

**T.C.  
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİFERENSİYEL  
DENKLEMLERDE RECTIFIABLE TİPİ SALINIMLAR**

**(Yüksek Lisans Tezi)**

**Hazırlayan  
Zübeyde ARIK**

**Danışman  
Doç. Dr. Pakize TEMTEK**

**Haziran 2019  
KAYSERİ**

## BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

ZÜBEYDE ARIK



**“İkinci Mertebeden Lineer Diferensiyel Denklemlerde Rectifiable Tipi Salınımlar”**  
adlı Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma  
Yönergesi’ ne uygun olarak hazırlanmıştır.



**Hazırlayan**  
Zübeyde ARIK



**Danışman**  
Doç. Dr. Pakize TEMTEK



**Matematik ABD Başkanı**

**Prof. Dr. Hüseyin ALTINDIŞ**

**Doç.Dr.Pakize TEMTEK** danışmanlığında **Zübeyde ARIK** tarafından hazırlanan **“İkinci Mertebeden Lineer Diferensiyel Denklemlerde Rectifiable Tipi Salımlar”** adlı bu çalışma jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

26 / 06 / 2019

**JÜRİ:**

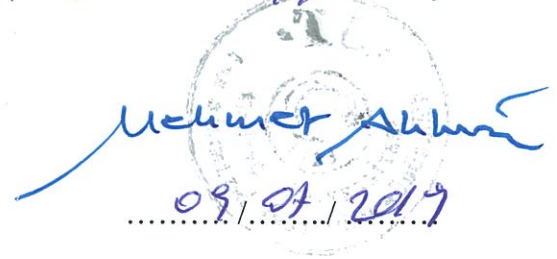
Danışman : Doç. Dr. Pakize TEMTEK

Üye : Doç. Dr. M. Tamer ŞENEL

Üye : Doç. Dr. Halis BİLGİL

**ONAY:**

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun 09/07/2019 tarih ve 2019/40-22 sayılı kararı ile onaylanmıştır.



Prof. Dr. Mehmet AKKURT

Enstitü Müdürü

## TEŐEKKÖR

Bana çalıőmalarım süresince her türlü yardımı ve fedakârlığı sağlayan, desteğini esirgemeyen baőta danıőmanım Doç. Dr. Pakize Temtek olmak üzere aileme, yüksek lisans arkadaőlarım ve iő arkadaőlarım teőekkör ederim.

Zübeyde ARIK

Haziran 2019, KAYSERİ



## İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEMLERDE RECTIFIABLE TİPİ SALINIMLAR

Zübeyde ARIK

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi, Ekim 2019

Danışman: Doç. Dr. Pakize TEMTEK

### ÖZET

Bu tezde  $I = (0,1)$  aralığındaki

$$(P) : y''(x) + f(x).y(x) = 0$$

lineer diferansiyel denklemleri üzerinde çalışacağız.

$f(x)$  katsayısı burada pozitif ve  $I$  üzerinde süreklidir ve  $x=0$  da Hartman-Wintner şartını sağlar.

Bu tezin dört sonucu şu şekildedir:

- i)  $I$  üzerinde  $\sqrt[4]{f(x)}$  in integraliyle karakterize edilen  $(P)$  denkleminin rectifiable salınımlığı için bir kriterlerini inceleme
- ii)  $f(x)$  üzerindeki permütasyon açısından,  $(P)$  denkleminin rectifiable ve unrectifiable salınımları için bir kararlılık sonucunu bulma
- iii)  $s$ -boyutlu fraktal salınımları inceleme (bunun için  $\alpha > 2$ ,  $x \rightarrow 0$  ve  $s = \max\{1, 3/2 - 2/\alpha\}$  olduğunda  $f(x) \sim cx^{-\alpha}$  varsayıyoruz.)
- iv) Hartman-Wintner koşulu  $f(x)$  üzerinde olmadığında rectifiable ve unrectifiable salınımların varlığını incelemektir.

**Anahtar Kelimeler:** salınım, rectifiable ve unrectifiable salınım, fraktal salınım

**RECTIFIABLE OSCILLATIONS IN SECOND-ORDER LINEAR  
DIFFERENTIAL EQUATIONS**

**Zübeyde ARIK**

**Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences**

**Master Thesis, June 2019**

**Supervisor: Title Assist. Prof. Pakize TEMTEK**

**ABSTRACT**

We study the linear differential equation

$$(P): y''(x) + f(x).y(x) = 0$$

on  $I = (0,1)$ , where the coefficient  $f(x)$  is strictly positive and continuous on  $I$ , and satisfies the Hartman-Wintner condition at  $x = 0$ . The four main results of the paper are

(i) a criterion for rectifiable oscillations of  $(P)$ , characterized by the integrability of  $\sqrt[4]{f(x)}$  on  $I$

(ii) a stability results for rectifiable or unrectifiable oscillations of  $(P)$ , in terms of perturbation on  $f(x)$

(iii) the  $s$ -dimensional fractal oscillations ( for which we assume also  $f(x) \sim cx^{-\alpha}$  when  $x \rightarrow 0$ ,  $\alpha > 2$  and  $s = \max\{ 1, 3/2 - 2/\alpha \}$ ); and

(iv) the co-existence of rectifiable or unrectifiable oscillations in the absence of the Hartman-Wintner condition on  $f(x)$ .

Explicit examples related to above results are given.

**Keywords:** oscillation, rectifiablemoscillation, unrectifiable oscillation, fractal oscillation

## İÇİNDEKİLER

### İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEMLERDE RECTIFIABLE TİPİ SALINIMLAR

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK.....	i
YÖNERGEYE UYGUNLUK.....	ii
KABUL VE ONAY .....	iii
ONAY .....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
ÖZET .....	v
ABSTRACT.....	vi
İÇİNDEKİLER .....	vii
ŞEKİLLER LİSTESİ .....	ix

#### 1. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR.....	1
-------------------------------	---

#### 2. BÖLÜM

İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEMLERDE RECTIFIABLE VE UNRECTIFIABLE SALINIM.....	5
---	---

#### 3. BÖLÜM

$y''(x) + f(x).y(x) = 0$ DİFERANSİYEL DENKLEMİNİN RECTIFIABLE SALINIMLILIĞI.....	23
---	----

#### 4. BÖLÜM

$y''(x) + f(x).y(x) = 0$ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN RECTIFIABLE SALINIMLILIĞI.....	31
--	----

#### 5. BÖLÜM

FRAKTAL SALINIMLAR.....	35
-------------------------	----

**6. BÖLÜM****RECTIFIABLE VE UN RECTIFIABLE SALINIMLARIN BİR ARADA**

<b>BULUNMASI</b> .....	44
<b>KAYNAKLAR</b> .....	47
<b>ÖZGEÇMİŞ</b> .....	49



## ŞEKİLLER LİSTESİ

- Şekil 2.1.  $y_1(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  in grafiği.....7
- Şekil 2.2.  $y_2(x) = x \sin\frac{1}{x}$  in grafiği.....7



# 1. BÖLÜM

## TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Diferensiyel denklemler mühendislik, fizik, biyoloji, sosyal bilimler gibi birçok alanda uygulama alanına sahiptir. Bundan dolayı diferensiyel denklemlerin çözümlerinin bilinmesi önem arz etmektedir. Ama belirli formdaki denklemler hariç genelde diferensiyel denklemlerin açık çözümleri elde edilememektedir. Bu durum araştırmacıları çözümleri elde etmeden çözümlerin davranışlarını araştırmaya yönlendirmiştir. Bu yaklaşım diferansiyel denklemlerde nitel (kalitatif) teori olarak bilinmektedir. Nitel teorinin önemli bir konusu ise salınım teorisidir. Salınımın temeli ilk olarak 1836 da Sturm tarafından yayınlanan karşılaştırma ve ayırma teoremleri ile atılmıştır diyebiliriz. Salınım teorisi ile ilgili sayısız çalışmanın yanı sıra birçok kitap ve makale yazılmıştır.

Bu tez çalışmasında ise ikinci mertebeden lineer diferensiyel denklemlerde rectifiable ve unrectifiable tipi salınımları inceleyeceğiz.

Bu bölümde tez boyunca inceleyeceğimiz

$$y''(x) + f(x).y(x) = 0 \quad (1.1)$$

ikinci mertebeden lineer homojen diferensiyel denklemi için gerekli olan temel tanımlar verilecektir.

**Tanım 1.1.**  $y = y(x)$  reel fonksiyonunun,  $J \subseteq \mathbb{R}$  de sonsuz sayıda sıfırı varsa, açık bir aralık olan  $J$  de salınımlı olduğu söylenir. (1.1) denkleminin tüm aşıkâr olmayan çözümleri  $J$  üzerinde salınımlı ise, (1.1) denkleminde  $J$  üzerinde salınımlıdır denir.

**Örnek 1.1.**

$$y''(x) + 4y(x) = 0$$

diferensiyel denkleminin göz önüne alalım. Bu denklemin lineer bağımsız çözümleri  $y_1(x) = \cos 2t$  ve  $y_2(x) = \sin 2t$  olup bu çözümler salınımlı olduğundan denklem salınımlıdır.

**Tanım 1.2.**  $y = y(x)$  reel fonksiyonunun  $J \subseteq \mathbb{R}$  de sonlu sayıda sıfırı varsa, açık bir aralık olan  $J$  de salınımsız olduğu söylenir. (1.1) denkleminin tüm aşikar olmayan çözümleri  $J$  üzerinde salınımsız ise (1.1) denkleminin  $J$  aralığı üzerinde salınımsızdır denir.

**Örnek 1.2.**

$$y''(x) - 4y(x) = 0$$

diferensiyel denklemini verilsin. Verilen bu denklemin lineer bağımsız çözümleri  $y_1(x) = e^{2t}$  ve  $y_2(x) = e^{-2t}$  şeklindedir. Bu çözümlerin her ikisi de salınımsız olduğundan verilen denklem de salınımsızdır.

**Tanım 1.3.**  $\bar{I} = [0, b]$  aralığında  $y = y(x)$  reel fonksiyonu için  $y$  nin  $G(y)$  ile tanımlı grafiği alışla geldiği üzere

$$G(y) = \{(t, y(t)) : 0 \leq t \leq b\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

şeklinde tanımlıdır.

**Tanım 1.4.** Bir  $y$  fonksiyonu  $\mathbb{R}^2$  de sürekli bir eğri ve  $y \in C(\bar{I})$  olmak üzere  $G(y)$  grafiğinin uzunluğu  $length(G(y))$  ile gösterilir ve

$$length(G(y)) = \sup \sum_{i=1}^m \| (t_i, y(t_i)) - (t_{i-1}, y(t_{i-1})) \|_2$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $\sup$ ,  $\bar{I}$  aralığının

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$$

tüm parçalanmaları üzerinde alınır ve  $\| \cdot \|_2$ ,  $\mathbb{R}^2$  deki normu gösterir.

**Tanım 1.5.** Eğer

$$length(G(y)) < \infty$$

ise bu durumda  $G(y)$  nin grafiğine  $\mathbb{R}^2$  de bir rectifiable eğridir denir.

**Tanım 1.6.** Eğer  $G(y)$  nin grafiği  $\mathbb{R}^2$  de rectifiable bir eğri ise,  $I$  üzerinde salınımlı bir  $y = y(x)$  fonksiyonuna  $I$  üzerinde rectifiable salınımlıdır denir.

**Tanım 1.7.** Eğer (1.1) diferansiyel denkleminin aşıkâr olmayan tüm çözümleri  $I$  üzerinde rectifiable salınımlı ise denkleme  $I$  üzerinde rectifiable salınımlıdır denir.

**Tanım 1.8.** Eğer  $G(y)$

$$lenght(G(y)) < \infty$$

eşitsizliğini sağlamıyorsa  $G(y)$  ye  $\mathbb{R}^2$  de unrectifiable bir eğridir denir.

**Tanım 1.9.** Eğer  $G(y)$  nin grafiği  $\mathbb{R}^2$  de unrectifiable eğri ise  $I$  üzerinde salınımlı bir  $y = y(x)$ fonksiyonuna  $I$  üzerinde unrectifiable salınımlıdır denir.

**Tanım 1.10.** Eğer (1.1) diferansiyel denkleminin aşıkâr olmayan tüm çözümleri  $I$  üzerinde unrectifiable salınımlı ise denkleme  $I$  üzerinde unrectifiable salınımlı denir.

$\mathbb{R}^2$ deki eğriler aynı zamanda fraktallar olarak da bilinir ve (1.1) denkleminin unrectifiable salınımlı bu tezin 5.Bölümünde fraktal geometri açısından da incelemek istiyoruz[1]. Bunun için  $|G_\varepsilon(y)|$  asimptotik davranışını göz önüne alarak aşağıdaki tanımları verelim.

**Tanım 1.11.** Alışılacağı üzere  $|G_\varepsilon(y)|$

$$G_\varepsilon(y) = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2: d((t_1, t_2), G(y)) \leq \varepsilon\}$$

şeklinde tanımlı  $G(y)$  grafiğinin  $\mathcal{E}$  - komşuluğunun Lebesgue ölçüsünü gösterir.

Burada  $\varepsilon \geq 0$  ve  $d((t_1, t_2), G(y))$ ;  $(t_1, t_2)$  den  $G(y)$  ye olan uzunluğu(farkı) gösterir.

