



**T.C.**  
**NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**FARK DİZİLERİNİN KABA YAKINSAKLIĞI**  
**VE KABA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI**

**Nihal DEMİR**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Haziran-2019**  
**KONYA**  
**Her Hakkı Saklıdır**

## TEZ KABUL VE ONAYI

Nihal DEMİR tarafından hazırlanan “Fark Dizilerinin Kaba Yakınsaklığı ve Kaba İstatistiksel Yakınsaklığı” adlı tez çalışması 13/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

### Jüri Üyeleri

#### Başkan

Doç. Dr. Sermin ÖZTÜRK

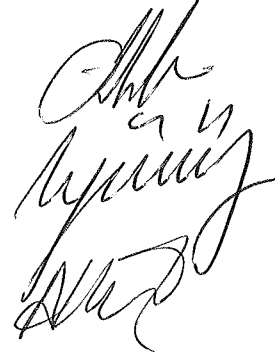
#### Danışman

Doç. Dr. Hafize GÜMÜŞ

#### Üye

Dr. Öğr. Üyesi Ayşegül KETEN

### İmza



Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. S. Savaş DURDURAN  
FBE Müdürü

## **TEZ BİLDİRİMİ**

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

## **DECLARATION PAGE**

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Nihal DEMİR

Tarih: 13.06.2019

## ÖZET

### YÜKSEK LİSANS TEZİ

#### FARK DİZİLERİNİN KABA YAKINSAKLIĞI VE KABA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Nihal DEMİR

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Hafize GÜMÜŞ

2019, 41 Sayfa

Jüri

Doç. Dr. Hafize GÜMÜŞ  
Doç. Dr. Sermin ÖZTÜRK  
Dr. Öğr. Üyesi Ayşegül KETEN

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm literatür bilgisini içeren giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, tez için gerekli olan temel tanım ve teoremlerden söz edilmiştir. Üçüncü bölümde fark dizilerinin kaba yakınsaklığı tanımlanmış, kaba limit noktaları kümesinin kapalılık, konvekslik gibi temel özelliklerini içeren teoremler verilmiştir. Aynı zamanda kabalık derecesine göre değişimin nasıl olacağı ve kaba Cauchy dizileri incelenmiştir. Dördüncü bölümde, fark dizileri için kaba istatistiksel yakınsaklık tanımlanmış ve bu yeni yakınsaklık türü ile ortaya çıkan teoremler elde edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Fark dizileri, kaba yakınsaklık, Cauchy dizisi, kaba istatistiksel yakınsaklık.

## **ABSTRACT**

## **MS THESIS**

# **ROUGH CONVERGENCE AND ROUGH STATISTICAL CONVERGENCE OF DIFFERENCE SEQUENCES**

**Nihal DEMİR**

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF  
NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY  
THE DEGREE OF MASTER OF MATHEMATICS**

**Advisor: Assoc. Prof. Dr. Hafize GÜMÜŞ**

**2019, 41 Pages**

**Jury**

**Assoc. Prof. Dr. Hafize GÜMÜŞ  
Assoc. Prof. Dr. Sermin ÖZTÜRK  
Assist. Prof. Dr. Ayşegül KETEN**

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction of literature. In the second chapter, the basic definitions and theorems necessary for the thesis are mentioned. In the third chapter, the rough convergence of a difference sequence is defined and the theorems containing the basic properties of the rough limit point set such as closed and convexity are given. At the same time, how the change according to the degree of roughness and also rough Cauchy sequences were examined. In the fourth chapter, rough statistical convergence was defined for the difference sequences and the theorems which emerged with this new type of convergence were obtained.

**Keywords:** Difference Sequences, rough convergence, Cauchy sequence, rough statistical convergence.

## ÖNSÖZ

Bu çalışma, Necmettin Erbakan Üniversitesi, Ereğli Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Doç. Dr. Hafize GÜMÜŞ yönetiminde hazırlanarak Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Yüksek lisans eğitimim boyunca beni yönlendiren, çalışmamın her aşamasında ilgi ve yardımlarını esirgemeyerek bana destek olan değerli danışman hocam Doç. Dr. Hafize GÜMÜŞ' e ve hayatımın her alanında yanımda olan sevgili Aileme saygılarımı ve sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Nihal DEMİR  
KONYA-2019

## İÇİNDEKİLER

|                                                                      |      |
|----------------------------------------------------------------------|------|
| ÖZET .....                                                           | iv   |
| ABSTRACT.....                                                        | v    |
| ÖNSÖZ .....                                                          | vi   |
| İÇİNDEKİLER.....                                                     | vii  |
| SİMGELER VE KISALTMALAR.....                                         | viii |
| 1. GİRİŞ.....                                                        | 1    |
| 2. TEMEL KAVRAMLAR .....                                             | 6    |
| 3. FARK DİZİLERİNİN KABA YAKINSAKLIĞI .....                          | 10   |
| 3.1. Kaba Yakınsaklığın Diğer Yakınsaklık Türleri İle İlişkisi ..... | 16   |
| 3.2. Kabalık Derecesine Bağlılık.....                                | 20   |
| 3.3. Kaba Fark Cauchy Dizileri .....                                 | 23   |
| 4. FARK DİZİLERİNİN KABA İSTATİSTİKSELYAKINSAKLIĞI.....              | 29   |
| 5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....                                            | 38   |
| KAYNAKLAR .....                                                      | 39   |
| ÖZGEÇMİŞ .....                                                       | 41   |

## SİMGELER VE KISALTMALAR

### Simgeler

|                                     |                                                                          |
|-------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| $\mathbb{N}$                        | : Doğal Sayılar Kümesi                                                   |
| $\mathbb{R}$                        | : Reel Sayılar Kümesi                                                    |
| $(X, d)$                            | : Metrik uzay                                                            |
| $(X, \ \cdot\ )$                    | : Normlu uzay                                                            |
| $d(K)$                              | : K kümesinin doğal yoğunluğu                                            |
| $\chi_A$                            | : A kümesinin karakteristik fonksiyonu                                   |
| $ K $                               | : K kümesinin eleman sayısı                                              |
| $S$                                 | : İstatistiksel yakınsak diziler kümesi                                  |
| $c_0(\Delta)$                       | : Sıfıra yakınsak fark dizileri kümesi                                   |
| $c(\Delta)$                         | : Yakınsak fark dizileri kümesi                                          |
| $l_\infty(\Delta)$                  | : Sınırlı diziler kümesi                                                 |
| $\Delta x_i \xrightarrow{r} x_*$    | : $(\Delta x_i)$ dizisi $x_*$ 'a kaba yakınsaktır.                       |
| $\Delta x_i \xrightarrow{st-r} x_*$ | : $(\Delta x_i)$ dizisi $x_*$ 'a kaba istatistiksel yakınsaktır.         |
| $LIM^r \Delta x_i$                  | : $(\Delta x_i)$ dizisinin r- limit noktaları kümesi                     |
| $\text{diam}(LIM^r \Delta x_i)$     | : $(\Delta x_i)$ dizisinin r-limit noktaları kümesinin çapı              |
| $\bar{B}_r(x_*)$                    | : $x_*$ merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar                                |
| $\llbracket \alpha \rrbracket$      | : $\alpha$ sayısının tam kısmı                                           |
| $C_{\Delta x}$                      | : $(\Delta x_i)$ dizisinin tüm yığılma noktaları kümesi                  |
| $\text{int}(LIM^r \Delta x_i)$      | : $LIM^r \Delta x_i$ kümesinin iç notaları kümesi                        |
| $K^c$                               | : K kümesinin tümleyeni                                                  |
| $cl(A)$                             | : A kümesinin kapanışı                                                   |
| $\bar{r}$                           | : $r$ – yakınsak dizinin en küçük yakınsaklık derecesi                   |
| $\Gamma_{\Delta x}$                 | : $(\Delta x_i)$ dizisinin tüm istatistiksel yığılma noktalarının kümesi |

### Kısaltmalar

|          |                     |
|----------|---------------------|
| (h.h.i.) | : Hemen hemen her i |
|----------|---------------------|

## 1. GİRİŞ

Bir dizinin yakınsaklığı kavramının, matematikteki en temel kavramlardan birisi olduğu tartışılmazdır. Yakınsaklık şartını sağlayan diziler kadar, bu şartı sağlamayan dizilerin de matematikteki yerlerini belirlemek oldukça önemlidir. Yakınsak olmadığı halde belirli şartlar altında yakınsaklık kavramına benzer özellikler gösteren dizilerin varlığı, farklı yakınsaklık türlerinin doğmasına sebep olmuştur. Bunlardan birisi de 2001 yılında Phu tarafından sonlu boyutlu uzaylarda tanımlanmış olan kaba yakınsaklık kavramıdır (Phu, 2001). Bu fikre göre, yakınsaklık aralığını bir  $r > 0$  sayısı ile genişleterek dizinin kaba yakınsaklığı elde edilebilir.

$(X, \|\cdot\|)$  bir normlu uzay,  $r$  negatif olmayan bir reel sayı ve  $(x_i)$  dizisi  $X$  uzayında bir dizi olsun. Eğer  $\forall \varepsilon > 0$  sayısına karşılık  $i \geq i_\varepsilon$  olduğunda,

$$\|x_i - x_*\| < r + \varepsilon \quad (1.1)$$

olacak şekilde bir  $i_\varepsilon$  sayısı bulunabilirse veya buna denk olarak,

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \|x_i - x_*\| \leq r \quad (1.2)$$

şartı sağlanıyorsa  $(x_i)$  dizisi  $x_* \in X$  noktasına kaba yakınsaktır veya kısaca  $r$ -yakınsaktır denir. Bu durum  $i \rightarrow \infty$  iken  $x_i \xrightarrow{r} x_*$  biçiminde gösterilir. Burada  $r$  sayısı dizinin kabalık derecesini belirtir. Tanıma dikkat edildiğinde,  $r = 0$  durumu için bilinen anlamda yakınsaklığın elde edildiği görülür. Dolayısıyla bu tez çalışmasında  $r > 0$  durumu ele alınacaktır. O halde yakınsaklık ve kaba yakınsaklık arasındaki ilişki şu şekilde açıklanabilir: Yakınsak her dizi kaba yakınsaktır fakat kaba yakınsak bir dizi yakınsak olmayabilir.

Kaba yakınsaklık kavramının oldukça ilgi çekici olmasının sebeplerinden birisini şu şekilde açıklamak mümkündür.  $y_i \rightarrow x_*$  yakınsak dizisinin terimlerini kesin olarak belirlemek mümkün olmayabilir. Bu nedenle, bu dizi yerine daha kolay işlem yapmayı sağlayacak ve  $\|x_i - y_i\| \leq r$  şartını sağlayan bir  $(x_i)$  yaklaşım dizisinden yararlanmak tercih edilir. Burada  $r$  sayısı, yaklaşım hatasının bir üst sınırı olarak adlandırılır.

Kabul edelim ki  $(y_i)$  dizisi  $x_*$  sayısına yakınsak ve her  $i \in N$  için  $\|x_i - y_i\| \leq r$  şartını sağlayan herhangi bir dizi,  $(x_i)$  ise tüm terimleri belirlenemeyen bir dizi olsun. Burada  $r$  negatif olmayan bir reel sayıdır. Bu durumda  $(x_i)$  dizisinin yakınsak olup olmadığını belirlemek mümkün değildir fakat,

$$\|x_i - x_*\| \leq \|x_i - y_i\| + \|y_i - x_*\| \leq r + \|y_i - x_*\| < r + \varepsilon \quad (1.3)$$

olduğundan bu dizinin kaba yakınsak olduğu görülebilir. (Phu, 2001)

Benzer durumu Cauchy dizileri için de söylemek mümkündür. Terimleri kesin olarak belirlenemeyen bir  $(y_i)$  Cauchy dizisi ele alınsın. Her  $i$  için  $\|x_i - y_i\| \leq \frac{\rho}{2}$  olacak şekilde bir  $(x_i)$  yaklaşım dizisi düşünüldüğünde,  $(x_i)$  dizisinin klasik Cauchy şartını sağlamadığı fakat

$$\forall \varepsilon > 0, \exists i_\varepsilon : i, j \geq i_\varepsilon \Rightarrow \|x_i - x_j\| < \rho + \varepsilon \quad (1.4)$$

olması sebebiyle kaba Cauchy şartını sağladığı görülür.

$(x_i)$ , sonlu boyutlu  $(X, \|\cdot\|)$  normlu uzayında kaba yakınsak bir dizi ve  $r$  negatif olmayan bir reel sayı olmak üzere, her  $r > 0$  sayısı için farklı bir  $x_*$  noktası elde edilir. Yani  $(x_i)$  dizisinin  $r$  – limit noktası olarak adlandırılan bu nokta tek değildir. O halde bu noktaların meydana getirdiği bir kümeden bahsedilebilir. Bu küme  $x$  dizisinin  $r$  – limit noktaları kümesi olarak adlandırılır ve  $LIM^r x_i$  ile gösterilir. Buna göre,

$$LIM^r x_i = \left\{ x_* \in X : x_i \xrightarrow{r} x_* \right\} \quad (1.5)$$

şeklindedir. Bu tanım göz önüne alındığında, eğer  $LIM^r x_i \neq \emptyset$  ise  $(x_i)$  dizisinin  $r$  – yakınsak olduğu söylenebilir. Bu çalışmasının ardından, Phu kaba yakınsaklık kavramını bu kez sonsuz boyutlu normlu uzayda tanımlayarak daha genel hale getirmiştir. (Phu, 2003)

Klasik anlamdaki yakınsaklık kavramına daha genel bir bakış açısı kazandıran yakınsaklık türlerinden birisi de istatistiksel yakınsaklık kavramıdır. Temeli pozitif tam sayıların doğal yoğunluğu kavramına dayanan istatistiksel yakınsaklık, 1951 yılında reel sayı dizileri için Fast (1951) ve Steinhaus (1951) tarafından birbirinden bağımsız olarak tanımlanmıştır. Ayrıca bu kavramı, Schoenberg (1959) ve Buck (1953) reel ve kompleks dizileri için çalışmışlardır. Son yıllarda oldukça popüler olan istatistiksel yakınsaklık, birçok matematikçi tarafından farklı alanlarda sıkça kullanılmıştır. Bu uygulamalardan bazıları, sayılar teorisi (Erdős ve Tenenbaum, 1989), trigonometrik seriler (Zygmund, 1979), toplanabilme teorisi (Freedman ve Sember, 1981), ölçüm teorisi (Miller, 1995), lokal konveks dizi uzaylarında istatistiksel yakınsaklık (Maddox, 1988) olarak verilebilir.

Yoğunluk kavramı, oldukça geniş bir kavram olup, doğal yoğunluk (asimptotik yoğunluk), düzgün yoğunluk, rasyonel ve reel sayıların yoğunluğu, oran kümelerinin yoğunluğu gibi birbirinden çok farklı şekilde tanımlanmıştır. Bu yoğunluk tanımlarından birisi olan doğal yoğunluk, istatistiksel yakınsaklığın da temelini oluşturacak olan kavramdır.

$\mathbb{N}$ , doğal sayılar kümesi ve  $K \subset \mathbb{N}$  olsun.  $|K|$  ifadesi,  $K$  kümesinin eleman sayısını göstermek üzere,

$$K_i = \{i \leq n : i \in K\} \quad (1.6)$$

olduğunda

$$d(K) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{i} |K_i| \quad (1.7)$$

ifadesine  $K$  kümesinin doğal yoğunluğu denir. Eğer  $K$  kümesi sonlu elemanlı bir küme ise  $d(K) = 0$  olacağı açıktır. Bu tez çalışmasında, istatistiksel yakınsaklık tanımı gereğince, doğal yoğunluğu sıfır olan kümelerle çalışılacaktır. Bu çalışmalar esnasında kullanacağımız diğer bir notasyon da, bir  $P$  özelliğinin hemen hemen her  $i \in K$  için sağlanması notasyonu olacaktır. Eğer  $x = (x_i)$  dizisi, indisleri kümesinin doğal yoğunluğu sıfır olan  $i$  elemanları haricinde diğer tüm  $i$  elemanları için herhangi bir  $P$  özelliğini sağlıyorsa,  $x = (x_i)$  dizisi "hemen hemen her  $i$  için  $P$  özelliğini sağlar" denir ve (h.h.i.) şeklinde yazılarak kısaltılır. Bu tanımlar ışığında, istatistiksel yakınsaklık kavramı şu şekilde tanımlanabilir:

$x = (x_i)$  reel ya da kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer her  $\varepsilon > 0$  için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{i \leq n : |x_i - L| \geq \varepsilon\}| = 0 \quad (1.8)$$

veya bir başka ifadeyle  $|x_i - L| < \varepsilon$  (h.h.i.) olacak şekilde bir  $L$  sayısı bulunabiliyorsa bu durumda  $x$  dizisi  $L$  sayısına "istatistiksel yakınsaktır" denir ve  $st - \lim x_i = L$  ile gösterilir.

Bu ifadeyi anlamaya yönelik aşağıda bir örnek verilmiştir.

