$

bulunur. Basit matematiksel işlemler yapılarak

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds-\int_a^b g(s)f(s)ds+\lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds+f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty}\frac{(x-a)^2}{2^{\frac{1}{q}}(p+1)^{\frac{1}{p}}(b-a)^{\frac{1}{q}}}$$

$$\times\left[|f'(a)|^q(2b-a-x)+m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q(x-a)\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty}\frac{(b-x)^2}{2^{\frac{1}{q}}(p+1)^{\frac{1}{p}}(b-a)^{\frac{1}{q}}}$$

$$\times\left[|f'(a)|^q(b-x)+m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q(b-2a+x)\right]^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. Böylece eşitsizliğin sol tarafının ispatı tamamlanır. Eşitsizliğin sağ tarafının ispatı ise $\|g\|_{[a,x],\infty}\leq\|g\|_{[a,b],\infty}$ ve $\|g\|_{[x,b],\infty}\leq\|g\|_{[a,b],\infty}$ ifadelerinden yararlanılarak kolayca görülebilir.

Teorem 4.1.12 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu, $(0,\infty)$ kümesinde türevlenebilir olsun. $0<a<b<\infty$ ve $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere $[0,\infty)$ üzerinde $|f'|^q$, m −konveks ve $f'\in L_1([0,\infty))$ ise $m\in(0,1]$, $x\in[a,b]$, $\lambda\in[0,1]$ ve $q\geq 1$ şartı altında

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds-\int_a^b g(s)f(s)ds+\lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds+f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty}$$

$$\times \left\{ \frac{(1-\lambda)(x-a)^2}{2^{1-\frac{1}{q}} 6^{\frac{1}{q}} (b-a)^{\frac{1}{q}}} \left[|f'(a)|^q (3b-a-2x) + 2m \left| f'\left(\frac{b}{m}\right) \right|^q (x-a) \right]^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda(x-a)^2}{2^{1-\frac{1}{q}} 6^{\frac{1}{q}} (b-a)^{\frac{1}{q}}} \left[|f'(a)|^q (3b-2a-x) + m \left| f'\left(\frac{b}{m}\right) \right|^q (x-a) \right]^{\frac{1}{q}} \right\}$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty} \left\{ \frac{(1-\lambda)(b-x)^2}{2^{1-\frac{1}{q}} 6^{\frac{1}{q}} (b-a)^{\frac{1}{q}}} \times \left[2|f'(a)|^q (b-x) + m \left| f'\left(\frac{b}{m}\right) \right|^q (b-3a+2x) \right]^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda(b-x)^2}{2^{1-\frac{1}{q}} 6^{\frac{1}{q}} (b-a)^{\frac{1}{q}}} \left[|f'(a)|^q (b-x) + m \left| f'\left(\frac{b}{m}\right) \right|^q (2b-3a+x) \right]^{\frac{1}{q}} \right\}$$

$$\leq \|g\|_{[a,b],\infty} \left\{ \frac{(1-\lambda)(x-a)^2}{2^{1-\frac{1}{q}} 6^{\frac{1}{q}} (b-a)^{\frac{1}{q}}} \right.$$

$$\times \left[|f'(a)|^q (3b-a-2x) + 2m \left| f'\left(\frac{b}{m}\right) \right|^q (x-a) + 2|f'(a)|^q (b-x) \right.$$

$$\left. + m \left| f'\left(\frac{b}{m}\right) \right|^q (b-3a+2x) \right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \frac{\lambda(x-a)^2}{2^{1-\frac{1}{q}} 6^{\frac{1}{q}} (b-a)^{\frac{1}{q}}}$$

$$\times \left[|f'(a)|^q (3b-2a-x) + m \left| f'\left(\frac{b}{m}\right) \right|^q (x-a) + |f'(a)|^q (b-x) \right.$$

$$\left. \left. + m \left| f'\left(\frac{b}{m}\right) \right|^q (2b-3a+x) \right]^{\frac{1}{q}} \right\}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemma 3.1.2. ve üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds-\int_a^b g(s)f(s)ds+\lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds+f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq\int_a^b |P_\lambda(x,t)||f'(t)|dt$$

$$\leq\int_a^x \left((1-\lambda)\left|\int_a^t g(s)ds\right|+\lambda\left|\int_x^t g(s)ds\right|\right)|f'(t)|\,dt$$

