

HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NORMLU LİNEER UZAYLAR



Abdullah YILDIRIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

1996
ŞANLIURFA

HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NORMLU LİNEER UZAYLAR

Abdullah YILDIRIM

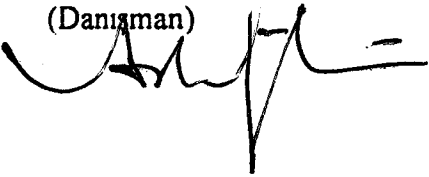
55478



**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

Bu tez 25/06/1996 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek
oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

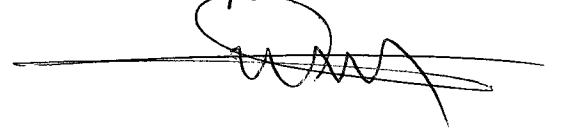
Yrd.Doç.Dr. Aslan GÜLCÜ
(Danışman)



Doç.Dr. Fatih NURAY



Yrd.Doç. Binyamin AYDIN



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	1
ÖZET	2
ABSTRACT	3
SİMGELER	4
GİRİŞ	5
1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	6
1.1. Temel Tanım ve Teoremler	6
2. YAKINSAKLIK VE TAMLIK	16
2.1. Yakınsaklık ve Tamlık	16
3. LİNEER OPERATÖRLER VE FONKSİYONELLER	24
3.1. Lineer Operatörler ve Fonksiyoneller	24
4. BANACH-STEINHAUS TEOREMİ	38
4.1. Banach-Steinhaus Teoremi	38
5. NORMLU UZAYLARDA BAZI TEOREMLER VE ZAYIF YAKINSAKLIK	43
5.1. Açık Tasvir ve Kapalı Grafik Teoremi	43
5.2. Hahn-Banach Teoremi	48
5.3. Zayıf Yakınsaklık	57
6. KAYNAKLAR	61
7. ÖZGEÇMİŞ	62

TEŞEKKÜR

Bana bu çalışmayı veren, araştırmanın yürütülmesinde ilgi ve yardımlarını gördüğüm sayın hocam Yrd.Doç.Dr. Aslan GÜLCÜ'ye teşekkür ederim.



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

NORMLU LINEER UZAYLAR

Abdullah YILDIRIM

Harran Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı

1996, Sayfa: 60

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verildi. İkinci bölümde, normlu lineer uzaylar ile tanımlanan p -normlu uzay, Banach uzayı verildi. Normlu lineer uzaylarda yakınsaklığı ve tamlığı pekiştirecek bazı tanım, sonuç teoremler ifade ve ispat edildi. Üçüncü bölümde normlu lineer uzaylar ile ilgili bazı lineer operatörler ve fonksiyonlar tanımlandı. Dördüncü bölümde, Banach-Steinhaus teoremi ifade ve ispat edildi. Örneklerle bölüme açıklık getirildi. Beşinci bölümde ise açık tasvir ve kapalı grafik teoremi ve Hahn -Banach teoremi ifade ve ispat edildi. Bölüm sonunda zayıf yakınsaklık detaylı bir şekilde incelendi ve örneklerle pekiştirildi.

ANAHTAR KELİMELER : Normlu Lineer Uzay, Kapalı Grafik Teoremi,
Lineer Operatörler ve Fonksiyoneller,
Açık Tasvir Teoremi.

ABSTRACT

Master Thesis

NORMED LINEAR SPACES

Abdullah YILDIRIM

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Science
Department of Mathematics

1996, Page: 60

This thesis consist of five chapters.

In the first chapter; fundemental definitions and theorems have been given where they will be us in the following chapters.

In the second chapter ; p -normed space and Banach space defined by normed linear spaces have been given. The convergence and the complete will harden in normed linear spaces, some definitions and corollarys have been stated and proved.

In third chapter ; some linear operators and functions have been defined where interested normed spaces

In the four chapter ; The Banach-Steinhaus's Theorem have been stated and proved. It has been given explanatory examples for this chapter.

In the finally chapter; the open mapping'and Closed Graph Teorem and Hahn-Banach's Theorems have been stated and proved.

The weakly convergence have been studied on a vast scale and hardened by examples in the finally chapter.

KEY WORDS : Normed Linear Space, Linear Operators and Functionals,
The Open Mapping Theorem, The Closed Graph Theorem.

SİMGELER

N	:Doğal Sayılar Kümesi
C	:Kompleks Sayılar Kümesi
Q	:Rasyonel Sayılar Kümesi
R	:Reel Sayılar Kümesi
c	:Yakınsak Diziler Uzayı
c_0	:Sıfıra Yakınsak Diziler Uzayı
l_∞	:Sınırlı Diziler Uzayı
ω	:C Üzerinde Tanımlı Bütün Diziler Uzayı

GİRİŞ

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verildi. İkinci bölümde, normlu lineer uzaylar ile tanımlanan p -normlu uzay, Banach uzayı verildi. Normlu lineer uzaylarda yakınsaklığı ve tamlığı pekiştirecek bazı tanım, sonuç teoremler ifade ve ispat edildi. Üçüncü bölümde normlu lineer uzaylar ile ilgili bazı lineer operatörler ve fonksiyonlar tanımlandı. Dördüncü bölümde, Banach-Steinhaus teoremi ifade ve ispat edildi. Örneklerle bölüme açıklık getirildi. Beşinci bölümde ise açık tasvir ve kapalı grafik teoremi ve Hahn -Banach teoremi ifade ve ispat edildi. Bölüm sonunda zayıf yakınsaklık detaylı bir şekilde incelendi ve örneklerle pekiştirildi.

1. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

Temel Tanımlar ve Teoremler:

1.1.Tanım : X boş olmayan bir küme K reel veya kompleks sayıların bir kümesi olsun ,

$$+ : X \times X \rightarrow X \text{ ve } \cdot : K \times X \rightarrow X$$

fonksiyonu, her $a, b \in K$ ve $x, y, z \in X$ için, aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X kümesine K cismi üzerinde bir lineer uzay adı verilir:

L1) $x+y=y+x$

L2) $(x+y)+z=x+(y+z)$

L3) $(x+\theta)=x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır.

L4) Her bir $x \in X$ için $x+(-x)=0$ olacak şekilde bir $(-x) \in X$ vardır.

L5) $1 \cdot x=x$

L6) $a(x+y)=ax+ay$

L7) $(a+b)x=ax+bx$

L8) $a(bx)=(ab)x$.

$x = (x_k)$, $y = (y_k)$ ($k=1,2,3,\dots$) iki dizi ve $a \in C$ bir skaler olmak üzere $x+y = x_k + y_k$ ve $ax = (a x_k)$ olarak tanımlanırsa bütün kompleks dizilerin ω uzayı, C üzerinde bir lineer uzaydır.[6]

1.2. Tanım: X bir lineer uzay olsun $p: X \rightarrow R$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa p ye X üzerinde bir yarınorm denir:

1) $p(\theta) = 0$

2) $p(\lambda x) = |\lambda| \cdot p(x)$ ($\lambda \in K$)

$$3)p(x+y) \leq p(x) + p(y). \quad [3]$$

1.3.Tanım : X boş olmayan bir küme olsun. $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa d ye X üzerinde metrik ve (X, d) çiftine de metrik uzay denir:

$$\text{M1)} \quad d(x, y) \geq 0$$

$$\text{M2)} \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$\text{M3)} \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$\text{M4)} \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y). \quad [1]$$

1.4.Tanım : $X = (X, d)$ bir metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir. [6]

1.6.Tanım: s tüm kompleks sayı dizilerini gösterecek şekilde l_∞, c, c_0 , sırasıyla

$$\|x\| = \sup_{k \geq 0} |x_k|$$

alışılmış normu ile sınırlı, yakınsak ve sıfıra yakınsak dizilerin Banach uzayları olsun:

$$c_0(p) = \{x: |x_n|^{p_n} \rightarrow 0\}$$

$$c(p) = \{x: |x_n - l|^{p_n} \rightarrow 0\}, \text{ bazı } l \text{ ler için}$$

$$l_\infty(p) = \{x: \sup_n |x_n|^{p_n} < \infty\}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer her n için $p_n = p$ ise, bu takdirde $l_\infty(p) = l_\infty$, $c_0(p) = c_0$ ve $c(p) = c$ olur.[2], [3], [4], [5].

1.7.Tanım : (X, d) bir metrik uzay olsun. X deki her (x_n) Cauchy dizisi yakınsak ise, yani $x_n \rightarrow x \in X$ ise (X, d) metrik uzayına tam denir. [6]

1.8.Tanım: $p > 1$ ve $q \neq 0$, $1/p + 1/q = 1$ biçiminde bir sayı olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i \cdot y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q \right)^{1/q}$$

olarak ifade edilen eşitsizliğe Hölder eşitsizliği denir. [6]

1.9.Tanım : n pozitif bir tam sayı olmak üzere gerçel sayıların sıralı n - lilerinin

$$R^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_n \in R\}$$

kümesini alalım $\|x\|$, x noktasının başlangıç noktası olan uzaklığı veya x vektörünün uzunluğu olarak

$$\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + \dots + |x_n|^2} = \left(\sum_{i=1}^n (x_i)^2 \right)^{1/2}$$

biçiminde tanımlanır. Buna R^n üzerinde Euclidean normu ve bu normla birlikte R^n gerçel lineer uzayına n - boyutlu Euclidean uzay denir. [6]

1.10.Tanım: Eğer bir A kümesinin en küçük üst sınırı bu kümenin bir elemanı ise bu elamana kümenin en büyük elemanı veya maksimal elemanı denir. [1]

1.11.Tanım : C ve C' gerçel veya karmaşık cebir olsun. $\Phi: C \rightarrow C'$ dönüşümü için

$$\Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y)$$

$$\Phi(\alpha \cdot x) = \alpha \Phi(x)$$

$$\Phi(x \cdot y) = \Phi(x) \cdot \Phi(y)$$

koşulları sağlanıyorsa Φ ye homomorfizma, Φ homomorfizması bire-bir ve üzerine ise Φ ye izomorfizma denir. [6]

1.12.Tanım : (X, d) , (Y, ρ) iki metrik uzay olsun. $f: X \rightarrow Y$ dönüşümü uzaklıkları koruyorsa yani;

$$d(x, y) = \rho(f(x), f(y))$$

koşulu sağlanıyorsa f ye izometri , X ve Y uzaylarına da izometrik uzaylar denir. [6]

1.13.Tanım : $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonsiyon olsun. f fonsiyonunun A üzerinde düzgün sürekli olması için gerek ve yeter koşul $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyleki $|x-t| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan $\forall x, t \in A$ için $|f(x)-f(t)| < \varepsilon$ olmasıdır. Burada δ nin sadece ε sayısına bağlı olması gerekir.[1]

1.14.Tanım :

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots$$

şeklindeki seriye trigonometrik seri denir. Bu seri daha kısa olarak

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1.1)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \quad (1.2)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nxdx \quad (1.3)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin xdx \quad (1.4)$$

şeklindedir. (1.2), (1.3) ve (1.4) formülleri ile tanımlı katsayılara $f(x)$ fonsiyonunun Fourier katsayıları ve bu katsayılarla oluşturulmuş trigonometrik serisine de $f(x)$ fonsiyonunun Fourier serisi denir . [7]

1.15.Tanım: X, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\langle , \rangle : X \times X \rightarrow F$$

fonsiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu fonsiyona iç çarpım (veya iç çarpım fonsiyonu) denir:

- (1) $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- (2) $\langle ax, y \rangle = a \langle x, y \rangle \quad (a \in F)$
- (3) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- (4) $\langle x, x \rangle \geq 0, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ [6]

1.16. Tanım : X bir iç çarpım uzayı ve $\| \cdot \|$, iç çarpım normu olsun.

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$$

olarak tanımlanan (X, d) uzayı bir metrik uzay olur. X iç çarpım normuyla tanımlanan bu d metriğine göre tam ise X e Hilbert uzayı denir. [6]

1.17. Tanım : $0 \leq p_k \leq \sup p_k = H \leq \infty$ olacak şekilde pozitif sayıların sınırlı bir $p = p_k$ sayı dizisini alalım. Bu durumda,

$$l(p) = \{ x = (x_k) \mid \sum |x_k|^{p_k} < \infty \}$$

olarak tanımlanır. [3]

1.18. Tanım : l_p dizi uzayı $l(p)$ dizi uzayının özel bir durumudur : $l(p)$ nın tanımında (p_k) nın sabit olması halinde l_p yi tanımlarız ve genelde olduğu gibi bütün k lar için $p_k = p$ yazarız. $p > 0$ için, $\sum |x_k|^p < \infty$ olduğu zaman bütün dizilerin kümesi l_p olduğu açıktır. Çünkü $p = 1$ için $M = p$ olduğunda metrik;

$$d(x, y) = \left(\sum |x_k - y_k| \right)^{1/p}$$

dır. $0 < p < 1$ iken ve $M = 1$ ise metrik ;

$$d(x, y) = \sum |x_k - y_k|^p$$

olur. [4]

1.19.Tanım : N ve N' nün bir normlu uzay olması halinde,
 $C(N, N') = \{T: N \rightarrow N' \text{ sürekli lineer operatör} \}$ kümesi;

$$\|T\| = \sup \{ \|T(x)\| : \|x\| \leq 1 \}$$

ile normlu bir uzaydır ve B nin Banach uzayı olması halinde $C(N, B)$ bir Banach uzayıdır. Şimdi N gerçel normlu veya kompleks uzay oluşuna göre $C(N, R)$ ve $C(N, C)$ Banach uzaylarını düşünelim. Bu uzaylara N nin dual uzayları denir. [6]

1.20.Tanım: X bir lineer uzay ve M bir altuzay olsun $x, y \in M$ için ;

$$1) x+y \in M$$

$$2) a.x \in M$$

şartlarını sağlıyorsa M ye X in altuzayı denir.

1.21.Tanım: X bir lineer uzay ve M bir alt uzay olsun. $x \equiv y \pmod{M}$ olarak tanımlanırsa $x - y \in M$ olur. O zaman $\equiv$, X/M de bir denklik bağıntısıdır. Burada M modül, X faktör uzayı, $E_x = \{ y | y \equiv x \pmod{M} \}$ ve $\{ E_x | x \in X \}$ olarak tanımlanır. Ayrıca,

$$E_x + E_y = E_{x+y}, \quad \lambda E_x = E_{\lambda x}$$

olarak yazılabilir[2].

