

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SİMETRİ ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yalçın YILMAZ

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 27 Mayıs 1996

Tezin Savunulduğu Tarih : 13 Haziran 1996

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Gülseren AYDIN

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mehmet CAN

Yrd. Doç. Dr. Faruk GÜNGÖR

G. Aydın

M. Can

F. Güngör

ÖNSÖZ

Başta, tez aşamasında bana yol gösteren ve her türlü imkanı sağlayan çok değerli hocam sayın Doç. Dr. Gülseren Aydın olmak üzere, tezin yazım aşamasında bana yardımcı olan Andreas Tiefenbach'a ve bütün çalışma arkadaşlarıma en içten teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	ii
ÖZET	v
SUMMARY	vi
BÖLÜM 1 LİE DÖNÜŞÜM GRUPLARI ve	
SONSUZ KÜÇÜK DÖNÜŞÜMLER	1
1.1 Lie Dönüşüm Grupları	1
1.2 Sonsuz Küçük Dönüşümler	2
1.3 Sonsuz Küçük Üreteçler	4
1.4 Değişmez Çözümler	6
1.5 Kanonik Koordinatlar	7
1.6 Değişmez Yüzeyler, Değişmez Eğriler, Değişmez Noktalar	9
1.7 Genişletilmiş Dönüşümler (Uzanımlar)	12
1.7.1 Genişletilmiş Dönüşümler	
Bir-Bağımlı ve Bir-Bağımsız Değişken	13
1.7.2 Genişletilmiş Sonsuz Küçük Dönüşümler	
Bir-Bağımlı ve Bir-Bağımsız Değişken	16
1.7.3 Genişletilmiş Dönüşümler	
Bir-Bağımsız ve n-Bağımlı Değişken	17
1.7.4 Genişletilmiş Sonsuz Küçük Dönüşümler	
Bir-Bağımlı ve n-Bağımsız Değişken	20
1.8 Lie Cebirleri	23
1.8.1 Çözülebilir Lie Cebirleri	25
BÖLÜM 2 ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN DEĞİŞMEZLİĞİ	26
2.1 Kanonik Koordinatlar	27
2.2 İntegrasyon Çarpanı	28
2.2.1 İki ve Daha Yüksek Mertebeden Diferansiyel Denklemler	29
2.3 Kanonik Koordinatlar Yardımıyla Mertebe İndirgeme	30

2.4	Diferansiyel Değişmezler Yardımıyla Mertebe İndirgeme	31
2.5	n . Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemlerin Sonsuz Küçük Dönüşümleri İçin Belirleyici Denklemler	33
2.6	Blasius Denkleminin Kabul Ettiği Simetriler	35
2.7	Verilen Bir Grup Altında Değişmez Olan Diferansiyel Denklemlerin Belirlenmesi	38
2.8	Çok-Parametrelili Gruplar Altında Adi Diferansiyel Denklemlerin Değişmezliği	39
2.8.1	İki-parametrelili Bir Grup Altında İkinci Mertebeden Bir Adi Diferansiyel Denklemin Değişmezliği	39
2.8.2	İki-parametrelili Bir Grup Altında n inci Mertebeden Bir Adi Diferansiyel Denklemin Değişmezliği	41
2.8.3	r -parametrelili Bir Grup Altında n inci Mertebeden Bir Adi Diferansiyel Denklemin Değişmezliği	42
2.9	Değişmez Çözümler	45
BÖLÜM 3 DEĞME DÖNÜŞÜMLERİ ; DEĞME SİMETRİLERİ		49
3.1	Değme Dönüşümleri	49
3.2	$y''' = 0$ Denkleminin Değme Simetrileri	53
BÖLÜM 4 NOETHER TEOREMİ ve LİE-BÄCKLUND SİMETRİLERİ		56
4.1	Giriş	56
4.2	Noether Teoremi	57
4.3	Euler-Lagrange Denklemleri	58
4.4	Değişim Simetrileri ve Korunum Kuralları ; Boyer Formülasyonu	62
4.5	Lie-Bäcklund Dönüşümlerinin Denklik Sınıfları, Lie-Bäcklund Simetrileri	65
4.6	Burgers Denkleminin Lie-Bäcklund Simetrileri	68
SONUÇLAR		75
KAYNAKLAR		76
ÖZGEÇMİŞ		77

ÖZET

Bu çalışmada Lie dönüşüm gruplarının yapısı, özellikleri, Lie nokta dönüşümleri Lie değme dönüşümleri ve Lie-Bäcklund dönüşümleri incelenmiş ve bazı mühendislik problemlerine uygulanmıştır.