$$+\int_x^b \left((1-\lambda)\left|\int_b^t g(s)ds\right|+\lambda\left|\int_x^t g(s)ds\right|\right)|f'(t)|\,dt$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty}\left\{(1-\lambda)\int_a^x \big((t-a)|f'(t)|\big)dt+\lambda\int_a^x (x-t)|f'(t)|\,dt\right\}$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty}\left\{(1-\lambda)\int_x^b \big((b-t)|f'(t)|\big)dt+\lambda\int_x^b (t-x)|f'(t)|\,dt\right\}$$

yazılır. Power-mean eşitsizliği kullanılarak

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds-\int_a^b g(s)f(s)ds+\lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds+f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty}\left\{(1-\lambda)\left(\int_a^x (t-a)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_a^x (t-a)|f'(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\lambda\left(\int_a^x (x-t)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_a^x (x-t)|f'(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty}\left\{(1-\lambda)\left(\int_x^b (b-t)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_x^b (b-t)|f'(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\lambda\left(\int_x^b (t-x)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_x^b (t-x)|f'(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$|f'|^q$ fonksiyonunun $m-$konveks fonksiyon sınıfına ait oluşu ve $t=\frac{b-t}{b-a}a+\frac{m(t-a)}{m(b-a)}b$ olduğu kullanılarak

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds-\int_a^b g(s)f(s)ds+\lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds+f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty}\left\{\left(\frac{(a-x)^2}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\right.$$

$$\times(1-\lambda)\left[\frac{|f'(a)|^q}{b-a}\int_a^x (t-a)(b-t)dt+\frac{m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q}{b-a}\int_a^x (t-a)^2 dt\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\left.+\lambda\left[\frac{|f'(a)|^q}{b-a}\int_a^x (x-t)(b-t)dt+\frac{m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q}{b-a}\int_a^x (x-t)(t-a)dt\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty}\left(\frac{(b-x)^2}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left\{(1-\lambda)\left[\frac{|f'(a)|^q}{b-a}\int_x^b (b-t)^2 dt+\frac{m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q}{b-a}\int_x^b (b-t)(t-a)dt\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$+\lambda\left[\frac{|f'(a)|^q}{b-a}\int_x^b (t-x)(b-t)dt+\frac{m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q}{b-a}\int_x^b (t-x)(t-a)dt\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

bulunur. Basit matematiksel işlemler yapılarak

$$\left|(1-\lambda)f(x)\int_a^b g(s)ds-\int_a^b g(s)f(s)ds+\lambda\left(f(a)\int_a^x g(s)ds+f(b)\int_x^b g(s)ds\right)\right|$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty}\left\{\frac{(1-\lambda)(x-a)^2}{2^{1-\frac{1}{q}}6^{\frac{1}{q}}(b-a)^{\frac{1}{q}}}\right.$$

$$\times\left[|f'(a)|^q(3b-a-2x)+2m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q(x-a)\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\left.+\frac{\lambda(x-a)^2}{2^{1-\frac{1}{q}}6^{\frac{1}{q}}(b-a)^{\frac{1}{q}}}\times\left[|f'(a)|^q(3b-2a-x)+m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q(x-a)\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$+\|g\|_{[x,b],\infty}\left\{\frac{(1-\lambda)(b-x)^2}{2^{1-\frac{1}{q}}6^{\frac{1}{q}}(b-a)^{\frac{1}{q}}}\times\left[2|f'(a)|^q(b-x)+m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q(b-3a+2x)\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda(b-x)^2}{2^{1-\frac{1}{q}}6^{\frac{1}{q}}(b-a)^{\frac{1}{q}}}\left[|f'(a)|^q(b-x)+m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q(2b-3a+x)\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

elde edilir. Böylece eşitsizliğin sol tarafının ispatı tamamlanır. Eşitsizliğin sağ tarafının ispatı ise $\|g\|_{[a,x],\infty}\leq\|g\|_{[a,b],\infty}$ ve $\|g\|_{[x,b],\infty}\leq\|g\|_{[a,b],\infty}$ ifadelerinden yararlanılarak kolayca görülebilir.