1.22.Tanım: (X, d) metrik uzay ve A , X in bir alt kümesi olsun. A nın kapanışı X e eşit ise, yani $\overline{A} = X$ ise, A ya X de yoğun küme denir. Yine X in sayılabilir yoğun bir alt kümesi varsa X e ayrılabilir denir.[6]

1.23.Tanım: X bir topolojik uzay $S \subset X$ olsun. Eğer S , birinci katagoriden değilse yani, hiç bir yerde yoğun olmayan kümelerin bir birleşimi olarak yazılamıyorsa S ye ikinci katagoriden küme denir.[2]

1.24.Tanım: N bir lineer uzay olsun. $\| \cdot \|: N \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonun x deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon aşağıdaki koşulları sağlıyorsa $\| \cdot \|$ ye N üzerinde norm denir:

$$\text{N1) } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$\text{N2) } \|ax\| = |a|\|x\|. \quad (a \in F)$$

$$\text{N3) } \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|. \quad [6]$$

1.25.Tanım : L bir lineer uzay ve $A \subset L$ olsun. Her $x, y \in A$ için

$$B = \{z \in L : z = ax + (1-a)y, \quad 0 \leq a \leq 1\} \subset A$$

olursa A ya konveks küme denir. [8]

1.26.Tanım: (x_n) bir reel sayı dizisi ve $x \in \mathbb{R}$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için, $n > n_0$ olduğunda $|x_n - x| < \varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı bir n_0 sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisi x e yakınsaktır denir ve

$$\lim x_n = x \text{ veya } (x_n) \rightarrow x$$

şeklinde gösterilir.[8]

1.27. Tanım: Eğer $\sum |a_k|$ serisi yakınsak ise $\sum a_k$ serisine mutlak yakınsak denir.[1]

1.28. Tanım: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır, öyleki $|x - a| < \delta$ iken $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ oluyorsa f fonksiyonu a noktasında süreklidir. Eğer f fonksiyonu A kümesinin her noktasında sürekli ise bu fonksiyona A da sürekli fonksiyon denir. [6]

1.29. Tanım: X boş olmayan bir küme ve τ , X in altkümelerinin bir ailesi olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa τ ya topoloji, (X, τ) ya da topolojik uzay denir:

$$T1) X, \emptyset \in \tau$$

$$T2) \tau \text{ da alınan herhangi sayıda elemanın birleşimi } \tau \text{ ya aittir}$$

$$T3) \tau \text{ da alınan sonlu sayıda elemanın kesişimi } \tau \text{ ya aittir. [6]}$$

1.30. Tanım: X bir topolojik uzay ve $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f nin X üzerinde üsttenyarısürekli olabilmesi için gerek ve yeter koşul her t gerçel sayısı için $f^{-1}(-\infty, t)$ nin X de açık olmasıdır, yani X deki her t gerçel sayısı için

$$\{x \in X \mid f(x) < t\}$$

kümesinin X içinde açık olmasıdır. Eğer $-f$ üstten yarısürekli ise bu durumda f fonksiyonuna alttan yarı süreklidir denir.[6]

1.31. Tanım : X bir lineer uzay ve $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$$

koşulunu sağlıyorsa p ye mutlak homojendir denir. [2]

1.32. Tanım: N sonlu boyutlu bir normlu uzay ve A , N nin bir alt kümesi olsun. A nın kompakt olması için gerek ve yeter koşul A nın kapalı ve sınırlı olmasıdır. [2]

1.33. Lemma (Zorn Lemması) : Yarı sıralanmış bir A kümesinin her tam sıralanmış altkümesi üstten sınırlı ise A nın bir maksimal elemanı vardır. [10]

1.34. Teorem (Düzgün sınırlılık prensibi): İkinci katagoriden X metrik uzayı üzerinde tanımlı alttan yarı süreklili p fonksiyonlarının bir kolleksiyonu P olsun ve her $x \in X$ ve $p \in P$ için

$$P(x) \leq M < \infty$$

olduğunu kabul edelim. Bu taktirde her $x \in S$ ve her $p \in P$ için

$$P(x) \leq M$$

olacak şekilde X içinde bir S yuvarı ve bir M sabiti vardır. [6]

1.35. Teorem: (i) Yakınsak her dizi bir tek limite sahiptir.

(ii) Her yakınsak dizi bir Cauchy dizisidir, fakat bunun tersi genel olarak doğru değildir.

(iii) Eğer bir Cauchy dizisi yakınsak bir altdiziye sahip ise o zaman bütün dizi yakınsaktır. [2]

1.36. Teorem (Riemann - Stieltjes İntegrali): $\alpha, [a, b]$ üzerinde monoton artan bir fonksiyon olsun ($\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ sonlu olduğu zaman $\alpha, [a, b]$ bölgesi üzerinde sınırlı olur), $[a, b]$ nin her bir P parçasını

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$$

şeklinde yazarız. $\Delta\alpha_i > 0$ olduğu açıktır. $[a, b]$ bölgesi üzerinde sınırlı her bir gerçel f fonksiyonu için üsttoplam

$$U(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta\alpha_i \quad (1.7)$$

olarak ve alttoplamı

$$L(p, f, \Delta\alpha) = \sum m_i \Delta\alpha_i \quad (1.8)$$

şeklinde Rieamann integralinin tanımında kullanıldığı anlamda yazabiliriz ve buradan *ebas* ve *eküs* bütün parçalar üzerinde tekrar alındığında

$$\int_a^{-b} f d\alpha = ebas \cup (P, f, \alpha) \quad (1.9)$$

$$\int_{-a}^b f d\alpha = eküs \ L(P, f, \alpha) \quad (1.10)$$

yazarız . Eğer (1.9) ve (1.10) un sol tarafları eşitse ortak değerleri

$$\int_a^b f d\alpha \quad (1.11)$$

ya da

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) \quad (1.12)$$

ile gösteririz. Bu $[a, b]$ üzerinde α ya göre f nin Riemann-Stieltjes (veya kısaca Stieltjes) integralidir.[11]

1.37. Tanım: Bir X metrik uzayının dizisel kompakt olması için gerek ve yeter şart X deki her dizinin yakınsak bir alt diziye sahip olmasıdır. [2]

2.BÖLÜM

YAKINSAKLIK VE TAMLIK

Bu bölümde ilk olarak normlu lineer uzaylar verilecektir. Birinci bölümde lineer uzay tanımı verilmişti ve lineer X uzayı üzerinde norm $\| \cdot \|$ şeklinde verilerek $(X, \| \cdot \|)$ ikilisine de normlu lineer uzay denmişti.

2.1. Normlu Lineer Uzay: $(X, \| \cdot \|)$ normlu lineer uzayı bir kompleks lineer (veya gerçel) uzaydır ve $\| \cdot \|: X \rightarrow R$ normu $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ olmak üzere

$$\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \|x\| \quad \text{ve} \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

şeklindedir.

X deki her x için $\|\theta\| = 0$ ve $\|x\| \geq 0$ dir.

Normlu lineer uzayların bir genelleştirmesi mevcuttur. Bu mutlak homojenliği biraz değiştiren p -normlu uzaydır. İleriki adımlarda normlu lineer uzay yerine "normlu uzay" tabirini kullanacağız.

2.2 . p -normlu Uzay: X bir lineer uzay $\| \cdot \|: X \rightarrow R$ ve $p > 0$ olsun. Bu takdirde $(X, \| \cdot \|, p)$ nin bir p -normlu uzay olabilmesi için gerek ve yeter koşullar:

(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|^p \cdot \|x\|$

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

olmasıdır.

p -normunun negatif olmaması gerekir ve ekonomik olsun diye p -normu ile 1-normu için aynı notasyonu kullanacağız. Hangi çeşit norm kullandığımızı açık şekilde ifade edeceğimiz için bir anlam karışıklığı olmayacaktır.

Eğer yukarıdaki tanımda (ii) ve (iii) alınıp, (i) ihmal edilirse p -yarı normlu uzayı elde edilir. 1- yarınormlu uzaya bir yarı normlu uzay denir.

2.3.Örnek : $0 < p < 1$ olsun.Bu durumda l_p uzayı ;

$$\|x\| = \sum |x_k|^p \quad (x \in l_p)$$

p -normu ile bir p -normlu uzaydır. $p=1$ olduğu zaman $\|x\|$, l_1 için bir normdur.

2.4.Teorem : Her bir p -normlu lineer uzay

$$d(x,y)=\|x-y\| \quad \text{ve} \quad \|x\| = d(x,\theta)$$

ile bir metrik uzaydır. Bunun tersi genellikle doğru değildir.

İspat: Birinci kısım aşikârdır. Eğer (X,d) bir lineer uzay ve bir metrik uzay olduğundan ve $g(x) = d(x,\theta)$ yazarsak bu durumda g , genellikle bir norm değildir. Örneğin; $p_k = k^{-1}$ ile $X=l(p)$ alalım ve

$$d(x,y)=\sum |x_k - y_k|^{p_k}$$

yazalım. Birinci bölümden $l(p)$ nin bir lineer metrik uzay olduğunu biliyoruz. Şimdi $g(x)$ mutlak homojen olmasın yani $x=(0,1,0,0,...) \in l(p)$ ise bu takdirde $g(2x) < 2g(x)$ olsun. Bu durumda g bir norm değildir. $q>0$ sabiti için g nin bir q -norm olmadığı bunun gibi bir sonuçla gösterilir. [2]

Normlu uzaylarda ne zaman topoloji kavramını kullanırsak bu topolojinin bir norm tarafından oluşturmuş metrik bir topoloji olduğunu anlaşılabacaktır. Örneğin;

$$S(\theta,1) = \{x \mid d(x,\theta) < 1\} = \{x \mid \|x\| < 1\}$$

birim küredir.

Normlu uzayların çok önemli tipleri tam olanlardır (metriğe göre). Banach'a izafeten böyle bir uzaya Banach uzayı denir.

2.5.Banach Uzayı:Bir X Banach uzayı, bir tam normlu lineer uzaydır. Tamlığın anlamı $x_n \in X$ olmak üzere $(m,n \rightarrow \infty)$ iken

$$\|x_m - x_n\| \rightarrow 0$$

ise bu takdirde

$$\|x_n - x\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

olacak şekilde $x \in X$ in mevcut olmasıdır.

2.6.Örnek:Daha önceki örneklerden $R, C, l_\infty, l_p (p \geq 1), c, c_0, C[a,b]$

uzaylarına Banach uzayları olarak bakılabilir. Bir çok sonuç ve tanımların tamlık olmaksızın yine de geçerliliği kabul edilir. Bu yüzden gerektiği durumlarda tamlık ifadesi kullanılacaktır. Bir normlu uzayda yakınsaklık ve serilerin mutlak yakınsaklığı doğal olarak tanımlanabilir.

2.7.Normlu Uzaylarda Seriler: X normlu bir lineer uzay olsun. $x_n \in X$ için

$$\sum x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

serisinin $s \in X$ ye yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $(s_n) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, \dots)$ dizisinin s ye yakınsamasıdır. Yani $(n \rightarrow \infty)$ iken $\|s_n - s\| \rightarrow 0$ olmasıdır. Bu durumda $\sum x_n = s$ yazılır. $\sum x_n$ serisinin mutlak yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\sum \|x_n\| < \infty$ olmasıdır. R de her mutlak yakınsak seri yakınsaktır. Bu ise tamlığa bağlıdır.

2.8.Teorem: Bir normlu lineer X uzayının tam olması için gerek ve yeter koşul her mutlak yakınsak serinin yakınsak olmasıdır.

İspat: X , tam ve $\sum x_n$ mutlak yakınsak olsun. Bu takdirde gerçel seriler için genel yakınsaklık prensibinden dolayı $n > m$ için

$$\|s_n - s_m\| = \|x_{m+1} + \dots + x_n\| \leq \|x_{m+1}\| + \dots + \|x_n\| \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$$

olur. Bundan dolayı (s_n) Cauchy dizisidir ve yakınsaktır. Yani $\sum x_n$ yakınsaktır.

(ii) Her mutlak yakınsak serinin yakınsak olduğunu kabul edelim. (x_n) , X de Cauchy dizisi olsun. Bu takdirde ,

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < 2^{-k} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

olacak şekilde $n_1 < n_2 < \dots$ alalım ve buradan

$$\sum_1^\infty \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \infty$$

olduğunu bulabiliriz. Kabulümüzden dolayı $\sum (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ yakınsar. Bu son seri iç içedir.

Buradan (x_{n_k}) nın yakınsak olduğu görürüz. Böylece (x_n) Cauchy dizisi yakınsak bir (x_{n_k}) alt dizisine sahiptir ve (x_n) dizileri Teorem 2.8 gereğince yakınsak olduğu anlaşılır. Dolayısıyla X tamdır. Teorem 2.8' nin ispatında normun mutlak homojenliğinin kullanılmadığını belirtelim. Gerçekten bu sonuç normun, herhangi negatif olmayan $g: X \rightarrow R$ alt toplam fonksiyon (bu durumda limitin birim olmadığı bilinmelidir) ile yerleştirilmesi gibi daha genel durumları sağlayacaktır.

Teorem 2.8 için bir örnek olarak $L_p[0,1]$ Lebesgue integral uzayının tamlığı göz önüne alınabilir.

2.9. Tanım($p > 1$, $L_p [0,1]$ Uzaı): Bu klasik Banach uzaylarından biridir. L_p nin elemanları $[0, 1]$ üzerinde Lebesgue integrallenebilen $|x|^p$ olacak şekildeki x fonksiyonlarıdır. Yani $x \in L_p$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\int_0^1 |x(t)|^p dt < \infty$$

olmasıdır. L_p nin doğal yarınormu

$$\|x\| = \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

dır. $[0,1]$ üzerinde h.h.h. sadece $x(t)=0$ olması $\|x\|=0$ olmasını gerektirdiğinden bu bir norm değildir. Tanım 2.9 göz önüne alınırsa L_p den bir normlu uzay oluşturabiliriz. Bu durumda

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

üçgen eşitsizliği Lebesgue integrali için Minkowski eşitsizliğidir.

Yukarıda verilen yarı normda L_p 'nin tamlığını ispatlamak için Lebesgue integral teoreminin temeli olan meşhur Lebesgue monoton yakınsaklık teoremine gereksinim duyurulur.[11]

2.10. Teorem (Lebesgue Monoton Yakınsaklık Teoremi) : Eğer (x_n) , $[0,1]$ üzerinde

$$\lim_n x_n(t) = x(t)$$

ve $0 \leq x_1(t) \leq x_2(t) \leq \dots$ olacak şekilde $[0,1]$ üzerinde ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi ise bu takdirde

$$\lim_n \int_0^1 x_n(t) dt = \int_0^1 x(t) dt$$

dir.

2.11. Sonuç : Eğer (x_n) , $[0,1]$ üzerinde ölçülebilir ve

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(t)$$

şeklinde tanımlı negatif olmayan fonksiyonların bir dizisi ise bu takdirde ,

$$\int_0^1 x(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 x_n(t) dt$$

dır.

2.12.Sonuç (Fatou Lemması) : Eğer (x_n) , $[0,1]$ üzerinde ölçülebilir negatif olmayan fonksiyonların bir dizisi ve $[0,1]$ üzerinde ,

$$x(t) = \liminf_n x_n(t)$$

ise bu takdirde,

$$\int_0^1 x(t) dt \leq \liminf_n \int_0^1 x_n(t) dt$$

dır.

Şimdi, Teorem 2.8 e göre L_p nin tam olduğunu gösterelim. $k=(1,2,...)$ için $x_k \in L_p$ olan herhangi bir mutlak yakınsak $\sum x_k$ serilerini alalım. L_p 'nin yarı normunda $s = \sum x_k$ yakınsak olacak şekilde $s \in L_p$ nin var olduğunu göstereceğiz. Hipotezimize göre $\sum \|x_k\| < \infty$ dır, böylece

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \|x_k\| < \varepsilon \quad (m > N)$$

olacak şekilde N mevcuttur. İntegraller için Hölder eşitsizliğinden dolayı

$$\int_0^1 |x_k(t)| dt \leq \|x_k\| \left(\int_0^1 1 dt \right)^{1/q} = \|x_k\|$$

olur ve böylece Sonuç 2.11 gereğince

$$\int \sum |x_k(t)| dt = \sum \int |x_k(t)| dt \leq \sum \|x_k\| < \infty$$

yazılır.

