

**T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ENGLİŞ OPERATÖR CEBİRLERİ VE İLGİLİ PROBLEMLER

Mualla Birgül HUBAN

**Danışman
Prof. Dr. Mehmet GÜRDAL**

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA - 2018**



© 2018 [Mualla Birgöl HUBAN]

TEZ ONAYI

Mualla Birgöl HUBAN tarafından hazırlanan "**Engliş Operatör Cebirleri ve İlgili Problemler**" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri üyeleri önünde Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman

Prof. Dr. Mehmet GÜRDAL
Süleyman Demirel Üniversitesi



Jüri Üyesi

Prof. Dr. Suna SALTAN
Süleyman Demirel Üniversitesi



Jüri Üyesi

Prof. Dr. Abdullah KAPLAN
Süleyman Demirel Üniversitesi



Jüri Üyesi

Prof. Dr. EKREM SAVAŞ
Uşak Üniversitesi



Jüri Üyesi

Doç. Dr. Hüseyin TUNA
Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi



Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Yasin TUNCER



TAAHHÜTNAME

Bu tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Mualla Birgöl HUBAN



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER.....	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ.....	v
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	4
3. ÜRETİCİ ÇEKİRDEK ve BEREZİN SEMBOLÜ	8
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA	19
4.1. İstatistiksel Yakınsaklık ve C^* -Operatör Cebirler	19
4.1.1. Berezin sembollerinin bazı özellikleri.....	19
4.1.2. Genelleştirilmiş İngiliz cebirleri ve Toeplitz hesaplarına genişletil- mesi.....	23
4.2. Üretici Çekirdekler, İngiliz Cebirleri ve Bazı Uygulamaları	29
4.2.1. İngiliz cebirleri ve onların bazı Özellikleri.....	29
4.2.2. İngiliz cebirlerinde Riccati operatör denkleminin çözülebilirliği	34
4.2.3. Sıfır operatör çarpımları.....	37
4.2.4. Maksimal Berezin Kümesi	41
4.2.5. Kompaktlık ve ilgili problemler	42
4.2.6. Asimptotik çarpımsallık ve Bergman uzayındaki yarı- komütatörlerin kompaktlığı	46
4.3. Operatörlerin genelleştirilmiş özdeğerleri ve genelleştirilmiş özvektör- leri üzerine bazı uyarılar.....	50
4.4. Üretici çekirdekler, Duhamel operatör ve invaryant altuzayların mev- cutluğu.....	56
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	63
KAYNAKLAR	64
ÖZGEÇMİŞ	69

ÖZET

Doktora Tezi

ENGLİŞ OPERATÖR CEBİRLERİ VE İLGİLİ PROBLEMLER

Mualla Birgül HUBAN

Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mehmet GÜRDAL

Bu doktora tezinde üretici çekirdek ve Berezin sembolü yardımıyla tanımlı C^* -cebirlerini kullanarak fonksiyonel analiz ve operatörler teorisinin çeşitli konuları (istatistiksel yakınsaklık, invaryant alt uzaylar, sıfır Toeplitz çarpımı, genelleştirilmiş özdeğer ve özvektörler ve Riccati operatör denklemler) ve uygulamaları incelenmiştir. Üretici çekirdek teorisi Hilbert uzaylarındaki lineer dönüşümlerle temel bağlantısı olan matematiksel bilimlerdeki bir çok alanda uzun bir tarihe ve büyük çalışmalara sahiptir. Birçok bilim alanında ortak olan konu üretici çekirdek ve Berezin sembolü olduğu için bu kavramlar üzerinde sonuçlar verilmiştir. Teorinin gerekli olan temel içeriğini kapsadığı, bununla beraber incelemek için daha rahat olduğundan İngiliz cebirleri ile çalışılmasının daha uygun olduğu düşünülmüştür. Ayrıca Brown ve Halmos'un sıfır çarpım probleminden yola çıkarak, sıfır Toeplitz çarpımı için Douglas'ın bilinen lemması genelleştirilmiş, özel durumda Brown-Halmos teoreminin yeni ve daha kullanışlı ispatı verilmiştir. Čučković'in savının kısmi olarak çözümü üretici çekirdekler ve Berezin sembolü yardımıyla elde edilmiştir. Bunun dışında Riccati diferansiyel denkleminin nümerik çözümü için kullandığımız yöntemlerin daha önce verilen metodlardan daha iyi sonuç verdiği ve kolaylık sağladığı gösterilmiştir. Ayrıca bazı İngiliz cebirlerinde operatörlerin genelleştirilmiş özvektörleri ve genelleştirilmiş özdeğerleri tartışılmıştır. Son olarak Duhamel operatörler ve üretici çekirdekler yardımıyla H^2 uzayında özdeş olmayan invaryant alt uzayın mevcudluğu için bazı yeterli koşullar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Üretici çekirdek, Berezin sembolü, İnvaryant altuzay, İngiliz cebirleri, İstatistiksel yakınsaklık, Riccati denklemi, Toeplitz operatörü, Hardy uzayı, Bergman uzayı, Duhamel çarpımı.

2018, 70 sayfa

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

ENGLIŠ OPERATOR ALGEBRAS AND RELATED PROBLEMS

Mualla Birgül HUBAN

**Süleyman Demirel University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet GÜRDAL

In this doctoral dissertation, we examined applications into various topics in functional analysis and operator theory (statistical convergence, invariant subspaces, zero Toeplitz products, extended eigenvalue and extended eigenvectors and Riccati operator equations) using C^* -algebras defined in terms of reproducing kernels and Berezin symbol. The theory of reproducing kernel has fundamental ties to linear transformations in Hilbert spaces, has a long history in many other fields in mathematical sciences and there has been major work on this subject. The results of these concepts are given because the subject that is common in many fields of science is reproducing kernel and the Berezin symbol, we have results on these. Since it encompasses the fundamental contents of the theory necessary for our work and because of the ease of using Engliš algebras, we have implemented their use in our work. Also, starting off with the zero product problem of Brown and Halmos, we generalized the known Douglas lemma for zero Toeplitz product and proved the Brown-Halmos theorem in a new and more usable way. We partially obtain a conjecture due to Čučković using reproducing kernels and Berezin symbol. Apart from this, the procedure we used for the numerical solution of Riccati differential equation has been shown to give better solutions with ease than the methods given before. We discussed the extended eigenvalues and extended eigenvectors of operators on some Engliš algebras. We gave some sufficient conditions for the existence of a nontrivial invariant subspace in H^2 in terms of reproducing kernels and Duhamel operators.

Keywords: Reproducing kernel, Berezin symbol, Invariant subspace, Engliš algebras, Statistical convergence, Riccati equation, Toeplitz operator, Hardy space, Bergman space, Duhamel product.

2018, 70 pages

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde değerli bilgilerini ve akademik deneyimlerini benimle paylaşan, her zaman bana kıymetli zamanını ayırıp yol gösteren çok değerli bilim insanı Danışman Hocam Prof. Dr. Mehmet GÜRDAL'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Çok değerli Hocam Prof. Dr. Mübariz Tapdıgoğlu GARAYEV Hocam'a yaptığımız değerli çalışmalar ve ayırdığı zaman için teşekkürlerimi sunarım.

4434-D1-15 No'lu Proje ile tezimi maddi olarak destekleyen Süleyman Demirel Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yönetim Birimi Başkanlığı'na teşekkür ederim.

Tezimin gerçekleşmesinde 115F265 numaralı proje ile maddi destek sağlayan TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Danışman hocam Prof. Dr. Mehmet GÜRDAL'a yapmış olduğu çalışmalarından dolayı layık görülen TÜBA-GEBİP-2015 ödülü çerçevesinde tezime destek sağlayan TÜBA'ya teşekkür ederim.

Sevgili anneciğim Elif Tarhan'a ve artık hayatta olmayan sevgili babacığım Mustafa Emir Tarhan'a teşekkürlerimi sunarım.

Kendisi de bir akademisyen olan değerli ablam Dr. Betül Tarhan'a her zaman bilgisi ve desteğiyle yanımda olduğu için teşekkürlerimi sunarım.

Bu uzun süreçte bana katlandığı ve destek olduğu için değerli eşim Burak Huban'a teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımda oldukları için sevgili oğlum Emir Ali Huban ve sevgili yeğenim Joshua Tarhan Alkan'a teşekkürlerimi sunarım.

Mualla Birgül HUBAN
ISPARTA, 2018

SİMGELER DİZİNİ

$\tilde{A}$	A operatörünün Berezin sembolü
$\mathbb{D}$	Birim disk
$\mathbb{T}$	Birim çember
$st - \lim$	İstatistiksel limit
$\mathcal{A}_H$	Üretici çekirdekli Hilbert uzayı $H = H(\Omega)$ üzerinde operatörlerin Engliş cebiri
$H^2 = H^2(\mathbb{D})$	Hardy uzayı
L_a^2	Bergman uzayı
H^∞	Sınırlı analitik fonksiyonların uzayı
$k_{H,\lambda}$	Üretici çekirdek
$\widehat{k}_{H,\lambda}$	Normalleştirilmiş üretici çekirdek
$\tilde{W}_0(A)$	A operatörü için maksimal Berezin kümesi
T_φ	Toeplitz operatörü
$ext(T)$	T nin tüm genelleştirilmiş özdeğerlerinin kümesi
$f \otimes g$	f ve g fonksiyonlarının Duhamel çarpımı
$Hol(\mathbb{D})$	$\mathbb{D}$ deki tüm analitik fonksiyonların uzayı

1. GİRİŞ

Bu doktora tezinde üretici çekirdekler yardımıyla tanımlı bazı C^* -operatör cebirleri ile ilgili incelemeler hedeflenmiştir. Böyle cebirler İngilizce tarafından incelendiği ve çalışıldığı için tezimizde bu cebirler İngilizce cebirleri olarak isimlendirilmiştir. Burada, operatör teorisindeki bazı problemler için İngilizce cebirleri ve üretici çekirdeklerin yeni uygulamaları verilmiştir. Bu kapsamda ortaya konan problemlerin ve bu problemlere yönelik üretilen çözüm yöntemleri ve sonuçlarının rahatlıkla algılanabilmesi için gerekli terim ve notasyonları üçüncü bölümde sunacağız.

Günümüzün sürekli gelişmekte olan çalışma alanlarında üretici çekirdekler ve Berezin sembollerinin uygulama alanları, hem istatistik ve kuantum gibi fiziğin bazı alanlarında hem de matematiğin modern analiz ve pratik alanlarında büyük önem taşıdığı bilinmektedir. Üretici çekirdek ve Berezin sembolleri, frame teori, wavelet teori, konform dönüşümler teoris, interpolasyon teoris, Diriclet serileri toplanabilirlik teoris, tıbbın bağışıklık sistemi gibi bazı dallarında, haberleşme alanında, elektronların enerji seviyelerinin belirlenmesi gibi birçok alanda kullanılmaktadır ve gün geçtikçe değişik kullanım alanları ortaya çıkmaktadır. Bütün bu sonuçlar Saitoh'un iki kitabında toplanmıştır (Saitoh, 1997, 1988). Bu bağlamda yapılan bu çalışma, üretici çekirdek ve Berezin sembolü metodlarını kullanarak operatör teorisinin çeşitli konularına uygulamıştır.

Çalışma İngilizce (1995) de İngilizce tarafından verilen teoride genişletilmiş ve istatistiksel radyal limitleri, köreltilmiş Toeplitz operatörleri, Bergman uzayı, Riccati denklemi, Hardy ve Bergman uzayı üzerinde sıfır Toeplitz çarpımı, maksimal Berezin kümesi, operatörlerin genelleştirilmiş özdeğerleri, genelleştirilmiş özvektörleri ve Hardy uzayında özdeş olmayan invaryant alt uzayın varlığı için bazı uygulamalar verilmiştir.

Burada; genel değerlendirmeye girilmeksizin, başlıklar halinde tez çalışması sonucunda ortaya konan yeni sonuçlar verilmiştir. Genel değerlendirme dördüncü bölümde detaylı olarak verilecektir.

- $\mathbb{C}$ kompleks düzlemin $\mathbb{D}$ birim diski üzerindeki klasik $H^2 = H^2(\mathbb{D})$ Hardy uza-

yında bazı C^* -operatör cebirleri için istatistiksel radyal limitler incelenmiştir.

- İngiliz cebirleri incelenmiş ve onların bazı özellikleri verilmiştir. İngiliz cebiri $\mathcal{A}_{K_0}^0$ kümesine ait köreltilmiş Toeplitz operatörü için bir kriter verilmiştir.
- Bazı Ω kümesi üzerinde bir $\mathcal{H}(\Omega)$ üretici çekirdekli Hilbert uzayında operatörlerin $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ İngiliz cebiri üzerinde

$$XAX + XB - CX - D = 0 \quad (1.1)$$

Riccati operatör denkleminin çözülebilirliği incelenmiştir. Tam olarak söylemek gerekirse, Berezin sembolü yardımıyla (1.1) in çözülebilirliği için gerekli koşul ispatlanmıştır. Eğer $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ nin uygun bir alt kümesi üzerinde (1.1) çözülebilir ise o zaman (1.1) nin çözümünün tek olduğu ve A, D katsayı operatörlerinin Berezin sembolleri yardımıyla onun temsil edilebilir olduğu verilmiştir.

- H^2 Hardy uzayı ve L_a^2 Bergman uzayı üzerinde sıfır Toeplitz çarpımı incelenmiştir. Eğer $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in L^\infty(\mathbb{T})$ ve $H_1, \dots, H_n$ operatörleri

$$(T_{\varphi_1} + H_1) \dots (T_{\varphi_n} + H_n) = 0$$

olacak şekilde $\mathcal{F}_{H^2}$ İngiliz cebirlerinden operatörler ise, o zaman $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n = 0$ olduğu ispatlanmıştır. Bu ise iyi bilinen Douglas yardımcı teoremini genelleştirir. Özel durumda Brown-Halmos teoreminin yeni ispatı elde edilmiştir. Benzer sonuçlar L_a^2 Bergman uzayında sıfır Toeplitz çarpımları için ispatlanmıştır. Ayrıca, (Čučković, 2003) de Čučković in bir savı kısmi olarak çözülmüştür.

- H^2 Hardy uzayındaki T_φ Toeplitz operatörünün $\tilde{W}_0(T_\varphi)$ maksimal Berezin kümesi çalışılmış ve $\tilde{W}_0(T_\varphi) = \{\|\varphi\|_\infty\}$ olduğu ispatlanmıştır. Genel durumda, herhangi bir $T \in \mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ (İngiliz cebiri) için $\mathbb{T}_{\|T\|}$ merkezi 0 ve yarıçapı $\|T\|$ olan çemberi tanımlamak üzere $\tilde{W}_0(T) \subset \mathbb{T}_{\|T\|}$ olduğu gösterilmiştir.
- Standart üretici çekirdekli Hilbert uzayında A, B ve C operatörleri için $AB - C$ formundaki operatörlerin kompaktlığı incelenmiştir. Yani, eğer A, B, C operatörleri $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^0$ İngiliz cebirine ait ise o zaman hangi koşullar altında $\mathcal{H}$ üzerinde $AB - C$ bir

kompakt operatördür sorusuna cevap bulunmuştur. Burada, Berezin sembolleri yardımıyla $AB - C$ nin kompaklığı karakterize edilmiştir.

- L_a^2 Bergman uzayında T_u ve T_v Toeplitz operatörlerinin $[T_u, T_v] := T_{uv} - T_u T_v$ yarı-komütatörü için Axler-Chang-Sarason-Volberg tipli teorem ispatlanmıştır.
- Bazı İngiliz cebirleri üzerinde operatörlerin genelleştirilmiş özdeğerleri ve genelleştirilmiş özvektörleri incelenmiştir.
- Duhamel operatörler ve üretici çekirdekler yardımıyla H^2 Hardy uzayında özdeş olmayan bir invaryant altuzayın mevcudluğu için bazı yeterli koşullar verilmiştir.



2. KAYNAK ÖZETLERİ

Bu bölümde, tez kapsamında üzerinde çalışılmış olan problemlerin tarihsel gelişimi ve son dönemde yapılan çalışmalar detaylı olarak ifade edilmiştir.

Doktora tezi üretici çekirdekler ve Berezin sembollerinin uygulama alanlarıyla ilgilidir. Bilim ve teknoloji alanındaki hızlı gelişmelere bağlı olarak yeni uygulama arayışları, üretici çekirdekler ve Berezin sembolü ile ilgili çalışmaların en etkili yürütücü kuvveti olmuştur. Berezin sembollerinin Bergman uzaylarında ve Poisson çekirdeğinin Hardy uzaylarında önemli bir role sahip olduğu bilinen bir gerçektir. Eğer; Berezin sembollerinin tanımladığı küme yani Berezin kümesinin operatörün nümerik değer kümesinin altkümesi olduğu dikkate alınırsa, bu kavramların haberleşme alanında geniş bir uygulamaya sahip olduğunu söyleyebiliriz. Bunlara ek olarak, elektronların Vieck ve anti-vieck sembolleri Berezin sembolleri ile sıkı bir ilişkiye sahip olmasından dolayı da yine Berezin sembollerinin elektronların enerji seviyelerinin belirlenmesinde var olduğu görülmektedir. Üretici çekirdekler de geniş bir uygulama alanına sahiptirler. Üretici çekirdekler teorisinin uygulamasının önemli olduğu öğrenme (learning) teorisinde (mühendisler için önemli olan destek vektör makineleri teorisini kapsayan), yani sürekli fonksiyonların ailesinin altuzayları olarak üretici çekirdekli Hilbert uzaylarının diskleriyle örtü (covering) sayıların tahminleri, üretici çekirdekler ve üretici çekirdekli Hilbert uzayları arasındaki düzgün bağıntılar ve Sobolev uzaylarıyla fonksiyonların yaklaşımlarında birçok sonuçlar bulunmaktadır. Üretici çekirdekler teorisi Hilbert uzayları üzerinde lineer dönüşümler ile birleştirildiğinde, diferansiyel denklemler, integral denklemler, Pythagorean teoreminin genelleştirilmesi, ters problemler, sampling teori, lineer dönüşümler, nonlinear dönüşümler gibi çeşitli operatörler ve birçok geniş alanlar üzerine yayılmış verimli uygulamalara sahiptir. Özel durumda Bergman çekirdeği ve Szegő çekirdeği gibi belli üretici çekirdekler kompleks analizde birçok geniş sonuçlara sahiptir.

Üretici çekirdekler konusu eskilere dayanan bir konu olup, daha önce 1907-1909 yıllarında J. Mercer ve S. Zaremba tarafından integral denklemler teorisinde kullanılmaya başlanılmıştır (Zaremba, 1907). Bu konular için genel teori N. Aronszajn'ın adı ile tam olarak ortaya konulmuştur (Aronszajn, 1950). Daha sonraları üretici çekirdekler

Fransız bilim adamı Fields ödülü ile mükafatlandırılmış, L. Schwartz tarafından geliştirilmiştir. Bu teori bir başka anlamda M. Krein tarafından kullanılmıştır. Bundan başka, olasılık teorisinde üretici çekirdekler tekniği ilk olarak dünyaca ünlü Rus bilim adamı A. N. Kolmogorov tarafından 1941 yılında kullanılmış ve çok önemli sonuçlara imza atılmıştır (Kolmogorov, 1941). Bundan sonra, E. Parzen ve diğerleri de bu konuyu daha da ileriye götürmüşlerdir. Günümüz matematiğinde ise, yaklaşık 1972 yılından başlayarak ağırlıklı olarak Japon matematikçisi Saburo Saitoh üretici çekirdekler metoduna sanki yeni bir hayat vererek, bu yöntemi analizde, diferansiyel denklemler ve integral denklemler teorisinde, ters problemler konusunda, operatör teorisinde ve harmonik analizde uygulayarak çok önemli ve orjinal sonuçlar almayı başarmışlardır. Bütün bu sonuçlar Saitoh'un iki kitabında toplanmıştır (Saitoh, 1988, 1997).

Giriş kısmında da görüldüğü gibi, üretici çekirdekler ve Berezin sembolleri üretici çekirdekli Hilbert uzayındaki operatörler teorisinde fevkalade öneme sahiptirler. Buna göre, son yıllarda üretici çekirdekler ve Berezin sembollerinin iç dinamizmi geniş bir biçimde öğrenilmekle beraber bu iki kavramın çeşitli ve çok sayıda önemli uygulamaları da açıkça literatürde görülmektedir (Baranov vd., 2010; Chalender vd., 2006; Korenblum, 1977; Nikolski, 1986; Saitoh, 1997; Sarason, 1994; Zhu, 1990).

Bir Toeplitz operatörünün sıfır operatör olması için gerekli ve yeterli koşul, Toeplitz operatörünün sembolünün sıfır olmasıdır. Benzer olarak, Brown ve Halmos 1963'te böyle iki Toeplitz operatörünün çarpımının sıfır olması için gerekli ve yeterli koşulun onların birinin sembolünün sıfır olması olduğunu ispatlamıştır (Brown ve Halmos, 1964). Daha sonra Halmos, Toeplitz operatörlerinin sonlu çarpımları hakkında kırk yılı aşkın süredir cevap bulamamış ve şu soruyu sormuştur: (Sıfır çarpım problemi) Eğer n tane Toeplitz operatörünün çarpımı sıfır operatör ise bu operatörlerden en az biri sıfır olmak zorunda mıdır? 1970'lerde Axler $n = 3$ operatör için bunun sağlandığını göstermiştir (Axler vd., 1978). Sırasıyla 1996'da Guo ve 2000'de Gu tarafından $n = 5$ ve $n = 6$ için bu problemin sağlandığı gösterilmiştir (Guo, 1996; Gu, 2000). 2009'da Aleman ve Vukotić tarafından vektör-değerli durumda sıfır çarpım problemi çözülmüştür (Aleman ve Vukotić, 2009). Çalışmamızda sıfır operatör çarpımları, özel durumda sıfır Toeplitz çarpımları olarak incelenmiştir. İyi bilinen Douglas lemmasının genelleştirilmesi ve Brown-Halmos teoreminin yeni ispatı elde edilmiştir. Buna ek olarak $L_a^2(\mathbb{D})$ Bergman

uzayı dA normalleştirilmiş alan ölçümüne göre karesi integrallenebilir olan $\mathbb{D}$ üzerindeki tüm analitik fonksiyonların uzayı ve $P : L^2(\mathbb{D}, dA) \rightarrow L_a^2(\mathbb{D})$ ortogonal projeksiyon olsun. $f \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ için $T_f : L_a^2(\mathbb{D}) \rightarrow L_a^2(\mathbb{D})$, $T_fg = P(fg)$ ile tanımlı f sembolü bir Toeplitz operatörüdür. (Ahern ve Čučković, 2001) de Čučković'in savı (g harmonik olmak üzere $f, g \in L^\infty(D, dA)$) için $L_a^2(\mathbb{D})$ üzerinde $T_f T_g = 0$ sadece bir özdeş çözüme sahiptir) özel durumda kısmi olarak cevaplanmıştır.

X sonsuz boyutlu bir Banach uzayı, A da X ten X e sınırlı lineer bir operatör olsun. Eğer $AE \subset E$ ise, yani her $x \in E$ için $Ax \in E$ ise $E \subset X$ kapalı altuzayına A nın invaryant altuzayı denir. İnvaryant altuzaylar konusu operatörler teorisinin ve genelde fonksiyonel analizin en önemli konuları arasında yer almaktadır. Bu konu bir taraftan operatörler teorisinin kendi iç gelişimi için önemli olmakla beraber diğer yandan da yaklaşım teorisi anlamında da çok faydalı bir kavramdır. Bu sebeple, A operatörünün hiçbir özdeş olmayan kapalı invaryant altuzaya sahip olmaması için gerekli ve yeterli koşul her $0 \neq x \in X$ elemanının A nın devirli vektörü, yani

$$\text{span}\{A^n x : n : 0, 1, 2, \dots\} = X$$

başka bir deyişle, $\text{clos}\{p(A)x : p \in P \text{ (polinomlar kümesi)}\} = X$ olmasıdır. $X = H$ (Hilbert uzayı) ise; o zaman A operatörünün E kapalı invaryant altuzaya sahip olması bir taraftan $H = E \oplus E^\perp$ ortogonal ayrılışının var olmasını, diğer taraftan ise A nın matris gösteriminin

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \theta & A_{22} \end{pmatrix}$$

üçgen gösterimine sahip olduğunu gösterir ki bu da çok sayıda problemin çözümünde fevkalade önemlidir. Fakat her operatör invaryant altuzaya sahip değildir. 1973 yılında ilk olarak İsveç'li matematikçi P. Enflo sınırlı ve lineer operatör için hiçbir invaryant altuzayı olmayan bir Banach uzayının olduğunu ispat etmiş ve daha sonra 1981 yılında İngiliz matematikçi J. Read ℓ^1 klasik dizi uzayında hiçbir invaryant altuzaya sahip olmayan bir A operatörünün mevcut olduğunu göstermiştir. İnvaryant altuzaylar konusundaki pozitif ve çok önemli sonuçlardan biri de 1973 yılında Rus matematikçi V. Lomonosov tarafından fonksiyonel analizde iyi bilinen sabit nokta prensibinin yardımıyla ispatlanan teoremdir. Bu teoreme göre, X Banach uzayındaki her kompakt A operatörü

özdeş olmayan kapalı invaryant alt uzaya (ve hatta hiperinvaryant alt uzaya) sahiptir (Lomonosov, 2015). V. Lomonosov' un bu sonucu, ilerleyen yıllarda birçok matematikçi tarafından çeşitli yönlerde geliştirilmiştir. Ancak H Hilbert uzayındaki lineer sınırlı A operatörünün özdeş olmayan kapalı invaryant altuzaya sahip olup olmaması problemi günümüzde cevabı bulunmayan önemli bir soru olarak kalmaktadır. Günümüz matematiğinde çok sayıda operatörlerin invaryant altuzaya sahip oldukları ve onların tümünün resmedilmesi çeşitli yöntemlerle ispatlanmıştır. Örneğin, bazı $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ fonksiyonları için H^2 deki $T_\varphi f = P_\varphi \varphi f$, $f \in H^2$, Toeplitz operatörünün invaryant alt uzaya sahip olması L. Gamber, E. Dynkin ve V. Peller tarafından farklı yöntemlerle ispatlanmıştır. 1979 yılında S. Brown "vektör fonksiyoneller" metodu yardımıyla H Hilbert uzayındaki her alt normal A operatörünün invaryant altuzaya sahip olduğunu göstermiştir. Bundan başka Sz.-Nagy ve Foias' ın fonksiyonel model teorisi yardımıyla birçok daralma operatörlerinin de invaryant alt uzaya sahip oldukları iyi bilinmektedir (Nikolski, 1986, 1995, 2012; Nagy ve Foias, 1970). Tez çalışmamızın son kısmında, H^2 Hardy uzayında özdeş olmayan invaryant alt uzayın mevcudluğu için Duhamel operatörleri ve üretici çekirdekler yardımıyla bazı yeterli koşullar verilmiştir.

