

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KUATERNİYONLARIN TEMSİL METOTLARI

Büşra KOÇAY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2019

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

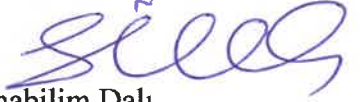
Büşra KOÇAY tarafından hazırlanan “**Kuaterniyonların Temsil Metotları**” adlı tez çalışması 24/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. İsmail GÖK
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı



Jüri Üyeleri:

Başkan: Prof. Dr. Sıddıka ÖZKALDI KARAKUŞ
Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı



Üye : Prof. Dr. Yusuf YAYLI
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı



Üye : Doç. Dr. İsmail GÖK
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı



Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Özlem YILDIRIM
Enstitü Müdür Vekili

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

24/06/2019



Büşra KOÇAY

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KUATERNİYONLARIN TEMSİL METOTLARI

Büşra KOÇAY

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. İsmail GÖK

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, tezin ilerleyen bölümlerinde kullanacağımız bazı temel tanımlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, kuaterniyonlar için kutupsal form incelenmiş, bazı temsil metotlarına yer verilmiş ve yaprak parametresi tanımlanmıştır.

Son bölümde ise hibrit sayıların genel özellikleri verilmiş ve hibrit sayılar için yaprak parametresi kavramına yer verilmiştir. Ayrıca hibrit sayılar için yeni bir polar form elde edilmiştir.

Haziran 2019, 53 sayfa

Anahtar Kelimeler: Kompleks Sayılar, Hiperbolik Sayılar, Dual Sayılar, Kuaterniyonlar, Hibrit Sayılar, Yaprak Parametresi, Polar Temsiller

ABSTRACT

Master Thesis

REPRESENTATION METHODS OF QUATERNIONS

Büşra KOÇAY

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. İsmail GÖK

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter is devoted to the introduction.

The second chapter, some fundamental concepts which are going to be used in the following parts were explained.

In the third chapter, for quaternions, the polar form has been examined and some representative methods are included and the Leaf parameter is defined.

In the last chapter, the general properties of hybrid numbers are given and the concept of leaf parameter is given for hybrid numbers. Furthermore, a new polar form is obtained for hybrid numbers.

June 2019, 53 pages

Key Words: Complex Numbers, Hyperbolic Numbers, Dual Numbers, Quaternions, Hybrid Numbers, Leaf Parameter, Polar Representation

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunda, çalışmalarım boyunca yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen hocam, Sayın Doç. Dr. İsmail GÖK (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'e en içten saygı ve minnetlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitimine başladığım andan itibaren bana desteğini esirgemeyen Sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'ya , Sayın Prof. Dr. F. Nejat EKMEKÇİ (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'ye en içten teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın tüm aşamalarında beni yalnız bırakmayan ve destekleyen aileme, tüm dostlarıma sonsuz teşekkürler ederim.

Büşra KOÇAY
Ankara, Haziran 2019

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
3. KUATERNİYONLAR İÇİN YENİ TEMSİL METOTLARI VE YAPRAK PARAMETRELENDİRMESİ	15
3.1 Yaprak Parametrelendirmesi	15
3.1.1 Bir yaprak üzerinde çarpma	15
3.1.2 Yaprak üzerinde kompleks yapı	17
3.1.3 Farklı yapraklar üzerinde çarpma	17
3.2 Kuaterniyonlar İçin Yeni Polar Gösterimler	19
3.3 Split Kuaterniyonlar İçin Yeni Polar Gösterimler	27
4. HİBRİT SAYILAR	31
4.1 Hibrit Sayıların Genel Özellikleri	31
4.2 Hibrit Sayıların Matris Temsilleri	36
4.3 Hibrit Sayıların Kutupsal Gösterimleri	37
4.4 Hibrit Sayılar İçin Euler Formülleri	39
4.5 Hibrit Sayıların Yaprak Üzerindeki Cebirsel Yapısı	39
4.5.1 Hibrit sayıların yaprak üzerindeki değişmeli çarpımı	40
4.5.2 Kesilmiş hibrit sayıların yaprak üzerindeki kompleks yapısı ..	41
4.6 Hibrit Sayıların Yaprak Üzerindeki Yeni Kutupsal Formu	43
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	50
KAYNAKLAR.....	51
ÖZGEÇMİŞ	53

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{C}$	Kompleks uzay
$\mathbb{D}$	Dual uzay
$\mathbb{H}$	Hibrit uzay
Q	Reel kuaterniyon
Q'	Split kuaterniyon



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1	Kompleks Argüment	4
Şekil 1.2	Hiperbolik Argüment	8
Şekil 3.1	Farklı yapraklar üzerinde çarpma	18
Şekil 4.1	Hibrit koordinat sistemi	34



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 1.1 Kuaterniyon çarpımı	10
Çizelge 1.2 Split kuaterniyon çarpımı	12
Çizelge 4.1 Hibrit sayıların çarpımı	33
Çizelge 4.2 Hibrit sayıların vektörel çarpımı	35
Çizelge 1.2 Hibrit sayılar için Euler formülleri	39



1. GİRİŞ

1830' larda kompleks sayılardaki çarpma işlemine benzer bir çarpma $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayının üçlülere için William Rowan Hamilton tarafından araştırıldı, fakat bu çarpmada normun korunması mümkün olmuyordu. 1843 yılında Hamilton bu fikrin $\mathbb{R}^3$ uzayında değil, $\mathbb{R}^4$ reel vektör uzayında mümkün olabileceğini farkettiler ve reel kuaterniyonları tanımladı (Lancsoz 1967). Bu tanımlamadan sonra ise $\mathbb{R}^8$ reel vektör uzayında Cayley sayıları ile kompleks sayılar arasında benzer ilişkiler araştırılmıştır. Cayley sayıları üzerinde tanımlanan çarpma işleminin, birleşme ve değişme özelliklerini sağlamadığı görülmüştür. Kuaterniyonlar, kinematikte hareketlerin incelenmesi bakımından önemli bir rol oynamaktadır.

Split kuaterniyonlar ise 1849 yılında James Cockie tarafından ortaya atılmıştır. Hamilton ve Cockie, çarpım operatörleri ile belirlenmiş dört boyutlu reel vektör uzayı oluşturmuşlardır. Kuaterniyonlardan farklı olarak split kuaterniyonlar sıfır bölünleli olabilmektedirler (Soydaş 2003). Dual sayılar 1873 yılında William Clifford tarafından tanımlanmıştır. Dual sayılar kuantum mekaniği ve klasik vida mekaniği gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Reel ve dual kuaterniyonlar ile sağladıkları özellikler Hacısalihoğlu tarafından "Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi" kitabında ayrıntılı bir şekilde yer almaktadır (Hacısalihoğlu 1983). Ayrıca, birim dual kuaterniyonlardan faydalanarak kayma ve dönme operatörleri tanımlanabilir.

Kuaterniyonların temsil biçimlerinden birisi de polar temsidir. Polar temsiller birçok problemin çözümünde kolaylık sağlamaktadır. Son yıllarda Sangwine ve Le Bihan (Sangwine ve Le Bihan 2010) ile Ali Atasoy (Atasoy vd 2017) ve arkadaşları kuaterniyonların bazı yeni polar temsillerini ifade etmiş, bazı karakterisasyonlar vermişlerdir. Bir kuaterniyonu sıralı ikililerle ifade etmek mümkün olabildiği gibi yaprak gösterimleri ile sıralı üçlülerle de ifade etmek mümkündür.

Pfaff (Pfaff 2000), kuaterniyon çarpımını kullanarak üç boyutlu reel vektör uzayında sayı üçlülerinin değişmeli çarpımının bazı özelliklerini vermiştir ve yaprak parametresinden bahsetmiştir. Kula ve Yaylı (Kula ve Yaylı 2006) ise dual kuater-

niyonlar üzerindeki çarpma işleminden yararlanarak dual sayı üçlülerinin değişmeli çarpımını ifade etmişlerdir ve bu çarpımın yeni bir temsilini matris gösterimi ile elde etmişlerdir.

Mustafa Özdemir (Özdemir 2018) değişmeli olmayan yeni bir sayı sistemi tanımladı ve tanımladığı bu sayılar cebirsel olarak kompleks, dual ve hiperbolik sayıların kombinasyonlarını içerdiği için "Hibrit Sayılar" olarak adlandırıldı. Aynı çalışmada bu sayıların cebirsel ve geometrik özelliklerini inceledi.

Biz bu çalışmada, kuaterniyonlar üzerine yapılan bu tanımlamaları ve temsil biçimlerini kapsamlı bir şekilde ele alacağız. Ayrıca yaprak parametrisasyonu ile bilinen kuaterniyonların yaprak temsillerini (sıralı üçlüler) vereceğiz. Bununla birlikte yaprak temsillerinin hibrit sayılar içinde incelenmesi yapılmıştır. Konuların daha anlaşılır bir hale gelmesi için tüm bu kavramlar örneklerle desteklenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm, tezin 2., 3. ve 4. bölümlerinde kullanılacak olan kavramların açıklamalarına ayrılmıştır.

Tanım 2.1 (Kompleks Sayı) $a, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere (a, d) sıralı ikililerine

kompleks sayı denir. Burada a , z kompleks sayısının reel kısmı, ve d , z kompleks sayısının imajiner kısmıdır,

$$\operatorname{Re} z = a$$

ve

$$\operatorname{Im} z = d$$

şeklinde gösterilmektedir. Kompleks sayılar cümlesi üzerinde temel işlemler aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır. $a_1, a_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

Eşitlik: $(a_1, d_1) = (a_2, d_2) \iff a_1 = a_2, d_1 = d_2$

Toplama: $(a_1, d_1) + (a_2, d_2) = (a_1 + a_2, d_1 + d_2)$

Çarpma: $(a_1, d_1) (a_2, d_2) = (a_1 a_2 - d_1 d_2, a_1 d_2 + d_1 a_2)$

Buna göre $z = (a, d)$ kompleks sayısı

$$\begin{aligned} z &= (a, d) = (a, 0) + (0, d) \\ &= (a, 0) + (0, 1)(d, 0); i = (0, 1) \\ &= a + id \end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir.

Kompleks sayılar kümesi

$$\mathbb{C} = \{a + id : a, d \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

ile gösterilir. Geometrik olarak bir $z = a + di$ kompleks sayısını $\mathbb{R}^2$ düzlemi veya xoy düzleminde bir (a, d) noktası ile eşleyebiliriz. Bu durumda xoy düzlemine kompleks düzlem, a eksenine **reel eksen** ve d eksenine **imajiner eksen** denir.

Eşlenik: Herhangibir $z = a + di$ kompleks sayısının **eşleniği** $\bar{z}$ ile ifade edilir ve

$$\bar{z} = a - di$$

olarak tanımlanır. z ve $\bar{z}$ sayıları x eksenine göre simetrik olmaktadır.

Modül: Herhangibir $z = a + di$ kompleks sayısının **modülü** $|z|$ ile ifade edilir ve

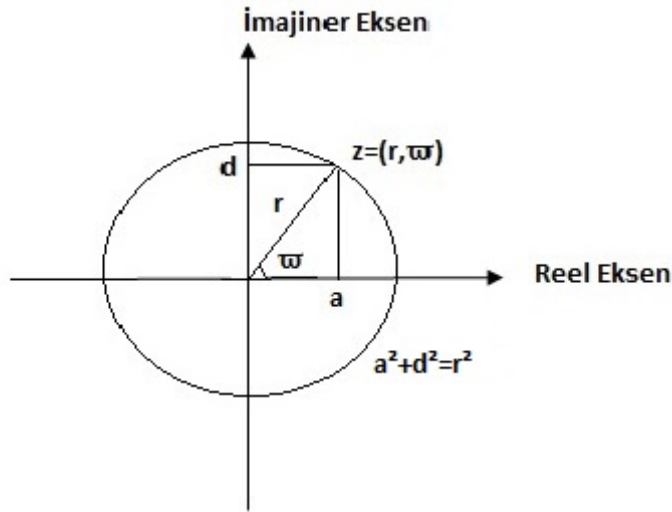
$$|z| = \sqrt{a^2 + d^2}$$

ile hesaplanır. Yani bir kompleks sayının modülü $z = (a, d)$ noktasının orijine olan uzaklığıdır.

Polar Form: $z = a + di$ kompleks sayısının pozitif reel eksenle yapmış olduğu açı ϖ olsun. $\cos \varpi = \frac{a}{|a + di|}$ ve $\sin \varpi = \frac{d}{|a + di|}$ olup buradan

$$z = |z| (\cos \varpi + i \sin \varpi)$$

polar formu elde edilir. Burada $r = |z|$ olmak üzere $a = r \cos \varpi$ ve $d = r \sin \varpi$ olduğu açıktır. Bu takdirde ϖ açısına $a + di$ kompleks sayısının **argümenti** denir ve $\arg z$ ile gösterilir.



Şekil 1.1 Kompleks Argüment

Euler Formülü: $\varpi \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$e^{i\varpi} = \cos \varpi + i \sin \varpi$$

formülüne **Euler formülü** denir. Euler formülü yardımıyla z kompleks sayısı

$$z = |z| (\cos \varpi + i \sin \varpi) = r (\cos \varpi + i \sin \varpi) = r e^{i\varpi}$$

şeklinde yazılır.

Bir Kompleks Sayının Tersisi: $z = a + di$ kompleks sayısının **tersi** z^{-1} ile gösterilir ve

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + d^2}, \frac{-d}{a^2 + d^2} \right), (z \neq 0)$$

ile hesaplanır (Churchill ve Brown 1984).

Kompleks Sayıların Matris Gösterimi: $z = a + id$ kompleks sayısının **matris gösterimi**

$$a + di \longleftrightarrow \begin{bmatrix} a & d \\ -d & a \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Ayrıca kompleks birim $i \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ dir. Kompleks sayılar için Euler formüllerini matris gösterimleri ile ifade edecek olursak;

$$\cos \varpi + i \sin \varpi = \exp \begin{bmatrix} 0 & \varpi \\ -\varpi & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varpi & \sin \varpi \\ -\sin \varpi & \cos \varpi \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Ayrıca bu matris Öklid düzlemindeki dönme matrisine karşılık gelmektedir (Kisil 2013).

Tanım 2.2 (Dual Sayı) $d, d^* \in \mathbb{R}$ olmak üzere (d, d^*) sıralı ikilileri şeklinde tanımlanan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ cümlesi $\mathbb{D}$ ile gösterilsin,

$$\mathbb{D} = \{(d, d^*) : d, d^* \in \mathbb{R}\}$$

cümlesi üzerinde $d, d^*, e, e^* \in \mathbb{R}$ olmak üzere temel işlemler aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Eşitlik: $(d, d^*) = (e, e^*) \iff d = e, d^* = e^*$

Toplama: $(d, d^*) + (e, e^*) = (d + e, d^* + e^*)$

Çarpma: $(d, d^*)(e, e^*) = (de, de^* + d^*e)$

Bu şekilde tanımlanmış $\mathbb{D}$ cümlesine dual sayılar sistemi ve $\forall (d, d^*) \in \mathbb{D}$ elemanına da bir **dual sayı** denir. Dual sayılar cümlesi

$$\mathbb{D} = \{d + \varepsilon d^* : d, d^* \in \mathbb{R}, \varepsilon^2 = 0\}$$

ile gösterilir.

Eşlenik: Herhangibir $z = d + \varepsilon d^*$ dual sayısının **eşleniği** $\bar{z}$ ile gösterilir ve

$$\bar{z} = d - \varepsilon d^*$$

olarak tanımlanır.

Modül: Herhangibir $z = d + \varepsilon d^*$ dual sayısının **modülü** $|z|$ ile gösterilir ve

$$|z| = |d|$$

ile hesaplanır. Bu tanım $\mathbb{D}$ cümlesinde bir metrik oluşturmaz.

Dual Sayıların Tersisi: Herhangibir $z = d + \varepsilon d^* = (d, d^*)$ dual sayısının **tersi** z^{-1} ile gösterilir ve

$$z^{-1} = \left(\frac{1}{d}, \frac{d^*}{d^2} \right)$$

olarak tanımlanır.

Euler Formülü: $\varpi \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$e^{\varepsilon \varpi} = 1 + \varepsilon \varpi$$

dual sayılar için **Euler formülü** olarak bilinir.