4.2. Elde Edilen Teoremler ile İlgili Bazı Uygulamalar ve Sonuçlar

Sonuç 4.2.1. Teorem 4.1.10 ifadesinde $g(x) = 1$ ve $x = \frac{a+b}{2}$ seçilirse;

$$\left|(1-\lambda)(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) - (b-a)\int_a^b f(x)dx + \frac{\lambda(b-a)}{2}\big(f(a)+f(b)\big)\right|$$

$$\leq \frac{|f'(a)|}{6(b-a)}\left\{\frac{(1-\lambda)(b-a)^3}{2} + \frac{5\lambda(b-a)^3}{8} + \frac{(1-\lambda)(b-a)^3}{4} + \frac{\lambda(b-a)^3}{8}\right\}$$

$$+\frac{m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|}{6(b-a)}\left\{\frac{(1-\lambda)(b-a)^3}{4} + \frac{\lambda(b-a)^3}{8} + \frac{(1-\lambda)(b-a)^3}{2} + \frac{5\lambda(b-a)^3}{8}\right\}$$

$$= \frac{(b-a)^2}{8}\left[|f'(a)| + m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|\right]$$

bulunur.

Uygulama 4.2.1. Sonuç 4.2.1 ifadesinde $f: [0,\infty) \to [0,\infty)$, $f(x) = x^{n+1}$, $n \in Z$ ve $|n| \geq 2$ seçilirse;

$$|(1-\lambda)A^{n+1}(a,b) - (b-a)\mathcal{L}_{n+1}^{n+1}(a,b) + \lambda A(a^{n+1},b^{n+1})|$$

$$\leq \frac{(b-a)(n+1)}{4}A\left(a^n, m\left(\frac{b}{m}\right)^n\right)$$

elde edilir.

Hatırlatma 4.2.1. Tanım kümesinde uygun sınırlamalar altında Teorem 4.1.10 ifadesinde $m = 1$ seçilirse Teorem 3.1.6 elde edilir.

Hatırlatma 4.2.2. Tanım kümesinde uygun sınırlamalar altında Teorem 4.1.11 ifadesindeki eşitsizliğin sağ tarafında $m = 1$ seçilirse Teorem 3.1.7 elde edilir.

Sonuç 4.2.2. Teorem 4.1.4 ifadesinde $g(x) = 1$, $x = \frac{a+b}{2}$ ve $\lambda = 0$ seçilirse;

$$\left|(b-a)A^{n+1}(a,b) - \int_a^b f(s)ds\right| \leq \frac{(b-a)^2}{2}A(|f'(a)|,|f'(b)|)$$

elde edilir.

Uygulama 4.2.2. Sonuç 4.2.2 ifadesinde $f: [0,\infty) \to [0,\infty)$, $f(x) = x^{n+1}$, $n \in Z$ ve $|n| \geq 2$ seçilirse;

$$|A^{n+1}(a,b) - \mathcal{L}_{n+1}^{n+1}(a,b)| \leq \frac{(b-a)(n+1)}{2} A(a^n, b^n)$$

elde edilir.

Sonuç 4.2.3. Teorem 4.1.5 ifadesinde $p = q = 2,\ \lambda = 0,\ x = \frac{a+b}{2}$ ve $g(x) = 1$ seçilirse;

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(s)ds \right| \leq \frac{(b-a)\sqrt{|f'(a)|^2 + |f'(b)|^2}}{2\sqrt{3}}$$

bulunur.

Uygulama 4.2.3. Teorem 4.1.5 ifadesinde $g(x) = 1,\ x = \frac{a+b}{2},\ p = q = 2,\ \lambda = 0$ ve $x > 0$ için $f(x) = \frac{qx^{1-\frac{1}{q}}}{q-1}$ fonksiyonu uygulanırsa;

$$\left| (b-a)\frac{qx^{1-\frac{1}{q}}}{q-1} - \frac{q^2}{(q-1)(2q-1)}\left(b^{2-\frac{1}{q}} - a^{2-\frac{1}{q}}\right) \right|$$

$$\leq \frac{2(b-a)^2}{\sqrt{3}} \sqrt{A\left(a^{-\frac{2}{q}}, b^{-\frac{2}{q}}\right)}$$

elde edilir.

Sonuç 4.2.4. Teorem 4.1.7 ifadesinde $g(x) = 1,\ x = \frac{a+b}{2}$ ve $\lambda = 1$ seçilirse;

$$\left| \frac{(b-a)}{2}\big(f(a) + f(b)\big) - \int_a^b f(s)ds \right| \leq \frac{(b-a)^2}{4} max\{|f'(a)|, |f'(b)|\}$$

bulunur.