$x = (x_i)$  dizisinin genel terimi

$$x_i = \begin{cases} 1, & i = m^2 \\ 0, & i \neq m^2 \end{cases} \quad (1.9)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda dizinin elemanları  $(x_i) = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$  şeklindedir. Buna göre,

$$A = \{i \in \mathbb{N} : |x_i - 0| \geq \varepsilon\} = \{1, 4, 9, \dots\} \quad (1.10)$$

olup bu kümenin doğal yoğunluğu sıfırdır. Çünkü,

$$0 \leq \lim_n \frac{1}{n} |\{i \leq n : x_i \neq 0\}| \leq \lim_n \frac{\sqrt{n}}{n} = 0 \quad (1.11)$$

dir. Bir başka ifadeyle, her  $\varepsilon > 0$  için  $|x_i - 0| < \varepsilon$  (h.h.i.) olur.

İstatistiksel yakınsaklığın tanımından da anlaşılacağı üzere, eğer  $x$  dizisi bir  $L$  sayısına istatistiksel yakınsak ise, bu durumda  $L$  sayısının herhangi bir  $\varepsilon > 0$  komşuluğunda dizinin sonsuz çoklukta elemanı bulunurken; bu komşuluğun dışında da, indis kümesinin yoğunluğu sıfır olmak koşuluyla, sonsuz çoklukta terim bulunabilir. Bu durum istatistiksel yakınsaklığın bilinen anlamdaki yakınsaklıktan daha genel olduğunu göstermektedir. O halde, yakınsak her dizinin aynı zamanda istatistiksel yakınsak olduğu çıkarımı da yapılabilir. Bu ifadenin tersinin her zaman doğru olacağını söylemek mümkün değildir. Öyle ki, yukarıda ele alınan örnek bu durumu ispatlar niteliktedir. Çünkü örnekteki  $x$  dizisinin istatistiksel yakınsak olduğu halde yakınsak olmadığı görülmektedir.

İstatistiksel yakınsaklık kavramının tanımlanmasının ardından, birçok temel kavram bu yakınsaklık türü ile tekrar çalışılmıştır. Bunlardan birisi de limit noktası kavramıdır. Buna göre,  $x$  bir reel sayı dizisi ve  $L \in R$  olmak üzere eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{m_n} = L \text{ ve } d(M) \neq 0 \quad (1.12)$$

olacak şekilde bir  $M = \{m_1 < m_2 < \dots\}$  kümesi varsa,  $L$  sayısı  $x$  dizisinin istatistiksel limit noktası olarak adlandırılır. (Fridy, 1993)

Bu tez çalışmasının temelini oluşturacak kavramlardan birisi olan fark dizileri, 1981 yılında Kızmaz tarafından  $x = (x_i)$  reel sayı dizisi ve  $i \in N$  için  $\Delta x = (\Delta x_i) = (x_i - x_{i+1})$  şeklinde tanımlanmıştır. Kızmaz,

$$\begin{aligned} c_0(\Delta) &= \{x = (x_i) : \Delta x \in c_0\} \\ c(\Delta) &= \{x = (x_i) : \Delta x \in c\} \\ l_\infty(\Delta) &= \{x = (x_i) : \Delta x \in l_\infty\} \end{aligned} \quad (1.13)$$

uzaylarını tanımlayarak bu uzayların

$$\|x\|_\Delta = \|x_1\| + \|\Delta x\|_\infty \quad (1.14)$$

normuna göre bir BK uzay olduklarını ispatlamıştır. Burada,  $c_0, c$  ve  $l_\infty$  uzayları sırasıyla, sıfıra yakınsak, yakınsak ve sınırlı diziler uzayını göstermektedir. (Kızmaz, 1981) Fark dizileri konusunda temel oluşturan bu kaynağın ardından, Et (1993), Et ve Çolak (1995), Başarır (1995), Et ve Nuray (2001), Gümüş ve Nuray (2011) fark dizileri, genelleştirilmiş fark dizileri ve fark dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı ile ilgili çalışmalar yapmışlardır.

$$\begin{aligned} x &= (x_i) \text{ bir reel sayı dizisi ve } \Delta x = (\Delta x_i) = (x_i - x_{i+1}) \text{ olsun. } \forall \varepsilon > 0 \text{ için} \\ \lim_n \frac{1}{n} \{i \leq n : |\Delta x_i - L| \geq \varepsilon\} &= 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

başka bir ifadeyle  $|\Delta x_i - L| < \varepsilon$  (h.h.i.) oluyorsa  $x$  dizisi  $L \in R$  sayısına  $\Delta$ -istatistiksel yakınsaktır denir ve  $\Delta$ -istatistiksel yakınsak tüm dizilerin kümesi  $S(\Delta)$  ile gösterilir. (Başarır, 1995)

Bu tez çalışmasında kaba yakınsaklık ve fark dizileri ile ilgili daha önce yapılmış olan çalışmalar incelenecek ve kaba yakınsaklık ile kaba istatistiksel yakınsaklık kavramları fark dizileri için çalışılacaktır.



## 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan tanımlar ve teoremler verilecektir.

**Tanım 2.1. (Bir dizinin yakınsaklığı)**  $x_0 \in \mathbb{R}$  olmak üzere her  $\varepsilon > 0$  sayısına karşılık  $i > i_0$  şartını sağlayan  $i$  doğal sayıları için  $|x_i - x_0| < \varepsilon$  olacak şekilde  $\varepsilon$ 'a bağlı bir  $i_0$  sayısı varsa  $(x_i)$  dizisi  $x_0$  sayısına yakınsaktır denir ve bu durum  $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x_0$  şeklinde gösterilir. (Yalçınkaya, 2015)

**Teorem 2.1.** Yakınsak her dizinin limiti tektir. (Yalçınkaya, 2015)

**Tanım 2.2. (Alt dizi)**  $(x_i)$  dizisi verilmiş olsun. Her  $j \in \mathbb{N}$  için  $i_j < i_{j+1}$  olacak şekilde doğal sayıların artan  $(i_j)$  dizisini düşünelim. Bu durumda  $(x_{i_j})$  dizisine  $(x_i)$  dizisinin bir alt dizisi adı verilir. (Yalçınkaya, 2015)

**Teorem 2.2.**  $(x_i)$  dizisi  $x_0$  sayısına yakınsıyor ise bu dizinin tüm alt dizileri de aynı  $x_0$  sayısına yakınsar. (Yalçınkaya, 2015)

**Tanım 2.3. (Sınırlı Dizi)**  $\forall i \in \mathbb{N}$  için  $|x_i| \leq K$  olacak şekilde bir  $K$  pozitif reel sayısı varsa  $(x_i)$  dizisine sınırlı dizi denir. (Yalçınkaya, 2015)

**Tanım 2.4. (Yığılma noktası)**  $A \subset \mathbb{R}$  ve  $a \in \mathbb{R}$  olsun.  $a$  noktasının her bir  $\varepsilon$  komşuluğunda  $A$  kümesinin  $a$  dan farklı en az bir elemanı varsa bu  $a$  noktasına  $A$  kümesinin bir yığılma noktasıdır denir. (Yalçınkaya, 2015)

**Tanım 2.5. (Metrik ve Metrik Uzay)**  $X$ , boş olmayan bir küme olsun.  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $\forall x, y \in X$  için,

$$\mathbf{M1)} \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$\mathbf{M2)} \quad d(x, y) = d(y, x) \quad (\text{simetri özelliği})$$

$$\mathbf{M3)} \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad (\text{üçgen eşitsizliği})$$

şartlarını sağlıyorsa  $d$  fonksiyonuna  $X$  üzerinde metrik,  $(X, d)$  ikilisine de bir metrik uzay adı verilir. (Bayraktar, 2006)

**Tanım 2.6. (Cauchy Dizisi ve bir uzayın tamlığı)**  $X = (X, d)$  bir metrik uzay ve  $x = (x_i)$  bu uzayda bir dizi olsun. Verilmiş herhangi bir  $\varepsilon > 0$  için  $m, i \geq i_0$  olduğunda

$$d(x_m, x_i) < \varepsilon \tag{2.1}$$

olacak şekilde bir  $i_0 = i_0(\varepsilon)$  sayısı varsa  $(x_i)$  dizisine Cauchy dizisi denir.  $X$  deki her Cauchy dizisi yakınsaksa  $(X, d)$  metrik uzayına tam metrik uzay denir. (Bayraktar, 2006)

**Teorem 2.3.**  $(X, d)$  bir metrik uzay olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- a)  $(X, d)$  de yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir.
- b)  $(X, d)$  deki her Cauchy dizisi sınırlıdır.
- c)  $(x_i)$  ve  $(y_i)$ ,  $X$  uzayında birer Cauchy dizisi ise  $(d(x_i, y_i))$  reel dizisi yakınsaktır.

(Bayraktar, 2006)

**Tanım 2.7. (Lineer Uzay)**  $V$  boş olmayan bir küme ve  $F$ , reel sayılar veya kompleks sayılar cismi olsun. Eğer aşağıda verilmiş olan şartlar sağlanıyorsa  $V$  ye  $F$  üzerinde bir lineer uzay (veya vektör uzayı) denir.

A)  $V$ ,  $+$  işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

- G1) Her  $x, y \in V$  için  $x + y \in V$  dir.
- G2) Her  $x, y, z \in V$  için  $x + (y + z) = (x + y) + z$  dir.
- G3) Her  $x \in V$  için  $x + \theta = \theta + x = x$  olacak şekilde  $\theta \in V$  vardır.
- G4) Her  $x \in V$  için  $x + (-x) = (-x) + x = \theta$  olacak şekilde  $-x \in V$  vardır.
- G5) Her  $x, y \in V$  için  $x + y = y + x$  dir.

B)  $x, y \in V$  ve  $\alpha, \beta \in F$  olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

- V1)  $\alpha.x \in V$  dir
- V2)  $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$  dir.
- V3)  $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$  dir.
- V4)  $(\alpha\beta).x = \alpha(\beta x)$  dir.

V5)  $1_F.x = x$  ( $1_F$ ,  $F$  nin birim elemandır) (Bayraktar, 2006)

**Tanım 2.8. (Norm ve Normlu Uzay)**  $N$ , bir  $F$  cismi üzerinde bir lineer uzay ve  $\|\cdot\| : N \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon olsun.  $\|\cdot\|$  fonksiyonu  $\forall x, y \in N \forall \alpha \in F$  için aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu fonksiyona  $N$  kümesi üzerinde bir norm fonksiyonu,  $(N, \|\cdot\|)$  ikilisine de bir normlu uzay adı verilir. (Bayraktar, 2006)

- N1)  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- N2)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
- N3)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (üçgen eşitsizliği)

(2.2)

**Tanım 2.9. (Maksimum Norm)**  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  normlu uzayında  $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$  normuna maksimum norm adı verilir. (Bayraktar, 2006)

**Tanım 2.10. (Norm Metriği)**  $(N, \|\cdot\|)$  normlu uzay olsun.  $d(x, y) = \|x - y\|$  olarak tanımlanan  $d$  metriğine norm metriği denir. (Bayraktar, 2006)

**Tanım 2.11. (Banach Uzayı)**  $(N, \|\cdot\|)$  normlu uzayı, norm metriğine göre tam ise bu uzaya *Banach Uzayı* denir.  $N$  uzayının normlu reel veya kompleks oluşuna göre Banach uzayına reel veya kompleks Banach uzayı olarak adlandırılır. (Maddox, 1970)

**Tanım 2.12. (BK Uzayı)**  $X$  uzayı bir Banach uzayı olsun. Eğer her  $x \in X$  ve  $k = 0, 1, \dots$  için koordinat fonksiyonelleri sürekli ise bu durumda  $X$  uzayına *BK uzayı* adı verilir. Burada koordinat fonksiyonelleri  $P_k : X \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $P_k(x) = x_k$  olarak tanımlıdır. (Maddox, 1970)

**Tanım 2.13. ( $\Delta$  – yakınsak diziler uzayı)**  $c$ , yakınsak diziler uzayı olmak üzere  $\Delta$  – yakınsak diziler uzayı

$$c(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in c\} \quad (2.3)$$

olarak tanımlanır. Bu uzay

$$\|x\|_\Delta = |x_1| + |\Delta x|_\infty \quad (2.4)$$

normuna göre bir BK uzayıdır. (Kızmaz, 1981)

**Tanım 2.14. (Doğal Yoğunluk)**  $A \subseteq \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  ve  $\chi_A$  fonksiyonu  $A$  kümesinin karakteristik fonksiyonu olmak üzere

$$d_n(A) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \chi_A(k) \quad (2.5)$$

olarak tanımlansın.

$$\underline{d}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf d_n(A), \quad \bar{d}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup d_n(A) \quad (2.6)$$

sırasıyla  $A$  kümesinin alt ve üst doğal yoğunluğu olarak adlandırılır. Eğer

$$d(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n(A) \quad (2.7)$$

limiti mevcut ise bu limite  $A$  kümesinin doğal yoğunluğu denir. (Niven, 1951)

**Tanım 2.15. (İstatistiksel Limit)** Reel sayıların bir  $x = (x_i)$  dizisi verilmiş olsun.  $|A|$ ,  $A$  kümesinin eleman sayısı ve  $L \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $\forall \varepsilon > 0$  için

$$d(\{i \leq n : |x_i - L| \geq \varepsilon\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{i \leq n : |x_i - L| \geq \varepsilon\}| = 0 \quad (2.8)$$

oluyorsa  $x$  dizisi  $L$  sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve  $st - \lim x = L$  ile gösterilir. Bu durumda  $L$  sayısına  $x$  dizisinin istatistiksel limiti adı verilir. İstatistiksel yakınsak tüm diziler kümesi  $S$  ile gösterilir. (Fast, 1951)

**Teorem 2.4.**  $d$  fonksiyonu  $A$  kümesinin doğal yoğunluğu olmak üzere  $st - \lim x = L$  olması için gerek ve yeter şart  $\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = L$  ve  $d(\{n \in N : x_i \neq y_i\}) = 0$  olacak şekilde yakınsak bir  $y = (y_i)$  dizisinin var olmasıdır. (Fast, 1951)

**Tanım 2.16. (İstatistiksel Cauchy Dizisi)** Reel sayıların bir  $x = (x_i)$  dizisi verilmiş olsun.

$\forall \varepsilon > 0$  için

$$d(\{i \in N : |x_i - x_N| \geq \varepsilon\}) = 0 \quad (2.9)$$

olacak şekilde bir  $N = N(\varepsilon)$  sayısı bulunabilirse  $x$  dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir.

**Teorem 2.5.**  $x$  bir sayı dizisi olmak üzere,  $x$  in istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart  $x$  in istatistiksel Cauchy dizisi olmasıdır. (Fridy, 1985)

**Tanım 2.17. (İstatistiksel Limit Noktası)**  $x$  dizisi bir reel sayı dizisi ve  $L \in R$  olmak üzere

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_{m_i} = L \text{ ve } d(M) \neq 0 \quad (2.10)$$

olacak şekilde bir  $M = \{m_1 < m_2 < \dots\}$  kümesi varsa  $L$  sayısına  $x$  dizisinin istatistiksel limit noktası denir. (Fridy, 1993)

**Tanım 2.18. (İstatistiksel Yığılma Noktası)**  $x = (x_i)$  dizisi verilmiş olsun.  $\forall \varepsilon > 0$  için

$d(\{i \in N : |x_i - \gamma|\}) \neq 0$  ise  $\gamma$  sayısına  $x$  dizisinin istatistiksel yığılma noktası denir. (Fridy, 1993)

**Teorem 2.6.** Eğer  $x = (x_i)$  sınırlı bir sayı dizisi ise bu durumda istatistiksel yığılma noktasına sahiptir. (Fridy, 1993)

### 3. FARK DİZİLERİNİN KABA YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde, sonlu boyutlu bir normlu uzayda kaba yakınsaklık kavramı ve bazı temel özellikleri fark dizileri için çalışılacaktır. Bazı tanımlar, örnekler ve sonuçlar verildikten sonra  $\Delta$ -kaba yakınsaklık,  $\Delta$ -kaba limit noktaları ve  $\Delta$ -kaba yığılma noktaları kavramları tanımlanacaktır.

**Tanım 3.1.**  $(X, \|\cdot\|)$  bir normlu uzay,  $r$  negatif olmayan bir reel sayı ve  $(x_i)$ ,  $X$  uzayında bir dizi olsun.  $x = (x_i)$  dizisi için  $\Delta x = (\Delta x_i) = (x_i - x_{i+1})$  olmak üzere, eğer  $\forall \varepsilon > 0$  için  $i \geq i_\varepsilon$  olduğunda

$$\|\Delta x_i - x_*\| < r + \varepsilon \quad (3.1)$$

olacak şekilde en az bir  $i_\varepsilon$  sayısı bulunabilirse veya buna denk olarak,

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \|\Delta x_i - x_*\| \leq r \quad (3.2)$$

koşulu sağlanıyorsa  $(\Delta x_i)$  fark dizisi  $x_* \in X$  noktasına kaba yakınsaktır veya kısaca  $r$ -yakınsaktır denir.

Kaba yakınsaklık söz konusu olduğunda limit noktaları kümesi söz konusu olacağından fark dizilerinin de  $r$ -limit noktaları kümesinden bahsetmek gerekir. Sözü edilen bu küme  $LIM^r \Delta x_i$  ile gösterilir.