Dual Sayıların Matris Gösterimleri: $z = d + \varepsilon d^*$ dual sayısının matris gösterimi

$$d + \varepsilon d^* \longleftrightarrow \begin{bmatrix} d & d^* \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Ayrıca dual birim $\varepsilon \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dir. Dual sayılar için Euler formüllerini matrisle ifade edecek olursak;

$$1 + \varepsilon \varpi = \exp \begin{bmatrix} 0 & \varpi \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \varpi \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Ayrıca bu matris Galile düzlemindeki dönme matrisine karşılık gelmektedir (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.3 $e^{i\varpi} = \cos \varpi + i \sin \varpi$ ve $e^{-i\varpi} = \cos \varpi - i \sin \varpi$ eşitliklerinden yararlanarak, her ϖ reel sayısı için

$$\sin \varpi = \frac{e^{i\varpi} - e^{-i\varpi}}{2i} \text{ ve } \cos \varpi = \frac{e^{i\varpi} + e^{-i\varpi}}{2}$$

denklemleri sağlanmaktadır. Benzer şekilde bu eşitlikleri $\cosh \varpi$ ve $\sinh \varpi$ için

$$\sinh \varpi = \frac{e^{\varpi} - e^{-\varpi}}{2} \text{ ve } \cosh \varpi = \frac{e^{\varpi} + e^{-\varpi}}{2}$$

şeklinde tanımlanmaktadır (Speiegel vd 2009).

Tanım 2.4 Bir u vektörü için eğer $\langle u, u \rangle < 0$, $\langle u, u \rangle > 0$, ve $\langle u, u \rangle = 0$ ise, u vektörüne, sırasıyla, **timelike**, **spacelike** ve **lightlike** vektör denir (O' Neill 1983).

Tanım 2.5 (Hiperbolik Sayı) $a, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere (a, d) sıralı ikilileri üzerinde tanımlanan,

$$\mathbb{H} = \{(a, d) : a, d \in \mathbb{R}\}$$

cümlesi üzerinde $a_1, a_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere temel işlemler aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Eşitlik: $(a_1, d_1) = (a_2, d_2) \iff a_1 = a_2, d_1 = d_2$

Toplama: $(a_1, d_1) + (a_2, d_2) = (a_1 + a_2, d_1 + d_2)$

Çarpma: $(a_1, d_1)(a_2, d_2) = (a_1a_2 + d_1d_2, a_1d_2 + d_1a_2)$

Bu şekilde tanımlanmış $\mathbb{H}$ cümlesine **hiperbolik sayı sistemi** denir. Hiperbolik sayılar cümlesi

$$\mathbb{H} = \{a + dh : a, d \in \mathbb{R}, h^2 = 1\}$$

ile gösterilir. Bir hiperbolik sayının a reel sayısına hiperbolik sayı için **reel kısmı** ve d reel sayısına hiperbolik sayının **hiperbolik kısmı** denir.

Eşlenik: Bir $z = a + dh$ hiperbolik sayısının **eşleniği** $\bar{z}$ ile ifade edilir ve

$$\bar{z} = a - dh$$

olarak tanımlanır. z ve $\bar{z}$ sayıları x eksenine göre simetrik olmaktadır.

Modül: Bir $z = a + dh$ hiperbolik sayısının **modülü** $|z|$ ile ifade edilir ve

$$|z| = \sqrt{|a^2 - d^2|}$$

ile hesaplanır.

Hiperbolik Sayıların Ters: $z = a + dh$ hiperbolik sayısının **tersi** z^{-1} ile ifade edilir ve

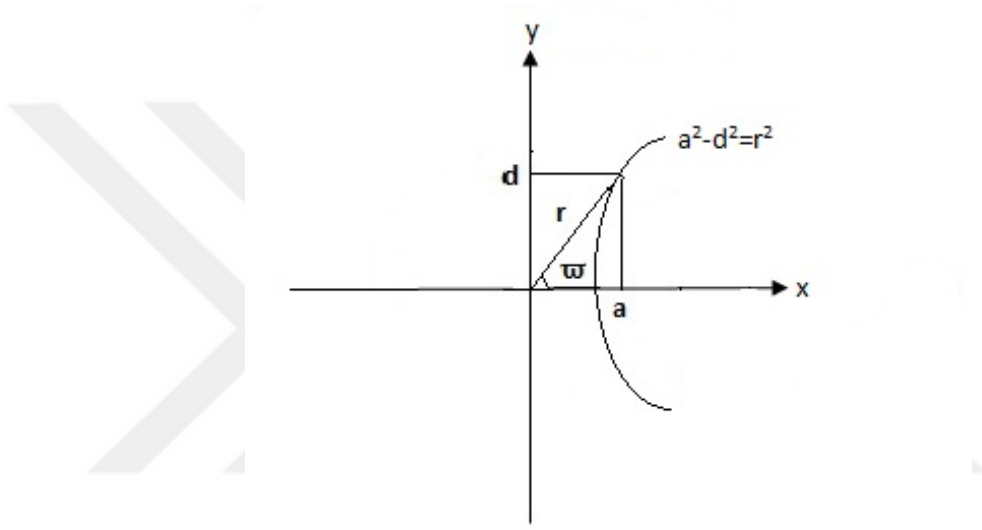
$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2 - d^2} - \frac{d}{a^2 - d^2}h$$

ile hesaplanır. Hiperbolik sayıların tersi $a^2 - d^2 \neq 0$ durumunda tanımlıdır.

Polar Form: $z = a + dh$ hiperbolik sayısının pozitif reel eksenle yapmış olduğu açı ϖ olsun.

$$z = \pm |z| (\cosh \varpi + h \sinh \varpi)$$

polar formu elde edilmiş olur. $r = |z|$ olmak üzere $a = \pm r \cosh \varpi$ ve $d = \pm r \sinh \varpi$ olduğu açıktır. Bu takdirde ϖ açısına $a + dh$ hiperbolik sayısının **argümenti** denir ve $\arg hz$ ile gösterilir.



Şekil 1.2 Hiperbolik Argüment

Euler Formülü: $z = a + dh$ hiperbolik sayısı için $|z| = r$, $\varpi = \arg hz$ ve

$k \in \{1, -1, h, -h\}$ için

$$z = kr (\cosh \varpi + h \sinh \varpi) = kre^{h\varpi}$$

dır.

Hiperbolik Sayıların Matris Gösterimleri: $z = a + dh$ hiperbolik sayısının matris gösterimi

$$a + dh \longleftrightarrow \begin{bmatrix} a & d \\ d & a \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Ayrıca hiperbolik birim $h \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ dir. Hiperbolik sayılar için Euler formüllerini matris gösterimleri ile ifade edecek olursak;

$$\cosh \varpi + h \sinh \varpi = \exp \begin{bmatrix} 0 & \varpi \\ \varpi & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \varpi & \sinh \varpi \\ \sinh \varpi & \cosh \varpi \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Ayrıca bu matris Lorentz düzlemindeki dönme matrisine karşılık gelmektedir (Çakır 2017).

Tanım 2.6 (Reel Kuaterniyonlar)

$$Q = \{p = p_0 1 + p_1 i + p_2 j + p_3 k : p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R} : i^2 = j^2 = k^2 = -1\}$$

şeklinde tanımlanan Q cümlesini göz önüne alalım. Böylece bir reel kuaterniyon

$$p = p_0 1 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$$

şeklinde ifade edilebilir.

$p = p_0 1 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$ ve $q = q_0 1 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ olmak üzere reel kuaterniyonlar üzerinde temel işlemler aşağıdaki gibi tanımlıdır.

Eşitlik: $p = q \iff p_0 = q_0, p_1 = q_1, p_2 = q_2, p_3 = q_3$

Toplama: $p + q = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1) i + (p_2 + q_2) j + (p_3 + q_3) k$

Skaler İle Çarpma: $\lambda p = \lambda p_0 + \lambda p_1 i + \lambda p_2 j + \lambda p_3 k$

Reel Kuaterniyonların Çarpımı: $p = p_0 1 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$ ve $q = q_0 1 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ iki reel kuaterniyon olmak üzere bu **kuaterniyonların çarpımı** aşağıda verilen $\{1, i, j, k\}$ birimlerinin çizelgesi yardımıyla hesaplanırsa

$$\begin{aligned} pq &= (p_0 1 + p_1 i + p_2 j + p_3 k) (q_0 1 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) \\ &= p_0 q_0 + p_0 q_1 i + p_0 q_2 j + p_0 q_3 k \\ &\quad + p_1 q_0 i - p_1 q_1 + p_1 q_2 k - p_1 q_3 j \\ &\quad + p_2 q_0 j - p_2 q_1 k - p_2 q_2 + p_2 q_3 i \\ &\quad + p_3 q_0 k + p_3 q_1 j - p_3 q_2 i - p_3 q_3 \end{aligned}$$

elde edilir. Aşağıdaki çizelgede $\{1, i, j, k\}$ birimlerinin kuaterniyon çarpımı görülmektedir.

Çizelge 1.1 Kuaterniyon Çarpımı

$\times$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Eşlenik: Bir reel kuaterniyon $p = p_01 + p_1i + p_2j + p_3k$ olsun. h kuaterniyonunun **eşleniği** $\bar{h}$ ile ifade edilir ve

$$\bar{h} = p_01 - p_1i - p_2j - p_3k$$

ile hesaplanır.

Norm: Bir reel kuaterniyon $p = p_01 + p_1i + p_2j + p_3k$ olsun. p kuaterniyonunun **normu** $N(p)$ ile ifade edilir ve

$$N(p) = \sqrt{p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$$

ile hesaplanır. Ayrıca burada $N_p = p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$ dir.

Bir Reel Kuaterniyonun Tersisi: Bir reel kuaterniyon $p = p_01 + p_1i + p_2j + p_3k$ olsun. p kuaterniyonunun kuaterniyon çarpımına göre **tersi** p^{-1} ile ifade edilir ve

$$p^{-1} = \frac{\bar{p}}{N_p}$$

ile hesaplanır.

Birim Kuaterniyon ve Normlama: Normu 1 olan kuaterniyona **birim kuaterniyon** denir. Birim kuaterniyon genellikle $\underline{p}_0$ ile gösterilir. Bu sebeble vektörlerdeki mantıkla benzer olarak sıfırdan farklı herhangi bir reel kuaterniyon normunun kareköküne bölünerek birim kuaterniyona dönüştürülebilir. $p = p_01 + p_1i + p_2j + p_3k$ olmak üzere

$$\underline{p}_0 = \frac{p}{\sqrt{N_p}}$$

olarak ifade edilebilir. Bu $\underline{p}_0$ birim kuaterniyonu

$$\underline{p}_0 = \cos \theta + \vec{S}_0 \sin \theta$$

olarak yazabiliriz. Burada $\cos \theta = \frac{p_0}{\sqrt{p_0^2 + p_1^2 + p_2^2}}$, $\sin \theta = \frac{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}{\sqrt{p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}$ ve $\vec{S}_0 = \frac{p_1 i + p_2 j + p_3 k}{\sqrt{p_0^2 + p_1^2 + p_2^2}}$ şeklindedir (Kuipers 2002).

Polar Form: $p = p_0 1 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$ reel kuaterniyonu için $\cos \theta = \frac{p_0}{\sqrt{N_p}}$ ve $\sin \theta = \frac{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}{\sqrt{N_p}}$ olmak üzere polar formu

$$q = \sqrt{N_p}(\cos \theta + \vec{S}_0 \sin \theta)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Burada $\vec{S}_0 = \frac{p_1 i + p_2 j + p_3 k}{\sqrt{p_0^2 + p_1^2 + p_2^2}}$ olup birim vektördür (Hacısalıhoğlu 1983).

Reel Kuaterniyonların Matris Gösterimleri: p bir reel kuaterniyon olsun. Sol çarpım fonksiyonunu

$$T_p : T_p(q) \longrightarrow pq$$

biçiminde tanımlayalım. $\mathbb{R}^4$ reel vektör uzayında T_p dönüşümü $\mathbb{R}^4$ reel vektör uzayından $\mathbb{R}^4$ reel vektör uzayına bir lineer dönüşüm belirtir. Bu lineer dönüşüme karşılık gelen matris temsili

$$T_p = \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu şekilde tanımlanan lineer dönüşüm bir izomorfizm belirtmektedir (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.7 (Split Kuaterniyonlar)

$$\tilde{Q} = \{h = h_0 + h_1 i + h_2 j + h_3 k : h_0, h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{R}\}$$

cümlesini ele alalım. Burada $\{1, i, j, k\}$ birimlerinin çarpımı reel kuaterniyon çarpımından farklı olarak aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Çizelge 1.2 Split Kuaterniyon Çarpımı

.	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	1	$-i$
k	k	j	i	1

$\tilde{Q}$ nin her bir elemanına bir **split kuaterniyon** denir (Kula 2003).

$$h = h_0 + h_1i + h_2j + h_3k$$

split kuaterniyonunun **skalar kısmı** S_h ve **vektörel kısmı** $\vec{V}_h$ olmak üzere iki kısma ayrılır.

$$h = S_h + \vec{V}_h$$

olmak üzere

$$S_h = h_0 \text{ ve } \vec{V}_h = h_1i + h_2j + h_3k$$

dır.

Toplama: $h = h_0 + h_1i + h_2j + h_3k$ ve $p = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$ split kuaterniyonlarının toplamı

$$\begin{aligned} h + p &= (S_h + S_p) + (\vec{V}_h + \vec{V}_p) \\ &= (h_0 + p_0) + (h_1 + p_1)i + (h_2 + p_2)j + (h_3 + p_3)k \end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

Skaler ile Çarpma: $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $h = h_01 + h_1i + h_2j + h_3k$ olmak üzere λh işlemi

$$\lambda h = (\lambda h_0) + (\lambda h_1)i + (\lambda h_2)j + (\lambda h_3)k$$

olarak tanımlanır.

Split Kuaterniyonlarının Çarpımı: $h = h_0 + h_1i + h_2j + h_3k$ ve

$p = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$ iki split kuaterniyon olmak üzere

$$\times : \tilde{Q} \times \tilde{Q} \longrightarrow \tilde{Q}$$

$$(h, p) \longrightarrow h \times p = hp$$

şeklinde bir işlem olup

$$hp = S_h S_p - g \left(\vec{V}_h, \vec{V}_p \right) + S_h \vec{V}_p + S_h \vec{V}_q + \vec{V}_h \wedge \vec{V}_p$$

olarak tanımlanır. Burada

$$\begin{aligned} g & : \quad \text{Im } \tilde{Q} \times \text{Im } \tilde{Q} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \left(\vec{V}_h, \vec{V}_p \right) & \longrightarrow g \left(\vec{V}_h, \vec{V}_p \right) = -h_1 p_1 + h_2 p_2 + h_3 p_3 \end{aligned}$$

dır. Bu çarpma işlemiyle birlikte $\tilde{Q}$ cümlesine **split kuaterniyon cebiri** denir (Kula 2003).

Eşlenik: Herhangi bir split kuaterniyon $h = h_0 + h_1 i + h_2 j + h_3 k$ olsun. h split kuaterniyonunun **eşleniği** $\bar{h}$ ile ifade edilir ve

$$\bar{h} = h_0 - h_1 i - h_2 j - h_3 k$$

ile hesaplanır (Kula 2003).

Norm: Bir split kuaterniyon $h = h_0 + h_1 i + h_2 j + h_3 k$ olsun. $N_h = h_0^2 + h_1^2 - h_2^2 - h_3^2$ olmak üzere h split kuaterniyonunun **normu** $|h|$ ile ifade edilir ve

$$|h| = \sqrt{|h_0^2 + h_1^2 - h_2^2 - h_3^2|} = \sqrt{N_h}$$

ile hesaplanır (Kula 2003).

Bir Split Kuaterniyonun Tersisi: Bir split kuaterniyon $h = h_0 + h_1 i + h_2 j + h_3 k$ olsun. h split kuaterniyonunun **tersi** h^{-1} ile ifade edilir ve

$$\begin{aligned} h^{-1} &= \frac{\bar{h}}{N_h}, |h| \neq 0 \\ &= \frac{h_0 - h_1 i - h_2 j - h_3 k}{|h_0^2 - h_1^2 - h_2^2 - h_3^2|} \end{aligned}$$

ile hesaplanır (Kula 2003).

Polar Form: Split kuaterniyonlarda, kuaterniyonun spacelike veya timelike olması, bununla birlikte timelike kuaterniyonlarda vektörel kısmın timelike veya spacelike olması polar formu değiştirmektedir. Yani split kuaterniyonların polar formu için farklı durumlar incelenecektir .