Birinci bölümde, öncelikle cebirsel bir yapı üzerinde kurulan Lie dönüşüm gruplarının özellikleri, bunlarla oluşturulan sonsuz küçük dönüşümleri, bunların üreteçleri ve Lie'nin birinci temel teoremi verilmiştir. Bir $x^* = X(x; \epsilon)$ dönüşümü altında verilen bir $F(x)$ fonksiyonunun değişmezliği araştırılmış ve yine $x^* = X(x; \epsilon)$ Lie dönüşüm grubu için kanonik $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ koordinatları yardımıyla $y_i^* = y_i, y_n^* = y_n + \epsilon, i = 1, 2, \dots, n - 1$ dönüşüm grubuna dönüştürüldüğü gösterilmiştir. Bir x noktasının $x^* = X(x; \epsilon)$ dönüşümü altında $x^* = x$ olduğunda değişmez bir nokta; bir $F(x, y) = 0$ eğrisinin $x^* = X(x, y; \epsilon), y^* = Y(x, y; \epsilon)$ dönüşümü altında $F(x^*, y^*) = 0$ olduğunda bir değişmez eğri ve $F(x) = 0$ yüzeyinin aynı x^* dönüşümü altında $F(x^*) = 0$ olduğunda değişmez bir yüzey olduğu gösterilmiştir. r -parametrelili $x^* = X(x; \epsilon), \epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_r)$ dönüşüm grubunun X_α üreteçlerinin oluşturduğu vektör uzayının, bazı koşullar sağlandığında bir $\mathcal{L}$ Lie cebri oluşturduğu gösterilmiştir. Bir Lie cebrinin bir ideali yardımıyla tanımlanan çözülebilir Lie cebri kavramı diferansiyel denklemlerin çözümünde önemli kolaylıklar sağlamaktadır.

İkinci bölümde verilen bir diferansiyel denklemin, bir Lie grubunu kabul etmesi ve bu grup altında değişmezliği ele alındı. $y' = f(x, y)$ şeklinde verilen bir diferansiyel denklem $x^* = X(x, y; \epsilon), y^* = Y(x, y; \epsilon)$ dönüşüm grubu altında (r, s) kanonik koordinat dönüşümü ile indirgenerek genel çözümü bulundu. $y_n = f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})$ diferansiyel denklemi için kanonik koordinatlar yardımıyla mertebesinin bir basamak düşürülebildiği görüldü. n inci mertebeden bir adi diferansiyel denklemin kabul ettiği sonsuz küçük dönüşümler için belirleyici denklemler elde edilerek denklemin kabul ettiği simetriler bulundu. Ayrıca n inci mertebeden bir denklemin kabul ettiği dönüşüm grubu r -parametrelili ise ve bunun oluşturduğu r -boyutlu Lie cebri, çözülebilir ise, denklemin mertebesinin r defa düşürülebileceği kanıtlandı. Üçüncü bölümde Değme dönüşümleri incelenerek $y''' = 0$ denkleminin değme simetrileri elde edildi. Son bölümde Noether teoremi ile genelleştirilmiş Lie-Bäcklund simetrileri ele alındı, verilen bir fiziksel sistem için korunum kuralları verildi ve son olarak genelleştirilmiş Lie-Bäcklund simetrileri yardımıyla Burgers denkleminin kabul ettiği simetriler elde edildi.

SUMMARY

SYMMETRY ANALYSIS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

In this study, structures of Lie Groups of transformations, their properties, Lie point, contact transformations and Lie-Bäcklund transformations are investigated; also they are applied to some Engineering problems.