**Örnek 3.1:**  $\Delta y_i = 0,5 + 2 \frac{(-1)^i}{i}$ ,  $i=1,2,\dots$  olsun. Bu dizi yardımıyla tanımlanan  $(\Delta x_i)$  dizisinin yakınsak olup olmadığını söylemek mümkün değildir fakat kaba yakınsak olduğu gösterilebilir.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left( 0,5 + 2 \frac{(-1)^i}{i} \right) = 0,5 \quad (3.3)$$

olduğundan bu dizi 0,5 sayısına yakınsaktır. Bunun anlamı şudur ki, yeteri derecede büyük  $i$  sayıları için bu dizinin  $i$  den sonraki terimlerini tam olarak saymak mümkün değildir. Sadece en yakın sayıya yuvarlanabilir. Eğer  $z$  sayısı  $z - 0,5 \leq \Delta y_i < z + 0,5$  şartını sağlayan bir tam sayı ve  $\Delta x_i = rd(\Delta y_i) = z$  olarak seçilirse  $\Delta y_i$  değerleri yerine yazılarak elde edilen  $\Delta x$  dizisi  $\Delta x_1 = -1$ ,  $\Delta x_2 = 2$  ve  $j = 2,3,\dots$  için  $\Delta x_{2j} = 1$ ,  $\Delta x_{2j-1} = 0$  yani;

$$(\Delta x_i) = (-1, 2, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots) \quad (3.4)$$

şeklinde olacaktır. Görüldüğü üzere  $\Delta x$  dizisi yakınsak değildir fakat  $r = 0,5$  kabalık derecesi için  $x_* = 0.5$  sayısına kaba yakınsaktır. O halde

$$LIM^r \Delta x_i = \begin{cases} \emptyset, & r < 0,5 \\ [1-r, r], & r \geq 0,5 \end{cases} \quad (3.5)$$

şeklindedir.

**Örnek 3.2.**  $x_i = \begin{cases} 2, & i \text{ tek ise} \\ 1, & i \text{ çift ise} \end{cases}$  dizisini ele alalım. Bu durumda  $(\Delta x_i) = (-1)^i$  olur. Görüldüğü

üzere  $(\Delta x_i)$  dizisi yakınsak değildir fakat  $r$ -yakınsaktır. Çünkü,

$$-r - \varepsilon + \Delta x_i < x_* < r + \varepsilon + \Delta x_i \quad (3.6)$$

olmak üzere,  $(\Delta x_i) = (\Delta x_{2i}) = (1, 1, 1, \dots)$  ise  $\forall \varepsilon > 0$  için

$$\begin{aligned} -r - \varepsilon < 1 - x_* < r + \varepsilon &\Rightarrow 1 - r - \varepsilon < x_* < 1 + r + \varepsilon \\ &\Rightarrow x_* \in [1 - r, 1 + r] \end{aligned} \quad (3.7)$$

ve  $(\Delta x_{2i-1}) = (-1, -1, -1, \dots)$  ise  $\forall \varepsilon > 0$  için

$$\begin{aligned} -r - \varepsilon < 1 - x_* < r + \varepsilon &\Rightarrow -1 - r - \varepsilon < x_* < -1 + r + \varepsilon \\ &\Rightarrow x_* \in [-1 - r, -1 + r] \end{aligned} \quad (3.8)$$

elde edilir. Böylece

$$LIM^r \Delta x_i = \begin{cases} \emptyset, & r < 1 \\ [1 - r, -1 + r], & r \geq 1 \end{cases} \quad (3.9)$$

şeklinde bulunur.

**Örnek 3.3.**  $\Delta x = (\Delta x_i) \in \mathbb{R}$  ve  $(\Delta x_i) = \left(1 + \frac{1}{i}\right)$  olarak tanımlansın.  $(\Delta x_i)$  dizisi hem bilinen anlamda yakınsak hem de kaba yakınsaktır. Çünkü,

$$-r - \varepsilon + \Delta x_i < x_* < r + \varepsilon + \Delta x_i \Rightarrow -r - \varepsilon + 1 + \frac{1}{i} < x_* < r + \varepsilon + 1 + \frac{1}{i} \quad (3.10)$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ için } \frac{1}{i} \rightarrow 0, x_* \in [1 - r, 1 + r]$$

ve böylece  $\Delta x = (\Delta x_i)$  dizisinin  $r$ -limit kümesi  $LIM^r \Delta x_i = [1 - r, 1 + r]$  şeklindedir.

**Sonuç 3.1.**  $LIM^r \Delta x_i \neq \emptyset$  ise

$$LIM^r \Delta x_i = [\limsup \Delta x_i - r, \liminf \Delta x_i + r] \quad (3.11)$$

şeklindedir.

**Tanım 3.2.**  $X$  bir normlu uzay ve  $S \subseteq X$  olsun.  $S$  alt kümesinde tanımlanan  $r$ -limit noktaları kümesi,

$$LIM^{S,r} \Delta x_i = \left\{ x_* \in X : \Delta x_i \xrightarrow{r} x_* \right\} \quad (3.12)$$

şeklinde tanımlanır.

Bu tanıma göre,

$$LIM^{X,r} \Delta x_i = LIM^r \Delta x_i \text{ ve } LIM^{S,r} \Delta x_i = S \cap LIM^r \Delta x_i \quad (3.13)$$

dir.

Bilindiği üzere, klasik anlamda yakınsak bir dizi sınırlıdır, bir tek limite sahiptir ve dizinin her bir alt dizisi aynı noktaya yakınsar. Bu durumların fark dizileri ve kaba yakınsaklık için nasıl karşılık bulacağı aşağıdaki teoremlerde açıklanacaktır.

**Teorem 3.1.**  $(\Delta x_i)$  fark dizisinin  $r$  – limit noktaları kümesinin çapı  $2r$ 'den büyük değildir.

Genellikle daha küçük bir sınırı yoktur.

**İspat:** Bu ispat için,

$$diam(LIM^r \Delta x_i) \leq 2r \quad (3.14)$$

olduğu gösterilmelidir.

Kabul edelim ki  $diam(LIM^r \Delta x_i) = \sup \{ \|y - z\| : y, z \in LIM^r \Delta x_i \} > 2r$  olsun. Bu durumda  $d := \|y - z\| > 2r$  koşulunu sağlayan  $y, z \in LIM^r \Delta x_i$  elemanları mevcuttur. Keyfi bir  $\varepsilon \in (0, \frac{d}{2} - r)$  için,  $y \in LIM^r \Delta x_i$  olduğundan,

$$\exists i_{\varepsilon_1} \in \mathbb{N} \text{ vardır ki her } i \geq i_{\varepsilon_1} \text{ için } \|\Delta x_i - y\| < r + \varepsilon \quad (3.15)$$

yazılır. Benzer şekilde,  $z \in LIM^r \Delta x_i$  olduğundan,

$$\exists i_{\varepsilon_2} \in \mathbb{N} \text{ vardır ki her } i \geq i_{\varepsilon_2} \text{ için } \|\Delta x_i - z\| < r + \varepsilon \quad (3.16)$$

olur.  $i_\varepsilon := \max\{i_{\varepsilon_1}, i_{\varepsilon_2}\}$  seçilirse,

$$\|y - z\| \leq \|\Delta x_i - y\| + \|\Delta x_i - z\| < 2(r + \varepsilon) < 2r + 2\left(\frac{d}{2} - r\right) = d \quad (3.17)$$

elde edilir ki bu  $d := \|y - z\|$  olması ile çelişir. O halde  $diam(LIM^r \Delta x_i) > 2r$  olması mümkün değildir.

Şimdi bu kümenin genellikle daha küçük bir sınıra sahip olmadığını gösterelim.  $\lim \Delta x_i = x_*$  olacak şekilde yakınsak bir  $(\Delta x_i)$  dizisini ele alalım.  $\bar{B}_r(x_*)$ ,  $x_*$  merkezli  $r$  yarıçaplı kapalı yuvar yani

$$\bar{B}_r(x_*) := \{y \in X : \|y - x_*\| \leq r\} \quad (3.18)$$

olmak üzere  $y \in \bar{B}_r(x_*)$  için,

$$\|\Delta x_i - y\| \leq \|\Delta x_i - x_*\| + \|x_* - y\| \leq \|\Delta x_i - x_*\| + r \quad (3.19)$$

yazılabilir.  $i \rightarrow \infty$  için  $\lim \Delta x_i = x_*$  olduğundan yeterince büyük  $i$  ler için  $\|\Delta x_i - y\| \leq \varepsilon + r$  olur

Bu durum her  $y$  için doğru olacağından  $LIM^r \Delta x_i = \bar{B}_r(x_*)$  elde edilir.  $diam \bar{B}_r(x_*) = 2r$

olduğu bilindiğinden bu demektir ki  $LIM^r \Delta x_i$  kümesinin çapı  $2r$  'den küçük alınamaz.

Klasik anlamdaki yakınsaklıkta limitin tekliği, yukarıdaki teoremin özel bir hali olarak düşünülebilir. Çünkü  $r = 0$  ise

$$diam(LIM^r \Delta x_i) = 2r = 0 \quad (3.20)$$

yani  $LIM^r \Delta x_i$  ya boş ya da tek nokta kümesidir.

**Teorem 3.2.**  $(\Delta x_i)$  dizisinin sınırlı olması için gerek ve yeter şart  $LIM^r \Delta x_i \neq \emptyset$  olacak şekilde bir  $r \geq 0$  sayısının var olmasıdır. Aynı zamanda,  $\forall r > 0$  için sınırlı bir  $(\Delta x_i)$  dizisi her zaman  $LIM^{(\Delta x_{i_j})^r} \Delta x_{i_j} \neq \emptyset$  özelliğini sağlayan bir  $(\Delta x_{i_j})$  alt dizisini içerir.

**İspat:** Kabul edelim ki  $LIM^r \Delta x_i \neq \emptyset$  olsun. Bu durumda, eğer  $s := \sup \{\|\Delta x_i\| : i \in \mathbb{N}\} < \infty$  ise  $LIM^s \Delta x_i$  kümesi  $X$ 'in orijini içerir. Diğer yandan, eğer bazı  $r \geq 0$  sayıları için  $LIM^r \Delta x_i \neq \emptyset$  ise, tüm sonlu  $\Delta x_i$  elemanları, yarıçapı  $r$  'den daha büyük olan yuvarlar tarafından kapsanır. Dolayısıyla  $(\Delta x_i)$  dizisi sınırlıdır.

Şimdi kabul edelim ki  $(\Delta x_i)$  sonlu boyutlu bir normlu uzayda sınırlı olsun. Bu durumda yakınsak bir  $(\Delta x_{i_j})$  alt dizisine sahip olduğu açıktır. Bu alt dizinin limit noktası  $x_*$  olsun.

Buradan  $LIM^r \Delta x_{i_j} = \bar{B}_r(x_*)$  ve  $r > 0$  için

$$LIM^{(\Delta x_{i_j})^r} \Delta x_{i_j} = \left\{ \Delta x_{i_j} : \|x_* - \Delta x_{i_j}\| \leq r \right\} \neq \emptyset \quad (3.21)$$

elde edilir.

Bilindiği gibi, yakınsak bir dizinin her alt dizisi aynı limit noktasına yakınsar. Aşağıdaki teorem bu özelliğin kaba yakınsak fark dizileri için de benzer şekilde olacağını gösterir.

**Teorem 3.3.**  $(\Delta x_{i_j}), (\Delta x_i)$  dizisinin bir alt dizisi ise,  $LIM^r \Delta x_i \subseteq LIM^r \Delta x_{i_j}$  dir.

**İspat:** Kabul edelim ki  $(\Delta x_{i_j}), (\Delta x_i)$  dizisinin bir alt dizisi ve  $x_* \in LIM^r \Delta x_i$  olsun. Bu durumda yeterince büyük  $i$  'ler için

$$\|\Delta x_i - x_*\| < r + \varepsilon \quad (3.22)$$

olur.  $(\Delta x_{i_j})$ ,  $(\Delta x_i)$  dizisinin alt dizisi olduğundan yine yeterince büyük  $i_j$ 'ler için

$$\|\Delta x_{i_j} - x_*\| < r + \varepsilon \quad (3.23)$$

olur ki bu da  $x_* \in LIM^r \Delta x_{i_j}$  olması demektir. O halde  $LIM^r \Delta x_i \subseteq LIM^r \Delta x_{i_j}$  sağlanır.

$r$ -limit noktaları kümesinin geometrik ve topolojik özelliklerinin bilinmesi de oldukça önemlidir. Bu özellikler aşağıda verilen teoremlerde açıklanacaktır.

**Teorem 3.4.**  $\forall r \geq 0$  için keyfi bir  $(\Delta x_i)$  dizisinin  $LIM^r \Delta x_i$  kümesi kapalıdır.

**İspat:** Bu ispat için iyi bilinen " $\Delta y_i \rightarrow y_*$  yakınsak dizisi için  $y \in LIM^r \Delta x_i$  olduğunda aynı zamanda  $y_* \in LIM^r \Delta x_i$  oluyorsa  $LIM^r \Delta x_i$  kümesi kapalıdır." teoremini kullanacağız. Şimdi kabul edelim ki  $(\Delta y_i)$  dizisi  $y \in LIM^r \Delta x_i$  ve  $\Delta y_i \rightarrow y_*$  şeklinde bir dizi olsun. Her  $\varepsilon > 0$  ve  $\forall i \geq i_{\varepsilon/2}$ ,  $\|\Delta y_{j_{\varepsilon/2}} - y_*\| < \frac{\varepsilon}{2}$ , ve  $\|\Delta x_i - \Delta y_{j_{\varepsilon/2}}\| < r + \frac{\varepsilon}{2}$  olacak şekilde  $j_{\varepsilon/2}$  ve  $i_{\varepsilon/2}$  sayıları vardır. Dolayısıyla  $\forall i \geq i_{\varepsilon/2}$  için

$$\|\Delta x_i - x_*\| \leq \|\Delta x_i - \Delta y_{j_{\varepsilon/2}}\| + \|\Delta y_{j_{\varepsilon/2}} - y_*\| < r + \varepsilon \quad (3.24)$$

bulunur ki bu ifade bize  $y_* \in LIM^r \Delta x_i$  oluşunu verir

**Tanım 3.3.**  $X$  normlu uzayında  $\|z_0\| = \|z_1\| = 1$  ve  $z_0 \neq z_1$  koşulunu sağlayan  $z_0$  ve  $z_1$  elemanları ve  $0 < \lambda < 1$  skaleri için  $\|(1-\lambda)z_0 + \lambda z_1\| < 1$  oluyorsa  $X$  uzayı kesin konveks normlu uzaydır.

**Teorem 3.5.**

a)  $y_0 \in LIM^{r_0} \Delta x_i$  ve  $y_1 \in LIM^{r_1} \Delta x_i$  ise,  $\lambda \in [0,1]$  için  $y_\lambda = (1-\lambda)y_0 + \lambda y_1 \in LIM^{(1-\lambda)r_0 + \lambda r_1} \Delta x_i$  dir.

b)  $LIM^r \Delta x_i$  konvektir.

c)  $(X, \|\cdot\|)$  sonlu boyutlu kesin konveks uzay ise (yani kapalı birim yuvar kesin konveks ise)

$LIM^r \Delta x_i$  kesin konvektir. Yani  $y_0, y_1 \in LIM^r \Delta x_i$  ve  $y_0 \neq y_1$  iken  $\forall \lambda \in (0,1)$  için  $y_\lambda \in (LIM^r \Delta x_i)^o$  olur.

**İspat:**

a) Tanım gereğince,  $y_0 \in LIM^{r_0} \Delta x_i$  ve  $y_1 \in LIM^{r_1} \Delta x_i$  olduğundan  $\forall \varepsilon > 0$  için  $i \geq i_\varepsilon$  için

$\|\Delta x_i - y_0\| < r_0 + \varepsilon$  ve  $\|\Delta x_i - y_1\| < r_1 + \varepsilon$  şartlarını sağlayan bir  $i_\varepsilon$  vardır. Buradan,

$$\begin{aligned}
\|\Delta x_i - y_\lambda\| &\leq (1-\lambda)\|\Delta x_i - y_0\| + \lambda\|\Delta x_i - y_1\| \\
&< (1-\lambda)(r_0 + \varepsilon) + \lambda(r_1 + \varepsilon) \\
&= (1-\lambda)r_0 + \lambda r_1 + \varepsilon
\end{aligned} \tag{3.25}$$

sağlanır. Buradan,  $y_\lambda \in LIM^{(1-\lambda)r_0 + \lambda r_1} \Delta x_i$  elde edilir.

b) Özel olarak,  $r = r_0 = r_1$  olarak seçilirse a) şikkından  $LIM^r \Delta x_i$  nin konveks olduğu hemen sağlanır.

c)  $(X, \|\cdot\|)$  sonlu boyutlu kesin konveks uzay olsun.  $LIM^r \Delta x_i$  nin kesin konveksliğini kanıtlamak için  $y_0, y_1 \in LIM^r \Delta x_i$  ve  $y_0 \neq y_1$  için

$$y_{0.5} = \frac{1}{2}(y_0 + y_1) \in \text{int}(LIM^r \Delta x_i) \tag{3.26}$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Çünkü  $0 < \lambda < 1$  aralığındaki her bir  $\lambda$  sayısına karşılık gelen  $y_\lambda$  noktaları için  $y'_0 \neq y'_1$  ve  $y_\lambda = \frac{1}{2}(y'_0 + y'_1)$  olacak şekilde  $y'_0, y'_1 \in LIM^r \Delta x_i$  vardır.