1. $h = h_0 + h_1 i + h_2 j + h_3 k \in \tilde{Q}$ bir **spacelike kuaterniyon** ise polar form

$$h = |h| (\sinh \varphi + \vec{\varepsilon}_0 \cosh \varphi)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\sinh \varphi = \frac{h_0}{|h|}$, $\cosh \varphi = \frac{\sqrt{-h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}{|h|}$
ve $\vec{\varepsilon}_0 = \frac{h_1 i + h_2 j + h_3 k}{\sqrt{-h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}$ dir.

2. $h = h_0 + h_1 i + h_2 j + h_3 k \in \tilde{Q}$ vektörel kısmı spacelike olan bir **timelike birim kuaterniyon** ise polar form

$$h = |h| (\cosh \varphi + \vec{\varepsilon}_0 \sinh \varphi)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\cosh \varphi = \frac{h_0}{|h|}$, $\sinh \varphi = \frac{\sqrt{-h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}{|h|}$
ve $\vec{\varepsilon}_0 = \frac{h_1 i + h_2 j + h_3 k}{\sqrt{-h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}$ dir.

3. $h = h_0 + h_1 i + h_2 j + h_3 k \in \tilde{Q}$ vektörel kısmı timelike olan bir **timelike birim kuaterniyon** ise polar form

$$h = |h| (\cos \varphi + \vec{\varepsilon}_0 \sin \varphi)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\cos \varphi = \frac{h_0}{|h|}$, $\sin \varphi = \frac{\sqrt{h_1^2 - h_2^2 - h_3^2}}{|h|}$
ve $\vec{\varepsilon}_0 = \frac{h_1 i + h_2 j + h_3 k}{\sqrt{h_1^2 - h_2^2 - h_3^2}}$ dir.

4. Vektörel kısmı lightlike olan tüm split kuaterniyonlar için polar form

$$q = 1 + \vec{\varepsilon}_0$$

şeklindedir. Burada $\vec{\varepsilon}_0$ lightlike bir vektördür (Özdemir ve Ergin 2006).

3. KUATERNİYONLAR İÇİN YENİ TEMSİL METOTLARI VE YAPRAK PARAMETRELENDİRMESİ

3.1 Yaprak Parametrelendirmesi

Dördüncü bileşeni sıfır olan $X = x1 + yi + zj + 0k$ kuaterniyonların cümlesini göz önüne alalım. Bu kesilmiş kuaterniyonların cümlesi, kuaterniyonların üç boyutlu alt vektör uzayını oluşturur. O halde $(x, y, z, 0)$ dörtlüsü yerine ona eş olan (x, y, z) üçlüsünü yazabiliriz. Böylece

$$1 = (1, 0, 0), \quad i = (0, 1, 0), \quad j = (0, 0, 1)$$

olup X kuaterniyonunu yeniden yazarsak

$$X = x1 + yi + zj$$

elde edilir. Artık X kuaterniyonu için "üçlü", "vektör" ve "kesilmiş kuaterniyon" terimlerini kullanabiliriz. Tüm düzlemlerin cümlesini düşünelim. x eksenini içeren alt uzayda $(x, 0, 0)$ vektörü x -ekseni üzerinde yer almaktadır ve $U = (0, y, z)$ vektörü, yoz düzleminde yer almaktadır. $(x, 0, 0)$ ve $U = (0, y, z)$ uzayda bir düzlem belirler. Bu düzlem **yaprak** olarak adlandırılmaktadır. Her yaprak (y, z) düzlemi ile kesişim doğrusu veya eşdeğer olarak bu doğru boyunca (y, z) düzlemindeki sıfırdan farklı herhangi bir U vektörü boyunca belirlenir. Bununla birlikte üçlülerin çarpımları kuaterniyon çarpmasına göre kapalı değildir. Fakat üçlülerin aynı yaprak üzerindeki çarpımları kapalı, birleşmeli ve değişmelidir (Pfaff 2000).

3.1.1 Bir yaprak üzerinde çarpma

$p = (a_1, b_1, c_1) = a_1 + b_1i + c_1j$, $q = (a_2, b_2, c_2) = a_2 + b_2i + c_2j$ iki tane kesilmiş kuaterniyon olmak üzere burada b_1 ve c_1 (b_2 ve c_2) sıfırdan farklı olsun. Amacımız kesilmiş kuaterniyonlar için kapalı ve değişmeli bir çarpma tanımlamaktır. pq çarpımını hesaplarsak

$$pq = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2)1 + (a_1b_2 + b_1a_2)i + (a_1c_2 + c_1a_2)j + (b_1c_2 - c_1b_2)k$$

dır.

Kesilmiş kuaterniyonların çarpma işlemine göre kapalı olması için k bileşeninin sıfır olması gerekir. Bu durumda

$$\frac{c_1}{b_1} = \frac{c_2}{b_2} = \eta, \eta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

olmalıdır. Buradan

$$p = (a_1, 0, 0) + (0, b_1, c_1) = (a_1, 0, 0) + U_p$$

ve

$$q = (a_2, 0, 0) + (0, b_2, c_2) = (a_2, 0, 0) + U_q$$

olup burada U_p ve U_q sıfırdan farklı vektörlerdir. O halde $U_q = \eta U_p$ olup

$U_q = (0, \eta b_1, \eta c_1)$ olduğu kolayca görülmektedir.

O halde

$$pq = (a_1 a_2 - \eta b_1^2 - \eta c_1^2) 1 + (\eta a_1 b_1 + b_1 a_2) i + (\eta a_1 c_1 + c_1 a_2) j$$

elde edilir (Pfaff 2000). Bu çarpım aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. Aynı yaprakta yer alan p ve q kesilmiş kuaterniyonlarının çarpımı olan pq yine aynı yaprakta yer alır ve bu çarpım **kapalıdır**.
2. **Değişme** özelliğine sahiptir.
3. **Birleşme** ve **dağılma** özelliğine sahiptir.
4. $q = a_1 + b_1 i + c_1 j$ kesilmiş kuaterniyonu ile eşleniği olan $q^* = a_1 - b_1 i - c_1 i$ kesilmiş kuaterniyonu aynı yapraktadır ve

$$qq^* = (a^2 + b^2 + c^2) 1 = |q|^2$$

dir.

5. q kuaterniyonunun **tersi** olan $q^{-1} = \frac{q^*}{|q|^2}$ kesilmiş kuaterniyonu q kuaterniyonu ile aynı yapraktadır .
6. Sıfırdan farklı her üçlünün tek bir tersi olduğundan **sıfır böleni** yoktur.

7. Aynı yaprak üzerindeki p ve r üçlülere için $pq = r$ denklemi p ve r kesilmiş kuaterniyonlarının oluşturduğu yaprakta $q = p^{-1}r$ şeklinde tek bir çözüme sahiptir.

3.1.2 Yaprak üzerinde kompleks yapı

Bir yaprak yoz düzleminde i yönü ile pozitif yönlü i_φ birim vektörü ile belirlenir. Bu vektöre göre bir reel kuaterniyon

$$i_\varphi = (\cos \varphi) i + (\sin \varphi) j$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $i_\varphi^2 = -1$ olur. p yaprakta sıfırdan farklı bir üçlü olsun. Bu yaprak 1 ve i_φ birim kuaterniyonu tarafından üretilmektedir. O halde bu vektörler boyunca p reel kuaterniyonunu yeniden yazabiliriz. p kuaterniyonunun yapraktaki $(1, 0, 0)$ ile yaptığı pozitif yönlü açı ξ olmak üzere

$$p = |p| ((\cos \xi) 1 + (\sin \xi) i_\varphi)$$

elde edilir. Ayrıca $e^{i_\varphi \xi} = \{(\cos \xi) 1 + (\sin \xi) i_\varphi\}$ olup burada $p = |p| e^{i_\varphi \xi}$, $|p|^2 = p.p^*$ ve $\xi = \arg p$ eşitlikleri gerçekleşir.

p ile aynı yaprakta reel birim $(1, 0, 0)$ vektörü ile pozitif yönlü η açısını yapan vektör $q = (a_2, b_2, c_2)$ olmak üzere $q = |q| e^{i_\varphi \eta}$ olup

$$pq = |p| |q| e^{i_\varphi \xi} e^{i_\varphi \eta} = |p| |q| e^{i_\varphi (\xi + \eta)}$$

elde edilir. Burada $|pq| = |p| |q|$ ve $\arg(pq) = \arg p + \arg q$ eşitlikleri gerçekleşir. Kuaterniyonun eşleniği

$$p^* = |p| e^{-i_\varphi \xi}$$

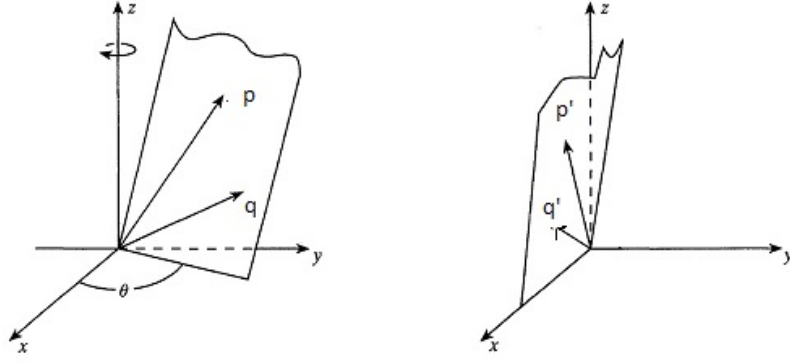
ve tersi

$$p^{-1} = \frac{1}{|p|} e^{-i_\varphi \xi}$$

dir (Pfaff 2000).

3.1.3 Farklı yapraklar üzerinde çarpma

Farklı yapraklar üzerindeki üçlülerin çarpımı aşağıdaki adımlardaki gibi tanımlanmaktadır (Pfaff 2000).



Şekil 3.1 Farklı Yapraklar Üzerinde Çarpma

1. p ve q ile belirlenen düzlem ile (x, y) düzlemi şekilde gösterildiği gibi pozitif x yönü ile θ açısını yapan ve orijinden geçen doğru üzerinde kesişir. Burada $0 \leq \theta < \pi$ dir.
2. p ve q düzlemi z etrafında döndürülüp ve (x, y) düzlemi ile kesişimi x eksenine getirilir ve p ile q vektörleri şekilde gösterildiği gibi p' ve q' vektörleri üzerine taşınır.
3. p' ve q' vektörlerinin oluşturduğu düzlem bir yaprak belirtir. Artık bu vektörler aynı yaprak üzerinde yer aldığından bir yaprak üzerinde çarpma metotunu uygulayabiliriz. Bu durumda

$$r' = p'q', |r'| = |p'| |q'| \text{ ve } \arg r' = \arg p' + \arg q'$$

elde edilir.

4. 2. adımda kullanılan dönmenin tersini kullanarak p ile q orijinal düzlemine tekrar döndürülür. Bu dönme sırasıyla p' ile q' vektörlerini p ve q vektörlerine dönüştürür. Bu durumda

$$r = p \otimes q$$

dır.

5.

$$|p \times q| = |p| |q| \text{ ve } \arg(p \times q) = \arg p + \arg q$$

olup tanımladığımız bu çarpma işlemi değişmelidir. Bu özellik ortagonal dönüşümlerden etkilenmez.

6. Sıfırdan farklı p ve r üçlülere için xoz düzleminde $r = p \times q$ denklemini sağlayan bir tek q vardır.

3.2 Kuaterniyonlar İçin Yeni Polar Gösterimler

Her kuaterniyon

$$q = Ae^{Bj}$$

şeklindeki polar form ile ifade edilebilmektedir. Burada $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere $A = a + ib$ ve $B = c + di$ iki kompleks sayıdır. A değişme özelliğine sahip olmadığından bu yazılımda sıralama önemlidir. İki kompleks sayıya dayanan bu kutupsal form ile bir kuaterniyonun Cayley-Dickson formu arasındaki ilişki

$$q = (a + bi) + (c + di)j = a + bi + cj + dk$$

şeklinde dir. Cayley-Dickson formunda ilk kompleks sayı kartezyen formdaki kuaterniyonun ilk iki kısmı olup reel ve imajiner kısımlara sahiptir. Benzer şekilde ikinci kompleks sayı ise kuaterniyonun üçüncü ve dördüncü kısmı olup reel ve imajiner kısımlara sahiptir. Kompleks sayılar, çarpma işlemi ile donatılmış iki boyutlu vektörler olarak kullanılabildiği gibi sadece iki boyutlu kompleks sayıyı değil dört boyutlu bir kuaterniyonu oluşturmak için de kullanılabilir (Sangwine ve Le Bihan 2010).

Lemma 3.1 $Bj = (c + di)j = cj + dk$ şeklinde keyfi bir kuaterniyon verildiğinde üstel formu

$$e^{Bj} = \cos |B| + \frac{B}{|B|} \sin |B| = \alpha_1 + \beta_1 j + \delta_1 k$$

biçimindedir (Sangwine ve Le Bihan 2010).

İspat. $Bj = (c + di)j = cj + dk$ olmak üzere

$$B = \frac{B}{|B|} |B|$$

şeklindedir. İspatı tamamlamak için $e^{\eta\theta} = \cos \theta + \eta \sin \theta$ şeklindeki klasik polar formu göz önünde bulundurmanız yeterlidir. Burada η birim kuaterniyondur ve $\frac{B}{|B|}$ ile tanımlanabilir. Ayrıca $|B|$ reel olup θ ile tanımlanabilmektedir. Böylece

$$\alpha_1 = \cos |B|, \beta_1 = \left(\frac{c}{|B|} \right) \sin |B| \text{ ve } \delta_1 = \left(\frac{d}{|B|} \right) \sin |B|$$

elde edilmiş olur. ■

Teorem 3.1 $q = w + xi + yj + zk$ şeklindeki bütün kuaterniyonlar $A, B \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$q = Ae^{Bj}$$

şeklinde ifade edilebilir (Sangwine ve Le Bihan 2010).

İspat. Eğer $q = Ae^{Bj}$ ise $|q| = |A|$ kolaylıkla görülebilir. Klasik polar formda olduğu gibi B önemsizdir; çünkü $|e^{Bj}| = 1$ gerçekleşir. Bu nedenle, eğer $q = 0$ ise $A = 0$ olmak zorundadır.

$q = Ae^{Bj} = (a + ib)(\alpha_1 + \beta_1 j + \delta_1 k) = a\alpha_1 + b\alpha_1 i + (a\beta_1 - b\delta_1)j + (a\delta_1 + b\beta_1)k$
 $\alpha \neq 0$ (e^{Bj} nin reel kısmı) olmak üzere amacımız $\zeta = a\alpha_1 + b\alpha_1 i$ ve $A = \frac{\zeta}{|\zeta|}$ şeklinde bir kompleks sayı oluşturmaktır. ζ kompleks sayısının reel ve imajiner kısmının, sırasıyla, sıfır olduğu $A = i$ ve $A = 1$ özel durumları vardır. Bu özel durumlarda ve genel durumda bir işaret belirsizliği de vardır. α sayısının işaretini bilmediğimiz için A ya da $-A$ sayısı tam olarak belirlenemez. Bu belirsizliğin doğal olduğu açıktır; çünkü $A = a + bi$ kompleks sayısının negatifinin alınması $\alpha_1 + \beta_1 j + \delta_1 k$ değerinin ihmal edilmesi ile telafi edilebilir. $\alpha = 0$ durumunda q reel kuaterniyonunun birinci ve ikinci bileşenleri sıfır olacaktır. Bu nedenle $q, yj + zk$ biçimindedir ve $a = 1$ ve $b = 0$ alabiliriz. $a + bi$ kompleks sayısını belirledikten sonra $a + bi$ sayısının eşleniği ile soldan çarparak $\alpha_1 + \beta_1 j + \delta_1 k$ kesilmiş kuaterniyonu elde edilir. Daha sonra doğal logaritma olarak $Bj = \ln(\alpha_1 + \beta_1 j + \delta_1 k)$ değeri oluşturulur. Bj değerinin $cj + dk$ formunda olması gerekir. Bu nedenle $B = c + di$ olup

$$Bj = (c + di)j = cj + dk$$

elde edilir. ■

Teorem 3.2 $q = a + bi + cj + dk$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) şeklindeki her birim kuaterniyon

$$q = AX = e^{i\theta} e^{i\varphi_1 \psi}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada A bir kompleks sayı ve X kesilmiş bir kuaterniyondur. Ayrıca

$$i_{\varphi_1} = \left\{ \frac{(ac + bd)}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2}} j + \frac{(ad - bc)}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2}} k \right\}$$

$\text{span}(j, k)$ düzleminde bir birim vektördür ve $i_{\varphi_1} i_{\varphi_1} = -1$ gerçekleşir.