$[0,1]$ üzerinde h.h.h. $\sum |x_k(t)| < \infty$ çıkar. Eğer pozitif ölçümlü bir küme üzerinde $\sum |x_k(t)| = \infty$ ise bu takdirde $\int \sum |x_k(t)| dt = \infty$ olur. Böylece $\sum x_k(t)$ h.h.h. yakınsar yani; h.h.h.

$$\lim_n \sum_{k=1}^n x_k(t) = s(t)$$

olduğunu söyleyebiliriz. Şimdi $m > N$ alalım. Bu durumda Sonuç 2.12 den dolayı,

$$\begin{aligned} \left\| s - \sum_1^m x_k \right\|^p &= \int \left| s(t) - \sum_1^m x_k(t) \right|^p dt \\ &= \int \left(\lim_n \left| \sum_1^n x_k(t) - \sum_1^m x_k(t) \right|^p \right) dt \\ &\leq \liminf \int \left| \sum_{m+1}^n x_k(t) \right|^p dt \end{aligned}$$

yazılır. Fakat

$$\int \left| \sum_{m+1}^n x_k(t) \right|^p dt = \left\| \sum_{m+1}^n x_k \right\|^p$$

olduğundan bu durumda

$$\left\| s - \sum_1^m x_k \right\|^p \leq \liminf_n \left(\sum_{m+1}^n \|x_k\| \right)^p < \varepsilon^p$$

olur. $\sum_1^m x_k \rightarrow s$ olması L_p de yarınormun yakınsadığı anlamındadır. Sonuç olarak $m > N$ için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur :

$$\|s\| \leq \left\| s - \sum_1^m x_k \right\| + \sum_1^m \|x_k\| < \varepsilon + \sum_1^\infty \|x_k\| < \infty.$$

Bu nedenle $s \in L_p$ dır. Dolayısıyla L_p tamdır.

Riesz-Fischer Teoremiyle bağlantılı olarak Fourier serileri teorisinde tamlığın $p = 2$ olması durumu önemli bir sonuçtur. Eğer X normlu uzayı verilirse bu uzaydan daha başka normlu uzaylar her zaman oluşturulabilir. Bu uzaylara normlu çarpım uzayları denir.

2.13.Tanım (Normlu Çarpım Uzayları): X bir normlu uzay ve M, X in kapalı bir alt uzayı olsun. $x_1 \equiv x_2 \in M$ tanımı $x_1 - x_2 \pmod{M}$ olması anlamındadır. Bu durumda $\equiv$ bir denklik bağıntısını tanımlar ve X, M modülünün çarpım uzayı olmak üzere $X/M, E_x$ in bütün denklik sıfatlarının kümesidir. X/M deki norm

$$\|E_x\| = \inf \{ \|y\| \mid y \in E_x \} \quad (2.1)$$

ile tanımlanır. Tanım 1.22'de belirtildiği gibi $X/M, E_x \cdot E_y = E_{x+y}, \lambda E_x = E_{\lambda x}$ tanımlarıyla X/M lineer bir uzaydır.

Şimdi (2.1)'in X/M üzerinde norm olduğunu gösterelim. Örneklerdeki gibi $\|E\| = 0$ olmasının, $E = M$ olmasını gerektirdiğini göstereceğiz. X/M deki üçgen eşitsizliğini kontrol edeceğiz.

$\|E\| = 0$ olsun. Bu takdirde $x_n \rightarrow 0$ olacak şekilde bir $(x_n) \in E$ dizisi mevcuttur. M kapalı olduğundan E nin kapalı ve böylece $0 \in E$ olduğu bulunur. Buradan $E = E_0 = M$ olur.

Şimdi E ve $F, X/M$ 'nin elemanları olsun, (2.1) den dolayı herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\|x\| < \|E\| + \varepsilon, \|y\| < \|F\| + \varepsilon$$

olacak şekilde $x \in E, y \in F$ vardır. Böylece

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| < \|E\| + \|F\| + 2\varepsilon$$

yazılır.

Şimdi $\|E + F\| \leq \|x + y\|$ olacak şekilde $x + y \in E + F$ alalım. O halde ε keyfi bir sayı olduğundan

$$\|E + F\| \leq \|E\| + \|F\|$$

olur. X bir Banach uzayı olduğundan X/M normlu çarpım uzayının bir Banach uzayı olacağını göstereyim.

2.14. Teorem : X bir Banach uzayı ve M, X in kapalı bir alt uzayı ise bu takdirde yukarıda tanımlanan norm altında X/M bir Banach uzayıdır.

İspat: Teorem 2.8 'i kullanalım ve $(k=1,2,...)$ için $E(k) \in X / M$ olmak üzere $\sum \|E(k)\| < \infty$ ise $\sum \|E(k)\|$ nin yakınsak olduğunu ispatlayalım. $\|E(k)\|$ nin tanımından

$$\|x_k\| < \|E(k)\| + 2^{-k} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

olacak şekilde bir $x_k \in E(k)$ mevcuttur. Böylece $\sum \|x_k\| < 1 + \sum \|E(k)\| < \infty$ ve $\sum x_k = x$ olduğunda X in tamlığı Teorem 2.8. den görülür.

E_x , x i içeren denklik sınıfları olsun. Bu takdirde $\sum E(k) = E_x$ olduğunu, yani

$$s_n = \sum_{k=1}^n E(k) \rightarrow E_x \quad (n \rightarrow \infty)$$

olduğunu göstereceğiz. Bunu elde etmek için

$$s_n - E_x = E(1) + E(2) + \dots + E(n) - E_x = E_{x_1} + \dots + E_{x_n} - E_x$$

$$= E_{x_1 + \dots + x_n - x}$$

yazılır. Böylece (2.1) den dolayı, $\sum x_n = x$ olduğundan

$$\|s_n - E_x\| \leq \|x_1 + \dots + x_n - x\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

olur. Bundan dolayı X/M deki her mutlak yakınsak seri yakınsar, yani; X/M tamdır. Bu ise teoremi ispatlar.

3.BÖLÜM

LINEER OPERATÖRLER VE FONKSİYONELLER

Analizin önemli problemlerinden biri, değişik lineer uzaylar içinde aynı değere sahip olan bazı lineer uzaylar üzerinde göz önüne alınan lineer operatörleri bulmaktır. Örneğin integral denklemleri teorisinde

$$(Ax)(s) = \int_0^1 a(s,t)x(t)dt$$

ile tanımlanan operatör tipi ortaya çıkar. Bu denklemde $a(s,t)$ yi $[0,1] \times [0,1]$ üzerinde sürekli bir fonksiyon olarak ve $x = x(t)$ yi $[0,1]$ üzerinde sürekli olarak gözönüne alacağız. Bu durumda;

$$A: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$$

olacak şekilde Ax , $s \in [0,1]$ in sürekli bir fonksiyonudur. Çünkü bu fonksiyonu fonksiyonel analizdeki herhangi bir operatör olarak kabul edebiliriz ve bu fonksiyonun diğer sürekli fonksiyonlar integralin “lineerlik” özelliğinden dolayı λ, μ skalerleri ve $x, y \in C[0,1]$ fonksiyonları için

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda A(x) + \mu A(y)$$

olması anlamında bir operatör olduğu görülür.

3.1. Tanım (Lineer Operatör): X, Y lineer uzaylar olsunlar. Bu durumda $A: X \rightarrow Y$ fonksiyonunun lineer bir operatör olması için gerek ve yeter koşul $\forall x_1, x_2 \in X$ ve λ, μ skalerleri için

$$A(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda A(x_1) + \mu A(x_2) \quad (3.1)$$

olmasıdır.

3.2. Tanım (Lineer Fonksiyonel): Eğer $A: X \rightarrow C$ bir lineer operatör ise A , X üzerinde bir lineer fonksiyoneldir, yani bir lineer fonksiyonel kompleks değerli lineer operatördür.

3.3. Tanım (Bir Operatörün Çekirdeği) : Bir A operatörünün çekirdeği

$$\text{Ker}(A)=\{ x \in X | A(x)= \theta \}$$

olarak tanımlanır.

Bir lineer operatörün çekirdeğinin X in bir alt uzayı olduğu açıktır.

Genellikle X in kompleks lineer olduğu kabul ediyoruz. Eğer X gerçel lineer ise bu durumda bir lineer fonksiyonel X üzerinde gerçel değerli bir lineer operatör olarak tanımlanır.

3.4.Örnek (i): I, C üzerinde, tüm integral fonksiyonlarının uzayı olsun. $A(f)= f'$ ile tanımlı $A:I \rightarrow I$ diferensiyel operatörü I nin kendi üzerindeki bir lineer operatörüdür. Lineerlik türevlenebilirliğin benzer özelliklerini ifade eder fakat f' nin integral fonksiyonu olması açık değildir. Bu durum bir bölge üzerinde kompleks değerli analitik fonksiyonların belirsiz diferensiyellenebilirlikleri üzerine iyi bilinen teoremlerden çıkar. [12]

(ii): Eğer c , yakınsak $x=(x_n)$ dizilerin uzayı ise $A(x)=\lim x_n$, c üzerinde lineer bir fonksiyoneldir. c üzerinde lineer fonksiyonellere başka bir örnek; c de her bir x için mutlak yakınsak olan ve

$$B(x)=\sum n^{-2}x_n$$

serisi ile verilen $B : c \rightarrow C$ lineer fonksiyoneldir.

(iii): $A:X \rightarrow Y$ genel lineer operatörü $A(\theta)=\theta$ olacak şekilde bir özelliğe sahip oluşu $\lambda=\mu=0$ (3.1) de yerine koyarak elde edilir. X deki ve Y deki sıfırı genellikle birbirinden ayırmadığımızda karışıklık çıkmayacaktır Normlu uzaylar üzerinde özellikle ilgilenilen operatörler lineer ve süreklidirler. Böylece $A:X \rightarrow Y$, $x_0 \in X$ için sürekli olup her $\varepsilon > 0$ için $\|x - x_0\| < \delta$ olduğundan

$$\|A(x)-A(x_0)\| < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta(x_0, \varepsilon)$ mevcuttur. Burada ve ileride X deki normları Y dekilerden ayırt etmek için genellikle her ikisini kullanmayacağız. Normlu uzaydaki operatör, sürekli bir lineer operatörle aynı şey olduğu ortaya çıkar.

$A:X \rightarrow Y$ lineer operatörünün sınırlı olması için gerek ve yeter koşul her $x \in X$ için

$$\|A(x)\| \leq M\|x\|$$

olacak şekilde bir M sabitinin mevcut olmasıdır. Sınırlılığın bu tanımının, bazı kümelerdeki her x için $|f(x)| \leq M$ olan bir normal kompleks fonksiyonu gibi aynı olmadığına dikkat edilmelidir. X üzerindeki sınırlı bir fonksiyonelin X deki her x için $|f(x)| \leq M\|x\|$ ifadesini sağladığını belirtelim.

3.5.Örnek: 3.4 (ii) nin A ve B operatörleri c üzerinde sınırlı lineer fonksiyonellerdir. $\|x\| = \sup |x_n|$ olduğundan her n için $\|x_n\| \leq \|x\|$ elde ederiz ve böylece c üzerinde $|A(x)| = \lim |x_n| \leq \|x\|$ yazılır. Ayrıca ,

$$|B(x)| \leq \sum n^{-2} |x_n| \leq \frac{\pi^2}{6} \|x\|$$

dır.

3.6.Teorem : X ve Y normlu uzaylar ve $A: X \rightarrow Y$ bir lineer operatör olsun. Bu takdirde;

(i) : A nın orijinde sürekliliği X üzerinde düzgün sürekliliğini gerektirir.

(ii) : A nın X üzerinde sürekli olabilmesi için gerek ve yeter koşul A nın sınırlı olmasıdır.

İspat :(i) $\|x\| < \delta$ olduğunda $\|A(x)\| < \varepsilon$ olur. Böylece eğer $\|x - y\| < \delta$ ise bu takdirde A nın lineerliğinden dolayı ,

$$\|A(x - y)\| = \|A(x) - A(y)\| < \varepsilon$$

olur.

(ii) : Öncelikle X üzerinde $\|A(x)\| \leq M \cdot \|x\|$ biçiminde sınırlı olsun. Bu takdirde eğer $\|x - y\| < \varepsilon / M$ ise

$$\|A(x) - A(y)\| = \|A(x - y)\| \leq M \cdot \|x - y\| < \varepsilon$$

yazılır. Böylece A düzgün süreklidir.

$$\|A(x) - A(y)\| = \|A(x - y)\| \leq M \cdot \|x - y\| < \varepsilon$$

yazılır. Böylece A düzgün süreklidir.

Şimdi A nın X üzerinde sürekli olduğunu kabul edelim. Bu takdirde A, θ da süreklidir ve $\|x\| < \delta$ olduğunda $\|A(x)\| < 1$ olacak şekilde $\delta = \delta(1)$ mevcuttur. Her hangi $x \neq \theta$ alalım. Bu durumda

$$\left\| \frac{\delta x}{\delta \|x\|} \right\| = \frac{\delta}{2}$$

ve böylece

$$\left\| A\left(\frac{\delta x}{2\|x\|}\right) \right\| < 1, \|A(x)\| < \frac{2}{\delta} \|x\|$$

dır. Eğer $x=q$ bu takdirde $\|A(x)\| = 0$ dır ve böylece X üzerinde $\|A(x)\| \leq 2\delta^{-1} \cdot \|x\|$ dır. Yani A sınırlıdır.

Yarınormlar için Teorem 3.6 ya benzer bir sonuç mevcuttur.

3.7.Teorem : p, X üzerinde bir yarınorm olsun. Bu durumda p nin X üzerinde orjinde sürekli olması için gerek ve yeter koşul orjinde sürekli olmasıdır. Bu p nin sınırlılığına da denktir, yani bazı M ler için X üzerinde $p(x) \leq M \cdot \|x\|$ olur.

İspat : Eğer p, X üzerinde sürekli ise orjinde de sürekli veya tersine olarak eğer p orjinde sürekli ise teorem 3.6 (iii) yi kullanırız ve X üzerinde $p(x) \leq 2\delta^{-1} \cdot \|x\|$ olduğunu ispatlarız. $|p(x) - p(y)| \leq p(x-y)$ olduğundan p nin X üzerinde gerçekten düzgün sürekli olduğunu buradan çıkarırız. Normlu bir uzay üzerindeki sürekli lineer operatörün sınırlı lineer operatör ile aynı şey olduğunu bilinmektedir. Sürekli lineer fonksiyonellerin tanımlanmasının bir yolu da çekirdeğe bakmaktır.

3.8.Teorem : $A: X \rightarrow C$ lineer olsun. Bu takdirde A nın sürekli olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\text{Ker}(A)$ nın kapalı olmasıdır.

İspat: (i) A sürekli olsun. Bu takdirde $\text{Ker}(A) = A^{-1}(\{0\})$ olduğundan $\text{Ker}(A)$ nın kapalı olduğunu görürüz. Bu $\{0\}$ kapalı kümesinin ters resmi yerindedir.

Bunun ispatlamanın başka bir yolu $x \in \overline{\text{Ker}(A)}$ almaktır. Bu taktirde $x_n \rightarrow x$ olacak şekilde $(x_n) \in \text{Ker}(A)$ vardır. Böylece A sürekli ve $A(x_n) = 0$ olduğundan $A(x) = 0$ elde ederiz. Yani böylece $(x) \in \text{Ker}(A)$ kapalıdır. Eğer C herhangi bir normlu Y uzayı ile yer değiştirirse bu tesbitin doğru olduğunu belirtmeliyiz.