3. ÜRETİCİ ÇEKİRDEK ve BEREZİN SEMBOLÜ

Bu çalışmada üretici çekirdekler yardımıyla tanımlı bazı C^* -operatör cebirleri ile ilgili incelemeler yapılmıştır. Operatör teoride bazı problemler için İngiliz cebirleri ve üretici çekirdeklerin yeni uygulamaları verilmiştir. Bu kapsamda ortaya konan problemlerin ve bu problemlere yönelik üretilen çözüm yöntemleri ve sonuçlarının rahatlıkla algılanabilmesi için gerekli terim ve notasyonları bu bölümde ifade edeceğiz.

Tanım 3.1. Kompleks sayıların açık Ω kümesi üzerinde her $\lambda \in \Omega$ için $f \rightarrow f(\lambda)$ lineer fonksiyoneli $\mathcal{H}$ uzayında sürekli olacak şekilde Ω kümesi üzerinde f fonksiyonlarının oluşturduğu $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ Hilbert uzayına fonksiyonel Hilbert uzayı ya da üretici çekirdekli Hilbert uzayı denir (Halmos, 1982).

Klasik Riesz temsil teoreminden $\lambda \in \Omega$ için $f(\lambda) = \langle f, k_{\mathcal{H},\lambda} \rangle$ olacak şekilde bir tek $k_{\mathcal{H},\lambda} \in \mathcal{H}$ fonksiyonu mevcuttur. Burada; $k_{\mathcal{H},\lambda} = k_\lambda$ fonksiyonuna $\mathcal{H}$ uzayının üretici çekirdeği, $\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} = \frac{k_{\mathcal{H},\lambda}}{\|k_{\mathcal{H},\lambda}\|}$ fonksiyonuna ise, $\mathcal{H}$ uzayının normalleştirilmiş üretici çekirdeği denir. Diğer taraftan, üretici çekirdeği bazlar yardımıyla

$$k_{\mathcal{H},\lambda}(z) = k_{\mathcal{H}}(\lambda, z) = K(\lambda, z) = \sum_{n \geq 0} \overline{e_n(\lambda)} e_n(z)$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Burada; e_n , $\mathcal{H}$ uzayının herhangi bir ortonormal bazıdır.

Şimdi, üretici çekirdeklere bazı örnekler verelim. Örneklerle geçmeden önce sıkça kullanacağımız bazı kavramları hatırlatalım.

$\{e^{i\theta} : |\phi(e^{i\theta})| > M_0\}$ kümesinin ölçümü sıfır olacak şekilde bir M_0 sabiti varsa, $\phi \in \mathbb{T}$ ölçülebilir fonksiyonuna esas sınırlıdır denir. Tüm esas sınırlı ölçülebilir fonksiyonların oluşturduğu uzaya L^∞ uzayı denir. $\mathbb{T}$ birim çemberi üzerinde karesi integrallenebilen Lebesgue ölçülebilir kompleks değerli fonksiyonların Hilbert uzayına $L^2(\mathbb{T})$ uzayı denir.

Tanım 3.2. (Hardy uzay) $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diski üzerinde kareleri toplanabilen ve kompleks katsayılarla sahip kuvvet serisi şeklinde yazılabilen tüm analitik

fonksiyonların oluşturduğu uzaya, yani,

$$H^2 = \left\{ f : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n \text{ ve } \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 < \infty \right\}$$

koşulunu sağlayan $H^2 = H^2(\mathbb{D})$ uzayına klasik Hardy uzayı denir.

H^2 uzayında iç çarpım $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n$ ve $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{g}(n) z^n$ için $\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)}$ ile tanımlanır. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n$ vektörünün normu $\|f\|_{H^2} := \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \right)^{1/2}$ şeklinde olup, burada $\hat{f}(n) = f^{(n)}(0)/(n!)$ değeri $f(z)$ analitik fonksiyonunun n . Taylor katsayısıdır. Her $z_0 \in \mathbb{D}$ için

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z_0^n \right| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |z_0|^{2n} \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} |z_0|^{2n} \right)^{1/2} \|f\|_{H^2} \end{aligned}$$

olduğundan $f \rightarrow f(z_0)$ dönüşümü H^2 uzayında sınırlı lineer fonksiyoneldir. Dolayısıyla H^2 uzayı $\mathbb{D}$ birim disk üzerinde üretici çekirdekli Hilbert uzayıdır. $H^2(\mathbb{D})$ Hardy uzayı $\{z^n : n \geq 0\}$ ortonormal bazına sahip olduğundan bu uzayın üretici çekirdeği her $\lambda, z \in \mathbb{D}$ için

$$\begin{aligned} k_{H^2, \lambda}(z) &= \sum_{n \geq 0} \overline{e_n(\lambda)} e_n(z) = \sum_{n \geq 0} \bar{\lambda}^n z^n \\ &= \sum_{n \geq 0} (\bar{\lambda} z)^n = \frac{1}{1 - \bar{\lambda} z} \end{aligned}$$

dir. Bu çekirdeğe aynı zamanda Szegő çekirdeği de denir (Stroethoff, 1997).

Tanım 3.3. (Bergman uzay). $\mathbb{D}$ birim diskinde Lebesgue ölçümüne göre karesi integrallenebilen analitik fonksiyonların oluşturduğu uzaya $L_a^2 = L_a^2(\mathbb{D})$ Bergman uzayı, yani, $\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 dA(z) < \infty$ olacak şekilde tüm analitik fonksiyonların oluşturduğu uzaya denir. Burada; $dA = \frac{dx dy}{\pi}$, $\mathbb{D}$ nin ölçümü bire eşit olacak şekilde normalleştirilmiş Lebesgue bölge ölçümüdür.

L_a^2 uzayı

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{D}} f(z) \overline{g(z)} dA(z), \quad f, g \in L^2(\mathbb{D})$$

iç çarpım özelliğine sahip $L^2(\mathbb{D})$ uzayının lineer altuzayıdır. $\mathbb{D}$ birim diskinde f analitik fonksiyonu $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ seri açılımına sahip olduğundan

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 dA(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1}$$

dir. Her $z_0 \in \mathbb{D}$ için Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z_0|^n \\ &\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) |z_0|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1} \right)^{1/2} \\ &= \|f\| (1 - |z_0|^2)^{-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten dolayı L_a^2 uzayı $L^2(\mathbb{D})$ uzayının kapalı altuzayı olur. Bu yüzden L_a^2 Bergman uzayı $\mathbb{D}$ birim diski üzerinde üretici çekirdekli Hilbert uzayıdır. $\{\sqrt{n+1}z^n : n \geq 0\}$ kümesi L_a^2 Bergman uzayı için ortonormal baz olduğundan bu uzayın üretici çekirdeği her $\lambda, z \in \mathbb{D}$ için

$$\begin{aligned} k_{L_a^2, \lambda}(z) &= \sum_{n \geq 0} \overline{e_n(\lambda)} e_n(z) \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\sqrt{n+1} \bar{\lambda}^n \right) \cdot \left(\sqrt{n+1} z^n \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} (n+1) \bar{\lambda}^n z^n = \sum_{n \geq 0} (n+1) (\bar{\lambda} z)^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \left((\bar{\lambda} z)^{n+1} \right)' = \left(\frac{1}{1 - \bar{\lambda} z} \right)' = \left(\frac{1}{1 - \bar{\lambda} z} \right)^2 \end{aligned}$$

olup $k_{L_a^2, \lambda}(z) = \frac{1}{(1 - \bar{\lambda} z)^2}$ elde edilir (Stroethoff, 1997).

(Stroethoff, 1997) un normalleştirilmiş üretici çekirdekle elde etmiş olduğu önemli bir sonucu ifade edelim.

Önerme 3.4. $\mathcal{H}$ uzayı Ω kümesi üzerinde analitik fonksiyonların oluşturduğu üretici çekirdekli Hilbert uzayı ve $\mathcal{D}$ kümesi ise her $f \in \mathcal{D}$ için $\lambda \rightarrow \partial\Omega$ iken $\langle f, \widehat{k}_\lambda \rangle \rightarrow 0$ olacak şekilde $\mathcal{H}$ uzayının yoğun altkümesi olsun. O zaman, $\lambda \rightarrow \partial\Omega$ iken $\widehat{k}_\lambda$ normalleştirilmiş üretici çekirdeği $\mathcal{H}$ uzayında sıfıra zayıf yakınsaktır ($\widehat{k}_\lambda \xrightarrow{z} 0$) (Stroethoff, 1997).

Tanım 3.5. $\mathcal{H}$ uzayı $\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}$ normalleştirilmiş üretici çekirdeğe sahip fonksiyonel Hilbert uzayı ve T lineer sınırlı operatör olsun.

$$\widetilde{T}(\lambda) = \langle T\widehat{k}_{H,\lambda}, \widehat{k}_{H,\lambda} \rangle_{\mathcal{H}}$$

şeklinde tanımlanan $\widetilde{T}$ fonksiyonuna T operatörünün Berezin sembolü denir (Nordgren ve Rosenthal, 1994).

$\widetilde{T}$ fonksiyonunun Ω kümesinde sınırlı bir fonksiyon olduğu açıktır. Bir operatörün Berezin sembolü operatör hakkında önemli bilgi sağlar. Hardy, Bergman ve Fock Hilbert uzaylarını içeren en ünlü üretici çekirdekli Hilbert uzaylarının Berezin sembolünün de operatörü tek olarak tanımladığı bilinen bir gerçektir: her $\lambda \in \Omega$ için $\widetilde{T}_1(\lambda) = \widetilde{T}_2(\lambda)$ ise $T_1 = T_2$ dir (Engliš, 1995; Zhu, 1990).

Tanım 3.6. k_λ üretici çekirdeğine sahip boş olmayan bir Ω kümesi üzerinde kompleks değerli fonksiyonların $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ fonksiyonel Hilbert uzayı üzerinde sınırlı lineer A operatörünün Berezin kümesi ve Berezin sayısıyla,

$$Ber(A) = \left\{ \widetilde{A}(\lambda) : \lambda \in \Omega \right\} \text{ ve } ber(A) = \sup \left\{ \left| \widetilde{A}(\lambda) \right| : \lambda \in \Omega \right\}$$

ifadeleriyle tanımlanır (Karaev, 2006).

Şimdi, Berezin sembolünün bazı temel özelliklerini sıralayalım.

1. A pozitif operatör ise o zaman $\widetilde{A}$ pozitif fonksiyondur.

2.

$$\begin{aligned} \left| \widetilde{A}(\lambda) \right| &= \left| \langle A\widehat{k}_{H,\lambda}, \widehat{k}_{H,\lambda} \rangle \right| \leq \|A\widehat{k}_{H,\lambda}\| \|\widehat{k}_{H,\lambda}\| \\ &\leq \|A\| \|\widehat{k}_{H,\lambda}\| \|\widehat{k}_{H,\lambda}\| = \|A\| \quad (\lambda \in \Omega) \end{aligned}$$

olduğundan $\tilde{A}$ Berezin sembolü sınırlı bir fonksiyondur.

3. A^* adjoint operatörünün Berezin sembolü $\tilde{A}$ nın kompleks eşleniğine eşittir. Yani

$$\widetilde{A^*}(\lambda) = \langle A^* \hat{k}_{H,\lambda}, \hat{k}_{H,\lambda} \rangle = \langle \hat{k}_{H,\lambda}, A \hat{k}_{H,\lambda} \rangle = \overline{\langle A \hat{k}_{H,\lambda}, \hat{k}_{H,\lambda} \rangle} = \overline{\tilde{A}(\lambda)}$$

dir.

4. Her $\lambda \in \Omega$ için $\tilde{A}(\lambda) = \tilde{B}(\lambda)$ olması için gerekli ve yeterli koşul $A = B$ olmasıdır.

5. A operatörü kompakt ise, $\tilde{A}(\lambda) \rightarrow 0$ ($\lambda \rightarrow \partial\Omega$) dır. Fakat bunun tersi her zaman doğru değildir. Yani; $\tilde{A}(\lambda) \rightarrow 0$ ($\lambda \rightarrow \partial\Omega$) ise, A operatörü kompakt olmayabilir.

Tanım 3.7. $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ fonksiyonel Hilbert uzayı ve $\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} = \frac{k_{\mathcal{H},\lambda}}{\|k_{\mathcal{H},\lambda}\|}$ da bu uzayın normalleştirilmiş üretici çekirdeği olsun. Eğer $\lambda \rightarrow \partial\Omega$ ($\lambda \rightarrow \xi \in \partial\Omega$) iken $\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \rightarrow 0$ zayıf yakınsak ise, $\mathcal{H}$ uzayına standart fonksiyonel Hilbert uzayı denir (Nordgren ve Rosenthal, 1994).

Örneğin, $H^2(\mathbb{D})$ Hardy uzayı, $L_a^2(\mathbb{D})$ Bergman uzayı ve $L_a^2(\mathbb{C})$ Fock uzayı standart fonksiyonel Hilbert uzaylardır.

Standart $\mathcal{H}$ üretici çekirdekli Hilbert uzayında bir K kompakt operatörü için her ne zaman $\{\lambda_n\}$ dizisi $\partial\Omega$ nın bir noktasına yakınsak ise,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{K}(\lambda_n) = 0$$

olduğu bilinen bir gerçektir. Bu bağlamda, standart üretici çekirdekli Hilbert uzayında bir kompakt operatörün Berezin sembolü sınırda sıfır olur. Nordgren ve Rosenthal (1994) de $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ üniter olmak üzere $U^{-1}KU$ nın Berezin sembolleri yardımıyla üretici çekirdekli Hilbert uzay üzerinde K kompakt operatörlerini karakterize etmiştir:

Yardımcı Teorem 3.8. *Standart üretici çekirdekli Hilbert uzayında bir K operatörünün kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul her U üniter operatör için $\widetilde{U^{-1}KU}$ nun tüm Berezin sembollerinin sınırda sıfır olmasıdır (Nordgren ve Rosenthal, 1994).*

Daha sonra, Chalender vd. (2012) nin bu teoremin bazı koşullarını zayıflatarak aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir.

Teorem 3.9. $\partial_{\mathcal{H}}\Omega \neq \emptyset$ olacak şekilde Ω üzerinde H üretici çekirdekli Hilbert uzay olsun. O zaman aşağıdaki iddialar denktir:

(i) A kompakttır.

(ii) Her $\zeta \in \partial_{\mathcal{H}}\Omega$ ve H üzerinde her U üniter operatörü için $\lim_{\lambda \rightarrow \zeta} \widetilde{U^{-1}AU}(\lambda) = 0$ dır.

(iii) H üzerinde her U üniter operatörü için

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \widetilde{U^{-1}AU}(\lambda_n) = 0$$

olacak şekilde $\zeta \in \partial_{\mathcal{H}}\Omega$ noktasına yakınsayan Ω da noktaların $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ dizisi mevcuttur.

Tanım 3.10. $S : H^2 \rightarrow H^2$ tek taraflı kaydırma operatörü (unilateral shift) $(Sf)(z) = zf(z)$ ile ya da Taylor katsayıları yardımıyla

$$S(a_0, a_1, \dots) = (0, a_0, a_1, \dots)$$

şeklinde tanımlanır. Tek taraflı kaydırma operatörünün S^* adjointine geri kaydırma operatörü denir ve

$$(S^*f)(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z}$$

ile tanımlanır. Taylor katsayısı yardımıyla da

$$S^*(a_0, a_1, \dots) = (a_1, a_2, \dots)$$

şeklinde ifade edilir (Martinez-Avendano ve Rosenthal, 2007).

$\mathbb{T} = \partial\mathbb{D} = \{e^{it} : 0 \leq t < 2\pi\}$ birim çember, dt , $\mathbb{T}$ de yay uzunluğu ölçümü ve $m(e^{it}) = \frac{dt}{2\pi}$ normalleştirilmiş Lebesgue ölçüsü olsun. Burada m -hemen hemen her $\zeta \in \mathbb{T}$ için Fatou teoremi ile mevcut olan sınır değeri $(bf)(\zeta) := \lim_{r \rightarrow 1^-} f(r\zeta)$ olan her bir $f \in H^2$ fonksiyonu birleşiminden $L^2 = L^2(\mathbb{T}, m)$ de H^2 uzayının doğal gömülüştünü kurmak uygun olacaktır (Hoffman, 1962). O zaman $\widehat{f}(n) := \int_{\mathbb{T}} \bar{\zeta}^n f(\zeta) dm(\zeta)$ ifadesi f nin n . Fourier katsayısı olmak üzere

$$H^2 = \left\{ f \in L^2 : \widehat{f}(n) = 0, n < 0 \right\}$$

yazabiliriz.

Şimdi Poisson çekirdeğinin tanımını verelim.

Tanım 3.11. $0 \leq r < 1$ ve $\Psi \in [0, 2\pi]$ için Poisson çekirdeği

$$P_r(\Psi) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \Psi + r^2}$$

şeklinde tanımlanır. Her $r \in [0, 1)$ ve Ψ için $1 - r^2 > 0$ ve $1 - 2r \cos \Psi + r^2 \geq (1 - r)^2 > 0$ olduğundan $P_r(\Psi) > 0$ dır.

Poisson çekirdeği yardımıyla harmonik genişlemenin tanımı aşağıdaki şekildedir:

$\varphi \in L^1 = L^1(\mathbb{T})$ için

$$\tilde{\varphi}(re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\tau}) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(t - \tau)} d\tau, re^{it} \in \mathbb{D}$$

ile tanımlı $\mathbb{D}$ içine onun harmonik genişlemesi $\tilde{\varphi}$ ile tanımlayacağız. $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ için bu harmonik fonksiyonun analitik olması için gerekli ve yeterli koşul $\varphi \in H^2$ olmasıdır.

Tanım 3.12. Herhangi $z_0 \in \mathbb{T}$ ve $\alpha > -1$ için

$$\Gamma_\alpha(z_0) = \{z \in \mathbb{D} : |z - z_0| < \alpha(1 - |z|)\}$$

ve θ da $\mathbb{D}$ birim diskinde fonksiyon olsun. Eğer $\alpha > 1$ için

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \Gamma_\alpha(z_0)}} \theta(z) = L$$

mevcutsa o zaman $\theta(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında L teğetsel olmayan (açısal) limite sahiptir denir (Kılıç, 1994).

$H^\infty = H^\infty(\mathbb{D})$ uzayı

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)|$$

ile normlu $\mathbb{D}$ üzerinde sınırlı analitik fonksiyonların Banach cebirini tanımlar. $\overline{H^\infty} := \{\bar{g} : g \in H^\infty\}$, $\mathbb{D}$ deki sınırlı ko-analitik fonksiyonların uzayı ve $L^\infty = L^\infty(\mathbb{T})$ de esas

supremum norm tarafından normlaştırılmış $\mathbb{T}$ üzerinde tüm esas sınırlı fonksiyonların uzayı olacaktır. $g \in L^\infty(\mathbb{T})$ için $\|g\|_\infty$ ifadesi $|g|$ de esas supremum için açılımıdır. Her $f \in H^\infty$ için $(bf)(e^{it}) = \lim_{r \rightarrow 1^-} f(re^{it})$ ile hemen hemen her yerde tanımlı bir $bf \in L^\infty(\mathbb{T})$ fonksiyonunun karşılık geldiği bilinmektedir (Hoffman, 1962). $\|f\|_\infty = \|bf\|_\infty$ eşitliği gerçekleşir.

Herhangi bir $\theta \in H^\infty$ iç fonksiyonu, yani, $\mathbb{D}$ de $|\theta(z)| \leq 1$ ve hemen hemen her $\xi \in \mathbb{T}$ için $|\theta(\xi)| = 1$, için karşılık gelen model uzayı K_θ

$$K_\theta := H^2 \ominus \theta H^2 = \{f \in H^2 : \langle f, \theta g \rangle = 0, \text{ her } g \in H^2\}$$

ile tanımlanır.

Eğer $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ ise

$$T_\varphi f = P_+(\varphi f)$$

ile tanımlı H^2 üzerindeki T_φ operatörüne φ sembollü Toeplitz operatörü denir. Burada $P_+ : L^2 \rightarrow H^2$ Riesz ortoprojektördür.

Toeplitz operatörünün bazı temel özellikleri aşağıdaki gibidir.

(1) $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ ve $T_\varphi : H^2 \rightarrow H^2$ olsun. $f \in H^2$ için $T_\varphi^* = T_{\bar{\varphi}}$, yani $T_\varphi^* f = P_+(\bar{\varphi} f)$ dir.

(2) $\|T_\varphi\| = \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$ dir.

(3) $\varphi \in H^\infty = H^\infty(\mathbb{D})$ ise her $f \in H^2$ için $T_\varphi f = M_\varphi f = \varphi f$ dir. Yani Toeplitz operatörü ile çarpma operatörü çakışır. Bu T_φ operatörüne analitik Toeplitz operatörü denir.

(4) $\varphi \in \overline{H^\infty}$ (H^∞ nun kompleks eşleniği) ise, T_φ operatörüne antianalitik Toeplitz operatörü veya koanalitik Toeplitz operatörü denir.

(5) $\varphi \in L^\infty$ ve $\psi \in H^\infty$ ise $T_\varphi T_\psi = T_{\varphi\psi}$ dir.

(6) $\varphi \in L^\infty$ ve $\psi \in \overline{H^\infty}$ ise $T_\psi T_\varphi = T_{\psi\varphi}$ dir.

(7) $T \in H^2$ operatörünün Toeplitz operatör olması için gerekli ve yeterli koşul U tek taraflı kaydırma operatörü olmak üzere,

$$U^* T U = T$$

olmasıdır.

Tanımdan $T_\varphi^* = T_{\overline{\varphi}}$ olduğu açıktır. Ayrıca,

$$A_\varphi^\theta f = P_\theta T_\varphi|K_\theta$$

ile tanımlanan A_φ^θ operatörü köreltilmiş Toeplitz operatörü olarak tanımlanır. $L^\infty(\mathbb{T})$ de ψ ve φ için $T_\psi T_\varphi$ nin H^2 de bir Toeplitz operatör olması için gerekli ve yeterli koşul ya $\psi \in \overline{H^\infty}$ veya $\varphi \in H^\infty$ olmasıdır (Halmos, 1982). Her iki durumda da $T_\psi T_\varphi = T_{\psi\varphi}$ dir. Bu sebeple herhangi $f \in \overline{H^\infty}$, $g \in L^\infty$, $h \in H^\infty$ için $T_f T_g T_h = T_{fgh}$ olur.

Aşağıdaki durum iyi bilinen bir gerçektir.

Yardımcı Teorem 3.13. *Eğer $\varphi \in L^\infty$ ise, o zaman $\widetilde{T_\varphi} = \widetilde{\varphi}$ dir, yani, T_φ Toeplitz operatörünün Berezin sembolü onun sembolü φ nin $\widetilde{\varphi}$ harmonik genişlemesine denktir (Engliš, 1995).*

Engliš teğetsel olmayan ve radyal yakınsaklık yardımıyla $\|T\widehat{k}_\lambda\|$, $\|T^*\widehat{k}_\lambda\|$ ve $|\widetilde{T}(\lambda)|$ nin sınır davranışıyla tanımlı $H^2(\mathbb{D})$ Hardy uzayı üzerinde bazı C^* -operatör cebirlerini tanımladı (Engliš, 1995). $\mathcal{T}$ cebiri $\{T_\varphi : \varphi \in L^\infty(\mathbb{T})\}$ ile üretilen C^* -cebir olsun. Aşağıdaki sonuç Douglas'a aittir (Douglas, 1972; Nikolski, 1986).

Teorem 3.14. $\sigma(T_\varphi) = \varphi$ ($\forall \varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$) özelliğini sağlayan σ dönüşümü

$$\sigma : \mathcal{T} \rightarrow L^\infty(\mathbb{T})$$

için bir C^* -homomorfizmi mevcuttur. σ nin çekirdeği T nin komütatörler ideali ile çakışır, yani, T deki ideal

$$[R, S] := RS - SR \quad (R, S \in \mathcal{T})$$

biçimindeki tüm komütatörler ile üretilir. Bazen σ sembol dönüşüm olarak adlandırılır (Douglas, 1972).

$K \subset \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ olsun. $n \in \mathbb{N}$ için $K_n = \{k \in K : k \leq n\}$ ve K_n deki elemanların sayısı

$|K_n|$ ile tanımlansın. K nın doğal yoğunluğu

$$\delta(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|K_n|}{n}$$

ile tanımlanır (Freedman ve Sember, 1981).

Eğer her $\varepsilon > 0$ için $K_\varepsilon = \{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ kümesinin doğal yoğunluğu sıfır ise X normlu uzayında reel veya kompleks sayıların $(x_k : k = 1, 2, \dots)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - \lim_k x_k = L$ ile gösterilir.

Aşağıdaki notasyon Fridy (1985) ye aittir . Eğer her $\varepsilon > 0$ için;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde $N = N(\varepsilon)$ sayısı mevcut ise, (x_k) dizisi istatistiksel Cauchy adımı alır.

Bu teoremin temel sonucu aşağıda Fridy (1985) tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 3.15. *Aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) (x_k) bir istatistiksel yakınsak dizidir.

(2) (x_k) bir istatistiksel Cauchy dizisidir.

(3) Hemen hemen her k için $x_k = y_k$ olacak şekilde (y_k) yakınsak dizisi var olacak şekilde bir (x_k) dizisi vardır.

Aşağıdaki sonuç Teorem 3.15 den hemen elde edilir.

Sonuç 3.16. *Eğer (x_k) dizisi $st - \lim_k x_k = L$ olacak şekilde bir dizi ise o zaman (x_k) dizisi $\lim_k y_k = L$ (adi anlamda) olacak şekilde bir (y_k) altdizisine sahiptir.*

Tanım 3.17. Bir kompleks Hilbert uzayda sürekli lineer operatörlerin bir A kompleks cebiri

i) A operatörlerin norm topolojisi üzerinde topolojik olarak kapalı kümedir

ii) A operatörlerin adjointleri alınarak oluşturulan bir işlem altında kapalıdır

özelliklerini sağlıyorsa C^* -cebiri olarak adlandırılır (Halmos, 1982).

C^* -cebirleri fonksiyonel analizin bir araştırma alanı olup ilk olarak kuantum mekanik problemlerinde kullanılmıştır. İlk olarak John von Neumann tarafından bu cebirler için genel çerçeve kurulmuş ve von Neumann cebirleri adıyla bilinen özel C^* -cebir sınıfı tanımlanmıştır. 1943'te Gelfand ve Naimark Hilbert uzayını kullanmadan C^* -cebirleri karakterize etmiştir. C^* -cebirinin temel örneği kompleks H Hilbert uzayında sınırlı lineer operatörlerin $\mathcal{B}(H)$ cebiridir. Burada x^* ifadesi $x : H \rightarrow H$ operatörünün adjoint operatörünü tanımlar.

Tanım 3.18. Eğer $T'T = TT'$ olacak şekilde her T' operatörü için $T'M \subset M$ ise H kompleks Hilbert uzayının bir M altuzayına T operatörü için hiper invaryant adı verilir (Lomonosov, 2015).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde üretici çekirdekler ve onların yardımıyla tanımlanan Berezin sembolleri ile tanımlı C^* -cebirleri kullanılarak fonksiyonel analiz ve operatör teorisinin çeşitli konularına (istatistiksel yakınsaklık, invaryant altuzaylar, sıfır Toeplitz çarpımı, genelleştirilmiş özdeğer, genelleştirilmiş özvektör ve Riccati operatör denklemler) uygulamaları incelenmiştir.