İspat. $q = a + bi + cj + dk$ bir birim kuaterniyon olsun. q kuaterniyonunu yeniden yazacak olursak

$$\begin{aligned} q &= (a + bi) \left(1 + \frac{c}{a + bi} j + \frac{d}{a + bi} k \right) \\ q &= \frac{(a + bi)}{\sqrt{a^2 + b^2}} (\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b^2} A^{-1} (cj + dk)) \\ q &= \frac{(a + bi)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b^2} \frac{1}{a + bi} \sqrt{c^2 + d^2} \frac{1}{\sqrt{c^2 + d^2}} (cj + dk) \right) \\ q &= \frac{(a + bi)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \left\{ \frac{(ac + bd)}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2}} j + \frac{(ad - bc)}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2}} k \right\} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $A = \frac{(a + bi)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ve $X = \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} i_{\varphi_1}$ şeklindedir. Ayrıca $|i_{\varphi_1}| = 1$ olup $i_{\varphi_1} i_{\varphi_1} = -1$ gerçekleşir. Sonuç olarak q kuaterniyonun polar formu

$$q = AX = e^{i\theta} e^{i\varphi_1 \psi}$$

şeklinde ifade edilebilir. ■

Bu teoremden en önemli nokta bir kuaterniyonun kompleks bir sayı ve kesilmiş bir kuaterniyon çarpımı ile ifade edilmiş olmasıdır. Ayrıca, burada önemli bir nokta da kuaterniyonun polar formunun iki Euler açısı yardımıyla verilmesidir.

Örnek 3.1 $q = \frac{1}{\sqrt{30}} + \frac{2}{\sqrt{30}}i + \frac{3}{\sqrt{30}}j + \frac{4}{\sqrt{30}}k$ birim kuaterniyonunu göz önüne alalım. q kuaterniyonunu aşağıdaki gibi yeniden ifade edecek olursak

$$\begin{aligned} q &= \left(\frac{1}{\sqrt{30}} + \frac{2}{\sqrt{30}}i \right) \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{30}} + \frac{2}{\sqrt{30}}i} \left(\frac{3}{\sqrt{30}}j + \frac{4}{\sqrt{30}}k \right) \right) \\ q &= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{30}} + \frac{2}{\sqrt{30}}i \right)}{\frac{1}{\sqrt{6}}} \left(\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{5}{\sqrt{30}} \left\{ \frac{\frac{11}{30}}{\frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{30}} j - \frac{\frac{2}{30}}{\frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{30}} k \right\} \right) \end{aligned}$$

olup burada $A = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}i$ ve $i_{\varphi_1} = \frac{11}{5\sqrt{5}}j - \frac{2}{5\sqrt{5}}k$ olup $X = \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{5}{\sqrt{30}}i_{\varphi_1}$ elde edilir. A kompleks sayı ve X kesilmiş kuaterniyon olmak üzere

$$q = AX = e^{i\theta} e^{i_{\varphi_1}\psi}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ ve $\psi = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ olduğu açıkça gösterilebilir.

Lemma 3.2 $Bk = (c + dj)k = di + ck$ şeklinde keyfi bir kuaterniyon verildiğinde üstel formu

$$e^{Bk} = \cos |B| + \frac{B}{|B|} \sin |B| = \alpha_2 + \beta_2 i + \delta_2 k$$

biçimindedir.

İspat. $Bk = (c + dj)k = di + ck$ olmak üzere

$$B = \frac{B}{|B|} |B|$$

şeklindedir. İspatı tamamlamak için $e^{\eta\theta} = \cos \theta + \eta \sin \theta$ şeklindeki klasik polar formu göz önünde bulundurmamız yeterlidir. Burada η birim kuaterniyondur ve $\frac{B}{|B|}$ ile tanımlanabilir. Ayrıca $|B|$ reel olup θ ile tanımlanabilmektedir. Böylece

$$\alpha_2 = \cos |B|, \beta_2 = \left(\frac{d}{|B|}\right) \sin |B| \text{ ve } \delta_2 = \left(\frac{c}{|B|}\right) \sin |B|$$

elde edilmiş olur. ■

Teorem 3.3 $q = w + xi + yj + zk$ şeklindeki bütün kuaterniyonlar

$$q = Ae^{Bk}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $A, B \in \mathbb{C}$ olmak üzere özel olarak $A = a + cj$ ve $B = c + dj$ dir.

İspat. Eğer $q = Ae^{Bk}$ ise $|q| = |A|$ dir. Klasik polar formda olduğu gibi B önemsizdir çünkü $|e^{Bk}| = 1$ gerçekleşir. Bu nedenle eğer $q = 0$ ise $A = 0$ olmak zorundadır.

$$q = Ae^{Bk} = (a + cj)(\alpha_2 + \beta_2 i + \delta_2 k) = a\alpha_2 + (a\beta_2 + c\delta_2)i + c\alpha_2 j + (a\delta_2 + -c\beta_2)k$$

$\alpha \neq 0$ (e^{Bk} nin reel kısmı) olmak üzere amacımız $\zeta = a\alpha_2 + c\alpha_2j$ ve $A = \frac{\zeta}{|\zeta|}$ şeklinde bir kompleks sayı oluşturmaktır. ζ kompleks sayısının reel ve imajiner kısmının, sırasıyla, sıfır olduğu $A = j$ ve $A = 1$ özel durumları vardır. Bu özel durumlarda ve genel durumda bir işaret belirsizliği de vardır. α sayısının işaretini bilmediğimiz için A ya da $-A$ sayısı tam olarak belirlenemez. $\alpha = 0$ durumunda q reel kuaterniyonun birinci ve üçüncü bileşenleri sıfır olacaktır. Bu nedenle q , $xi + zk$ biçimindedir ve $a = 1$ ve $c = 0$ alabiliriz. $a + cj$ kompleks sayısını belirledikten sonra $a + cj$ kompleks sayısını eşleniği ile soldan çarparak $\alpha_2 + \beta_2i + \delta_2k$ kesilmiş kuaterniyonu elde edilebilir. Daha sonra doğal logaritma alarak

$$Bk = \ln(\alpha_2 + \beta_2i + \delta_2k)$$

elde edilir. Bk sayısının $di + ck$ formunda olması gerekir. Bu nedenle $B = c + dj$ olup

$$Bk = (c + dj)k = di + ck$$

elde edilir. ■

Teorem 3.4 $q = a + bi + cj + dk$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) şeklindeki her birim kuaterniyon

$$q = AX = e^{j\theta} e^{i\varphi_2\psi}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada A bir kompleks sayı ve X kesilmiş bir kuaterniyondur. Ayrıca

$$i_{\varphi_2} = \left\{ \frac{(ab - cd)}{\sqrt{a^2 + c^2}\sqrt{b^2 + d^2}}i + \frac{(ad + cb)}{\sqrt{a^2 + c^2}\sqrt{b^2 + d^2}}k \right\}$$

$\text{span}(i, k)$ düzleminde bir birim vektördür ve $i_{\varphi_2}i_{\varphi_2} = -1$ dir.

İspat. $q = a + bi + cj + dk$ bir birim kuaterniyon olsun. q kuaterniyonunu yeniden yazacak olursak

$$q = (a + cj) \left(1 + \frac{b}{a + cj}i + \frac{d}{a + cj}k \right)$$

$$q = \frac{(a + cj)}{\sqrt{a^2 + c^2}} (\sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{a^2 + c^2}A^{-1}(bi + dk))$$

$$q = \frac{(a + cj)}{\sqrt{a^2 + c^2}} \left(\sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{a^2 + c^2} \frac{1}{a + cj} \sqrt{b^2 + d^2} \frac{1}{\sqrt{b^2 + d^2}} (bi + dk) \right)$$

$$q = \frac{(a + cj)}{\sqrt{a^2 + c^2}} \left(\sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + d^2} \left\{ \frac{(ab - cd)}{\sqrt{a^2 + c^2}\sqrt{b^2 + d^2}}i + \frac{(ad + cb)}{\sqrt{a^2 + c^2}\sqrt{b^2 + d^2}}k \right\} \right)$$

elde edilir. Burada $A = \frac{(a + cj)}{\sqrt{a^2 + c^2}}$ ve $X = \sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + d^2}i_{\varphi_2}$ şeklindedir.

Ayrıca $|i_{\varphi_2}| = 1$ olup $i_{\varphi_2} i_{\varphi_2} = -1$ gerçekleşir. Sonuç olarak q kuaterniyonun polar formu

$$q = AX = e^{j\theta} e^{i_{\varphi_2}\psi}$$

şeklinde ifade edilebilir. ■

Örnek 3.2 $q = \frac{1}{\sqrt{30}} + \frac{2}{\sqrt{30}}i + \frac{3}{\sqrt{30}}j + \frac{4}{\sqrt{30}}k$ birim kuaterniyonunu göz önüne alalım. q kuaterniyonu aşağıdaki gibi yeniden ifade edecek olursak

$$q = \left(\frac{1}{\sqrt{30}} + \frac{3}{\sqrt{30}}j \right) \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{30}} + \frac{3}{\sqrt{30}}j} \left(\frac{2}{\sqrt{30}}i + \frac{4}{\sqrt{30}}k \right) \right)$$

$$q = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{30}} + \frac{3}{\sqrt{30}}j \right)}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{-\frac{10}{30}}{\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}i - \frac{\frac{10}{30}}{\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}k \right\} \right)$$

olup burada $A = \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{3}{\sqrt{10}}j$ ve $i_{\varphi_2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}i - \frac{1}{\sqrt{2}}k$ olup $X = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}i_{\varphi_2}$ elde edilir. O halde A kompleks sayı ve X kesilmiş kuaterniyon olmak üzere q reel kuaterniyonu

$$q = AX = e^{j\theta} e^{i_{\varphi_2}\psi}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ ve $\psi = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ dır.

Lemma 3.3 $Bi = (c + dk)i = ci + dj$ şeklinde keyfi bir kuaterniyon verildiğinde üstel formu

$$e^{Bi} = \cos |B| + \frac{B}{|B|} \sin |B| = \alpha_3 + \beta_3 i + \delta_3 j$$

biçimindedir.

İspat. $Bi = (c + dk)i = ci + dj$ olmak üzere

$$B = \frac{B}{|B|} |B|$$

şeklindedir. İspatı tamamlamak için $e^{\eta\theta} = \cos \theta + \eta \sin \theta$ şeklindeki klasik polar formu göz önünde bulundurmamız yeterlidir. Burada η birim pure kuaterniyondur ve $\frac{B}{|B|}$ ile tanımlanabilir. Ayrıca $|B|$ reel olup θ ile tanımlanabilmektedir. Böylece

$$\alpha_3 = \cos |B|, \beta_3 = \left(\frac{c}{|B|} \right) \sin |B| \text{ ve } \delta_3 = \left(\frac{d}{|B|} \right) \sin |B|$$

elde edilmiş olur. ■

Teorem 3.5 $q = w + xi + yj + zk$ ($w, x, y, z \in \mathbb{R}$) şeklindeki bütün kuaterniyonlar

$$q = Ae^{Bi}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $A, B \in \mathbb{C}$ olmak üzere özel olarak $A = a + dk$ ve $B = c + dk$ dır.

İspat. Eğer $q = Ae^{Bi}$ ise $|q| = |A|$ dır. Klasik polar formda olduğu gibi B önemsizdir çünkü $|e^{Bi}| = 1$ gerçekleşir. Bu nedenle eğer $q = 0$ ise $A = 0$ olmak zorundadır.

$$q = Ae^{Bi} = (a + dk)(\alpha_3 + \beta_3 i + \delta_3 j) = a\alpha_3 + (a\beta_3 - d\delta_3)i + (a\delta_3 + d\beta_3)j + d\alpha_3 k$$

$\alpha \neq 0$ (e^{Bi} nin reel kısmı) olmak üzere amacımız $\zeta = a\alpha_3 + d\alpha_3 k$ ve $A = \frac{\zeta}{|\zeta|}$ şeklinde bir kompleks sayı oluşturmaktır. ζ reel ve imajiner reel ve imajiner kısmının, sırasıyla, sıfır olduğu $A = k$ ve $A = 1$ özel durumları vardır. Bu özel durumlarda ve genel durumda bir işaret belirsizliği de vardır. α sayısının işaretini bilmediğimiz için A ya da $-A$ sayısı tam olarak belirlenemez. $\alpha = 0$ durumunda q kuaterniyonunun birinci ve dördüncü bileşenleri sıfır olacaktır. Bu nedenle q , $xi + yj$ biçimindedir ve $a = 1$ ve $d = 0$ alabiliriz. $a + dk$ kompleks sayısını belirledikten sonra $a + dk$ sayısının eşleniği ile soldan çarparak $\alpha_3 + \beta_3 i + \delta_3 j$ yi elde edebiliriz. Daha sonra doğal logaritma alarak

$$Bj = \ln(\alpha_3 + \beta_3 i + \delta_3 j)$$

şeklinde elde edilir. Bi sayısının $ci + dj$ formunda olması gerekir. Bu nedenle $B = c + dk$ olup

$$Bi = (c + dk)i = ci + dj$$

elde edilir. ■

Teorem 3.6 $q = a + bi + cj + dk$ şeklindeki birim her kuaterniyon

$$q = AX = e^{k\theta} e^{i_{\varphi_3}\psi}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada A bir kompleks sayı ve X kesilmiş bir kuaterniyondur. Ayrıca

$$i_{\varphi_3} = \left\{ \frac{(ab + cd)}{\sqrt{a^2 + d^2}\sqrt{b^2 + c^2}}i + \frac{(ac - db)}{\sqrt{a^2 + d^2}\sqrt{b^2 + c^2}}j \right\}$$

$\text{span}(i, j)$ düzleminde bir birim vektördür ve $i_{\varphi_3}i_{\varphi_3} = -1$ gerçekleşir.

İspat. $q = a + bi + cj + dk$ birim bir kuaterniyon olsun. q kuaterniyonunu $a + dk$ parantezinde yeniden yazacak olursak

$$\begin{aligned}
q &= (a + dk) \left(1 + \frac{b}{a + dk}i + \frac{c}{a + dk}j \right) \\
q &= \frac{(a + dk)}{\sqrt{a^2 + d^2}} (\sqrt{a^2 + d^2} + \sqrt{a^2 + d^2} A^{-1} (bi + cj)) \\
q &= \frac{(a + dk)}{\sqrt{a^2 + d^2}} \left(\sqrt{a^2 + d^2} + \sqrt{a^2 + d^2} \frac{1}{a + dk} \sqrt{b^2 + c^2} \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2}} (bi + cj) \right) \\
q &= \frac{(a + dk)}{\sqrt{a^2 + d^2}} \left(\sqrt{a^2 + d^2} + \sqrt{b^2 + c^2} \left\{ \frac{(ad + cd)}{\sqrt{a^2 + d^2} \sqrt{b^2 + c^2}} i + \frac{(ac - db)}{\sqrt{a^2 + d^2} \sqrt{b^2 + c^2}} j \right\} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $A = \frac{(a + dk)}{\sqrt{a^2 + d^2}}$ ve $X = \sqrt{a^2 + d^2} + \sqrt{b^2 + c^2} i_{\varphi_3}$ şeklindedir. Ayrıca $|i_{\varphi_3}| = 1$ olup $i_{\varphi_3} i_{\varphi_3} = -1$ gerçekleşir. Sonuç olarak bir kuaterniyonun polar formu

$$q = AX = e^{k\theta} e^{i_{\varphi_3}\psi}$$

şeklindedir. ■

Örnek 3.3 $q = \frac{1}{\sqrt{30}} + \frac{2}{\sqrt{30}}i + \frac{3}{\sqrt{30}}j + \frac{4}{\sqrt{30}}k$ birim kuaterniyonunu göz önüne alalım. q kuaterniyonun yeniden ifade edecek olursak

$$\begin{aligned}
q &= \left(\frac{1}{\sqrt{30}} + \frac{4}{\sqrt{30}}k \right) \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{30}} + \frac{4}{\sqrt{30}}k} \left(\frac{2}{\sqrt{30}}i + \frac{3}{\sqrt{30}}j \right) \right) \\
q &= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{30}} + \frac{4}{\sqrt{30}}k \right)}{\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{30}}} \left(\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{30}} + \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{30}} \left\{ \frac{\frac{14}{30}}{\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{30}} \frac{13}{\sqrt{30}}} i - \frac{\frac{5}{30}}{\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{30}} \frac{13}{\sqrt{30}}} j \right\} \right)
\end{aligned}$$

olup burada $A = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{30}} + \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{30}}k$ ve $i_{\varphi_3} = \frac{14\sqrt{17}}{221}i - \frac{5\sqrt{17}}{221}j$ olup $X = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{30}} + \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{30}}i_{\varphi_3}$ elde edilir. O halde A kompleks sayı ve X kesilmiş kuaterniyon olmak üzere

$$q = AX = e^{k\theta} e^{i_{\varphi_3}\psi}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$ ve $\psi = \arccos\left(\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{30}}\right)$ elde edilir.