(ii) : Şimdi $\text{Ker}(A)$ bir kapalı küme olsun. $A \equiv 0$ ise bu taktirde A süreklidir. $A \neq 0$ olduğunu kabul edelim. O halde $\sim \text{Ker}(A)$ boş değildir ve açıktır. Şimdi $A(a) \neq 0$ olacak şekilde $\sim \text{Ker}(A)$ da bir a elemanı mevcuttur. $b = a / A(a) \in \sim \text{Ker}(A)$ olmak üzere $A(b) = 1$ dir. Sonuç olarak $S(b, r) \subset \sim \text{Ker}(A)$ mevcuttur.

$$S(\theta, r) \subset V = \{x \mid |A(x)| < 1\} \quad (3.2)$$

olduğunu göstereceğiz. Teorem 3.6. (ii) deki sonuçtan dolayı $\|x\| < r$ olduğunda $|A(x)| < 1$ olduğunu göstermek kolay olacak ve X üzerinde $|A(x)| \leq 2r^{-1}\|x\|$ elde ederiz. Yani A , X üzerinde süreklidir.

(3.2) ifadesini ispatlamak için $x \in S(\theta, r)$ ve $x \notin V$ olduğunu kabul edelim.

Bu taktirde

$$y = -x / A(x) \in S(\theta, r) \quad \text{ve} \quad A(b + y) = 1 + A(y) = 0$$

dir. $\|y\| < r$ olduğunda $b + y \in S(b, r)$ dir. Son kısımlar birleştirilirse

$$b + y \in \text{Ker}(A) \quad \text{ve} \quad b + y \in S(b, r)$$

elde ederiz.

Bunun anlamı $\text{Ker}(A) \cap S(b, r) \neq \emptyset$ demektir. Fakat bu $S(b, r) \subset \sim \text{Ker}(A)$ olmasıyla çelişir. Böylece $x \in S(q, r)$ olması $x \in V$ olmasını gerektirir ve bu (3.2) ifadesini dolayısıyla teoremi ispatlar. Daha ileri işlemleri yapmadan önce bazı notasyon ve terminolojileri verelim.

$L(X, Y)$: X, Y lineer uzaylar olsun. Bu takdirde $L(X, Y)$, X den Y içine bütün lineer operatörlerin kümesini gösterir.

X^+ : Bu $L(X, C)$ dir. Yani X üzerinde tüm lineer fonksiyonellerin kümesidir. Genellikle X^+ ya X in cebirsel duali denir.

$B(X, Y)$: X, Y normlu uzaylar olsun. Bu takdirde $B(X, Y)$; X den Y içine tüm sınırlı (yani sürekli) lineer operatörlerin kümesini gösterir.

$X^* : B(X, C)$, X üzerinde tüm sınırlı lineer fonksiyonların kümesidir. X^* a X in duali (veya sürekli duali) denir.

Herhangi bir X, Y normları için doğal olarak $B(X, Y) \subset L(X, Y)$ dır. Genelde, kapsam aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi değişmezler.

3.9. Örnek : $X^* \subset X'$ değişmezdir. Burada l_∞ un normuyla $X=l_1$ dir. Bu

$$f(x) = \sum x_k \quad (x \in l_1)$$

alınarak gösterilebilir.

$f: l_1 \rightarrow C$ ve f nin l_1 üzerinde lineer olduğu aşikardır. Bununla beraber f sınırlı değildir. f nin sınırlı olduğunu kabul edelim. Bu takdirde l_1 de her x için

$$|f(x)| \leq N \cdot \|x\|$$

olacak şekilde bir N tamsayısı mevcuttur. $y \in l_1$ ile

$$y_k = 1 \quad (1 \leq k \leq N+1) \quad y_k = 0 \quad (k > N+1)$$

ile tanımlanmış olsun. Bu takdirde $\|y\| = \sup |y_k| = 1$ $f(y) = N+1$ ve son kabülümüzden dolayı $N+1 \leq N$ çelişmesini elde ederiz. O halde f sınırlı değildir.

Örnek 3.9 daki X normlu uzayının sonsuz boyutlu olduğunu belirtelim. Sonlu boyutlu uzaylar için $X^* = X'$ eşitliği daima doğrudur, yani X üzerindeki her lineer fonksiyonel zorunlu olarak sürekli dir.

Yukarıda tanımlanan $L(X, Y)$ ve $B(X, Y)$ kümeleri Y lineer uzayında değer alan fonksiyonların (operatörlerin) kümeleridir. Bu yüzden bu kümeleri lineer uzaylar içinde oluşturmak doğaldır. Bunun $A, B \in L(X, Y)$ olmak üzere $\lambda A + \mu B$ şeklinde tanımlayarak

$$(\lambda A + \mu B)(x) = \lambda A(x) + \mu B(x)$$

ile yaparız. $\lambda A + \mu B \in L(X, Y)$ olduğu ve $L(X, Y)$ nin de böylece bir lineer uzay olduğu hemen görülür.

$B(X, Y)$ nin $L(X, Y)$ nin lineer bir alt uzayı olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

$B(X,Y)$ yi normlu bir uzay içinde oluşturmak için bir $A \in B(X,Y)$ elemanının normu incelemeliyiz.

3.10. Tanım (Sınırlı Bir Operatörün Normu) : $A \in B(X,Y)$ olsun. Bu takdirde A nın normu;

$$\|A\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} < \infty$$

olarak tanımlıdır. Bu supremumun sonlu olması $A \in B(X,Y)$ $\|A(x)\| \leq M\|x\|$ iken olmasından çıkar. Şimdi $\|A\|$ nın $B(X,Y)$ üzerinde bir norm olduklarını gösterelim. Burada X in bir Banach uzayın olup olmadığına bakılmaksızın Y Banach uzayı iken $B(X,Y)$ nin de bir Banach uzayı olduğu ispatlanabilir.

3.11. Teorem : (i) X normlu uzayından Y normlu uzayı içine bütün sınırlı lineer operatörlerin $B(X,Y)$ lineer uzayı ;

$$\|A\| = \sup \{ \|A(x)\| / \|x\| \mid x \neq \theta \}; A \in B(X,Y)$$

ile bir normlu uzaydır.

(ii): Eğer Y bir Banach uzay ise bu takdirde $B(X,Y)$ (i) deki norm altında bir Banach uzayıdır.

İspat: (i) $A_1, A_2 \in B(X,Y)$ ise bu takdirde her $x \in X$ için

$$\|A_1(x)\| \leq \|A_1\| \|x\| \quad \text{ve} \quad \|A_2(x)\| \leq \|A_2\| \|x\|$$

dır. Böylece $\forall x \in X$ için

$$\|(A_1 + A_2)(x)\| = \|A_1(x) + A_2(x)\| \leq (\|A_1\| + \|A_2\|) \cdot \|x\|$$

olması,

$$\|A_1 + A_2\| \leq \|A_1\| + \|A_2\|$$

olmasını gerektirir.

$$\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$$

olduğu açıktır ve böylece geriye $\|A\| = 0$ iken $\|A\| = \theta$ olduğunu göstermek kalır. Fakat $\|A\| = 0$ ise bu takdirde X üzerinde $A(x) = \theta$ olmasını $\|A(x)\| \leq \|A\| \|x\|$ den olmasından elde ederiz yani, $A \equiv \theta$ dır.

(ii) : (A_n) , $B(X,Y)$ de Cauchy dizisi olsun. Bu takdirde her $x \in X$ için

$$\|A_n(x) - A_m(x)\| \leq \|A_n - A_m\| \cdot \|x\| \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty)$$

olur. Böylece $(A_n(x))$, Y de Cauchy dır O halde $\lim_n A_n(x) = A(x)$ mevcut. Bunun ispatını göstermek için , $A_n \rightarrow A$ iken $B(X,Y)$ nin normunda $A \in B(X,Y)$ olduğunu göstermek istiyoruz. A_n lineer olduğunda $A_n(\lambda x + \mu x') = \lambda A_n(x) + \mu A_n(x')$ yazılabilir ve $n \rightarrow \infty$ iken $A(\lambda x + \mu x') = \lambda A(x) + \mu A(x')$ elde edilir. Böylece $A \in L(X,Y)$ dır. Şimdi

$$\|A(x)\| = \lim_n \|A_n(x)\| \leq \|x\| + \|A_n\| \cdot \|x\|$$

olduğundan A sınırlıdır. Burada $N=N(1)$ (A_n) üzerindeki Cauchy koşulundan gelmektedir. Her $x \in X$ ve her $n, m \geq N(\varepsilon)$ için

$$\|A_n(x) - A_m(x)\| \leq \varepsilon \|x\|$$

dır. $m \rightarrow \infty$ iken $\|A_n(x) - A(x)\| \leq \varepsilon \|x\|$ elde edilir. Böylece $B(X,Y)$ nin normunda $A_n \rightarrow A$ ve her $n \geq N(\varepsilon)$ için

$$\|A_n - A\| < \varepsilon$$

dır.

3.12.Sonuç: Bir X normlu uzayın X^* dualı

$$\|f\| = \sup \{ |f(x)| / \|x\| \mid x \neq \theta \}$$

normu altında bir Banach uzaydır.

İspat: Teorem 3.12 de $Y=C$ yazalım ve C nin modül normu ile tam olduğunu hatırlayalım.

Genel olarak bakıldığında Teorem 3.12 ve sonuçlarının X ve $B(X,Y)$ hakkındaki tahminlerin makul olduğu söylenebilir. Fakat X normlu uzayı somut bir şekilde verilirse, yani; c, l_∞ yada $C[0,1]$ biçiminde verilirse bu takdirde X^* dual uzayının açık bir karakterizasyonunu vermek oldukça ilginçtir. Bunu yapmak kolay değildir. Sadece bizim üzerimizde çalıştığımız teoride alınan örneklerle bunu yapmak mümkündür. l_∞ un dualini karakterize etmek için herşeyden önce biraz ölçüm teorisini

girmek uygundur. $C[0,1]$ duali, Hahn - Banach genişleme teoremini ispat ettikten sonra irdelenecektir.

c^* yi karakterize etmeden önce genellikle dual karakterizasyonunda yararlı olan denk normlu uzayları verelim.

3.13.Tanım (Denk Normlu Uzaylar) : X ve Y normlu uzaylarının denk olması için gerek ve yeter koşul bu iki uzayın izometrik olarak izomorf olmalarıdır. Bu $T:X \rightarrow Y$ lineer izometrisinin mevcut olması anlamındadır.

Uyarı: Eğer T bir lineer izometri ise bu takdirde X üzerinde $T(\theta)=\theta$ olduğundan $\|T(x)\|=\|x\|$ dır. Tersine eğer T , lineer ve X üzerinde $\|T(x)\|=\|x\|$ ise bu takdirde izometri üzerine olmak koşuluyla

$$\|T(x)-T(y)\|=\|T(x-y)\|=\|x-y\|$$

dır.

X ve Y denk olması için gerek ve yeter koşul normu koruyan lineer $T:X \rightarrow Y$ dönüşümünün var olmasıdır.

Eğer $X \sim Y$ ise (X ve Y denk normlu uzaylardır) bu takdirde $\sim$ tüm normlu uzayların sınıfı üstünde bir denklik bağıntısıdır, öyleki X ve Y , normlu uzay teorisi bakımından ayırt edilemez olarak göz önüne alınabilir. $X \sim Y$ olduğunda X in Y den farksız olduğunu zannederiz, ve çok defalar X in Y olduğunu bile söyleriz. Bu durum istenen şeyi aklımızda tuttuğumuz sürece zararsızdır.

Şimdi $c^* \sim l_1$ olduğunu göstereceğiz ve önceki pragrafin sonucuna göre c nin dualinin l_1 olduğunu söyleyeceğiz.

3.14.Teorem :(i) Eğer $f \in c^*$ ise bu takdirde her $x \in c$ için

$$f(x) = a \cdot \lim x_n + \sum a_n x_n \quad (3.3)$$

bir a sayısı ve bir $(a_n) \in l_1$ dizisi mevcuttur. Ayrıca f nin c^* -normu da

$$\|f\| = |a| + \sum |a_n|$$

şeklindedir.

Tersine eğer a ve $(a_n) \in l_1$ verilmiş ise bu takdirde (3.3) ün sağ yani c^* nın bir elemanı tanımlar.

(ii) : c^* , l_1 e denktir.

İspat: (i) Tersini aşıkardır. Şimdi $f \in c^*$ olduğunu kabul edelim. $x = (x_n) \in c$, $l = \lim x_n$, $e = (1, 1, 1, \dots)$, $e_1 = (1, 0, 0, \dots)$, ... olacak şekilde,

$$x = le + \sum (x_n - l)e_n$$

$(e, e_1, e_2, \dots)$ nin c için bir taban olduğunu biliyoruz. f nin lineerliği ve sürekliliğinden dolayı $\forall x \in c$ için

$$f(x) = lf(e) + \sum (x_n - l)f(e_n) \quad (3.4)$$

elde ederiz.. Herhangi $r \geq 1$ alalım ve $x_n = 0$, $1 \leq n \leq r$ $n > r$ için $x_n = \text{sgn}f(e_n)$ yazalım.

Bu takdirde. $x_n \in c_0$, $\|x\| = 1$ ve C üzerinde $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$ olduğundan

$$|f(x)| = \left| \sum_{n=1}^r f(e_n) \right| \leq \|f\| \quad (3.5)$$

elde edilir. Bu son ifadeden

$$\sum |f(e_n)| = \sup_r \sum_{n=1}^r |f(e_n)| \leq \|f\| < \infty$$

olduğu çıkar.

Şimdi $a = f(e) - \sum f(e_n)$; $a_n = f(e_n)$ olmak üzere (3.4) ifadesini

$$f(x) = al + \sum a_n x_n \quad (3.6)$$

olarak yazalım. $\sum f(e_n)$ serileri mutlak yakınsak olmak üzere (3.6) dan dolayı $|\lim x_n| \leq \|x\|$ olduğundan

$$|f(x)| \leq (|a| + \sum |a_n|) \|x\|$$

ve

$$\|f\| \leq |a| + \sum |a_n|$$

ifadesini elde ederiz. Aynı zamanda $\|x\| = 1$ için $|f(x)| \leq \|f\|$ yi elde ederiz. Böylece

bazı $r \geq 1$ için

$$x_n = \operatorname{sgn} a_n \quad (1 \leq n \leq r)$$

$$= \operatorname{sgn} a \quad (n > r)$$

tanımlanabilir. Bu takdirde $x \in c$ için $\|x\| = 1$, $\lim x_n = \operatorname{sgn} a$ ve böylece

$$|f(x)| = \left| a + \sum_{n=1}^r |a_n| + \sum_{n=r+1}^{\infty} a_n \operatorname{sgn} a \right| \leq \|f\|$$

dir. $(a_n) \in l_1$ olduğunda $\sum_{n=r+1}^{\infty} a_n \rightarrow 0$ ($r \rightarrow \infty$) elde ederiz. Böylece son eşitsizlikte ($r \rightarrow \infty$) alınırsa,

$$|a| + \sum |a_n| \leq \|f\|$$

elde edilir. Sonuçlarımızın birleştirilmesiyle $\|f\| = |a| + \sum |a_n|$ olduğunu görürüz. Bu (i) yi ispatlar. (3.3) ifadesinin tekliğini görmek kolaydır. Bu teklik (ii) kısmında gösterilmiştir.