Bu grafik  $G(y)$  nin üst Minkowski-Bouligand boyutunu

$$dim_M G(y) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( 2 - \frac{\log |G_\varepsilon(y)|}{\log \varepsilon} \right)$$

şeklinde hesaplar. Aynı zamanda  $G(y)$  nin  $s$ -boyutlu üst Minkowski özdeşliği  $s \in [1,2)$  olmak üzere

$$M^s(G(y)) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} (2\varepsilon)^{s-2} |G_\varepsilon(y)|$$

şeklindedir. [2]

**Tanım 1.12.**  $s \in [1,2)$  olsun. Eğer

$$\dim_M G(y) = s \text{ ve } 0 < M^s(G(y)) < \infty$$

ise,  $G(y)$  nin grafiğinin  $\mathbb{R}^2$  de  $s$ -set olduğu söylenir. Eğer  $G(y)$  nin grafiği  $\mathbb{R}^2$  de  $s$ -set ise  $I$  üzerindeki  $y = y(x)$  salınımlı fonksiyonuna  $I$  üzerinde  $s$ -boyutlu fraktal salınımlı denir.

**Tanım 1.13.** Eğer  $I$  üzerindeki (1.1) salınımlı lineer diferansiyel denkleminin tüm aşık olmayan  $y$  çözümleri  $I$  üzerinde  $s$ -boyutlu fraktal salınımlı ise, denkleme  $I$  üzerinde  $s$ -boyutlu fraktal salınımlı denir.

Bu tezimizin 5. Bölümünde, diferansiyel denklemlerde sıkça başvurulan teoremlerden Sturm Karşılaştırma Teoremini de kullandık. Şimdi bu teoremimizin ifadesini aşağıda verelim.

**Teorem 1.1 ( Sturm Karşılaştırma Teoremi ) .**

$$(r(x)y')' + p(x)y = 0 \quad (i)$$

diferansiyel denklemini bir çözümü olan  $y(x)$ ,  $x_0 < x_1$  olmak üzere  $x = x_0$  ve  $x = x_1$  ardışık iki sıfır noktasına sahip olsun. ve  $p_1(x) \geq p(x)$  olmak üzere

$$(r(x)z')' + p_1(x)z = 0 \quad (ii)$$

diferansiyel denkleminin bir  $z(x)$  çözümü için  $x_0 < x < x_1$  olacak şekilde en az bir sıfır noktası vardır.

**Teorem 1.2 ( Sturm Ayırma Teoremi ) .**

Eğer  $u(x)$  ve  $v(x)$

$$(r(x)y')' + p(x)y = 0$$

diferansiyel denkleminin iki lineer bağımsız çözümü iseler,  $u(x)$  in ardışık iki sıfır yeri arasında  $v(x)$  in bir sıfırı vardır.

## 2. BÖLÜM

### İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEMLERDE RECTIFIABLE VE UNRECTIFIABLE SALINIM

Bu bölümde ikinci mertebeden belli tipteki lineer diferensiyel denklem sınıfının çözümlerinin davranışlarını ele alacağız. Burada  $I=(0,1)$  ve  $\bar{I}=[0,1]$  olsun.  $y(x)$ ,  $\bar{I}$  üzerinde tanımlı ve sürekli reel bir fonksiyon ve  $y \in C(\bar{I})$  olsun.  $I$  üzerinde  $y \in C^2(I) \cap C(\bar{I})$  olmak üzere ikinci mertebeden

$$y''(x) + f(x).y(x) = 0 \quad (2.1)$$

lineer diferensiyel denklemin çözümlerini inceleyeceğiz.

$f(x)$  katsayısı  $I$  üzerinde yeterince düzgün ve pozitif bir fonksiyon olsun ( $x=0$  da tekil olabilir, Lemma 2.1 e bakınız.) ve  $f(x)$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt[4]{f(x)}} \left| \left( \frac{1}{\sqrt[4]{f(x)}} \right)'' \right| dx < \infty \quad (2.2)$$

Şeklindeki Hartman-Wintner şartını sağlasın. Böyle bir katsayı için klasik bir örnek

$$f(x) = \lambda x^{-\alpha}$$

Euler tipi katsayısıdır, burada  $\lambda > 0$ ,  $\alpha > 2$  ve  $x \in I$  dır.

$(0, \infty)$  aralığı üzerinde Hartman-Wintner şartını sağlayan lineer katsayılı diferensiyel denklemler üzerinde çalışılmıştır. Bunun için [3] ve [4] numaralı kitaplar kaynak olarak gösterilebilir.

$y = y(x)$  reel fonksiyonunun,  $J \subseteq \mathbb{R}$  de sonsuz sayıda (veya sonlu) sıfırı varsa, açık bir aralık olan  $J$  de salınımlı (veya salınımsız) olduğu söylenir. (2.1) denkleminin tüm

aşık olmayan çözümleri  $J$  üzerinde salınımlı (veya salınımsız) ise (2.1) denkleminin  $J$  üzerinde salınımlı (veya salınımsız) denir.

İlk lemma (2.1) denkleminin salınım özelliklerine ilişkin birkaç temel olguyu söylemektedir. İspatlar iyi bilindiğinden ihmal edilmiştir.

**Lemma 2.1.**  $f \in C^2((0,1])$  ve  $I$  üzerinde  $f(x) > 0$  olsun

i) (salınımsız olma özelliği)  $0 \notin \bar{J}$  olacak şekilde  $J \subseteq I$  açık aralığı için (2.1) denklemi  $J$  de salınımsızdır.

ii) (salınım için gerek şart) Eğer (2.1) denklemi  $I$  üzerinde salınımlı ise bu takdirde  $f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$$

anlamına gelen  $x = 0$  noktasında için singular (tekil) olmalıdır.

iii) (salınım için yeter şart) Eğer  $f(x)$ , her  $x \in I$  ve  $\lambda_0 > \frac{1}{4}$  olmak üzere

$$f(x) \geq \lambda x^{-2}$$

şeklindeki daha düşük büyüme koşulunu sağlarsa, (2.1) denklemi  $I$  üzerinde salınımlı olur. (2.1) denkleminin her bir  $y$  çözümü ardışık sıfırlarının her ikisi arasında ya konveks ya da konkavdır.

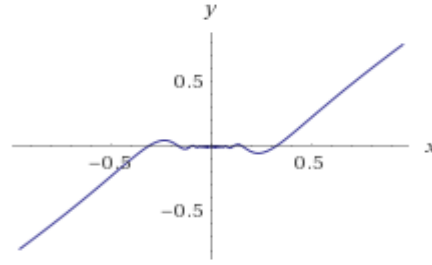
Daha sonra Tanım 1.4 den  $G(y)$  nin uzunluğu,  $y \in C(\bar{I})$  ve  $y$  fonksiyonunun diferansiyellenebilir olduğu durumda

$$length(G(y)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

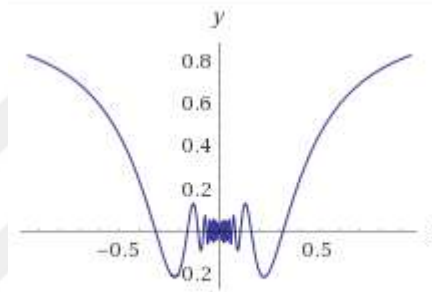
formülü kullanılarak hesaplanabilir. Bir sonsuz aralık üzerindeki herhangi bir sürekli fonksiyonun sonsuz uzunlukta olduğu açıktır. Bununla birlikte eğer  $y(x)$  sürekli fonksiyonu sonlu bir aralık üzerinde salınımlı ise bu durumda  $length(G(y))$  sonlu veya sonsuz olabilir. Örneğin aşağıda Şekil 2.1 ve Şekil 2.2 de sırasıyla grafikleri verilen

$$y_1(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ ve } y_2(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

çözümlerinde,  $length(G(y_1))$  sonlu ama  $length(G(y_2))$  sonsuzdur.



Şekil 2.1.  $y_1(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  in grafiği



Şekil 2.2.  $y_2(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  in grafiği

Bu durum sonlu bir aralıktaki sürekli salınımsız fonksiyonlar için de doğrudur. Örneğin  $q > 0$  olmak üzere

$$y(x) = x^q$$

fonksiyonu için  $\text{lenght}(G(y))$  sonludur. Diğer taraftan eğer  $x \in (0,1]$  için

$$y(0) = 0 \text{ ve } y(x) = x^p + x^q \left(1 + \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

ise bu durumda  $y(x)$  sonsuz uzunluğa sahiptir. Burada  $p$  ve  $q$

$$0 < q < p < 1$$

şeklindedir.  $y(x)$

$$x^p \text{ ve } x^p + 2x^q$$

grafikleri arasında kaldığından  $x = 0$  noktası  $\bar{I}$  de  $y(x)$  in bir sıfırındır. Sonlu bir aralık üzerinde sürekli fakat hiçbir yerde diferansiyellenemeyen fonksiyonun en iyi bilinen örneği olan Weierstrass örneği de sonsuz uzunluğa sahiptir. ( [5] ve [6] kitaplarına bakılabilir.)

İyi bilinen

$$y''(x) + \lambda x^{-2}y(x) = 0, \quad \lambda > \frac{1}{4}$$

Euler diferansiyel denklemi Tanım 1.1 den ya  $J$  sınırsız ya da  $0 \in \bar{J}$  iken herhangi bir  $J \subseteq \mathbb{R}$  açık aralığı üzerinde salınımlıdır. ( Örneğin [7] ve [8] deki kitaplara bakılabilir.)

Euler diferansiyel denklemi  $x = e^t$  bağımsız değişimi yapılarak sabit katsayılı lineer diferansiyel denkleme indirgenir ve buradan çözüm bulunur. Gerçekten genel çözümü

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

şeklinde olduğunda burada

$$x = e^t \text{ ve } dx = e^t dt$$

olmak üzere

$$\frac{dy}{dx} = e^{-t} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t} \left( \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right)$$

türevleri Euler diferansiyel denkleminde yerine yazılarak

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + \lambda y = 0$$

şeklinde sabit katsayılı lineer homojen diferansiyel denkleme indirgenir. Bu denkleme ait karakteristik denklem

$$r^2 - r + \lambda = 0$$

olmak üzere kökler

$$r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-4\left(\lambda - \frac{1}{4}\right)}}{2} = \frac{1 \pm 2i\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}}{2}$$

şeklindedir. Burada üç durum söz konusudur.

(i)  $\lambda < \frac{1}{4}$  ise, kökler reel ve farklıdır. Buna göre çözüm

$y(x) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$  olmak üzere  $y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}$  şeklindedir.

(ii)  $\lambda = \frac{1}{4}$  olduğundan kökler  $r_{1,2} = \frac{1}{2}$  şeklinde olup çözüm

$y(x) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$  den  $y(x) = c_1 e^{\frac{1}{2}t} + c_2 t e^{\frac{1}{2}t}$  olmak üzere

$$y(x) = c_1 x^{\frac{1}{2}} + c_2 x \ln x^{\frac{1}{2}}$$

biçiminde bulunur.

Dolayısıyla (i) ve (ii) durumlarından da görüldüğü gibi  $\lambda \leq \frac{1}{4}$  iken denklem salınımsızdır.

(iii)  $\lambda > \frac{1}{4}$  ise, karakteristik denklemin kökleri

$$r_{1,2} = \frac{1 \pm 2i\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}}{2}$$

kompleks olduğundan sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemin çözümü

$$y = e^{\frac{1}{2}t} \cdot \left( c_1 \cdot \cos \frac{\sqrt{\rho}}{2} t + c_2 \cdot \sin \frac{\sqrt{\rho}}{2} t \right)$$

şeklindedir. Buradan Euler diferansiyel denklemin çözümü

$$y = x^{\frac{1}{2}} \left( c_1 \cdot \cos \left( \frac{\sqrt{\rho}}{2} (\ln x) \right) + c_2 \cdot \sin \left( \frac{\sqrt{\rho}}{2} (\ln x) \right) \right)$$

şeklinde elde edilir, burada  $\rho = \sqrt{\left(\lambda - \frac{1}{4}\right)}$  dir. Buna göre  $\lambda > \frac{1}{4}$  iken denklem rectifiable salınımlıdır. [9] ve [10] da

$$y''(x) + \lambda x^{-2}y(x) = 0$$

denkleminin daha genel hali;  $\lambda > 0$  olmak üzere

$$y''(x) + \lambda x^{-\alpha}y(x) = 0$$

denklemini  $\alpha \in [2,4)$  için  $I$  üzerinde rectifiable salınımlı,  $\alpha \geq 4$  için  $I$  üzerinde unrectifiable salınımlı olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca aşağıdaki Örnek 2.1 e bakınız. Bu sonuç aşağıda Teorem 2.3 te verildiği gibi [10] da daha da genelleştirilmiştir.