3.3 Split Kuaterniyonlar İçin Yeni Polar Gösterimler

Her split kuaterniyon

$$q = Ae^{Bj}$$

şeklindeki polar form ile ifade edilebilmektedir. Burada $A = a + ib$ ve $B = c + di$ şeklinde iki kompleks sayı olup $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ dir. Öncelikle e^{Bj} nin ne tür bir split kuaterniyon olduğunu belirleyelim. Burada $Bj = (c + di)j = cj + dk$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca $Bj = |B| \frac{Bj}{|B|}$ dır. $e^{\nu\theta} = \cos \theta + \nu \sin \theta$ şeklindeki klasik polar formu göz önünde bulundurursak burada ν birim pür split kuaterniyondur ve $\nu = \frac{B}{|B|}$ ile tanımlanabilir. Ayrıca θ açısı yerine de kompleks sayının modülünü alabiliriz. Diğer yandan $Bj = cj + dk$ spacelike bir vektördür. O halde e^{Bj} kısmı spacelike vektör kısmı ile split bir kuaterniyondur. Bu nedenle iki durumda incelememiz gerekmektedir (Atasoy vd 2017).

Durum 1 : Eğer e^{Bj} **spacelike** bir kuaterniyon ise;

$$\begin{aligned} e^{Bj} &= \sinh |B| + \frac{Bj}{|B|} \cosh |B| \\ &= \sinh |B| + \frac{cj}{|B|} \cosh |B| + \frac{dk}{|B|} \cosh |B| \\ &= \alpha_1 + \beta_1 j + \gamma_1 k \end{aligned} \quad (3.1)$$

burada $\alpha_1 = \sinh |B|$, $\beta_1 = \frac{c}{|B|} \cosh |B|$, $\gamma_1 = \frac{d}{|B|} \cosh |B|$ dır.

Durum 2 : Eğer e^{Bj} **spacelike vektörel kısmı** ile birlikte **timelike bir kuaterniyon** ise;

$$\begin{aligned} e^{Bj} &= \cosh |B| + \sinh \frac{Bj}{|B|} |B| \\ &= \cosh |B| + \frac{cj}{|B|} \sinh |B| + \frac{dk}{|B|} \sinh |B| \\ &= \alpha_2 + \beta_2 j + \gamma_2 k \end{aligned} \quad (3.2)$$

burada $\alpha_2 = \cosh |B|$, $\beta_2 = \frac{c}{|B|} \sinh |B|$, $\gamma_2 = \frac{d}{|B|} \sinh |B|$ dır.

Teorem 3.7 $q = w + xi + yj + zk$ ($w, x, y, z \in \mathbb{R}$) şeklindeki her split kuaterniyon $A, B \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$q = Ae^{Bj}$$

şeklinde ifade edilebilir (Atasoy vd 2017).

İspat. Eğer $q = Ae^{Bj}$ ise $|q| = |A|$ dır. Klasik polar formda olduğu gibi B önemsizdir çünkü $|e^{Bj}| = 1$ gerçekleşir. Bu nedenle eğer $q = 0$ ise $A = 0$ olmak zorundadır. 3.1 ve 3.2 eşitliklerinden

$$q = Ae^{Bj} = (a + ib)(\alpha + \beta j + \gamma k) = a\alpha + b\alpha i + (a\beta - b\gamma)j + (a\gamma + b\beta)k$$

$\alpha \neq 0$ (e^{Bj} nin reel kısmı) olmak üzere amacımız $\zeta = a\alpha + b\alpha i$ ve $A = \frac{\zeta}{|\zeta|}$ şeklinde bir kompleks sayı oluşturmaktır. ζ kompleks sayısının reel ve imajiner kısmının sıfır olduğu, sırasıyla, $A = i$ ve $A = 1$ özel durumları vardır. $\alpha = 0$ durumunda q reel kuaterniyonunun birinci ve ikinci bileşenleri sıfır olacaktır. Bu nedenle $q, yj + zk$ biçimindedir ve $a = 1$ ve $b = 0$ alabiliriz. $a + bi$ kompleks sayısını belirledikten sonra $a + bi$ sayısının eşleniği ile soldan çarparak $\alpha + \beta j + \gamma k$ yi elde edebiliriz. Bj oluşturmak için ise aşağıdaki durumları incelememiz yeterli olacaktır.

Durum 1: Eğer q **spacelike bir kuaterniyon** ise $e^{Bj} = A^{-1}q$ da spacelike bir kuaterniyon olur ve

$$e^{Bj} = \sinh \theta + \mu \cosh \theta$$

dır. $Bj = \mu\theta$ denkleminde yararlanarak $\sinh \theta = \alpha$, $\mu = \frac{\beta j + \gamma k}{|\beta j + \gamma k|}$ ve $\cosh \theta = |\beta j + \gamma k|$ olduğunu kolayca görebiliriz.

Durum 2 : Eğer q **timelike bir kuaterniyon** ise $e^{Bj} = A^{-1}q$ spacelike vektörel kısımlı bir timelike kuaterniyon olur ve

$$e^{Bj} = \cosh \theta + \mu \sinh \theta$$

dır. $Bj = \mu\theta$ denkleminde yararlanarak $\cosh \theta = \alpha$, $\mu = \frac{\beta j + \gamma k}{|\beta j + \gamma k|}$ ve $\sinh \theta = |\beta j + \gamma k|$ olduğunu kolayca görebiliriz. ■

Teorem 3.8 $q = a + bi + cj + dk$ şeklindeki her split birim kuaterniyon

$$q = AX = e^{i\theta} e^{\psi i_\varphi}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada A bir kompleks sayı ve X kesilmiş bir kuaterniyondur. Ayrıca

$$i_\varphi = \left\{ \frac{(ac + bd)}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2}}j + \frac{(ad - bc)}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2}}k \right\}$$

$\text{span}(j, k)$ düzleminde bir birim vektördür ve $i_\varphi i_\varphi = \pm 1$ dir.

İspat. $q = a + bi + cj + dk$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) birim bir kuaterniyon olsun. q kuaterniyonunu yeniden yazacak olursak

$$\begin{aligned} q &= (a + bi) \left(1 + \frac{c}{a + bi}j + \frac{d}{a + bi}k \right) \\ q &= \frac{(a + bi)}{\sqrt{a^2 + b^2}} (\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b^2} A^{-1} (cj + dk)) \\ q &= \frac{(a + bi)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b^2} \frac{1}{a + bi} \sqrt{c^2 + d^2} \frac{1}{\sqrt{c^2 + d^2}} (cj + dk) \right) \\ q &= \frac{(a + bi)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \left\{ \frac{(ac + bd)}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2}} j + \frac{(ad - bc)}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2}} k \right\} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $A = \frac{(a + bi)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ve $X = \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} i_\varphi$ dir. Ayrıca $|i_\varphi| = 1$ olup $i_\varphi i_\varphi = \pm 1$ gerçekleşir. Sonuç olarak bir split kuaterniyonun polar formu

$$q = AX = e^{i\theta} e^{i_\varphi \psi}$$

şeklindedir. ■

Örnek 3.4 $q = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}i + \frac{2}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{3}}k$ **spacelike** kuaterniyon olmak üzere q split kuaterniyonunu yeniden ifade edersek

$$\begin{aligned} q &= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}i}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} A^{-1} \left\{ \frac{2}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{3}}k \right\} \right) \\ q &= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}i}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}i} \left\{ \frac{2}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{3}}k \right\} \right) \\ q &= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}i}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{1}{\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}}}j - \frac{1}{\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}}}k \right\} \right) \end{aligned}$$

dir. Burada $A = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ ve $X = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}i_\varphi$ olup X spacelikedir. Ayrıca

$i_\varphi = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}j - \frac{2}{2\sqrt{5}}k$ olup $|i_\varphi| = 1$ ve $i_\varphi i_\varphi = -1$ gerçekleşir. Buna göre $\theta = \frac{\pi}{4}$ ve $\psi = \log \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{15}}{3} \right)$ elde edilir.

Örnek 3.5 $q = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}i + \frac{1}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{3}}k$ **vektörel kısmı timelike olan bir timelike kuaterniyon** olmak üzere q split kuaterniyonunu yeniden ifade edersek

$$\begin{aligned} q &= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}i}{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}} \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} A^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{3}}k \right\} \right) \\ q &= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}i}{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}} \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}i} \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{3}}k \right\} \right) \end{aligned}$$

$$q = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}i}{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}} \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{1}{\frac{\sqrt{10}}{3}}j - \frac{\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{10}}{3}}k \right\} \right)$$

dır. Burada $A = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}i$, ve $X = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}i_\varphi$ dır. Ayrıca $i_\varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}j - \frac{1}{\sqrt{10}}k$ olup $|i_\varphi| = 1$ ve $i_\varphi i_\varphi = 1$ gerçeklenir. Buna gore $\theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ ve $\psi = \log\left(\frac{3+\sqrt{19}}{\sqrt{10}}\right)$ elde edilir.



4. HİBRİT SAYILAR

Hibrit sayılar cümlesi kompleks, dual, hiperbolik sayılar olmak üzere bu üç sayı cümlesinin birleşimini içermektedir. Hibrit sayılara karşılık gelen geometri Öklid, Minkowski ve Galilean geometrilerinin yanı sıra bunların kombinasyonlarını içeren en genel geometridir. Bu geometri "hibrit düzlem" geometrisi olarak adlandırılır, eliptik, hiperbolik ve parabolik olarak sınıflandırılıp hibrit sayının türüne göre ayrı ayrı incelenir. Ayrıca bu düzlem $\mathbb{R}^4$ reel vektör uzayının iki boyutlu bir alt uzayıdır. Bu bölümde hibrit sayılarla ilgili temel tanım ve teoremler 2018 yılında Özdemir tarafından yayımlanan "Introduction to Hybrid Numbers" makalesinden faydalananarak verilecektir (Özdemir 2018). Bazı teoremler ispatlarıyla birlikte bazı teoremler ise ispatsız bir şekilde yer alacaktır. Ayrıca hibrit sayılar için yeni polar form ve yaprak parametrelendirmesi kavramları ele alınacaktır.

4.1 Hibrit Sayıların Genel Özellikleri

2018 yılında Mustafa Özdemir (Özdemir 2018) tarafından tanımlanan olmak üzere

$$\mathbb{H} = \{x + yi + z\varepsilon + wh : x, y, z, w \in \mathbb{R} \mid i^2 = -1, \varepsilon^2 = 0, h^2 = 1, \varepsilon + i = -hi = ih\}$$

$\mathbb{H}$ cümlesini göz önüne alalım. Burada sırasıyla reel, kompleks, dual ve hiperbolik birimler

$$1 = (1, 0, 0, 0), \varepsilon = (0, 0, 1, 0), h = (0, 0, 0, 1), i = (0, 1, 0, 0)$$

şeklinde olup bu birimler "**hibrit birim**" olarak adlandırılmaktadır. Bu şekilde tanımlanan $\mathbb{H}$ cümlesine hibrit sayılar cümlesi ve bu cümlelerin her bir elemanına da **hibrit sayı** denir. Bir hibrit sayı

$$\rho = x + yi + z\varepsilon + wh$$

olmak üzere reel kısmı $S(\rho) = x$ ve vektörel kısmı $V(\rho) = yi + z\varepsilon + wh$ olmak üzere iki kısma ayrılır ve

$$\rho = S(\rho) + V(\rho)$$

şeklinde ifade edilir.

Bu tanımda kompleks, hiperbolik ve dual birimler arasındaki ilişkinin nasıl bulunduğu veya bu denklemlerin neden tercih edildiği düşümlenebilir. Bu eşitlikler hibrit sayılar ve 2×2 lik matrisler arasında kurulan izomorfizm yardımıyla elde edilmiştir. Yani önce matris izomorfizmi tanımlanıp daha sonra bu izomorfizme uygun hibrit sayılar belirlenmiştir. Bununla birlikte bu izomorfizm kompleks ve hiperbolik sayıların matris temsilleriyle örtüşmektedir ve bu şekilde hibrit sayı sistemi oluşturulmaktadır.

Eşitlik: $\rho_1 = x_1 + y_1i + z_1\varepsilon + w_1h$ ve $\rho_2 = x_2 + y_2i + z_2\varepsilon + w_2h$ herhangi iki hibrit sayı olmak üzere iki hibrit sayının **eşitliği**

$$\rho_1 = \rho_2 \iff x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2, w_1 = w_2$$

şeklinde tanımlanır.

Toplama: $\rho_1 = x_1 + y_1i + z_1\varepsilon + w_1h$ ve $\rho_2 = x_2 + y_2i + z_2\varepsilon + w_2h$ herhangi iki hibrit sayı olmak üzere iki hibrit sayının **toplamı**

$$\rho_1 + \rho_2 = (x_1 + x_2)1 + (y_1 + y_2)i + (z_1 + z_2)\varepsilon + (w_1 + w_2)h$$

şeklinde tanımlanır.

Çarpma: $\rho_1 = x_1 + y_1i + z_1\varepsilon + w_1h$ ve $\rho_2 = x_2 + y_2i + z_2\varepsilon + w_2h$ herhangi iki hibrit sayı olmak üzere iki hibrit sayının **çarpımı** ayrı ayrı bileşenlerinin çarpımı aşağıdaki çizelge yardımı ile

$$\rho_1\rho_2 = (x_1 + y_1i + z_1\varepsilon + w_1h)(x_2 + y_2i + z_2\varepsilon + w_2h)$$

elde edilir.

Hibrit sayılar cümlesi üzerinde çarpma işlemi **değişmeli değildir** fakat birleşme özelliğine sahiptir. Aşağıdaki tablo üzerinden çarpma işlemi kolaylıkla görebiliriz.

Çizelge 4.1 Hibrit sayıların çarpımı

.	1	i	ε	h
1	1	i	ε	h
i	i	-1	$1 - h$	$\varepsilon + i$
ε	ε	$h + 1$	0	$-\varepsilon$
h	h	$-\varepsilon - i$	ε	1

Eşlenik: $\rho = x + yi + z\varepsilon + wh$ hibrit sayısının **eşleniği** $\bar{\rho}$ ile gösterilmek üzere

$$\bar{\rho} = S(\rho) - V(\rho) = x - yi - z\varepsilon - wh$$

şeklindedir. Burada $\bar{\rho}\rho = \rho\bar{\rho}$ eşitliği sağlanmaktadır.

Bir ρ hibrit sayısının karakteri $C(\rho)$ ile gösterilir ve

$$C(\rho) = x^2 + (y - z)^2 - z^2 - w^2$$

ile hesaplanır. Ayrıca bir ρ hibrit sayısı için sırasıyla eğer $C(\rho) < 0$, $C(\rho) > 0$ ve $C(\rho) = 0$ ise hibrit sayı spacelike, timelike ve lightlike olur. Diğer taraftan

$$C(\rho_1\rho_2) = C(\rho_1)C(\rho_2)$$

eşitliği gerçekleşir (Özdemir 2018).

Tanım 4.1 (Hibrit Sayıların Vektörel Gösterimi) $\rho = x + yi + z\varepsilon + wh$ bir hibrit sayı olmak üzere

$$\mathcal{V}_\rho = (x, (y - z), w)$$

şeklindeki gösterime hibrit sayıların vektörel gösterimi denir. Ayrıca

$$C(\rho) = \bar{\rho}\rho = \rho\bar{\rho} = x^2 + (y - z)^2 - z^2 - w^2 = -\langle \mathcal{V}_\rho, \mathcal{V}_\rho \rangle_{\mathbb{E}_4^2}$$

olarak da yazabilir (Özdemir 2018).