(ii): a, a_n ; (i) deki gösterimde ortaya çıkarılan olmak üzere alınır

$$T: c^* \rightarrow l_1, T(f) = (a, a_1, a_2, \dots)$$

ile tanımlanmış olur. (i) den dolayı

$$\|T(f)\| = |a| + |a_1| + |a_2| + \dots = \|f\|$$

yi elde ederiz $\|T(f)\|$, l_1 in normu olur. Böylece T , normu korur ve (i) nin "tersine" kısmından dolayı örtendir. Sonuç olarak, T açıkça lineerdir. Yani $f \in c^*$ ise bu takdirde,

$$T(\lambda f) = (\lambda a, \lambda a_1, \dots) = \lambda(a, a_1, a_2, \dots) = \lambda T(f)$$

olur. T nin toplanabilirliği benzer şekildedir. İleride çalışacağımız bazı uzayların duallerini gösteren tabloyu aşağıda veriyoruz. Tablo üzerine bazı yorumlar tablodan sonra verilecektir.

Uzay	Gösterim	Norm	Dual
c	$a \lim x_n + \sum a_n x_n$	$ a + \sum a_n $	l_1
c_0	$\sum a_n x_n$	$ a_n $	l_1
l_p ($0 < p \leq 1$)	$\sum a_n x_n$	$\sup_n a_n $	l_∞
l_p ($1 < p < \infty$)	$\sum a_n x_n$	$(\sum a_n ^p)^{1/p}$	l_c

l_∞	$\int_N x(k) d\mu$	$\int d\mu $	M
$C[0,1]$	$\int_0^1 x(t) dg(t)$	$\int_0^1 dg(t) $	$BV[0,1]$

Tablodaki ilk kolon verilen dualin uzayıdır. İkinci kolondaki gösterimin anlamı; X uzayın bir ögesi olduğundan, dualin her bir ögesi ile almış olduğu şekil anlamındadır. Üçüncü kolon sınırlı lineer fonksiyonların normunu verir ve son kolon “özdeş” uzayı gösterir, yani $c^* \sim l_1$ dir. Böylece c nin dualı l_1 olarak verilir.

Bizim ile ilgili sonucu zaten ispatladık ve c_0, l_p için sonuçlar benzer metodlarla gösterilebilir. Bağintıda p ve q arasındaki ilişki l_p^* ilgili olarak $1/p+1/q=1$ dir. $C[0,1]$ uzayı için detaylar Hahn-Banach genişleme teoremini ispatladıktan sonra verilecektir. $BV[0,1]$, $[0,1]$ üzerinde sınırlı varyasyon fonksiyonlarının uzayının belirli bir alt uzayını gösterir.

Konuyu değişik düzlemlere taşımaksızın l_∞ üzerindeki yapıları ispat edemeyiz. Onun duali M dür. Gerçekten sonlu sınırlı toplamsal küme fonksiyonlarının uzayı μ, N pozitif tamsayılar kümesinin alt kümeleri üzerinde tanımlıdır. l_∞ dizi uzayının dualinin bir dizi uzayı olmadığı bilinmesi için tablodaki diğer dizi uzaylarının duallerinin bilinmesi gerekir. Bu diğer uzaylar bazı özelliklere sahip olmalarına rağmen l_∞ un hiç bir temel özelliğe (ayrılabilir değildir) sahip olmadığını gösteren özellik olabilir.

Bu konuyu biraz geometrik olan bazı sonuçlarla bitireceğiz.

3.15. Tanım (Orijinden Geçen Hiperdüzlem): X bir lineer uzay olsun. θ dan geçen bir H hiperdüzlemi X in bir boş maksimal alt uzayı olarak tanımlanır, yani $H \neq X$ ve X in herhangi bir alt uzayı için $H \subset M \subset X$ mevcut ise bu takdirde ya $M=H$ ya da $M=X$ dir.

3.16. Tanım (Hiperdüzlem): Bir H hiperdüzlemi, θ dan geçen bir hiperdüzlem olmak üzere $x_0 + H$ biçiminde bir kümedir.

Sıfıra özdeş olmayan bir lineer fonksiyonelin çekirdeği θ dan geçen bir hiperdüzlemdir.

3.17. Teorem : (i) : Eğer $f \in X^*$, $f \neq 0$ ise bu takdirde $\text{Ker}(f)$ bir hiperdüzlemdir.

(ii) : Eğer $f \in X^*$, $f \neq 0$ ise bu takdirde $\text{Ker}(f)$ bir kapalı hiperdüzlemdir.

İspat: Teorem 3.8 ile $f \in X^*$ $\text{Ker}(f)$ nın kapalı olduğunu biliyoruz. O halde sadece (i) yi ispatlayacağız. Şimdi $f \neq 0$ olması, $x, y \in \text{Ker}(f)$ iken $f(\lambda x + \mu y) = 0$ olduğunda $\text{Ker}(f)$ ve $\text{Ker}(f) \neq X$ in bir altuzay olmasını gerektirir. M, X in bir altuzayı olmak üzere $\text{Ker}(f) \subset M$ olduğunu kabul edelim. Biz $X = M$ olduğunu göstermek istiyoruz. Kabulümüzden dolayı $f(x_0) \neq 0$ olacak şekilde $x_0 \in M \sim \text{Ker}(f)$ vardır. $x \in X$ alalım ve $y = x - f(x)x_0 / f(x_0)$ yazalım. Bu takdirde $f(y) = 0$ ve böylece $y \in \text{Ker}(f) \subset M$ dir. x, M nın içindedir ve M nın öğelerinin lineer bir birleşimi olur. O halde $X \subset M$ dir ve bu yüzden $M = X$ dir. Sonuç olarak $\text{Ker}(f)$ bir hiperdüzlemdir.

3.18. Sonuç: Eğer $f \in X'$ $f \neq 0$ ise bu takdirde α , sabit bir skaler olmak üzere $\{x | f(x) = \alpha\}$ bir hiperdüzlemdir.

İspat: $S = \{x | f(x) = \alpha\}$ olsun. $f \neq 0$ olduğundan $f(x_1) \neq 0$ olacak şekilde x_1 vardır.

$x_0 = \alpha x_1 / f(x_1)$ olsun. Bu takdirde $S = x_0 + \text{Ker}(f)$ olduğunu göstermek kolaydır. Böylece S bir hiperdüzlemdir.

3.19. Örnek : $X = R^3$ ve $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ olmak üzere $f(x) = x_1 + x_2 + x_3$ olsun, bu takdirde f , R^3 üzerinde bir lineer fonksiyonel olduğu açıktır. (Burada 3 boyutlu Euclidean uzayı gibi göz önüne alınmıştır.) ve $x \in R^3$ için

$$|f(x)| \leq \sqrt{3} \|x\|$$

olduğundan f süreklidir. $\|f\| = \sqrt{3}$ oluşu $x = (1, 1, 1)$ alınarak görülür. Teorem 3.17 den dolayı $\text{Ker}(f), R^3$ te kapalı hiperdüzlemdir ve elemanter geometride orijinden geçen $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ "düzlemi"dir.

3 - uzayda biz sık sık orijinden geçen bir düzlemin uzaklığını gözönüne alırız. (Bu düzlem bir lineer fonksiyonel tarafından tanımlanır). Hiperdüzlemi tanımlayan

sınırlı lineer fonksiyonların norm ile yakından ilişkisinin var olduğu bilindiğine göre bunu genel bir normlu uzayda yapabiliriz.

3.20. Teorem : X^* de $f \neq 0$ ve $M = \{x \mid f(x) = 1\}$ olsun. Eğer d , orijinden geçen M hiperdüzleminin uzaklığı ise $d = 1/\|f\|$ dır.

İspat: Uzaklığın tanımından dolayı $d = \inf\{\|x\| \mid f(x) = 1\}$ yazarız. $\forall x \in M$ için $\|x\| \cdot \|f\| \geq 1$, $\|x\| \geq 1/\|f\|$ ve böylece $d \geq 1/\|f\|$ yazarız.

Şimdi $k > 1$ keyfi olsun. $\|f\|$ nın tanımından,

$$\frac{|f(y)|}{\|y\|} > \frac{\|f\|}{k}$$

olacak şekilde $y \neq \theta$ mevcut Böylece $k/\|f\| > d$ ve burada $x = y/f(y)$, $f(x) = 1$ $k/\|p\| > \|x\|$ Burada ve k isteksel olduğundan $1/\|f\| \geq d$ yazarız. İki eşitsizliğimizi birleştirirsek $d = 1/\|f\|$ elde ederiz.

4.BÖLÜM

BANACH-STEINHAUS TEOREMİ

Banach - Steinhaus teoremi, normlu uzaylar teorisinde temel sonuçlardan biridir. Bu teorem analizin bir çok kesiminde değişik ve çeşitli uygulamalara sahiptir.

4.1.Teorem : X , ikinci kategoriden p -normlu uzay olsun $\forall x \in X$ ve $\forall q \in F$ alttan yarı sürekli yarınormluların $\{q\}$ ailesi olsun.

$$q(x) \leq M(x) < \infty$$

olacak şekilde q yarınormlu alttan yarı süreklilerin $\{q\}$ ailesinin F olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\forall x \in X$ ve $\forall q \in F$ için;

$$q(x) \leq M \|x\|^{1/p}$$

olacak şekilde x ve q dan bağımsız bir M sabiti vardır.

İspat: Teoremin ifadesindeki $\|x\|$ deki p -normunu $p > 0$ olmak üzere, $x = \theta$

$$\|\lambda x\| = |\lambda|^p \|x\| \quad \text{ve} \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \text{ise} \quad \|x\| = 0$$

olacak şekilde $\|x\|$ ile gösteriyoruz. $d(x,y) = \|x - y\|$ ile birlikte (X,d) bir metrik uzaydır.

Teorem 1.36 dan dolayı $S[a,r]$ kapalı küresi ve $\forall q \in F$ için $S[a,r]$ üzerinde $q(x) \leq H$ olacak şekilde bir H sabiti vardır. $\|x\| > 0$ olacak şekilde $x \in X$ alınsın. Bu durumda $s = (r / \|x\|)^{1/p}$ olmak üzere;

$$q(sx) = q(sx + a - a) \leq q(sx + a) + q(a)$$

dir. $a \in S[a,r]$ olduğunda $\forall q \in F$ için $q(a) \leq H$ dir. Ayrıca $\|sx\| = r$ den $sx + a \in S[a,r]$ elde edilir. Sonuç olarak $q \in F$ için $q(sx) = sq(x) \leq 2H$ ve böyle bir q için

$$q(x) \leq 2H. \|x\|^{1/p} . r^{-1/p} \quad (4.1)$$

dir. $x = 0$ durumunu (4.1) içerir. Her iki durumda sıfır olur. $M = 2Hr^{1/p}$ olduğundan sonuca varılır.

4.2. Sonuç : X , yukarıdaki teoremdaki gibi olsun ve X üzerinde

$$m_n q_n(x) = q(x) \quad (4.2)$$

mevcut olacak şekilde sürekli yarınormların bir dizisinin (q_n) olduğunu kabul edelim. Bu takdirde q , X üzerinde sürekli bir yarınormdur.

İspat : q nun, X üzerinde bir yarınorm olduğu açıktır. Örneğin $n \rightarrow \infty$ alındığında

$$(x + y) \leq q_n(x) + q_n(y) \rightarrow \infty$$

olması

$$q_n(x + y) \leq q(x) + q(y)$$

olmasını gerektirir. (4.2) den dolayı $(q_n(x))$ in yakınsaklığı onun sınırlılığını gerektirir ve Teorem 4.1 den dolayı $\forall x \in X$ ve her n için $q_n(x) \leq M \|x\|^{1/p}$ elde edilir. Böylece $q(x) \leq M \|x\|^{1/p}$ olur. Yani q , X üzerinde süreklidir.

Teorem 4.1 in aşağıdaki sonucu Banach - Steinhaus teoremi olarak verilir.

4.3. Teorem (Banach - Steinhaus) : Eğer (A_n) bir X Banach uzayından bir Y normlu uzayı içine tanımlı sınırlı lineer operatörlerin bir dizisi ve X üzerinde

$$\limsup_n \|A_n(x)\| < \infty \quad (4.3)$$

ise bu takdirde $\sup_n \|A_n(x)\| < \infty$, yani normların $(\|A_n(x)\|)$ dizisi sınırlıdır.

İspat : Bir Banach uzayı tamdır ve normludur. Bu yüzden ikinci kategoriden 1-normlu uzaydır. Her bir n için $A_n \in B(X, Y)$ olduğundan $q_n(x) = \|A_n(x)\|$ sürekli q_n yarınormunu tanımlar. Bunu (4.3) den dolayı Teorem 4.1'e uygulayabiliriz. Her n ve $\forall x \in X$ için $q_n(x) \leq M \|x\|$ elde ederiz Bu, her n için $\|A_n\| \leq M$ olmasını gerektirir.

4.4. Sonuç : Teorem 4.2. deki (4.3) ifadesini göz önüne aldığımızda X üzerinde $\lim_n A_n(x) = A(x)$ mevcut olduğu görülür. Bu taktirde A , X den Y ye sınırlı bir lineer operatördür.

İspat : Bu ispat için teorem 4.1 in sonucunda olduğu gibi tamamen benzer işlemler ile yapılır. $|A_n(x)|$ ile $\|A_n(x)\|$ yer değiştirildiğinde $Y = \mathbb{C}$ ya da $\mathbb{R}$ olduğu özel durumlar için genellikle Teorem 4.2 ve sonuçları uygulanabilecektir. Son sonucun kullanımı bize bir örnek vermektedir.

4.5. Örnek : Eğer $\forall x \in l_1$ için $\sum a_k x_k$ serisi yakınsak ise bu taktirde $a \in l_\infty$ dur. Bunu, göstermek için

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k x_k$$

ifadesini l_1 üzerinde sınırlı lineer fonksiyonel olacak şekilde olarak tanımlayabiliriz. Hipotezden dolayı $\forall x \in l_1$ için

$$\lim_n f_n(x) = \sum a_k x_k = f(x)$$

mevcuttur.

Sonuç, $|f(x)| \leq M \|x\| = M \sum |x_k|$ olmasını sağlar. Şimdi $x_n = \text{sgn} a_n$, $x_k = 0$ için $k \neq n$, $x_k = 0$ yazalım. Bu takdirde $|f(x)| = |a_n| \leq M$ ($n=1,2,\dots$) dır yani $a \in l_\infty$ dır.

İspatın tamamı aşağıdaki gibi yapılır. $a \in l_\infty$ olsun. Bu takdirde $|a_n| \leq k$,

($k=1,2,\dots$) olacak şekilde $n_1 < n_2 < \dots$ dizisi bulunabilir. $x_{n_k} = 1/a_{n_k}$ alınsın aksi halde $x_n = 0$ olsun. Bu durumda $\|x\| < \pi^{2/6}$ olduğunda $x \in l_1$ olur, fakat $\sum a_k x_k = 1+1+\dots, \infty$ a yakınsar Bu çelişki $a \in l_\infty$ yazmamızı gerektirir.[13]

Şimdi Banach-Steinhaus teoreminin kullanımı için bir örnek verelim.

4.6. Örnek : Fourier serisi 0 da ıraksak olan 2π periyotlu sürekli bir fonksiyon vardır. $f, 2\pi$ periyotlu sürekli bir fonksiyon ve X

$$\|f\| = \max_{t \in [0, 2\pi]} |f(t)|$$

biçimindeki tüm fonksiyonların Banach uzayı olsun f nin Fourier katsayıları

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt \, dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt \, dt \quad (k=0,1,2,\dots)$$

ile tanımlanır. f nin Fourier serisi

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (4.4)$$

biçimindeki seridir. (4.4) 'ün n ninci parçalı toplam $x=0$ da

$$D_n(t) = \left(\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{1}{2}t} \right)$$

olmak üzere

$$S_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_n(t) f(t) dt \quad (4.5)$$

olarak hesaplanır [13].