$$y''(x) + \lambda x^{-4}y(x) = 0, \quad \lambda > 0$$

diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

şeklindedir, Buradan

$$y_1(x) = x \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda}/x\right) \text{ ve } y_2(x) = x \cdot \sin\left(\sqrt{\lambda}/x\right)$$

dir. Gerçekten

$$y''(x) + \lambda x^{-4}y(x) = 0, \quad \lambda > 0$$

denklemini  $(x^4 D^2 + \lambda)y = 0$  diferansiyel formunda yazılarak operatörün çarpanlara ayrılma metodu kullanılırsa

$$(x^2 D + M)(x^2 D + N)y = 0$$

şeklinde yazılır. Burada  $M$  ve  $N$  belirlenmesi gereken fonksiyonlardır. Bunları bulmak için gerekli işlemler yapılırsa

$$x^4 y'' + (2x^3 + Nx^2 + Mx^2)y' + (x^2 N' + MN)y = 0$$

olmak üzere bu denklem

$$y''(x) + \lambda x^{-4}y(x) = 0$$

denklemini ile göz önüne alınırsa

$$2x^3 + Nx^2 + Mx^2 = 0 \quad (i)$$

ve

$$x^2 N' + MN = \lambda \quad (ii)$$

bulunur. Buradan

$$2x + N + M = 0 \Rightarrow M = -N - 2x$$

olur. Bu değer (ii) de yerine yazılırsa

$$x^2 N' - (N + 2x)N = \lambda$$

veya

$$x^2 N' - N^2 - 2xN = \lambda$$

Ricatti diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin  $N = ax + b$  şeklinde bir çözümü göz önüne alınarak

$$ax^2 - (ax + b)^2 - 2x(ax + b) = \lambda$$

$$(-a^2 - a)x^2 + (-2ab - 2b)x - b^2 = \lambda$$

eşitliğinden

$$-a^2 - a = 0 \Rightarrow a = 0, \quad a = -1$$

ve

$$-2ab - 2b = 0 \Rightarrow -2b(a + 1) = 0 \Rightarrow a = -1, \quad b = 0$$

$$-b^2 = \lambda \Rightarrow b^2 = -\lambda \Rightarrow b = \sqrt{-\lambda} \Rightarrow b = \pm i\sqrt{\lambda}$$

olmak üzere  $N = -x \mp i\sqrt{\lambda}$  şeklinde bulunur. Buradan (i) ifadesinden

$$M = -(-x \mp i\sqrt{\lambda}) - 2x = -x \mp i\sqrt{\lambda}$$

olup  $M = N$  biçiminde elde edilir. Sonuç olarak

$$N = -x + i\sqrt{\lambda} \quad \text{ve} \quad M = -x - i\sqrt{\lambda}$$

olmak üzere

$$y''(x) + \lambda x^{-4}y(x) = 0$$

denklemini

$$(X^2 D - X - i\sqrt{\lambda})(X^2 D - X + i\sqrt{\lambda})y = 0$$

şeklinde çarpanlarına ayrılır. Burada

$$(x^2 D - x + i\sqrt{\lambda})y = u$$

alınırsa denklem,

$$(x^2D - x - i\sqrt{\lambda})u = 0 \text{ veya } x^2u' - (x + i\sqrt{\lambda})u = 0$$

şeklini alır. Değişkenlerine ayrılabilen bu diferansiyel denklemin çözülmesi ile

$$u = c_1 x e^{\frac{-i\sqrt{\lambda}}{x}}$$

bulunur ve bu çözüm

$$(x^2D - x + i\sqrt{\lambda})y = u$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$(x^2D - x + i\sqrt{\lambda})y = c_1 x e^{\frac{-i\sqrt{\lambda}}{x}}$$

veya

$$y'' - \left(\frac{1}{x} - i\frac{\sqrt{\lambda}}{x^2}\right)y = \frac{c_1}{x} e^{\frac{-i\sqrt{\lambda}}{x}}$$

yye göre diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü,

$$\lambda = e^{-\int\left(\frac{1}{x} - \frac{i\sqrt{\lambda}}{x^2}\right)dx} = x^{-1} e^{\frac{-i\sqrt{\lambda}}{x}}$$

integral çarpanı olmak üzere

$$x^{-1} e^{\frac{-i\sqrt{\lambda}}{x}} y = \frac{c_1}{2i\sqrt{\lambda}} e^{\frac{-2i\sqrt{\lambda}}{x}} + c_2$$

$$y = \frac{c_1 x}{2i\sqrt{\lambda}} e^{\frac{-i\sqrt{\lambda}}{x}} + c_2 x e^{\frac{i\sqrt{\lambda}}{x}}$$

genel çözümü elde edilir.  $\mathbb{R}$  de çözüme ulaşmak için Euler formülü kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$y = c_3 x \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{x} + c_4 x \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{x}$$

çözümü bulunur. Burada  $c_3 = \frac{c_1}{2i\sqrt{\lambda}} + c_2$  ve  $c_4 = \frac{-c_1 i}{2i\sqrt{\lambda}} + c_2 i$  şeklindedir.

Teorem 2.1 te verildiği gibi  $y(x)$  gibi tüm aşıkır olmayan çözümler I üzerinde unrectifiable salınımlıdır, bu da Lemma 3.1 den  $y' \notin L^1(0,1)$  olma durumuna denktir.

Özellikle

$$\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow 0} |y'(x)| = \infty \quad (2.3)$$

denkleminin şartlarını karşılayan çözümlere Jaros ve Takasi tarafından getirilen ‘‘kara delik çözümü’’ adı verilir [11,s.49]. Astrofizikte,  $x$  bağımsız değişkeni yıldız kümesinin merkezinden radikal mesafeyi temsil eder ve bağımlı değişkeni ise Newton yasasının küresel olarak simetrik dağılmış kongfigürasyonlarının yoğunluğuna bağlı olan basıncı temsil eder.

Euler tipi denklemlerle ilgili bu sonuçlar aşağıda özetlenmiştir.

**Teorem 2.1.**  $f \in C^2((0,1])$  ve  $I$  üzerinde  $f(x) > 0$  olsun. Kabul edelim ki  $f(x)$ , (2.2) Hartman-Wintner koşulunu sağlasın ve burada  $\alpha > 2$  için

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha f(x) = \lambda > 0$$

olsun.

i) Eğer  $\alpha \in (2,4)$  ise, (2.1) denklemi  $I$  üzerinde rectifiable sınımlıdır.

ii) Eğer  $\alpha \geq 4$  ise, (2.1) denklemi  $I$  üzerinde unrectifiable sınımlıdır.

Bu çalışmadaki ilk temel sonuç Teorem 2.1 teki noktasal sınımlı kriteri ile bir integral kriteri yer değiştirerek yukarıdaki sonuçlar daha da geliştirilmiştir.

**Teorem 2.2.**  $f \in C^2((0,1])$  ve  $I$  üzerinde  $f(x) > 0$  olsun.  $f(x)$ , (2.2) Hartman-Wintner koşulunu sağlasın.

i) Eğer

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \sqrt[4]{f(x)} dx < \infty \quad (2.4)$$

ise, (2.1) denklemi  $I$  üzerinde rectifiable sınımlıdır.

ii) Eğer

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \sqrt[4]{f(x)} dx = \infty \quad (2.5)$$

ise, (2.1) denklemi  $I$  üzerinde unrectifiable sınımlıdır.

Diğer bir deyişle (2.2) Hartman - Wintner kabulü altında (2.1) diferensiyel denkleminin rectifiable salınımlı olması için gerek ve yeter şart (2.4) şartının sağlanmasıdır. Bu teoremin (i) ve (ii) sonuçlarının ispatları sırasıyla Bölüm 2 ve 3 te verilecektir.

Bir sonraki örnek, yakın zamanda [9] ve [10] da ispatlanan rectifiable ve unrectifiable salınımlar üzerine bazı sonuçlar içermektedir. Bu örnekler Teorem 2.2 nin direk bir uygulaması olarak göz önüne alınabilir.

**Örnek 2.1.** I üzerinde Euler tipi

$$(P)_\alpha : y''(x) + \lambda x^{-2}y(x) = 0$$

denklemini göz önüne alalım, burada  $\lambda > 0$  ve  $\alpha > 2$  dir.

$f(x) = \lambda x^{-\alpha}$  fonksiyonunun (2.2) Hartman-Wintner şartını sağlayıp sağlamadığını kontrol etmek kolaydır. Bunun için

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda x^{-\alpha}}} \left| \left( \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda x^{-\alpha}}} \right)'' \right| dx < \infty$$

olduğunu gösterelim. Burada

$$\left( \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda x^{-\alpha}}} \right)' = \left( (\lambda x^{-\alpha})^{-1/4} \right)' = \left( \lambda^{-1/4} \cdot x^{\alpha/4} \right)' = \frac{\alpha \lambda^{-1/4}}{4} \cdot x^{\alpha/4 - 1}$$

ve

$$\left( \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda x^{-\alpha}}} \right)'' = \frac{\alpha \lambda^{-1/4}}{4} \cdot \left( \frac{\alpha}{4} - 1 \right) x^{\alpha/4 - 2}$$

olmak üzere

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda x^{-\alpha}}} \frac{\alpha \lambda^{-1/4}}{4} \cdot \left( \frac{\alpha}{4} - 1 \right) x^{\alpha/4 - 2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\alpha \lambda^{-1/4}}{4} \cdot \left( \frac{\alpha}{4} - 1 \right) \left( \frac{\alpha}{4} - 1 \right) \left[ 1 - \varepsilon^{\frac{\alpha}{2} - 1} \right] \right) < \infty$$

elde edilir, bu da  $f(x) = \lambda x^{-\alpha}$  fonksiyonunun (2.2) Hartman-Wintner şartını sağladığını gösterir. Aynı zamanda

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \sqrt[4]{f(x)} dx < \infty$$

olması için gerek ve yeter şart  $\alpha < 4$  olmasıdır, gerçekten

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \sqrt[4]{\lambda x^{-\alpha}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \lambda^{\frac{1}{4}} x^{-\frac{\alpha}{4}} dx = \frac{4\lambda^{\frac{1}{4}}}{4-\alpha} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( 1^{\frac{4-\alpha}{4}} - \varepsilon^{\frac{4-\alpha}{4}} \right) < \infty$$

olduğu görülür.

Böylece Teorem 2.2 ye göre  $\alpha \in (2,4)$  iken I üzerinde rectifiable salınımlı ve  $\alpha \geq 4$  iken I üzerinde unrectifiable salınımlı olduğu görülür.

Sonraki iki örnek Teorem 2.2 ile ilgili uygulamaları göstermektedir.

### Örnek 2.2.

$$y''(x) + \frac{(\lambda - \log x)^{-\beta}}{x^{\alpha}} y(x) = 0 \quad (2.6)$$

denklemini göz önüne alalım. Burada  $\lambda, \alpha$  ve  $\beta$  pozitif sayılardır.

$\alpha > 2$  olduğu zaman (2.2) Hartman-Wintner şartının sağlandığı görülebilir.

$\alpha < 4$  olduğu zaman (2.4) sağlanır ve böylece denklem rectifiable salınımlı olur.

$\alpha > 4$  olduğu zaman (2.5) sağlanır ve denklem unrectifiable salınımlı olur.

Kritik değer  $\alpha = 4$  için, denklem rectifiable salınımlıdır ancak ve ancak  $\beta > 4$  ise.

Gerçekten  $\alpha = 4$  için

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \sqrt[4]{f(x)} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \sqrt[4]{\frac{1}{x^4 (\lambda - \log x)^{\beta}}} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x (\lambda - \log x)^{\frac{\beta}{4}}} dx \end{aligned}$$

ifadesindeki integrali çözmek için  $\lambda - \log x = u$  alınırsa

$$\frac{dx}{x} = -\ln 10 du$$

elde edilir. Buna göre

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \sqrt[4]{f(x)} dx = \frac{4 \ln 10}{\beta - 4} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( (\lambda - \ln 1)^{\frac{-\beta}{4}+1} - (\lambda - \ln \varepsilon)^{\frac{-\beta}{4}+1} \right) < \infty$$

olması için  $\frac{-\beta}{4} + 1 < 0$  olmalıdır. Buradan  $\beta > 4$  gelir. O halde  $\alpha = 4$  iken  $\beta > 4$  olmalıdır.

**Örnek 2.3.** I üzerinde  $\delta > 0$  için

$$y''(x) + \left( \frac{\delta^2}{x^{2\delta+2}} + \frac{1-\delta^2}{4x^2} \right) y(x) = 0 \quad (2.7)$$

şeklindeki Chirp denklemini göz önüne alalım. Buradaki

$$f(x) = \frac{\delta^2}{x^{2\delta+2}} + \frac{1-\delta^2}{4x^2}$$

katsayısının (2.2) Hartman-Wintner şartını sağladığı açıktır. Ayrıca

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \sqrt[4]{f(x)} dx < \infty$$

şartının sağlanması için gerek ve yeter şart  $\delta < 1$  olmasıdır. Bundan dolayı (2.7) denkleminin  $\delta \in (0,1)$  iken I üzerinde rectifiable salınımlı ve  $\delta \geq 1$  iken I üzerinde unrectifiable salınımlıdır.

(2.7) denkleminin çözümleri sinyal (sinyal, işaret) işlemenin çoklu fraktallarının formülasyonunda zaman-frekans analizi ve modülasyonunda önemli olan Chirp-like benzeri davranışları olarak adlandırılan modellerde kullanılmıştır [12].

Bir sonraki sonuçlarımız  $f(x)$  katsayısının perturbation(dejenere) bir sınıfı altında rectifiable salınımlının kararlılığını ortaya koymaktadır.

**Teorem 2.3.**  $f \in C^2((0,1])$  ve  $f(x) > 0$  ve (2.2) Hartman-Wintner şartını sağlasın. I üzerinde

$$\frac{p(x)}{\sqrt{f(x)}} \in L^1(I)$$

olmak üzere

$$y''(x) + (f(x) + p(x))y(x) = 0 \quad (2.8)$$

perturbed(dejenere) denklemini göz önüne alalım.

i) Eğer (2.4) şartı sağlanıyorsa (2.8) denkleminin  $I$  üzerinde rectifiable salınımlıdır denir.

ii) Eğer (2.5) şartı sağlanıyorsa (2.8) denkleminin  $I$  üzerinde unrectifiable salınımlıdır denir.