$(\Delta x_i)$  dizisinin yığılma noktaları kümesi  $C_{\Delta x}$  olsun.  $C_{\Delta x}$  kümesi kapalıdır. Ayrıca  $LIM^r \Delta x_i$  kümesi boştan farklı olduğundan  $(\Delta x_i)$  dizisi sınırlıdır.  $X$  sonlu boyutlu normlu uzay ve  $(\Delta x_i)$  dizisi sınırlı olduğundan,  $C_{\Delta x}$  kümesi boş olmayan sınırlı bir kümedir. O halde bir  $\tilde{c} \in C_{\Delta x}$  için,

$$\|\tilde{c} - y_{0.5}\| = \max_{c \in C_{\Delta x}} \|c - y_{0.5}\| \tag{3.27}$$

yazılabilir.  $y_0, y_1 \in LIM^r_{\Delta x_i}$  olduğu için,

$$\|\tilde{c} - y_0\| \leq r \text{ ve } \|\tilde{c} - y_1\| \leq r \tag{3.28}$$

olur.  $X$  uzayı kesin konveks uzay olduğundan

$$\begin{aligned}
\|\tilde{c} - y_{0.5}\| &= \|0.5(\tilde{c} - y_0) + 0.5(\tilde{c} - y_1)\| \\
&< \max\{\|\tilde{c} - y_0\|, \|\tilde{c} - y_1\|\} \leq r
\end{aligned} \tag{3.29}$$

eşitsizlikleri sağlanır.  $\sigma := r - \|\tilde{c} - y_{0.5}\| > 0$  olarak seçilsin.  $\forall c \in C_{\Delta x}$  ve  $\forall y \in B_\sigma(y_{0.5})$  için

$$\begin{aligned}
\|c - y\| &\leq \|c - y_{0.5}\| + \|y_{0.5} - y\| \\
&\leq \|\tilde{c} - y_{0.5}\| + \sigma = r
\end{aligned} \tag{3.30}$$

dolayısıyla  $y \in LIM^r \Delta x_i$  elde edilir. Böylece  $y_{0.5} \in \text{int}(LIM^r \Delta x_i)$  bulunur.

### 3.1. Kaba Yakınsaklığın Diğer Yakınsaklık Türleri İle İlişkisi

Bu bölümde, fark dizilerinin kaba yakınsaklığı ve diğer yakınsaklık türleri arasındaki ilişkiler incelenecektir.

**Teorem 3.1.1.**  $r_1 \geq 0$  ve  $r_2 \geq 0$  olsun.  $X$  normlu uzayında

$$\Delta x_i \xrightarrow{(r_1+r_2)} x_* \Leftrightarrow \Delta y_i \xrightarrow{r_1} x_* \text{ ve } \|\Delta x_i - \Delta y_i\| \leq r_2 \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (3.31)$$

olacak şekilde  $(\Delta y_i) \in X$  dizisi vardır.

**İspat:**  $(\Leftarrow)$   $\Delta y_i \xrightarrow{r_1} x_*$  ve  $\|\Delta x_i - \Delta y_i\| \leq r_2$  olduğunu kabul edelim. Yani  $\forall \varepsilon > 0$  ve  $i \geq i_\varepsilon$  için

$$\begin{aligned} \|\Delta y_i - x_*\| &\leq r_1 + \varepsilon \text{ olacak şekilde bir } i_\varepsilon \text{ sayısı vardır. } \|\Delta x_i - \Delta y_i\| \leq r_2 \text{ olduğundan } i \geq i_\varepsilon \text{ için,} \\ \|\Delta x_i - x_*\| &\leq \|\Delta x_i - \Delta y_i\| + \|\Delta y_i - x_*\| < r_1 + r_2 + \varepsilon \end{aligned} \quad (3.32)$$

ifadesi sağlanır. Buradan,  $(\Delta x_i)$  dizisinin  $x_*$  noktasına  $(r_1 + r_2)$ -yakınsak olduğu görülür.

$(\Rightarrow)$  Şimdi de  $(\Delta x_i)$  dizisinin  $x_*$  noktasına  $(r_1 + r_2)$ -yakınsak olduğunu kabul edelim.

$$\Delta y_i := \begin{cases} x_*, & \|\Delta x_i - x_*\| \leq r_2 \\ \Delta x_i + r_2 \frac{x_* - \Delta x_i}{\|\Delta x_i - x_*\|}, & \|\Delta x_i - x_*\| > r_2 \end{cases} \quad (3.33)$$

olmak üzere,

$$\|\Delta y_i - x_*\| \leq \begin{cases} 0, & \|\Delta x_i - x_*\| \leq r_2 \\ \|\Delta x_i - x_*\|, & \|\Delta x_i - x_*\| > r_2 \end{cases} \quad (3.34)$$

ve  $i = 1, 2, \dots$  için  $\|\Delta x_i - \Delta y_i\| \leq r$  olur.  $(\Delta x_i) \xrightarrow{r_1+r_2} x_*$  olduğu için  $x_* \in LIM^{r_1+r_2} \Delta x_i$  iken

$\limsup \|\Delta x_i - x_*\| \leq r_1 + r_2$  ve dolayısıyla

$$\limsup \|\Delta y_i - x_*\| \leq r_1 \quad (3.35)$$

olur ki bu da  $(\Delta y_i) \xrightarrow{r_1} x_*$  olması demektir.

Özel olarak  $r_1 = 0$  ve  $r_2 = r > 0$  için,  $(\Delta y_i)$  dizisi  $x_*$  noktasına  $r$ -yakınsak ve  $\|\Delta x_i - \Delta y_i\| \leq r$

$(i = 1, 2, \dots)$  olacak şekilde bir  $(\Delta y_i)$  dizisi varsa  $(\Delta x_i)$  dizisi  $x_*$  'a  $r$ -yakınsaktır.

Bilindiği üzere,  $r$ , yaklaşım hatasını bir üst sınırı olduğunda  $(\Delta x_i)$  dizisinin  $(\Delta y_i) \rightarrow x_*$  olan bir

yaklaşımı dikkate alındığında  $\Delta x_i \xrightarrow{r} x_*$  olacaktır. Diğer yandan,  $(\Delta x_i)$  dizisi  $x_*$  noktasına  $r$ -

yakınsak ise bu durumda  $\Delta y_i \xrightarrow{n_1} x_*$  olan bir  $(\Delta y_i)$  dizisi vardır. (yani  $\forall i \in \mathbb{N}$  için  $\|\Delta x_i - \Delta y_i\| \leq r$  dir.)

**Teorem 3.1.2.**  $(\Delta x_i)$  dizisi  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  normlu uzayında  $x_*$  sayısına yakınsak bir dizi olsun.  $[\alpha]$  ifadesi  $\alpha$  reel sayısının tam kısmı olmak üzere  $\Delta x = (\Delta x^1, \Delta x^2, \dots, \Delta x^n) \in \mathbb{R}^n$  için  $[\Delta x] := ([\Delta x^1], [\Delta x^2], \dots, [\Delta x^n])$  şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

a)  $\|\cdot\|$  normu maksimum norm olmak üzere  $x_* \in LIM^1[\Delta x_i]$  ve  $LIM^{0,5}[\Delta x_i] \neq \emptyset$  dir.

b)  $\|x\|_{\tilde{o}} = \left( \sum_{k=0}^N |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$  Öklid normu olmak üzere  $x_* \in LIM^{\sqrt{N}}[\Delta x_i]$  ve  $LIM^{0,5\sqrt{n}}[\Delta x_i] \neq \emptyset$  dir.

**İspat:**  $\forall i \in \mathbb{N}$  ve  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  için  $0 \leq \Delta x_i^j - [\Delta x_i^j] < 1$  olduğundan

$$\|\Delta x_i - [\Delta x_i]\| < \begin{cases} 1, & \|\cdot\| \text{ maksimum normu ise} \\ \sqrt{n}, & \|\cdot\| \text{ Öklid normu ise} \end{cases} \quad (3.36)$$

olur. Teorem 3.1.1 gereğince,

$$r = \begin{cases} 1, & \|\cdot\| \text{ maksimum normu ise} \\ \sqrt{n}, & \|\cdot\| \text{ Öklid normu ise} \end{cases} \quad (3.37)$$

olduğunda  $x_* \in LIM^r \Delta x_i$  olur. Şimdi  $\tilde{x}_* := [x_*] - (0.5, 0.5, \dots, 0.5)$  olsun.  $(\Delta x_i) \rightarrow x_*$  olduğu

için  $[x_*^j] - 1 < \Delta x_i^j < [x_*^j] + 1$   $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  ve  $i \geq i_*$  şartını sağlayan bir  $i_*$  vardır. Burada

$[\Delta x_i^j] \in \{[x_*^j] - 1, [x_*^j]\}$  ifadesi sağlanır.  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$   $i \geq i_*$  için  $|\Delta x_i^j - \tilde{x}_*^j| = 0.5$  olur.

Böylece  $i \geq i_*$  için,

$$\|[\Delta x_i] - \tilde{x}_*\| = \begin{cases} 0.5, & \|\cdot\| \text{ maksimum normu ise} \\ 0.5\sqrt{n}, & \|\cdot\| \text{ Öklid normu ise} \end{cases} \quad (3.38)$$

elde edilir. O halde tanımdan,

$$r = \begin{cases} 0.5, & \|\cdot\| \text{ maksimum normu ise} \\ 0.5\sqrt{n}, & \|\cdot\| \text{ Öklid normu ise} \end{cases} \quad (3.39)$$

için  $\tilde{x}_* \in LIM^r[\Delta x_i]$  olur.

**Teorem 3.1.3.**  $(\Delta x_i) \subset \mathbb{R}^n$  dizisinin  $x_*$  noktasına yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$LIM^r \Delta x_i = \overline{B}_r(x_*)$  olmasıdır.

**İspat:** Kabul edelim ki  $(\Delta x_i)$  dizisi  $x_*$  noktasından farklı bir  $x'_*$  yığılma noktasına sahip olsun.

Bu durumda

$$\bar{x}_* := x_* + \frac{r}{\|x_* - x'_*\|} (x_* - x'_*) \quad (3.40)$$

olarak verilen  $\bar{x}_*$  noktası,

$$\|\bar{x}_* - x'_*\| = r + \|x_* - x'_*\| > r \quad (3.41)$$

şartını sağlar.  $x'_*$  noktası bir yığılma noktası olduğundan bir önceki eşitsizlik  $\bar{x}_* \notin LIM^r \Delta x_i$  oluşunu verir ki bu da  $\|\bar{x}_* - x_*\| = r$  ve  $LIM^r \Delta x_i = \bar{B}_r(x_*)$  olması ile çelişir. Yani  $x_*$  noktası sonlu boyutlu normlu uzayda dizinin tek yığılma noktasıdır. Böylece  $\Delta x_i \rightarrow x_*$  dır.

**Teorem 3.1.4.**  $(\Delta x_i)$  dizisi sonlu boyutlu kesin konveks  $(X, \|\cdot\|)$  uzayında bir dizi olsun. Eğer  $\|y_1 - y_2\| = 2r$  koşulunu sağlayan  $y_1, y_2 \in LIM^r \Delta x_i$  varsa  $(\Delta x_i)$  dizisi  $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$  ye yakınsar.

**İspat:**  $y_3$ ,  $(\Delta x_i)$  dizisinin keyfi bir yığılma noktası olsun.  $y_1, y_2 \in LIM^r \Delta x_i$  için

$$\|y_1 - y_3\| \leq r \text{ ve } \|y_2 - y_3\| \leq r \quad (3.42)$$

olacaktır. Diğer yandan

$$2r = \|y_1 - y_2\| \leq \|y_1 - y_3\| + \|y_2 - y_3\| \quad (3.43)$$

olduğundan  $\|y_1 - y_3\| = \|y_2 - y_3\| = r$  olur. Buradan,

$$\frac{1}{2}(y_2 - y_1) = \frac{1}{2}(y_3 - y_1) + \frac{1}{2}(y_2 - y_3) \text{ ve } \left\| \frac{1}{2}(y_2 - y_1) \right\| = r \quad (3.44)$$

ve normlu uzayın kesin konveksliği göz önüne alındığında,

$$\frac{1}{2}(y_2 - y_1) = y_3 - y_1 = y_2 - y_3 \quad (3.45)$$

elde edilir. Böylece  $y_3 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$  olur ki bu  $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$  noktasının  $(\Delta x_i)$  dizisinin tek yığılma noktası olması anlamına gelir.  $X$  sonlu boyutlu bir normlu uzay ve  $(\Delta x_i)$  sınırlı olduğundan yığılma noktaları kümesi boş değildir. Sonuç olarak  $(\Delta x_i)$  dizisi  $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$  noktasına yakınsaktır.

**Teorem 3.1.5.**

**a)**  $c$  noktası  $(\Delta x_i)$  dizisinin bir yığılma noktası ise  $LIM^r \Delta x_i \subseteq \bar{B}_r(c)$  dir.

**b)**  $C$  kümesi,  $(\Delta x_i) \subset \mathbb{R}^n$  dizisinin yığılma noktaları kümesi olsun. Bu durumda,

$$LIM^r \Delta x_i = \bigcap_{c \in C} \bar{B}_r(c) = \left\{ x_* \in \mathbb{R}^n : C \subseteq \bar{B}_r(x_*) \right\} \quad (3.46)$$

dir.

**İspat:**

**a)**  $c, (\Delta x_i)$  dizisinin bir yığılma noktası olmak üzere  $\forall x_* \in LIM^r \Delta x_i$  için  $\|x_* - c\| \leq r$  dir, aksi halde  $\|x_* - \Delta x_i\| > r + \varepsilon$ ,  $\varepsilon := (\|x_* - c\| - r)/2 > 0$  şartını sağlayan sonsuz sayıda  $\Delta x_i$  mevcut olurdu. Dolayısıyla  $LIM^r \Delta x_i \subseteq \bar{B}_r(c)$  olmalıdır.

**b)** Bir önceki ispattan,  $LIM^r \Delta x_i \subseteq \bigcap_{c \in C} \bar{B}_r(c)$  dir. Eğer  $y \in \bigcap_{c \in C} \bar{B}_r(c)$  ise  $\forall c \in C$  için  $\|y - c\| \leq r$

ve bu da  $C \subseteq \bar{B}_r(y)$  ifadesine eşittir. Yani

$$\bigcap_{c \in C} \bar{B}_r(c) \subseteq \left\{ x_* \in \mathbb{R}^n : C \subseteq \bar{B}_r(x_*) \right\}. \quad (3.47)$$

Eğer  $y \notin LIM^r \Delta x_i$  ise tanımdan,  $\|\Delta x_i - y\| \geq r + \varepsilon$  şartını sağlayan sonsuz tane  $\Delta x_i$  olacak şekilde bir  $\varepsilon > 0$  vardır. Bu ise  $\|y - c\| \geq r + \varepsilon$  şartını sağlayan bir  $c$  yığılma noktasının varlığını gösterir yani  $C \not\subseteq \bar{B}_r(y)$  ve  $y \notin \left\{ x_* \in \mathbb{R}^n : C \subseteq \bar{B}_r(x_*) \right\}$  dir. Böylece,

$y \in \left\{ x_* \in \mathbb{R}^n : C \subseteq \bar{B}_r(x_*) \right\}$  dan  $y \in LIM^r \Delta x_i$  sağlanır. Yani,

$$\left\{ x_* \in \mathbb{R}^n : C \subseteq \bar{B}_r(x_*) \right\} \subseteq LIM^r \Delta x_i \quad (3.48)$$

elde edilir.

**Teorem 3.1.6.**  $LIM^r \Delta x_i = LIM^r \inf \bar{B}_r(\Delta x_i)$  dir.

**İspat:** Öncelikle  $LIM^r \Delta x_i \subseteq LIM^r \inf \bar{B}_r(\Delta x_i)$  olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki  $y \in LIM^r \Delta x_i$  olsun.

$$\Delta y_i := \begin{cases} \Delta x_i + \frac{r}{\|y - \Delta x_i\|} (y - \Delta x_i), & \|y - \Delta x_i\| > r \text{ ise} \\ y, & \text{diğer} \end{cases} \quad (3.49)$$

olarak tanımlansın. Böylece,

$$\left\| \Delta x_i + \frac{r}{\|y - \Delta x_i\|} (y - \Delta x_i) - y \right\| = \left| \frac{r}{\|y - \Delta x_i\|} - 1 \right| \cdot \|y - \Delta x_i\| = \left| \|y - \Delta x_i\| - r \right| \quad (3.50)$$

olduğu için

$$\|\Delta y_i - y\| = \begin{cases} \|y - \Delta x_i\| - r, & \|y - \Delta x_i\| > r \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer} \end{cases} \quad (3.51)$$

elde edilir.  $y \in LIM^r \Delta x_i$  olması,  $\Delta y_i \rightarrow y$  ( $i \rightarrow \infty$ ) oluşunu verir. Fakat  $\|\Delta x_i - \Delta y_i\| \leq r$  yani

$\Delta y_i \in \bar{B}_r(\Delta x_i)$  dir. Sonuç olarak  $\lim_{i \rightarrow \infty} d\left(y, \bar{B}_r(\Delta x_i)\right) = 0$  olur. Bu ise tanımdan

$y \in \liminf \bar{B}_r(\Delta x_i)$  olması demektir.