$D_n(t)$ fonksiyonu Dirichlet çekirdeği olarak bilinir.[15] Fourire serileri teorisi üzerinde incelemeler yapmış büyük Alman matematikçi.P.G.Lejeune-Dirchlet(1805-59)

1829'da X üzerinde her n için S_n yi bir sürekli lineer fonksiyonel (4.5) biçiminde tanımlanmıştır. S_n nin lineerliği açıktır ve $|D_n(t)| \leq 2n + 1$ olduğunu göstermek kolaydır. Ayrıca,

$$|S_n(f)| \leq \frac{\|f\|}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(t)| dt = \|f\| l_n$$

olarak yazalım. Böylece $\|S_n\| < l_n$ olur. Kısaca $\|S_n\| = l_n$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için aşağıdaki adımlar izlenir. Her $f \in X$ için $(S_n(f))$ nin yakınsak olduğunu kabul edelim. Bu takdirde Banach-Steinhaus teoreminde dolayı,

$$\sup_n \|S_n\| = \sup_n l_n < \infty$$

elde ederiz. Fakat $n \rightarrow \infty$ iken $l_n \rightarrow \infty$ bulunur. Bu çelişki $\forall f \in X$ için $(S_n(f))$ nin yakınsak olmadığı anlamındadır. Böylece $(S_n(f))$ ıraksak olacak şekilde f mevcuttur. Bu ise aradığımız sonuçtur.

Eğer (4.5) de $f_0 = \text{sgn} D_n$ yazarsak $s_n(f_0) = l_n$ elde edilir. Fakat f_0 bir sonlu sayıda süreksizliğe sahiptir. Bu yüzden onu süreksizlikte "düzgün" olan bir f fonksiyonu ile değiştiriyoruz. Bu şekilde $\|f\| = 1$ olacak şekilde bir $f \in X$ ve $\epsilon > 0$ için $s_n(f) > l_n - \epsilon$ elde ederiz. Böylece $\|S_n\| < l_n$ olduğunu bildiğimiz için $\|S_n\| = l_n$ olur.

Sonuç olarak $n \rightarrow \infty$ iken $l_n \rightarrow \infty$ olduğunu gösterelim. Her n için $c_k = (4k + 1) \pi / (4n + 2)$, $d_k = (4k + 3) \pi / (4n + 2)$ yazalım. Bu durumda $t \in [c_k, d_k]$ için

$$|D_n(t)| \leq \frac{\sqrt{2}}{t}$$

denklemini elde ederiz. Bunu kullanarak $n \rightarrow \infty$ iken

$$l_n > \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{2n} \int_{c_k}^{d_k} \frac{dt}{t} > \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{4k + 3} \rightarrow \infty$$

olduğunu görürüz.

5.BÖLÜM

NORMLU UZAYLARDA BAZI TEOREMLER

VE

ZAYIF YAKINSAKLIK

5.1 Açık Tasvir ve Kapalı Grafik Teoremi:

Eğer $A : X \rightarrow Y$ dönüşümü bijektif ise bu takdirde A^{-1} bijektif olmak üzere $A^{-1}:Y \rightarrow X$ mevcuttur. Ek olarak X ve Y lineer uzay ve A lineer ise bu takdirde A^{-1} in de lineer olduğu kolayca görülür. Şimdi X ve Y Banach uzayları ve A sınırlı olsun (yani sürekli olduğunu kabul edelim). Bu durumda A^{-1} in sınırlı olduğunu eşsiz Banach teoremi bize gösterir. İki Banach uzayı arasındaki sınırlı lineer örten bir dönüşümün daima açık bir dönüşüm olduğunu iddia eden teoremi, açık tasvir teoreminden çıkaracağız. Çok önemli olan "Kapalı Grafik Teoremi" Banach teoreminin bir sonucu olarak elde edilir.

5.1.1Teorem (Açık Tasvir Teoremi) : X,Y Banach uzayları olsun ve $A \in B(X,Y)$ nın örten olduğunu kabul edelim. Bu takdirde A bir açık dönüşümdür

İspat : G, X içinde açık ve bazı $x \in G$ için $A(x)$ olacak şekilde $y \in A(G)$ olsun. Bu halde $A(S(x,\delta)) \subset A(G)$ olmak üzere $S(x, \delta) \subset G$ mevcuttur. $S(y) \subset A(S(x, \delta))$ nın bir küre olduğunu göstermek şartıyla $A(G)$ açık olacak şekilde $S(y) \subset A(G)$ kapsamını elde edeceğiz. Bundan emin olmak için S_0, X üzerinde birim küre ve $S(\theta), Y$ içinde orijin civarında bir küre olmak üzere bir $S(\theta) \subset A(S_0)$ küresinin mevcut olduğunu

göstermek yeterlidir. Bu ispatı elde etmek için $A(S(x, \delta)-x)$ orijin civarında bir küre içerecek, böylece $A(S(x, \delta))$, y civarında bir küre içerecek.

Şimdi ispatı; $S(\theta) \subset A(S_0)$ mevcut olmasıyla devam ettirelim.

$$S_k = S(\theta, 2^{-k}) = \{x \mid \|x\| < 2^{-k}\} \quad (k=0,1,2,\dots)$$

olsun. $x \in X$ ise $k = [2\|x\|] + 1$ olmak üzere $x = k(x/k)$ yazabiliriz. Köşeli parantezler $2\|x\|$ in tam kısmını gösterir. Bu durumda $x/k \in S$ ve böylece $x \in kS_1$ dir. Buradan

$$x = \bigcup_{k=1}^{\infty} kS_1$$

dir. A üzerine yani $A(X) = Y$ olduğundan

$$Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} kA(S_1)$$

elde edilir. Fakat Y tam ve ikinci kategoriden olduğundan $kA(S_1)$ hiç bir yerde yoğun olmayacak şekilde k mevcuttur. Bu halde $\overline{A(S_1)}$ en az bir $S(a, r)$ küresini içerir. Şimdi;

$$S(\theta, r) \subset \overline{A(S_0)} \quad (5.1)$$

doğru olduğunu göstereceğiz.

$$S(\theta, r) \subset \overline{A(S_1)} - a \subset \overline{A(S_1)} - \overline{A(S_1)} \subset \overline{2A(S_1)} = \overline{A(S_0)}$$

elde ederiz. Bu ise (5.1) ifadesini ispatlar Yukarıdaki kapsam zincirinde $a \in \overline{A(S_1)}$ olmasını $\overline{A(S_1)}$ in kompleks ve $y \in \overline{A(S_1)}$ in $-y \in \overline{A(S_1)}$ eşit olmasını kullanarak elde ederiz. (5.1) den

$$S(\theta, r2^{-n}) \subset \overline{A(S_n)} \quad (5.2)$$

olduğu kolayca bulunur. Şimdi $y \in S(\theta, r/2)$ alalım (5.2) den dolayı $y \in \overline{A(S_1)}$ olur. Bundan dolayı bazı $y_1 \in A(S_1)$ için $\|y - y_1\| < r/4$ olur. Aynı zamanda $y - y_1 \in S(\theta, r/4) \subset \overline{A(S_2)}$ ve bundan dolayı bazı $y_2 \in A(S_2)$ için $\|y - y_1 - y_2\| \leq r/8$ olur. Devamında $y = A(x_k)$ için $y_k \in A(S_k)$ ve $x_k \in S_k$ olmak üzere,

$$\left\| y - \sum_{k=1}^n y_k \right\| < r / 2^{n+1} \quad (5.3)$$

buluruz. (5.3) den $y = \sum A(x_k)$ yı elde ederiz ve $\|x_k\| < 2^{-k}$, $\sum \|x_k\| < 1$ olduğundan $\sum \|x_k\| < 1$ ve $\sum x_k = x$ olduğunu görürüz. Aynı zamanda $\|x\| \leq \sum \|x_k\| < 1$, $x \in S_0$ ve A'nın sürekliliğinden dolayı

$$Ax = \sum A(x_k) = y$$

dır. Buradan bazı $x \in S_0$ için $y \in S(\theta, r/2)$ olması $y = Ax$ olmasını gerektirir. Yani $y \in A(S_0)$ olması $S(\theta, r/2) \subset A(S_0)$ olduğunu gösterir. Bu kapsam, açık tasvir teoremini çıkarmamızı mümkün kılmak için yeterlidir.

5.1.2. Teorem (Banach Teoremi): X, Y Banach uzayları olsun ve $A \in B(X, Y)$ biyektif olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $A^{-1} \in B(X, Y)$ dir. [14]

İspat : A'nın biyektif, sürekli ve açık olması, A'nın bisürekli olmasını gerektirdiği için sonuç Teorem 5.1 den kolayca çıkar. Böylece A bir lineer homeomorfizmdir. Biraz sonra asıl vereceğimiz teorem, kullanışlı uygulamalara sahiptir. Zira bazı özel problemler için Banach- Steinhause teoreminden daha fazla rağbet görüp görmemesi kişilerin tercihlerine kalmıştır. Teoremden önce $A: X \rightarrow Y$ dönüşümünün grafiği $X \times Y$ nin bir alt kümesi olan $\{(x, Ax) | x \in X\}$ olduğunu hatırlayalım. Eğer X, Y normlu uzaylar ise $X \times Y$ yi

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y'), \quad \lambda(x,y)=(\lambda x, \lambda y)$$

olarak tanımlanan

$$\|(x,y)\| = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{1/2}$$

normuyla bir normlu uzay içinde tanımlayabiliriz $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ olması için gerek ve yeter koşul $x_n \rightarrow x$ ve $y_n \rightarrow y$ olmasının gerektiği açıktır. Böylece eğer X, Y Banach uzayları ise bu takdirde $X \times Y$ bir Banach uzayıdır.

A , sürekli olduğunda A nın grafiğinin $X \times Y$ nin kapalı bir alt kümesi olduğunu göstermek kolaydır. Özel koşullar ile bir çok daha iyi bir sonuç elde edebiliriz.

5.1.3. Teorem (Kapalı Grafik Teoremi): X, Y Banach uzayları olsun ve $A \in L(X, Y)$ olsun. Bu takdirde A nın sürekli olması için gerek ve yeter şart A nın grafiğinin kapalı olmasıdır.

İspat : (i) A sürekli ve $G(A)$, A nın grafiği olsun $G(A)$ nın kapalı olduğunu göstereceğiz. (A nın bilinen lineerliği teoremin bu parçasında gereksizdir). $(x, y) \in \overline{G(A)}$ olsun. Bu takdirde $x_n \rightarrow x$ ve $Ax_n \rightarrow y$ olacak şekilde $x_n \in X$ vardır. Fakat $Ax_n \rightarrow Ax$ dır ve bu yüzden $y = Ax$ dır. Böylece

$$(x, y) = (x, Ax) \in G(A)$$

dır.

(ii) : Varsayalımki $G(A)$ kapalı olsun, bu takdirde $X \times Y$ Banach uzayının bir kapalı alt kümesi olan $G(A)$ bir Banach uzayıdır.

Şimdi, $f(x, Ax) = x$ ile verilen $f: G(A) \rightarrow X$ dönüşümünü alalım. Bu dönüşümün bir lineer bijektif olduğu açıktır. Ayrıca $\|f(x, Ax)\| = \|x\| \leq \|(x, Ax)\|$ olduğundan f

sürekli. Böylece Banach teoremini (Teorem 5.1.2) uygulayabiliriz ve $f^{-1}:X \rightarrow G(A)$ nın sürekliliğini çıkarırız. Son olarak

$$\|Ax\| \leq \|(x, Ax)\| = \|f^{-1}(x)\| \leq \|f^{-1}\| \|x\|$$

yazılır. O halde A sınırlıdır ve böylece sürekli.

Şimdi ise kapalı grafik teoreminin basit bir uygulaması verelim.

5.1.4.Örnek : (a_{nk}) $(n, k = 1, 2, \dots)$ nın kompleks sayıların bir sonsuz matrisi olarak verildiğini kabul edelim. Her n için $y_k = \sum_k a_{nk} x_k$ yakınsak ve her $x \in l_\infty$ için $y = (y_n) \in l_\infty$ olsun. Bu takdirde A operatörü $B(l_\infty, l_\infty)$ nın bir elemanı $y = Ax$ olacak şekilde tanımlasın.

Önce her n ve her $x \in l_\infty$ için $\sum a_{nk} x_k$ nın yakınsaklığı her n için $\sum |a_{nk}| < \infty$ olmasını gerektirir. (her $n, k = 1, 2, \dots$ için $x_k = \text{sgn } a_{nk}$) Bu durumda $A_n(x) = \sum a_{nk} x_k$, $A_n \in l_\infty$ nın bir elemanı tanımlar. A operatörü açıkça lineerdir bu yüzden süreklilik elde edilebilir.

Kapalı grafik teoreminden dolayı $G(A)$ nın kapalı olduğunu göstermek yeterlidir. Her hangi bir $(x, y) \in \overline{G(A)}$ alalım. Bu taktirde $l \rightarrow \infty$ iken $x^{(i)} \rightarrow x$ ve $Ax^{(i)} \rightarrow y$ olacak şekilde $x^{(i)} \in l_\infty$ vardır ve bu durumda A_n nin sürekliliği her n için $i \rightarrow \infty$ iken $A_n(x^{(i)}) \rightarrow A_n(x)$ olmasını ve $Ax^{(i)} \rightarrow y$ olması da her n için $l \rightarrow \infty$ iken $A_n(x^{(i)}) \rightarrow y_n$ olmasını gerekir.

Böylece $y_n = A_n(x)$, $y = Ax$ olduğundan $(x, y) \in G(A)$ olur. Bu ise $\overline{G(A)} \subset G(A)$ olduğunu ispatlar. Yani $G(A)$ kapalıdır.

5.2. Hahn - Banach Teoremi

Önce teoremi, gerçel lineer uzaylar için ispatlayalım ve bundan sonra kompleks lineer uzaylara genişletelim.

5.2.1. Teorem (Hahn - Banach): X bir gerçel lineer uzay ve M bir alt uzay olsun. $\alpha \geq 0$ ve $x \in X$ için p nin X üzerinden alt toplamsal ve $p(\alpha x) = \alpha \cdot p(x)$ olduğunu kabul edelim. Eğer f , (M üzerinde) bir lineer fonksiyonel ve $f(x) \leq p(x)$ (M üzerinde) ise bu takdirde $g(x) \leq p(x)$ (X üzerinde) olacak şekilde X e f nin bir lineer g genişlemesi vardır.

İspat: $M \neq X$ olsun, aksi halde ispat yapılamaz. $z \in \sim M$ ve $x, y \in M$ alalım. Bu durumda

$$f(x) - f(y) \leq p(x - y) \leq p(x + z) + p(-y - z)$$

ve buradan $-p(-y - z) - f(y) \leq p(x + z) - f(x)$ olur. Bundan dolayı her $x \in M$ için

$$s \leq \inf_{x \in M} \{p(x + z) - f(x)\}$$

olduğundan,

$$s = \sup_{y \in M} \{-p(-y - z) - f(y)\} \leq p(x + z) - f(x)$$

olur. Böylece her $y \in M$ için

$$-p(-y - z) - f(y) \leq t \leq p(y + z) - f(y) \quad (5.4)$$

olacak şekilde bir t sayısı vardır.