4.1. İstatistiksel Yakınsaklık ve C^* -Operatör Cebirler

Bu alt kısımda Hardy uzayı üzerinde C^* -operatör cebiri olan genelleştirilmiş İngiliz cebirin istatistiksel radyal yakınsaklık notasyonu tanımlanmış ve onun bazı özellikleri çalışılmıştır.

4.1.1. Berezin sembollerinin bazı özellikleri

Bu bölümde Berezin sembolleri ile ilgili bazı sonuçlar ispatlanmıştır.

Yaklaşım bölgeleri: $0 < \alpha < 1$ için, $D(0; \alpha) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < \alpha\}$ birim diski ve $z = 1$ den $D(0; \alpha)$ nin noktalarına kadar olan doğru parçaları ile Ω_α yi tanımlayalım (Rudin, 1974; sayfa 240-241). Diğer bir deyişle, Ω_α kümesi $D(0; \alpha)$ yi içeren en küçük konveks açık kümedir ve onun sınırında 1 noktasına sahiptir. $z = 1$ yakınında, $\Omega_\alpha, \mathbb{D}$ yarıçapıyla ikiye bölünmüş ve 1 de son bulan, $\alpha = \sin \theta$ olmak üzere 2θ açık aralığında bir açıdır. Ω_α ile 1 değerine yaklaşan eğriler $\mathbb{T}$ ye teğet olamaz. Bundan dolayı Ω_α ya 1 tepe noktasıyla, teğetsel olmayan yaklaşım bölgesi olarak adlandırılır. α arttıkça Ω_α bölgeleri genişler. Birleşimi $\mathbb{D}$, kesişimleri $[0, 1)$ yarıçapıdır. Ω_α nın döndürülmüş örnekleri e^{it} tepe noktasında $e^{it}\Omega_\alpha$ ile tanımlanır.

İstatistiksel teğetsel olmayan ve radyal limitler: Eğer; her $\alpha < 1$ ve $e^{i\theta}$ değerine istatistiksel yakınsak olan her $\{z_j\}$ dizisi için

$$st - \lim_{j \rightarrow \infty} F(z_j) = \lambda$$

ve $e^{i\theta}\Omega_\alpha$ içinde ise $\mathbb{D}$ de tanımlı bir F fonksiyonuna $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ de λ istatistiksel teğetsel

olmayan limite sahiptir denir. Eğer; $F, \mathbb{D}$ üzerinde bir fonksiyon ve f de $\mathbb{T}$ de bir fonksiyon ise o zaman F fonksiyonu f değerine radyal olarak istatistiksel yakınsak denir ve hemen hemen her $\theta \in [0, 2\pi)$ için $(z_n) \rightarrow e^{i\theta}$ istatistiksel radyal (yani eğer, $st\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| e^{i\theta} = e^{i\theta}$) ise,

$$st\text{-}\lim F(z_n) = f(e^{it})$$

yazılır.

Operatörlerin berezin sembollerinin bazı özellikleri: Herhangi iki $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$ fonksiyonu için, $[T_\varphi, T_\psi] := T_\varphi\psi - T_\psi T_\varphi$ tanımlayalım. Bu ifadeye onların yarı komütatörleri denir.

Teorem 4.1. $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ için $\|H_\varphi \hat{k}_\lambda\| \rightarrow 0$ radyal olarak istatistikseldir. Sonuç olarak, herhangi $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$ için $[T_\varphi, T_\psi]^\sim(\lambda) \rightarrow 0$ radyal olarak istatistiksel yakınsaktır.

İspat. Engliš (1995) in makalesindeki metodu uygulamak için $y := P_- \varphi$ olsun. $\hat{k}_\lambda = \frac{k_\lambda}{\|k_\lambda\|_{H^2}} \in H^\infty$ olduğunu dikkate alarak,

$$H_\varphi \hat{k}_\lambda = P_- (\varphi \hat{k}_\lambda) = P_- ((P_+ \varphi) \hat{k}_\lambda) + P_- (y \hat{k}_\lambda) = P_- (y \hat{k}_\lambda) = H_y \hat{k}_\lambda$$

yazabiliriz ve bunun sonucu olarak,

$$\begin{aligned} \|H_\varphi \hat{k}_\lambda\|^2 &= \|y \hat{k}_\lambda\|^2 - \|T_y \hat{k}_\lambda\|^2 \\ &= \langle |y|^2 \hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \rangle - \|T_y \hat{k}_\lambda\|^2 = \widetilde{|y|^2}(\lambda) - \|T_y \hat{k}_\lambda\|^2 \end{aligned}$$

olur. Böylece, herhangi $\beta \in \mathbb{D}$ ve $\bar{y}$ bir analitik fonksiyonun sınır değeri olduğu için

$$\langle T_y k_\lambda, k_\beta \rangle = \langle k_\lambda, \bar{y} k_\beta \rangle = \widetilde{y}(\lambda) \langle k_\lambda, k_\beta \rangle$$

elde edilir. Böylece, $T_\varphi \hat{k}_\lambda = \widetilde{y}(\lambda) \hat{k}_\lambda$ ve

$$\|H_\varphi \hat{k}_\lambda\|^2 = \widetilde{|y|^2}(\lambda) - |\widetilde{y}(\lambda)|^2$$

dir. Fatou teoreminden, $(|y|^2)^\sim$ ve $|\widetilde{y}|^2$ her ikisi de radyal olarak $|y|^2$ değerine yakın-

saktır. Buradan istatistiksel radyal olarak $|y|^2$ değerine yakınsaması anlamına gelir. Bu sebeple onların farkı istatistiksel olarak sıfıra yaklaşır ve aşağıdaki sonuç elde edilir.

$[T_\varphi, T_\psi] = H_\varphi^* H_\psi$ olduğu gözlemlenir ve böylece

$$\begin{aligned} |[T_\varphi, T_\psi]^\sim(\lambda)| &= \left| \left\langle H_\varphi^* H_\psi \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \right| = \left| \left\langle H_\psi \widehat{k}_\lambda, H_\varphi \widehat{k}_\lambda \right\rangle \right| \\ &\leq \|H_\psi \widehat{k}_\lambda\| \|H_\varphi \widehat{k}_\lambda\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

radyal olarak istatistiksel yakınsak olur. Böylece, teoremin ispatı tamamlanır. $\square$

$\mathcal{T}$ deki kapalı idealler, tüm $[T_\varphi, T_\psi], \varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$ yarı komütatörler tarafından üretilen yarı komütatör idealdir.

Aşağıdaki teorem, Teorem 4.1 i güçlendiren bir sonuçtur.

Teorem 4.2. *Eğer $T \in \mathcal{B}(H^2)$ $\mathcal{T}$ nin yarı komütatör idealine ait ise o zaman $\tilde{T} \rightarrow 0$ radyal olarak istatistiksel yakınsaktır.*

İspat.

$$T_{\varphi_1} T_{\varphi_2} \dots T_{\varphi_n} [T_a, T_b] T_{\psi_1} T_{\psi_2} \dots T_{\psi_m} \quad (4.1)$$

formu Toeplitz operatörlerinin lineer kombinasyonları olduğundan yarı komütatör idealin yoğun bir altkümesini oluşturur. Bu ise, T nin (4.1) formuna sahip olduğu zaman iddiayı ispatlamak için yeterlidir. Böylece, (bknz, (Engliš, 1995))

$$\begin{aligned} T_c [T_a, T_b] &= T_c T_{ab} - T_c T_a T_b \\ &= (T_c T_{ab} - T_{cab}) + (T_{cab} - T_{ca} T_b) + (T_{ca} T_b - T_c T_a T_b) \\ &= -[T_c, T_{ab}] + [T_{ca}, T_b] + [T_c, T_a] T_b \end{aligned}$$

elde edilir. T nin

$$T = [T_\varphi, T_\psi] A = H_\varphi^* H_\psi A, A \in \mathcal{T}, \varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$$

formunda olduğunu kabul edelim. Şimdi $[T_\varphi, T_\psi] = H_\varphi^* H_\psi$ kullanarak,

$$|\tilde{T}(\lambda)| = \left| \left\langle T \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \right| = \left| \left\langle H_\varphi^* H_\psi A \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \left\langle H_\psi A \widehat{k}_\lambda, H_{\widetilde{\varphi}} \widehat{k}_\lambda \right\rangle \right| \\
&\leq \|H_\psi A\| \|H_{\widetilde{\varphi}} \widehat{k}_\lambda\| \quad (\text{Cauchy-Schwarz eşitsizliği})
\end{aligned}$$

elde edilir ve $\|H_{\widetilde{\varphi}} \widehat{k}_\lambda\| \rightarrow 0$ radyal olarak istatistiksel yakınsadığını düşünerek (Teorem 4.1 ten), $\widetilde{T} \rightarrow 0$ radyal olarak istatistiksel yakınsaklığı elde edilir. $\square$

Şimdi İngiliz'in sonucunu geliştirerek daha genel bir teorem ispatlanacaktır. (Bknz Douglas, 1972; Teorem 2) Bu da kolay bir sonuç olarak Douglas teoremi'ni ifade eder.

Teorem 4.3. *Herhangi bir $\mathcal{T}$ deki T için, $\widetilde{T} \rightarrow \varphi$, bazı $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ fonksiyonu için radyal olarak istatistiksel yakınsaktır.*

$$\sigma : \mathcal{T} \rightarrow L^\infty(\mathbb{T}), T \rightarrow \varphi$$

dönüşümü bir C^* -cebiri morfizmidir, onun çekirdeği tam olarak $\mathcal{T}$ nin komütatör idealidir, ve herhangi T_ψ Toeplitz operatörü için $\sigma(T_\psi) = \psi$ dir. Böylece σ , Teorem 3.14 deki sembol dönüşüm ile çakışır.

İspat. $\mathcal{J}, \mathcal{T}$ de yarı komütatör ideal olsun. (Berger ve Coburn, 1987) deki, $A_a T_b B - A T_{ab} B = -A [T_a, T_b] B$ tekrarlayan özdeşlik uygulamalarıyla, herhangi $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \in L^\infty(\mathbb{T})$ için $T_{\varphi_1} T_{\varphi_2} \dots T_{\varphi_n} - T_{\varphi_1} T_{\varphi_2} \dots \varphi_n \in \mathcal{J}$ elde edilir.

$$T = T_\varphi + S, \quad \varphi \in L^\infty(\mathbb{T}), S \in \mathcal{J}, \quad (4.2)$$

formundaki operatörlerin lineer kombinasyonlarını ele alarak $\mathcal{T}$ de bir istatistiksel yoğun altküme oluşur. $\widetilde{T}_\varphi = \widetilde{\varphi}$ ve Teorem 4.2 için, $\widetilde{T} \rightarrow \varphi$ radyal olarak istatistiksel yakınsaktır, ve böylece $\|\varphi\|_\infty \leq \|\widetilde{T}\|_\infty \leq \|T\|$ elde edilir.

$$\sigma : T_\varphi + S \mapsto \varphi$$

dönüşümü iyi tanımlıdır ve $\mathcal{T}$ nin tamamında sürekli olarak genişler. Toeplitz operatörlerin bir istatistiksel limiti yine bir Toeplitz operatör olduğundan özel durumda $\mathcal{T}$ 'deki

her operatör (4.2) formuna sahiptir. Gerçekte, eğer bazı $X \in \mathcal{B}(H^2)$ için,

$$st - \lim_n \|T_{\varphi_n} - X\| = 0$$

ise o zaman Sonuç 3.16 dan $(\|T_{\varphi_n} - X\|)_{n \geq 1}$ dizisi $\lim_k \|T_{\varphi_{n_k}} - X\| = 0$ olacak şekilde $(\|T_{\varphi_{n_k}} - X\|)_k$ bir altdizisine sahiptir. Bu ise X in bir Toeplitz operatörü ve $\mathcal{J}$ nin ise istatistiksel kapalı olduğu anlamına gelir. $\square$

Bu dönüşüm açıkça lineerdir, birleşmeyi korur ve Teorem 4.2 sayesinde üstelik çarpımsaldır. Onun çekirdeğinin tam olarak $\mathcal{T}$ nin $\mathcal{J}$ yarı komütatör ideali olduğu açıktır. Şimdi geriye sadece $\mathcal{J}$ ile $\mathcal{G}$ komütatör idealin çakıştığını göstermek kaldı. $[T_\varphi, T_\psi] = [T_\psi, T_\varphi] - [T_\varphi, T_\psi]$ olduğundan, $\mathcal{G} \subset \mathcal{J}$ kapsamı özdeştir. Ters kapsama $\mathcal{J} \subset \mathcal{G}$, (Engliš, 1995) de ispatlanmış olup teoremin ispatı tamamlanmıştır.

Sonuç 4.4. *Eğer $A \in \mathcal{T}$ ise o zaman $[A^*, A]^\sim \rightarrow 0$ radyal olarak istatistiksel yakınsaktır.*

4.1.2. Genelleştirilmiş Engliš cebirleri ve Toeplitz hesaplarına genişletilmesi

Bu kısımda operatörlerin genelleştirilmiş Engliš cebiri kavramı verilmiş, bazı özellikleri incelenmiş ve Teorem 4.3 için $\mathcal{T}$ yi içeren Engliš cebirleri ailesi gösterilmiştir.

Şimdi ilk olarak genelleştirilmiş Engliš cebirini tanımlayalım:

$$\mathcal{E} := \left\{ H \in \mathcal{B}(H^2) : \|\widehat{Hk_\lambda}\| \text{ ve } \|H^* \widehat{k_\lambda}\| \rightarrow 0 \text{ radyal olarak istatistiksel yakınsak} \right\}.$$

Diğer bir deyişle, her $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E$ için

$$st - \lim_{r \nearrow 1} \|H \widehat{k_{re^{i\theta}}}\| = 0$$

dir. Burada E kümesi sıfır Lebesgue ölçümünün (H 'ye bağlı) bir kümesidir. Durum H^* için de benzerdir. Klasik radyal limitler olması durumunda; bu cebir, klasik Engliš cebiridir (Engliš, 1995).

Aşağıdaki teoremden $\mathcal{E}$ cebirinin bazı önemli özellikleri verilmiştir.

Teorem 4.5. (a) $\mathcal{E}$, bir C^* -cebiridir,

(b) Eğer $T_\varphi \in \mathcal{E}$ ise o zaman $\varphi = 0$ dir,

(c) $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$ için $[T_\varphi, T_\psi] \in \mathcal{E}$,

(d) $\mathcal{E}$, "Toeplitz operatörlere göre bir idealdir", yani, $H \in \mathcal{E}$ ve $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ ifadesi $HT_\varphi, T_\varphi H \in \mathcal{E}$ anlamına gelir.

İspat. (a) $A, B \in \mathcal{E} \Rightarrow AB \in \mathcal{E}$ gösterimi haricinde herşey özdeştir. Fakat, $0 \leq \|AB\hat{k}_\lambda\| \leq \|A\| \|\hat{B}\hat{k}_\lambda\| \rightarrow 0$ radyal olarak istatistiksel yakınsaktır ve B^*A^* için benzerdir.

(b) $\|T_\varphi\hat{k}_\lambda\| \rightarrow 0$ radyal olarak istatistiksel yakınsak ifadesinden,

$$|\tilde{T}_\varphi(\lambda)| = |\langle T_\varphi\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \rangle| \leq \|T_\varphi\hat{k}_\lambda\| \rightarrow 0$$

radyal olarak istatistiksel yakınsak olması elde edilir ve böylece $\tilde{T}_\varphi(\lambda) \rightarrow 0$ radyal olarak istatistiksel yakınsaktır. Fakat, $\tilde{T}_\varphi \rightarrow \varphi$ radyal olarak istatistiksel yakınsak olup, $\varphi = 0$ olduğu bilinmektedir.

(c) Bunun ispatı Teorem 4.1 ve $[T_\varphi, T_\psi] = H_\varphi^* H_\psi$ eşitliğinden elde edilir.

(d)

$$0 \leq \|T_\varphi H\hat{k}_\lambda\| \leq \|T_\varphi\| \|H\hat{k}_\lambda\| \rightarrow 0$$

radyal olarak istatistiksel yakınsaktır ve $T_\varphi H^*\hat{k}_\lambda$ için benzer olarak elde edilir. Bu sebeple $HT_\varphi\hat{k}_\lambda$ için ilgili iddialar aşağıdaki durumlarda mevcuttur. $\square$

Önerme 4.6. $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ olsun $\mathbb{D}$ deki Poisson formülü ve onun harmonik genişlemesi $\tilde{\varphi}$ ile tanımlansın. O zaman $T_\varphi\hat{k}_\lambda - \tilde{\varphi}(\lambda)\hat{k}_\lambda \rightarrow 0$ radyal olarak istatistiksel yakınsaktır, yani, hemen hemen her $t \in [0, 2\pi)$ için

$$\lim_{r \nearrow 1} \|T_\varphi\hat{k}_{re^{i\theta}} - \tilde{\varphi}(re^{i\theta})\hat{k}_{re^{i\theta}}\| = 0$$

olur.

Bu önermenin ispatı (Douglas, 1972) deki Teorem 6 dan ve Sonuç 1 den elde edilir.

$$\mathcal{A}_1 := \{T_\varphi + H : \varphi \in L^\infty(\mathbb{T}), H \in \mathcal{E}\}$$

tanımlayalım. Douglas teoreminin genelleştirilmesi olan aşağıdaki teorem (Engliš, 1995) deki Teorem 7 nin ispat metodunu ve Sonuç 1 kullanılarak ispatlanabilir ve bu sebeple önermenin ispatı verilmemiştir.

Teorem 4.7. (i) $\mathcal{A}_1$, bir C^* -cebiridir.

(ii) Herhangi $T \in \mathcal{A}_1$ için

$$\tilde{T} \longrightarrow \sigma_{st}(T) \in L^\infty(\mathbb{T}) \text{ radyal olarak istatistiksel yakınsak}$$

olan $\tilde{T}(\lambda)$ nin $\sigma_{st}(T)$ şeklinde tanımlanan bir istatistiksel radyal limiti mevcuttur.

(iii) $\sigma_{st} : \mathcal{A}_1 \longrightarrow L^\infty(\mathbb{T})$ herhangi $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ için T_φ den φ içine dönüşümü olan $L^\infty(\mathbb{T})$ üzerinde $\mathcal{A}_1/\mathcal{E}$ nin bir C^* -izomorfizmasına indirgenir.

Aşağıdaki sonuç Teorem 4.7 nin $\mathcal{T}$ sınıfının karakterizasyonu için kullanılabildiğini gösterir.

Önerme 4.8. $A \in \mathcal{B}(H^2)$ bir operatör olsun. Eğer $A \in \mathcal{T}$ ise o zaman

(i) $\tilde{A}$ istatistiksel radyal limite sahiptir: $\tilde{A} \longrightarrow \varphi$ bazı $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ için radyal olarak istatistiksel yakınsaktır ve

(ii) $\|A\hat{k}_\lambda - \tilde{\varphi}(\lambda)\hat{k}_\lambda\|$ ve $\|A^*\hat{k}_\lambda - \overline{\tilde{\varphi}(\lambda)}\hat{k}_\lambda\| \longrightarrow 0$ radyal olarak istatistiksel yakınsaktır.

İspat. $A \in \mathcal{T} \subset \mathcal{A}_1$ olsun. Bazı $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ ve $H \in \mathcal{E}$ için $A = T_\varphi + H$ olduğu açıktır.

Böylece $\tilde{A} \longrightarrow \varphi$ radyal olarak istatistiksel yakınsaktır. Bu (i) ifadesini ispatlar ve

$$\|A\hat{k}_\lambda - T_\varphi\hat{k}_\lambda\| = \|H\hat{k}_\lambda\| \longrightarrow 0 \text{ radyal olarak istatistiksel yakınsaktır.}$$

$$\begin{aligned} \|A\hat{k}_\lambda - \tilde{\varphi}(\lambda)\hat{k}_\lambda\| &\leq \|A\hat{k}_\lambda - T_\varphi\hat{k}_\lambda\| + \|T_\varphi\hat{k}_\lambda - \tilde{\varphi}(\lambda)\hat{k}_\lambda\| \\ &\leq \|H\hat{k}_\lambda\| + \|T_\varphi\hat{k}_\lambda - \tilde{\varphi}(\lambda)\hat{k}_\lambda\| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

radyal olarak istatistiksel yakınsak olduğundan ve Önerme 4.6 dan

$\|A\widehat{k}_\lambda - \widetilde{\varphi}(\lambda)\widehat{k}_\lambda\| \longrightarrow 0$ radyal olarak istatistiksel yakınsaklığa denktir. Benzer şekilde, $\|A^*\widehat{k}_\lambda - \overline{\widetilde{\varphi}(\lambda)}\widehat{k}_\lambda\| \longrightarrow 0$ radyal olarak istatistiksel yakınsak olduğu ispatlanabilir. Bu da (ii) nin ispatını tamamlamaktadır. $\square$

Aşağıdaki kısımda istatistiksel Banach limitleri ile Engliš (Engliš, 1995) deki bazı sonuçları genişletilerek verilmiştir. Onların ispatları (Engliš, 1995) makalesinin benzer sonuçlarının hafif bir modifikasyonu olup ispat verilmemiştir.

(Engliš, 1995) i kullanarak $BC[0, 1)$ ise $[0, 1)$ yarı açık aralığı üzerinde tüm sınırlı sürekli fonksiyonların C^* -cebiri olduğunu hatırlayabiliriz. $BC[0, 1) \simeq C(M)$ Gelfand teorisi olarak bilinir. Burada M , $BC[0, 1)$ nin maksimal ideal uzayıdır.

M ise 1 noktası üzerinde M_1 tanımlayan belli fiber eklenmiş $[0, 1)$ in bir homeomorfik kopyasını içerir. Her bir çarpımsal lineer fonksiyonel $Lim \in M_1$ bir Banach limit olarak adlandırılacaktır. $f \in L^\infty(\mathbb{D})$ ve $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ için sıfır ölçümlü bir küme haricinde her $\theta \in [0, 2\pi)$ için

$$Lim\left(r \xrightarrow{st} f\left(re^{i\theta}\right)\right) = \varphi\left(e^{i\theta}\right)$$

olduğu zaman f fonksiyonu φ değerine Lim e göre radyal olarak istatistiksel yakınsaktır denir ve $f \xrightarrow{Lim} \varphi$ olarak yazılır.

$$\mathcal{E}_{st-Lim} := \left\{ H \in B(H^2) : \left\| H\widehat{k}_\lambda \right\| \text{ ve } \left\| H^*\widehat{k}_\lambda \right\| \xrightarrow{Lim} 0 \text{ radyal olarak istatistiksel} \right\}$$

olduğunu tanımlayalım. $\mathcal{E}$ ve $\mathcal{E}_{st-Lim}$ yer değiştirdiğinde Teorem 4.5 deki tüm iddialar etki altında kalır. Böylece Teorem 4.7 ve Önerme 4.8 nin aşağıdaki benzerleri elde edilir.

Teorem 4.9. $\mathcal{A}_{st-Lim} := \{T_\varphi + H : \varphi \in L^\infty(\mathbb{T}), H \in \mathcal{E}_{st-Lim}\}$ olsun. O zaman

(i) $\mathcal{A}_{st-Lim}$, bir C^* -cebiridir;

(ii) $\widetilde{T} \xrightarrow{Lim} \varphi$ radyal olarak istatistiksel olacak şekilde her $T \in \mathcal{A}_{st-Lim}$ için en az bir $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ mevcuttur;

(iii) $T \mapsto \varphi$ dönüşümü $\mathcal{A}_{st-Lim}/\mathcal{E}_{st-Lim}$ den $L^\infty(\mathbb{T})$ üzerine bir C^* morfizmasıdır. Bu dönüşüm T_φ den φ üzerinedir.

Önerme 4.10. A, H^2 de bir operatör olsun. $A \in \mathcal{A}_{st-Lim}$ olması için gerekli ve yeterli koşul

(i) $\tilde{A} \xrightarrow{Lim} \varphi$ radyal olarak istatistiksel yakınsak olacak şekilde $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ mevcut olmasıdır.

(ii) $\left\| \widehat{A\hat{k}_\lambda} - \widetilde{\varphi}(\lambda)\widehat{k}_\lambda \right\| \xrightarrow{Lim} 0$ radyal olarak istatistiksel yakınsak ve $\left\| A^*\widehat{k}_\lambda - \widetilde{\varphi}(\lambda)\widehat{k}_\lambda \right\| \xrightarrow{Lim} 0$ radyal olarak istatistiksel yakınsak olmasıdır.

Sonuç olarak daha genel bir İngiliz cebiri ((İngiliz, 1995) tarafından tanımlanan klasik radyal limitler durumunda) tanımlanmıştır ve bazı özellikleri verilmiştir.

$$\mathcal{A}_{st} := \left\{ T \in \mathcal{B}(H^2) : \left\| T\widehat{k}_\lambda \right\|^2 - \left| \left\langle T\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \right|^2 \text{ ve} \right. \quad (4.3)$$

$$\left. \left\| T^*\widehat{k}_\lambda \right\|^2 - \left| \left\langle T\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \right|^2 \longrightarrow 0 \text{ radyal olarak istatistiksel yakınsaktır} \right\}$$

olarak tanımlansın. Diğer bir deyişle, $\left\| T\widehat{k}_\lambda \right\|^2 - \left| \widetilde{T}(\lambda) \right|^2 \longrightarrow 0$ radyal olarak istatistiksel yakınsaktır ve T^* için durum benzerdir. (İngiliz, 1995) nin çalışması dikkate alınır, eğer $T\widehat{k}_\lambda$,

$$T\widehat{k}_\lambda = c_\lambda \widehat{k}_\lambda + d_\lambda, c_\lambda \in \mathbb{C}, d_\lambda \perp \widehat{k}_\lambda \quad (4.4)$$

gibi ayrıştırıldığında, $\widetilde{T}(\lambda) = \left\langle T\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle = c_\lambda$ ve $\left\| T\widehat{k}_\lambda \right\|^2 = |c_\lambda|^2 + \|d_\lambda\|^2$ olur. Böylece (4.3) deki ilk durumdan

$$d_\lambda \rightarrow 0 \text{ radyal olarak istatistiksel yakınsaktır} \quad (4.5)$$

elde edilir.

Önerme 4.11. $\mathcal{A}_{st}$ bir C^* -cebiridir.