In the first chapter, the properties of Lie group of transformations constructed over an algebraic structure, infinitesimal generators and Lie's first fundamental theorem are given. Invariance of a function $F(\mathbf{x}) = 0$ under a given transformation $\mathbf{x}^* = X(\mathbf{x}; \epsilon)$ is investigated. For any Lie group of transformations $\mathbf{x}^* = X(\mathbf{x}; \epsilon)$ there exists a set of canonical coordinates

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

such that

$$\mathbf{x}^* = X(\mathbf{x}; \epsilon)$$

is equivalent to

$$y_i^* = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$y_n^* = y_n + \epsilon.$$

A point $\mathbf{x}$ is an invariant point for the Lie Group of transformations $\mathbf{x}^* = X(\mathbf{x}; \epsilon)$ if and only if $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}$ under $\mathbf{x}^* = X(\mathbf{x}; \epsilon)$. A curve

$$F(x, y) = 0$$

is an invariant curve for a one-parameter Lie Group of transformations

$$x^* = X(x, y; \epsilon) = x + \epsilon \xi(x, y) + O(\epsilon^2)$$

$$y^* = Y(x, y; \epsilon) = y + \epsilon \eta(x, y) + O(\epsilon^2)$$

with infinitesimal generator

$$X = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

if and only if $F(x^*, y^*) = 0$ when $F(x, y) = 0$. A surface

$$F(\mathbf{x}) = 0$$

is an invariant surface for a one-parameter Lie Group of transformations $\mathbf{x}^* = X(\mathbf{x}; \epsilon)$ if and only if $F(\mathbf{x}^*) = 0$ when $F(\mathbf{x}) = 0$.

It is shown that if $u = (u^1, u^2, \dots, u^m)$ and $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ denote respectively m -dependent and n -independent variables, the transformation group $x^* = X(x, u; \epsilon)$, $u^* = U(x, u; \epsilon)$ in the (x, u) -space can be extended to transformations group

$$\begin{aligned} x^* &= X(x, u; \epsilon) \\ u^* &= U(x, u; \epsilon) \\ u_1^* &= U(x, u, u_1; \epsilon) \\ &\vdots \\ u_k^* &= U(x, u, u_1, \dots, u_k; \epsilon) \end{aligned}$$

in the $(x, u, u_1, \dots, u_k)$ -space:

The total derivative operator is defined by

$$\frac{D}{Dx} = \frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + y_{n+1} \frac{\partial}{\partial y_n} + \dots$$

In the case of one dependent and one independent variables, the k th extension of the one-parameter Lie Group of transformations

$$x^* = X(x, y; \epsilon), y^* = Y(x, y; \epsilon)$$

is given by

$$\begin{aligned} x^* &= X(x, y; \epsilon), \\ y^* &= Y(x, y; \epsilon), \\ y_i^* &= Y_i(x, y, y_1, \dots, y_i; \epsilon) = \frac{\frac{DY_{i-1}}{Dx}}{\frac{DX(x, y; \epsilon)}{Dx}}, i = 1, 2, \dots, k \end{aligned}$$

where $Y_0 = Y(x, y; \epsilon)$. The one-parameter Lie Group of transformations

$$\begin{aligned} x^* &= X(x, y; \epsilon) = x + \epsilon \xi(x, y) + O(\epsilon^2) \\ y^* &= Y(x, y; \epsilon) = y + \epsilon \eta(x, y) + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

acting on (x, y) -space with corresponding infinitesimal generator

$$X = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

The k th extension of this group of transformations is given by

$$\left. \begin{aligned} x^* &= X(x, y; \epsilon) = x + \epsilon \xi(x, y) + O(\epsilon^2) \\ y^* &= Y(x, y; \epsilon) = y + \epsilon \eta(x, y) + O(\epsilon^2) \\ y_1^* &= Y_1(x, y; \epsilon) = y_1 + \epsilon \eta^{(1)}(x, y, y_1) + O(\epsilon^2) \\ &\vdots \\ y_k^* &= Y_k(x, y, y_1, \dots, y_k; \epsilon) = y_k + \epsilon \eta^{(k)}(x, y, y_1, \dots, y_k) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \right\}$$

and its infinitesimal generator is

$$X^{(k)} = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + \eta^{(1)}(x, y, y_1) \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + \eta^{(k)}(x, y, y_1, \dots, y_k) \frac{\partial}{\partial y_k}$$