### 3.2. Kabalık Derecesine Bağlılık

Tez çalışmasının daha önceki bölümlerinde sabit bir  $r$  kabalık derecesi için  $r$ -limit noktaları kümesinin özellikleri incelenmiştir. Tezin bu bölümünde ise sabit bir  $(\Delta x_i)$  dizisinin  $r$ -limit noktaları kümesi  $LIM^r \Delta x_i$ 'nin değişken bir  $r$  parametresine göre durumu incelenecektir. Daha önce verilmiş olan tanım gereğince,  $r_1 < r_2$  ise  $LIM^{r_1} \Delta x_i \subseteq LIM^{r_2} \Delta x_i$  olduğu açıktır.

**Teorem 3.2.1.**  $r \geq 0$  ve  $\sigma > 0$  olsun.

a)  $LIM^r \Delta x_i + \bar{B}_\sigma(0) \subseteq LIM^{r+\sigma} \Delta x_i$  dir.

b)  $\bar{B}_\sigma(y) \subseteq LIM^r \Delta x_i$  ise  $y \in LIM^{r-\sigma} \Delta x_i$  dir.

**İspat:**

a)  $y \in LIM^r \Delta x_i$  ve  $z \in \bar{B}_\sigma(0)$  olsun.  $\forall \varepsilon > 0$  için  $i \geq i_\varepsilon$  olduğunda  $\|\Delta x_i - y\| < r + \varepsilon$  şartını sağlayan bir  $i_\varepsilon$  sayısı vardır.  $\|z\| \leq \sigma$  olduğundan  $i \geq i_\varepsilon$  için  $\|\Delta x_i - y - z\| < r + \sigma + \varepsilon$  elde edilir.

Böylece  $y + z \in LIM^{r+\sigma} \Delta x_i$  elde edilir.

b)  $c$  noktası  $(\Delta x_i)$  dizisinin herhangi bir yığılma noktası olsun. Eğer  $\|y - c\| > r - \sigma$  ise

$x_* := y + \frac{\sigma}{\|y - c\|}(y - c)$  noktası,

$$\|x_* - c\| = \sigma + \|y - c\| > \sigma + (r - \sigma) = r \quad (3.52)$$

şartını sağlar.  $LIM^r \Delta x_i \subseteq \bar{B}_r(c)$  olduğundan,

$x_* \notin LIM^r \Delta x_i$  dir. Bu ise  $\|x_* - y\| = \sigma$  ve  $\bar{B}_\sigma(y) \subseteq LIM^r \Delta x_i$  olması ile çelişir. Bundan dolayı  $\forall c \in C$  yığılma noktaları için  $\|y - c\| \leq r - \sigma$  sağlanır. Sonuç olarak,  $y \in \bigcap_{c \in C} \bar{B}_{r-\sigma}(c) = LIM^{r-\sigma} \Delta x_i$  elde edilir.

**Teorem 3.2.2.**  $\bar{r} := \inf \{r \in \mathbb{R}_+ : LIM^r \Delta x_i \neq \emptyset\}$  olmak üzere,

**a)**  $r = \bar{r}$  olması için gerek ve yeter şart  $LIM^r \Delta x_i \neq \emptyset$  ve  $\text{int}(LIM^r \Delta x_i) = \emptyset$  olmasıdır.

**b)** Eğer  $(X, \|\cdot\|)$  sonlu boyutlu kesin konveks normlu uzay ise  $r = \bar{r}$  olması için gerek ve yeter şart  $LIM^r \Delta x_i$  kümesinin tek nokta kümesi olmasıdır.

**İspat:**

**a)**  $(\Rightarrow)$  Kabul edelim ki  $r = \bar{r}$  olsun.  $LIM^r \Delta x_i \neq \emptyset$  ve  $\text{int}(LIM^r \Delta x_i) = \emptyset$  olduğunu göstermeliyiz.  $LIM^r \Delta x_i = \bigcap_{r' > \bar{r}} LIM^{r'} \Delta x_i$  olduğundan, daha önceki bilgilere dayanarak  $r' > \bar{r}$  için  $LIM^{r'} \Delta x_i$  ifadesi boştan farklı ve kapalıdır.  $r_1 < r_2$  için  $LIM^{r_1} \Delta x_i \subseteq LIM^{r_2} \Delta x_i$  olduğundan  $\bigcap_{r' > \bar{r}} LIM^{r'} \Delta x_i = \bigcap_{\bar{r} < r' < \bar{r}+1} LIM^{r'} \Delta x_i$  ve  $LIM^{r'} \Delta x_i, r' \in (\bar{r}, \bar{r}+1)$  ailesi, sonlu kesişim özelliğini sağlayan  $LIM^{\bar{r}+1} \Delta x_i$  kompakt kümesinin boştan farklı kapalı altkümelerinin bir ailesidir.

Böylece  $LIM^{\bar{r}} \Delta x_i \neq \emptyset$  olur. Şimdi kabul edelim ki  $\text{int}(LIM^r \Delta x_i) \neq \emptyset$  olsun. Bu durumda  $\sigma > 0$  için bazı  $\bar{B}_\sigma(y)$  yuvarlarını içerir. O halde  $LIM^{r-\sigma} \Delta x_i \neq \emptyset$  yani  $r > \bar{r}$  dir. Böylece  $r = \bar{r}$  olması  $\text{int}(LIM^r \Delta x_i) = \emptyset$  oluşunu verir.

$(\Leftarrow)$  Şimdi  $LIM^r \Delta x_i \neq \emptyset$  ve  $\text{int}(LIM^r \Delta x_i) = \emptyset$  olduğunu kabul edelim.  $LIM^r \Delta x_i \neq \emptyset$  olduğundan  $r > \bar{r}$  dir. Diğer yandan,  $\text{int}(LIM^r \Delta x_i) = \emptyset$  olduğundan  $r < \bar{r}$  olur. Sonuç olarak  $r = \bar{r}$  olur.

**b)** Eğer  $LIM^r \Delta x_i$  kümesi bir tek nokta kümesi ise  $LIM^r \Delta x_i \neq \emptyset$  ve  $\text{int}(LIM^r \Delta x_i) = \emptyset$  olur.

a) şıkkından dolayı,  $r = \bar{r}$  dir. Geriye  $LIM^{\bar{r}} \Delta x_i$  kümesinin bir tek nokta kümesi olduğunu göstermek kalır. Bu ise durum, kümenin kesin konveksliğinden,  $LIM^r \Delta x_i \neq \emptyset$  ve  $\text{int}(LIM^r \Delta x_i) = \emptyset$  olduğundan elde edilir.

**Teorem 3.2.3.**  $cl\left(\bigcap_{0 \leq r' < r} LIM^{r'} \Delta x_i\right) \subseteq LIM^r \Delta x_i = \bigcap_{r' > r} LIM^{r'} \Delta x_i$  dir. Eğer  $r \neq \bar{r}$  ise bu durumda  $cl\left(\bigcup_{0 \leq r' < r} LIM^{r'} \Delta x_i\right) = LIM^r \Delta x_i$  olur.

**İspat:** Daha önce ispatlanmış olan “Eğer  $r_1 < r_2$  ise  $LIM^{r_1} \Delta x_i \subseteq LIM^{r_2} \Delta x_i$ ” teoremi ve  $LIM^r \Delta x_i$  kümesinin kapalılığı gereğince,  $cl\left(\bigcap_{0 \leq r' < r} LIM^{r'} \Delta x_i\right) \subseteq LIM^r \Delta x_i = \bigcap_{r' > r} LIM^{r'} \Delta x_i$  olduğu kolayca görülebilir. Şimdi, keyfi bir  $y \in X \setminus LIM^r \Delta x_i$  elemanını göz önüne alalım. Tanımdan,  $\forall k \in \mathbb{N} \exists i \geq k : \|\Delta x_i - y\| \geq r + \varepsilon$  olacak şekilde bir  $\varepsilon > 0$  sayısı vardır. Böylece  $r' < r + \varepsilon$  için  $\varepsilon' := r + \varepsilon + r' > 0$  ve  $\forall k \in \mathbb{N} \exists i \geq k : \|\Delta x_i - y\| \geq r' + \varepsilon'$  olur. O halde  $r' < r + \varepsilon$  için  $y \notin LIM^{r'} \Delta x_i$  ve dolayısıyla  $y \notin \bigcap_{r' > r} LIM^{r'} \Delta x_i$  dir. Böylece  $LIM^r \Delta x_i = \bigcap_{r' > r} LIM^{r'} \Delta x_i$  olur.

- $r < \bar{r}$  için  $cl\left(\bigcup_{0 \leq r' < r} LIM^{r'} \Delta x_i\right) = LIM^r \Delta x_i = \emptyset$  olduğu açıktır.
- $r = r_1 > \bar{r}$  ve  $r_0 = (\bar{r} + r_1)/2$  olsun.  $r_0 > \bar{r}$  olduğundan bir  $y_0 \in LIM^{r_0} \Delta x_i \neq \emptyset$  olacak şekilde seçebiliriz. Keyfi bir  $y_1 \in LIM^{r_1} \Delta x_i$  elemanı alalım. Teorem 3.5 gereğince  $\lambda \in [0, 1]$  için  $y_\lambda = (1 - \lambda)y_0 + \lambda y_1 \in LIM^{(1-\lambda)r_0 + \lambda r_1} \Delta x_i$  ifadesi sağlanır. Sonuç olarak  $y_\lambda \in \bigcup_{0 \leq r' < r} LIM^{r'} \Delta x_i$  dir.

olur.  $\lambda \rightarrow 1$  iken  $\|y_\lambda - y_1\| = (1 - \lambda)\|y_0 - y_1\| \rightarrow 0$  olduğundan  $y_1 \in cl\left(\bigcup_{0 \leq r' < r} LIM^{r'} \Delta x_i\right)$  elde edilir. Böylece  $r > \bar{r}$  için de  $cl\left(\bigcup_{0 \leq r' < r} LIM^{r'} \Delta x_i\right) = LIM^r \Delta x_i$  sağlanır.

Bir sonraki teoremde,  $X$  sonlu boyutlu bir normlu uzay ve  $2^X$ ,  $X$ 'in alt kümelerinin kümesi olmak üzere  $F: \mathbb{R}^+ \rightarrow 2^X$ ,  $F(r) = LIM^r \Delta x_i$  olarak tanımlanan  $F$  fonksiyonunun yarı süreklilik durumu incelenecektir.

**Teorem 3.2.4.**  $F$ ,  $(\bar{r}, +\infty)$  üzerinde alttan yarı sürekli ve  $[\bar{r}, +\infty)$  da üstten yarı sürekli dir.

**İspat:**  $r > \bar{r}$  ve  $U$ ,  $F(r) \cap U \neq \emptyset$  koşulunu sağlayan açık bir alt küme olsun.  $F(r) = LIM^r \Delta x_i$  kümesi konveks küme olduğundan ve  $\text{int}(LIM^r \Delta x_i) \neq \emptyset$  olduğundan  $\text{int}(LIM^r \Delta x_i) \cap U$  kesişim kümesi boştan farklı ve açıktır. Bu durumda  $\text{int}(LIM^r \Delta x_i) \cap U \subset LIM^r \Delta x_i$  tarafından içerilen bir  $\bar{B}_\sigma(y)$  yuvarı vardır. Böylece  $y \in LIM^{r-\sigma} \Delta x_i \cap U$  olur. O halde  $t \in (r - \sigma, +\infty)$  için

$y \in LIM^{r-\sigma} \Delta x_i \cap U \subseteq (LIM^t \Delta x_i) \cap U = F(t) \cap U$  ifadeleri sağlanır. Bu durumda  $F$  fonksiyonu her  $r \in (\bar{r}, +\infty)$  için alttan yarı sürekli olur.

Şimdi  $r \geq \bar{r}$  ve  $U, F(r) \subset U$  şartını sağlayan bir açık alt küme olsun. Bu durumda  $t \in [0, r]$  için

$$F(t) = LIM^t \Delta x_i \subseteq LIM^r \Delta x_i = F(r) \subset U \quad (3.53)$$

elde edilir. Bu durumda  $t \in (r, r + \delta)$  için

$$F(t) = LIM^t \Delta x_i \subset U \quad (3.54)$$

olacak şekilde bir  $\delta > 0$  sayısının olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

Eğer bu durum sağlanmazsa,  $\lim t_j = r$  ve  $LIM^{t_j} \Delta x_i \setminus U \neq \emptyset, j = 1, 2, \dots$  şartını sağlayan azalan bir  $(t_j)$  dizisi vardır ki

$$\bigcap_{t > r} LIM^t \Delta x_i \subseteq \bigcap_{j \in \mathbb{N}} LIM^{t_j} \Delta x_i \quad (3.55)$$

dir.  $y \notin \bigcap_{t > r} LIM^t \Delta x_i$  ise  $y \notin LIM^{\bar{t}} \Delta x_i$  olacak şekilde bir  $\bar{t} > r$  vardır.  $\lim t_j = r$  olduğundan

yararlanılırsa  $y \notin LIM^{t_j} \Delta x_i$  şartını sağlayan bir  $t_j < \bar{t}$  vardır. Buradan  $y \notin \bigcap_{j \in \mathbb{N}} LIM^{t_j} \Delta x_i$

sağlanır. Dolayısıyla

$$\bigcap_{t > r} LIM^t \Delta x_i \subseteq \bigcap_{j \in \mathbb{N}} LIM^{t_j} \Delta x_i \quad (3.56)$$

dir. Buradan, Teorem 3.2.3. ve  $LIM^r \Delta x_i \subset U$  olmasından,

$$\bigcap_{j \in \mathbb{N}} (LIM^{t_j} \Delta x_i \setminus U) = \left( \bigcap_{j \in \mathbb{N}} LIM^{t_j} \Delta x_i \right) \setminus U = LIM^r \Delta x_i \setminus U = \emptyset \quad (3.57)$$

ifadesi sağlanır. Fakat  $LIM^{t_j} \Delta x_i \setminus U, j = 1, 2, \dots$  kümesi,  $LIM^{t_j} \Delta x_i$  kompakt kümesi tarafından kapsanan boş olmayan kapalı kümelerin azalan alt kümeleri dizisi formunda olduğundan bu kümelerin kesişimi boş kümeden farklıdır. Bu çelişkiden dolayı ispat tamamlanır.

### 3.3. Kaba Fark Cauchy Dizileri

Bir normlu uzayda yakınsak her dizinin Cauchy şartını sağladığı ve bir Banach uzayında her Cauchy dizisinin yakınsak olduğu iyi bilinen bir gerçektir. Fakat kaba yakınsak diziler ile

kaba Cauchy dizileri arasındaki ilişkiyi bu kadar kolay söylemek mümkün değildir.  $(\Delta x_i)$  dizisi  $r$ -yakınsak bir dizi, başka bir ifadeyle  $LIM^r \Delta x_i \neq \emptyset$  olsun. Keyfî bir  $x_* \in LIM^r \Delta x_i$  noktası alınsın. Tanım gereğince,  $\forall \varepsilon > 0$  için  $i, j \geq i_\varepsilon$  olduğunda,

$$\|\Delta x_i - x_*\| \leq r + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ve} \quad \|\Delta x_j - x_*\| \leq r + \frac{\varepsilon}{2} \quad (3.58)$$

şartını sağlayan bir  $i_\varepsilon$  vardır. Buradan,

$$\|\Delta x_i - \Delta x_j\| \leq \|\Delta x_i - x_*\| + \|\Delta x_j - x_*\| \leq 2r + \varepsilon \quad (3.59)$$

elde edilir. Böylece  $(\Delta x_i)$  dizisi  $\rho = 2r$  derecesiyle bir  $\rho$ -Cauchy dizisidir. Bu Cauchy derecesi genellikle azaltılamaz.

Bunu göstermek için,  $z \in \mathbb{R}^n$  için  $\|z\| = r$  ve  $(\Delta x_i) = (-1)^i z$  şeklinde bir dizi alalım. Bu durumda  $(\Delta x_i)$  dizisi  $0 \in LIM^r \Delta x_i$  ile birlikte  $r$ -yakınsaktır ve  $\rho = 2r$  bu dizinin minimal Cauchy derecesidir.

Tersine,  $\rho > 0$  sayısı  $(\Delta x_i)$  dizisinin bir Cauchy derecesi olsun. Bu durumda bu dizinin yakınsaklık derecesinin  $\frac{\rho}{2}$  olduğunu yani  $LIM^{\frac{\rho}{2}} \Delta x_i \neq \emptyset$  olduğunu söylemek her zaman mümkün değildir. Dolayısıyla bu bölümde verilen teoremlerde amaç, verilen  $\rho$ -Cauchy dizileri için mümkün olduğunca küçük bir yakınsaklık derecesi bulmak olacaktır. Bunun için öncelikle Cauchy dizilerinin ve kaba yakınsak dizilerinin sınırlılığı ile ilgili ifadeleri verelim.

**Teorem 3.3.1.**  $(\Delta x_i)$  dizisinin sınırlı olması için gerek ve yeter şart  $(\Delta x_i)$  dizisi  $\rho$ -Cauchy olacak şekilde bir  $\rho \geq 0$  sayısının var olmasıdır.

$(\Delta x_i)$  dizisi sonlu boyutlu normlu uzayda sınırlı olduğundan  $C_{\Delta x}$  yığılma noktaları kümesi boştan farklı ve sınırlıdır. Dolayısıyla bu kümeyi çevreleyen yuvarın çapı  $D(C_{\Delta x})$  ve çekirdeği  $R(C_{\Delta x})$  sonludur.