İspat. Aslında, (4.4) ve (4.5) den $\mathcal{A}_{st}$ lineerdir ve (4.3) ten self-adjoint ve istatistiksel kapalı normdur. Eğer $T, T' \in \mathcal{A}_{st}$ ve $T\widehat{k}_\lambda = c_\lambda \widehat{k}_\lambda + d_\lambda$, $T'\widehat{k}_\lambda = c'_\lambda \widehat{k}_\lambda + d'_\lambda$, (4.4) ayrışımı ise o zaman

$$TT'\widehat{k}_\lambda = Td'_\lambda + c'_\lambda c_\lambda \widehat{k}_\lambda + c'_\lambda d_\lambda$$

dir. $TT'\widehat{k}_\lambda = c''_\lambda \widehat{k}_\lambda + d''_\lambda$, TT' için (4.4) ayrışımı mevcut olsun. O zaman

$$(c'_\lambda c_\lambda - c''_\lambda) \widehat{k}_\lambda = (d''_\lambda - c'_\lambda d_\lambda) - T d'_\lambda \quad (4.6)$$

olur. $d_\lambda \perp \widehat{k}_\lambda$ ve $d''_\lambda \perp \widehat{k}_\lambda$ olduğundan, $\widehat{k}_\lambda$ ile her iki tarafın iç çarpımı alınarak

$$\begin{aligned} |c'_\lambda c_\lambda - c''_\lambda| &= |\langle T d'_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle| \\ &\leq \|T\| \|d'_\lambda\| \rightarrow \text{radyal olarak istatistiksel yakınsak ((4.5) ten)} \end{aligned} \quad (4.7)$$

olur. Şimdi (4.6) da yerine yazılırsa

$$d''_\lambda - (c'_\lambda d_\lambda + T d'_\lambda) \rightarrow 0 \text{ radyal olarak istatistiksel yakınsak}$$

olduğu görülür. Şimdi; $|c'_\lambda| \leq \|T'\|$ olup (4.5) den ve T ve T' nin sınırlılığından,

$$c'_\lambda d_\lambda + T d'_\lambda \rightarrow 0 \text{ radyal olarak istatistiksel yakınsak}$$

olduğu elde edilir. Sonuç olarak, $d''_\lambda \rightarrow 0$ radyal olarak istatistiksel yakınsaktır. $T'^* T^*$ için benzer bir argümanla $TT' \in \mathcal{A}_{st}$ olduğu kolayca ispatlanabilir. Yani, $\mathcal{A}_{st}$ çarpımsalılık altında kapalıdır. Buradan $\mathcal{A}_{st}$ nin bir C^* - cebiri olduğu bulunur. $\square$

Önerme 4.12. $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ için $T_\varphi \in \mathcal{A}_{st}$ dir.

İspat. Önerme 4.6 ve $\widetilde{T}_\varphi = \widetilde{\varphi}$ den direkt olarak elde edilir. $\square$

Önerme 4.13. Eğer $H \in \mathcal{E}$ ise o zaman $H \in \mathcal{A}_{st}$ olur.

İspat. $\|H\widehat{k}_\lambda\| \rightarrow 0$ radyal olarak istatistiksel yakınsak olmasından $\langle H\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle \rightarrow 0$ radyal olarak istatistiksel yakınsak olduğu sonucu elde edilir (çünkü $|\langle H\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle| \leq \|H\widehat{k}_\lambda\|$ dir.). Buradan $\|H\widehat{k}_\lambda\|^2 - |\langle H\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \rangle| \rightarrow 0$ ifadesi de radyal olarak istatistiksel yakınsak olur. H^* için de durum benzer olup $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}_{st}$ dir. $\square$

4.2. Üretici Çekirdekler, İngiliz Cebirleri ve Bazı Uygulamaları

4.2.1. İngiliz cebirleri ve onların bazı Özellikleri

Bu kısımda, üretici çekirdekler yardımıyla tanımlı bazı operatör cebirleri tartışılmış ve onların bazı özellikleri çalışılmıştır. Bu cebirler (İngiliz, 1995) de İngiliz tarafından incelenmiştir. (İngiliz, 1995) takip edilerek $\mathcal{T}$ cebiri H^2 Hardy uzayındaki Toeplitz operatörlerinin

$$\{T_\Phi : \Phi \in L^\infty(\mathbb{T})\}$$

kümesi ile genişletilmiş C^* -cebiri olsun. Aşağıdaki sonuç Douglas tarafından verilmiştir (Douglas, 1973).

Teorem 4.14. *Her $\Phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ için $\sigma(T_\Phi) = \Phi$ koşulunu gerçekleyen $\sigma : \mathcal{T} \rightarrow L^\infty(\mathbb{T})$ bir C^* -homomorfizmi vardır. σ nin çekirdeği $\mathcal{T}$ nin komütatör ideali ile çakışır, yani, $\mathcal{T}$ deki ideal*

$$[R, S] = RS - SR, R, S \in \mathcal{T}$$

tüm komütatörleri tarafından oluşturulur. σ çoğu zaman sembol dönüşüm olarak adlandırılır (Douglas, 1973).

İngiliz, Douglas teoremine benzer sonuçları ispatlamak için alternatif metod vermiştir (İngiliz, 1995). Bir T operatörünün sembolü T nin $\tilde{T}$ Berezin sembolünün teğetsel olmayan sınır değeri olarak elde edilmiştir. (İngiliz, 1995) de gösterildiği gibi, bu metod aynı zamanda Toeplitz cebirinden daha büyük operatör cebirleri için çalışılmıştır. Aynı teknik $\mathbb{D}$ de analitik fonksiyonları içeren $L^2(\mathbb{D})$ nin kapalı altuzayı olan $L_a^2 = L_a^2(\mathbb{D})$ Bergman uzayı için de uygulanabilir.

Bu kısımda üretici çekirdekler ve Berezin sembol tekniklerinin diğer uygulamaları verilmiştir; özel durumda İngiliz cebirlerinin uygulamalarını ve diğer özelliklerini inceleyeceğiz. Sonuçlarımızı ifade etmeden önce, bazı gerekli tanımları ve notasyonları verelim.

Eğer f fonksiyonu $\mathbb{D}$ açık birim yuvarda bir sınırlı sürekli fonksiyon ise ölçümü sıfır

olan küme haricinde her $t \in [0, 2\pi)$ için

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} f(re^{it}) = 0$$

ise o zaman $f \rightarrow 0$ radyal olarak yakınsak olduğunu hatırlayalım.

Üretici çekirdekli Hilbert uzayı $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ de aşağıdaki Engliš cebirlerini tanımlayalım. (Engliš, 1995) de Engliš tarafından incelenmiş ve $\mathcal{H} = H^2(\mathbb{D})$ ve $\mathcal{H} = L_a^2(\mathbb{D})$ durumunda bu cebirler radyal, teğetsel olmayan ve düzgün limitler olarak tanımlanmıştır:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{H}} := \left\{ T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \lambda \rightarrow \partial\Omega \text{ iken } \|T\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}\| \text{ ve } \|T^*\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}\| \rightarrow 0 \right\};$$

$$\mathcal{A}_1 := \{T_{\Phi} + T : \Phi \in L^{\infty}(\mathbb{T}), T \in \mathcal{F}_{H^2}\};$$

$$\mathcal{A}_{\mathcal{H}} := \left\{ T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \lambda \rightarrow \partial\Omega \text{ iken } \|T\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}\|^2 - |\widetilde{T}(\lambda)|^2 \text{ ve } \|T^*\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}\|^2 - |\widetilde{T}(\lambda)|^2 \rightarrow 0 \right\}.$$

Burada $\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} := \frac{k_{\mathcal{H},\lambda}}{\|k_{\mathcal{H},\lambda}\|_{\mathcal{H}}}$ ifadesi $\mathcal{H}(\Omega)$ uzayının normalleştirilmiş üretici çekirdeğidir ve

$$\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^0 := \left\{ T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \|T\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}\|^2 - |\widetilde{T}(\lambda)|^2 \rightarrow 0 \text{ } \lambda \rightarrow \partial\Omega \text{ iken } \right\}$$

dir. Engliš (Engliš, 1995) de $\mathcal{A}_{H^2}$ nin bir C^* -cebiri olduğunu ispatlamıştır. Aynı zamanda Engliš (Engliš, 1995) in (aynı zamanda (Karaev, 2008)) aşağıdaki sonucundan herhangi bir $\Phi \in L^{\infty}(\mathbb{T})$ için $T_{\Phi} \in \mathcal{A}_{H^2}$ olduğunu verebiliriz.

Yardımcı Teorem 4.15. $\Phi \in L^{\infty}(\mathbb{T})$ ve $\widetilde{\Phi}$ ile $\mathbb{D}$ içine onun harmonik genişlemesi (Poisson Formülü) olsun. O zaman radyal olarak $T_{\Phi}\widehat{k}_{H^2,\lambda} - \widetilde{\Phi}(\lambda)\widehat{k}_{H^2,\lambda} \rightarrow 0$, yani, hemen hemen her $t \in [0, 2\pi)$ için,

$$\lim_{r \rightarrow 1} \|T_{\Phi}\widehat{k}_{H^2,re^{it}} - \widetilde{\Phi}(re^{it})\widehat{k}_{H^2,re^{it}}\| = 0$$

dir.

θ bir iç fonksiyon ve $\varphi \in L^{\infty}(\mathbb{T})$ olsun. A_{φ}^{θ} köreltilmiş Toeplitz operatörü $A_{\varphi}^{\theta}f := P_{\theta}T_{\varphi}|K_{\theta}$ formülü ile

$$K_{\theta} := H^2\Theta H^2$$

model uzayında tanımlıdır. Burada, $P_{\theta} : H^2 \rightarrow K_{\theta}$ bir ortogonal projeksiyon ve $T_{\varphi} :$

$H^2 \rightarrow H^2$ de φ sembolü Toeplitz operatörüdür.

$\mathcal{H} = H^2(\mathbb{D})$, $\mathcal{H} = L_a^2(\mathbb{D})$ ve $\mathcal{H} = K_\theta$ durumunda İngiliz cebirlerine karşılık gelen tanımdaki limitler üstte bahsedildiği gibi radyal veya teğetsel olmayan olacak şekilde kabul edilecektir.

Böylece gelecek sonuç,

$$\mathcal{A}_{K_\theta}^0 = \left\{ T \in \mathcal{B}(K_\theta) : \left\| T \widehat{k}_\lambda^\theta \right\|^2 - \left| \widetilde{T}(\lambda) \right|^2 \rightarrow 0 \text{ radyal yakınsaktır} \right\}$$

İngiliz cebirinde köreltilmiş Toeplitz operatörünün üyeliğini ispatlayacaktır.

Teorem 4.16. A_φ^θ operatörü K_θ uzayında bir köreltilmiş Toeplitz operatör olsun. O halde $A_\varphi^\theta \in \mathcal{A}_{K_\theta}^0$ olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow \partial \mathbb{D} \\ \text{radyal}}} \frac{1}{1 - |\theta(\lambda)|^2} \left[\left\| T_{\varphi(1 - \overline{\theta(\lambda)}\theta)} \widehat{k}_\lambda \right\|^2 - \left\| T_{\varphi\theta - \theta(\lambda)} \widehat{k}_\lambda \right\|^2 - \right. \\ \left. - 2 \operatorname{Re} \left(\widetilde{A}_\varphi^\theta(\lambda) \right) \left(\varphi \left| 1 - \overline{\theta(\lambda)}\theta \right|^2 \right)^\sim(\lambda) + \left(1 - |\theta(\lambda)|^2 \right) \left| \widetilde{A}_\varphi^\theta(\lambda) \right|^2 \right] = 0$$

olmasıdır.

İspat. İlk olarak K_θ üretici çekidekli Hilbert uzayının normalleştirilmiş üretici çekirdeği

$$\widehat{k}_\lambda^\theta(z) := \left(\frac{1 - |\lambda|^2}{1 - |\theta(\lambda)|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1 - \overline{\theta(\lambda)}\theta(z)}{1 - \overline{\lambda}z}, \lambda \in \mathbb{D},$$

dir ve bu sebeple A_φ^θ operatörünün Berezin sembolü,

$$\widetilde{A}_\varphi^\theta(\lambda) := \left\langle A_\varphi^\theta \widehat{k}_\lambda^\theta, \widehat{k}_\lambda^\theta \right\rangle, \lambda \in \mathbb{D}$$

olur. $A_\varphi^\theta \widehat{k}_\lambda^\theta - \widetilde{A}_\varphi^\theta \widehat{k}_\lambda^\theta \perp \widetilde{A}_\varphi^\theta \widehat{k}_\lambda^\theta$ olduğundan,

$$\left\| A_\varphi^\theta \widehat{k}_\lambda^\theta - \widetilde{A}_\varphi^\theta(\lambda) \widehat{k}_\lambda^\theta \right\|^2 = \left\| A_\varphi^\theta \widehat{k}_\lambda^\theta \right\|^2 - \left| \widetilde{A}_\varphi^\theta(\lambda) \right|^2, \lambda \in \mathbb{D}$$

olur. Böylece; $A_\varphi^\theta \in \mathcal{A}_{K_\theta}^0$ olması için gerekli ve yeterli koşul radyal olarak $\lambda \rightarrow \partial \mathbb{D}$ iken

$\left\|A_{\varphi}^{\theta}\widehat{k}_{\lambda}^{\theta}-\widetilde{A}_{\varphi}^{\theta}(\lambda)\widehat{k}_{\lambda}^{\theta}\right\|\rightarrow 0$ olmasıdır. Bu sebeple, $\left\|A_{\varphi}^{\theta}\widehat{k}_{\lambda}^{\theta}-\widetilde{A}_{\varphi}^{\theta}(\lambda)\widehat{k}_{\lambda}^{\theta}\right\|$ nun sınırdaki davranışını inceleyeceğiz. Gerçekten; $P_{\theta}=I-T_{\theta}T_{\overline{\theta}}$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
& \left\|A_{\varphi}^{\theta}\widehat{k}_{\lambda}^{\theta}-\widetilde{A}_{\varphi}^{\theta}(\lambda)\widehat{k}_{\lambda}^{\theta}\right\|^2 \\
&= \left\|P_{\theta}T_{\varphi}\widehat{k}_{\lambda}^{\theta}-\widetilde{A}_{\varphi}^{\theta}(\lambda)\widehat{k}_{\lambda}^{\theta}\right\|^2 \\
&= \left\|(I-T_{\theta}T_{\overline{\theta}})T_{\varphi}\widehat{k}_{\lambda}^{\theta}-\widetilde{A}_{\varphi}^{\theta}(\lambda)\widehat{k}_{\lambda}^{\theta}\right\|^2 \\
&= \left\langle T_{\varphi}\widehat{k}_{\lambda}^{\theta}-T_{\theta}T_{\overline{\theta}}T_{\varphi}\widehat{k}_{\lambda}^{\theta}-\widetilde{A}_{\varphi}^{\theta}(\lambda)\widehat{k}_{\lambda}^{\theta}, T_{\varphi}\widehat{k}_{\lambda}^{\theta}-T_{\theta}T_{\overline{\theta}}T_{\varphi}\widehat{k}_{\lambda}^{\theta}-\widetilde{A}_{\varphi}^{\theta}(\lambda)\widehat{k}_{\lambda}^{\theta}\right\rangle \\
&= \left\|T_{\varphi}\widehat{k}_{\lambda}^{\theta}\right\|^2-\left\langle T_{\varphi}\widehat{k}_{\lambda}^{\theta}, T_{\theta}T_{\overline{\theta}}T_{\varphi}\widehat{k}_{\lambda}^{\theta}\right\rangle-\widetilde{A}_{\varphi}^{\theta}(\lambda)\left\langle T_{\varphi}\widehat{k}_{\lambda}^{\theta}, \widehat{k}_{\lambda}^{\theta}\right\rangle- \\
&\quad -\left\langle T_{\theta}T_{\overline{\theta}}T_{\varphi}\widehat{k}_{\lambda}^{\theta}, T_{\varphi}\widehat{k}_{\lambda}^{\theta}\right\rangle+\left\|T_{\theta}T_{\overline{\theta}}T_{\varphi}\widehat{k}_{\lambda}^{\theta}\right\|^2- \\
&\quad -\widetilde{A}_{\varphi}^{\theta}(\lambda)\left\langle \widehat{k}_{\lambda}^{\theta}, T_{\varphi}\widehat{k}_{\lambda}^{\theta}\right\rangle+\left|\widetilde{A}_{\varphi}^{\theta}(\lambda)\right|^2 \\
&= \left\|T_{\varphi}\widehat{k}_{\lambda}^{\theta}\right\|^2-2\operatorname{Re}\left[\widetilde{A}_{\varphi}^{\theta}(\lambda)\left\langle T_{\varphi}\widehat{k}_{\lambda}^{\theta}, \widehat{k}_{\lambda}^{\theta}\right\rangle\right]-2\left\|T_{\overline{\theta}\varphi}\widehat{k}_{\lambda}^{\theta}\right\|^2+ \\
&\quad +\left\|T_{\theta}T_{\overline{\theta}\varphi}\widehat{k}_{\lambda}^{\theta}\right\|^2+\left|\widetilde{A}_{\varphi}^{\theta}(\lambda)\right|^2 \\
&= \left\|T_{\varphi}\widehat{k}_{\lambda}^{\theta}\right\|^2-2\operatorname{Re}\left[\widetilde{A}_{\varphi}^{\theta}(\lambda)\left\langle T_{\varphi}\widehat{k}_{\lambda}^{\theta}, \widehat{k}_{\lambda}^{\theta}\right\rangle\right]-\left\|T_{\overline{\theta}\varphi}\widehat{k}_{\lambda}^{\theta}\right\|^2+\left|\widetilde{A}_{\varphi}^{\theta}(\lambda)\right|^2 \\
&= \frac{1}{1-|\theta(\lambda)|^2}\left\|T_{\varphi(1-\overline{\theta(\lambda)}\theta)}\widehat{k}_{\lambda}\right\|^2- \\
&\quad -2\operatorname{Re}\left[\widetilde{A}_{\varphi}^{\theta}(\lambda)\left\langle T_{\varphi|1-\overline{\theta(\lambda)}\theta|^2\widehat{k}_{\lambda}, \widehat{k}_{\lambda}\right\rangle\right]\frac{1}{1-|\theta(\lambda)|^2}+ \\
&\quad +\left|\widetilde{A}_{\varphi}^{\theta}(\lambda)\right|^2-\left\|T_{\overline{\varphi}(1-\overline{\theta(\lambda)}\theta)}\widehat{k}_{\lambda}\right\|^2\frac{1}{1-|\theta(\lambda)|^2}
\end{aligned}$$

olup her $\lambda \in \mathbb{D}$ için,

$$\begin{aligned}
\left\|A_{\varphi}^{\theta}\widehat{k}_{\lambda}^{\theta}-\widetilde{A}_{\varphi}^{\theta}(\lambda)\widehat{k}_{\lambda}^{\theta}\right\|^2 &= \frac{1}{1-|\theta(\lambda)|^2}\left[\left\|T_{\varphi(1-\overline{\theta(\lambda)}\theta)}\widehat{k}_{\lambda}\right\|^2-\left\|T_{\overline{\varphi}\theta-\theta(\lambda)}\widehat{k}_{\lambda}\right\|^2-\right. \\
&\quad \left.-2\operatorname{Re}\left(\widetilde{A}_{\varphi}^{\theta}(\lambda)\left(\varphi\left|1-\overline{\theta(\lambda)}\theta\right|^2\right)^{\sim}(\lambda)\right)+\right. \\
&\quad \left.+ \left(1-|\theta(\lambda)|^2\right)\left|\widetilde{A}_{\varphi}^{\theta}(\lambda)\right|^2\right]
\end{aligned}$$

dir. Bu da, A_φ^θ nın $\mathcal{A}_{K_\theta}^0$ Engliş cebirinde olması için gerekli ve yeterli koşulun

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow \partial \mathbb{D} \\ \text{radyal}}} \frac{1}{1 - |\theta(\lambda)|^2} \left[\left\| T_{\varphi(1 - \overline{\theta(\lambda)}\theta)} \widehat{k}_\lambda \right\|^2 - \left\| T_{\varphi\theta - \theta(\lambda)} \widehat{k}_\lambda \right\|^2 - \right. \\ \left. - 2\operatorname{Re} \left(\widetilde{A_\varphi^\theta}(\lambda) \right) \left(\varphi \left| 1 - \overline{\theta(\lambda)}\theta \right|^2 \right)^\sim(\lambda) + \left(1 - |\theta(\lambda)|^2 \right) \left| \widetilde{A_\varphi^\theta}(\lambda) \right|^2 \right] = 0$$

olduğunu gösterir. Bu ise ispatı tamamlar. $\square$

$\mathcal{A}_{L_a^2}$ cebiri;

$$\mathcal{A}_{L_a^2} := \left\{ T \in \mathcal{B}(L_a^2) : \left\| T \widehat{k}_{L_a^2, \lambda} \right\|^2 - \left| \widetilde{T}(\lambda) \right|^2 \rightarrow 0 \text{ radyal ve } T^* \text{ için benzer} \right\}$$

ile $\mathcal{B}(L_a^2)$ (Engliş, 1995) deki operatörlerin C^* -cebirini tanımlasın.

Engliş cebirlerinin temel özellikleri (Engliş, 1995) de aşağıdaki önermede verilmiştir.

Önerme 4.17. (i) $\mathcal{F}_\mathcal{H}$ bir C^* -cebiridir.

(ii) Eğer $T_\Phi \in \mathcal{F}_\mathcal{H}$ ise $\Phi = 0$ dır.

(iii) $\mathcal{A}_1$ bir C^* -cebiridir.

(iv) Herhangi bir $T \in \mathcal{A}_1$ için $\lambda \rightarrow \partial \mathbb{D}$ iken radyal olarak $\widetilde{T}(\lambda) \rightarrow \sigma(T)$ olacak şekilde $\sigma(T) \in L^\infty(\mathbb{T})$ mevcuttur.

(v) $\Phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ için $T_\Phi \in \mathcal{A}_{H^2}$ dir.

(vi) $\mathcal{A}_\mathcal{H}$ bir C^* -cebiridir.

(vii) $\mathcal{A}_\mathcal{H}^0$ bir cebirdir.

Önerme 4.18. $T \in \mathcal{B}(L_a^2)$ olsun. O zaman; $T \in \mathcal{A}_{L_a^2}$ olması için gerekli ve yeterli koşul $\lambda \rightarrow \partial \mathbb{D}$ iken radyal olarak $\left\| (T - \widetilde{T}(\lambda)I) \widehat{k}_{L_a^2, \lambda} \right\|_2 \rightarrow 0$ ve $\left\| (T^* - \widetilde{T}^*(\lambda)I) \widehat{k}_{L_a^2, \lambda} \right\|_2 \rightarrow 0$ olmasıdır.

İspat.

$$\left\| T\widehat{k}_{L_a^2, \lambda} \right\|_2^2 = \left\| T\widehat{k}_{L_a^2, \lambda} - \widetilde{T}(\lambda)\widehat{k}_{L_a^2, \lambda} \right\|_2^2 + \left| \widetilde{T}(\lambda) \right|^2$$

ve

$$\left\| T^*\widehat{k}_{L_a^2, \lambda} - \widetilde{T}^*(\lambda)\widehat{k}_{L_a^2, \lambda} \right\|_2^2 = \left\| T^*\widehat{k}_{L_a^2, \lambda} \right\|_2^2 - \left| \widetilde{T}(\lambda) \right|^2$$

olduğundan istenen sonuç elde edilmiştir. $\square$

4.2.2. Engliş cebirlerinde Riccati operatör denkleminin çözülebilirliği

Bu kısımda, bazı Ω kümeleri üzerinde bir $\mathcal{H}(\Omega)$ üretici çekirdekli Hilbert uzayında operatörlerin $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ Engliş cebiri üzerinde

$$XAX + XB - CX - D = 0 \quad (4.8)$$

Riccati operatör denkleminin çözülebilirliği incelenmiştir. Tam olarak söylemek gerekirse, Berezin sembolü yardımıyla (4.8) in çözülebilirliği için gerekli koşul ispatlanmıştır. Eğer $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ nin uygun bir altkümesi üzerinde (4.8) çözülebilir ise, o zaman (4.8) in çözümü tektir ve A ve D katsayı operatörlerinin Berezin sembolleri yardımıyla temsil edilebilir olduğu verilmiştir.

Sonuçlarımızı ifade etmek için herhangi bir $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ için mevcut ve $\widetilde{A}^{bv}(\xi) \in L^\infty(\partial\Omega)$ olacak şekilde

$$\widetilde{A}^{bv}(\xi) := \lim_{\lambda \rightarrow \xi \in \partial\Omega} \widetilde{A}(\lambda)$$

tanımlayalım. Aynı zamanda,

$$\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^u := \left\{ A \in \mathcal{A}_{\mathcal{H}} : \widetilde{A}^{bv}, L^\infty(\partial\Omega) \text{ da ve } A \text{ yı tek türlü belirler} \right\}$$

kümesini tanımlayalım.

Bu kısmın temel sonucu Karaev'in (Karaev, 2008) makalesindeki Teorem 2.1 i temelde genelleştirmektedir.

Teorem 4.19. $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ bir Ω kümesinde üretici çekirdekli Hilbert uzay ve $\partial\Omega$ üzerinde hemen hemen her yerde $\widetilde{A}^{bv}, \widetilde{B}^{bv}, \widetilde{C}^{bv}, \widetilde{D}^{bv} \in L^\infty(\partial\Omega)$, $B \in \mathcal{A}_{\mathcal{H}}^0$ ve $\widetilde{B}^{bv} \neq \widetilde{C}^{bv}$

ile $A, B, C, D \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ olsun. Eğer (4.8) denklemi $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^u$ üzerinde çözülebilir, yani, (4.8) denklemini sağlayan $T \in \mathcal{A}_{\mathcal{H}}^u$ mevcut ise

(a) Eğer $\tilde{A}^{bv} = 0$ ise, $\frac{\tilde{D}^{bv}}{(B-C)^{\sim_{bv}}} \in L^\infty(\partial\Omega)$;

(b) Eğer $\partial\Omega$ üzerinde hemen hemen her yerde eğer $\tilde{A}^{bv} \neq 0$ ise $((B-C)^{\sim_{bv}})^2 + 4\tilde{A}^{bv}\tilde{D}^{bv} = 0$ dir.