Şimdi,

$$M_z = \{ x + \alpha z \mid x \in M, \alpha \text{ reel} \}$$

altuzayını tanımlayalım. Bu takdirde eğer $\omega \in M_z$ ise $\omega = x + \alpha z$ yi elde ederiz ve bu gösterimin tekliği hemen kontrol edilir. M_z üzerindeki h fonksiyonu

$$h(\omega) = f(x) + \alpha \cdot t$$

ile tanımlıyalım. Bu durumda h nın M_z üzerinde lineer olduğu açıktır ve böylece h, M den M_z ye f nin bir lineer genişlemesi olur. Şimdi M_z üzerinde $h(\omega) \leq p(\omega)$ olarak alalım. $\alpha > 0$ ve $\alpha < 0$ durumlarını ayırarak ve $y = x / \alpha$, $\alpha \neq 0$ yazarak (5.4) den kolayca elde edilir.

$M_z = X$ olursa genişlemeyi tekrarlamazsak o zaman ispat tamamlanmış olur. Fakat X tam uzayına genişleme garantisi var mıdır? Burada Zorn lemmasına veya onun değişik bir çeşidine ihtiyaç duyarız. Burada Zorn lemmasını kullanalım. P tüm (M', h') sıralı çiftlerinin kümesi olsun. Burada M', M yi içeren bir altuzay ve h', M' üzerinde $h' \leq p$ olacak şekilde f nin M' ye bir genişlemesidir. Kısmi sıralı p nin tanımından dolayı $(M', h') \leq (M'', h'')$ olması için gerek ve yeter koşul M' üzerinde $M' \subset M''$ ve M' de $h' = h''$ olmasıdır.

$S = \{(M_\alpha, h_\alpha)\}$, P nin tüm sıralı alt kümeleri olsun. Bu takdirde $x \in M_\alpha$ için $H(x) = h_\alpha(x)$ olmak üzere S nin $(\bigcup_\alpha M_\alpha, H)$ şeklinde bir üst sınıra sahip olduğunu göstermek kolaydır. Bunun anlamı S nin tümü sıralı olduğundan dolayı $\bigcup M_\alpha$ bir alt uzaydır.

Zorn lemmasından dolayı P , (M, H) şeklinde bir maksimal elemana sahiptir. Bizim amacımız $M = X$ olduğunu göstererek ispatı tamamlamaktır. Bunun için $M = X$ olsun. Bu takdirde ispatımızı ilk kısmından dolayı $(M_z, H_z) \geq (M, H)$ olacak şekilde genişletebiliriz. (M, H) maximal olduğundan $M_z = M$ elde edilir. Bu ise $M_z \supset M$ olması ile çelişir. O halde $M \neq X$ kabulü yanlıştır ve ispat $g=H$ yazılarak tamamlanır.

5.2.2.Sonuç : Gerçel normlu lineer X uzayının bir altuzayı üzerinde tanımlı her sınırlı lineer fonksiyonel, tam X in normunun korunmasıyla lineer olarak genişletilebilir.

İspat : M üzerinde

$$|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$$

olduğunu kabul edelim. O halde X üzerinde

$$g(x) \leq \|f\| \cdot \|x\|$$

olacak şekilde g vardır. x in yerine $-x$ yazılırsa

$$|g(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$$

olduğunu görürüz. $x \in M$ için $g(x) = f(x)$ olduğundan $\|g\| = \|f\|$ olur.

5.2.3.Sonuç : $X \neq \{\theta\}$ gerçel normlu lineer uzay ise bu takdirde X üzerinde hemen hemen daima aşikar olmayan sürekli lineer fonksiyoneller vardır.

İspat : Hahn-Banach teoreminde $p(x) = \|x\|$ alınsın. Şimdi her hangi bir $x_0 \neq \theta$ alalım ve $M = \{\alpha \cdot x_0 | \alpha \text{ gerçel}\}$ kümesini tanımlayalım. Bu takdirde M bir alt uzaydır ve eğer $f(\alpha x_0) = \alpha \cdot \|x_0\|$ yazarsak bu durumda f lineerdir ve M üzerinde süreklidir. O halde f yi normu koruyarak X tam uzayına genişletebiliriz. Böylece X in sıfır olmayan her x_0 ögesinin x_0 daki değeri $\|x_0\| > 0$ olan X üzerinde sürekli lineer bir fonksiyonel üretir.

5.2.4.Sonuç : X gerçel normlu lineer uzay ve her $f \in X^*$ için $f(x) = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $x = \theta$ yi elde edebiliriz.

İspat : Eğer $x \neq \theta$ mevcut ise sonuç 5.2.3. den dolayı $f(x) > 0$ olacak şekilde $f \in X^*$ dır. Her $f \in X^*$ için $f(x) = 0$ olduğunu kabul ediyoruz. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi Hahn - Banach teoreminin kompleks uyarlamasını verelim.

5.2.5.Teorem : X bir karmaşık lineer uzay, M bir alt uzay ve p, X üzerinde bir yarınorm olsun. f nin M üzerinde karmaşık değerli lineer bir fonksiyonel olduğunu ve M üzerinde $|f(x)| \leq p(x)$ sağlandığını kabul edelim. Bu takdirde X de $|g(x)| \leq p(x)$ olacak şekilde f nin X e bir g lineer genişlemesi vardır.

İspat : f_1, f_2 M üzerinde gerçel lineer fonksiyoneller olmak üzere $f = f_1 + if_2$ yazılır ve bir gerçel lineer uzay olarak göz önüne alınır. Aynı zamanda M üzerinde $f_1(ix) = -f_2(x)$ ve $f_1(x) \leq |f(x)| \leq p(x)$ mevcuttur. Böylece gerçel Hahn-Banach teoremini kullanarak X üzerinde $g_1(x) \leq p(x)$ ile f_1, g_1 e genişler. M üzerinde $g(x) = g_1(x) - ig_1(ix)$ olacak şekilde $g(ix) = ig(x)$ yazılsın, $g(ix) = ig(x)$ ve g , gerçel olduğundan dolayı g, X üzerinde kompleks lineerdir.

Son olarak $g(x) = 0$ ise bu takdirde $|g(x)| \leq p(x)$ dır. (p negatif değildir). Eğer $g(x) \neq 0$ ise $g(xe^{-i\alpha})$ gerçel ve p mutlak homojen olduğundan

$$\begin{aligned} |g(x)| &= g(x) \cdot e^{-i\alpha} = g(x \cdot e^{-i\alpha}) = g_1(xe^{-i\alpha}) \\ &\leq p(xe^{-i\alpha}) = p(x) \end{aligned}$$

olacak şekilde $\alpha = \arg g(x)$ alınır.

Yukarıdaki sonuçların Teorem 5.2.2 ye kompleks uygulamasında geçerli olduğu açıktır.

Hahn-Banach teoreminin bir uygulaması olarak $C^*[0,1]$ nın elemanları için Riesz teoremini verelim.

5.2.6.Teorem (Riesz Temsili): Eğer $f \in C^*[0,1]$ ise bu takdirde her $x \in C[0,1]$ için

$$f(x) = \int_0^1 x(t) dg(t)$$

$$\|f\| = V(g)$$

üzerinde g nin toplam değeri olacak şekilde $[0,1]$ üzerinde sınır değeri olarak bir g fonksiyonu vardır.

İspat : Önce $\int_0^1 x(t)dg(t)$ Riemann-Stieltjes integralinin bazı temel özelliklerini alalım. []. İlk olarak $x \in C[0,1]$ ve $g \in BV[0,1]$ ise bu takdirde $\int_0^1 x(t)dg(t)$ nin mevcut ve

$$c_i \in [t_{i-1}, t_i] \text{ ve } m(p) = \max(t_i - t_{i-1}), \quad (1 \leq i \leq n)$$

$$P = \{0=t_0, t_1, \dots, t_n=1\} \quad t_0 < t_1 < \dots < t_n$$

$[0,1]$ in bir parçalanışı olmak üzere,

$$\lim_{\mu(p) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n x \cdot (c_i) \cdot (g(t_i)) - g(t_{i-1})) = \int_0^1 x(t)dg(t)$$

olduğunu bilinmektedir. Her p parçalanışı ve c_i nin her seçimi için limitin mevcut olduğu bilinmektedir. Şimdi, $C[0,1]$,

$$\|x\| = \sup \{ |x(t)| : 0 \leq t \leq 1 \} \quad x \in M$$

normu ile $[0,1]$ üzerinde M sınırlı fonksiyonların Banach uzayının bir altuzayı olarak gözönüne alınsın. Eğer $f \in C^*[0,1]$ ise bu takdirde Hahn-Banach teoreminden dolayı $\|F\| = \|f\|$ ve $C[0,1]$ üzerinde $f(x) = F(x)$ olacak şekilde M ye bir lineer F genişlemesi vardır.

$0 \leq t \leq 1$, $[0,t]$ nin karakteristik fonksiyonu χ_t ile gösterilsin. Yani $\chi_t(y) = 1$ ($0 \leq y \leq t$), $\chi_t(y) = 0$ ($t < y \leq 1$). Bu takdirde her $t \in [0, 1]$ için $\chi_t \in M$ ve $F(\chi_t) = g(t)$ yazarız. Bu g fonksiyonu teoremden ortaya çıkan fonksiyondur. Şimdi $\varepsilon_i = \text{sgn}[g(t_i) - g(t_{i-1})]$ yazalım. Bu takdirde $|g(t_i) - g(t_{i-1})| = [g(t_i) - g(t_{i-1})]\varepsilon_i$ ve böylece

$$\sum_{i=1}^n |g(t_i) - g(t_{i-1})| \leq \|F\| \cdot \left\| \sum_{i=1}^n [\chi_{t_i} - \chi_{t_{i-1}}] \varepsilon_i \right\|.$$

$y \in (0,1)$ ise bu takdirde bazı j ler için $y \in (t_{j-1}, t_j)$ ve böylece

$$\sum_{i=1}^n [\chi_{t_i}(y) - \chi_{t_{i-1}}(y)] \varepsilon_i = \varepsilon_j$$

dır. Sonuç olarak,

$$\sum_{i=1}^n |g(t_i) - g(t_{i-1})| \leq \|F\| \quad (5.5)$$

olur. Böylece $g \in BV[0,1]$ dır.

Şimdi $z_n(0) = x(0)$ ve $0 < u \leq 1$ için

$$z_n = \sum_{i=1}^n x(r/n)(X_{rn} - X_{(r-1)/n})$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde eğer $u \in (0,1]$ ise bazı r için $u \in ((r-1)/n, r/n]$ yi elde ederiz ve böylece

$$z_n(u) = x(r/n)$$

olur. x sürekli olduğundan ve bundan dolayı $[0,1]$ üzerinde düzgün sürekli olduğundan $(n \rightarrow \infty)$ iken $\|x - z_n\| \rightarrow 0$ elde edilir. Dolayısıyla $F(z_n) \rightarrow F(x) = f(x)$ ve böylece

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^n x(r/n)(g(r/n) - g((r-1)/n)) = \int_0^1 x(t) dg(t) \quad (5.6)$$

elde edilirse (5.6) dan

$$|f(x)| \leq \max |x(t)| \cdot V(g) = \|x\| \cdot V(g)$$

ifadesini elde ederiz. Böylece $\|f\| \leq V(g)$ olması (5.2) ile birleştirilirse $\|f\| = V(g)$ sağlanır teorem 5.2.6 dan y BV fonksiyonu tek değildir. Örneğin g ye istesek bir sabit ekleyebiliriz ve f için aynı gösterimi kullanabiliriz. Böylece $BV[0,1]$, $C^*[0,1]$ ile özdeşleştiremeyiz. $C^*[0,1]$ in bir özdeşleşmesini elde etmek için $BV[0,1]$, de g fonksiyonunun çok iyi bilinen iki özelliğini kullanmamız gerekmektedir. Bunlardan birincisi her bir $t \in [0,1]$ için $g(t+0) = \lim_{x \rightarrow t} g(x)$ mevcut ve ikincisi ise g nin süreksizlik kümesi en azından sayılabiliridir. Şimdi,

$$BV[0,1] = \{G \in BV \mid G(0) = 0 \text{ ve } G(t+0) = G(t), 0 < t < 1\}$$

olarak yazılsın. Bu takdirde BV , BV nin bir altuzayıdır. G fonksiyonu $G(0) = 0$ $G(1) = g(1) - g(0)$ ve $G(t) = g(t+0)$, $0 < t < 1$ olarak tanımlansın Bu halde g sürekli olmak üzere her $t \in [0,1]$ ve $t=0$ ve $t=1$ için $G(t) = g(t) - g(0)$ dır. Böylece her $x \in C[0,1]$ için

$$\int_0^1 x(t) dg(t) = \int_0^1 x(t) dG(t)$$

yazarız. Bu durumda $G \in BV$ olduğu açıktır. Böylece her $x \in C[0,1]$ için

$$f(x) = \int_0^1 x(t) dG(t) \text{ olacak şekilde her bir } f \in C^*[0,1] \text{ bir } G \in BV \text{ ile bağdaştırılabilir.}$$

G fonksiyonu gerçekten tektir. Bunun için $h \in BV$ ve her $x \in C[0,1]$ için

$$f(x) = \int_0^1 x dh = 0 \text{ olacak şekilde varsayalım. } x \equiv 1 \text{ yazılırsa } G(0) = h(0) = 0$$

olduğundan $G(1) = h(1)$ elde ederiz. $0 < c < 1$ alınsın ve $H(t) = G(t) - h(t)$ yazılsın. Bu durumda her $x \in C[0,1]$ için ;

$$\int_0^1 x dH = 0$$

dır. x , $[0, c]$ üzerinden 1 e eşit, $[c+h, 1]$ üzerinden 0 a eşit olacak şekilde ve bir doğru parçasıyla $(c, 1)$, $(c+h, 0)$ noktalarının birleştirilmesi ile tanım tamamlansın. Bu durumda $x \in C[0,1]$ ve parçalar üzerinde integral

$$\begin{aligned} 0 &= H(c) + \int_c^{c+h} x(t) dH(t) \\ &= H(c) - H(c) - \int_c^{c+h} x(t) H(t) dt \\ &= \frac{1}{h} \int_c^{c+h} H(t) dt \rightarrow H(c+0) \text{ } h \rightarrow 0 + \end{aligned}$$

olur. Böylece $0 < c < 1$ için $H(c+0) = 0$ yani $G(c+0) = h(c+0)$ yani $G(c) = h(c)$ yi elde ederiz. G tek olacak şekilde $[0,1]$ üzerinde $G = h$ olduğunu gösterebiliriz. $\|f\|$ nin $[0,1]$ üzerinde G nin genel değişimine eşit olduğunu göstermek basittir ve bu $BV[0,1]$ ile $C^*[0,1]$ in özdeşleştirmesini tanımlar.

5.2.7. Bir Normlu Uzayın Biduali : Hahn - Banach teoreminin bir başka kullanımını normlu X uzayının ikinci dual uzayı (veya bidual) ile bağlantılıdır. Bidual $X^{**} = (X^*)^*$ ile gösterilir. Aşağıda X in X^{**} nin belirli bir $\tilde{X}$ altuzayı ile özdeşleneceğini göstereceğiz.

5.2.8. Teorem : X bir normlu lineer uzay olsun. O halde X , X^{**} bidualinin bir $\tilde{X}$ altuzayına izometrik olarak izomorftur.