Bu teoremin ispatı Bölüm 3 ve 4 te verilecektir. Bu sonuçların ilk uygulaması olarak (2.7) den daha genel lineer diferansiyel denklemler için rectifiable salınımlı olduğunu gösterebiliriz.

**Örnek 2.4.**  $0 < \delta < 1$ ,  $\lambda > 0$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  ve  $I$  üzerinde

$$y''(x) + \left( \frac{\lambda}{x^{2\delta+2}} + \frac{\mu}{x^2} \right) y(x) = 0 \quad (2.9)$$

Bu denklem Chirp denklemi olan (2.7) nin genelleştirilmiş halidir. Önceki örnekte olduğu gibi

$$f(x) = \lambda x^{-2\delta-2}$$

katsayısı (2.2) ve (2.4) şartını sağlar. Öncelikle  $f(x) = \lambda x^{-2\delta-2}$  katsayısını (2.2) Hartman-Wintner şartını sağladığını gösterelim. Gerçekten  $f(x) = \lambda x^{-2\delta-2}$  iken

$$\frac{1}{\sqrt[4]{f(x)}} = \lambda^{-\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{\delta+1}{2}}$$

ve

$$\left( \frac{1}{\sqrt[4]{f(x)}} \right)' = \frac{1}{4} \lambda^{-\frac{1}{4}} (\delta^2 - 1) x^{\frac{\delta-3}{2}}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{f(x)}} \left| \left( \frac{1}{\sqrt[4]{f(x)}} \right)' \right| dx &= \frac{1}{4} (\delta^2 - 1) \lambda^{-\frac{1}{4}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 x^{\delta-1} dx \\ &= \frac{1}{4} (\delta^2 - 1) \lambda^{-\frac{1}{4}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{x^{\delta}}{\delta} dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} \frac{(\delta^2 - 1)}{\delta} \lambda^{\frac{-1}{2}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1^\delta - \varepsilon^\delta) < \infty$$

elde edilir. Ayrıca

$$f(x) = \lambda x^{-2\delta-2}$$

katsayısı (2.4) şartı olan

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \sqrt[4]{f(x)} dx < \infty$$

eşitsizliğini sağlar. Gerçekten

$$\sqrt[4]{f(x)} = \sqrt[4]{\lambda x^{-2\delta-2}} = \lambda^{\frac{1}{4}} x^{-\frac{\delta}{2} - \frac{1}{2}}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \sqrt[4]{f(x)} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 x^{-\frac{\delta}{2} - \frac{1}{2}} dx \\ &= \lambda^{\frac{1}{4}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 x^{-\frac{\delta}{2} - \frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{2\lambda^{\frac{1}{4}}}{1 - \delta} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( 1^{\frac{1-\delta}{2}} - \varepsilon^{\frac{1-\delta}{2}} \right) < \infty \end{aligned}$$

olduğu görülür. Ayrıca  $p(x) = \mu x^{-2}$  için  $0 < \delta < 1$  olduğunda

$$\frac{p(x)}{\sqrt[4]{f(x)}} = (\mu/\sqrt{\lambda}) x^{\delta-1} \in L^1(1)$$

değerini elde ederiz. Teorem 2.3 den (2.9) denkleminin rectifiable salınımlı olduğu görülür.

Teorem 2.3 in diğer bir uygulaması olarak Euler diferansiyel denkleminin önemli bir logaritma perturbationu (dejenerasyonu) için I üzerinde rectifiable salınımı ispatlanabilir [13].

**Örnek 2.5.**  $2 < \alpha < 4$ ,  $\beta > 0$ ,  $\lambda > 0$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  ve  $a < 1$

olmak üzere  $J = (0, a)$  olsun.  $J$  aralığında

$$y''(x) + \left( \frac{\lambda}{x^\alpha} + \frac{\mu \sin x}{|\ln x|^\beta} \right) y(x) = 0 \quad (2.10)$$

Euler diferansiyel denkleminin genelleştirilmiş halini göz önüne alalım. (Ki bu denklem aynı zamanda Riemann-Weber denklemi olarak adlandırılır) [13].

Belirtelim ki  $\lambda < \mu$  olduğunda (2.10) diferansiyel denkleminin katsayıları negatif olabilir. Bu da Teorem 2.3 ün Teorem 2.2 de rectifiable salınım için integral kriterinin kapsamını genişlettiğini gösterir.

Diğer taraftan  $p(x)$  keyfi büyüklükte negatif değerler alabileceği kabulünden sıradan bir salınım için Kneser kriterinde olduğu gibi  $\lambda \geq 1/4$  için

$$\sqrt{f(x)} \geq \lambda/x^2$$

rectifiable salınımı için noktasal karşılaştırma kriterlerin oluşturulması beklenilemez. Bakınız Örnek 6.1.

Örnek 2.1 deki gibi

$$f(x) = \lambda x^{-\alpha}$$

(2.2) ve (2.4) koşullarını karşılar. Aynı zamanda

$$p(x) = \mu \cdot \sin x \cdot |\ln x|^{-\beta}$$

olmak üzere  $2 < \alpha < 4$ ,  $\beta > 0$  olduğundan

$$p(x)/\sqrt{f(x)} \in L^1(J)$$

olduğunu söyleyebiliriz.  $J$  üzerindeki (2.10) denkleminin rectifiable salınımı Teorem 2.3 den görülür.

Daha önceden de belirtildiği gibi  $\mathbb{R}^2$  deki eğrilere aynı zamanda fraktallar olarak da bakılabilir ve (2.1) denkleminin unrectifiable salınımlı olmasını fraktal geometri açısından da incelemek istiyoruz [1]. Daha kesin bir ifadeyle belirtmek gerekirse Teorem 2.1 ve Teorem 2.2 de oluşturulan (2.1) denkleminin çözümlerinin unrectifiable salınımı,  $\mathcal{E}$  sıfıra giderken  $|G_\mathcal{E}(y)|$  nin asimptotik davranışını kullanarak tarif edilebilir; burada  $|G_\mathcal{E}(y)|$  alışlageldiği üzere

$$G_\mathcal{E}(y) = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2: d((t_1, t_2), G(y)) \leq \varepsilon\}$$

şeklinde tanımlı  $G(y)$  grafiğinin  $\mathcal{E}$  – komşuluğunda Lebesgue ölçüsünü gösterir,

burada  $\varepsilon \geq 0$  ve  $d((t_1, t_2), G(y))$ ;  $(t_1, t_2)$  den  $G(y)$  ye olan uzunluğu(farkı) gösterir. Bu grafik  $G(y)$  nin üst(upper) Minkowski-Bouligand boyutunu

$$\dim_M G(y) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( 2 - \frac{\log |G_\varepsilon(y)|}{\log \varepsilon} \right)$$

şeklinde hesaplar. Aynı zamanda  $G(y)$  nin  $s$ -boyutlu üst Minkowski özdeşliği  $s \in [1,2)$  olmak üzere

$$M^s(G(y)) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} (2\varepsilon)^{s-2} |G_\varepsilon(y)|$$

şeklindedir [2].

[ 6,bölüm 5.2 ], [14,bölüm 5.5 ] ve [ 15,bölüm 9] kaynaklarında yer aldığı gibi eğer  $length(G(y))$  sonlu ise

$$\dim_M G(y) = 1 \text{ ve } 0 < M^1(G(y)) < \infty$$

dur. Diğer taraftan eğer  $length(G(y))$  sonsuz ise  $\dim_M G(y)$ ,  $[1,2)$  aralığından herhangi bir reel  $s$  değeri olabilir ve  $M^s(G(y))$ ;  $0, \infty$  veya  $(0, \infty)$  aralığında herhangi bir reel sayı olabilir. M.Pasic in [16] deki çalışmasında verdiği Tanım 1.12 den açıktır ki  $s \in [1,2)$  olmak üzere eğer  $G(y) \mathbb{R}^2$  de  $s$ -set ise bu taktirde  $|G_\varepsilon(y)|$  nin asimptotik davranışı için

$$c_0 \varepsilon^{2-s} \leq |G_\varepsilon(y)| \leq c_1 \varepsilon^{2-s}$$

eşitsizliği yazılabilir, burada  $c_0 > 0$ ,  $c_1 > 0$  ve  $\varepsilon > 0$  dan bağımsızdır.

[16] te,  $\lambda > 0$  için Euler tipi diferansiyel denklem

$$(P)_\alpha : y'' + \lambda x^{-\alpha} y(x) = 0$$

$s$ -boyutlu fraktal salınım oluşturulmuştur.  $(P)_2$  nin  $I$  üzerinde 1-boyutlu fraktal salınımlı olduğu ve

$$\alpha > 4 \text{ ve } s = 3/2 - 2/\alpha$$

olmak üzere  $P_\alpha$   $I$  üzerinde  $s$ -boyutlu fraktal salınımı olduğu ispatlanmıştır.

Aynı zamanda (2.7) Chirp - denklemi  $\delta \in (0,1)$  ise 1-boyutlu fraktal salınımlı eğer  $\delta > 1$  ise  $s$ -boyutlu fraktal salınımlı olduğu söylenebilir, burada boyutun değeri  $s = (3\delta + 1)/(2\delta + 2)$  şeklindedir. Bunun için [15,bölüm10] referansına bakılabilir.

Hausdorff ölçüsüne göre tanımlanan  $s$ -kümelerinin  $\mathbb{R}^2$  deki fraktal kümelerinin çalışmasının teorik kavramlarda önemli bir rol oynadığını belirtmek isteriz. [17]

Üstelik, Minkowskinin non-dejenere durumunda, Tanım 1.12 de tanımlanan  $s$ -kümeleri de Minkowski ölçülebilirliği olarak görülür. Bu da fraktal çizgiler ve fraktal davulların(drums) öz frekanslarının ve fraktalların ölçülebilirliği çalışmasında önemli bir kavramdır. (Weyl-Berry varsayımı) [17,18] ve [19].

Mikowski ölçülebilirliği dinamik sistemlerde de çalışılmıştır [20].

Beşinci bölümde, Teorem 2.1 de verilen unrectifiable salınım geliştirilmiş halini ispat edeceğiz.

Bu bağlamda  $s > 1$  olmak üzere herhangi bir  $s$ -boyutlu  $y$  fraktal salınım fonksiyonu, unrectifiable salınımlı olmalıdır.

$$y''(x) + \lambda x^{-4}y(x) = 0, \lambda > 0$$

örneğinde olduğu gibi genel olarak bu durumun tersi doğru değildir. Bunun için M.Pasic in [16] numaralı çalışmasına bakılabilir.

**Teorem 2.4.**  $f \in C^2((0,1])$  ve üzerinde  $f(x) > 0$  olsun. Kabul edelim ki  $f(x)$ , (2.2) Hartman-Wintner şartını sağlasın ve  $\alpha > 2$  ve  $\lambda > 0$  olmak üzere

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha f(x) = \lambda \quad (2.11)$$

olsun.

**i)** Eğer  $\alpha \in (2,4)$  ise (2.1) denkleminin I üzerinde 1-boyutlu fraktal salınımlıdır denir.

**ii)** Eğer  $\alpha > 4$  ise (2.1) denkleminin I üzerinde  $s$ -boyutlu fraktal salınımlıdır denir, burada  $s = 3/2 - 2/\alpha$  şeklindedir.

Son olarak rectifiable ve unrectifiable salınımların birlikte bulunma problemini ele alırsak aşağıdaki üç durum ortaya çıkar:

**Teorem 2.5.** I üzerinde salınımlı lineer diferansiyel denklem

$$(P) : y''(x) + f(x)y(x) = 0$$

olsun. Bu takdirde aşağıdaki durumlardan herhangi biri olabilir.

**i)** (P) nin tüm çözümleri I üzerinde rectifiable salınımlıdır

veya

**ii)** (P) nin aşikar olmayan tüm çözümleri I üzerinde unrectifiable salınımlıdır

veya

**iii)** (P) nin bir çözümü (bir sabite kadar) I üzerinde rectifiable salınımlıdır ancak (P) nin bütün diğer bir bağımsız çözümleri I üzerinde unrectifiable salınımlıdır.

(i) ve (ii) nin mümkün olması Teorem 2.1 in sonucudur. (iii) durumu Örnek 6.1 kullanılarak Bölüm 6 da gösterilecektir.



### 3.BÖLÜM

#### $y''(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}).\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ DİFERANSİYEL DENKLEMİNİN RECTIFIABLE SALINIMLILIĞI

Bu bölümde Teorem 2.2 ve Teorem 2.3 in (i) sonuçlarının ispatı verilecektir. Yani (2.2) diferensiyel denkleminin rectifiable salınımlı olduğu gösterilecektir. Bunun için aşağıdaki lemmalara ihtiyacımız vardır.

**Lemma 3.1.**  $y \in C^1((0,1] \cap C(\bar{I}))$  ve

$$length(G(y)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx \quad (3.1)$$

olmak üzere  $G(y)$  grafiğinin  $\mathbb{R}^2$  de bir rectifiable eğri olması için gerek ve yeter şart  $y' \in L^1(I)$  olmasıdır [5].

**Lemma 3.2.**  $f \in C^2((0,1])$  ve  $I$  üzerinde  $f(x) > 0$  olsun. Kabul edelim ki  $f$ , (2.2) Hartman-Wintner şartını ve  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$  şartını sağlasın. Bu durumda

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \sqrt{f(x)} dx = \infty \quad (3.2)$$

ve

$$\lim_{x \rightarrow 0} f^{-3/2}(x) f'(x) = 0 \quad (3.3)$$

şeklindedir.