İspat.

$$TAT + TB - CT - D = 0$$

olacak şekilde $T \in \mathcal{A}_{\mathcal{H}}^u$ mevcut olduğunu kabul edelim. Burada; A, B, C, D operatörleri teoremin hipotezlerini sağlasın. O zaman her $\lambda \in \Omega$ için,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (TAT + TB - CT - D)\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, \hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \rangle \\ &= \langle TAT\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, \hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \rangle + \langle TB\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, \hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \rangle - \\ &\quad - \langle CT\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, \hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \rangle - \langle D\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, \hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \rangle \\ &= \langle AT\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, T^*\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \tilde{T}^*(\lambda)\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \rangle + \tilde{T}(\lambda) \langle AT\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, \hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \rangle + \\ &\quad + \langle T(B\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \tilde{B}(\lambda)\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}), \hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \rangle + \tilde{B}(\lambda)\tilde{T}(\lambda) - \\ &\quad - \langle C(T\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \tilde{T}(\lambda)\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}), \hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \rangle - \tilde{C}(\lambda)\tilde{T}(\lambda) - \tilde{D}(\lambda) \\ &= \langle AT\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, T^*\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \tilde{T}^*(\lambda)\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \rangle + \\ &\quad + \tilde{T}(\lambda) \left[\langle A(T\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \tilde{T}(\lambda)\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}), \hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \rangle + \tilde{T}(\lambda)\tilde{A}(\lambda) \right] + \\ &\quad + \langle B\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \tilde{B}(\lambda)\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, T^*\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \rangle + \tilde{B}(\lambda)\tilde{T}(\lambda) - \\ &\quad - \langle T\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \tilde{T}(\lambda)\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, C^*\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \rangle - \tilde{C}(\lambda)\tilde{T}(\lambda) - \tilde{D}(\lambda) \\ &= \left[\tilde{A}(\lambda) \left(\tilde{T}(\lambda) \right)^2 + \left(\tilde{B}(\lambda) - \tilde{C}(\lambda) \right) \tilde{T}(\lambda) - \tilde{D}(\lambda) \right] + \\ &\quad + \langle AT\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, T^*\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \tilde{T}^*(\lambda)\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \rangle + \tilde{T}(\lambda) \langle T\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \tilde{T}(\lambda)\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, A^*\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \rangle + \\ &\quad + \langle B\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \tilde{B}(\lambda)\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, T^*\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \rangle \end{aligned}$$

olup, $T \in \mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ ve $B \in \mathcal{A}_{\mathcal{H}}^0$ olduğundan;

$$\left| \tilde{A}(\lambda) \left(\tilde{T}(\lambda) \right)^2 + (B-C)^{\sim}(\lambda)\tilde{T}(\lambda) - \tilde{D}(\lambda) \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq \|AT\| \left\| T^* \widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \widetilde{T}^*(\lambda) \widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\|_{\mathcal{H}} + \|T\| \|A\| \left\| T \widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \widetilde{T}(\lambda) \widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\|_{\mathcal{H}} \\ &\quad + \|T\| \left\| B \widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \widetilde{B}(\lambda) \widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0, \lambda \rightarrow \partial\Omega \text{ iken} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan hemen hemen her $\xi \in \partial\Omega$ için

$$\widetilde{A}^{bv}(\xi) \left(\widetilde{T}^{bv}(\xi) \right)^2 + (B-C)^{\sim bv}(\xi) \widetilde{T}^{bv}(\xi) - \widetilde{D}^{bv}(\xi) = 0 \quad (4.9)$$

olur.

(a) Eğer; $\partial\Omega$ üzerinde hemen hemen her yerde $\widetilde{A}^{bv}(\xi) = 0$ ise, o zaman (4.9) denklemi

$$\widetilde{T}^{bv} = \frac{\widetilde{D}^{bv}}{(B-C)^{\sim bv}}$$

tek çözümüne sahiptir ve $\widetilde{T}^{bv} \in L^\infty(\partial\Omega)$ olduğundan $\frac{\widetilde{D}^{bv}}{(B-C)^{\sim bv}} \in L^\infty(\partial\Omega)$ dir.

(b) Eğer $\partial\Omega$ üzerinde hemen hemen her yerde $\widetilde{A}^{bv}(\xi) \neq 0$ ise, o zaman $\widetilde{T}^{bv}$ ifadesi T operatörünü tek olarak belirlediğinden (4.9) kuadratik denklemi sadece tek çözüme sahiptir. Bunun anlamı,

$$((B-C)^{\sim bv})^2 + 4\widetilde{A}^{bv}\widetilde{D}^{bv} = 0$$

dir. □

Teorem 4.19'nin ispatından, eğer (4.8) Riccati denklemi $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^u$ üzerinde çözülebilir ve $T \in \mathcal{A}_{\mathcal{H}}^u$ bir çözüm ise, o zaman T çözümü tektir ve

$$\widetilde{T}^{bv} = \begin{cases} \frac{\widetilde{D}^{bv}}{(B-C)^{\sim bv}}, & \text{eğer } \widetilde{A}^{bv} = 0 \\ \frac{(C-B)^{\sim bv}}{2\widetilde{A}^{bv}}, & \text{eğer } \partial\Omega \text{ de hemen hemen her yerde } \widetilde{A}^{bv} \neq 0 \end{cases}$$

dir.

Belli operatör sınıflarında Riccati operatör denkleminin çözülebilirliği operatör teorisinin ve onun uygulamalarının önemli bir problemidir. Örneğin, sabit $A \in \mathcal{B}(H)$ için (4.8) in bir özdeş olmayan çözümünün varlığı, $P \in \mathcal{B}(H)$ tüm ortogonal projektörlerinin $\mathcal{P}_H$ kümesi üzerinde $B = D = 0$ ve $C = A$ olması durumunda sonsuz boyutlu ayrılabilir H Hilbert uzayında ünlü invaryant altuzay probleminin çözümüne denktir. Burada özdeş

olmayan demek H üzerinde I_H birim operatörü için $0 \neq X \neq I_H$ demektir.

4.2.3. Sıfır operatör çarpımları

Hardy uzayı üzerinde sıfır operatör çarpımları

Aşağıdaki önermede H^2 Hardy uzayında sıfır Toeplitz çarpımları için iyi bilinen Douglas Yardımcı Teoremini (Douglas, 1973) veren $\mathcal{A}_1$ -sınıf operatörleri için sıfır çarpımları incelenmiştir.

Önerme 4.20. n bir tamsayı olmak üzere

$$(T_{\varphi_1} + H_1) \dots (T_{\varphi_n} + H_n) = 0$$

olacak şekilde, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \in L^\infty(\mathbb{T})$ ve $H_1, H_2, \dots, H_n \in \mathcal{F}_{H^2}$ olsun. O zaman $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n = 0$ dır.

İspat. $(T_{\varphi_1} + H_1) \dots (T_{\varphi_n} + H_n) = 0$ olduğundan, her $\lambda \in \mathbb{D}$ için

$$\begin{aligned} 0 &= [(T_{\varphi_1} + H_1) \dots (T_{\varphi_n} + H_n)]^\sim(\lambda) \\ &= \left\langle (T_{\varphi_1} + H_1) \dots (T_{\varphi_n} + H_n) \widehat{k}_{H^2, \lambda}, \widehat{k}_{H^2, \lambda} \right\rangle \end{aligned} \quad (4.10)$$

dir. $X_{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n}^{H_1, H_2, \dots, H_n}$

$$T_{\varphi_1}, \dots, T_{\varphi_n}, H_1, H_2, \dots, H_n$$

operatörlerinin çarpımlarının bir toplamı olmak üzere

$$(T_{\varphi_1} + H_1) \dots (T_{\varphi_n} + H_n) = T_{\varphi_1} T_{\varphi_2} \dots T_{\varphi_n} + X_{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n}^{H_1, H_2, \dots, H_n} + H_1 \dots H_n \quad (4.11)$$

olduğunu görmek kolaydır. Böyle her çarpım $H_1, H_2, \dots, H_n$ nin en az birine eşit bir çarpıma sahip ve herhangi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $H_i \in \mathcal{F}_{H^2}$ olduğundan, Yardımcı Teorem 4.15 den

$$\left| \widetilde{X}_{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n}^{H_1, H_2, \dots, H_n}(\lambda) \right| \rightarrow 0 \text{ radyal olarak,}$$

yani hemen hemen her $t \in [0, 2\pi)$ için

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \left| \frac{\widetilde{X}_{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n}(re^{it})}{H_1, H_2, \dots, H_n} \right| = 0 \quad (4.12)$$

dir. Her $\lambda \in \mathbb{D}$ için (4.10) ve (4.11) den

$$0 = (T_{\varphi_1} \dots T_{\varphi_n})^{\sim}(\lambda) + \widetilde{X}_{\varphi_1, \dots, \varphi_n, H_1, \dots, H_n}(\lambda) + (H_1 \dots H_n)^{\sim}(\lambda) \quad (4.13)$$

elde edilir. Diğer taraftan; her $\lambda \in \mathbb{D}$ için,

$$\begin{aligned} & (T_{\varphi_1} \dots T_{\varphi_n})^{\sim}(\lambda) \\ &= \left\langle T_{\varphi_1} \dots T_{\varphi_n} \widehat{k}_{H^2, \lambda}, \widehat{k}_{H^2, \lambda} \right\rangle = \left\langle T_{\varphi_2} \dots T_{\varphi_n} \widehat{k}_{H^2, \lambda}, T_{\overline{\varphi_1}} \widehat{k}_{H^2, \lambda} \right\rangle \\ &= \left\langle T_{\varphi_2} \dots T_{\varphi_n} \widehat{k}_{H^2, \lambda}, (T_{\overline{\varphi_1}} \widehat{k}_{H^2, \lambda} - \widetilde{\overline{\varphi_1}}(\lambda) \widehat{k}_{H^2, \lambda}) + \widetilde{\overline{\varphi_1}}(\lambda) \widehat{k}_{H^2, \lambda} \right\rangle \\ &= \left\langle T_{\varphi_2} \dots T_{\varphi_n} \widehat{k}_{H^2, \lambda}, T_{\overline{\varphi_1}} \widehat{k}_{H^2, \lambda} - \widetilde{\overline{\varphi_1}}(\lambda) \widehat{k}_{H^2, \lambda} \right\rangle \\ &+ \widetilde{\overline{\varphi_1}}(\lambda) \left\langle T_{\varphi_2} \dots T_{\varphi_n} \widehat{k}_{H^2, \lambda}, \widehat{k}_{H^2, \lambda} \right\rangle \\ &= A_{1, \lambda} + \widetilde{\overline{\varphi_1}}(\lambda) \left[\left\langle T_{\varphi_3} \dots T_{\varphi_n} \widehat{k}_{H^2, \lambda}, T_{\overline{\varphi_2}} \widehat{k}_{H^2, \lambda} - \widetilde{\overline{\varphi_2}}(\lambda) \widehat{k}_{H^2, \lambda} \right\rangle + \right. \\ &\quad \left. + \widetilde{\overline{\varphi_2}}(\lambda) \left\langle T_{\varphi_3} \dots T_{\varphi_n} \widehat{k}_{H^2, \lambda}, \widehat{k}_{H^2, \lambda} \right\rangle \right] \\ &= A_{1, \lambda} + \widetilde{\overline{\varphi_1}}(\lambda) A_{2, \lambda} + \\ &+ \widetilde{\overline{\varphi_1}}(\lambda) \widetilde{\overline{\varphi_2}}(\lambda) \left[A_{3, \lambda} + \widetilde{\overline{\varphi_3}}(\lambda) \left\langle T_{\varphi_4} \dots T_{\varphi_n} \widehat{k}_{H^2, \lambda}, \widehat{k}_{H^2, \lambda} \right\rangle \right] \\ &= A_{1, \lambda} + \widetilde{\overline{\varphi_1}}(\lambda) A_{2, \lambda} + \widetilde{\overline{\varphi_1}}(\lambda) \widetilde{\overline{\varphi_2}}(\lambda) A_{3, \lambda} \\ &+ \widetilde{\overline{\varphi_1}}(\lambda) \widetilde{\overline{\varphi_2}}(\lambda) \widetilde{\overline{\varphi_3}}(\lambda) \left\langle T_{\varphi_4} \dots T_{\varphi_n} \widehat{k}_{H^2, \lambda}, \widehat{k}_{H^2, \lambda} \right\rangle \\ &= \dots \\ &= A_{1, \lambda} + \widetilde{\overline{\varphi_1}}(\lambda) A_{2, \lambda} + \widetilde{\overline{\varphi_1}}(\lambda) \widetilde{\overline{\varphi_2}}(\lambda) A_{3, \lambda} + \widetilde{\overline{\varphi_1}}(\lambda) \widetilde{\overline{\varphi_2}}(\lambda) \widetilde{\overline{\varphi_3}}(\lambda) A_{4, \lambda} \\ &+ \dots + \widetilde{\overline{\varphi_1}}(\lambda) \widetilde{\overline{\varphi_2}}(\lambda) \widetilde{\overline{\varphi_3}}(\lambda) \dots \widetilde{\overline{\varphi_n}}(\lambda) \end{aligned}$$

dir. Burada,

$$A_{k, \lambda} := \left\langle T_{\varphi_{k+1}} \dots \varphi_n \widehat{k}_{H^2, \lambda}, T_{\overline{\varphi_k}} \widehat{k}_{H^2, \lambda} - \widetilde{\overline{\varphi_k}}(\lambda) \widehat{k}_{H^2, \lambda} \right\rangle, \quad k = 1, \dots, n-1$$

dir. Bu sebeple, her $\lambda \in \mathbb{D}$ için, (4.13) ten,

$$\begin{aligned} |\widetilde{\varphi}_1(\lambda) \dots \widetilde{\varphi}_n(\lambda)| &= |A_{1,\lambda} + \widetilde{\varphi}_1(\lambda)A_{2,\lambda} + \widetilde{\varphi}_1(\lambda)\widetilde{\varphi}_2(\lambda)A_{3,\lambda} + \dots + \widetilde{\varphi}_1(\lambda)\widetilde{\varphi}_2(\lambda)\dots\widetilde{\varphi}_{n-2}(\lambda)A_{n-1,\lambda} \\ &\quad + \widetilde{X}_{\varphi_1, \dots, \varphi_n}(\lambda) + (H_1 \dots H_n)^\sim(\lambda)| \end{aligned}$$

elde edilir.

$(H_1 \dots H_n)^\sim(\lambda) \rightarrow 0$ radyal olarak yakınsak olduğundan, (4.12) ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden,

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} |\widetilde{\varphi}_1(re^{it}) \dots \widetilde{\varphi}_n(re^{it})| = 0$$

olur ve bu sebeple hemen hemen her $t \in [0, 2\pi)$ için $\varphi_1(e^{it}) \dots \varphi_n(e^{it}) = 0$ dir. $\square$

Önerme 4.20 ($H_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ için) nin bir sonucu olarak aşağıdaki iyi bilinen Douglas Lemması elde edilmiştir.

Sonuç 4.21. $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in L^\infty(\mathbb{T})$ olsun. Eğer $T_{\varphi_1} \dots T_{\varphi_n} = 0$ ise o zaman $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n = 0$ dir.

H^2 Hardy uzayında, eğer $\bar{u}$ veya v holomorfik ise $T_u T_v = T_{uv}$ olduğunu hatırlatalım. Brown ve Halmos (1964) tarafından tersinin de doğru olduğu gösterilmiştir. Yani; eğer $T_u T_v = T_w$ ise, $\bar{u}$ veya v sembollerinden birisi holomorfik olmak zorundadır ve bu durumda $w = uv$ dir. Buradan; eğer $T_u T_v = 0$ ise, u veya v sembollerinden birisi sıfır olmak zorunda olduğu sonucuna kolayca varılabilir. Sonuçların diğer birçok ilginç uygulamaları vardır (Brown-Halmos teoreminin tarihi ve yeni Brown-Halmos tipli teoremler için Ahern ve Čučković (Ahern ve Čučković, 2001) bakınız).

Brown-Halmos sonucunun yeni ve daha basit ispatını veren Önerme 4.20 nin özel bir durumu olarak aşağıda verilmiştir.

Sonuç 4.22. $\mathbb{T}$ üzerinde hemen hemen her yerde $\psi(\xi) \neq 0$ için $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$ olsun. Eğer; $T_\varphi T_\psi = 0$ ise, o zaman $T_\varphi = 0$ dir.

Bergman uzayı üzerinde sıfır operatör çarpımları

Axler ve Zheng (1998) de $\mathcal{U}$ cebiri H^∞ tarafından üretilen $L^\infty(\mathbb{D})$ nin C^* -alt cebiri olarak tanımlamışlardır. $\mathcal{U}$ cebiri $\mathbb{D}$ üzerinde sınırlı harmonik fonksiyonların kümesi ile üretilen L^∞ un kapalı alt cebirine eşit olduğu iyi bilinen bir gerçektir ((Axler ve Zheng, 1998), Önerme 4.5).

Aynı zamanda, $L^\infty(\mathbb{D})$ da bir fonksiyonun onun Berezin sembolüne eşit olması için gerekli ve yeterli koşul onun bir harmonik olmasıdır ((Ahern vd., 1993); (Engliš, 1994)).

$P, L^2(\mathbb{D}, dA)$ den L_a^2 üzerine ortogonal projeksiyon olmak üzere $f \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ için f sembollü T_f Toeplitz operatörü $T_f g = P(fg)$ ile tanımlanan $L_a^2 = L_a^2(\mathbb{D})$ üzerinde bir operatördür.

Bir $f \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ fonksiyonunun $\tilde{f}$ Berezin sembolü L_a^2 üzerinde T_f Toeplitz operatörünün Berezin sembolü olacak şekilde tanımlanır. Diğer bir deyişle $\tilde{f} := \tilde{T}_f$ dir. $\langle T_f \hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \rangle = \langle P(f \hat{k}_\lambda), \hat{k}_\lambda \rangle = \langle f \hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \rangle$ olduğundan

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{D}} f(z) \left| \hat{k}_\lambda(z) \right|^2 dA(z)$$

formülü elde edilir.

$L^\infty(\mathbb{D}, dm)$ de bir fonksiyonun harmonik genişlemesi Hardy uzaylarının teorisinde rol oynadığı gibi $L^\infty(\partial\mathbb{D}, dA)$ da bir fonksiyonun Berezin dönüşümü Bergman uzaylarının teorisinde de aynı önemli rolü oynar (Zhu, 1990).

Aşağıdaki iki sonuç Axler ve Zheng den elde edilir ((Axler ve Zheng, 1998); Sonuç 3.4 ve Sonuç 3.7).

Yardımcı Teorem 4.23. *Eğer $u \in \mathcal{U}$ ise o zaman $\tilde{u} - u$ ifadesi $\mathbb{T}$ nin hemen hemen her noktasında teğetsel olmayan 0 limitine sahiptir.*

Yardımcı Teorem 4.24. *Eğer $u \in \mathcal{U}$ ise o zaman*

$$\lambda \rightarrow \left\| (T_u - u(\lambda)I) \hat{k}_{L_a^2, \lambda} \right\|_{L_a^2}$$

fonksiyonu $\mathbb{T}$ nin hemen hemen her noktasında teğetsel olmayan 0 limitine sahiptir.

Şimdi Önerme 4.20 nin ispatında kullanılan aynı argümanlar ve Yardımcı Teorem 4.23 ve 4.24 yi uygulayarak ispatsız olarak aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

Önerme 4.25. $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathcal{U}$ ve $T_{u_i}, i = 1, 2, \dots, n$, operatörü $L_a^2(\mathbb{D})$ Bergman uzayı üzerinde bir Toeplitz operatörü olsun. Eğer $T_{u_1}T_{u_2}\dots T_{u_n} = 0$ ise o zaman $\mathbb{T}$ nin hemen hemen her noktası için $u_1(\xi)u_2(\xi)\dots u_n(\xi) = 0$ dır. Burada $u_i(\xi)$ ifadesi Yardımcı Teorem 4.23 ile mevcut olan $\xi \in \mathbb{T}$ noktasında u nun teğetsel olmayan sınır değerini tanımlar.

Sonuç 4.26. g harmonik olmak üzere $f, g \in \mathcal{U}$ olsun. O zaman $L_a^2(\mathbb{D})$ üzerinde $T_fT_g = 0$ sadece bir özdeş çözüme sahiptir.

Özel durumda bu sonuç, aşağıdaki bilinen savın genelleştirmesi ((Ahern ve Čučković, 2001); Sonuç 2) ve kısmi olarak çözümüdür (Ahern ve Čučković, 2001).

Sav 4.27. g harmonik olmak üzere $f, g \in L^\infty(\mathbb{D})$ olsun. O zaman $L_a^2(\mathbb{D})$ üzerinde $T_fT_g = 0$ sadece bir özdeş çözüme sahiptir.

Hardy ve Bergman uzayları üzerinde sıfır Toeplitz çarpımları hakkında daha fazla bilgi için Ahern ve Čučković (Ahern ve Čučković, 2001), Aleman ve Vukotic (Aleman ve Vukotić, 2009), Čučković (Čučković, 2003) ve onların referanslarına bakılabilir.

4.2.4. Maksimal Berezin Kümesi

Herhangi $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ operatörü için $\tilde{W}_0(A)$ maksimal Berezin kümesi

$$\tilde{W}_0(A) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda = \lim_{\lambda_n \rightarrow \partial\Omega} \tilde{A}(\lambda_n) \text{ ve } \lim_{\lambda_n \rightarrow \partial\Omega} \left\| A\hat{k}_{\mathcal{H}, \lambda_n} \right\| = \|A\| \right. \\ \left. \text{olacak şekilde } \exists \{\lambda_n\} \subset \Omega \right\}$$

ile tanımlanır (Gürdal vd., 2015).

Aşağıda elde edilen önerme herhangi

$$\varphi \in H^{\infty, d} := \{f \in H^\infty : \text{pozitif ölçünün } \mathbb{T} \text{ nin bir altkümesi üzerinde } f = \|f\|_\infty\}$$

için (Gürdal vd., 2015) deki Teorem 1 i $\left(\{ \|T_\varphi\| \} \subset \widetilde{W}_0(T_\varphi)\right)$ anlamında geliştirmektedir.

Önerme 4.28. H^2 de herhangi bir T_φ Toeplitz operatörü için,

$$\widetilde{W}_0(T_\varphi) = \{\|\varphi\|_\infty\}$$

dir.

İspat. Yardımcı Teorem 3.13 den herhangi $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ için

$$\begin{aligned} \left\| T_\varphi \widehat{k}_{H^2, \lambda} - \widetilde{T}_\varphi(\lambda) \widehat{k}_{H^2, \lambda} \right\|^2 &= \left\| T_\varphi \widehat{k}_{H^2, \lambda} \right\|^2 - \left\| \widetilde{T}_\varphi(\lambda) \right\|^2 \\ &= \left\| T_\varphi \widehat{k}_{H^2, \lambda} \right\|^2 - |\widetilde{\varphi}(\lambda)|^2, \quad (\forall \lambda \in \mathbb{D}) \end{aligned}$$

dir. Radyal olarak $\left\| T_\varphi \widehat{k}_{H^2, \lambda} - \widetilde{T}_\varphi(\lambda) \widehat{k}_{H^2, \lambda} \right\| \rightarrow 0$ değerine yakınsak olduğundan (bkz Yardımcı Teorem 4.15)

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow 1^-} \left\| T_\varphi \widehat{k}_{H^2, \lambda} \right\| = \lim_{|\lambda| \rightarrow 1^-} |\widetilde{\varphi}(\lambda)|$$

olur. Bu da $\widetilde{W}_0(T_\varphi) = \{\|T_\varphi\|\} = \{\|\varphi\|_\infty\}$ anlamına gelir. İspat tamamlanır. $\square$

Önerme 4.28 in ispatında aynı argümanlar kullanılarak $\mathcal{A}_\mathcal{H}$ İngiliz cebri için de aşağıdaki önerme ispatlanabilir.

Önerme 4.29. Herhangi bir $T \in \mathcal{A}_\mathcal{H}$ için $\widetilde{W}_0(T) \subset \mathbb{T}_{\|T\|}$ ve $\widetilde{W}_0(T^*) \subset \mathbb{T}_{\|T\|}$ dir. Burada $\mathbb{T}_{\|T\|}$ merkezi 0 ve yarıçapı $\|T\|$ olan bir çemberi tanımlar.

4.2.5. Kompaktlık ve ilgili problemler

$H^\infty(\mathbb{D})$ Banach cebirinin maksimal ideal uzayı olan $\mathcal{M}$ kümesi H^∞ dan kompleks sayıların cismine çarpımsal lineer fonksiyonellerin kümesi olarak tanımlandığını hatırlatır.

latalım (Hoffman, 1962). Zayıf-yıldız topoloji ile $\mathcal{M}$ bir kompakt Hausdorff uzaydır. Eğer $z \in \mathbb{D}$ ise o zaman z de $f \mapsto f(z)$ nokta değeri $\mathcal{M}$ üzerinde bir çarpımsal lineer fonksiyoneldir. Böylece $\mathcal{M}$ nin bir elemanı olarak z yi ve $\mathcal{M}$ de bir altküme olarak $\mathbb{D}$ yi düşünebiliriz. Ünlü Carleson Corona Teoremi $\mathbb{D}$ nin $\mathcal{M}$ de yoğun olduğunu ifade etmektedir (Hoffman, 1962).

$\lambda \in \mathbb{D}$ için φ_λ

$$\varphi_\lambda(z) := \frac{\lambda - z}{1 - \bar{\lambda}z}$$

ile tanımlı $\mathbb{D}$ de bir Möbius dönüşümü olsun. Axler ve Zheng (Axler ve Zheng, 1998) den her $m \in \mathcal{M} \setminus \mathbb{D}$ için $u \circ \varphi_m$, $\mathbb{D}$ de harmonik olacak şekilde $u \in \mathcal{U}$ fonksiyonlarının kümesini parçalar üzerinde harmonik (HOP) olarak tanımlayalım.

$\mathbb{D}$ üzerinde her sınırlı harmonik fonksiyon HOP a aittir. Aynı zamanda $\overline{\mathbb{D}}$ de sürekli fonksiyonların uzayı olan $C(\overline{\mathbb{D}})$ deki her fonksiyon HOP a aittir (Axler ve Zheng, 1998).

Önerme 4.30. $j = 1, 2, \dots, n$ için $u_j \in U$ ve $T_{u_j} : L_a^2 \rightarrow L_a^2$ olmak üzere S nin $T_{u_1} \cdots T_{u_n}$ formundaki operatörlerin bir sonlu toplamı olduğunu kabul edelim.

a) Eğer $\tilde{S} \in HOP$ ve $A(S - T_{\tilde{S}}) = (S - T_{\tilde{S}})A$ için $A \in \mathcal{B}(L_a^2)$ ise o zaman A operatörü L_a^2 üzerinde bir özdeş olmayan hiperinvariant altuzaya sahiptir.

b) Eğer $\tilde{S} \in HOP$ ve $\tilde{S}$ $\partial\mathbb{D}$ üzerinde 0 limite sahip ise o zaman

$$S = \text{kompakt Toeplitz operatör} + \text{kompakt operatör}$$

gösterimine sahiptir.

İspat. Önermenin ispatı (Axler ve Zheng, 1998) deki Sonuç 3.12 ve ünlü Lomonosov'un teoreminden (Lomonosov, 2015) hemen elde edilir. Gerçekten eğer $\tilde{S} \in HOP$ ise o zaman (Axler ve Zheng, 1998) deki Sonuç 3.12 den $S - T_{\tilde{S}}$ bir kompakt operatördür ve Lomonosov'un sonucu uygulanarak a) kısmı ispatlanmış olur.

b) $\tilde{S}$, $\partial\mathbb{D}$ üzerinde sıfır olduğundan, Axler-Zheng'in teoreminden (Axler ve Zheng, 1998) $T_{\tilde{S}}$ nin L_a^2 üzerinde bir kompakt operatör olduğu söylenebilir. Aynı zamanda $\tilde{S} \in HOP$ olduğundan $S - T_{\tilde{S}}$ nin kompakt olduğunu ve $S - T_{\tilde{S}} = K$ ninde istenilen $S = T_{\tilde{S}} + K$

gösterimini verdiğini gözlemleyebiliriz. Burada $T_{\tilde{S}}, L_a^2$ üzerinde bir kompakt Toeplitz operatörüdür. $\square$

$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ uzayı bir Ω kümesi üzerinde standart üretici çekirdekli Hilbert uzay olsun.

$$\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^0 := \left\{ T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \lim_{\lambda \rightarrow \partial\Omega} \left(\|T\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}\|^2 - |\tilde{T}(\lambda)|^2 \right) = 0 \right\}$$

Engliş cebirini düşünelim. (Engliş, 1995) deki sayfa 186 daki (A1) in ispatında olduğu gibi $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^0$ nin bir norm-kapalı cebir olduğu kolayca ispatlanabilir. Aynı zamanda $\mathcal{A}_{\mathcal{H}} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{H}}^0$ olduğu açıktır. Burada $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ üçüncü bölümde tanımlanan bir Engliş cebiridir. Diğer taraftan $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^0$ cebiri $\mathcal{H}$ üzerindeki tüm kompakt operatörleri içerir.