**Teorem 3.3.2.**  $(\Delta x_i)$  dizisinin yığılma noktaları kümesi  $C_{\Delta x}$  olsun.  $(\Delta x_i)$  dizisinin minimum Cauchy derecesi  $D(C_{\Delta x})$  ve minimum  $\bar{r}$ -yakınsaklık derecesi  $R(C_{\Delta x})$  dir. Yani,

$$D(C_{\Delta x}) = \min \{ \rho \in \mathbb{R}_+ : (\Delta x_i), \rho\text{-Cauchy dizisi} \} \quad (3.60)$$

ve

$$LIM^r \Delta x_i \begin{cases} = \emptyset & r < R(C_{\Delta x}) \\ \neq \emptyset & r \geq R(C_{\Delta x}) \end{cases} \quad (3.61)$$

dir.

**İspat:** Öncelikle  $D(C_{\Delta x}) = \min \{ \rho \in \mathbb{R}_+ : (\Delta x_i), \rho\text{-Cauchy dizisi} \}$  olduğunu gösterelim.

Kabul edelim ki  $0 \leq \rho < D(C_{\Delta x})$  olsun. Bu durumda  $\varepsilon = (D(C_{\Delta x}) - \rho)/3$  sayısı için

$$\begin{aligned} \|c_1 - c_2\| &> \rho + 2\varepsilon \text{ olacak şekilde iki tane } c_1 \text{ ve } c_2 \text{ yığılma noktası vardır. } \forall k \in \mathbb{N} \text{ için,} \\ \|\Delta x_{i_1} - c_1\| &< \varepsilon/2 \text{ ve } \|\Delta x_{i_2} - c_2\| < \varepsilon/2, \end{aligned} \quad (3.62)$$

olacak şekilde  $i_1, i_2 \geq k$  vardır öyle ki

$$\begin{aligned} \|\Delta x_{i_1} - \Delta x_{i_2}\| &\geq \|c_1 - c_2\| - \|(\Delta x_{i_1} - c_1) - (\Delta x_{i_2} - c_2)\| \\ &\geq \|c_1 - c_2\| - (\|\Delta x_{i_1} - c_1\| + \|\Delta x_{i_2} - c_2\|) \\ &> \rho + 2\varepsilon - (\varepsilon/2 + \varepsilon/2) \\ &= \rho + \varepsilon. \end{aligned} \quad (3.63)$$

olur. Bu durum  $0 \leq \rho < D(C_{\Delta x})$  olduğunda  $(\Delta x_i)$  dizisinin bir  $\rho$ -Cauchy dizisi olmadığı anlamına gelmektedir.

Şimdi  $\varepsilon > 0$  keyfi ve  $\rho \geq D(C_{\Delta x})$  olduğunu kabul edelim. Bu durumda  $C_{\Delta x} + B_{\varepsilon/2}(0)$  kümesinin dışında yalnızca sonlu tane  $\Delta x_i$  elemanı vardır. Aksi takdirde, uzay sonlu boyutlu ve  $C_{\Delta x} + B_{\varepsilon/2}(0)$  kümesi açık olduğundan  $C_{\Delta x} + B_{\varepsilon/2}(0)$ 'nin dışında bir yığılma noktası kalması gerekirdi. Böylece  $i \geq i_\varepsilon$  için  $\Delta x_i \in C_{\Delta x} + B_{\varepsilon/2}(0)$  olacak şekilde bir  $i_\varepsilon$  vardır. Bu demektir ki,  $i_1 \geq i_\varepsilon$  ve  $i_2 \geq i_\varepsilon$  ise  $c_1, c_2 \in C$  için  $\|\Delta x_{i_1} - c_1\| < \varepsilon/2$  ve  $\|\Delta x_{i_2} - c_2\| < \varepsilon/2$  dir ki  $\|c_1 - c_2\| \leq D(C_{\Delta x}) \leq \rho$  eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \|\Delta x_{i_1} - \Delta x_{i_2}\| &\leq \|c_1 - c_2\| + \|\Delta x_{i_1} - c_1\| + \|\Delta x_{i_2} - c_2\| \\ &< \rho + \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &= \rho + \varepsilon \end{aligned} \quad (3.64)$$

sağlanır. Yani  $\rho \geq D(C_{\Delta x})$  olduğunda  $(\Delta x_i)$  bir  $\rho$ -Cauchy dizisidir. Böylece (3.60) sağlanmış olur.

Şimdi de  $\lim^r \Delta x_i \begin{cases} = \emptyset & r < R(C_{\Delta x}) \\ \neq \emptyset & r \geq R(C_{\Delta x}) \end{cases}$  oluşunu gösterelim.

Eğer  $r < R(C_{\Delta x})$  ise,  $\forall z \in \mathbb{R}^n$  için  $\|z - y\| > r$  olacak şekilde bir  $y \in C_{\Delta x}$  vardır. O halde  $z \notin \lim^r \Delta x_i$  yani  $\lim^r \Delta x_i = \emptyset$  dir.

Eğer  $r > R(C_{\Delta x})$  ise,  $\forall y \in C_{\Delta x}$  için  $\|x_* - y\| \leq r$  olacak şekilde bir  $x_* \in \mathbb{R}^n$  vardır ki

$x_* \in \bigcap_{y \in C_{\Delta x}} \bar{B}_r(y)$  sağlanır. Dolayısıyla,  $LIM^r \Delta x_i \neq \emptyset$  olur.

$\bar{r} := \inf \{r \in \mathbb{R}_+ : LIM^r \Delta x_i\}$  olarak tanımlandığından,  $R(C_{\Delta x}) = \bar{r}$  sağlanır. O halde  $r = \bar{r} = R(C_{\Delta x})$  için  $LIM^r \Delta x_i \neq \emptyset$  ve böylece ispat tamamlanır.

Aşağıda verilen teorem, bir dizinin yakınsaklık derecesi ile Cauchy derecesi arasındaki ilişkiyi bulmak için, bu diziyi çevreleyen yuvarın çapı ve çekirdeği arasındaki ilişkinin nasıl kullanılabileceğini gösteren bir teoremdir.

**Teorem 3.3.3.** (Jung, 1901)  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  Öklid uzayının sınırlı ve kapalı  $S$  altkümesi için,  $S$  kümesinin çapı  $D(S)$  ile  $S$  kümesini çevreleyen sınırlandırılmış yuvarın yarıçapı  $R(S)$  arasında

$$R(S) \leq \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}} D(S) \quad (3.65)$$

bağıntısı vardır.

**Teorem 3.3.4.** (Bohnenblust, 1938)  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  normlu uzayının sınırlı ve kapalı  $S$  altkümesi için,  $S$  kümesinin çapı  $D(S)$  ile  $S$  kümesini çevreleyen sınırlandırılmış yuvarın yarıçapı  $R(S)$  arasında

$$R(S) \leq \frac{n}{2(n+1)} D(S) \quad (3.66)$$

bağıntısı vardır.

**Teorem 3.3.5.**  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  normlu uzayında  $\rho \geq 0$  için  $(\Delta x_i)$  bir  $\rho$ -Cauchy dizisi olsun. Bu

durumda  $(\Delta x_i)$  dizisi  $r \geq \frac{n}{n+1} \rho$  için  $r$ -yakınsaktır. Özel olarak  $\|\cdot\|$  Öklid normlu uzay ise,

$(\Delta x_i)$  dizisi  $r \geq \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}} \rho$  için  $r$ -yakınsaktır.

**İspat:**  $(\Delta x_i)$ , bir  $\rho$ -Cauchy dizisi olduğu için, Teorem 3.3.2 den  $\rho \geq D(C_{\Delta x})$  dir. Bu durumda Teorem 3.3.4 den,

$$r \geq \frac{n}{n+1} \rho \text{ ve } r \geq \frac{n}{n+1} D(C_{\Delta x}) \geq R(C_{\Delta x}) \quad (3.67)$$

sağlanır. Sonuç olarak, yine Teorem 3.3.2 ye göre,  $r \geq \frac{n}{n+1} \rho$  ise  $LIM^r \Delta x_i \neq \emptyset$  olur.

Özel olarak  $\|\cdot\|$  Öklid normlu uzay ise, Teorem 3.3.4 yerine Teorem 3.3.3 kullanılarak ispat elde edilir.

**Uyarı:** Bir önceki teoremde verilen  $n$  parametresi, göz önüne alınan normlu uzayın boyutudur. Daha iyi bir sonuç elde edebilmek için  $n$  ile  $(\Delta x_i)$  dizisinin yığılma noktaları kümesi  $D(C_{\Delta x})$  nin boyutu olan  $m$  yer değiştirilebilir. Çünkü genelde  $m < n$  dir. Bu durumda

$$\frac{n}{n+1} > \frac{m}{m+1} \text{ ve } \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}} > \sqrt{\frac{m}{2(m+1)}} \quad (3.68)$$

yazılabilir.

Sonraki teoremde kullanılmak üzere bir  $\rho$  – Cauchy dizisi için şu ifadeyi verelim.  $(\Delta x_i)$  bir  $\rho$  – Cauchy dizisi ise bu durumda  $\forall r > \rho$  için

$$\{(\Delta x_i) : i \geq k\} \subset LIM^{(\Delta x_i), r} \Delta x_i \quad (3.69)$$

olacak şekilde  $k \in \mathbb{N}$  vardır.

Özellikle  $(\Delta x_i)$  klasik anlamda Cauchy dizisi (yani  $\rho = 0$ ) ise  $\forall r > 0$  için (3.69) ifadesi sağlanacak şekilde bir  $k \in \mathbb{N}$  sayısı vardır.  $(\Delta x_i)$  dizisi  $M$  alt kümesinde bir dizi ise,  $M$  muhtemelen kapalı olmamasına rağmen,

$$LIM^{(\Delta x_i), r} \Delta x_i \subseteq LIM^{M, r} \Delta x_i \text{ iken } r > 0 \text{ için } LIM^{M, r} \Delta x_i \neq \emptyset \quad (3.70)$$

olur. Bu özellik daha küçük bir  $r$  için de geçerlidir.

Aşağıdaki teorem Öklid uzayında bunun bir örneğini verir.

**Teorem 3.3.6.**  $M$  kümesi,  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  Öklid uzayının konveks ve kapalı olması gerekmeyen bir alt kümesi ve  $(\Delta x_i), M$  de bir  $\rho$  – Cauchy dizisi olsun. (Örneğin,  $M = \text{conv}\{\Delta x_i : i \in \mathbb{N}\}$  Bu durumda

$$r \geq \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}} \rho \text{ için } LIM^{M, r} \Delta x_i \neq \emptyset \quad (3.71)$$

dir.

**İspat:**  $(\Delta x_i)$  dizisinin yığılma noktaları kümesi  $C_{\Delta x}$  olsun. Hem  $C_{\Delta x}$  hem de  $\text{conv} C_{\Delta x}$  'in dışbükey örtüsünün kapalı ve sınırlı olduğu açıktır.  $C_{\Delta x}$  'yi çevreleyen yuvarın bir  $z \in \mathbb{R}^n$  merkezine sahip olduğu, yani

$$\sup_{y \in C_{\Delta x}} \|y - c\| = R(C_{\Delta x}) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{y \in C_{\Delta x}} \|x - y\| \quad (3.72)$$

olduğu bilinmektedir. Burada  $z$  tektir ve  $\text{conv} C_{\Delta x}$  'ye aittir.

Böylece  $C_{\Delta x} \subseteq \bar{B}_{R(C_{\Delta x})}(z)$  elde edilir ve Teorem 3.1.5'den  $z \in LIM^{R(C_{\Delta x})}\Delta x_i$  dir. Ek olarak  $C_{\Delta x} (\Delta x_i) \subset M$  nin yığılma noktaları kümesi olduğundan,  $C_{\Delta x} \subset cl(M)$  olur. Dolayısıyla  $M$  nin konveksliğinden ve  $z \in conv C_{\Delta x}$  olduğundan  $z \in cl(M)$  elde edilir.

Eğer  $r > R(C_{\Delta x})$  ise,  $\sigma = r - R(C_{\Delta x}) > 0$  için,

$$\bar{B}_{\sigma}(z) \subseteq LIM^{R(C_{\Delta x})+\sigma}\Delta x_i = LIM^r\Delta x_i \quad (3.73)$$

dir. O halde  $z \in cl(M)$  için,

$$\emptyset \neq M \cap \bar{B}_{\sigma}(z) \subseteq M \cap LIM^r\Delta x_i = LIM^{M,r}\Delta x_i \quad (3.74)$$

olur.

Eğer  $R(C_{\Delta x}) \geq r \geq \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}\rho$  ise, Teorem 3.3.2 ve Teorem 3.3.3.'den,

$$R(C_{\Delta x}) \geq r \geq \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}\rho \geq \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}D(C_{\Delta x}) \geq R(C_{\Delta x}) \quad (3.75)$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$r = R(C_{\Delta x}) = \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}\rho = \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}D(C_{\Delta x}) \quad (3.76)$$

dir. Teorem 3.3.3 gereğince, bu eşitsizlik sadece  $C_{\Delta x}$  kümesinin  $j \neq k$  için  $\|c_j - c_k\| = D(C_{\Delta x})$  koşulunu sağlayan  $\{c_1, c_2, \dots, c_{n+1}\}$  kümesini içermesi halinde geçerlidir.  $z$  noktası  $conv\{c_1, c_2, \dots, c_{n+1}\}$  kümesini çevreleyen yuvarın merkezi olduğundan,

$$z = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} c_j \text{ ve } z \in \text{int}(conv\{c_1, c_2, \dots, c_{n+1}\}) \quad (3.77)$$

elde edilir. Sonuç olarak,  $\{c_1, c_2, \dots, c_{n+1}\} \subseteq C_{\Delta x} \subseteq cl(M)$  ve  $M$  konveks olduğundan,  $z \in M$  olmalıdır. O halde son olarak

$$z \in M \cap LIM^{R(C_{\Delta x})}\Delta x_i = M \cap LIM^r\Delta x_i = LIM^{M,r}\Delta x_i \quad (3.78)$$

elde edilir.

#### 4. FARK DİZİLERİNİN KABA İSTATİSTİKSELYAKINSAKLIĞI

Bu bölümde sonlu boyutlu bir normlu uzayda kaba istatistiksel yakınsaklık kavramı fark dizileri için çalışılmıştır. Daha önce tanımlanmış olan kaba istatistiksel yakınsaklık kavramının fark dizileri için nasıl tanımlanabileceği araştırılmış ve bazı teoremler fark dizileri için ispatlanmıştır.

**Tanım 4.1.**  $(X, \|\cdot\|)$  bir normlu uzay,  $r$  negatif olmayan bir reel sayı ve  $(\Delta x_i)$ ,  $(X, \|\cdot\|)$  uzayında bir dizi olsun.  $x = (x_i)$  dizisi için  $\Delta x = (\Delta x_i) = (x_i - x_{i+1})$  olmak üzere, eğer  $\forall \varepsilon > 0$  için

$$\{i \in \mathbb{N} : \|\Delta x_i - x_*\| \geq r + \varepsilon\} \quad (4.1)$$

kümesinin doğal yoğunluğu sıfır ise veya buna denk bir ifadeyle,

$$st - \limsup_{i \rightarrow \infty} \|\Delta x_i - x_*\| \leq r \quad (4.2)$$

koşulu sağlanıyorsa  $(\Delta x_i)$  dizisi  $x_* \in X$  noktasına kaba istatistiksel yakınsaktır veya  $r - st -$  yakınsaktır denir. Bu tanım şu şekilde de ifade edilebilir: Eğer  $\forall \varepsilon > 0$  ve hemen hemen her  $i$  için,

$$\|\Delta x_i - x_*\| < r + \varepsilon \quad (h.h.i.) \quad (4.3)$$

ise  $(\Delta x_i) \xrightarrow{r-st} x_*$  dir.

$(\Delta x_i)$  dizisinin  $r - st -$  limit noktaları kümesi  $st - LIM^r \Delta x_i$  ile gösterilir. Burada  $r$  kabalık derecesini belirtir ve  $r = 0$  olması durumunda istatistiksel yakınsaklığın elde edildiğini görmek kolaydır.

Üçüncü bölümde bahsedilen örneğe benzer şekilde, aşağıda verilen örnekte de istatistiksel yakınsak olmayan fakat  $r - st -$  yakınsak olan bir  $(\Delta x_i)$  dizisi görülebilir.