**İspat.**

Kolaylık sağlamak için  $k(x) = f^{-1/4}(x)$  alalım. (2.2) Hartman-Wintner şartından her  $s \in (0,1)$  için

$$\int_s^1 k(x) \cdot k''(x) dx \geq - \int_s^1 |k(x)k''(x)| dx > - \int_0^1 |k(x)k''(x)| dx = -K$$

yazılabilir. Burada birinci integrale kısmi integrasyon uygularsak

$$k''(x)dx = dv \text{ ise, } k'(x) = v \text{ ve } k(x) = u \text{ ise, } k'(x)dx = du$$

olmak üzere

$$\int_s^1 k(x)k''(x)dx = k(x)k'(x) \Big|_s^1 - \int_s^1 (k'(x))^2 dx \geq -K$$

veya

$$\int_s^1 k(x)k''(x)dx = k(1)k'(1) - k(s)k'(s) - \int_s^1 (k'(x))^2 dx \geq -K \quad (3.4)$$

denklemini bulunur. Yukarıdaki (3.4) eşitsizliğindeki integral pozitif olduğundan,

$$k(s)k'(s) \leq K + |k(1)k'(1)|$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik  $s = 0$  dan  $s = x$  e kadar integrale edilir ve  $k(0) = 0$  olduğu kullanılırsa yani

$$\int_0^x k(s)k'(s)ds \leq \int_0^x (K + |k(1)k'(1)|)ds$$

olmak üzere  $k(s) = z$  dönüşümü yapılarak

$$k^2(x) \leq 2(K + |k(1)k'(1)|)x$$

elde edilir. Burada  $k(x) = f^{-1/4}(x)$  olduğundan  $\sqrt{f(x)} = \frac{1}{k^2(x)}$  dir. Buna göre

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \sqrt{f(x)} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{k^2(x)} dx \\ &\geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2((K + |k(1)k'(1)|))} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A \ln x \Big|_{\varepsilon}^1 = A \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln 1 - \ln \varepsilon) = \infty \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak (3.2) elde edilir. Şimdi de (3.3) ü elde etmek için (3.4) ten

$$\int_s^1 (k'(x))^2 dx \leq K + |k(1)k'(1)| - k(s)k'(s)$$

yazılır.  $k(0) = 0$  ve  $s > 0$  için  $k(s) > 0$  olduğundan ortalama değer teoreminden  $k'(s_n) > 0$  olacak şekilde  $s_n \rightarrow 0$  için  $s_n \geq 0$  noktalarının bir dizisi vardır. Böylece

$$\int_s^1 (k'(x))^2 dx \leq K + |k(1)k'(1)| - k(s)k'(s) \leq K + |k(1)k'(1)|$$

üstten sınırlı olduğu görülür. Bu da

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_s^1 (k'(x))^2 dx = \int_0^1 (k'(x))^2 dx < \infty \quad (3.5)$$

olması demektir. (3.4) ten ve  $kk''$  nin integrallenebilirliğinden

$$\lim_{s \rightarrow 0} k(s)k'(s) = c$$

mevcut olduğu görülür. Eğer  $c \neq 0$  ise bu durumda

$$(k(s)k'(s))^{-1}$$

$s = 0$  ın bir komşuluğunda  $[0, \bar{s}]$  de sınırlıdır ve böylece (3.5) den

$$\int_0^{\bar{s}} \frac{ds}{k^2(s)} = \int_0^{\bar{s}} \frac{k'(s)}{k(s)k'(s)} ds < \infty$$

elde edilir. Bu ise (3.2) ile çelişkidir. Böylece  $c=0$  dır. Dolayısıyla (3.3) elde edilmiş olur.

**Lemma3.3.**  $f \in C^2((0,1])$  ve  $I$  üzerinde  $f(x) > 0$  olsun.  $f$  (2.2) Hartman-Wintner şartını sağlasın. (2.1) denkleminin tüm  $y$  çözümleri  $x \rightarrow 0$  iken

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{f(x)}} \left[ c_1 \cos \left( \int_x^1 \sqrt{f(\xi)} d\xi \right) + c_2 \sin \left( \int_x^1 \sqrt{f(\xi)} d\xi \right) + o(1) \right] \quad (3.6)$$

$$y'(x) = \sqrt[4]{f(x)} \left[ c_1 \cos \left( \int_x^1 \sqrt{f(\xi)} d\xi \right) + c_2 \sin \left( \int_x^1 \sqrt{f(\xi)} d\xi \right) + o(1) \right] \quad (3.7)$$

asimptotik davranışını sağlar.

**İspat.** (2.1) diferansiyel denkleminde  $x = 1/t$  dönüşümünü uygulayalım.

$$x = \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = -t^2$$

olduğundan buradan

$$\frac{dy}{dx} = -t^2 \frac{dy}{dt} \text{ ve } \frac{d^2y}{dx^2} = -t^2 \frac{d}{dt} \left( t^2 \frac{dy}{dt} \right)$$

olmak üzere (2.1) denklemi

$$-t^2 \frac{d}{dt} \left( t^2 \frac{dy}{dt} \right) + f \left( \frac{1}{t} \right) y = 0$$

veya

$$\frac{d}{dt} \left( t^2 \frac{dy}{dt} \right) - \frac{1}{t^2} f \left( \frac{1}{t} \right) y = 0$$

şeklini alır. Yani  $z(t) = y(1/t)$ ,  $(1, \infty)$  üzerinde

$$\frac{d}{dt} \left( p(t) \frac{dy}{dt} \right) + q(t)y = 0$$

denklemini sağlar. Burada  $p(t) = t^2$  ve  $q(t) = (1/t^2)f(1/t)$  şeklindedir.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \sqrt{\frac{q(t)}{p(t)}} dt = \infty$$

ve

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{p(t)q(t)}} \left[ p(t) \left( \frac{1}{\sqrt[4]{p(t)q(t)}} \right)' \right]' dt < \infty \quad (3.8)$$

şartları sırasıyla (3.2) ve (2.2) ile denktir. [3, Teorem 13, p.120] e göre  $(1, \infty)$  üzerinde

$(p(t).z'(t))' + q(t).z(t) = 0$  lineer diferansiyel denkleminin tüm  $z(t)$  çözümleri

$$z(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{p(t)q(t)}} \left[ c_1 \cos \left( \int_x^1 \sqrt{\frac{q(\tau)}{p(\tau)}} d\tau \right) + c_2 \sin \left( \int_x^1 \sqrt{\frac{q(\tau)}{p(\tau)}} d\tau \right) + o(1) \right]$$

$$z'(t) = \frac{1}{p(t)} \sqrt[4]{p(t)q(t)} \left[ c_1 \cos \left( \int_x^1 \sqrt{\frac{q(\tau)}{p(\tau)}} d\tau \right) + c_2 \sin \left( \int_x^1 \sqrt{\frac{q(\tau)}{p(\tau)}} d\tau \right) + o(1) \right]$$

şartlarını sağlar, burada  $p(t)$  ve  $q(t)$  (3.8) şartını sağlar. Aynı zamanda  $t \rightarrow \infty$  iken Hartman-Wintner asimptotik formülünü sağlar.

$t = 1/t$ ,  $p(t) = t^2$  ve  $q(t) = (1/t^2)f(1/t)$  olduğundan bu formüller bize (3.6) ve (3.7) ifadelerini verir.

Şimdi (2.1) ve (2.8) lineer diferansiyel denklemlerin rectifiable salınımının ispatlarını söyleyebiliriz.

**Teorem 2.2. (i) sonucunun ispatı.**

$y(x)$ , (2.1) denkleminin çözümü olsun. (2.2) denkleminin yardımıyla ve Lemma 3.3 ten  $y$  nin  $I$  üzerinde salınımlı olduğunu görülür.

Üstelik (3.7) den her  $x \approx 0$  ve bir  $c > 0$  sabiti için

$$|y'(x)| \leq c \sqrt[4]{f(x)}$$

yazabiliriz. Buradan  $y \in C^1((0,1])$  olduğundan (2.4) ile birlikte  $y' \in L^1(I)$  olmasını gerektirir.  $G(y)$  nin grafiğinin rectifiable olduğu Lemma 2.1 den görülür. Böylece  $y(x)$  fonksiyonu  $I$  üzerinde rectifiable salınımlıdır. Dolayısıyla aynı durum (2.1) denklemini için de geçerlidir.

**Teorem 2.3 (i) sonucunun ispatı.**

$y(x)$  (2.8) denkleminin bir çözümü ve  $q(x) = 1/\sqrt[4]{f(x)}$  olsun. Bu taktirde

$z(x) = y(x)/q(x)$  fonksiyonundan  $y(x) = z(x).q(x)$  elde edilir. Buradan

$$y'(x) = z'(x)q(x) + z(x)q'(x)$$

$$y''(x) = z''(x)q(x) + 2z'(x)q'(x) + z(x)q''(x)$$

olmak üzere (2.8) denkleminde yerlerine yazılır ve her iki taraf  $q(x)$  ile çarpılırsa  $x \in I$  için

$$(q^2(x)z''(x) + 2q(x)q'(x)z'(x) + z(x)q(x)q''(x)) + (f(x) + p(x))z(x)q^2(x) = 0$$

veya

$$(q^2(x)z'(x))' + [(f(x) + q(x))q^2(x) + q(x) \cdot q''(x)]z(x) = 0$$

denklemini sağlar.

$s = \int_x^1 \sqrt{f(t)} dt$  için Liouville dönüşümü  $\hat{z} = \hat{z}(s) = z(x)$  uygulanır ve

$$ds = -\sqrt{f(x)} dx \text{ olmak üzere}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d\hat{z}}{ds} \frac{ds}{dx} = -\sqrt{f(x)} \frac{d\hat{z}}{ds}$$

ve

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{1}{2} f^{-1/2}(x) \frac{d\hat{z}}{ds}$$

bulunur. Bu ifadeler (2.8) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{d^2\hat{z}}{ds^2} - \frac{1}{2} \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{f(x)}} \frac{d\hat{z}}{ds} - 2 \frac{q'(x)}{f(x)q(x)} \sqrt{f(x)} \frac{d\hat{z}}{ds} \\ + \left( \frac{1}{f(x)q(x)} q''(x) + (f(x) + q(x)) \frac{1}{f(x)} \right) \hat{z} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada  $q(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{f(x)}}$  den  $f(x) = \frac{1}{q^4(x)}$  olmak üzere  $\in (0, \infty)$  için

$$\begin{aligned} \frac{d^2\hat{z}}{ds^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{-4q^{-5}(s)q'(s)}{q^{-4}(s)q^{-2}(s)} \frac{d\hat{z}}{ds} - 2 \left( \frac{q'(s)q^{-2}(s)}{q^{-4}(s)q(s)} \frac{d\hat{z}}{ds} \right) \right) \\ + \left( \frac{1}{q^{-4}(s)q(s)} q''(s) + \frac{q^{-4}(s) + p(s)}{q^{-4}(s)} \right) \hat{z} = 0 \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} \frac{d^2\hat{z}}{ds^2} + 2q'(s)q(s) \frac{d\hat{z}}{ds} - 2q'(s)q(s) \frac{d\hat{z}}{ds} \\ + \left( \frac{q^4(s)}{q(s)} q''(s) + \left( \frac{1}{q^4(s)} + p(s) \right) q^4(s) \right) \hat{z} = 0 \end{aligned}$$

veya

$$\frac{d^2 \hat{z}}{ds^2} + \left( \frac{q^4(s)}{q(s)} q''(x) + \left( \frac{1}{q^4(s)} + p(s) \right) q^4(s) \right) \hat{z} = 0$$

ya da

$$\frac{d^2 \hat{z}}{ds^2} + [1 + p(s)q^4(s) + q^3(s)q''(s)]\hat{z}(s) = 0 \quad (3.9)$$

ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemi elde edilir.

(2.2) şartı ve  $p(x)/\sqrt{f(x)} \in L^1(I)$  varsayımına göre, sırasıyla

$$q(x)q''(x) \in L^1(I) \text{ ve } p(x)q^2(x) \in L^1(I)$$

ifadelerine sahip oluruz. Dolayısıyla (3.9) un bir çözümü olarak  $\hat{z}(s)$  fonksiyonu

$$\hat{z}(s) = b_1 \sin s + b_2 \cos s + o(1) \quad (3.10)$$

$$\frac{d^2 \hat{z}}{ds^2} = c_1 \sin s + c_2 \cos s + o(1) \quad (3.11)$$

asimptotik davranışını sağlar. Burada sabitler  $b_1, b_2, c_1$  ve  $c_2$  başlangıç koşullarına bağlıdır. Belirtelim ki

$$z = \frac{y(x)}{q(x)}$$

veya

$$y(x) = z(x)q(x)$$

olmak üzere

$$y'(x) = \frac{dz}{dx} \cdot q(x) + z(x) \frac{dq}{dx}$$

$$y'(x) = -\frac{1}{q(x)} \frac{d\hat{z}}{ds} + q'(x)z(x) = -\frac{1}{q(x)} \cdot \left( \frac{d\hat{z}}{ds} + q'(x)z(x) \right) \quad (3.12)$$

ve

$$q(x)q'(x) = -\frac{1}{4} \frac{f'(x)}{\sqrt{f^3(x)}}$$

şeklindedir. (3.3) den

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{\sqrt{f^3(x)}} = 0$$

olduğundan [3, Lemma 6, s.121] bakıldığında ve aynı zamanda  $|z(x)| = |\hat{z}(s)| \leq c$  eşitsizliği (3.10) ve (3.12) ifadeleri ile birlikte dikkate alındığında

$$y'(x) = -\frac{1}{q(x)} \cdot \left( \frac{d\hat{z}}{ds} + q(x)q'(x)z(x) \right) = -\frac{1}{q(x)} \left( \frac{d\hat{z}}{ds} + o(1) \right)$$

olmasını gerektirir. Bu eşitsizlikten ve (3.11) den

$$|y'(x)| \leq \frac{M}{q(x)} = M\sqrt[4]{f(x)}$$

elde ederiz. Burada  $M$ ,  $y(x)$  in başlangıç şartlarına bağlı bir sabittir. Buradan (2.4) ve Lemma 3.1 yardımıyla  $y(x)$  in  $I$  üzerinde rectifiable salınımlı olduğu söylenir.