Tanım 4.2 (Norm) $\sqrt{|C(\rho)|}$ sayısına ρ hibrit sayısının **normu** denir ve $|\rho|$ ile gösterilir. Ayrıca

$$|\rho| = \sqrt{|\bar{\rho}\rho|} = \sqrt{|C(\rho)|} = \sqrt{|x^2 + (y - z)^2 - z^2 - w^2|}$$

ile tanımlanır (Özdemir 2018).

Tanım 4.3 (Hibrit Vektör) $\rho = x + yi + z\varepsilon + wh$ bir hibrit sayı olmak üzere

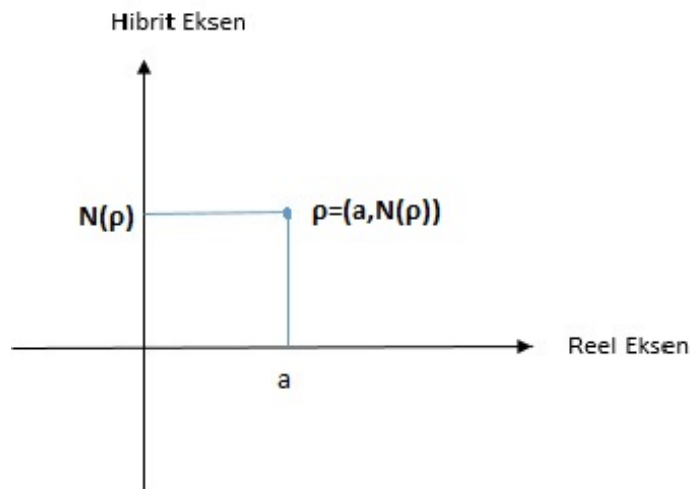
$$\varepsilon_\rho = ((y - z), z, w)$$

vektörüne ρ hibrit sayısının **hibrit vektörü** denir. Ayrıca

$$C_\varepsilon(\rho) = -(y - z)^2 + z^2 + w^2 = \langle \varepsilon_\rho, \varepsilon_\rho \rangle_{\mathbb{E}_3^1}$$

ile hesaplanır. Bir ρ hibrit sayısı için sırasıyla eğer $C_\varepsilon(\rho) > 0$, $C_\varepsilon(\rho) < 0$ ve $C_\varepsilon(\rho) = 0$ ise hiperbolik, eliptik ve parabolik olur. $C_\varepsilon(\rho)$ sayısı hibrit sayının tipini belirler. $\sqrt{|C_\varepsilon(\rho)|}$ hibrit vektörün normudur ve $\mathcal{N}(\rho)$ ile gösterilir (Özdemir 2018). Split kuaterniyonlarda olduğu gibi hibrit sayının, hibrit vektörü spacelike, timelike veya null olabilir.

Herhangi bir hibrit sayı Kartezyen koordinat sistemindeki gibi iki boyutlu bir koordinat sisteminde gösterilebilir. Bu koordinat sistemi reel eksen ve hibrit eksenden oluşmaktadır. Bu amaçla hibrit sayının reel kısmı, reel eksen ve $\sqrt{|C_\varepsilon(\rho)|} = \mathcal{N}(\rho)$ vektör kısmı da hibrit eksen olarak belirlenmiştir. Yani; bir hibrit sayının reel kısmının değeri x eksenini veya apsisi, $\sqrt{|C_\varepsilon(\rho)|}$ değeri y eksenini veya ordinat olarak adlandırılır (Özdemir 2018).



Şekil 4.1 Hibrit Koordinat Sistemi

Bu şekilde tanımlı koordinat sistemine **hibrit koordinat sistemi** adı verilir. Buna göre $\rho = x + yi + z\varepsilon + wh$ hibrit sayısı

$$\rho = \left(x, \sqrt{|-(y-z)^2 + z^2 + w^2|} \right)$$

ikilisi ile ifade edilebilir (Özdemir 2018).

Tanım 4.4 (Bir Hibrit Sayının Tersi) $\rho = x + yi + z\varepsilon + wh$, hibrit sayısının tersi

$$\rho^{-1} = \frac{\bar{\rho}}{C(\rho)}, |\rho| \neq 0$$

ile tanımlanmaktadır. Lightlike hibrit sayıların tersi mevcut değildir (Özdemir 2018).

Tanım 4.5 (Hibrit Sayıların İç Çarpımı) $\rho_1 = x_1 + y_1i + z_1\varepsilon + w_1h$ ve

$\rho_2 = x_2 + y_2i + z_2\varepsilon + w_2h$ herhangi iki hibrit sayı olmak üzere bu iki hibrit sayının iç çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} g(\rho_1, \rho_2) &: \mathbb{H} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R} \\ g(\rho_1, \rho_2) &= \frac{\rho_1 \bar{\rho}_2 + \rho_2 \bar{\rho}_1}{2} = x_1 x_2 + y_1 y_2 - y_1 z_2 - y_2 z_1 - w_1 w_2 \end{aligned}$$

Hibrit sayıların iç çarpımları kompleks, hiperbolik ve dual sayı sistemleri için genelleştirilmiş bir iç çarpımıdır (Özdemir 2018).

Tanım 4.6 (Hibrit Sayıların Vektörel Çarpımı) $\rho_1 = x_1 + y_1i + z_1\varepsilon + w_1h$ ve $\rho_2 = x_2 + y_2i + z_2\varepsilon + w_2h$ herhangi iki hibrit sayı olmak üzere bu iki hibrit sayının vektörel çarpımı Çizelge 4.2 yardımı ile aşağıdaki gibi tanımlanır (Özdemir 2018).

$$\begin{aligned} \times &: \mathbb{H} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H} \\ \rho_1 \times \rho_2 &= \frac{\rho_1 \bar{\rho}_2 - \rho_2 \bar{\rho}_1}{2} \end{aligned}$$

Aşağıdaki tablo üzerinden vektörel çarpma işlemini kolaylıkla görebiliriz.

Çizelge 4.2 Hibrit sayıların vektörel çarpımı

$\times$	1	i	ε	h
1	0	$-i$	$-\varepsilon$	$-h$
i	i	0	h	$-\varepsilon - i$
ε	ε	$-h$	0	ε
h	h	$\varepsilon + i$	$-\varepsilon$	0

4.2 Hibrit Sayıların Matris Temsilleri

Hibrit sayıların matris gösterimleri özellikle hibrit sayıların çarpımını kolaylaştırması açısından oldukça önemlidir. 2×2 lik matrisler ve hibrit sayılar arasında bir izomorfizm tanımlayarak hibrit sayıları kolayca çarpabilir ve özelliklerinin çoğunu ispatlayabiliriz. Hibrit sayıları 2×2 lik matrise karşılık gelen karakteristik denklemin diskriminantı ve determinantı açısından sınıflanır.

Teorem 4.1 $\mathbb{H}$ hibrit sayılar halkası reel sayılar halkasının 2×2 lik $\mathbb{M}_{2 \times 2}$ matrisine izomorftur (Özdemir 2018).

İspat. $\rho = x + yi + z\varepsilon + wh$ bir hibrit sayı olmak üzere

$$f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{M}_{2 \times 2}, f(x + yi + z\varepsilon + wh) = \begin{bmatrix} x + z & y - z + w \\ z - y + w & x - z \end{bmatrix} \text{ bir izomorfizm}$$

belirtmektedir. Önceden tanımlanmış olan hibrit sayılar için toplama ve çarpma işlemleri göz önüne alındığında aşağıdaki eşitliklerin sağlandığı kolayca görülmektedir.

$$f(\rho_1 \rho_2) = f(\rho_1) f(\rho_2)$$

$$f(\rho_1 + \rho_2) = f(\rho_1) + f(\rho_2)$$

f birebir ve örtendir. Ayrıca $\rho_1 = x_1 + y_1i + z_1\varepsilon + w_1h$ ve $\rho_2 = x_2 + y_2i + z_2\varepsilon + w_2h$ için

$$f(\rho_1) = f(\rho_2)$$

ise iki matrisin eşitliğinden $z_1 = z_2$, $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $w_1 = w_2$ dir. Diğer taraftan 2×2 lik reel matris

$$A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

olmak üzere $\rho = \left(\frac{x+w}{2}\right) + \left(\frac{x+y-z-w}{2}\right)i + \left(\frac{x-w}{2}\right)\varepsilon + \left(\frac{y+z}{2}\right)h$ olup $f(z) = A$ elde edilir. f halka izomorfizmi olur. ■

Yukarıdaki izomorfizme göre

$$f(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, f(i) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, f(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, f(h) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Bu dört matris 2×2 lik matrislerin vektör uzayının bazlarıdır. Bu durumda her 2×2 lik matris birim dual, kompleks ve hiperbolik sayıların birleşimi olarak yazılabilir.

Teorem 4.2 ρ hibrit sayısına karşılık gelen matris A olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanmaktadır (Özdemir 2018).

$$|\rho| = \sqrt{|\det A|} \text{ ve } C(\rho) = \det A$$

$$C_\varepsilon(\rho) = \frac{\operatorname{tr} A - 4 \det A}{4}$$

Sonuç 4.1 $\rho \in \mathbb{H}$ hibrit sayısının tersi olabilmesi için $\iff \det f(\rho) \neq 0$ olmasıdır (Özdemir 2018).

Sonuç 4.2 A , 2×2 lik bir reel matris olmak üzere $\Delta_A = (\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A$ karakteristik polinomun diskriminantıdır ve $C_\varepsilon(\rho) = \frac{\Delta_A}{4}$ dir.

$f(\rho) = A$, ρ hibrit sayısına karşılık gelen matris olmak üzere A matrisine göre z hibrit sayısını sınıflandırabiliriz.

$$C(\rho) = \det A \text{ ve } C_\varepsilon(\rho) = \frac{\operatorname{tr} A - 4 \det A}{4}$$

eşitliklerinden görüldüğü üzere ρ hibrit sayısının türü ve karakteri matrisin determinant ve izine bağlıdır. A matrisi için sırasıyla , $\det A > 0$, $\det A < 0$ ve $\det A = 0$ ise timelike, spacelike ve lightlike olur.

Ayrıca $\rho = x + yi + z\varepsilon + wh$ hibrit sayısına karşılık gelen $f(\rho)$ matrisinin öz değerleri ve öz vektörleri sırasıyla

$$\lambda = x \pm \sqrt{C_\varepsilon(\rho)} \text{ ve } v = \left(\rho + \sqrt{C_\varepsilon(\rho)}, z - y + w \right)$$

şeklindedir. $\Delta_A = (\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A$ ile hibrit sayının tipini belirleyebiliriz. z hibrit sayısı için sırasıyla , $\Delta_A > 0$, $\Delta_A < 0$ ve $\Delta_A = 0$ ise , hiperbolik, eliptik ve parabolik olur (Özdemir 2018).

4.3 Hibrit Sayıların Kutupsal Gösterimleri

- $\rho = x + yi + z\varepsilon + wh$ bir **eliptik hibrit sayı** olmak üzere hibrit vektörü

$\varepsilon_\rho = ((y-z), z, w) \in \mathbb{R}^3$ olur. Tüm eliptik hibrit sayılar timelike olup ε_z timelike vektördür. Yani $C_\varepsilon(\rho) = -(y-z)^2 + z^2 + w^2 < 0$ ve $C(\rho) = x^2 + (y-z)^2 - z^2 - w^2 > 0$ dır. Böylece

$|\rho| = \sqrt{x^2 + (y-z)^2 - z^2 - w^2}$ ve $\mathcal{N}(\rho) = \sqrt{(y-z)^2 + z^2 + w^2}$ olur. O halde ρ eliptik hibrit sayının kutupsal gösterimi

$$\rho = |\rho| (\cos \theta + V_0 \sin \theta)$$

olup burada $V_0 = \frac{V(\rho)}{\mathcal{N}(\rho)}$ ve $V_0^2 = -1$ olur.

- $\rho = x + yi + z\varepsilon + wh$ bir **hiperbolik hibrit sayı** olmak üzere hibrit vektörü

$\varepsilon_\rho = ((y-z), z, w) \in \mathbb{R}^3$ olur. Hiperbolik hibrit sayılarda, hibrit vektör spacelike olur. Yani $C_\varepsilon(\rho) = -(y-z)^2 + z^2 + w^2 > 0$ ve $\mathcal{N}(\rho) = \sqrt{-(y-z)^2 + z^2 + w^2}$ şeklindedir. Diğer taraftan hibrit sayının karakteri spacelike, timelike ve lightlike olabilir. O halde üç durumda incelememiz gerekmektedir.

1. Eğer ρ **spacelike hiperbolik hibrit sayı** ise $C(\rho) < 0$ ve

$|\rho| = \sqrt{-x^2 - (y-z)^2 + z^2 + w^2}$ olur. O halde kutupsal gösterimi

$$\rho = |\rho| (\sinh \theta + V_0 \cosh \theta)$$

şeklinde ifade edilir.

2. Eğer ρ **timelike hiperbolik hibrit sayı** ise $C(\rho) > 0$ ve

$|\rho| = \sqrt{x^2 + (y-z)^2 - z^2 - w^2}$ olur. O halde kutupsal gösterimi

$$\rho = |\rho| (\cosh \theta + V_0 \sinh \theta)$$

şeklinde ifade edilir.

3. Eğer ρ **lightlike hiperbolik hibrit sayı** ise $C(\rho) = 0$ ve $|\rho| = 0$ olur. Bu durumda $\mathcal{N}(\rho) = a$ olup kutupsal gösterimi

$$\rho = a(1 + V_0)$$

şeklinde ifade edilir.

- $\rho = x + yi + z\varepsilon + wh$ bir **parabolik hibrit sayı** olmak üzere hibrit vektörü

$\varepsilon_\rho = ((y - z), z, w) \in \mathbb{R}^3$ dır. Parabolik hibrit sayılarda hibrit vektör lightlike olur. Yani $C_\varepsilon(\rho) = 0$ ve $|\rho| = 0$ dır. O halde ρ parabolik hibrit sayısının kutupsal gösterimi

$$\rho = |\rho| (\epsilon + V_0)$$

olup burada $V_0 = \frac{V(\rho)}{|\rho|}$ ve $V_0^2 = 0$, $\epsilon = \text{sgn}(S(\rho))$ dir (Özdemir 2018).

4.4 Hibrit Sayılar İçin Euler Formülleri

Üstel, trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonların seri açılımlarını kullanarak hibrit sayılar için Euler formüllerini aşağıdaki gibi ifade edebiliriz (Özdemir 2018).

Çizelge 4.3 Hibrit sayılar için Euler formülleri

$\rho = e^{V\theta} = \cos \theta + V \sin \theta$	ρ eliptik
$\rho = e^{V\theta} = \cosh \theta + V \sinh \theta$	ρ timelike hiperbolik
$\rho = Ve^{V\theta} = \sinh \theta + V \cosh \theta$	ρ spacelike hiperbolik
$\rho = e^{V\theta} = (\epsilon + V), \epsilon = \text{sgn}S(z)$	ρ parabolik

Bu formüller kompleks, dual ve hiperbolik sayıların için bilinen Euler formüllerinin genelleştirilmesidir.

4.5 Hibrit Sayıların Yaprak Üzerindeki Cebirsel Yapısı

Pfaff (Pfaff 2000) dördüncü bileşeni sıfır olan reel kuaterniyonların bir alt cümlesini ele almıştır. Tüm bu kuaterniyonların cümlesi, reel kuaterniyonların üç boyutlu bir alt vektör uzayını oluşturan kesilmiş reel kuaterniyonlar olarak adlandırılır. Bu alt uzay 1, i ve j elemanları tarafından üretilmektedir. Buradan hareketle bir kesilmiş kuaterniyon $q = a + bi + cj$ olarak gösterilebilir. Bu alt uzayın çarpma işlemine göre kapalı olmadığı açıktır. Bununla birlikte Pfaff (Pfaff 2000) bu üçlülerin kapalı olduğu bir cümle tanımlamıştır.