Aşağıdaki teoremden $AB - C$ operatörünün kompaktlığını çalışacağız. Burada; A, B, C operatörleri $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^0$ ye ait ve $\mathcal{H}$ üzerindeki kompakt olmayan operatörlerdir.

Teorem 4.31. $A, B, C \in \mathcal{A}_{\mathcal{H}}^0$ olsun. O zaman $AB - C$ nin $\mathcal{H}$ üzerinde bir kompakt operatör olması için gerekli ve yeterli koşul tüm $\mathcal{H}$ üzerindeki üniter U operatörleri için

$$\lim_{\lambda \rightarrow \partial\Omega} \left[\left\langle U\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \tilde{U}(\lambda)\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, (AB - C)^* U\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle + |\tilde{U}(\lambda)|^2 (\tilde{A}(\lambda)\tilde{B}(\lambda) - \tilde{C}(\lambda)) \right] = 0$$

olmasıdır.

İspat. Yardımcı Teorem 3.8 i uygulayacağız. $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ üniter bir operatör olsun. $U^{-1}(AB - C)U$ nin Berezin sembolünü hesaplayalım:

$$\begin{aligned} & (U^{-1}(AB - C)U)^{\sim}(\lambda) \\ &= \left\langle ABU\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, U\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle - \left\langle CU\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, U\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle \\ &= \left\langle AB \left(U\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \tilde{U}(\lambda)\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right), U\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle + \tilde{U}(\lambda) \left\langle AB\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, U\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle \\ &\quad - \left\langle C \left(U\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \tilde{U}(\lambda)\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right), U\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle - \tilde{U}(\lambda) \left\langle C\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, U\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle \\ &= \left\langle AB \left(U\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \tilde{U}(\lambda)\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right), U\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle + \tilde{U}(\lambda) \left\langle A \left(B\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \tilde{B}(\lambda)\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right), U\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle \\ &\quad + \tilde{U}(\lambda)\tilde{B}(\lambda) \left\langle A\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, U\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle - \left\langle C \left(U\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \tilde{U}(\lambda)\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right), U\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle \\ &\quad - \tilde{U}(\lambda) \left\langle C\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \tilde{C}(\lambda)\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, U\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle - \tilde{U}(\lambda)\tilde{C}(\lambda) \left\langle \hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, U\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle \\ &= \left\langle AB(U\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \tilde{U}(\lambda)\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}), U\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \tilde{U}(\lambda) \left\langle A(\widehat{Bk}_{\mathcal{H},\lambda} - \tilde{B}(\lambda)\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}), U\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle + \\
& + \tilde{U}(\lambda)\tilde{B}(\lambda) \left\langle A\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \tilde{A}(\lambda)\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, U\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle + \\
& + \tilde{U}(\lambda)\tilde{B}(\lambda)\tilde{A}(\lambda) \left\langle \widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, U\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle \\
& - \left\langle C(U\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \tilde{U}(\lambda)\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}), U\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle - \\
& - \tilde{U}(\lambda) \left\langle C\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \tilde{C}(\lambda)\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, U\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle \\
& - \tilde{U}(\lambda)\tilde{C}(\lambda) \left\langle \widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, U\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle \\
& = \left\langle AB \left(U\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \tilde{U}(\lambda)\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right), U\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle + \\
& + \tilde{U}(\lambda) \left\langle A \left(B\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \tilde{B}(\lambda)\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right), U\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle + \\
& + \tilde{U}(\lambda)\tilde{B}(\lambda) \left\langle A\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \tilde{A}(\lambda)\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, U\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle + \\
& + \left| \tilde{U}(\lambda) \right|^2 \tilde{A}(\lambda)\tilde{B}(\lambda) - \left\langle C \left(U\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \tilde{U}(\lambda)\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right), U\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle - \\
& - \tilde{U}(\lambda) \left\langle C\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \tilde{C}(\lambda)\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, U\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle - \left| \tilde{U}(\lambda) \right|^2 \tilde{C}(\lambda)
\end{aligned}$$

dir. Böylece $\mathcal{H}$ üzerinde herhangi üniter U operatörü ve herhangi $\lambda \in \Omega$ için

$$\begin{aligned}
(U^{-1}(AB-C)U)^{\sim}(\lambda) &= \left\langle U\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \tilde{U}(\lambda)\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, (AB-C)^* U\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle + \\
&+ \left| \tilde{U}(\lambda) \right|^2 \left[\tilde{A}(\lambda)\tilde{B}(\lambda) - \tilde{C}(\lambda) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \tilde{U}(\lambda) \left\langle A \left(B\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \tilde{B}(\lambda)\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right), U\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle + \\
& + \tilde{U}(\lambda)\tilde{B}(\lambda) \left\langle A\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \tilde{A}(\lambda)\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, U\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle - \\
& - \tilde{U}(\lambda) \left\langle C\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \tilde{C}(\lambda)\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, U\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle
\end{aligned} \tag{4.14}$$

olur. Teoremin hipotezlerinden,

$$\left\| U\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \tilde{U}(\lambda)\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\| \leq 2$$

eşitsizliğinden ve Cauchy- Schwarz eşitsizliğini kullanarak (4.14) den

$$\lim_{\lambda \rightarrow \partial\Omega} (U^{-1}(AB-C)U)^{\sim}(\lambda) = 0$$

olması için gerekli ve yeterli koşulun

$$\lim_{\lambda \rightarrow \partial\Omega} \left[\left\langle U\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \widetilde{U}(\lambda)\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, (AB - C)^* U\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle + \left| \widetilde{U}(\lambda) \right|^2 (\widetilde{A}(\lambda)\widetilde{B}(\lambda) - \widetilde{C}(\lambda)) \right] = 0$$

olduğunu çıkarabiliriz. U keyfi olduğundan ve Yardımcı Teorem 3.8 den teoremin ispatı tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.32. *Eğer $AB - C$ kompakt ise o zaman*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \partial\Omega} (\widetilde{A}(\lambda)\widetilde{B}(\lambda) - \widetilde{C}(\lambda)) = 0$$

dır.

4.2.6. Asimptotik çarpımsallık ve Bergman uzayındaki yarı-komütatörlerin kompaktlığı

İlk olarak $nt\text{-}\lim_{\lambda \rightarrow \partial\mathbb{D}} a(\lambda)$ limitinin $a(\lambda)$ nın teğetsel olmayan limiti tanımlanacaktır. Berezin dönüşümünün harmonik fonksiyonların uzayında çarpımsal olmadığı iyi bilinmektedir. Bununla birlikte u, v fonksiyonlarının bazı çiftleri için $\lambda \rightarrow \partial\mathbb{D}$ iken $\widetilde{u}v(\lambda) - \widetilde{u}(\lambda)\widetilde{v}(\lambda) \rightarrow 0$ dır. Axler ve Zheng (1998) de, yazarlar bu yapılanlar için sınırlı harmonik fonksiyonlar tanımlamışlardır. Bunların ispatında Hankel operatörleri temel alınmıştır ((Axler ve Zheng, 1998); Yardımcı Teorem 4.1 ve Teorem 4.5).

Bu kısımda, u ve v nin daha genel durumları düşünülecek ve fonksiyonların Berezin dönüşümünün asimptotik çarpımsallığı için gerekli ve yeterli koşullar verilecektir. Özel durumda $\mathcal{U}$ daki sembolleri ile tanımlanan Toeplitz operatörleri Bergman uzayı için aşağıdaki Axler-Chang-Sarason-Volberg tipi teoremi (Axler vd., 1978; Volberg, 1982) ispatlayacağız.

Teorem 4.33. $u, v \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ ve T_u, T_v, T_{uv} operatörleri L_a^2 uzayında karşılık gelen Toeplitz operatörler olsun. Böylece,

(a) $\lim_{\lambda \rightarrow \partial\mathbb{D}} (\widetilde{u}v(\lambda) - \widetilde{u}(\lambda)\widetilde{v}(\lambda)) = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\lim_{\lambda \rightarrow \partial\mathbb{D}} \left[(T_{uv} - T_u T_v)(\lambda) + \left\langle T_{v-\widetilde{v}(\lambda)} \widehat{k}_{L_a^2, \lambda}, T_{\widetilde{u}} \widehat{k}_{L_a^2, \lambda} \right\rangle \right] = 0$$

olmasıdır.

(b) Eğer $u, v \in \mathcal{U}$ ise o zaman

(b₁) $\lim_{\lambda \rightarrow \partial \mathbb{D}} (\tilde{u}v(\lambda) - \tilde{u}(\lambda)\tilde{v}(\lambda)) = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul $T_{uv} - T_u T_v$ nin L_a^2 de kompakt olmasıdır.

(b₂) $\lim_{\lambda \rightarrow \partial \mathbb{D}} (\tilde{u}v(\lambda) - \tilde{u}(\lambda)\tilde{v}(\lambda)) = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul $T_{uv} - T_v T_u$ nin L_a^2 da kompakt olmasıdır.

İspat. Her $u, v \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ için

$$\begin{aligned}
(T_{uv} - T_u T_v)^\sim(\lambda) &= \widetilde{T_{uv}}(\lambda) - \widetilde{T_u T_v}(\lambda) \\
&= \left\langle T_{uv} \widehat{k}_{L_a^2, \lambda}, \widehat{k}_{L_a^2, \lambda} \right\rangle - \left\langle T_u T_v \widehat{k}_{L_a^2, \lambda}, \widehat{k}_{L_a^2, \lambda} \right\rangle \\
&= \left\langle T_{uv} \widehat{k}_{L_a^2, \lambda} - \widetilde{T_{uv}}(\lambda) \widehat{k}_{L_a^2, \lambda}, \widehat{k}_{L_a^2, \lambda} \right\rangle + \\
&\quad + \left\langle \widetilde{T_{uv}}(\lambda) \widehat{k}_{L_a^2, \lambda}, \widehat{k}_{L_a^2, \lambda} \right\rangle - \left\langle T_v \widehat{k}_{L_a^2, \lambda} - \widetilde{T_v}(\lambda) \widehat{k}_{L_a^2, \lambda}, T_u \widehat{k}_{L_a^2, \lambda} \right\rangle - \\
&\quad - \left\langle \widetilde{T_v}(\lambda) \widehat{k}_{L_a^2, \lambda}, T_u \widehat{k}_{L_a^2, \lambda} \right\rangle \\
&= \tilde{u}v(\lambda) - \tilde{u}(\lambda)\tilde{v}(\lambda) - \left\langle T_{v-\tilde{v}(\lambda)} \widehat{k}_{L_a^2, \lambda}, T_u \widehat{k}_{L_a^2, \lambda} \right\rangle
\end{aligned}$$

dır ve böylece her $\lambda \in \mathbb{D}$ için

$$\tilde{u}v(\lambda) - \tilde{u}(\lambda)\tilde{v}(\lambda) = (T_{uv} - T_u T_v)^\sim(\lambda) + \left\langle T_{v-\tilde{v}(\lambda)} \widehat{k}_{L_a^2, \lambda}, T_u \widehat{k}_{L_a^2, \lambda} \right\rangle \quad (4.15)$$

olur ki bu da (a) yı ifade etmektedir.

(b₁) $u, v \in \mathcal{U}$ ve $\mathcal{U}$ bir cebir olduğundan, $uv \in \mathcal{U}$ ve $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathcal{U}$ dir. Diğer taraftan, Axler ve Zheng (1998) deki Sonuç 3.7 nin ispatındaki aynı argümanları kullanarak $\lambda \mapsto \left\| T_{v-\tilde{v}(\lambda)} \widehat{k}_{L_a^2, \lambda} \right\|_2$ fonksiyonunun $\partial \mathbb{D}$ nin hemen hemen her noktasında teğetsel olmayan limit 0 a sahip olduğunu görmek kolaydır. Buradan her $\lambda \in \mathbb{D}$ için

$$\begin{aligned}
\left\| (v - \tilde{v}(\lambda)) \widehat{k}_{L_a^2, \lambda} \right\|_2^2 &= \int_{\mathbb{D}} |v(z) - \tilde{v}(\lambda)|^2 \left| \widehat{k}_{L_a^2, \lambda}(z) \right|^2 dA(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \left(|v(z)|^2 - 2 \operatorname{Re}(\overline{\tilde{v}(\lambda)}) v(z) + |\tilde{v}(\lambda)|^2 \right) \left| \widehat{k}_{L_a^2, \lambda}(z) \right|^2 dA(z) \\
&= |\tilde{v}|^2(\lambda) - 2 \operatorname{Re}(\overline{\tilde{v}(\lambda)}) \tilde{v}(\lambda) + |\tilde{v}(\lambda)|^2
\end{aligned}$$

belirtmek yeterli olacaktır. Bu sebeple, Axler ve Zheng (1998) deki Sonuç 3.7 nin ispatındaki aynı argümanları kullanarak $\lambda \rightarrow \left\| (v - \tilde{v}(\lambda)) \widehat{k}_{L_a^2, \lambda} \right\|_2$ fonksiyonunun $\mathcal{U}$ ya

ait olduğunu ve $\partial\mathbb{D}$ da hemen hemen her yerde teğetsel olmayan limitinin 0 olduğunu söyleyebiliriz. Sonuç olarak $\partial\mathbb{D}$ da hemen hemen her yerde

$$\left| \left\langle T_{v-\tilde{v}(\lambda)} \widehat{k}_{L_a^2, \lambda}, T_{\tilde{u}} \widehat{k}_{L_a^2, \lambda} \right\rangle \right| \leq \|T_u\| \left\| T_{v-\tilde{v}(\lambda)} \widehat{k}_{L_a^2, \lambda} \right\|_2 \rightarrow 0$$

teğetsel olmayan yakınsaktır. (4.15) den $\partial\mathbb{D}$ de hemen hemen her yerde

$$nt-\lim_{\lambda \rightarrow \partial\mathbb{D}} (\tilde{u}v(\lambda) - \tilde{u}(\lambda)\tilde{v}(\lambda)) = 0$$

olması için gerekli ve yeterli koşul $\partial\mathbb{D}$ de hemen hemen her yerde

$$nt-\lim_{\lambda \rightarrow \partial\mathbb{D}} (T_{uv} - T_u T_v)^\sim(\lambda) = 0$$

olmasıdır. (b₁) in ispatını tamamlamak için son koşulun L_a^2 da $T_{uv} - T_u T_v$ nin kompaktlığına denk oluşunu göstermek yeterlidir (Axler ve Zheng, 1998; Teorem 2.2.). (b₂) nin ispatı aynıdır. $\square$

Benzer argümanlarla (Ahern ve Cuckovic, 2001) deki Sonuç 3 ün genelleştirmesi olan aşağıdaki sonucu ispatlayabiliriz.

Önerme 4.34. *Eğer $T_f T_g = T_f T_h$ ve f özdeş olarak 0 olmayacak şekilde $f, g, h \in \mathcal{U}$ ise o zaman $g = h$ dir.*

İspat. $T_f T_g = T_f T_h$ olduğundan her $\lambda \in \mathbb{D}$ için $(T_f T_g - T_f T_h)^\sim(\lambda) = 0$ olur. Bu sebeple önceki ispatlarda olduğu gibi

$$(g - h)^\sim(\lambda) \tilde{f}(\lambda) = \left\langle T_{h-g-(h-g)^\sim(\lambda)} \widehat{k}_{L_a^2, \lambda}, T_{\tilde{f}} \widehat{k}_{L_a^2, \lambda} \right\rangle, \lambda \in \mathbb{D}$$

dır. Teorem 4.33 (b) nin ispatında olduğu gibi $\partial\mathbb{D}$ üzerinde hemen hemen her yerde

$$\left\langle T_{h-g-(h-g)^\sim(\lambda)} \widehat{k}_{L_a^2, \lambda}, T_{\tilde{f}} \widehat{k}_{L_a^2, \lambda} \right\rangle \rightarrow 0$$

teğetsel olmayan yakınsak olduğundan $\partial\mathbb{D}$ üzerinde hemen hemen her yerde

$$(g - h)(\xi) f(\xi) = (g - h)^\sim(\xi) \tilde{f}(\xi) = 0$$

sonucunu elde edebiliriz (çünkü eğer $u \in \mathcal{U}$ ise o zaman hemen hemen her $\xi \in \partial\mathbb{D}$ için $\tilde{u}(\xi) = u(\xi)$ dir (Axler ve Zheng, 1998). Kabulümüzden f özdeş olarak 0 değil ve böylece $\partial\mathbb{D}$ de hemen hemen her yerde $f(\xi) \neq 0$ dır. O zaman hemen hemen her $\xi \in \partial\mathbb{D}$ için $(g - h)(\xi) = 0$ olur. $g - h \in \mathcal{U}$ ve $\mathcal{U}, H^\infty$ tarafından üretilen $L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ daki C^* -cebiri olduğundan ve Riesz kardeşler teoremini kullanarak her $z \in \mathbb{D}$ için $(g - h)(z) = 0$ olduğunu gösterebiliriz. Bu da ispatı tamamlar. $\square$

Aynı zamanda Teorem 4.33 aşağıdaki gibi yeniden formülize edilebilir. Burada her sınırlı harmonik fonksiyon $\mathcal{U}$, C^* -cebirinde olduğundan aşağıdaki teorem Axler ve Zheng (1998) deki Teorem 4.5 in sonucunu geliştirmektedir.

Teorem 4.35. $u, v \in \mathcal{U}$ olsun. O zaman $\lim_{\lambda \rightarrow \partial\mathbb{D}} (\tilde{u}v(\lambda) - \tilde{u}(\lambda)\tilde{v}(\lambda)) = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul $2T_{uv} - T_uT_v - T_vT_u$ nin $L_a^2(\mathbb{D})$ Bergman uzayında bir kompakt operatör olmasıdır.

İspat.

$$(2T_{uv} - T_uT_v - T_vT_u)^\sim(\lambda) = (T_{uv} - T_uT_v)^\sim(\lambda) + (T_{uv} - T_vT_u)^\sim(\lambda),$$

olduğundan ve (4.15) den her $\lambda \in \mathbb{D}$ için

$$\begin{aligned} \tilde{u}v(\lambda) - \tilde{u}(\lambda)\tilde{v}(\lambda) &= \frac{1}{2} (2T_{uv} - T_uT_v - T_vT_u)^\sim(\lambda) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\left\langle T_{v-\tilde{v}(\lambda)} \hat{k}_{L_a^2, \lambda}, T_u \hat{k}_{L_a^2, \lambda} \right\rangle + \left\langle T_{u-\tilde{u}(\lambda)} \hat{k}_{L_a^2, \lambda}, T_v \hat{k}_{L_a^2, \lambda} \right\rangle \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan Teorem 4.33 (b) nin ispatında olduğu gibi Axler ve Zheng (1998) deki Sonuç 3.7 nin argümanlarını uygulayarak $\mathbb{T}$ de hemen hemen her yerde $(\tilde{u}v(\lambda) - \tilde{u}(\lambda)\tilde{v}(\lambda)) \rightarrow 0$ nin teğetsel olmayan yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşulun $\mathbb{T}$ de hemen her yerde $(2T_{uv} - T_uT_v - T_vT_u)^\sim(\lambda) \rightarrow 0$ nin teğetsel olmayan yakınsak olması şeklinde elde edilir. Burada Axler ve Zheng (1998) deki Teorem 2.2 den son iddianın $2T_{uv} - T_uT_v - T_vT_u$ nun kompaktlığına denk olduğunu hatırlatmak gerekmektedir. $\square$

V cebirini $\lambda \mapsto \left\| T_{v-\tilde{v}(\lambda)} \hat{k}_{L_a^2, \lambda} \right\|_2$ fonksiyonu $\partial\mathbb{D}$ üzerinde hemen hemen her yerde teğetsel olmayan limiti 0 a sahip olacak şekilde tüm $v \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ fonksiyonlarını

içeren $L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ un alt cebiri olarak tanımlayalım.

Teorem 4.33 ve Teorem 4.35 nin ispatlarından onların daha genel durumlarda ispatlanabilirliğini görmek zor değildir.

Teorem 4.36. *Eğer $u, v \in V$ ise o zaman $\lim_{\lambda \rightarrow \partial\mathbb{D}} (u\tilde{v}(\lambda) - \tilde{u}(\lambda)\tilde{v}(\lambda)) = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul L_a^2 üzerinde $T_{uv} - T_u T_v$ nun kompakt olmasıdır.*

Teorem 4.37. *$u, v \in V$ olsun. O zaman $\lim_{\lambda \rightarrow \partial\mathbb{D}} (u\tilde{v}(\lambda) - \tilde{u}(\lambda)\tilde{v}(\lambda)) = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul L_a^2 üzerinde $2T_{uv} - T_u T_v - T_v T_u$ nun bir kompakt operatör olmasıdır.*

4.3. Operatörlerin genelleştirilmiş özdeğerleri ve genelleştirilmiş özvektörleri üzerine bazı uyarılar

X bir Banach uzayı ve $T \in \mathcal{B}(X)$ olsun. Eğer

$$TA = \lambda AT$$

olacak şekilde sıfır olmayan $A \in \mathcal{B}(X)$ operatörü mevcut ise λ kompleks sayısına T için genelleştirilmiş özdeğeri denir.

Böyle bir operatör λ genelleştirilmiş özdeğerine karşılık gelen T için genelleştirilmiş özvektör veya genelleştirilmiş özoperatör adını alır. λ genelleştirilmiş özdeğerine karşılık gelen T için genelleştirilmiş özvektörlerin kümesi

$$\{T\}'_\lambda := \{A \in \mathcal{B}(X) : TA = \lambda AT\}$$

ile tanımlanmaktadır. T nin tüm genelleştirilmiş özdeğerlerinin kümesi $\text{ext}(T)$ ile gösterilmektedir. genelleştirilmiş özvektörlerin kümesi $\text{Ext}(T)$ ile tanımlanmaktadır.

Özellikle 1970'lerde (Lomonosov, 2015), (Brown, 1979) ve (Kim vd., 1979) çalışmaları esnasında invariant altuzayların çalışmaları süresinde genelleştirilmiş özdeğer ve genelleştirilmiş özvektör kavramları popüler olmuştur. (Malamud, 1995), (Malamud,

1998) de Malamud'un makalelerinden başlayarak, bu kavramlar hem invaryant alt uzaylar bağlamında (Lacruz, 2015) ve (Lambert, 2004) hem de Biswas vd. (Biswas vd., 2002), Lacruz vd. (Lacruz vd., 2015), Domanov ve Malamud (Yu Domanov ve Malamud, 2009), Karaev (Karaev, 2006), Bourdan ve Shapiro (Bourdon ve Shapiro, 2008), Lauric (Lauric, 2015) ve Cassier ve Alkanjo (Cassier ve Alkanjo, 2014) nun yayınlarında operatörlerin bazı özel sınıfları için genelleştirilmiş özdeğerler ve genelleştirilmiş özvektörlerdeki çalışmalarında kayda değer biçimde ele alınmıştır. Genelde I operatörü X de birim operatör olmak üzere $IT = TI$ olduğundan $1 \in \text{ext}(T)$ dir. Aynı zamanda H^2 Hardy uzayı üzerinde T_φ , $\varphi \in H^\infty$, analitik Toeplitz operatörlerinin genelleştirilmiş özdeğerleri Deddens (Deddens, 1978), Bourdon ve Shapiro (Bourdon ve Shapiro, 2008), Alkanjo (Alkanjo, 2013) ve Gürdal (Gürdal, 2009) tarafından incelenmiştir.

Eğer φ tüm değerleri sıfır olmayan sabit bir fonksiyon ise o zaman $\text{ext}(T_\varphi) = \mathbb{C}$ dir. Bu sebeple φ nin sabit olmadığını kabul edeceğiz. Böylece 0 asla bir genelleştirilmiş özdeğer olmayacak şekilde T_φ bire-birdir. Ayrıca her sabit olmayan $\varphi \in H^\infty$ için

$$\text{ext}(T_\varphi) \subset \{z : |z| \geq 1\}$$

vardır (Bourdon ve Shapiro, 2008; Deddens, 1978).

Bu kısımda özellikle H^2 Hardy uzayındaki T_φ Toeplitz operatörleri olmak üzere İngiliz cebirlerindeki operatörleri düşünülmüştür. Komutantlık ve genelleştirilmiş özdeğerler ve genelleştirilmiş özvektörler için bazı sonuçlar ispatlanmıştır.

Önerme 4.38. $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$, Ω birim diski üzerinde bir üretici çekirdekli Hilbert uzayı ve $\mathcal{H}$ deki tüm çarpanların kümesi $\text{Mult}(\mathcal{H})$ olsun. $\varphi \in \text{Mult}(\mathcal{H})$ sabit olmayan bir fonksiyon ve M_φ ise $\mathcal{H}$ de birleşme özelliğine sahip çarpım operatörü ve $M_\varphi f := \varphi f$ olsun. O zaman $\{M_\varphi\}'$, M_φ nin komutanti olmak üzere

$$\{M_\varphi\}' = \left\{ A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \left\langle \varphi - \varphi(\lambda) \widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, A^* \widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle = 0 \text{ her } \lambda \in \Omega \text{ için} \right\}$$

dir.

İspat. Kapalı grafik teoreminden M_φ $\mathcal{H}$ de bir sınırlı operatördür. $AM_\varphi = M_\varphi A$ olsun. O

zaman açıkca her $\lambda \in \Omega$ için $\widetilde{AM_\varphi}(\lambda) = \widetilde{M_\varphi A}(\lambda)$ ve $M_\varphi^* k_{\mathcal{H},\lambda} = \overline{\varphi(\lambda)} k_{\mathcal{H},\lambda}$ ele alınırsa

$$\begin{aligned} & \left\langle A \left(M_\varphi \widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \varphi(\lambda) \widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right), \widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle + \varphi(\lambda) \widetilde{A}(\lambda) \\ &= \left\langle M_\varphi A \widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, \widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle = \left\langle A \widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, M_\varphi^* \widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle \\ &= \left\langle A \widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, \overline{\varphi(\lambda)} \widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle = \varphi(\lambda) \widetilde{A}(\lambda) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\left\langle A \left(M_\varphi \widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \varphi(\lambda) \widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right), \widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle = 0$$

veya denk olarak her $\lambda \in \Omega$ için $\left\langle (\varphi - \varphi(\lambda)) \widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, A^* \widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle = 0$ ifadesi bulunur. Bu da ispatı tamamlar. $\square$

Görünüş olarak aşağıdaki sonuç bilinen bir gerçektir fakat burada yeni bir ispat verilecektir.