## 4. BÖLÜM

### $y''(x) + f(x).y(x) = 0$ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN RECTIFIABLE SALINIMLILIĞI

Bu kesimde Teorem 2.2 nin ve Teorem 2.3 ün (ii) sonucunu ispat edilecektir. Yani (2.1) diferensiyel denkleminin unrectifiable salınlı olduğunu gösterilecektir. Bunun için M.Pasic in [9] numaralı çalışmasında yer alan aşağıdaki lemmaya ihtiyacımız vardır.

Şimdi bu lemmayı ifade edelim.

**Lemma 4.1.**  $S_n \in I$ ,  $y'(x)$  in ardışık sıfırlarının dizisi yani her  $n \in \mathbb{N}$  için  $y'(S_n) = 0$  olsun. Eğer  $\sum_n |y(S_n)|$   $\mathbb{R}$  de iraksak bir seri ise  $G(y)$  nin grafiği  $\mathbb{R}^2$  de unrectifiable bir eğridir. [9]

**Teorem 2.4 (ii) sonucunun ispatı.**

$y(x)$ , (2.1) denkleminin aşikar olmayan bir çözümü olsun.

$$g(x) = (f(x))^{-\frac{1}{4}}$$

şeklinde gösterelim. Bu durumda (3.2) den  $x \rightarrow 0$  iken

$$t = h(x) = \int_x^1 g^{-2}(s) ds \rightarrow 0 \quad (4.1)$$

denklemini elde ederiz. Böylece (3.6) dan  $y(x)$  salınlıdır. (3.6) ve (3.7) den

$$y(x) = g(x) \left\{ A \sin \left( \int_x^1 g^{-2}(s) ds + B \right) + o(1) \right\} \quad (4.2)$$

ve

$$y'(x) = \frac{1}{g(x)} \left\{ A \cos \left( \int_x^1 g^{-2}(s) ds + B \right) + o(1) \right\} \quad (4.3)$$

şeklinde yeniden yazılır. Burada A ve B,  $y(x)$  in başlangıç şartları tarafından belirlenen (3.6) ve (3.7) de verildiği gibi  $c_1$  ve  $c_2$  ye bağlı olan sabitlerdir. (4.1) den

$$\int_{x_n}^1 g^{-2}(s) ds + B = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \quad (4.4)$$

olacak şekilde  $\{x_n\}$  azalan dizisini seçebiliriz.  $S_n, x_n$  e en yakın  $y'(x)$  in bir sıfırı olsun. (4.2) ve (4.3) dan

$$\sum |y(S_n)| \geq \sum |y(x_n)| \geq \frac{|A|}{2} \sum g(x_n) \quad (4.5)$$

yazabiliriz. Böylece (4.3) ile birlikte göz önüne alındığında  $y(x)$ ,  $\sum g(x_n)$  ıraksak olduğunu gösterebilirsek, unrectifiable salınımlı olur.

$$\sigma_n \in [x_n, x_{n-1}]$$

olsun.  $[x_n, x_{n-1}]$  aralığı üzerinde maksimum değerini  $\sigma_n$  de alır. Böyle bir maksimum noktadan birden fazla varsa bunlardan herhangi biri seçilebilir. Tanımdan  $[x_n, x_{n-1}]$  de

$$g(\sigma_n) \geq g(x) = \frac{1}{f^{1/4}(x)} \quad (4.6)$$

yazılabiliriz. Burada  $g(x_n)$  ifadesi

$$g(x_n) = g(\sigma_n) - g(\sigma_n) + g(x_n) = g(\sigma_n) - \int_{x_n}^{\sigma_n} g'(x) dx$$

şeklinde yazılabildiğinden

$$g(x_n) = g(\sigma_n) - \int_{x_n}^{\sigma_n} g'(x) dx \geq g(\sigma_n) - \int_{x_n}^{\sigma_n} f^{-5/4}(x) |f'(x)| dx \quad (4.7)$$

elde edilir. Lemma 3.2 den

$$\lim_{x \rightarrow 0} f^{-3/2}(x) f'(x) = 0$$

olduğunu biliyoruz. Bu

$$f^{-3/2}(x) f'(x) \leq \varepsilon$$

olmasını gerektirir. Burada  $f'(x)$  ifadesi yalnız bırakılırsa

$$f'(x) \leq \varepsilon f^{-3/2}(x)$$

elde edilir. Burada eşitsizliğin sağ tarafı  $f^{1/4}(x)$  ile çarpılıp bölünür ve (4.6) eşitsizliği kullanılırsa herhangi bir  $\varepsilon > 0$  olmak üzere her  $x < x_n$  için

$$|f'(x)| \leq \varepsilon f^{3/2}(x) \leq \varepsilon f^{7/4}(x)g(\sigma_n) \quad (4.8)$$

olacak şekilde yeterince büyük  $n$  seçilebilir. (4.7) eşitsizliğinde (4.8) ifadesini yerine koyarsak

$$g(x_n) = g(\sigma_n) - \varepsilon g(\sigma_n) \int_{x_n}^{\sigma_n} f^{1/2}(x) dx$$

elde edilir. Şimdi (4.4) den

$$\int_{x_n}^{\sigma_n} f^{1/2}(x) dx \leq \int_{x_n}^{x_{n-1}} f^{1/2}(x) dx = \pi \quad (4.9)$$

elde edilir.  $\varepsilon = \frac{1}{2\pi}$  seçersek

$$g(x_n) \geq \frac{g(\sigma_n)}{2} \quad (4.10)$$

bulunur. (4.10) denklemini sağlayacak şekilde yeterince büyük  $n_0$  seçilsin. Her  $n \geq n_0$  için

$$\sum_{k=r_0}^n g(\sigma_k) \geq \sum_{k=n_0}^n \frac{1}{\pi} \int_{t_k}^{t_{k+1}} g(h^{-1}(t)) dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{t_{n_0}}^{t_{n+1}} g(h^{-1}(t)) dt = \frac{1}{\pi} \int_{x_{n-1}}^{x_{n_0}} \frac{dx}{g(x)}$$

dır. Son integral, (2.5) şartından  $x_{n-1} \rightarrow 0$  iken iraksaktır. Bu da ispatı tamamlar.

### **Teorem2.3 ün (ii) sonucunun ispatı.**

$y(x)$ , (2.8) denkleminin bir çözümü olsun.

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{f(x)}} \text{ ve } z(x) = \frac{y(x)}{g(x)}$$

olsun. (3.9) denkleminin çözümü  $\hat{z}(s)$  in (3.10) daki asimptotik davranışı sağladığını biliyoruz. Şimdi.

$$t_k = h(x_k) = \int_{x_k}^1 \sqrt{f(x)} dx = \left(\frac{2k+1}{2}\right)\pi \quad (4.11)$$

olacak şekilde  $x_k$  yi seçelim. (3.10) ve (4.11) den  $y'(s_k) = 0$  için

$$\sum_k |y(s_k)| \geq \sum_k |y(x_k)| \geq \frac{|b_1|}{2} \sum_k g(x_k) \geq \frac{|b_1|}{2} \sum_k g(h^{-1}(t_k)) \quad (4.12)$$

elde edilir. (4.5) te (4.12) de denemek için kullanılan aynı argümanları uygulayarak, (4.12) deki

$$\sum_k |y(s_k)|$$

toplamının ıraksamasının

$$\int_0^1 \frac{1}{g(x)} dx$$

integralinin ıraksamasından kaynaklandığını unutmamalıyız. Bu da  $I$  üzerinde  $y(x)$  in unrectifiable salınımlı olduğunu gösterir.

## 5.BÖLÜM

### FRAKTAL SALINIMLAR

Bu kesimde (2.1) denkleminin tüm çözümleri için  $s$ -boyutlu salınımı oluşturulacaktır. Bu da Teorem 2.4 ü ispatlar. İlk olarak aşağıdaki lemmada, (2.1) denkleminin herhangi bir çözümünün sıfırları için alt ve üst sınırlarını vereceğiz.

**Lemma 5.1.** Kabul edelim ki  $f(x)$  Teorem 2.4 ün tüm şartlarını sağlasın.  $y = y(x)$  (2.1) denkleminin bir çözümü olsun.  $a_k \in I$ ,  $a_k \searrow 0$  olacak şekilde  $y$  nin ardışık sıfır noktalarının azalan bir dizisi olsun.

i)  $k \in N$  nin yeterince büyük değerleri için iki pozitif sabit  $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  için

$$\frac{1}{\lambda_2} a_{k+1}^{\alpha/2} \leq a_k - a_{k+1} \leq \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_1}} a_k^{\alpha/2} \quad (5.1)$$

eşitliği vardır.

ii)  $k_0 \in N \cup \{0\}$ ,  $\alpha$  ya bağılı bir sayı ve  $\alpha > 4$  tür öyle ki her  $k \in N$ ,  $k > k_0$  için

$$\left(\frac{m}{(k + k_0)\pi}\right)^{2/(\alpha-2)} \leq a_k \leq \left(\frac{M}{(k + k_0)\pi}\right)^{2/(\alpha-2)} \quad (5.2)$$

yazılabilir, burada  $m = \frac{2\sqrt{\lambda_1}}{\alpha-2}$  ve  $M = \frac{2\sqrt{\lambda_2}}{\alpha-2}$  dir.

**İspat. (5.2)**  $\alpha > 4$  ve  $m$ ,  $M$  ve  $x_\alpha$  pozitif reel sayıları

$$m = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\alpha - 2}$$

ve

$$m = 2M$$

ve

$$x_\alpha = \left( \frac{4M^2(\alpha - 2)^2 - 16\lambda}{\alpha(\alpha - 2)} \right)^{1/(\alpha-2)}$$

ifadelerini sağlasın.  $\alpha > 4$  olduğundan açıktır ki her  $x \in (0, x_\alpha)$  için

$$\frac{m^2(\alpha - 2)^2}{4x^\alpha} - \frac{\alpha(\alpha - 4)}{16x^2} < \frac{\lambda}{x^\alpha} < \frac{M^2(\alpha - 2)^2}{4x^\alpha} - \frac{\alpha(\alpha - 4)}{16x^2} \quad (i)$$

sağlanır. Sonra

$$u(x) = x^{\alpha/4} \sin(m/x^{(\alpha-2)/2}) \text{ ve } v(x) = x^{\alpha/4} \sin(M/x^{(\alpha-2)/2})$$

tarafından verilen  $u = u(x)$  ve  $v = v(x)$  fonksiyonlarının  $x \in (0, x_\alpha) \cap I$  için

$$u'' + \left( \frac{m^2(\alpha - 2)^2}{4x^\alpha} - \frac{\alpha(\alpha - 4)}{16x^2} \right) u = 0 \quad (ii)$$

$$v'' + \left( \frac{M^2(\alpha - 2)^2}{4x^\alpha} - \frac{\alpha(\alpha - 4)}{16x^2} \right) v = 0 \quad (iii)$$

denklemlerini sağlayıp sağlamadığı kontrol etmek kolaydır. Ayrıca,  $u$  ardışık sıfır noktalarının (sırasıyla  $v$ )  $x_k$  dizisinin (sırasıyla  $z_k$ )  $x_k = (m/(k\pi))^{2/(\alpha-2)}$  (sırasıyla  $z_k = (M/(k\pi))^{2/(\alpha-2)}$ ) ile verildiği açıktır.  $k \in N$  olmak üzere  $k \geq k_0$  için  $x_k \in I$  ve  $z_k \in I$  ve  $k \rightarrow \infty$  iken  $x_k \searrow 0$  ve  $z_k \searrow 0$  dir. (i) ifadesindeki sol eşitsizliğe göre ve (ii) ve (2.1) denkleminde Sturm Karşılaştırma Teoremini kullanarak  $u$  nun ardışık iki sıfırı noktası  $x_{k_0+1}$  ile  $x_{k_0}$  arasında en az bir  $y$  sıfır noktası vardır öyle ki  $i_0 \in N$  olmak üzere  $a_{i_0}$  için

$$x_{k_0+1} < a_{i_0} < x_{k_0}$$

elde edilir. Bu kuralı  $u$  nun ardışık sıfır noktaları olan  $x_{k_0+k}$  ile  $x_{k_0+k-1}$  çiftlerine uygularsak, her  $k \geq 1$  için  $x_{k_0+k} < a_{i_0+k-1}$  ifadesini elde ederiz, bu da her  $k \in N$  için

$$\left( \frac{m}{(k + k_0)\pi} \right)^{2/(\alpha-2)} = x_{k_0+k} < a_{i_0+k-1} \leq a_k$$

olduğunu gösterir. Bu da (5.2) nin sol tarafının ispatlar. (ii) deki sağ eşitsizliğe göre (2.1) eşitsizliği ve (iii) de Sturm Karşılaştırma teoremini kullanarak (5.2) nin ispatı ile aynı şekilde  $y$  nin  $a_{k_0+1}$  ile  $a_{k_0}$  iki ardışık sıfırı arasında  $v$  nin en az bir sıfır noktasını bulabiliriz.  $i_0 \in N$  olmak üzere  $z_{i_0}$  için

$$a_{k_0+1} < z_{i_0} < a_{k_0}$$

olacak şekilde bu kuralı tüm

$$a_{k+j} \text{ ile } a_{k+j-1}$$

ardışık sıfır nokta çiftlerine uygularsak her  $j \geq 1$  için

$$a_{k+j} < z_{i_0+j-1}$$

ifadesini elde ederiz.  $k = k_0 + j$  ve her  $k > k_0$  için

$$a_k < z_{k-k_0+i_0-1} \leq \left( \frac{M}{(k+k_0)\pi} \right)^{2/(\alpha-2)}$$

elde edilir. Bu da  $m = 2M$  olduğundan (5.2) nin sağ tarafını ispatlar.