In studying invariance properties of a k th order partial differential equation with dependent variable u and independent variable $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ with $u = u(x)$ we are naturally led to the problem of finding the extension of transformations on (x, u) -space to $(x, u, u_1, \dots, u_k)$ -space where u represents all k th derivatives of u with respect to x .

In the same way, one-dependent and one-independent case transformations acting on (x, u) -space can be extended to $(x, u, u_1, \dots, u_k)$ -space. Their infinitesimal generators are given by obtaining extended infinitesimal transformations.

A one-parameter Lie group of transformations acting on the space of independent and dependent variables is naturally extended to a one-parameter Lie group of transformations acting on any enlarged space which includes all derivatives of the dependent variables up to a fixed finite order.

The study of multi-parameter Lie groups of transformations reduces to the study of infinitesimal generators of one-parameter subgroups. The infinitesimal generators form a vector space called a Lie Algebra which is closed under an additional operation (commutation). For our purposes of constructing solutions to differential equations, a multi-parameter Lie group of transformations is completely characterized by its Lie Algebra. The structure (commutator table) of a multi-parameter group's Lie Algebra will play an essential role in applying infinitesimal transformations to differential equations.

In the second chapter, if a given ordinary differential equation admits a one-parameter Lie group of transformations then its order can be reduced constructively by one by the use of canonical coordinates or differential invariants. Moreover the solution of the given ordinary differential equation is found by quadrature after solving the reduced ordinary differential equation. Knowing the invariance

of a first order ordinary differential equation under a nontrivial one-parameter Lie Group of transformations is equivalent to finding an integrating factor for the ordinary differential equation.

Every first order ordinary differential equation admits a nontrivial infinite-parameter Lie Group of transformations. A second order ordinary differential equation admits at most an eight-parameter Lie Group of transformations whereas an n th order ordinary differential equation ($n \geq 3$) admits at most an $(n+4)$ -parameter group. Olver (1986) showed that if an n th order ordinary differential equation admits an r -parameter solvable Lie Group of transformations ($n \geq r$) then it can be reduced to an $(n-r)$ th order ordinary differential equation plus r quadratures.

If an ordinary differential equation admits a one-parameter Lie group of transformations then special solutions called invariant solutions (which are also invariant curves of the group) can be constructed. For a second or higher order ordinary differential equation such invariant solutions can be found without explicitly solving the given ordinary differential equation. If a first order ordinary differential equation admits a nontrivial one-parameter Lie group of transformations then corresponding invariant solutions can be determined without solving any ordinary differential equation.

In the third chapter, we examined Lie group of contact transformations and found the contact transformations of $y''' = 0$.

In the forth chapter, we generalized Lie Group of point transformations to Lie-Bäcklund transformations which are defined by infinitesimals depending on a finite number of derivatives of the dependent variables. We showed that a Lie-Bäcklund symmetry admitted by an action integral, i.e. a variational symmetry, leads to a conservations law.

If a nonlinear differential equation admits a Lie-Bäcklund symmetry not equivalent to a point symmetry or contact symmetry, then usually it admits an infinite sequence of Lie-Bäcklund symmetries. We can always compute Lie-Bäcklund symmetries of a given partial differential equation by a simple generalization of Lie's algorithm. Since every Lie-Bäcklund symmetry is equivalent to one which leaves the independent variables invariant, we only need to compute infinitesimal generator of Lie-Bäcklund symmetries which do not operate on independent variables. For systems arising from a Lagrangian formulation, it is given a fundamental theorem due to Noether. She proved that for every infinitesimal transformation which is admitted by the action integral of a Lagrangian system one

can find a conservation law.