Önerme 4.39. $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, T_φ operatörü H^2 de bir Toeplitz operatörü ve $h \in H^\infty$ olsun. O zaman $T_h \in \{T_\varphi\}'$ olması için gerekli ve yeterli koşul $\varphi \in H^\infty$ olmasıdır.

İspat. Önceki önermenin ispatında olduğu gibi Berezin sembollerini kullanarak

$$T_\varphi T_h = T_h T_\varphi$$

olması için gerekli ve yeterli koşulun

$$\left\langle T_\varphi \widehat{k}_{H^2,\lambda} - \widetilde{\varphi}(\lambda) \widehat{k}_{H^2,\lambda}, \overline{h(\lambda)} \widehat{k}_{H^2,\lambda} \right\rangle = \left\langle T_h \widehat{k}_{H^2,\lambda}, T_\varphi \widehat{k}_{H^2,\lambda} - \overline{\widetilde{\varphi}(\lambda)} \widehat{k}_{H^2,\lambda} \right\rangle$$

olduğu elde edilmektedir. Bu sebeple her $\lambda \in \mathbb{D}$ için

$$h(\lambda) \left\langle T_\varphi \widehat{k}_{H^2,\lambda} - \widetilde{\varphi}(\lambda) \widehat{k}_{H^2,\lambda}, \widehat{k}_{H^2,\lambda} \right\rangle = \left\langle T_h \widehat{k}_{H^2,\lambda}, T_\varphi \widehat{k}_{H^2,\lambda} - \overline{\widetilde{\varphi}(\lambda)} \widehat{k}_{H^2,\lambda} \right\rangle$$

dir. Her $\lambda \in \mathbb{D}$ için $\left\langle T_\varphi \widehat{k}_{H^2,\lambda} - \widetilde{\varphi}(\lambda) \widehat{k}_{H^2,\lambda}, \widehat{k}_{H^2,\lambda} \right\rangle = 0$ olduğundan, her $\lambda \in \mathbb{D}$ için $T_\varphi T_h = T_h T_\varphi$ olması için gerekli ve yeterli koşul $\left\langle T_h \widehat{k}_{H^2,\lambda}, T_\varphi \widehat{k}_{H^2,\lambda} - \overline{\widetilde{\varphi}(\lambda)} \widehat{k}_{H^2,\lambda} \right\rangle = 0$

olması sonucuna ulaşılmaktadır. Veya denk bir ifade olarak her $\lambda \in \mathbb{D}$ için

$$0 = \left\langle \widehat{k}_{H^2, \lambda}, T_{\overline{h\varphi}} \widehat{k}_{H^2, \lambda} - \overline{\widetilde{\varphi}(\lambda)h(\lambda)} \widehat{k}_{H^2, \lambda} \right\rangle = \left\langle \widehat{k}_{H^2, \lambda}, T_{\overline{h\varphi}} \widehat{k}_{H^2, \lambda} - \overline{(\widetilde{\varphi}h)(\lambda)} \widehat{k}_{H^2, \lambda} \right\rangle$$

olur. Böylece $T_\varphi T_h = T_h T_\varphi$ olması için gerekli ve yeterli koşul her $\lambda \in \mathbb{D}$ için

$$\left\langle \widehat{k}_{H^2, \lambda}, T_{\overline{h\varphi}} \widehat{k}_{H^2, \lambda} - \overline{(\widetilde{\varphi}h)(\lambda)} \widehat{k}_{H^2, \lambda} \right\rangle = 0 \quad (4.16)$$

olmasıdır. Diğer taraftan genelde

$$\left\langle \widehat{k}_{H^2, \lambda}, T_{\overline{h\varphi}} \widehat{k}_{H^2, \lambda} - \overline{\widetilde{h\varphi}(\lambda)} \widehat{k}_{H^2, \lambda} \right\rangle = 0,$$

veya denk olarak her $\lambda \in \mathbb{D}$ için

$$\left\langle \widehat{k}_{H^2, \lambda}, T_{\overline{h\varphi}} \widehat{k}_{H^2, \lambda} - \overline{\widetilde{h\varphi}(\lambda)} \widehat{k}_{H^2, \lambda} \right\rangle = 0 \quad (4.17)$$

mevcuttur. Buradan (4.16) ve (4.17) birleştirilerek $T_\varphi T_h = T_h T_\varphi$ olması için gerekli ve yeterli koşulun $\widetilde{\varphi}h = \widetilde{h\varphi}$ olması olduğu bulunur. $\square$

$\widetilde{\varphi}$, h ve $\widetilde{h\varphi}$, $\mathbb{D}$ üzerinde harmonik fonksiyonlar olduğundan, $\widetilde{\varphi}h = \widetilde{h\varphi}$ eşitliğinden ve Axler ve Zheng (1998) deki Yardımcı Teorem 4.2 den φ fonksiyonu $\mathbb{D}$ üzerinde analitiktir. Bu da $\varphi \in H^\infty$ olduğunu gösterir.

Uyarı 4.40. $T_\varphi T_h = T_h T_\varphi$ olması için gerekli ve yeterli koşulun $\widetilde{\varphi}h = \widetilde{h\varphi}$ olduğu aşağıdaki gibi daha kolay yolla ispatlanabilir.

Her $\lambda \in \mathbb{D}$ için

$$\begin{aligned} T_\varphi T_h = T_h T_\varphi &\iff \widetilde{T_h T_\varphi}(\lambda) = \widetilde{T_\varphi T_h}(\lambda), \forall \lambda \\ &\iff h(\lambda) \widetilde{\varphi}(\lambda) = \widetilde{T_{\varphi h}}(\lambda) \iff h(\lambda) \widetilde{\varphi}(\lambda) = \widetilde{\varphi h}(\lambda) \end{aligned}$$

olmasıdır.

Uyarı 4.41. Uyarı 4.40 ta, operatörlerin Berezin sembolleri için $A = B$ olması için gerekli ve yeterli koşul $\widetilde{A} = \widetilde{B}$ ile tanımlı teklik teoremi kullanılmasıdır (Zhu, 1990). Bu

teklik teoremi kullanılarak H^2 Hardy uzayında Toeplitz operatörlerinin, H^2 üzerindeki bir A operatörünün klasik karakterizasyondan oldukça farklı olan yeni bir karakterizasyonu Berezin sembolleri ile verilir: H^2 de bir A operatörünün Toeplitz operatör olması için gerekli ve yeterli koşul $S^*AS = A$ olmasıdır. Burada S operatörü $Sf(z) = zf(z)$ ile tanımlanan H^2 de tanımlı üniter kaydırma operatörüdür (Halmos, 1982).

Önerme 4.42. $\mathcal{B}(H^2)$ de bir A operatörünün Toeplitz operatör olması için gerekli ve yeterli koşul onun Berezin sembolü $\tilde{A}$ nın $\mathbb{D}$ üzerinde bir harmonik fonksiyon olmasıdır.

İspat. Eğer bazı φ sembolü için $A = T_\varphi$ ise o zaman "Eğer $\varphi \in L^\infty$ ise $\tilde{T}_\varphi = \tilde{\varphi}$, yani T_φ Toeplitz operatörünün Berezin sembolü onun φ sembolünün $\tilde{\varphi}$ harmonik genişlemesine eşittir (Engliš, 1995)" ifadesinden $\mathbb{D}$ üzerinde $\tilde{A} = \tilde{\varphi}$ harmoniktir. Tersine eğer $\mathbb{D}$ de $\tilde{A}$ harmonik ise o zaman $\tilde{A}$ harmonik sembolü $T_{\tilde{A}}$ Toeplitz operatörü her $\lambda \in \mathbb{D}$ için

$$\tilde{T}_A(\lambda) = \tilde{A}(\lambda)$$

eşitliğini sağlar. Bu ise Berezin sembolü için üstteki birim teoreminden $A = T_{\tilde{A}}$ eşitliğini verir. $\square$

Şüphesiz Bergman uzayı için benzer sonuç sadece aşağıdaki formda doğrudur: Eğer L_2^a uzayında bir A operatörü $\tilde{A}$ harmonik Berezin sembolüne sahip ise o zaman $A = T_{\tilde{A}}$ dir.

Üretici çekirdekli $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbb{D})$ Hilbert uzayında herhangi bir $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}(\mathbb{D}))$ operatörü için eğer bu radyal limitler $\mathbb{T}$ birim çemberi üzerinde hemen hemen her yerde mevcut ve $\tilde{T}^{rad} \in L^\infty(\mathbb{T})$ ise $\tilde{T}^{rad}(e^{it}) := \lim_{r \rightarrow 1^-} \tilde{T}(re^{it})$ tanımlayacağız.

Üretici çekirdekli $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbb{D})$ Hilbert uzayında herhangi bir $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ Engliš cebiri için

$$\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{H}}^{rad} := \left\{ T \in \mathcal{A}_{\mathcal{H}} : \tilde{T}^{rad} \neq 0 \text{ } \partial\mathbb{D} \text{ üzerinde hemen hemen her yerde} \right\}$$

kümesini verebiliriz.

Önerme 4.43. $T \in \tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{H}}^{rad}$ ve $\mu \neq 1$ bir kompleks sayı olsun. Eğer $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}(\mathbb{D}))$ ve $AT = \mu TA$ ise o zaman $\tilde{A}^{rad} = 0$ dır.

İspat. Önerme 4.42 ispatında olduğu gibi

$$\langle AT\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, \hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \rangle = \mu \langle TA\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, \hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \rangle$$

elde ederiz ve böylece her $\lambda \in \mathbb{D}$ için

$$\begin{aligned} (\mu - 1)\tilde{T}(\lambda)\tilde{A}(\lambda) &= \langle T\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \tilde{T}(\lambda)\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, A^*\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \rangle \\ &\quad - \mu \langle A\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, T^*\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \tilde{T}^*(\lambda)\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \rangle \end{aligned}$$

dir. Buradan $T \in \mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ gözönüne alınarak

$$\begin{aligned} |\mu - 1| |\tilde{T}(\lambda)| |\tilde{A}(\lambda)| &\leq \|A\| \|T\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \tilde{T}(\lambda)\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}\|_{\mathcal{H}} \\ &\quad + |\mu| \|A\| \|T^*\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \tilde{T}^*(\lambda)\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0, \text{ radyal olarak} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $\mu \neq 1$ ve $\tilde{T}^{rad} \neq 0$ dikkate alınarak $\tilde{A}^{rad} = 0$ olduğunu verir. $\square$

Sonuç 4.44. Eğer $\lambda \neq 1$ sayısı H^2 üzerinde T_{φ} analitik Toeplitz operatörünün bir genelleştirilmiş özdeğeri ise o zaman $\{T_{\varphi}\}'_{\lambda}$ ifadesi $\psi \in L^{\infty}(\mathbb{T})$ sembollü herhangi sıfır olmayan T_{ψ} Toeplitz operatörünü içermez.

Bir diğer benzer sonuç aşağıda T operatörünün genelleştirilmiş spektrumu yardımıyla formüle edilmiş ve T nin genelleştirilmiş özoperatörleri için bazı yapıları verilmiştir.

Sonuç 4.45. $\text{ext}(T) \subseteq \mathbb{D}$ olacak şekilde üretici çekirdekli $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbb{D})$ Hilbert uzayında $T \in \tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{H}}^{rad}$ bir operatör olsun. O zaman

$$\text{Ext}(T) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}) \setminus \tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{H}}^{rad}$$

dir.

İspat. $A \in \text{Ext}(T)$ olsun. Eğer $\tilde{A}^{rad} \partial\mathbb{D}$ üzerinde hemen hemen her yerde mevcut değil ise o zaman $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \setminus \tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{H}}^{rad}$ olur. Böylece herhangi $A \in \text{Ext}(T)$ için $\tilde{A}^{rad}$ nın mevcut olduğunu kabul edeceğiz.

Tersini kabul edelim. $B \notin \mathcal{B}(\mathcal{H}) \setminus \tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{H}}^{rad}$ olacak şekilde $B \in Ext(T)$ mevcut olsun, yani $\beta \in ext(T)$ için $BT = \beta TB$ ve $\partial\mathbb{D}$ üzerinde hemen hemen her yerde $\tilde{B}^{rad} \neq 0$ olsun. O zaman Berezin sembollerini alarak her $\lambda \in \mathbb{D}$ için

$$\begin{aligned} \tilde{T}(\lambda)\tilde{B}(\lambda) &= \beta\tilde{T}(\lambda)\tilde{B}(\lambda) + \\ &+ \beta \left\langle B\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, T^*\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \tilde{T}^*(\lambda)\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle - \left\langle T\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \tilde{T}(\lambda)\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, B^*\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \left| \tilde{T}(\lambda) \right| \left| \tilde{B}(\lambda) \right| &\leq |\beta| \left| \tilde{T}(\lambda) \right| \left| \tilde{B}(\lambda) \right| + |\beta| \|B\| \left\| T^*\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \tilde{T}^*(\lambda)\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\| \\ &+ \|B\| \left\| T\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} - \tilde{T}(\lambda)\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\| \end{aligned}$$

elde edilir ki $T \in \tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{H}}^{rad}$ olduğundan hemen hemen her $\xi \in \partial\mathbb{D}$ için

$$\left| \tilde{T}^{rad}(\xi) \right| \left| \tilde{B}^{rad}(\xi) \right| \leq |\beta| \left| \tilde{T}^{rad}(\xi) \right| \left| \tilde{B}^{rad}(\xi) \right|$$

dir. Hemen hemen her $\xi \in \partial\mathbb{D}$ için $\tilde{B}^{rad}(\xi) \neq 0$ olduğundan $|\beta| \geq 1$ olur ki $\beta \in \mathbb{D}$ ile çelişir. Bu ise ispatı tamamlar. $\square$

4.4. Üretici çekirdekler, Duhamel operatör ve invaryant altuzayların mevcudluğu

$Hol(\mathbb{D})$ uzayı $\mathbb{D}$ de tüm analitik fonksiyonların uzayı olsun. $Hol(\mathbb{D})$ uzayında Duhamel çarpımı $f, g \in Hol(\mathbb{D})$ için

$$(f \circledast g)(z) := \frac{d}{dz} \int_0^z f(z-t)g(t)dt = \int_0^z f'(z-t)g(t)dt + f(0)g(z)$$

ile tanımlanır (Wigley, 1974). Bu çarpım aynı zamanda birleşme ve değişme özelliğine sahip ve birim elemanı $f(z) \equiv \mathbf{1}$ değerine sahiptir.

Yardımcı Teorem 4.46. $1 \leq p < \infty$ ve $f, g \in H^p(\mathbb{D})$ (Hardy uzayı) olsun. O zaman $f \circledast g \in H^p$ ve

$$\|f \circledast g\|_p \leq C_p \|f\|_p \|g\|_p$$

olacak şekilde p ye bağlı sabit bir C_p mevcuttur (Wigley, 1975). Bununla birlikte verilen

$f \in H^p$ için $(f \circledast g)(z) \equiv 1$ olması için gerekli ve yeterli koşul $f(0) \neq 0$ olacak şekilde $g \in H^p$ mevcuttur.

Özel durumda Yardımcı Teorem 4.46 dan H^2 uzayı bir Banach cebiri olur. $f \in H^2$ için

$$\mathcal{D}_f g := f \circledast g, g \in H^2$$

ile Duhamel operatörü tanımlanır. Böylece $\mathcal{D}_f$ nin H^2 üzerinde tersinebilir olması için gerekli ve yeterli koşul $f(0) \neq 0$ olmasıdır. Bunun anlamı sadece bir maksimal elemanın mevcut olmasıdır. Her bir $\mathcal{D}_f$ nin spektrumu $\{f(0)\}$ dir.

Aşağıdaki önerme (Karaev, 1984, 2005) makalelerindeki benzer argümanlardan kolayca ispatlanabilir.

Önerme 4.47. $f \in H^2$ sıfır olmayan bir fonksiyon ve $\mathcal{D}_f$ operatörü H^2 üzerinde birleşmeli Duhamel operatör olsun. O zaman $\mathcal{D}_f$ nin kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul $f(0) = 0$ olmasıdır.

Şimdi H^2 de özdeş olmayan invaryant altuzayın mevcudluğu için üretici çekirdekler ve Duhamel operatörleri yardımıyla bazı yeterli koşulları veren bu kısmın temel sonucu ifade edebiliriz. S operatörü $Sf = zf$ ile tanımlı H^2 üzerindeki kaydırma operatörü ve S^* de geriye kaydırma operatörü olsun.

Teorem 4.48. $T : H^2 \rightarrow H^2$ bir operatör olsun.

- (i) $\lambda \rightarrow \partial\mathbb{D}$ iken $\left| (S^*\beta_\lambda B)^\sim(\lambda) \right| = o\left(\frac{\left| \left((I - SS^*)S^*\beta_\lambda B \right)^\sim(\lambda) \right|}{1 - |\lambda|^2} \right)$ dir. Burada $\beta_\lambda z = k_{\widehat{Bk}_\lambda}(0) = 0$ ifadesi $\widehat{Bk}_\lambda$ fonksiyonunun sıfırının mertebesidir,
- (ii) $(\lambda_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{D}$ dizisi

$$\mathcal{D}_{\widehat{k}_{\lambda_n} \circledast (S^*\beta_{\lambda_n} \widehat{Bk}_{\lambda_n})^{-1 \circledast} - (\widehat{k}_{\lambda_n} \circledast (S^*\beta_{\lambda_n} \widehat{Bk}_{\lambda_n}))^{-1 \circledast} (0)} S^*\beta_{\lambda_n}$$

olacak şekilde $\partial\mathbb{D}$ de ξ_0 noktasına yakınsayan dizi H^2 üzerinde bazı $\mathcal{K}$ için düzgün operatör topolojide yakınsaklık mevcut olacak şekilde $B \in \{T\}'$ sıfır olmayan bir operatör mevcut olsun. O zaman T operatörü özdeş olmayan invaryant altuzaya

sahiptir.

İspat. T operatörünün H^2 de özdeş olmayan invaryant altuzaya sahip olmadığını kabul edelim. O zaman $\{T\}'$ de herhangi sıfır olmayan A operatörü için $\ker(A) = \{0\}$ ve bundan dolayı H^2 de herhangi sıfır olmayan h fonksiyonu için $Ah \neq 0$ dır. Özel durumda her $A \in \{T\}' \setminus \{0\}$ ve $\lambda \in \mathbb{D}$ için $A\hat{k}_\lambda \neq 0$ dır. Burada $\hat{k}_\lambda := \hat{k}_{H^2, \lambda}$ ifadesi H^2 nin normalleştirilmiş üretici çekirdeğini tanımlar. Herhangi $\lambda \in \mathbb{D}$ için $A\hat{k}_\lambda = f_{A, \lambda}$ olur. O zaman $f_{A, \lambda} = z^{\alpha_\lambda} g_{A, \lambda}$ dir. Burada $\alpha_\lambda := k_{f_{A, \lambda}}(0)$ ifadesi $z = 0$ noktasında fonksiyonun sıfırının mertebesi, $g_{A, \lambda} \in H^2$ ve $g_{A, \lambda}(0) \neq 0$ dır. Böylece $A\hat{k}_\lambda = z^{\alpha_\lambda} g_{A, \lambda}$ ve bundan dolayı $S^{*\alpha_\lambda} A\hat{k}_\lambda = g_{A, \lambda}$ olur. Burada S^* operatörü H^2 üzerinde geriye kaydırma operatörüdür (H^2 üzerinde T_z basit ko-analitik Toeplitz operatörü). $g_{A, \lambda}(0) \neq 0$ olduğundan ve Yardımcı Teorem 4.46 dan her $\lambda \in \mathbb{D}$ için $\mathcal{G}_{A, \lambda} \otimes g_{A, \lambda} = \mathbf{1}$ olacak şekilde bir $\mathcal{G}_{A, \lambda} \in H^2$ fonksiyonu mevcuttur ($S^{*\alpha_\lambda} A\hat{k}_\lambda$ nin $\otimes$ -tersidir, yani $\mathcal{G}_{A, \lambda} = (S^{*\alpha_\lambda} A\hat{k}_\lambda)^{-1 \otimes}$). O zaman

$$(\hat{k}_\lambda \otimes \mathcal{G}_{A, \lambda}) \otimes S^{*\alpha_\lambda} A\hat{k}_\lambda = \hat{k}_\lambda \otimes \mathbf{1} = \hat{k}_\lambda$$

ve buradan

$$\mathcal{D}_{\hat{k}_\lambda \otimes \mathcal{G}_{A, \lambda}} S^{*\alpha_\lambda} A\hat{k}_\lambda = \hat{k}_\lambda,$$

veya $F_{A, \lambda} := \hat{k}_\lambda \otimes \mathcal{G}_{A, \lambda} = \hat{k}_\lambda \otimes (S^{*\alpha_\lambda} A\hat{k}_\lambda)^{-1 \otimes}$ kümesiyle

$$\begin{aligned} F_{A, \lambda}(0) &= (\hat{k}_\lambda \otimes (S^{*\alpha_\lambda} A\hat{k}_\lambda)^{-1 \otimes})(0) = \hat{k}_\lambda(0)((S^{*\alpha_\lambda} A\hat{k}_\lambda)^{-1 \otimes})(0) \\ &= (1 - |\lambda|^2)^{\frac{1}{2}}((S^{*\alpha_\lambda} A\hat{k}_\lambda)^{-1 \otimes})(0) \neq 0 \end{aligned}$$

ve her $A \in \{T\}' \setminus \{0\}$ ve $\lambda \in \mathbb{D}$ için

$$\mathcal{D}_{F_{A, \lambda}} S^{*\alpha_\lambda} A\hat{k}_\lambda = \hat{k}_\lambda \quad (4.18)$$

elde edilir. (4.18) den her $A \in \{T\}' \setminus \{0\}$ ve $\lambda \in \mathbb{D}$ için

$$\hat{k}_\lambda - F_{A, \lambda}(0) S^{*\alpha_\lambda} A\hat{k}_\lambda = \mathcal{D}_{F_{A, \lambda} - F_{A, \lambda}(0)} S^{*\alpha_\lambda} A\hat{k}_\lambda \quad (4.19)$$

olduğu kolayca görülebilir. Burada $\mathcal{D}_{F_{A, \lambda} - F_{A, \lambda}(0)}$ operatörü H^2 üzerinde bir kompakt

Duhamel operatördür (bakınız Önerme 4.47). Özel durumda (4.19) den her $n \geq 1$ için

$$\widehat{k}_{\lambda_n} - F_{B,\lambda_n}(0)S^{*\beta_{\lambda_n}}B\widehat{k}_{\lambda_n} = \mathcal{D}_{F_{B,\lambda_n}-F_{B,\lambda_n}(0)}S^{*\beta_{\lambda_n}}B\widehat{k}_{\lambda_n} \quad (4.20)$$

olur. Burada $B \in \{T\}'$ teoremin koşullarını sağlayan bir operatör ve $\beta_{\lambda_n} := k_{B\widehat{k}_{\lambda_n}}(0)$, $n \geq 1$ dir. (ii) koşulundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \mathcal{D}_{F_{B,\lambda_n}-F_{B,\lambda_n}(0)}S^{*\beta_{\lambda_n}} - \mathcal{K} \right\|_{\mathcal{B}(H^2)} = 0$$

olacak şekilde H^2 üzerinde bir $\mathcal{K}$ operatörü mevcuttur. Açık olarak $\mathcal{K}$ kompakttır. O zaman (ii) koşulunu kullanarak ve (4.20) eşitliğinden

$$\begin{aligned} & \left\| \widehat{k}_{\lambda_n} - F_{B,\lambda_n}(0)S^{*\beta_{\lambda_n}}B\widehat{k}_{\lambda_n} \right\| \\ &= \left\| (\mathcal{D}_{F_{B,\lambda_n}-F_{B,\lambda_n}(0)}S^{*\beta_{\lambda_n}} - \mathcal{K})B\widehat{k}_{\lambda_n} + \mathcal{K}B\widehat{k}_{\lambda_n} \right\| \\ &\leq \left\| \mathcal{D}_{F_{B,\lambda_n}-F_{B,\lambda_n}(0)}S^{*\beta_{\lambda_n}} - \mathcal{K} \right\| \|B\| + \left\| \mathcal{K}B\widehat{k}_{\lambda_n} \right\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

dir. Çünkü $(\widehat{k}_{\lambda_n})_{n \geq 1}$ zayıf bir sıfır dizisi ve $\mathcal{K}B$ operatörü H^2 üzerinde kompakt operatördür. Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \widehat{k}_{\lambda_n} - F_{B,\lambda_n}(0)S^{*\beta_{\lambda_n}}B\widehat{k}_{\lambda_n} \right\| = 0 \quad (4.21)$$

olur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} & \left\| \widehat{k}_{\lambda_n} - F_{B,\lambda_n}(0)S^{*\beta_{\lambda_n}}B\widehat{k}_{\lambda_n} \right\|^2 \\ &= 1 - 2\operatorname{Re}[F_{B,\lambda_n}(0)(S^{*\beta_{\lambda_n}}B)^{\sim}(\lambda_n)] + \left\| F_{B,\lambda_n}(0)S^{*\beta_{\lambda_n}}B\widehat{k}_{\lambda_n} \right\|^2 \\ &\geq 1 - 2 \left| F_{B,\lambda_n}(0)(S^{*\beta_{\lambda_n}}B)^{\sim}(\lambda_n) \right| + \left| F_{B,\lambda_n}(0)(S^{*\beta_{\lambda_n}}B)^{\sim}(\lambda_n) \right|^2 \\ &= 1 - 2 \left| \frac{(S^{*\beta_{\lambda_n}}B)^{\sim}(\lambda_n)}{(S^{*\beta_{\lambda_n}}Bk_{\lambda_n})(0)} \right| + \left| \frac{(S^{*\beta_{\lambda_n}}B)^{\sim}(\lambda_n)}{(S^{*\beta_{\lambda_n}}Bk_{\lambda_n})(0)} \right|^2 \end{aligned}$$

dir. Aynı zamanda

$$\begin{aligned} \frac{1}{(S^{*\beta_{\lambda_n}}Bk_{\lambda_n})(0)} &= \frac{1}{\left\langle S^{*\beta_{\lambda_n}}Bk_{\lambda_n}, \mathbf{1} \right\rangle} = \frac{1}{\left\langle S^{*\beta_{\lambda_n}}Bk_{\lambda_n}, (I - SS^*)k_{\lambda_n} \right\rangle} \\ &= \frac{1 - |\lambda_n|^2}{\left\langle (I - SS^*)S^{*\beta_{\lambda_n}}B\widehat{k}_{\lambda_n}, \widehat{k}_{\lambda_n} \right\rangle} \end{aligned}$$

$$= \frac{1 - |\lambda_n|^2}{\left[(I - SS^*) S^{*\beta_{\lambda_n}} B \right]^{\sim} (\lambda_n)}$$

ve buradan

$$\begin{aligned} \left\| \widehat{k}_{\lambda_n} - F_{B, \lambda_n}(0) S^{*\beta_{\lambda_n}} B \widehat{k}_{\lambda_n} \right\|^2 &\geq 1 - 2 \left| \frac{(1 - |\lambda_n|^2) \left[S^{*\beta_{\lambda_n}} B \right]^{\sim} (\lambda_n)}{\left[(I - SS^*) S^{*\beta_{\lambda_n}} B \right]^{\sim} (\lambda_n)} \right| + \\ &+ \left| \frac{(1 - |\lambda_n|^2) (S^{*\beta_{\lambda_n}} B)^{\sim} (\lambda_n)}{(I - SS^*) (S^{*\beta_{\lambda_n}} B)^{\sim} (\lambda_n)} \right|^2 \end{aligned} \quad (4.22)$$

elde edilir. Teoremin (i) koşulundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(1 - |\lambda_n|^2) \left[S^{*\beta_{\lambda_n}} B \right]^{\sim} (\lambda_n)}{\left[(I - SS^*) S^{*\beta_{\lambda_n}} B \right]^{\sim} (\lambda_n)} \right| = 0$$

olur ki (4.22) eşitsizliğinden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \widehat{k}_{\lambda_n} - F_{B, \lambda_n}(0) S^{*\beta_{\lambda_n}} B \widehat{k}_{\lambda_n} \right\|^2 \geq 1$$

ifadesi oluşur. Bu ise (4.21) eşitliği ile çelişir. Buradan teoremin ispatı tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.49. $T \in \mathcal{B}(H^2)$ bir operatör olsun.