Biz de bu makaledeki benzer fikirleri kullanarak hibrit sayıların dört boyutlu uzayını düşünelim. Dördüncü bileşeni sıfır olan hibrit sayıların cümlesini ele alalım. Tüm bu hibrit sayıların kümesi hibrit sayıların üç boyutlu alt vektör uzayını oluşturur

ve kesilmiş hibrit sayılar olarak adlandırılır. Bu durumda bir kesilmiş hibrit sayı $p = a + bi + c\varepsilon$ ile gösterilir. Kesilmiş hibrit sayılar cümlesi yaprak düzleminde yer almaktadır ayrıca hibrit sayıların çarpma işlemine göre kapalı ve değişmeli değildir. Bununla birlikte bu üçlülerin kapalı ve değişmeli olduğu bir çarpma tanımlayabiliriz.

4.5.1 Hibrit sayıların yaprak üzerindeki değişmeli çarpımı

$p = (a_1, b_1, c_1) = a_1 + b_1i + c_1\varepsilon$ ve $q = (a_2, b_2, c_2) = a_2 + b_2i + c_2\varepsilon$ iki tane kesilmiş hibrit sayı olmak üzere burada b_1 ve c_1 (b_2 ve c_2) sıfırdan farklı olsun. Amacımız kesilmiş hibrit sayılar için kapalı ve değişmeli bir çarpma tanımlamaktır. pq çarpımını hesaplırsak

$$pq = (a_1a_2 + c_1b_2 - b_1b_2)1 + (a_1a_2 + b_1a_2)i + (a_1c_2 + c_1a_2)\varepsilon + (c_1b_2 - b_1c_2)h$$

Kesilmiş kuaterniyonların çarpma işlemine göre kapalı olması için h bileşeninin sıfır olması gerekir. Bu durumda

$$\frac{c_1}{b_1} = \frac{c_2}{b_2} = \eta \quad \eta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

olmalıdır. Buradan

$$p = (a_1, 0, 0) + (0, b_1, c_1) = (a_1, 0, 0) + U_p$$

ve

$$q = (a_2, 0, 0) + (0, b_2, c_2) = (a_2, 0, 0) + U_q$$

olup burada U_p ve U_q sıfırdan farklı vektörlerdir. O halde $U_q = \eta U_p$ olup

$U_q = (0, \eta b_1, \eta c_1)$ olduğu kolayca görülmektedir.

O halde

$$pq = (a_1a_2 + \eta b_1^2 + 2\eta b_1c_1)1 + (\eta a_1b_1 + b_1a_2)i + (\eta a_1c_1 + c_1a_2)\varepsilon$$

elde edilir. Bu çarpım aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. Aynı yaprakta yer alan p ve q kesilmiş hibrit sayılarının çarpımı olan pq yine aynı yaprakta yer alır. Bu yüzden hibrit sayıların çarpma işlemi kapalıdır.
2. Değişme özelliğine sahiptir.

3. Aynı yaprakta yer alan vektörler bu çarpma birleşme ve değişme özelliğine sahiptir. Çünkü hibrit sayılarda çarpma işleminin özel bir halidir.
4. $p = a_1 + b_1i + c_1j$ kesilmiş hibrit sayısı ile eşleniği olan $\bar{p} = a_1 - b_1i - c_1j$ ile aynı yapraktır ve $p\bar{p} = (a^2 + (b - c)^2 - c^2) 1 = \|p\|^2$ eşitliği gerçekleşir.
5. p nin tersi olan $p^{-1} = \frac{\bar{p}}{\|p\|^2}$ kesilmiş hibrit sayısı p ile aynı yapraktır.

Örnek 4.1 $\rho = 1 + i + \varepsilon$ ve $w = 3 + 2i + \varepsilon$ iki kesilmiş hibrit sayı olmak üzere

$$\rho = 1 + i + \varepsilon = (1, 0, 0) + (0, 1, 1) = (1, 0, 0) + U_\rho$$

ve

$$w = 3 + 2i + \varepsilon = (3, 0, 0) + (0, 2, 1) = (1, 0, 0) + U_w$$

için

$$\rho w = (1 + i + \varepsilon)(3 + 2i + \varepsilon) = 4 + 5i + 4\varepsilon + h \text{ ve}$$

$w\rho = (3 + 2i + \varepsilon)(1 + i + \varepsilon) = 4 + 3i + 2\varepsilon - h$ olup $\rho w \neq w\rho$ olduğundan bu kesilmiş hibrit sayıların çarpımı değişmeli değildir. Ayrıca kapalı da değildir.

Örnek 4.2 $\rho = 1 + i + \varepsilon$ ve $w = 5 + 2i + 2\varepsilon$ iki kesilmiş hibrit sayı olmak üzere

$$\rho = 1 + i + \varepsilon = (1, 0, 0) + (0, 1, 1) = (1, 0, 0) + U_\rho$$

ve

$$w = 5 + 2i + \varepsilon = (5, 0, 0) + (0, 2, 2) = (1, 0, 0) + U_w$$

$$\text{için } \rho w = (1 + i + \varepsilon)(5 + 2i + 2\varepsilon) = 7 + 7i + 7\varepsilon \text{ ve}$$

$w\rho = (5 + 2i + 2\varepsilon)(1 + i + \varepsilon) = 7 + 7i + 7\varepsilon$ olmak üzere $U_w = 2U_\rho$ olduğundan bu kesilmiş hibrit sayıların çarpımı değişmeli ve kapalıdır.

4.5.2 Kesilmiş hibrit sayıların yaprak üzerindeki kompleks yapısı

$\rho = a + bi + c\varepsilon$, i yönünde açı yapan ve $\text{span}\{1, \varepsilon\}$ düzleminde i_φ birim vektörü tarafından belirlenen yaprakta sıfırdan farklı kesilmiş bir hibrit sayı olsun. Yaprak 1 ve i_φ birim vektörleri tarafından üretildiği için p hibrit sayısını aşağıdaki gibi yeniden yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
\rho &= (a, 0, 0) + U \\
&= a(1, 0, 0) + U \frac{U}{\|U\|} \\
&= a(1, 0, 0) + U i_\varphi \\
&= \|\rho\| \left(\frac{a}{\|\rho\|} (1, 0, 0) + \frac{U}{\|\rho\|} i_\varphi \right) \\
&= \rho e^{i_\varphi \theta}
\end{aligned}$$

burada $i_\varphi = \frac{U}{\|U\|}$ ve $i_\varphi i_\varphi = \pm 1$ dir.

Aşağıdaki örneklerde yaprak parametresi cinsinden kesilmiş hibrit sayıların kutupsal formları incelenmiştir.

Örnek 4.3 $\rho = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{6}\varepsilon$ birim eliptik kesilmiş hibrit sayıdır. Çünkü $|\rho| = 1$, $C(\rho) = 1 > 0$ ve $C_\varepsilon(\rho) = -\frac{1}{4} < 0$ dir. ρ hibrit sayısı $\{1, i_\varphi\}$ bazına göre yeniden yazılacak olursa

$$\begin{aligned}
\rho &= \cos \theta + i_\varphi \sin \theta \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i_\varphi
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $i_\varphi = \sqrt{3}i + \frac{\sqrt{3}}{3}\varepsilon$ ve $\theta = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$ olur. Ayrıca $i_\varphi i_\varphi = -1$ elde edilir.

Örnek 4.4 $\rho = 2 + i + 3\varepsilon$ birim hiperbolik spacelike kesilmiş hibrit sayıdır. Çünkü $|\rho| = 1$, $C(\rho) = -1 < 0$ ve $C_\varepsilon(\rho) = 5 > 0$ dir. ρ hibrit sayısı $\{1, i_\varphi\}$ bazına göre yeniden yazılacak olursa

$$\begin{aligned}
\rho &= \sinh \theta + i_\varphi \cosh \theta \\
&= 2 + \sqrt{5}i_\varphi
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $i_\varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}i + \frac{3\sqrt{5}}{5}\varepsilon$ ve $\theta = \ln(2 + \sqrt{5})$ olur. Ayrıca $i_\varphi i_\varphi = 1$ elde edilir.

Örnek 4.5 $\rho = 3 + i + \varepsilon$ hiperbolik timelike kesilmiş hibrit sayıdır. Çünkü

$C(p) = 8 > 0$ ve $C_\varepsilon(p) = 1 > 0$ dir. p hibrit sayısı $\{1, i_\varphi\}$ bazına göre yeniden yazılacak olursa

$$\begin{aligned} p &= \cosh \theta + i_\varphi \sinh \theta \\ &= \frac{2}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} i_\varphi \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $i_\varphi = i + \varepsilon$ ve $i_\varphi i_\varphi = -1$ elde edilir.

Örnek 4.6 $\rho = 2 + 2i + \varepsilon$ parabolik kesilmiş hibrit sayıdır. Çünkü $C(\rho) = 4 > 0$ ve $C_\varepsilon(\rho) = 0$ dir. ρ hibrit sayısı $\{1, i_\varphi\}$ bazına göre yeniden yazılacak olursa

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{|\rho|} &= \epsilon + i_\varphi \\ &= 1 + i_\varphi \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\epsilon = 1$, $i_\varphi = i + \frac{1}{2}\varepsilon$ ve $i_\varphi i_\varphi = -1$ elde edilir.

4.6 Hibrit Sayıların Yaprak Üzerindeki Yeni Kutupsal Formu

Lemma 4.1 $Bi = (c + dh)i = (c - d)i - d\varepsilon$ biçimindeki herhangi bir hibrit sayı göz önüne alındığında üstel formu için üç durum söz konusudur.

i) Eğer e^{Bi} **kesilmiş eliptik hibrit sayı** (tüm eliptik sayılar timelike) ise bu durumda

$$e^{Bi} = \cos |B| + \frac{B}{|B|} \sin |B| = \alpha_1 + \beta_1 i + \gamma_1 \varepsilon$$

şeklindedir. Burada $B = c + dh$ ($c, d \in \mathbb{R}$), $\alpha_1 = \cos |B|$, $\beta_1 = \frac{(c - d) \sin |B|}{|B|}$
 $\gamma_1 = \frac{-d \sin |B|}{|B|}$ dir.

ii) Eğer e^{Bi} **kesilmiş spacelike hiperbolik hibrit sayı** ise bu durumda

$$e^{Bi} = \sinh |B| + \frac{B}{|B|} \cosh |B| = \alpha_2 + \beta_2 i + \gamma_2 \varepsilon$$

şeklindedir. Burada $B = c + dh$ ($c, d \in \mathbb{R}$), $\alpha_2 = \sinh |B|$, $\beta_2 = \frac{(c - d) \cosh |B|}{|B|}$
 $\gamma_2 = \frac{-d \cosh |B|}{|B|}$ dir.

iii) Eğer e^{Bi} **kesilmiş timelike hiperbolik hibrit sayı** ise bu durumda

$$e^{Bi} = \cosh |B| + \frac{B}{|B|} \sinh |B| = \alpha_3 + \beta_3 i + \gamma_3 \varepsilon$$

şeklindedir. Burada $B = c + dh$ ($c, d \in \mathbb{R}$), $\alpha_3 = \cosh |B|$, $\beta_3 = \frac{(c-d) \sinh |B|}{|B|}$
 $\gamma_3 = \frac{-d \sinh |B|}{|B|}$ dir.

Teorem 4.3 $q = a + bi + c\varepsilon + dh$ şeklindeki bütün hibrit sayılar $A = a + bh$ ve $B = c + dh$ iki hiperbolik sayı olmak üzere $q = Ae^{Bi}$ olarak ifade edilebilir.

İspat. Eğer $q = Ae^{Bi}$ ise $|q| = |A|$ olur. Klasik polar formda olduğu gibi B önemsizdir çünkü $|e^{Bi}| = 1$ gerçekleşir. Bu nedenle eğer $q = 0$ ise $A = 0$ olmak zorundadır.

Yukarıdaki Lemmadan yararlanarak hibrit sayıyı yeniden ifade edecek olursak

$$q = Ae^{Bi} = (a + bh)(\alpha + \beta i + \gamma \varepsilon) = a\alpha + (a\beta - b\beta)i + (a\gamma + b\gamma - b\beta)\varepsilon + b\alpha h$$

dir.

$\alpha = 0$ alırsak q hibrit sayısı $q = y\varepsilon + zh$ formundadır. Diğer yandan $\alpha \neq 0$ (e^{Bi} nin reel kısmı) ve $\xi = a\alpha + b\alpha h$ olarak alırsak $A = \frac{\xi}{|\xi|}$ olur. Öyleyse aşağıdaki durumları incelemeliyiz.

Durum 1: Eğer q **spacelike bir hibrit sayı** ise $e^{Bi} = A^{-1}q$ da spacelike bir hibrit sayı olur ve

$$e^{Bi} = \sinh \theta + \mu \cosh \theta$$

dır. $Bi = \mu\theta$ denkleminde yararlanarak $\sinh \theta = \alpha$, $\mu = \frac{\beta i + \gamma \varepsilon}{|\beta i + \gamma \varepsilon|}$ ve $\cosh \theta = |\beta i + \gamma \varepsilon|$ olduğunu kolayca görebiliriz.

Durum 2 : Eğer q **timelike bir hibrit sayı** ise $e^{Bi} = A^{-1}q$ spacelike vektörel kısmı bir timelike hibrit sayı olur ve

$$e^{Bj} = \cosh \theta + \mu \sinh \theta$$

dır. $Bi = \mu\theta$ denkleminde yararlanarak $\cosh \theta = \alpha$, $\mu = \frac{\beta i + \gamma \varepsilon}{|\beta i + \gamma \varepsilon|}$ ve $\sinh \theta = |\beta i + \gamma \varepsilon|$ olduğunu kolayca görebiliriz.

Durum 3 : Eğer q eliptik bir hibrit sayı ise $e^{Bi} = A^{-1}q$ eliptik bir hibrit sayı olur ve

$$e^{Bj} = \cos \theta + \mu \sin \theta$$

dır. $Bi = \mu\theta$ denkleminde yararlanarak $\cos \theta = \alpha$, $\mu = \frac{\beta i + \gamma \varepsilon}{|\beta i + \gamma \varepsilon|}$ ve $\sin \theta = |\beta i + \gamma \varepsilon|$ olduğunu kolayca görebiliriz. ■

Teorem 4.4 $q = x + yi + z\varepsilon + wh$ şeklindeki birim her hibrit sayı

$$q = A.X = e^{h\theta} e^{i_\varphi \psi}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada A hiperbolik bir sayı ve X kesilmiş bir hibrit sayıdır

$$\text{Ayrıca } i_\varphi = \left\{ \frac{(xy + yw)i}{\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{(y-z)^2 + w^2}} + \frac{(xz + yw - zw)\varepsilon}{\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{(y-z)^2 - d^2}} \right\}, \text{span} \{i, \varepsilon\}$$

düzleminde birim vektördür.

İspat. $q = x + yi + z\varepsilon + wh$ birim hibrit sayı olsun. q hibrit sayısını yeniden yazarsak

$$q = (x + wh) \left(1 + \frac{y}{x+wh}i + \frac{z}{x+wh}\varepsilon \right)$$

$$= \frac{(x+wh)}{\sqrt{|x^2-w^2|}} \left(\sqrt{|x^2-w^2|} + \sqrt{|x^2-w^2|} A^{-1}(yi + z\varepsilon) \right)$$

$$= \frac{(x+wh)}{\sqrt{|x^2-w^2|}} \left(\sqrt{|x^2-w^2|} + \sqrt{|x^2-w^2|} \frac{1}{x+wh} \sqrt{|(y-z)^2 - z^2|} \frac{1}{\sqrt{|(y-z)^2 - z^2|}} (yi + z\varepsilon) \right)$$

$$= \frac{(x+wh)}{\sqrt{|x^2-w^2|}} \left(\sqrt{|x^2-w^2|} + \sqrt{|(y-z)^2 - z^2|} \left\{ \frac{(xy+yw)i}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{(y-z)^2+w^2}} + \frac{(xz+yw-zw)\varepsilon}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{(y-z)^2-d^2}} \right\} \right)$$

Burada $A = \frac{(x+wh)}{\sqrt{|x^2-w^2|}}$ ve $X = \sqrt{|x^2-w^2|} + \sqrt{|(y-z)^2 - z^2|} i_\varphi$ olarak ele alınırsa q hibrit sayının kutupsal formu $q = A.X = e^{h\theta} e^{\psi i_\varphi}$ olur. Ayrıca $\|i_\varphi\| = 1$ ve $i_\varphi i_\varphi = \pm 1$ gerçekleşir. ■

Burada en önemli nokta bir hibrit sayının hiperbolik bir sayı ve kesilmiş bir kuaterniyon çarpımı olarak ifade edilmesidir.