Lemma 3.3 ün bir sonucu olarak aşağıdaki lemmaları verebiliriz.

**Lemma 5.2.**  $f(x)$  Teorem 2.4 ün tüm varsayımlarını sağlasın.  $y(x)$ , (2.1) denkleminin bir çözümü olmak üzere, tüm pozitif  $c$  sabitleri için

$$x \approx 0, \quad |y(x)| \leq cx^{\alpha/4} \text{ ve } |y'(x)| \leq cx^{-\alpha/4}$$

şeklindedir.

Ayrıca bu lemma, (2.1) denkleminin çözümlerinin aşağıdaki atlama(sıçrama) özelliklerinin kanıtlanmasında kullanılabilir.

**Lemma 5.3.**  $f(x)$ , Teorem 2.4 ün tüm varsayımlarını sağlasın.  $S_k \in I$ , (2.1) denkleminin herhangi bir  $y(x)$  çözümlerinin ardışık sabit noktalarından oluşan bir dizi olsun. Bu taktirde  $c$  pozitif bir sabit ve bir doğal sayı her  $k \in N$  için  $k \geq k_0$  olacak şekilde  $k_0 \in N$  sadece  $y(x)$  e bağlı öyle ki

$$|y(S_k)| \geq cS_k^{\alpha/4}$$

şeklindedir.

**İspat.** Eğer  $y(x)$  ve  $z(x)$  (2.1) denkleminin iki bağımsız çözümü ise, tüm  $x \in I$  için

$$W(x) = y(x).z'(x) - z(x).y'(x) = c \neq 0$$

olduğunu biliyoruz. Özel olarak  $x = s_k$  için  $s_k$ ,  $y(x)$  in ardışık sabit noktalarının dizisidir ve

$$W(s_k) = y(s_k) \cdot z'(s_k) = c$$

yani  $k \in N$  için  $|y(s_k)| = |c| \cdot |z'(s_k)|$  şeklindedir.

Lemma 4.2  $z(x)$  çözümüne uygulandığında  $k \geq k_0$  için

$$|y(s_k)| \geq c s_k^{\alpha/4}$$

elde edilir.  $k \geq k_0$  için burada  $k_0$  yeterince büyük olarak seçilir, Lemma 4.2 den dolayı  $s_k$  her  $k \geq k_0$  için yeterince küçüktür.

Tanım 2.2 ile ilgili olarak Teorem 2.4 ün (ii) sonucunu ispatlamak için

$$0 < M^s(G(y)) < \infty \text{ ve } s \leq \dim_M(G(y)) \leq s \quad (5.3)$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermek için yeterlidir, burada  $s = 3/2 - 2/\alpha$  şeklindedir.

**(5.3) de " $>$ " eşitsizliğinin ispatı.**

İlk olarak aşağıdakileri iddia ediyoruz.

$y(x)$ ,  $\bar{I}$  üzerinde sürekli bir fonksiyon ve  $a_k \in I$ ,  $a_k \searrow 0$  olacak şekilde  $y(x)$  in ardışık sıfırlarının azalan bir dizisi olsun. Ayrıca her  $k \geq k(\varepsilon)$  için  $|a_k - a_{k+1}| \leq \varepsilon$  olacak şekilde burada bir doğal sayı var olsun. Bu durumda

$$|G_\varepsilon(y)| \geq \sum_{k \geq k(\varepsilon)} |y(s_k)| (a_k - a_{k+1}), \quad \varepsilon > 0 \quad (5.4)$$

eşitsizliğine sahibiz. Bu gerçek geometrik açıdan çok nettir.

Gerçekten (5.4) eşitsizliğini oluşturmak için  $y = y(x)$  in  $\bar{I} = [0,1]$  aralığında sürekli reel bir fonksiyon olsun. Yani  $y \in C(\bar{I})$  olsun.  $k \in N$  olmak üzere  $a_k \in I$ ,  $k \rightarrow \infty$  iken  $a_k \searrow 0$  olacak şekilde  $y$  nin ardışık sıfırlarının azalan bir dizisi olsun ve  $S_k \in (a_{k+1}, a_k)$ ,  $k \in N$  olmak üzere  $y$  nin ardışık sabit noktalarının dizisi olsun.  $a_k$  dizisindeki her  $k \geq k(\varepsilon)$  için

$$|a_k - a_{k+1}| \leq \varepsilon \quad (i)$$

olacak şekilde  $k(\varepsilon)$  gibi bir doğal sayının var olmasıdır.

$$z(x) = |y(x)|$$

olsun. İddia ediyoruz ki

$$B_k = [a_{k+1}, a_k] \times [0, z(S_k)]$$

kapalı kutusu (closed box) her  $k \geq k(\varepsilon)$  için

$$B_k \subseteq G_\varepsilon \left( Z_{|_{[a_{k+1}, a_k]}} \right) \leq \varepsilon \quad (\text{ii})$$

kapsamasını sağlasın. Burada

$$Z_{|_{[a_{k+1}, a_k]}}$$

$z(x)$  in  $[a_{k+1}, a_k]$  aralığı üzerindeki kısıtlamasını gösterir. (ii) yi ispatlamak için

$$G_\varepsilon \left( Z_{|_{[a_{k+1}, a_k]}} \right)$$

nin tanımıyla herhangi bir  $(x_0, y_0) \in B_k$  noktası ve her  $k \geq k(\varepsilon)$  için

$$d \left( (x_0, y_0), G \left( Z_{|_{[a_{k+1}, a_k]}} \right) \right) \leq \varepsilon \quad (\text{iii})$$

doğru olduğunu göstermek yeterlidir. Gerçekten de  $L_k$

$$L_k = \{(x, y) : x \in [a_{k+1}, a_k], \quad y = y_0\}$$

ile tanımlanan yatay bir çizgi olsun. Açıktır ki  $(x_0, y_0) \in L_k$  dır.

$z(a_{k+1}) = z(a_k) = z'(S_k) = 0$  ve  $z \in C([a_{k+1}, a_k])$  olduğundan

$$L_k \cap G \left( Z_{|_{[a_{k+1}, a_k]}} \right) \neq \emptyset$$

olduğu açıktır. Yani

$$(x_*, y_0) \in L_k \cap G \left( Z_{|_{[a_{k+1}, a_k]}} \right)$$

olacak şekilde  $x_* \in [a_{k+1}, a_k]$  noktası vardır. (i) nin yardımıyla

$$\begin{aligned} d \left( (x_0, y_0), G \left( Z_{|_{[a_{k+1}, a_k]}} \right) \right) &\leq d((x_0, y_0), (x_*, y_0)) = |x_* - x_0| \\ &\leq |a_{k+1} - a_k| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

(iii) olduğunu gösterir. Böylece (ii) gösterilmiş olur. Şimdi (ii) den arzu edilen istenen (5.4) eşitsizliğini

$$\sum_{k \geq k(\varepsilon)} |y(S_k)| (a_k - a_{k+1}) = \sum_{k \geq k(\varepsilon)} |B_k| = \left| \bigcup_{k \geq k(\varepsilon)} B_k \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq \left| \bigcup_{k \geq k(\varepsilon)} G_\varepsilon \left( Z_{[a_{k+1}, a_k]} \right) \right| \leq \left| G_\varepsilon \bigcup_{k \geq k(\varepsilon)} \left( Z_{[a_{k+1}, a_k]} \right) \right| \\ &\leq \left| G_\varepsilon \left( y_{[0, a_{k(\varepsilon)}]} \right) \right| \leq |G_\varepsilon(y)| \end{aligned}$$

şeklinde ifade edelim. Burada  $B_k$  nın içi ayırık cümlelerdir ve her  $k \in N$  için

$$G_\varepsilon \left( Z_{[a_{k+2}, a_{k+1}]} \right) \cup G_\varepsilon \left( Z_{[a_{k+1}, a_k]} \right) \circ C \subseteq G_\varepsilon \left( Z_{[a_{k+2}, a_k]} \right)$$

olduğu kullanılmıştır. Daha sonra  $y(x)$ , (2.1) denkleminin çözümü olsun.  $a_k \in I$ ,  $a_k \searrow 0$  olacak şekilde  $y(x)$  in ardışık sıfırlarının bir dizisi olsun. Yeterince büyük bir doğal sayı olan  $k_0$  ı seçebiliriz öyle ki (2.11) den her  $x \in (0, a_{k_0})$  için

$$0 < \lambda_1 = \frac{\lambda}{2} \leq x^\alpha f(x) \leq 2\lambda = \lambda_2 \quad (5.5)$$

eşitsizliği yazabiliriz. Ve  $k \geq k_0$  için (5.11) ve (5.12) sonuçları sağlanır. Şimdi, Lemma5.3 ile birlikte (2.2), (5.1) ve (5.4) şartları altında  $|G_\varepsilon(y)|$ ,  $c_1, c_2 > 0$  uygun sabitleri için

$$\begin{aligned} |G_\varepsilon(y)| &\geq \sum_{k \geq k(\varepsilon)} |y(s_k)| (a_k - a_{k+1}) \geq c_1 \sum_{k \geq k(\varepsilon)} s_k^{1/4} \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} a_{k+1}^{\alpha/2} \\ &\geq c_2 \sum_{k \geq k(\varepsilon)} a_{k+1}^{3\alpha/4} \end{aligned} \quad (5.6)$$

şeklinde bulabiliriz. Burada  $k(\varepsilon) \geq k_0$  daha sonra seçilecektir.

$$m_1 = \frac{2\sqrt{\lambda_1}}{\alpha - 2}, \quad c_0 = \frac{2m_1}{\pi} \left( \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda_1}} \right)^{\frac{\alpha-2}{\alpha}} \text{ ve } \varepsilon_0 = \left( \frac{c_0}{2k_0 + 2} \right)^{\frac{\alpha-2}{\alpha}}$$

olsun.  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  için

$$c_0 \varepsilon^{\frac{-\alpha-2}{\alpha}} + k_0 < k(\varepsilon) < 2c_0 \varepsilon^{\frac{-\alpha-2}{\alpha}} - k_0 - 1 \quad (5.7)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde öyle bir  $k(\varepsilon)$  doğal sayısı vardır. (5.2) ve (5.7), (5.6) de kullanılırsa  $c_3 > 0$  olmak üzere  $\alpha > 4$  ve  $c > 0$  ve  $H > 1$  için

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(k+j)^H} \geq \frac{C}{(n+j)^{H-1}}$$

eşitsizliği göz önüne alınırsa (5.6) dan

$$|G_\varepsilon(y)| \geq c_3 \left( \frac{1}{k(\varepsilon) + k_0 + 1} \right)^{\frac{3}{2} \left( \frac{\alpha-2}{\alpha} \right) - 1}$$

veya

$$|G_\varepsilon(y)| c_3 \varepsilon^{2 \frac{3}{2} \frac{\alpha-2}{\alpha}} = c_3 \varepsilon^{\frac{1}{2} + \frac{2}{\alpha}}$$

elde edilir. Buradan sahip olduğumuz

$$M^s(G(y)) > 0 \text{ ve } \dim_M(G(y)) \geq s = \frac{3}{2} - \frac{2}{\alpha} \quad (5.8)$$

değerleri ile birlikte (5.3) deki eşitsizliğin sol tarafı ispatlanır.

**(5.3) de " < " eşitsizliğinin ispatı.**

İlk önce yukarıdaki  $G_\varepsilon(y)$  yi üç parçaya ayrılmış şekilde alalım.

$$G_\varepsilon(y) = G_\varepsilon(y_{I_1}) \cup G_\varepsilon(y_{I_2}) \cup G_\varepsilon(y_{I_3})$$

olsun, burada  $y_{I_i}$ ,  $I_i \subseteq \bar{I}$  üzerinde  $y(x)$  in kısıtlamasını gösterir. Burada  $I_i$  ler

$$I_1 = [0, a_{k(\varepsilon)}], \quad I_2 = [a_{k(\varepsilon)}, a_{k_0}] \text{ ve } I_3 = [a_{k_0}, 1]$$

şeklinde tanımlanır.