**Örnek 4.1.**  $\Delta y = (\Delta y_i)$  dizisi kesin olarak ölçülemeyen ve istatistiksel yakınsak bir dizi ve  $\Delta x = (\Delta x_i)$  dizisi de her  $i \in \mathbb{N}$  için  $\|\Delta x_i - \Delta y_i\| \leq r$  (*h.h.i.*) şartını sağlayan yani  $d(\{i \in \mathbb{N} : \|\Delta x_i - \Delta y_i\| > r\}) = 0$  olan bir dizi olsun. Bu durumda  $\Delta x$  dizisi istatistiksel yakınsak değildir. Fakat,

$$\{i \in \mathbb{N} : \|\Delta y_i - y_*\| \geq \varepsilon\} \supseteq \{i \in \mathbb{N} : \|\Delta x_i - y_*\| \geq r + \varepsilon\} \quad (4.4)$$

olduğundan istatistiksel yakınsaklık tanımı gereğince  $d\left(\{i \in \mathbb{N} : \|\Delta x_i - y_*\| \geq r + \varepsilon\}\right) = 0$  elde edilir ki bu da  $\Delta x$  dizisinin  $y_*$  sayısına  $r - st$  - yakınsak olduğunu gösterir. Genellikle bir fark dizisinin kaba istatistiksel limiti  $r > 0$  kabalık derecesi için tek değildir. Böylece bu kaba istatistiksel limit noktalarının  $st - LIM^r \Delta x_i$  kümesinden bahsetmek mümkündür. Bu küme  $st - LIM^r \Delta x_i := \left\{x_* \in \mathbb{R}^n : \Delta x_i \xrightarrow{r-st} x_*\right\}$  şeklinde tanımlıdır.

Eğer  $st - LIM^r \Delta x_i \neq \emptyset$  ise  $st - LIM^r \Delta x_i = [st - \limsup \Delta x - r, st - \liminf \Delta x + r]$

şeklindedir. Diğer yandan, sınırsız bir  $(\Delta x_i)$  fark dizisi için  $LIM^r \Delta x_i = \emptyset$  olduğunu biliyoruz. Halbuki bu şekildeki bir dizi kaba istatistiksel yakınsak olabilir.

**Örnek 4.2.**  $\Delta x_i = \begin{cases} (-1)^i, & i \neq k^2 (k \in \mathbb{N}) \\ i, & \text{diğer} \end{cases}$  dizisini düşünelim. Bu durumda,

$$st - LIM^r \Delta x_i = \begin{cases} \emptyset, & r < 1 \text{ ise} \\ [1-r, r-1], & \text{diğer} \end{cases} \quad (4.5)$$

ve her  $r \geq 0$  için  $LIM^r \Delta x_i = \emptyset$  şeklindedir çünkü  $\{1, 4, 9, \dots\}$  kümesinin doğal yoğunluğu sıfırdır.

**Sonuç 4.1.**  $st - LIM^r \Delta x_i \neq \emptyset$  olması  $LIM^r \Delta x_i \neq \emptyset$  olmasını gerektirmez fakat eğer  $LIM^r \Delta x_i \neq \emptyset$  ise  $st - LIM^r \Delta x_i \neq \emptyset$  olmalıdır. Böylece,

$$LIM^r \Delta x_i \subseteq st - LIM^r \Delta x_i \quad (4.6)$$

bağıntısı elde edilir. Ayrıca,

$$\text{diam}(LIM^r \Delta x) \leq \text{diam}(st - LIM^r \Delta x) \quad (4.7)$$

dir.

**Teorem 4.1.** Fark dizileri için  $r -$  istatistiksel limit noktaları kümesinin çapı  $2r$  den büyük değildir. Genellikle  $\text{diam}(st - LIM^r \Delta x)$  kümesi için daha küçük bir alt sınır yoktur.

**İspat:** Kabul edelim ki  $\text{diam}(st - LIM^r \Delta x_i) > 2r$  olsun. O halde  $\|y - z\| > 2r$  şartını sağlayan

$y, z \in st - LIM^r \Delta x_i$  elemanları vardır.  $\varepsilon \in \left(0, \frac{\|y-z\|}{2} - r\right)$  olarak seçelim.  $y, z \in st - LIM^r \Delta x_i$

olduğundan,  $\forall \varepsilon > 0$  için  $K_1 := \{i \in \mathbb{N} : \|\Delta x_i - y\| \geq r + \varepsilon\}$  ve  $K_2 := \{i \in \mathbb{N} : \|\Delta x_i - z\| \geq r + \varepsilon\}$

olmak üzere  $d(K_1) = 0$  ve  $d(K_2) = 0$  olur. Doğal yoğunluk tanımı gereğince,  $d(K_1^C \cap K_2^C) = 1$

elde edilir. Buradan  $\forall i \in K_1^C \cap K_2^C$

$$\|y - z\| \leq \|\Delta x_i - y\| + \|\Delta x_i - z\| < 2(r + \varepsilon) = \|y - z\| \quad (4.8)$$

yazılabilir ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla kabulümüz yanlıştır.

Şimdi teoremin ikinci kısmını ispatlayalım.  $(\Delta x_i)$  dizisinin istatistiksel limiti  $x_*$  olsun.  $\varepsilon > 0$

için  $d(\{i \in \mathbb{N} : \|\Delta x_i - x_*\| \geq \varepsilon\}) = 0$  yazılabilir. Buradan

$$\forall y \in \bar{B}_r(x_*) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x_*\| \leq r\} \text{ elemanı için}$$

$$\|\Delta x_i - y\| \leq \|\Delta x_i - x_*\| + \|x_* - y\| \leq \|\Delta x_i - x_*\| + r \quad (4.9)$$

elde edilir. Daha sonra  $\forall i \in \{i \in \mathbb{N} : \|\Delta x_i - x_*\| < \varepsilon\}$  için,

$$\|\Delta x_i - y\| < r + \varepsilon \quad (4.10)$$

olur.  $\Delta x_i$  dizisi  $x_*$  'a istatistiksel yakınsak olduğundan  $d(\{i \in \mathbb{N} : \|\Delta x_i - x_*\| < \varepsilon\}) = 0$  elde

edilir ki buradan  $y \in st-LIM^r \Delta x_i$  olur. Sonuç olarak  $st-LIM^r \Delta x_i = \bar{B}_r(x_*)$  yazılabilir.

$$diam(\bar{B}_r(x_*)) = 2r \text{ olduğundan bu durum genel olarak } st-LIM^r \Delta x_i \text{ kümesinin çapının üst}$$

sınırının  $2r$  olduğunu ve daha fazla azalamayacağını gösterir.

Sonuç 4.1. gereğince  $LIM^r \Delta x_i \neq \emptyset$  olduğunda  $st-LIM^r \Delta x_i \neq \emptyset$  olacağından aşağıdaki sonuçtan bahsetmek mümkündür.

**Sonuç 4.2.**  $(\Delta x_i)$  dizisi sınırlı ise bu durumda  $st-LIM^r \Delta x_i \neq \emptyset$  olacak şekilde negatif olmayan bir  $r$  reel sayısı bulunabilir. Bu sonucun tersi doğru değildir. Fakat dizinin istatistiksel sınırlı olması halinde Sonuç 4.2. nin tersinin doğru olacağı söylenebilir.

**Teorem 4.2.**  $(\Delta x_i)$  dizisinin istatistiksel sınırlı olması için gerek ve yeter şart  $st-LIM^r \Delta x_i \neq \emptyset$  olacak şekilde negatif olmayan bir  $r$  sayısının var olmasıdır.

**İspat:** Öncelikle  $(\Delta x_i)$  dizisi istatistiksel sınırlı olduğunda  $st-LIM^r \Delta x_i \neq \emptyset$  olacağını gösterelim. İstatistiksel sınırlılık tanımından  $d(\{i \in \mathbb{N} : \|\Delta x_i\| \geq M\}) = 0$  olacak şekilde pozitif bir  $M$  sayısı vardır.  $K = \{i \in \mathbb{N} : \|\Delta x_i\| \geq M\}$  olmak üzere  $r' := \sup \{\|\Delta x_i\| : i \in K^c\}$  olarak tanımlayalım. Burada  $K^c$  ifadesi  $K$  kümesinin tümleyenini belirtmektedir. O halde  $st-LIM^{r'} \Delta x_i$  kümesi  $\mathbb{R}^n$  'nin orijini içerir. Böylece  $st-LIM^{r'} \Delta x_i \neq \emptyset$  elde edilir.

Şimdi kabul edelim ki bazı  $r \geq 0$  sayıları için  $st-LIM^r \Delta x_i \neq \emptyset$  olsun. Bu durumda tanımdan dolayı  $x_* \in st-LIM^r \Delta x_i$  olacak şekilde bir  $x_*$  vardır, yani  $\forall \varepsilon > 0$  için

$$d\left(\left\{i \in \mathbb{N} : \|\Delta x_i - x_*\| \geq r + \varepsilon\right\}\right) = 0 \quad (4.11)$$

dır. O halde hemen hemen her  $\Delta x_i$  elemanı yarıçapı  $r$  den büyük olan bir yuvar tarafından kapsanır. Böylece  $(\Delta x_i)$  dizisi istatistiksel sınırlı olur.

**Teorem 3.3.** gereğince  $(\Delta x'_i) = (\Delta x_{i_j})$ ,  $\Delta x_i$  dizisinin bir alt dizisi olduğunda  $LIM^r \Delta x_i \subseteq LIM^r \Delta x'_i$  olduğunu biliyoruz. Bu teoremi istatistiksel yakınsaklık için söylemek mümkün değildir.

**Örnek 4. 3.** Reel sayıların  $\Delta x_i = \begin{cases} i, & i = k^2 (k \in \mathbb{N}) \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$  dizisini düşünelim.  $\Delta x' := \{1, 4, 9, 16, \dots\}$

dizisi bu dizinin bir alt dizisidir.  $st-LIM^r \Delta x_i = [-r, r]$  olduğu halde  $st-LIM^r \Delta x'_i = \emptyset$  dir.

Eğer alt dizinin indisler kümesinin doğal yoğunluğu sıfırdan farklı yani alt dizi nonthin ise Teorem 3.3.'ün istatistiksel yakınsaklık için de sağlanacağını gösteren teorem aşağıda verilmiştir.

**Teorem 4.3.**  $(\Delta x'_i) = (\Delta x_{i_j})$ ,  $\Delta x_i$  dizisinin bir nonthin alt dizisi ise,  $st-LIM^r \Delta x_i \subseteq st-LIM^r \Delta x'_i$  olur.

**Teorem 4.4.**  $(\Delta x_i)$  dizisinin  $r$ -istatistiksel limit noktaları kümesi kapalıdır.

**İspat:** Bu ispat için iyi bilinen " $\Delta y_i \rightarrow y_*$  yakınsak dizisi için  $y \in st-LIM^r \Delta x_i$  olduğunda aynı zamanda  $y_* \in st-LIM^r \Delta x_i$  oluyorsa  $LIM^r \Delta x_i$  kümesi kapalıdır." teoremini kullanacağız. Eğer  $st-LIM^r \Delta x_i = \emptyset$  ise ispat açıktır.  $st-LIM^r \Delta x_i \neq \emptyset$  olduğunu kabul edelim. O halde  $i \rightarrow \infty$  iken  $(\Delta y_i) \rightarrow y_*$  olacak şekilde bir  $(\Delta y_i) \in st-LIM^r \Delta x_i$  dizisi seçilebilir.  $y_* \in st-LIM^r \Delta x_i$  olduğu gösterilirse ispat tamamlanacaktır.

Yakınsaklık tanımı gereğince, her  $\varepsilon > 0$  için  $(\Delta y_i) \rightarrow y_*$  olduğundan,  $\forall i > i_{\frac{\varepsilon}{2}}$  için

$$\|\Delta y_i - y_*\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.12)$$

olacak şekilde bir  $i_0 > i_{\frac{\varepsilon}{2}} \in \mathbb{N}$  vardır.  $i_0 > i_{\frac{\varepsilon}{2}}$  olacak şekilde  $i_0 \in \mathbb{N}$  seçildiğinde,

$$\|\Delta y_{i_0} - y_*\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.13)$$

yazılabilir.

Diğer yandan,  $(\Delta y_i) \in st-LIM^r \Delta x_i$  olduğu için  $y_{i_0} \in st-LIM^r \Delta x_i$  olur ki

$$d\left(\left\{i \in \mathbb{N} : \|\Delta x_i - \Delta y_{i_0}\| \geq r + \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) = 0 \quad (4.14)$$

yazılabilir. Buna ek olarak,

$$\left\{i \in \mathbb{N} : \|\Delta x_i - y_*\| < r + \varepsilon\right\} \supseteq \left\{i \in \mathbb{N} : \|\Delta x_i - \Delta y_{i_0}\| < r + \frac{\varepsilon}{2}\right\} \quad (4.15)$$

ifadesinin doğru olduğu gösterilsin  $k \in \left\{i \in \mathbb{N} : \|\Delta x_i - \Delta y_{i_0}\| < r + \frac{\varepsilon}{2}\right\}$  alalım. Buradan

$$\|\Delta x_k - \Delta y_{i_0}\| < r + \frac{\varepsilon}{2} \text{ elde edilir ki böylece}$$

$$\|\Delta x_k - y_*\| \leq \|\Delta x_k - \Delta y_{i_0}\| + \|\Delta y_{i_0} - y_*\| < r + \varepsilon \quad (4.16)$$

olur. Bu ifade,  $k \in \left\{i \in \mathbb{N} : \|\Delta x_i - \Delta y_{i_0}\| < r + \varepsilon\right\}$  (4.15) ifadesinin kanıtıdır. (4.14) ifadesi gereğince (4.15) kapsamının sağ tarafındaki kümenin doğal yoğunluğunun 1 olduğu söylenebilir. Doğal yoğunluk, tanımı gereğince 0 ile 1 arasında olacağından, (4.15) in sol tarafındaki kümenin de doğal yoğunluğunun 1 olacağı açıktır. Böylece

$$d\left(\left\{i \in \mathbb{N} : \|\Delta x_i - y_*\| \geq r + \varepsilon\right\}\right) = 0 \quad (4.17)$$

elde edilir ki ispat tamamlanır.

**Teorem 4.5.**  $(\Delta x_i)$  dizisinin  $r$ -istatistiksel limit noktaları kümesi konvektir.

**İspat:**  $\varepsilon > 0$  ve  $\Delta x = (\Delta x_i)$  dizisi için  $y_0, y_1 \in st-LIM^r \Delta x_i$  olduğunu kabul edelim.

$K_1 := \{i \in \mathbb{N} : \|\Delta x_i - y_0\| \geq r + \varepsilon\}$  ve  $K_2 := \{i \in \mathbb{N} : \|\Delta x_i - y_1\| \geq r + \varepsilon\}$  olarak tanımlansın.

$y_0, y_1 \in st-LIM^r \Delta x_i$  olduğundan  $d(K_1) = d(K_2) = 0$  elde edilir. Böylece  $\forall i \in K_1^c \cap K_2^c$  ve

$\forall \lambda \in [0, 1]$  için

$$\|\Delta x_i - [(1-\lambda)y_0 + \lambda y_1]\| = \|(1-\lambda)(\Delta x_i - y_0) + \lambda(\Delta x_i - y_1)\| < r + \varepsilon \quad (4.18)$$

elde edilir.  $d(K_1^c \cap K_2^c) = 1$  olduğundan

$$d\left(\left\{i \in \mathbb{N} : \|\Delta x_i - [(1-\lambda)y_0 + \lambda y_1]\| \geq r + \varepsilon\right\}\right) = 0 \quad (4.19)$$

Olur ki bu da  $[(1-\lambda)y_0 + \lambda y_1] \in st-LIM^r \Delta x_i$  demektir. Böylece  $st-LIM^r \Delta x_i$  kümesinin konveksliği ispatlanmış olur.

**Teorem 4.6.**  $r > 0$  olsun.  $(\Delta x_i)$  dizisinin  $x_*$  noktasına  $r$ -istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart,  $\forall i \in \mathbb{N}$  için  $st\text{-}\lim \Delta y_i = x_*$  ve  $\|\Delta x_i - \Delta y_i\| \leq r$  olacak şekilde bir  $\Delta y = (\Delta y_i)$  dizisinin var olmasıdır.

**İspat:** Öncelikle kabul edelim ki  $(\Delta x_i)$  dizisi  $x_*$  noktasına  $r$ -istatistiksel yakınsak olsun. Buradan,

$$st\text{-}\lim \sup \|\Delta x_i - x_*\| \leq r \quad (4.20)$$

olur. Şimdi

$$\Delta y_i := \begin{cases} x_*, & \|\Delta x_i - x_*\| \leq r \text{ ise} \\ \Delta x_i + r \frac{x_* - \Delta x_i}{\|\Delta x_i - x_*\|}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (4.21)$$

tanımlayalım. Buradan

$$\|\Delta y_i - x_*\| = \begin{cases} 0, & \|\Delta x_i - x_*\| \leq r \text{ ise} \\ \|\Delta x_i - x_*\| - r, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (4.22)$$

yazılabilir.  $\Delta y_i$ 'nin tanımından,  $\forall i \in \mathbb{N}$  için  $\|\Delta x_i - \Delta y_i\| \leq r$  olur ve yine  $\Delta y_i$ 'nin tanımından

$$st\text{-}\lim \sup \|\Delta y_i - x_*\| = 0 \quad (4.23)$$

elde edilir ki bu da  $st\text{-}\lim \Delta y_i = x_*$  ifadesini sağlar.