Uygulama 4.2.4. $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ f(x) = (x+1)\,ln(x+1) - x$ seçilirse $|f'(x)| = ln(x+1)$ olup bu fonksiyon konkav olduğu halde $quasi$ −konvekstir. Sonuç 4.1.7 ifadesinde $g(x) = 1,\ x = \frac{a+b}{2}$ ve $\lambda = 1$ ve $f(x) = (x+1)\,ln(x+1) - x$ yazılırsa $a < b$ için;

$$\left| \frac{b(3b+2)}{4} - \frac{(b+1)^2\,ln(b+1)}{2} + \frac{(b-a)}{2}[(b+1)\,ln(b+1) - b] \right.$$

$$\left. + \frac{(a+1)^2\,ln(a+1)}{2} - \frac{a(3b+2)}{4} + \frac{(b-a)}{2}[(a+1)\,ln(a+1) - a] \right|$$

$$\leq \left[\frac{A(a^2,b^2) - G(a^2,b^2)}{2}\right] max\{\ln(a+1), \ln(b+1)\}$$

bulunur.

Sonuç 4.2.5. Teorem 4.1.9 ifadesinde $g(x) = 1$, $q = 2$, $x = \frac{a+b}{2}$ ve $\lambda = 1$ seçilirse;

$$\left|\frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(s)ds\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)\sqrt{(|f'(a)|^2 + |f'(b)|^2)}}{4}$$

elde edilir.

Uygulama 4.2.5. Teorem 4.1.9 ifadesinde $g(x) = 1$, $x = \frac{a+b}{2}$, $\lambda = 1$, $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$, $q = 2$, $n \in Z$ ve $|n| \geq 2$ için $f(x) = \frac{qx^{1+\frac{n}{q}}}{q+n}$ fonksiyonu uygulanırsa;

$$\left|\frac{q}{(q+n)(2q+n)}\left(-b^{2+\frac{n}{q}} + a^{2+\frac{n}{q}}\right) + \frac{b-a}{2}\left(\frac{q}{q+n}a^{1+\frac{n}{q}} + \frac{q}{q+n}b^{1+\frac{n}{q}}\right)\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{4}\left[a^{\frac{2n}{q}} + b^{\frac{2n}{q}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\frac{A(a^2, b^2) - G(a^2, b^2)}{2\sqrt{2}}\right] A^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{2n}{q}}, b^{\frac{2n}{q}}\right)$$

bulunur.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada Yıldız (2014) tarafından elde edilen bir lemma ile Erden ve Sarıkaya (2015) tarafından ispatlanan bir lemma kullanılarak ikinci anlamda $s-$konveks $quasi-$konveks, $m-$konveks ve p fonksiyon sınıflarına ilişkin yeni eşitsizlikler bulunmuştur. Bulunan bu eşitsizliklere uygulamalar da verilmiştir. Elde edilen eşitsizliklerin literatürde var olanlarla kıyaslanması ve daha iyi sonuçlar verecek eşitsizliklerin belirlenmesi okuyucuya bırakılmıştır. Ayrıca arzu eden araştırmacı farklı konveks fonksiyon sınıfları için yeni lemmalar türetebilir ve türetilecek lemmaları kullanarak farklı konveks fonksiyon sınıfları için yeni eşitsizlikler ortaya koyabilir.

KAYNAKLAR

Akdemir, A. O., Ardic, M. A. and Özdemir, M. E. 2014. Inequalities via s-convexity and log-convexity. arXiv preprint arXiv:1409.1065.

Bayraktar, M., 2000. Fonksiyonel Analiz, ISBN 975-442-035-1.

Bayraktar, M., 2010. Analiz, ISBN 978-605-395-412-5.

Beckenbach, E.F. and Bellman, R., 1961. Inequalities. Springer-Verlag, 198 pp., Berlin.

Breckner, W.W., 1978. Stetigkeitsaussagenf¨ureine Klass ever all gemeinerter konvexer funktionen in topologisc henlinearen Raumen, Pupl. Inst. Math., 23, 13–20.

Bullen, P.S., Mitrinović, D.S. and Vasić, M., 1988. Means and Their Inequalities. Dordrecht: Kluwer Academic, 459 pp, Dordrecht-Boston.

Bullen, P.S., 2003. Handbook of Means and Their Inequalities. Dordrecht: Kluwer Academic, 537 pp, The Netherlands.

Dragomir, S. S., and Pearce, C. E. M. 2000. RGMIA Monographs. In Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications. Victoria University.

Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M., 1998. $Quasi -$convex functions and Hadamard's inequality, Bull. Austral.Math. Soc., 57, 377-385.

Dragomir, S.S., Pečarić, J. and Persson, L.E., 1995. Some inequalities of Hadamard type, SoochowJournal of Mathematics, 21 (3), 335-341.

Dragomir, S.S., Agarwal, R.P. and Barnett, N.S., 2000. Inequalities for Beta and Gamma Functions via Some Classical and New Integral Inequalities. J. of Inequal. and Appl., 5, 103-165.