İspat : Alışıldığı üzere X in elemanlarını x ile, X^* in elemanlarını da x^* ile gösterelim. $\tilde{x}(x^*) = x^*(x)$ ile X^* üzerinde $\tilde{x}$ lineer fonksiyoneli tanımlansın. Bu $\tilde{x}$, X^* üzerinde tanımlanan lineer operatörlerin bir sonucu olarak X^* üzerinde lineerdir. $\tilde{x}$ da X^* sürekli olduğundan

$$|\tilde{x}(x^*)| = |x^*(x)| \leq \|x^*\| \|x\|$$

ve buradan

$$\|\tilde{x}\| \leq \|x\|$$

olur. Bundan dolayı $x \rightarrow \tilde{x}$ dönüşümü X den X^{**} içine bir sürekli lineer operatör tanımlar. Şimdi $\tilde{X}, x \rightarrow \tilde{x}$ dönüşümü altında X in görüntüsünü gösterebiliriz. Bu dönüşümlerin tümünün bir izometri olduğunu göstermek istiyoruz. Hahn - Banach Teoreminin 5.2.3 sonucundan dolayı $y^*(x) = \|x\|$ ve $\|y^*\| = 1$ olacak şekilde $y \in X^*$ vardır. Böylece önceki sonuçtan dolayı $\|\tilde{x}\| \leq \|x\|$ olduğundan

$$\|\tilde{x}\| = \sup_{x^* \neq 0} \frac{|\tilde{x}(x^*)|}{\|x^*\|} \geq \frac{|\tilde{x}(y^*)|}{\|y^*\|} = \|x\| \text{ ve } \|\tilde{x}\| = \|x\|$$

yani $\|\tilde{x}\| = \|x\|$ elde edilir. Bu ise teoremi ispatlar.

Genel olarak $\tilde{X} \subset X^*$ olur. Eğer eşitlik varsa bir refleksif uzay elde ederiz.

5.2.9. Vektör Değerli Analitik Fonksiyonlar : Hahn-Banach teoreminin değişik bir kullanımının varlığından söz etmek istiyoruz. Bu sınırlı integral fonksiyonu sabit olmasını iddia eden karmaşık değişkenli meşhur Liouville Teoreminin bir genelleştirmesi ile ilgilidir.

Öncelikle karmaşık düzleminde bir D bölgesi üzerinde vektör değerli bir $x = x(z)$ analitik fonksiyonunu tanımlayacağız. X bir Banach uzayı olmak üzere ve

$x:D \rightarrow X$ içine bir dönüşüm olsun. Bu durumda X in D üzerinde analitik olması için gerek ve yeter koşul her $z \in D$ ve $z+h \in D$ için

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(z+h)-x(z)}{h} = (x'(z))$$

mevcut olmasıdır Limit , X deki norm anlamında alınır. Eğer $f \in X^*$ ve x, D üzerinde analitik ise bilinen anlamda karmaşık değişkenli $(fx)(z) = f(x(z))$ ile tanımlı fx in, D üzerinde analitik olduğunu göstermek kolaydır.

x, C de analitik ise alışıldığı üzere x in bir integral fonksiyonu olduğunu söyleriz ve $\forall z \in C$ için $\|x(z)\| \leq M$ ise x i sınırlı olarak tanımlarız. Şimdi genelleştirilmiş Liouville teoreminin ispatını yapalım.

5.2.10. Teorem (Liouville Teoremi): X bir Banach uzayı olmak üzere $x:C \rightarrow X$ ve x bir sınırlı integral fonksiyonu ise bu takdirde x bir sabittir.

İspat : Her $f \in X^*$ için C üzerinde

$$|f(x(z))| \leq \|f\| \|x(z)\| \leq \|f\| \cdot M$$

olduğunda fx sınırlıdır. fx aynı zamanda bilinen anlamda karmaşık değişkenli bir integral fonksiyonu olduğundan, Liouville teoremi herhangi z için $z \in C$

$$f(x(z)-x(z')) = 0$$

ve dolayısıyla $z \in C$ herhangi z için

$$f(x(z)-x(z')) = 0$$

eşitliğini sağlar. Hahn - Banach teoreminin sonucundan dolayı $z \in C$ herhangi z için

$$x(z) = x(z')$$

5.3. ZAYIF YAKINSAKLIK

(x_n) , bir normlu uzayda bir dizi olsun. Bu takdirde (x_n) , $x \in X$ e zayıf yakınsak $x_n \rightarrow x$ (zayıf) yazılır) olması için gerek ve yeter koşul

$$f \in X^* \quad \text{ için } n \rightarrow \infty \text{ iken } f(x_n) \rightarrow f(x)$$

olmasıdır. x e (x_n) nin zayıf limiti denir. Eğer norm içinde $x_n \rightarrow x$ yani $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ ise bu takdirde her $f \in X^*$ için

$$|f(x_n) - f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x_n - x\|$$

olduğundan $x_n \rightarrow x$ (zayıf) elde edilir. Norm içindeki bu yakınsaklık aynı limite zayıf yakınsaklığı gerektirir ve norm içindeki yakınsaklık nedeni ile buna sık sık "kuvvetli" yakınsaklık denilir.

5.3.1. Teorem : (i) Zayıf yakınsak bir dizinin zayıf limiti bir tektir.

(ii) Genellikle zayıf yakınsama kuvveti yakınsamaya denk değildir.

(iii) Eğer $x_n \rightarrow x$ (zayıf) ise bu takdirde $\sup_n \|x_n\| < \infty$ olur

İspat : (i) $x_n \rightarrow x$ (zayıf) ve $x_n \rightarrow y$ (zayıf) olduğunu kabul edelim Bu takdirde her $f \in X^*$ için $f(x-y)=0$ olduğunda $f(x-y)=f(x-x_n)+f(x_n-y) \rightarrow 0$ dır. Hahn-Banach Teoreminin 5.2.4 sonucundan dolayı $x=y$ olduğu görülür.

(ii) ($1 < p < \infty$) için l_p uzayını göz önüne alalım. Bölümün 3 teki dual uzayın tablosu incelenirse $1/p+1/q=1$ ve $a \in l_p$ olmak üzere her $x \in l_p$ ve $f \in l_p^*$ için $f(x) = \sum a_k x_k$ olarak yazılacağı görülür. Eğer $e_1 = (1,0,0,\dots)$, $e_2 = (0,1,0,\dots)$, ... , yazarsak bu takdirde l_p normuyla (e_n) kuvvetli yakınsak olmamak üzere $\|e_n - e_m\| = 2^{1/p}$ ($n \neq m$)yi elde ederiz. Bununla beraber (e_n) , θ ya zayıf yakınsaktır.

Böylece $f \in l_p^*$ için $f(e_n) = a_n$ ve $a \in l_p$ için $a_n \rightarrow 0$ elde edilir.

$p=1$ durumunda kuvvetli ve zayıf yakınsaklık aynı anda oluşur.

(iii) $x_n \rightarrow x$ (zayıf) olması her $f \in X^*$ için $n \rightarrow \infty$ iken $f(x_n - x) \rightarrow 0$ olmasını gerektirir. Hahn -Banach Teoreminin 5.2.3 sonucundan dolayı ,

$$f_n(x_n - x) = \|x_n - x\| \text{ ve } \|f_n\| =$$

olacak şekilde $f_n \in X^*$ vardır. Her $f \in X^*$ için $F_n(f) = f(x_n - x)$ tanımlansın. Bu takdirde (F_n) , X^* Banach uzayı üzerindeki sürekli lineer fonksiyonların bir dizisidir. $f(x_n - x) \rightarrow 0$ olduğunda X^* üzerinde $\sup_n |F_n(f)| < \infty$ olduğu çıkar. Yani Banach - Steinhaus teoremi $M = \sup_n \|F_n\| < \infty$ olmasını sağlar. Her n için $\|x_n\| \leq M + \|x\|$ olmak üzere

$$\|x_n - x\| = |f_n(x_n - x)| = |F_n(f_n)| \leq \|F_n\| \cdot \|f_n\| \leq M$$

olur. Bu ise teoremi ispatlar.

Yakınsaklığın önemli bir türü; $f_n \rightarrow f$ (zayıf) olması için gerek ve yeter koşul

$$(a) \forall x \in X \text{ için } n \rightarrow \infty \text{ iken } f_n(x) \rightarrow f(x)$$

ve

$$(b) \sup_n \|f_n\| < \infty$$

olmasıdır. Bu haliyle X normlu lineer uzayı bir normlu lineer X uzayının dual uzayı içinde tanımlanabilir. Bu yakınsaklığa X^* içinde zayıf* (yıldız zayıf) yakınsaklık denir. Eğer X bir Banach uzayı ise Banach-Steinhaus teoremi (b) nın (a) tarafından içerildiğini gösterdiğinden bu takdirde (b) gereksizdir. Banach Steinhaus teoreminde (a) , (b) yi içerir.

5.3.2. Teorem : X uzayı, lineer hull' ü X içinde yoğun olan sayılabilir $\{x_k\}$ alt kümesini içeren bir normlu uzay olsun. Bu takdirde,

$$d(f_1, f_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_1(x_k) - f_2(x_k)|}{2^k (\|x_k\| + 1)}$$

X^* üzerinde bir metrik ve X^* içinde zayıf* yakınsaktır. Ayrıca eğer,

$$S = \{f \in X^* \mid \|f\| \leq 1\}$$

birim küresi ise bu takdirde d tarafından üretilen metrik topoloji içinde kompakttır.

İspat : X^* de her bir f_1, f_2 için $d(f_1, f_2) \leq \|f_1 - f_2\| < \infty$ olduğunda d iyi tanımlıdır. Eğer $d(f_1, f_2) = 0$ ise bu takdirde $(f_1 - f_2)(x_n) = 0$ her $n=1,2,3,\dots$ alınsın. $\{x_k\}$ nin hull ü X içinde yoğun olduğundan $\{x_k\}$ nin öğelerinin lineer birleşimi (y_{n_k}) olmak üzere $k \rightarrow \infty$ için $(y_{n_k}) \rightarrow x$ mevcuttur. Böylece $f_1 - f_2$ nin sürekliliğinden $f_1 = f_2$ olacak şekilde

$$(f_1 - f_2)(x) = \lim_k (f_1 - f_2)(y_{n_k}) = 0$$

yazılır. Bir metrik uzay için diğer aksiyomları aşıkarak sağlandığından d , X^* üzerinde bir metriktir.

Şimdi $f_n \rightarrow f$ (zayıf $*$) olarak alınsın. Bu takdirde ve her $x \in X$ için $n \rightarrow \infty$ iken $f_n(x) \rightarrow f(x)$ ve $M = \sup_n \|f_n\| < \infty$ olur. Böylece herhangi N için

$$\begin{aligned} d(f_n, f) &\leq \sum_{k=1}^N \frac{|f_n(x_k) - f(x_k)|}{2^k (\|x_k\| + 1)} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{M}{2^{k-1}} \\ &= \sum_1 + \sum_2 \end{aligned}$$

ve $\varepsilon > 0$ olarak verilsin. Burada N öyle büyük seçilsin ki $\sum_2 < \varepsilon/2$ olsun. Bu takdirde de n_0 öyle büyük seçilsinki $n > n_0$ için $\sum_1 < \varepsilon/2$ olsun. Bu durumda d metriğinde $f_n \rightarrow f$ dir. Son olarak S birim küresinin dizisel kompakt olduğunu göstermek yeterlidir. Yani S içindeki her (f_n) dizisi, limiti S ye ait olan bir zayıf* yakınsak bir altdiziye sahiptir. Her n için $|f_n(x_1)| \leq \|f_n\| \cdot \|x_1\|$ olduğundan $(f_n(x_1))$, C içinde sınırlıdır. Böylece $f_{n_1}(x_1)$, yakınsak alt dizisini vardır. Benzer olarak $f_{n_2}(x_2)$ bir $f_{n_2}(x_2)$ yakınsak alt dizisine sahiptir. Devam edilirse her k için $(f_{n_k}(x_k))$ olacak şekilde C de yakınsak olan, (f_n) nin bir (f_{n_k}) altdizisini bulabiliriz. Bu takdirde her k için $(f_{n_k}(x_k))$ Cauchy $\{x_k\}, X$ içinde yoğun olduğunda her $x \in X$ için $(f_{n_k}(x))$ Cauchy olduğu çıkar. Böylece her $x \in X$ için $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ olur. f nin lineer olduğu açıktır ve her n için $\|f_{n_k}\| \leq 1$ olması

$$|f(x)| = \lim_n |f_{n_n}(x)| \leq \|x\|$$

olmasını gerektirir. Böylece $\|f\| \leq 1$ ve buradan $f \in S$ dir. Bu da teoremi ispatlar.

Eğer X normlu uzayın belirli bir türü ise bu takdirde X^* üzerinde (X^*, d) nin bir S kompakt alt kümesini oluşturan bir d metriği mevcut olmalıdır. Yıldız zayıf yakınsaklık bu sonucun ispatlamak için bir vasıta olarak kullanıldı. Probleme topolojik olarak yaklaşılsa bir çok yeterli sonuç elde edilir. Herhangi X normlu uzayı için (X^*, T^*) topolojik uzayının kompakt bir alt kümesi $S = \{f \in X^* \mid \|f\| \leq 1\}$ olmak üzere X^* üzerinde bir T^* topolojisinin tanımlanması mümkündür. (ki buna $*$ zayıf topoloji denir). Bu genel sonuç Alaoglu Teoremi olarak bilinir.



KAYNAKLAR

- [1] BALCI, M. “ Analiz Dersleri ” A. Ü. Yay. (1985)
- [2] MADDOX, I. J.: “Elements of Functional Analysis” Camb. Univ. Press. (1970)
- [3] MADDOX, I. J.: “Spaces of Strogly Summable Sequences,” Quart. J. Math. Oxford (Ser2) 13, 345 (1967)
- [4] MADDOX, I. J.: “Paramormed Sequence Spaces Generated by Infinite Matrices” Proc. Camb. Philas. Soc. 64, 335-340 (1968)
- [5] SIMONS, S: “The Sequence Spaces $\ell(p_v)$ end $m(p_v)$ ” Proc. London. Math. Soc. 3 (15), 422-436 (1965)
- [6] BAYRAKTAR, M., Fonksiyonel Analiz, Atatürk Üniversitesi, Erzurum, 1994
- [7] KARADENİZ, Yüksek Matematik, Çağlayan Kitabevi, Cilt 2, Beyoğlu-İstanbul-1992
- [8] A. W. Roberts, Convex Function, D. E. Varbery 1973
- [9] BULUT, E., “Topoloji”, Güven Yayıncılık
- [10] ŞENKON, H., Soyut Cebir Dersleri, İstanbul Üniversitesi 1990
- [11] RUDIN, W., Principles of Mathematical Analysis (Mc.Grow. Hill. 1964)
- [12] AHLFORS, L., Complex Analysis (Mc.Graw. Hill 1953)
- [13] KNOPP, IC., Theory and Application of infinitive Series (Blackie, 1964)
- [14] BANACH, S., Theorie Does Operations Lineaires (Chelsea, New York, 1955)
- [15] HAROY, G. H. and RIESZ, M., The General Theory of Dirichlet’s Series (Cambridge Tract No: 18, 1915)

ÖZGEÇMİŞ

01.01.1970 yılında Diyarbakır'ın Kulp ilçesinin Düzce köyünde doğdum. İlk ve orta dereceli tahsilimi Diyarbakır'da bitirdikten sonra 1989 yılında Dicle Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne kayd oldum. 1993 yılında aynı bölümden mezun oldum 1994 yılında Harran Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesinde Araştırma Görevlisi olarak işe başladım. Halen aynı göreve devam etmekteyim.