Burada  $a_{k_0}$ , (5.1), (5.2) ve (5.5) i sağlayacak şekilde seçilir.  $a_k(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ a bağlı olarak seçilmelidir.  $L_G(y_{I_i})$ ,  $I_i$  aralığı üzerinde  $y(x)$  in yay uzunluğunu gösterebilir,  $i=1,2,3$ . Buna göre

$$\begin{aligned} |G_\varepsilon(y)| &= |G_\varepsilon(y_{I_1})| + \varepsilon(L_G(y_{I_2}) + L_G(y_{I_3})) \\ &\leq |G_\varepsilon(y_{I_1})| + \varepsilon L_G(y_{I_2}) + \varepsilon M_0 \end{aligned}$$

burada  $M_0$ ,  $[a_{k_0}, 1]$  üzerindeki  $y(x)$  in sonlu yay uzunluğu olmak üzere  $\varepsilon > 0$  ve  $\varepsilon < a_{k_0}$  verilsin.  $a_{k(\varepsilon)} < \varepsilon$  ve  $k(\varepsilon)$  yeterince büyük seçelim. (5.7) eşitsizliği dikkate alındığında Lemma 5.1 de (5.1) ve (5.2) eşitsizliklerinden dolayı

$$\frac{1}{k(\varepsilon) - k_0} \leq \varepsilon^{\frac{\alpha-2}{\alpha}} \quad (5.9)$$

eşitsizliği yazılabilir. Yani (5.2), (5.7), (5.9) ve Lemma 5.2 nin yardımıyla  $\alpha \geq 4$  ve bazı uygun  $K_1 > 0$  sabitleri için

$$\begin{aligned} |G_\varepsilon(y_{I_1})| &\leq 2(a_{k(\varepsilon)} + 2\varepsilon)(|y(s_{k(\varepsilon)})|) + \varepsilon \leq 6\varepsilon(a_{k(\varepsilon)}^{\alpha/4} + \varepsilon) \\ &\leq K_1 \varepsilon^{\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\alpha}\right)} \end{aligned} \quad (5.10)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} |G_\varepsilon(y_{I_2})| &\leq \sum_{k=k_0}^{k(\varepsilon)} \varepsilon(2|y(s_k)| + a_k - a_{k-1}) \\ &\leq K_2 \varepsilon \sum_{k=k_0}^{k(\varepsilon)} 2a_k^{\alpha/4} + a_k^{\alpha/2} \\ &\leq K_3 \varepsilon \sum_{k=k_0}^{k(\varepsilon)} a_k^{\alpha/4} \end{aligned} \quad (5.11)$$

eşitsizliğinde  $K_3 > 0$  başka uygun pozitif sabit olmak üzere ikinci terim birinci terimden daha büyük yapılabilir. (5.11) ve (5.12) ile birlikte

$$\begin{aligned} |G_\varepsilon(y_{I_2})| &\leq K_3 \varepsilon \sum_{k=k_0+1}^{k(\varepsilon)} \left(\frac{1}{k - k_0}\right)^{\frac{\alpha}{2(\alpha-2)}} \\ &\leq K_4 \varepsilon \left(\frac{1}{k(\varepsilon) - k_0}\right)^{\frac{\alpha}{2(\alpha-2)} - 1} \end{aligned} \quad (5.12)$$

yazabiliriz. Çünkü  $\alpha \geq 4$  olduğundan  $\frac{\alpha}{2(\alpha-2)} \leq 1$  dir. (5.9) ifadesini (5.12) de kullanarak

$$|G_\varepsilon(y_{I_2})| \leq K_4 \varepsilon^{1 + \frac{4-\alpha}{2\alpha}} = K_4 \varepsilon^{\frac{1}{2} + \frac{2}{\alpha}} \quad (5.13)$$

elde edilir. (5.10) ve (5.13) ü birleştirirsek

$$|G_\varepsilon(y)| \leq \varepsilon M_0 + K_1 \varepsilon^{\frac{1+2}{\alpha}} + K_4 \varepsilon^{\frac{1+2}{\alpha}} \leq K_5 \varepsilon^{\frac{1+2}{\alpha}}$$

eşitsizliğini buluruz. Bu da  $\alpha \geq 4$  iken  $\frac{1}{2} + \frac{2}{\alpha} \leq 1$  olduğundan

$$M^s(G(y)) < \infty \text{ ve } \dim_M(G(y)) \leq s = \frac{3}{2} - \frac{2}{\alpha} \quad (5.14)$$

gerektirir. Buradan (5.3) ün sağ eşitsizliğinin ispatı elde edilmiş olur.

Dolayısıyla (5.8) ve (5.14) eşitsizlikleri ile Teorem 2.4 ün (ii) sonucunu ispatlayan (5.3) bulunur. Teorem 2.4 ün (i) sonucunun ispatlanması ile ilgili olarak  $2 < \alpha < 4$  olduğunda Teorem 2.5 in (i) sonucundan  $y(x)$  in  $I$  üzerinde (2.1) denkleminin rectifiable salınımlı çözümü olduğunu söyleyebiliriz ve buradan

$$\dim_M G(y) = 1 \text{ ve } 0 < M^1(G(y)) < \infty$$

olduğu görülür. Böylece Teorem 2.4 ün ispatı tamamlanır.

## 6. BÖLÜM

### RECTIFIABLE VE UNRECTIFIABLE SALINIMLARIN BİR ARADA BULUNMASI

Bu kesimde  $I$  aralığındaki çözümü (bir sabite kadar) rectifiable salınımlı olacak şekilde lineer bir diferansiyel denklem örneği vereceğiz, fakat diğer tüm bağımsız çözümleri  $I$  üzerinde unrectifiable salınımlıdır. Bu Teorem 2.5 in (iii) sonucunu ispatlıyor.

**Örnek 5.1.**  $y(x)$ ,  $[0,1]$  de tanımlı bir fonksiyon olsun.  $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$  için

$$y(x) = \frac{1}{2} \sin((2x - 1)\pi)$$

ve  $x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$  için

$$y(x) = -\frac{1}{4} \sin((4x - 1)\pi)$$

şeklinde tanımlanmış bir çözüm olsun. Dolayısıyla  $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$  aralığında  $y(x) < 0$  ve  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  aralığında  $y(x) > 0$  iken

$$y\left(\frac{1}{4}\right) = y\left(\frac{1}{2}\right) = y(1) = 0$$

elde edilir.

$y'(x)$ , bu iki aralığın  $x = \frac{1}{2}$  kesişiminde süreklidir. Genel olarak her  $x \in \left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right]$  ve  $n \in \mathbb{N}$  için

$$y(x) = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \sin((2^{n+1}x - 1)\pi)$$

şeklindedir. Burada  $y(x)$ ,  $x \in I$  için

$$y''(x) + f(x)y(x) = 0$$

denklemini sağlayan bir salınımlı çözümdür, burada  $f(x)$   $n \in \mathbb{N}$  olmak üzere

$$f(x) = 2^{2(n+1)}\pi^2 > 0 \text{ tüm } x \in \left[ \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n} \right]$$

şeklinde tanımlanan bir adım(step) fonksiyonudur.

$f(x)$  in sürekli bir fonksiyon olmadığı açıktır. Fakat  $y(x)$  her bir süreksizlik noktasında  $1/2^n$  nin

$$(1/2^n - \varepsilon_n, 1/2^n)$$

şeklindeki yakın bir sol komşuluğunda  $y(x)$  düzenlemesini yapmak çok kolaydır.

Dolayısıyla

$$y''(x) + f(x)y(x) = 0$$

denkleminde sürekli bir katsayı olan  $f(x)$  elde edilir ve burada  $y'(x)$   $x = 1/2$  noktalarının her birinde sürekli olmalıdır. Yani her bir  $x = 1/2$  için  $y'(1/2^n) = \pi$  şeklindedir.

Her salınım aralığında  $y(x)$  eğrisi ya iç bükey ya da dış bükey olduğu için

$$y'(x) \leq \pi$$

söylenir. Böylece  $y'(x)$ ,  $I$  üzerinde integrallenebilir ve Lemma 2.1 ile  $y(x)$  çözümünün  $I$  üzerinde rectifiable salınımlı olduğu söylenir.

Genel olarak,  $y$ , her bir salınım aralığında ( $y$  nin işaretine bağlı olarak) ya konveks(dış bükey) ya da konkav(iç bükey) olacak şekilde  $0$  civarında salınımlı olan  $I$  aralığı üzerinde tanımlı  $C^2$  deki herhangi bir  $y(x)$  fonksiyonunu alabiliriz burada  $y'(x)$  sınırlı ve  $y(x)$ ,  $f(x)$  pozitif katsayılı  $y'' + f(x)y(x) = 0$  denklemini sağlar. Bu taktirde  $y(x)$ ,  $I$  üzerinde rectifiable salınımlıdır.

Şimdi  $z(x)$ ,  $y(x)$  den bağımsız bir çözüm olsun, böylece

$$W(x) = z(x).y'(x) - z'(x)y(x) = 1$$

(yukarıdaki Lemma 4.3 ün ispatına bakınız).  $z(x)$  in  $x = s_k$  kritik noktasında  $z'(s_k) = 0$  iken  $W(x) = z(s_k)y'(s_k) = 1$  dir. Buradan  $z(s_k) = 1/y'(s_k)$  olduğu söylenir.

$|y'(x)|$  üstten sınırlı olduğundan  $\sum |z(s_k)| = \infty$  ve Lemma 3.1 den  $z(x)$  çözümü  $I$  üzerinde unrectifiable salınımlıdır. İki rectifiable salınımlı fonksiyon olan  $y_1$  ve  $y_2$  nin

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

lineer kombinasyonu aynı zamanda  $I$  üzerinde rectifiable salınımlı olduğundan  $c \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $cy(x) \in \mathbb{R}$  fonksiyonunun  $I$  üzerinde rectifiable salınımlı olduğunu fakat  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}, c_2 \neq 0$  olmak üzere

$$c_1 y(x) + c_2 z(x)$$

fonksiyonunun  $I$  üzerinde unrectifiable salınımlı olduğunu söyleyebiliriz. Böylece lineer diferansiyel denklemlerin rectifiable ve unrectifiable salınımları arasındaki ilişkiyi gösterir.

## KAYNAKLAR

1. H.O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe, Chaos and Fractals. New Frontiers of Science, Springer-Verlag, 1992
2. M. Pašić, Minkowski-Bouligand dimension of solutions of the one-dimensional  $p$ -Laplacian, *J. Differential Equations* 190 (2003) 268-305.
3. W.A. Coppel, Stability and Asymptotic Behaviour of Differential Equations, Heath, Boston, MA, 1965.
4. P. Hartman, Ordinary Differential Equations, second ed., Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart, 1982.
5. L.C. Evans, R.F. Gariepy, Measure Theory and Fine Properties of Functions CRC Press, New York, 1999.
6. K.J. Falconer, Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications, Wiley, 1999.
7. W.T. Reid, Sturmian Theory for Ordinary Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1980.
8. C.A. Swanson, Comparison and Oscillation Theory of Linear Differential Equations, Academic Press, New York, 1968.
9. M. Pašić, Rectifiable and unrectifiable oscillations for a class of second-order linear differential equations of Euler type, **J. Math. Anal. Appl.** **335** (2007) 724-738.
10. J.S.W. Wong, On rectifiable oscillation of Euler type second order linear differential equations, **Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.** **20** (2007) 1-12.
11. J. Jaroš, Takasi, On black hole solutions of second order differential equations with a singular nonlinearity in the differential operator, **Funkcial. Ekvac.** **43** (2000) 491-509.
12. S. Jaffard, Y. Meyer, Wavelet methods for pointwise regularity and local oscillations of functions, **Mem. Amer. Math. Soc.** **123** (1996) 1-110.
13. M. Pašić, Rectifiable and unrectifiable oscillations for a generalization of the Riemann-Weberversion of Euler differential equations, *Georgian Math. J.*, in press.

14. P. Mattila, *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces. Fractals and Rectifiability*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
15. C. Tricot, *Curves and Fractal Dimension*, Springer-Verlag, 1995.
16. M. Pašić, Fractal oscillations for a class of second-order linear differential equations of Euler type, **J. Math. Anal. Appl.** **341** (2008) 211-223.
17. K.J. Falconer, On the Minkowski measurability of fractals, **Proc. Amer. Math. Soc.** **123** (1995) 1115-1124
18. M.L. Lapidus, Fractal drum, inverse spectral problems for elliptic operators and a partial resolution of the Weyl-Berry conjecture, **Trans. Amer. Math. Soc.** **325** (1991) 465-529
19. M.L. Lapidus, M. van Frankenhuysen, *Fractal Geometry and Number Theory, Complex Dimensions of Fractal Strings and Zeros of Zeta Functions*, Birkhäuser, 2000.
20. D. Žubrinić, V. Županović, Fractal analysis of spiral trajectories of some planar vector fields, **Bull. Sci. Math.** **129** (2005) 457-485.

## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

**Adı Soyadı:** Zübeyde ARIK  
**Uyruğu:** Türkiye (T.C)  
**Doğum Tarihi ve Yeri:** 25.09.1990 - Kocasinan  
**Medeni Durum:** Bekar  
**e-mail:** arikzubeyde@gmail.com  
**Yazışma Adresi:** arikzubeyde@gmail.com

### EĞİTİM

Derece	Kurum	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Erciyes Üniversitesi, Matematik	2013
Lise	Kocasinan Anadolu Lisesi, Kayseri	2009

### İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görev
2016-Halen	KAYMEK-Kayseri Mesleki Eğitim ve Kültür A.Ş.	Eğitmen

### YABANCI DİL

İngilizce