Dragomir, S.S., and Fitzpatrick, S. (1999). The Hadamard inequalities for s-convex functions in the second sense. Demonstratio Mathematica. Warsaw Technical University Institute of Mathematics, 32(4), 687-696.

Erden, S. and Sarıkaya, M. Z. 2015. On Generalized some Inequalities for Convex Functions, RGMIA Research Report Collection, Accepted.

Ertuğral, M., 2013. Farklı Türden Konveks Fonksiyonların Çarpımı Üzerine İntegral Eşitsizlikleri ve Uygulamaları. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Düzce Üniversitesi, Erzurum.

Godunova, E.K. and Levin, V.I., 1985. Neravenstva dlja funkcii širokogo klassa, soderžaščego vypuklye, monotonnye i nekotorye drugie vidy funkcii, Vyčislitel. Mat. i. Mat. Fiz. Mežvuzov. Sb. Nauč. Trudov, MGPI, Moskva, 138-142.

Greenberg, H.J. and Pierskalla, W.P., 1970. A review of quasi convex functions. Reprinted from Operations Research, 19, 7.

Gürbüz, M., 2013. Farklı Türden Konveks Fonksiyonların Çarpımı Üzerine İntegral Eşitsizlikleri ve Uygulamaları. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Hardy, G., Littlewood, J.E. and Polya, G., 1952. Inequalities. 2nd Ed., Cambridge University Press, 324, United Kingdom.

Hudzik, H. and Maligranda, L., 1994. Some remarks on $s-$convex functions, Aequationes Math., 48, 100-111.

Ion, D.A., 2007. Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through quasi-convex functions. Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser., 34, 82-87.

Jeffrey, A., Dai, H-H., 2008. Handbook of Mathematical Formulas and Integrals, Elsevier Inc. 4. Edition, 589, UK.

Kannappan, Pl., 2009. Functional Equations and Inequalities with Applications, Springer,P 817.

Kavurmacı, H., 2012. Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar için Ostrowski ve Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikleri, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Kayacan, D., 2008. Birinci ve İkinci Anlamda $s-$Konveks Fonksiyonlar için Birkaç Hadamard Tipi İntegral Eşitsizliği. Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Mitrinović, D.S., 1970. Analytic Inequalities, Springer-Verlag, Berlin.

Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M., 1991. Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives. Kluwer Academic Publishers, 587 pp, Dordrecht/Boston/London.

Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M., 1993. Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers, 740, UK.

Niculescu, C.P. and Persson, L.E., 2006. Convex Functions and Their Applications. A Contemporary Approach, 255 pp, Springer Science+Business Media, Inc.

Orlicz, W., 1961. A note on modular spaces I. Bull. Acad. Polon Sci. Ser. Math. Astronom. Phsy., 9, 157-162.

Öğülmüş, H., 2014. Türevleri s −Konveks Olan Dönüşümler İçin Bazı Yeni Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler. Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Düzce Üniversitesi, Düzce.

Pachpatte, B.G., 2005. Mathematical Inequalities. Elsevier B.V., 591 pp, Amsterdam, The Netherlands.

Pavić, Z. and Ardıç, M. A. 2016. The most important inequalities of m-convex functions, Turkish Journal of Mathematics, İn press.

Pečarić, J., Proschan, F. and Tong, Y.L., 1992. Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press, Inc.

Roberts, A. W., and Varberg, D. E. (1974). Convex functions (Vol. 57). Academic Press.

Toader, G.H., 1984. Some Generalisations of the Convexity, Proc. Colloq. Approx. Optim, Cluj-Napoca, 329-338, Romanya.

Toader, G.H., 1988. On a generalization of the convexity, Mathematica, 30(53), 83-87.

Varošanec, S., 2007. On h −convexity, J. Math. Anal. and Appl., 326, 303-311.

Yıldırım, F., 2015. s −Konveks Fonksiyonlar İçin Ağırlıklı İntegral Eşitsizlikleri. Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Düzce Üniversitesi, Düzce.

Yıldız, Ç., 2014. n. Mertebeden Türevlenebilen Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikleri. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

ÖZGEÇMİŞ

1992 yılında Erzurum'da doğan Yunus Emre DURSUN, ilk ve orta öğrenimini Erzurum'da tamamladı. Lisans eğitimini Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünde tamamlayarak 2014 yılında mezun oldu. 2014 yılında Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisansa başladı. 2014 yılında Erzurum Pasinler Ortaokuluna matematik öğretmeni olarak atandı ve halen bu göreve devam etmektedir.