(i) Her $\lambda \in \mathbb{D}$ için $(Bk_\lambda)(0) \neq 0$ ve $\lim_{\lambda \rightarrow \xi \in \partial \mathbb{D}} \frac{\widetilde{B}(\lambda)}{(Bk_\lambda)(0)} = 0$;

(ii) Bazı $\xi_0 \in \partial \mathbb{D}$ noktasına yakınsayan bir $(\lambda_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{D}$ dizisi ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \mathcal{D}_{\widehat{k}_{\lambda_n} \otimes (B\widehat{k}_{\lambda_n})^{-1} \otimes - (\widehat{k}_{\lambda_n} \otimes (B\widehat{k}_{\lambda_n})^{-1} \otimes)(0)} - \mathcal{K} \right\| = 0$$

olacak şekilde bir $\mathcal{K}$ operatörü mevcut olsun. (i) ve (ii) koşulları sağlanacak şekilde $B \in \{T\}'$ sıfır olmayan bir operatör mevcut olsun. O zaman T operatörü özdeş olmayan invaryant altuzaya sahiptir.

İspat. Gerçekten (4.22) in ispatında olduğu gibi her $\lambda \in \mathbb{D}$ için

$$\begin{aligned} (Bk_\lambda)(0) &= \langle Bk_\lambda, k_0 \rangle = \langle Bk_\lambda, \mathbf{1} \rangle = \langle Bk_\lambda, k_\lambda \rangle + \langle Bk_\lambda, 1 - k_\lambda \rangle \\ &= \langle Bk_\lambda, k_\lambda \rangle + \left\langle Bk_\lambda, 1 - \frac{1}{1 - \bar{\lambda}z} \right\rangle \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned}
&= \langle Bk_\lambda, k_\lambda \rangle - \left\langle Bk_\lambda, \frac{\bar{\lambda}z}{1 - \bar{\lambda}z} \right\rangle \\
&= \langle Bk_\lambda, k_\lambda \rangle - \langle Bk_\lambda, SS^*k_\lambda \rangle = \langle (I - SS^*)Bk_\lambda, k_\lambda \rangle \\
&= \|k_\lambda\|^2 \left\langle (I - SS^*)\widehat{Bk}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle = (1 - |\lambda|^2)^{-1} ((I - SS^*)B)^\sim(\lambda)
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan $(Bk_\lambda)(0) \neq 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul $(\widehat{Bk}_{\lambda_n})(0) \neq 0$ olduğundan $k_{\widehat{Bk}_{\lambda_n}}(0) = 0$ dır. Şimdi ispatın geriye kalanı Teorem 4.48 in ispatından elde edilir. $\square$

Sonuç 4.50. $T \in \mathcal{B}(H^2)$ operatörü

(i) Her $\lambda \in \mathbb{D}$ için $(Tk_\lambda)(0) \neq 0$ ve $\lim_{\lambda \rightarrow \partial\mathbb{D}} \frac{\tilde{T}(\lambda)}{(Tk_\lambda)(0)} = 0$;

(ii) $(\lambda_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{D}$ dizisi $\partial\mathbb{D}$ da bazı noktaya yakınsayan bir dizi ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \mathcal{D}_{\widehat{k}_{\lambda_n} \otimes (T\widehat{k}_{\lambda_n})^{-1} \otimes (\widehat{k}_{\lambda_n} \otimes (T\widehat{k}_{\lambda_n})^{-1})_{(0)}} - \mathcal{K} \right\| = 0$$

olacak şekilde $\mathcal{K}$ operatörü mevcut olmak üzere tanımlayalım. O zaman T operatörü özdeş olmayan invaryant altuzaya sahiptir.

Bu sonucun ispatı Teorem 4.48 in ispatındaki metod kullanılarak verilebilir.

Uyarı 4.51. (a) (4.23) formülü ve bir boyutlu $(I - SS^*)B$ operatörünün kompaktlığı düşünülerek Sonuç 4.49 daki (i) koşulunun $\partial\mathbb{D}$ sınırında T nin komutantında B operatörünün $\widetilde{B}$ Berezin sembolü için bazı büyüme koşulu anlamına geldiğine dikkat edebiliriz.

(b) Aynı zamanda eğer $T \in \mathcal{B}(H^2)$ ve

$$\|Tk_\lambda\| \rightarrow 0 \text{ radyal olarak} \quad (4.24)$$

ise o zaman T sıfır operatörü olacağından dolayı T nin bir özdeş olmayan invaryant alt uzaya sahip olduğu kolayca gösterilebilir. Gerçekten her $f \in H^2$ ve $\lambda \in \mathbb{D}$ için

$$(T^*f)(\lambda) = \langle T^*f, k_\lambda \rangle = \langle f, Tk_\lambda \rangle$$

olduğundan (4.24) koşulu ile

$$|(T^*f)(\lambda)| \leq \|f\| \|Tk_\lambda\| \rightarrow 0, \lambda \rightarrow \partial\mathbb{D} \text{ radyal iken}$$

elde edilir. Bu da hemen hemen her $t \in [0, 2\pi)$ için $(T^*f)(e^{it}) = 0$ olduğunu verir. O zaman Riesz Kardeşler Teoremi'nden $T^*f = 0$ dir. $f \in H^2$ keyfi olduğundan $T^* = 0$ olup $T = 0$ dir.

Genelde aşağıdaki iki soru doğal olarak ortaya çıkar:

Soru 4.52. $T : \mathcal{H}(\Omega) \rightarrow \mathcal{H}(\Omega)$ operatörü

$$\lim_{\lambda \rightarrow \partial\Omega} \|\widehat{Tk}_{\mathcal{H},\lambda}\| = 0 \quad (4.25)$$

olacak şekilde $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ standart üretici çekirdekli Hilbert uzayı üzerinde bir sınırlı operatör olsun. O zaman T operatörünün özdeş olmayan hiperinvariant altuzaya sahip olduğu doğru mu?

Soru 4.53. $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operatörü

$$\lim_{\lambda \rightarrow \partial\Omega} \widetilde{T}(\lambda) = 0 \quad (4.26)$$

standart üretici çekirdekli Hilbert uzayı üzerinde bir operatör olsun. O zaman T operatörünün özdeş olmayan hiperinvariant altuzaya sahip olduğu doğru mu?

$\lambda \in \Omega$ için $|\widetilde{T}(\lambda)| \leq \|\widehat{Tk}_{\mathcal{H},\lambda}\|$ olduğundan Soru 4.52 ve Soru 4.53 için cevap pozitifdir. Aynı zamanda bazı özel operatörler için (4.25) ve (4.26) koşulu T operatörünün kompaktlığını verir. Örneğin Axler ve Zheng in çalışmalarında $L_a^2(\mathbb{D})$ Bergman uzayı üzerinde Toeplitz operatörünün kompaktlığını karakterize etmişlerdir (Axler ve Zheng, 1998). Bundan dolayı $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ standart üretici çekirdekli Hilbert uzayı üzerinde her kompakt operatör (4.25) koşulunu sağladığından dolayı (ve aynı zamanda (4.26) koşulunu), Soru 4.53 a pozitif cevap üretici çekirdekli Hilbert uzayı durumunda ünlü von Neumann ve Lomonosov teoremlerinin temel genişlemelerini verecektir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu bölümde doktora tezi kapsamında elde edilen sonuçlar ve bunların doğurduğu bazı açık problemlerin irdelenmesi yapılmıştır.

Hazırlanan bu tez çalışmasında, İngiliz cebirleri verilmiş ve onların bazı özellikleri incelenmiştir. İngiliz cebiri $\mathcal{A}_{K_0}^0$ kümesine ait köreltilmiş Toeplitz operatörü için bir kriter verilmiştir. Bazı Ω kümesi üzerinde bir $\mathcal{H}(\Omega)$ üretici çekirdekli Hilbert uzayında operatörlerin $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ İngiliz cebiri üzerinde Riccati operatör denkleminin çözülebilirliği incelenmiştir. Tam olarak söylemek gerekirse, Berezin sembolü yardımıyla Riccati operatör denkleminin çözülebilirliği için gerekli koşul ispatlanmıştır. Eğer $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ nin uygun bir altkümesi üzerinde Riccati operatör denklemi çözülebilir ise o zaman Riccati operatör denkleminin çözümü tektir ve A, D katsayı operatörlerinin Berezin sembolleri yardımıyla onun temsil edilebilir olduğu verilmiştir. H^2 Hardy uzayı ve L_a^2 Bergman uzayı üzerinde sıfır Toeplitz çarpımı incelenmiştir. Eğer $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in L^\infty(\mathbb{T})$ ve $H_1, \dots, H_n$ operatörleri $(T_{\varphi_1} + H_1) \dots (T_{\varphi_n} + H_n) = 0$ olacak şekilde $\mathcal{F}_{H^2}$ İngiliz cebirlerinden operatörler ise o zaman $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n = 0$ olduğu ispatlanmıştır. Bu ise iyi bilinen Douglas yardımcı teoremini genelleştirir. Özel durumda Brown-Halmos teoreminin yeni ispatı elde edilmiştir. Benzer sonuçlar L_a^2 Bergman uzayında sıfır Toeplitz çarpımları için ispatlanmıştır. Ayrıca Čučkovič in bir savı kısmi olarak çözülmüştür. H^2 Hardy uzayındaki T_φ Toeplitz operatörünün $\tilde{W}_0(T_\varphi)$ maksimal Berezin kümesi çalışılmış ve $\tilde{W}_0(T_\varphi) = \{\|\varphi\|_\infty\}$ olduğu ispatlanmıştır. Genel durumda, herhangi bir $T \in \mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ için $\tilde{W}_0(T) \subset \mathbb{T}_{\|T\|}$ olduğu gösterilmiştir. Standart üretici çekirdekli Hilbert uzayında A, B ve C operatörleri için $AB - C$ formundaki operatörlerin kompaktlığı incelenmiştir. Yani, eğer A, B, C operatörleri $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^0$ İngiliz cebirine ait ise o zaman hangi koşullar altında $\mathcal{H}$ üzerinde $AB - C$ bir kompakt operatör sorusu tartışılmıştır. Böylece Berezin sembolleri yardımıyla $AB - C$ nin kompaktlığı karakterize edilmiştir. L_a^2 Bergman uzayında T_u ve T_v Toeplitz operatörlerinin $[T_u, T_v] := T_{uv} - T_u T_v$ yarı-komütatörü için Axler-Chang-Sarason-Volberg tipli teorem ispatlanmıştır. Bazı İngiliz cebirleri üzerinde operatörlerin genelleştirilmiş özdeğerleri ve genelleştirilmiş özvektörleri incelenmiştir. Son olarak Duhamel operatörler ve üretici çekirdekler yardımıyla H^2 Hardy uzayında özdeş olmayan bir invaryant altuzayın mevcudluğu için bazı yeterli koşullar verilmiştir.

Bu çalışmaların devamı olarak düşünülen öneriler vardır:

Örnek 5.1. $f, g \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ olsun. Eğer $T_f T_g$ çarpımı $L_a^2(\mathbb{D})$ üzerinde özdeş olarak sıfır ise o zaman T_f veya T_g özdeş olarak sıfır mı?

(Deddens, 1978) den

$$\mathcal{B}_A := \left\{ X \in \mathcal{B}(H) : \left\| A^k X A^{-k} \right\| \text{ sınırlı, } k = 0, 1, 2, \dots \right\}.$$

kümesi A operatörünün $\{A\}'$ komutantını içeren bir cebir ve

$$\mathcal{R}_A := \left\{ X \in \mathcal{B}(H) : \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| A^k X A^{-k} \right\| = 0 \right\}$$

olsun. $\mathcal{R}_A$ kümesi

$$\mathcal{R}(\mathcal{B}_A) := \{X \in \mathcal{B}_A : \text{her } Y \in \mathcal{B}_A \text{ için } XY \text{ quasinilpotent}\}$$

ile tanımlanan $\mathcal{B}_A$ cebirinde tek taraflı idealdir. Bu yüzden, eğer $A \in \mathcal{B}(H)$ tersinebilir ise o zaman $\mathcal{R}_A \subset \mathcal{R}(\mathcal{B}_A)$ ifadesini gözönünde bulundurursak aşağıdaki sorular ortaya çıkacaktır:

Soru 5.2. (a) $\mathcal{R}_A$ kümesinde her X operatörü hangi koşullar altında özdeş olmayan invaryant altuzaya sahiptir?

(b) Eğer $X \in \mathcal{R}(\mathcal{B}_A)$ ise X operatörü hangi koşullar altında özdeş olmayan invaryant alt uzaya sahiptir?

$\mathcal{B}_A$ Deddens cebiri hakkındaki bu ilginç sorular burada aynı zamanda invaryant alt uzay problemi ile motive edilmiştir. Gerçekten, eğer $\mathcal{B}_A$ cebiri basit olmayan invaryant altuzaya sahipse, o zaman A operatörü basit olmayan hiperinvariant altuzaya sahiptir. Özel olarak $\mathcal{K}$ kompakt operatör olmak üzere $\mathcal{B}_{A=I+\mathcal{K}} \neq \{\mathcal{K}\}'$ alındığında, (Lomonosov, 2015) de Lomonosov'un elde etmiş olduğu sonuç üzerinde önemli bir gelişme olacaktır. Böylece $\mathcal{B}_A \neq \{A\}'$ durumunda A operatörünü karakterize ederek invaryant altuzay probleminin çözümü için önemli bir adım olacaktır.

KAYNAKLAR

- Ahern, P., Čučković, Z., 2001. A Theorem of Brown–Halmos Type for Bergman space Toeplitz operators. *Journal of Functional Analysis*, 187(1), 200–210.
- Ahern, P., Flores, M., Rudin, W., 1993. An invariant volume-mean-value property. *Journal of Functional Analysis*, 111(2), 380–397.
- Aleman, A., Vukotić, D., 2009. Zero products of Toeplitz operators. *Duke Mathematical Journal*, 148(3), 373–403.
- Alkanjo, H., 2013. On extended eigenvalues and extended eigenvectors of truncated shift. *Concrete Operators*, 1(1), 19–27.
- Aronszajn, N., 1950. Theory of reproducing kernel. *Transactions American Mathematical Society*, 68(3), 337–404.
- Axler, S., Chang, S.Y.A., Sarason, D., 1978. Products of Toeplitz operators. *Integral Equations and Operator Theory*, 1(3), 285–309.
- Axler, S., Zheng, D., 1998. The Berezin transform on the Toeplitz algebra. *Studia Mathematica*, 1(2), 113–136.
- Baranov, A., Chalendar, I., Fricain, E., Mashregi, J., Timotin, D., 2010. Bounded symbols and reproducing kernel thesis for truncated Toeplitz operators. *Journal of Functional Analysis*, 259(10), 2673–2701.
- Berger, C., Coburn, L., 1987. Toeplitz operators on the Segal-Bargmann space. *Transaction of the American Mathematical Society*, 301(2), 813–829.
- Biswas, A., Lambert, A., Petrovic, S., 2002. Extended eigenvalues and the Volterra operator. *Glasgow Mathematical Journal*, 44(3), 521–534.
- Bourdon, P.S., Shapiro, J.H., 2008. Intertwining relations and extended eigenvalues for analytic Toeplitz operators. *Illinois Journal of Mathematics*, 52(3), 1007–1030.
- Brown, A., Halmos, P.R., 1964. Algebraic properties of Toeplitz operators. *Journal Für Die Reine und Angewandte Mathematik*, 1964(213), 89–102.
- Brown, S., 1979. Connections between an operator and a compact operator that yield hyperinvariant subspaces. *Journal Operator Theory*, 1(1), 117–121.
- Cassier, G., Alkanjo, H., 2014. Extended spectrum, extended eigenspaces and normal operators. *Journal Mathematical Analysis and Applications*, 418(1), 305–316.
- Chalender, I., Fricain, E., Gürdal, M., Karaev, M., 2012. Compactness and Berezin Symbols. *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)*, 78(1), 315–329.
- Chalender, I., Fricain, E., Partington, J., 2006. Over completeness of sequences of reproducing kernels in model spaces. *Integral Equations Operator Theory*, 56(1),

45–56.

- Deddens, J.A., 1978. Another description of nest algebras. *Lecture Notes in Mathematics*, 693, 77–86.
- Douglas, R.G., 1972. *Banach algebra techniques in operator theory*. Academic Press, New York.
- Douglas, R.G., 1973. *Banach algebra techniques in the theory of Toeplitz operators*. American Mathematical Society, 53 p., USA, 15.
- Engliš, M., 1994. Functions invariant under the Berezin transform. *Journal of Functional Analysis*, 121, 223–254.
- Engliš, M., 1995. Toeplitz operators and the Berezin transform on H^2 . *Linear Algebra and its Applications*, 223/224, 171–204.
- Freedman, A.R., Sember, J.J., 1981. Densities and summability. *Pacific Journal of Mathematics*, 95(2), 293–305.
- Fridy, J.A., 1985. On statistical convergence. *Analysis*, 5(4), 301–313.
- Gürdal, M., 2009. On the extended eigenvalues and extended eigenvectors of shift operator on the Wiener algebra. *Applied Mathematics Letters*, 22(11), 1727–1729.
- Gürdal, M., Garayev, M.T., Saltan, S., Yamanci, U., 2015. On some numerical characteristics of operators. *Arab Journal of Mathematical Sciences*, 21(1), 118–126.
- Gu, C., 2000. Products of several Toeplitz operators. *Journal of Functional Analysis*, 171(2), 483–527.
- Guo, K.Y., 1996. A problem on products of the Toeplitz operators. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 124(3), 869–871.
- Halmos, P.R., 1982. *A Hilbert space problem book*. Volume 19 of Graduate Texts in Mathematics, New York, NY, USA, 2nd edition.
- Hoffman, K., 1962. *Banach spaces of analytic functions*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Karaev, M.T., 1984. The use of convolution in the proof of unicellularity. (Russian) *Investigations on linear operators and the theory of functions*. XIII. *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, 135, 66–68.
- Karaev, M.T., 2005. On some applications of ordinary and extended Duhamel products. (Russian) *Sibirskii Matematicheskii Zhurnal*, 46(3), 553–566.
- Karaev, M.T., 2006. On extended eigenvalues and extended eigenvectors of some operator classes. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 134(8),

2383–2392.

Karaev, M.T., 2008. On the Riccati equations. *Monatsh furMathematik*, 155(2), 161–166.

Kim, H.W., Moore, R.L., Percy, C.M., 1979. A variation of Lomonosovs theorem. *Journal of Operator Theory*, 2(1), 131–140.

Kılıç, S., 1994. On the Berezin symbol. University of New Hampshire, Ph.D. Thesis, 44 p., New Hampshire.

Kolmogorov, A.N., 1941. Stationary sequences in Hilbert space. *Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie*, 2(6), 1–40.

Korenblum, B.I., 1977. A Beurling type theorem. *Acta Mathematica Scientia*, 138, 265–293.

Lacruz, M., 2015. Invariant subspaces and Deddens algebras. *Expositiones Mathematicae*, 33(1), 116–120.

Lacruz, M., León-Saavedra, F., Petrovic, S., Zabeti, O., 2015. Extended eigen-values for Cesáro operators. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 429(2), 623–657.

Lambert, A., 2004. Hyperinvariant subspaces and extended eigenvalues. *New York Journal of Mathematics*, 10, 83–88.

Lauric, V., 2015. The set of extended eigenvalues of a weighted Toeplitz operator. *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)*, 72(3-4), 691–700.

Lomonosov, V., 2015. Invariant subspaces for operators commuting with compact operators. *Functional Analysis and Its Applications*, 7, 213–214.

Malamud, M.M., 1995. Similarity of Volterra operators and related problems in the theory of differential equations of fractional orders. *Transactions of the Moscow Mathematical Society*, 56; 57-122 (translated from *Trudy Moskov Mat. Obshch.*), 55, 73–148.

Malamud, M.M., 1998. Invariant and hyperinvariant subspaces of direct sums of simple Volterra operators. *Operator Theory Advanced and Applications*, 102, 143–167.

Martinez-Avendano, R.A., Rosenthal, P., 2007. An introduction to operators on the Hardy-Hilbert space. *Graduate Texts in Mathematics*, Springer.

Nagy, Foias, 1970. *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space*. North Holland Publishing Company, 387 S., Amsterdam.

Nikolski, N.K., 1986. *Treatise on the Shift Operator*. Springer Verlag, Heidelberg.

Nikolski, N.K., 1995. Distance formula and invariant subspaces with an applica-

- tion to localization of zeros of the Riemann η -function. *Annales Institut Fourier*, (Grenoble), 45(1), 143–159.
- Nikolski, N.K., 2012. In a shadow of the RH: cyclic vectors of Hardy spaces on the Hilbert multidisc. *Annales Institut Fourier*, (Grenoble), 62(5), 1601–1626.
- Nordgren, E., Rosenthal, P., 1994. Boundary values of Berezin symbols. *Operator Theory: Advances and Applications*, 73, 362–368.
- Saitoh, S., 1988. *Theory of reproducing kernels and its applications*. Pitman Research Notes in Mathematics Series.
- Saitoh, S., 1997. *Integral transforms, Reproducing kernels and their applications*. Pitman Research Notes in Mathematics Series.
- Sarason, D., 1994. Products of Toeplitz operators in. *Linear and Complex Analysis ProblemBook 3, Part I, Lecture Notes in Mathematics*, v.1573; Springer Verlag, New York.
- Stroethoff, K., 1997. The Berezin transform and operators on spaces of analytic functions. *Linear Operators Banach Center Publications*, 38, 361–380.
- Čučković, Z., 2003. Berezin versus Mellin. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 287(1), 234–243.
- Wigley, N.M., 1974. The Duhamel product of analytic functions. *Duke Mathematical Journal*, 41(1), 211–217.
- Wigley, N.M., 1975. A Banach algebra structure for H^p . *Canadian Mathematical Bulletin*, 18, 597–603.
- Yu Domanov, I., Malamud, M.M., 2009. On the spectral analysis of direct sums of Riemann-Liouville operators in Sobolev spaces of vector functions. *Integral Equations and Operator Theory*, 63, 181–215.
- Zaremba, S., 1907. L'équation Biharmonique et Une Classe Remarquable de Fonctions Fondamentales Harmoniques. *Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie*, 147–196.
- Zhu, K., 1990. *Operator Theory in Function Spaces*. Marcel Dekker, 280, New York:.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Mualla Birgül HUBAN
Doğum Yeri ve Yılı : Isparta, 1984
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : btarhan03@yahoo.com

Eğitim Durumu

Lise : Isparta Anadolu Lisesi, 2002
Lisans : İstanbul Üniversitesi, 2009
Lisans : Anadolu Üniversitesi, 2009
Yüksek Lisans : Süleyman Demirel Üniversitesi, 2012

Mesleki Deneyim

SDÜ Eğirdir MYO (Söz. Öğrt. Gör.) : 2016-2017
SDÜ Su Ürünleri Fak. (Söz. Öğrt. Gör.) : 2017-2018
SDÜ Yalvaç Büyükkutlu Uyg. Bil.Y.O. (Söz. Öğrt. Gör.) : 2017-2018

Yayınlar

Gürdal, M., Garayev, M.T., Huban, M.B., 2018. Hardy-Hilbert inequality and Berezin number, International Conference on Mathematical Advances and Applications (ICOMAA-2018), May 11-13, İstanbul, p. 114.

Huban, M.B., 2017. A mathematical theory for international trade and business problems strategic and collaborative level application, 6th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, 1 st International Symposium on Social Sciences and Educational Research (ISCER-2017), November 3-5, Antalya, p. 39.

- Gürdal, M., Huban, M.B., 2017. Statistical convergence and C^* -operator algebras, Theory and Applications of Mathematics and Computer Science, 7, no. 2, 41-50.
- Gürdal, M., Huban, M.B., Garayev, M.T., 2017. Berezin number inequalities and English algebras, 6th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, August 15-18, Budapest, Hungary, p. 70.
- Karaev, M.T., Gürdal, M., Huban, M.B., 2017. Duhamel operator and existence of invariant subspaces. 4th International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics, May 11-15, Kuşadası, Aydın, p. 116.
- Karaev, M.T., Gürdal, M., Huban, M.B., 2017. On extended eigenvalues and extended eigenvectors of Toeplitz operators, May 11-15, Kuşadası, Aydın, p. 117.
- Karaev, M.T., Gürdal, M., Huban, M.B., 2016. Reproducing kernels, English algebras and some application, Studia Mathematica, 232(2), 113-141.
- Gürdal, M., Huban, M.B., 2015. On English algebras and Berezin symbols. The 4th Abu Dhabi University Annual International Conference: Mathematical Science and Its Applications, December 23-26, Abu Dhabi, UAE, p. 35.
- Gürdal, M., Huban, M.B., 2014. On $\mathcal{I}$ -convergence of double sequences in the Topology induced by random 2-norms, Matematicki Vesnik, 66(1), 73-83.
- Gürdal, M., Huban, M.B., 2014. Statistical convergence and C^* -operator algebras, International Conference on Recent Advance in Pure and Applied Mathematics, November 6-9, Antalya, Turkey, p. 120.
- Gürdal, M., Huban, M.B., Yamancı, U., 2013. Lacunary A -statistical convergence on probabilistic normed space, Fatih University, İstanbul, Turkey, p. 94.
- Gürdal, M., Huban, M.B., 2012. $\mathcal{I}$ -limit points in random 2-normed spaces, Theory and Applications of Mathematics and Computer Science, 2(1), 15-22.
- Gürdal, M., Huban, M.B., Yamancı, U., 2012. On generalized statistical limits points in random 2-normed spaces, AIP Conference Proceedings, Vol. 1479, 950-954.
- Gürdal, M., Huban, M.B., 2012. On $\mathcal{I}$ -convergence of Double sequences in the topology induced by random 2-norms. The Algerian-Turkish International days on Mathematics (ATIM 2012), October 09-11, Annaba, Algeria, p. 110.