Şimdi  $\forall i \in \mathbb{N}$  için  $st\text{-}\lim \Delta y_i = x_*$  ve  $\|\Delta x_i - \Delta y_i\| \leq r$  olacak şekilde bir  $\Delta y = (\Delta y_i)$  dizisi var olduğunda  $(\Delta x_i)$  dizisinin  $x_*$  noktasına  $r$ -istatistiksel yakınsak olduğunu gösterelim.  $st\text{-}\lim \Delta y_i = x_*$  olduğundan,  $\forall \varepsilon > 0$  için,

$$d\left(\{i \in \mathbb{N} : \|\Delta y_i - x_*\| \geq \varepsilon\}\right) = 0 \quad (4.24)$$

elde edilir. Buradan aşağıdaki ifadenin sağlandığını görmek kolaydır.

$$\{i \in \mathbb{N} : \|\Delta y_i - x_*\| \geq \varepsilon\} \supseteq \{i \in \mathbb{N} : \|\Delta x_i - x_*\| \geq r + \varepsilon\}. \quad (4.25)$$

Bu ilişkiden dolayı  $d\left(\{i \in \mathbb{N} : \|\Delta y_i - x_*\| \geq \varepsilon\}\right) = 0$  ifadesinden,

$$d\left(\{i \in \mathbb{N} : \|\Delta x_i - x_*\| \geq r + \varepsilon\}\right) = 0 \text{ elde edilir ki böylece ispat tamamlanmış olur.}$$

**Lemma 4.1.**  $\Gamma_{\Delta x}$  kümesi,  $(\Delta x_i)$  dizisinin tüm istatistiksel yığılma noktalarının kümesi olmak üzere, ,keyfi bir  $c \in \Gamma_{\Delta x}$  ve  $\forall x_* \in st\text{-}LIM^r \Delta x_i$  için  $\|x_* - c\| \leq r$  dir.

**İspat:** Kabul edelim ki  $c \in \Gamma_{\Delta x}$  ve  $\|x_* - c\| > r$  şartını sağlayacak şekilde bir  $x_* \in st\text{-}LIM^r \Delta x_i$

noktası var olsun.  $\varepsilon := \frac{\|x_* - c\| - r}{3}$  olarak tanımlayalım. Buradan,

$$\{i \in \mathbb{N} : \|\Delta x_i - x_*\| \geq r + \varepsilon\} \supseteq \{i \in \mathbb{N} : \|\Delta x_i - c\| < \varepsilon\} \quad (4.26)$$

yazılabilir.  $c \in \Gamma_{\Delta x}$  olduğundan,  $d(\{i \in \mathbb{N} : \|\Delta x_i - c\| < \varepsilon\}) \neq 0$  dir. Dolayısıyla, (4.26)'dan

$d(\{i \in \mathbb{N} : \|\Delta x_i - x_*\| \geq r + \varepsilon\}) \neq 0$  elde edilir ki bu da  $x_* \in st-LIM^r \Delta x_i$  olması ile çelişir.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

**Teorem 4.7.**  $(\Delta x_i)$  dizisinin  $x_*$  noktasına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart  $st-LIM^r \Delta x_i = \bar{B}_r(x_*)$  olmasıdır.

**İspat:**  $st-LIM^r \Delta x_i = \bar{B}_r(x_*) \neq \emptyset$  olduğundan, Teorem 4.2 dolayısıyla  $(\Delta x_i)$  dizisinin sınırlı olduğu söylenebilir.  $(\Delta x_i)$  dizisinin  $x_*$  dan başka bir  $x'_*$  yığılma noktası olduğunu kabul edelim. O halde

$$\bar{x}_* := x_* + \frac{r}{\|x_* - x'_*\|} (x_* - x'_*) \quad (4.27)$$

noktası

$$\|\bar{x}_* - x'_*\| = \left( \frac{r}{\|x_* - x'_*\|} + 1 \right) \|x_* - x'_*\| = r + \|x_* - x'_*\| > r \quad (4.28)$$

ifadesini sağlar.

$\bar{x}_*$  noktası  $(\Delta x_i)$  dizisinin bir yığılma noktası olduğundan, Lemma 4.1 den dolayı  $\bar{x}_* \notin st-LIM^r \Delta x_i$  eşitsizliği sağlanır. Bu  $\|\bar{x}_* - x_*\| = r$  ve  $st-LIM^r \Delta x_i = \bar{B}_r(x_*)$  gerçeğiyle çelişir. Dolayısıyla  $x_*$  noktası  $(\Delta x_i)$  dizisinin tek yığılma noktasıdır. “İstatistiksel sınırlı bir dizinin istatistiksel yığılma noktası tek ise, bu dizi bu yığılma noktasına istatistiksel yakınsaktır” (Tripathy, 1997) teoremi gereğince  $(\Delta x_i)$  dizisinin  $x_*$  noktasına istatistiksel yakınsak olduğu görülür.

**Teorem 4.8.**  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  kesin konveks uzay ve  $(\Delta x_i)$  bu uzayda bir dizi olsun. Eğer  $\|y_1 - y_2\| = 2r$  koşulunu sağlayan  $y_1, y_2 \in st-LIM^r \Delta x_i$  noktaları varsa  $(\Delta x_i)$  dizisi  $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$  noktasına istatistiksel yakınsaktır.

**İspat:**  $z \in \Gamma_{\Delta x}$  olsun. O halde  $y_1, y_2 \in st-LIM^r \Delta x_i$  noktaları Lemma 4.1 den,

$$\|y_1 - z\| \leq r \text{ ve } \|y_2 - z\| \leq r \quad (4.29)$$

şartını sağlar. Diğer taraftan,

$$2r = \|y_1 - y_2\| \leq \|y_1 - z\| + \|y_2 - z\| \quad (4.30)$$

olur. (4.29) ve (4.30) eşitsizlikleri birlikte düşünüldüğünde  $\|y_1 - z\| = \|y_2 - z\| = r$  elde edilir.

$$\frac{1}{2}(y_2 - y_1) = \frac{1}{2}[(z - y_1) - (y_2 - z)] \quad (4.31)$$

ve  $\|y_1 - y_2\| = 2r$  olduğundan  $\left\|\frac{1}{2}(y_2 - y_1)\right\| = r$  dir. Uzayın kesin konveks oluşu ve (4.31) eşitsizliği gereğince  $\frac{1}{2}(y_2 - y_1) = (z - y_1) = (y_2 - z)$  ve böylece  $z = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$  dir. Böylece  $z$  noktası  $(\Delta x_i)$  dizisinin tek istatistiksel yığılma noktası olur. Diğer yandan,  $y_1, y_2 \in st-LIM^r \Delta x_i$  verildiğinden,  $st-LIM^r \Delta x_i \neq \emptyset$  şartını sağlar. Teorem 4.2 gereğince  $(\Delta x_i)$  dizisi istatistiksel sınırlıdır. Dolayısıyla  $(\Delta x_i)$  dizisi istatistiksel yakınsaktır yani  $st-\lim \Delta x = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$  olur.

**Teorem 4.9.**

a)  $c \in \Gamma_{\Delta x}$  ise  $st-LIM^r \Delta x_i \subseteq \bar{B}_r(c)$  dir.

b)  $st-LIM^r \Delta x_i = \bigcap_{c \in \Gamma_{\Delta x}} \bar{B}_r(c) = \{x_* \in \mathbb{R}^n : \Gamma_{\Delta x} \subseteq \bar{B}_r(x_*)\}$ .

**İspat:** a)  $x_* \in st-LIM^r \Delta x_i$  ve  $c \in \Gamma_x$  olduğunu kabul edelim. Lemma 4.1 gereğince,

$$\|x_* - c\| \leq r \quad (4.32)$$

olur; aksi takdirde  $\varepsilon := \frac{\|x_* - c\| - r}{3}$  için

$$d(\{i \in \mathbb{N} : \|\Delta x_i - x_*\| \geq r + \varepsilon\}) \neq 0 \quad (4.33)$$

elde edilir ki bu da  $x_* \in st-LIM^r \Delta x_i$  olmasıyla çelişir.

b) a) şıkkı gereğince  $st-LIM^r \Delta x_i \subseteq \bar{B}_r(c)$  olduğunu biliyoruz. Eğer  $\bar{B}_r(c) \subseteq st-LIM^r \Delta x_i$  olduğu gösterilirse ispat tamamlanmış olur. Şimdi  $y \in \bigcap_{c \in \Gamma_{\Delta x}} \bar{B}_r(c)$  olduğunu kabul edelim.

Buradan  $\forall c \in \Gamma_{\Delta x}$  için,

$$\|y - c\| \leq r \quad (4.34)$$

elde edilir ki bu da  $\Gamma_{\Delta x} \subseteq \bar{B}_r(c)$  ifadesine eşittir yani

$$\bigcap_{c \in \Gamma_{\Delta x}} \bar{B}_r(c) \subseteq \{x_* \in \mathbb{R}^n : \Gamma_{\Delta x} \subseteq \bar{B}_r(x_*)\} \quad (4.35)$$

dir. Şimdi  $y \notin st-LIM^r \Delta x_i$  olsun. Bu durumda

$$d(\{i \in \mathbb{N} : \|\Delta x_i - y\| \geq r + \varepsilon\}) \neq 0 \quad (4.36)$$

olacak şekilde bir  $\varepsilon > 0$  sayısı vardır öyle ki  $(\Delta x_i)$  dizisinin  $\|y - c\| \geq r + \varepsilon$  yani  $\Gamma_{\Delta x} \not\subseteq \bar{B}_r(y)$

ve  $y \notin \{x_* \in \mathbb{R}^n : \Gamma_{\Delta x} \subseteq \bar{B}_r(x_*)\}$  şartlarını sağlayan bir  $c$  istatistiksel yığılma noktası vardır.

Dolayısıyla  $y \in \{x_* \in \mathbb{R}^n : \Gamma_{\Delta x} \subseteq \bar{B}_r(x_*)\}$  ifadesinden  $y \in st-LIM^r \Delta x_i$  olur yani

$$\{x_* \in \mathbb{R}^n : \Gamma_{\Delta x} \subseteq \bar{B}_r(x_*)\} \subseteq st-LIM^r \Delta x_i \quad (4.37)$$

dir. (4.35) ve (4.36) ifadeleri gözönüne alınırsa ispat tamamlanmış olur.

Aşağıda verilen teorem, istatistiksel yığılma noktaları ile kaba istatistiksel limit noktaları arasındaki ilişkiyi vermektedir.

**Teorem 4.10.**  $(\Delta x_i)$  istatistiksel sınırlı bir dizi olsun.  $r = diam(\Gamma_{\Delta x})$  ise,  $\Gamma_{\Delta x} \subseteq st-LIM^r \Delta x_i$  dir.

**İspat:**  $c \notin st-LIM^r \Delta x_i$  alalım. O halde  $d\left(\left\{i \in \mathbb{N} : \|\Delta x_i - c\| \geq r + \varepsilon'\right\}\right) \neq 0$  olacak şekilde bir  $\varepsilon' > 0$  vardır.  $(\Delta x_i)$  dizisi istatistiksel sınırlı ve  $d\left(\left\{i \in \mathbb{N} : \|\Delta x_i - c\| \geq r + \varepsilon'\right\}\right) \neq 0$  olduğundan  $\tilde{\varepsilon} := \frac{\varepsilon'}{2}$  için  $\|c - c'\| > r + \tilde{\varepsilon}$  şartını sağlayacak şekilde  $c$  den farklı bir  $c'$  yığılma noktası vardır. Böylece  $diam(\Gamma_{\Delta x}) > r + \tilde{\varepsilon}$  elde edilir ki buradan teorem ispatlanır.

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında fark dizileri olarak adlandırılan  $\Delta x = (x_i - x_{i+1})$  dizilerinin kaba yakınsaklığı ve kaba istatistiksel yakınsaklığı tanımlanmış ve elde edilen kaba limit noktaları kümesinin bazı cebirsel ve topolojik özellikleri incelenmiştir. Yine kaba Cauchy dizileri ile kaba yakınsaklık arasındaki ilişkiler araştırılmış; kabalık derecesi değiştikçe kaba yakınsaklığın nasıl değişeceği görülmüştür.

Yapılacak yeni çalışmalarda, benzer özellikler  $\Delta^m x = (\Delta^m x_i) = (\Delta^{m-1} x_i - \Delta^{m-1} x_{i+1})$  ve  $\Delta^m x_i = \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} \Delta x_{i+v}$  olmak üzere  $(\Delta^m x_i)$  dizileri için de elde edilebilir. Yine bu çalışmada kullanılan yakınsaklık ve istatistiksel yakınsaklık kavramları yerine farklı yakınsaklık türleri kullanılarak nasıl sonuçlar elde edilebileceği incelenebilir.

## KAYNAKLAR

- Aytar, S., 2008, Rough Statistical Convergence, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 29, Issue 3-4, 291-303.
- Aytar, S., 2008, The Rough Limit Set and the Core of a Real Sequence, *Numer. Func. Anal. Optimiz.* 29, No 3, 283-290.
- Başarır, M., 1995, On the  $\Delta$ -Statistical convergence of sequences, *Firat University, Journal of Science and Engineering*, 7(2), 1-6.
- Bayraktar, M., 2006, Fonksiyonel Analiz, *Gazi Kitabevi, Ankara, Türkiye*.
- Bohnenblust, F., 1938, Convex regions and projections in Minkowski spaces, *Ann. of Math.* 39, 301-308.
- Buck, R.C., 1953, Generalized asymptotic density, *Amer. J. Math.*, 75-335.
- Erdős P. and Tenenbaum G., 1989, Sur les densites de certaines suites d'entiers, *Proceedings of the London Math. Soc.*, 59(3), 438-438.
- Et, M., 1993, On some difference sequence spaces, *Doğa-Tr. J. of Mathematics* 17, 18-24.
- Et, M. and Çolak, R., 1995, On some generalized difference sequence spaces, *Soochow Journal of Mathematics*, Volume 21, No.4, 377-386.
- Et, M., and Nuray, F., 2001,  $\Delta^m$  – Statistical convergence, *Indian J. Pureappl. Math.*, 32(6), 961-969.
- Fast, H., 1951, Sur la convergence statistique, *Coll. Math.* 2, 241-244.
- Freedman A. R., 1981, and Sember I. J., Densities and summability, *Pacific Journal of Math.*, 95(2) 293-305.
- Fridy, J. A., 1985, On statistical convergence, *Analysis* 5, 301-313.
- Fridy, J. A., 1993, Statistical limit points, *Proceedings of the American Mathematical Society*, Volume 118, Number 4, 1187-1192.
- Gümüş, H. and Nuray, F., 2011,  $\Delta^m$  – ideal convergence, *Selçuk J. Appl. Math.*, 12(2), 101-110.
- Jung, H. E. W., 1901, Über die kleinste Kugel, die eine raumliche Figur einschliesst, *J. Reine Angew. Math.* 123, 241-257.
- Kızmaz, H., 1981, On certain sequence spaces, *Canad. Math. Bull.*, Vol. 24(2), 169-176.
- Maddox, I. J., 1970, Elements of functional analysis, *Cambridge University Press*.

- Maddox, I. J., 1988, Statistical convergence in a locally convex sequence space, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 104, 141-145.
- Miller, H. I., 1995, A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence, *Trans. of the Amer. Math. Soc.*, 347(5), 1811-1819.
- Niven, I., 1951, The asymptotic density of sequences, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 420-434.
- Phu, H. X., 2001, Rough convergence in normed linear spaces, *Numer. Funct. Anal. Optimiz.*, Vol. 22, 199-222.
- Phu, H. X., 2003, Rough Convergence infinite dimensional normed spaces, *Journal of Numerical Functional Analysis and Optimization*, Vol.24, 285-301.
- Savaş, E., 2010,  $\Delta^m$  – strongly summable sequences spaces in 2-norms spaces defined by ideal convergences and Orlicz function, *Applied Mathematics and Computation*, 217(1), 271-276.
- Steinhaus, H., 1951, Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, *Collog. Math.* 2, 73-74.
- Schoenberg, I.J., 1959, The integrability of certain functions and related summability methods, *The Amer. Math. Monthly*, 66(5), 361-375.
- Tripathy, B.C., 1997, On statistically convergent and statistically bounded sequences, *Bull. Cal. Math. Soc.*, 20, 31-33.
- Yalçınkaya, İ., 2015, Analiz III (Diziler ve Seriler), *Dizgi Ofset, Konya, Türkiye*.
- Zygmund, A., 1979, Trigonometric Series, *Cambridge University Press, Cambridge, UK*.

## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

**Adı Soyadı** : Nihal DEMİR  
**Uyruğu** : T.C.  
**Doğum Yeri ve Tarihi** : Ereğli, 20.03.1989  
**Telefon** : 05447496446  
**Faks** :  
**e-mail** : nihaldemircise@gmail.com

### EĞİTİM

| Derece        | Adı, İlçe, İl                                  | Bitirme Yılı |
|---------------|------------------------------------------------|--------------|
| Lise          | : İvriz Anadolu Öğretmen Lisesi, Ereğli, Konya | 2007         |
| Üniversite    | : Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Atakum, Samsun   | 2012         |
| Yüksek Lisans | : Necmettin Erbakan Üniversitesi, Meram, Konya | Devam Ediyor |
| Doktora       | :                                              |              |

### İŞ DENEYİMLERİ

| Yıl       | Kurum                        | Görevi              |
|-----------|------------------------------|---------------------|
| 2013-2017 | Altındağ Türkerler Ortaokulu | Matematik Öğretmeni |
| 2017-     | Emirgazi İkizli Ortaokulu    | Matematik Öğretmeni |

### UZMANLIK ALANI

### YABANCI DİLLER

İngilizce

### BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

### YAYINLAR

Gümüş, H., Demir, N., 2018, A New Type of Generalization on W- Asymptotically  $J_\lambda$  – Statistical Equivalence with the Number of  $\alpha$ , *Axioms*, 7 (3), 54.