Örnek 4.7 $q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}\varepsilon + h$ hibrit sayısını ele alalım. q , $C_\varepsilon(q) = \frac{5}{4} > 0$, $C(q) = -1 < 0$ ve $|q| = 1$ olduğundan hiperbolik spacelike bir hibrit sayıdır q hibrit

sayısını yeniden yazacak olursak

$$\begin{aligned}
q &= \left(\frac{1}{2} + h\right) \left[1 + \frac{1}{2(\frac{1}{2}+h)}i + \frac{1}{2(\frac{1}{2}+h)}\varepsilon\right] \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2}+h\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}A^{-1}\left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}\varepsilon\right)\right] \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}h\right) \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left\{\sqrt{3}i + \frac{\sqrt{3}}{3}\varepsilon\right\}\right]
\end{aligned}$$

burada $A = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}h\right)$, $X = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i_\varphi$ ve $i_\varphi = \sqrt{3}i + \frac{\sqrt{3}}{3}\varepsilon$ olarak ele alınırsa q hibrit sayısı $q = A.X$ biçiminde yazılabilmektedir. Burada kolayca gösterilebilir ki $\|i_\varphi\| = 1$ ve $i_\varphi i_\varphi = -1$ dir. Buna göre $\theta = \pm \ln \sqrt{3}$ ve $\psi = -\frac{\pi}{6}$ için A hiperbolik sayı ve X kesilmiş bir hibrit sayı olmak üzere polar formlar sırasıyla $e^{h\theta}$ ve $e^{i_\varphi\psi}$ şeklindedir. Sonuç olarak $q = e^{h\theta}.e^{i_\varphi\psi}$ olup sayı iki Euler parametresi cinsinden ifade edilmiş olur.

Diğer yandan hibrit sayıların matris temsillerini kullanarak q hibrit sayısının matris formunu A ve X sayılarının matris formları yardımıyla ifade edecek olursak

$f : H \longrightarrow M_{2 \times 2}$ izomorfizmi ile

$$f(q) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = f(A) f(X)$$

elde edilir.

Örnek 4.8 $q = \frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{5}}i + \frac{2}{\sqrt{5}}\varepsilon + \frac{1}{\sqrt{5}}h$ hibrit sayısını ele alalım. q , $C_\varepsilon(q) = \frac{4}{5} > 0$, $C(q) = 1 > 0$ ve $|q| = 1$ olduğundan hiperbolik timelike bir hibrit sayıdır. q hibrit sayısını yeniden yazacak olursak

$$\begin{aligned}
q &= \left(\frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}h\right) \left[1 + \frac{3}{\sqrt{5}\left(\frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}h\right)}i + \frac{2}{\sqrt{5}\left(\frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}h\right)}\varepsilon\right] \\
&= \frac{\left(\frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}h\right)}{\frac{2\sqrt{2}}{5}} \left[\frac{2\sqrt{2}}{5} + \frac{2\sqrt{2}}{5}A^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{5}}i + \frac{2}{\sqrt{5}}\varepsilon\right)\right] \\
&= \left(\frac{3}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{8}}h\right) \left[\frac{2\sqrt{2}}{5} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\frac{12\sqrt{8}}{8}i + \frac{7\sqrt{8}}{8}\varepsilon\right\}\right]
\end{aligned}$$

burada $A = \left(\frac{3}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{8}}h\right)$, $X = \left[\frac{2\sqrt{2}}{5} - \frac{1}{\sqrt{5}}i_\varphi\right]$ ve $i_\varphi = \frac{12\sqrt{8}}{8}i + \frac{7\sqrt{8}}{8}\varepsilon$ olarak ele alınırsa q hibrit sayısı $q = A.X$ biçiminde de yazılabilmektedir. Burada kolayca gösterilebilir ki $\|i_\varphi\| = 1$ ve $i_\varphi i_\varphi = -1$ dir. Buna göre $\theta = \pm\sqrt{3}$ ve $\psi = \ln\left(\frac{2\sqrt{10}\pm\sqrt{15}}{5}\right)$ için A

hiperbolik sayı ve X kesilmiş bir hibrit sayı olmak üzere polar formlar sırasıyla $e^{h\theta}$ ve $e^{i_\varphi\psi}$ şeklindedir. Yani $q = e^{h\theta}.e^{i_\varphi\psi}$ dir.

Diğer yandan hibrit sayıların matris temsillerini kullanarak q hibrit sayısının matris formunu A ve X sayılarının matris formları yardımıyla ifade edecek olursak

$f : H \longrightarrow M_{2 \times 2}$ izomorfizmi ile

$$f(q) = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} \\ \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{3}{\sqrt{8}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{15}{\sqrt{40}} & \frac{5}{\sqrt{40}} \\ -\frac{5}{\sqrt{40}} & \frac{1}{\sqrt{40}} \end{bmatrix} = f(A) f(X)$$

elde edilir.

Örnek 4.9 $q = \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{3}{\sqrt{6}}i + \frac{1}{\sqrt{6}}\varepsilon + \frac{1}{\sqrt{6}}h$ hibrit sayısını ele alalım. q , $C_\varepsilon(q) = -\frac{1}{3} < 0$ $C(q) = 1 > 0$ ve $|q| = 1$ olduğundan eliptik timelike bir hibrit sayıdır. q hibrit sayısını yeniden yazacak olursak

$$\begin{aligned} q &= \left(\frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}}h \right) \left[1 + \frac{3}{\sqrt{6}\left(\frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}}h\right)}i + \frac{1}{\sqrt{6}\left(\frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}}h\right)}\varepsilon \right] \\ &= \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}}h \right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}A^{-1} \left(\frac{3}{\sqrt{6}}i + \frac{1}{\sqrt{6}}\varepsilon \right) \right] \\ &= \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}h \right) \left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 3i + \frac{4}{3}\varepsilon \right\} \right] \end{aligned}$$

burada $A = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}h \right)$, $X = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i_\varphi \right]$ ve $i_\varphi = 3i + \frac{4}{3}\varepsilon$ olarak ele alınırsa q hibrit sayısı $q = A.X$ biçiminde de yazılabilmektedir. Burada kolayca görülmektedir ki $\|i_\varphi\| = 1$ ve $i_\varphi i_\varphi = -1$ dir.

Buna göre $\theta = \pm \ln(\sqrt{3})$ ve $\psi = \frac{\pi}{4}$ için A hiperbolik sayı ve X kesilmiş bir hibrit sayı olmak üzere polar formlar sırasıyla $e^{h\theta}$ ve $e^{i_\varphi\psi}$ şeklindedir. Yani $q = e^{h\theta}.e^{i_\varphi\psi}$ dir.

Diğer yandan hibrit sayıların matris temsillerini kullanarak q hibrit sayısının matris formunu A ve X sayılarının matris formları yardımıyla ifade edecek olursak

$f : H \longrightarrow M_{2 \times 2}$ izomorfizmi ile

$$f(q) = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{7\sqrt{2}}{6} & \frac{5\sqrt{2}}{6} \\ -\frac{5\sqrt{2}}{6} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = f(A) f(X)$$

elde edilir.

Örnek 4.10 $q = 3 + 7i - 4\varepsilon + \sqrt{2}h$ hibrit sayısını ele alalım. q , $C_\varepsilon(q) = 9 > 0$, $C(q) = 0$ olduğundan hiperbolik lightlike bir hibrit sayıdır q hibrit sayısını yeniden yazacak olursak

$$\begin{aligned} q &= (3 + \sqrt{2}h) \left[1 + \frac{1}{3+\sqrt{2}h}7i + \frac{1}{3+\sqrt{2}h}4\varepsilon \right] \\ &= \frac{3+\sqrt{2}h}{\sqrt{7}} \left[\sqrt{7} + \sqrt{7}A^{-1}(7i - 4\varepsilon) \right] \\ &= \frac{3+\sqrt{2}h}{\sqrt{7}} \left[\sqrt{7} + \sqrt{105} \left\{ \frac{21+7\sqrt{2}}{\sqrt{7}}i + \frac{11\sqrt{2}-12}{\sqrt{7}}\varepsilon \right\} \right] \end{aligned}$$

burada $A = \left(\frac{3+\sqrt{2}h}{\sqrt{7}} \right)$, $X = [\sqrt{7} + \sqrt{105}i_\varphi]$ ve $i_\varphi = \frac{21+7\sqrt{2}}{\sqrt{7}}i + \frac{11\sqrt{2}-12}{\sqrt{7}}\varepsilon$ olarak ele alınırsa q hibrit sayısı $q = A.X$ biçiminde de yazılabilmektedir. Burada kolayca gösterilebilir ki $\|i_\varphi\| = 1$ ve $i_\varphi i_\varphi = -1$ dir.

Buna göre $\theta = \ln \left(\frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \right)$. için A hiperbolik sayı ve X kesilmiş bir hibrit sayı olmak üzere polar formlar sırasıyla $e^{h\theta}$ ve $e^{\psi i_\varphi}$ şeklindedir. Yani $q = e^{h\theta} \cdot e^{\psi i_\varphi}$ dir.

Diğer yandan hibrit sayıların matris temsillerini kullanarak q hibrit sayısının matris formunu A ve X sayılarının matris formları yardımıyla ifade edecek olursak

$f : H \longrightarrow M_{2 \times 2}$ izomorfizmi ile

$$f(q) = \begin{bmatrix} 7 & 3 + \sqrt{2} \\ -3 + \sqrt{2} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{7}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} & \frac{3}{\sqrt{8}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{19+3\sqrt{2}}{\sqrt{7}} & \frac{9+4\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \\ \frac{-9-4\sqrt{2}}{\sqrt{7}} & \frac{-5-3\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \end{bmatrix} = f(A) f(X)$$

elde edilir.

Örnek 4.11 $q = 1 + 18i + 8\varepsilon + 6h$ hibrit sayısını ele alalım. q , $C_\varepsilon(q) = 0$

$C(q) = 1 > 0$ olduğundan parabolik timelike bir hibrit sayıdır. q hibrit sayısını yeniden yazacak olursak

$$\begin{aligned} q &= (1 + 6h) \left[1 + \frac{1}{1+6h}18i + \frac{1}{1+6h}8\varepsilon \right] \\ &= \frac{(1+6h)}{\sqrt{35}} \left[\sqrt{35} - \sqrt{35}A^{-1}(18i + 8\varepsilon) \right] \\ &= \frac{(1+6h)}{\sqrt{35}} \left[\sqrt{35} - 6 \left\{ \frac{21}{\sqrt{35}}i + \frac{34}{3\sqrt{35}}\varepsilon \right\} \right] \end{aligned}$$

burada $A = \left(\frac{1}{\sqrt{35}} + \frac{6}{\sqrt{35}}h \right)$, $X = \left[\sqrt{35} - 6 \left\{ \frac{21}{\sqrt{35}}i + \frac{34}{3\sqrt{35}}\varepsilon \right\} \right]$ ve $i_\varphi = \frac{21}{\sqrt{35}}i + \frac{34}{3\sqrt{35}}\varepsilon$ olarak ele alınırsa q hibrit sayısı $q = A.X$ biçiminde de yazılabilmektedir. Kolayla gösterilebilir ki $\|i_\varphi\| = 1$ ve $i_\varphi i_\varphi = -1$ için $\theta = \mp \ln \left(\frac{\sqrt{35}}{5} \right)$ ve $\psi = \ln(6 \pm \sqrt{35})$ dir. O halde A hiperbolik sayı ve X kesilmiş bir hibrit sayı olmak üzere polar formlar sırasıyla $e^{h\theta}$ ve $e^{i_\varphi \psi}$ şeklindedir. Yani $q = e^{h\theta} e^{i_\varphi \psi}$ dir.

Diğer yandan hibrit sayıların matris temsillerini kullanarak q hibrit sayısının matris formunu A ve X sayılarının matris formları yardımıyla ifade edecek olursak $f : H \longrightarrow M_{2 \times 2}$ izomorfizmi ile

$$f(q) = \begin{bmatrix} 9 & 16 \\ -4 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{35}} & \frac{6}{\sqrt{35}} \\ \frac{6}{\sqrt{35}} & \frac{1}{\sqrt{35}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{33}{\sqrt{35}} & -\frac{58}{\sqrt{35}} \\ \frac{58}{\sqrt{35}} & \frac{103}{\sqrt{35}} \end{bmatrix} = f(A) f(X)$$

elde edilir.



5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Kuaterniyonlar kinematikte hareketlerin incelenmesi bakımından önemli rol oynamaktadır. Bu tezde öncelikle kuaterniyonlar için polar form tanımlanmış sonrasında ise reel ve split kuaterniyonlar için yeni bir polar formlar elde edilmiştir. Bu polar formların daha iyi anlaşılabilmesi için teori örneklerle desteklenmiştir. Bununla birlikte yaprak parametresi kavramı tanıtılmış ve kuaterniyonların yaprak parametresi cinsinden temsillerine yer verilmiştir. Diğer kuaterniyon çeşitleri bu yeni polar form cinsinden incelenmemiş olup kuaterniyonlar üzerine çalışan araştırmacılar için yeni çalışma alanları yaratabilir.

Hibrit sayılar kompleks, dual ve hiperbolik sayıların kombinasyonlarını içeren bir sayı sistemidir. Bu tezde Özdemir tarafından bir yayımla verilen hibrit sayıların cebirsel ve geometrik özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, hibrit sayılar için yeni bir polar form tanımlanmıştır. Bununla birlikte hibrit sayılar için yaprak parametresi kavramına yer verilmiştir. Burada dikkat çekilecek noktalardan biri ise $q = a + bi + c\varepsilon + dh$ bir hibrit sayısını sadece $(a + dh)$ parantezine alındığında içeride bir yaprak yapısı tanımlanmış olmasıdır. Hibrit sayılar farklı sayı sistemlerinin kombinasyonlarını içermesi açısından araştırmacılar için yeni sayı sistemleri tanımlarken güzel bir fikir oluşturulabilir.

KAYNAKLAR

- Atasoy, A., Ata, E., Yaylı, Y. ve Kemer, Y. 2017. A new polar representation for split and dual split quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 27(3), 2307-2319.
- Churchill, R. V., Brown, J.W 1984. *Complex Variables and Applications*, McGraw-Hill Company, 461, New York.
- Çakır, H. 2017. Hiperbolik sayılar ve hiperbolik sayı matrislerinin cebirsel ve geometrik uygulamaları. Yüksek Lisans Tezi, Akdeniz Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 484988, Antalya
- Hacısalihoglu, H. H. 1983. *Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi*. Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, Ankara
- Kula, L. 2003 Bölünmüş kuaterniyonlar ve geometrik uygulamaları. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 131429, Ankara.
- Kula, L., Yaylı, Y. 2006. A commutative multiplication of dual number triplets. *Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 10, 53-60.
- Kisil, V. V. 2013. Induced representations and hypercomplex numbers. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 23(2), 417-440.
- Kuipers, J. B. *Quaternions and Rotation Sequences*. Princeton University Press, 400, ABD.
- Lancsoz, C. 1967. William Rowan Hamilton an Appereciation. *American Scientist*, 129-148.
- O'Neill, B. 1983. *Semi-Riemann geometry with applications to relativity*. Academic Press, 468p., New York.
- Özdemir, M. 2018. Introduction to hybrid numbers. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 28(11), 3-32.
- Özdemir, M., Ergin, A. A. 2006. Rotations with unit timelike quaternion in Minkowski 3-space. *Journal of Geometry and Physics*, 322-336.
- Pfaff, F. R. 2000. A commutative multiplication of number triplets. *The American Mathematical Monthly*, 107(2), 156-162.
- Sangwine, S. J., Le Bihan, N. 2010. Quaternion polar representation with complex modulus and complex argument inspired by the Cayley-Dickson form, *Advances in Applied Clifford Algebras*, 20, 111-120.
- Soydaş, M. 2003 Bi kuaterniyonların modern fiziğe uygulanması. Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Eskişehir.

Spiegel, M., Lipschutz, S., Schiller, J., Spellman, D. 2009. Complex Variables, McGraw-Hill Professional, 369, ABD.



ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Büşra KOÇAY

Doğum Yeri : Eskişehir

Doğum Tarihi : 26/04/1995

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl) :

Lise : Gazi Mustafa Kemal Anadolu Lisesi (2013)

Lisans : Ankara Üniversitesi, Matematik Bölümü (2017)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Bölümü (Haziran 2019)