In general a global Lie-Bäcklund transformation acts on infinite-dimensional space which includes all derivatives of dependent variables. This space becomes finite-dimensional if and only if the Lie-Bäcklund transformation is equivalent to a point transformation or a contact transformation.

Finally as an example, we constructed a conservation law for a physical system and we found symmetries of Burgers equation admitting generalized symmetries, Lie-Bäcklund symmetries.



BÖLÜM 1 LİE DÖNÜŞÜM GRUPLARI ve SONSUZ KÜÇÜK DÖNÜŞÜMLER

1.1 Lie Dönüşüm Grupları

1.1.1 Grup

Tanım. Bir G grubu, ϕ işlemiyle birlikte;

(i)(kapalılık) G nin her a, b elemanı için $\phi(a, b)$ G nin elemanıdır;

(ii)(Birleşme) G nin her a, b, c elemanı için

$$\phi(a, \phi(b, c)) = \phi(\phi(a, b), c);$$

(iii)(Birim) G nin bir e birim elemanı vardır öyleki her a elemanı için

$$\phi(a, e) = \phi(e, a) = a;$$

(iv)(Ters) G nin her a elemanı için öyle bir a^{-1} elemanı vardır öyleki

$$\phi(a, a^{-1}) = \phi(a^{-1}, a) = e;$$

aksiyomlarını sağlayan elemanlar kümesidir.

Abelyen grup. Her a, b elemanı için

$$\phi(a, b) = \phi(b, a)$$

oluyorsa G ye Abelyen grup denir .

Alt grup. G nin elemanlarının bir alt cümlesi üzerinde aynı ϕ işlemi ile tanımlı bir gruba alt grup denir .

1.1.2 Dönüşüm Grupları

Tanım. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ $D \subset R^n$ de tanımlı bir nokta olsun. Eğer D de tanımlı her x için, $S \subset R$ cümlesine ait bir ϵ parametresine bağlı ve S deki ϵ, δ parametreleri arasında $\phi(\epsilon, \delta)$ işlemli

$$x^* = X(x; \epsilon) \tag{1.1}$$

dönüşümler cümlesi ;

- (i) S deki her ϵ parametresi için dönüşümler birebir ve üzerinedir ve $x^* \in D$ üzerindedir.
- (ii) (S, ϕ) bir G grubu oluşturur.
- (iii) $\epsilon = e$ ise $x^* = x$ dir, yani

$$X(x, e) = x$$

- (iv) $x^* = X(x, \epsilon), x^{**} = X(x^*, \delta)$ ise bu durumda

$$x^{**} = X(x, \phi(\epsilon, \delta))$$

şartlarını sağlarsa D üzerinde bir dönüşümler grubu oluşturur.

1.1.3 Bir-Parametrelî Lie Dönüşüm Grupları

Tanım. . Bir dönüşüm grubu, grup aksiyomlarına ek olarak şu aksiyomları sağlarsa bir Lie dönüşüm grubu tanımlar.

- (v) ϵ sürekli bir parametredir yani S cümlesi R de bir aralıktır. Genelliği bozmaksızın $\epsilon = 0$, e birim elemanına karşı gelir.
- (vi) X, D de x e göre sonsuz diferansiyellenebilirdir ve S, ϵ nun analitik bir fonksiyonudur.
- (vii) $\epsilon, \delta \in S$ olmak üzere $\phi(\epsilon, \delta)$, ϵ ve δ nın analitik bir fonksiyonudur.

Eğer ϵ zaman değişkeni, x ise uzay değişkeni olarak düşünülürse bu durumda bir-parametrelî Lie dönüşüm grubu sabit bir akış tanımlar.

$$X(x; G) \tag{1.2}$$

G nin bütün elemanları üzerinde x in evrimini tanımlasın. Bu ise γ_1 şeklinde bir eğri tanımlar.

Şimdi $y = X(x; \epsilon), \gamma_1$ üzerinde bir noktayı göstereyim. Bu durumda $x^{**} = X(y, \delta) = X(x, \phi(\epsilon, \delta))$, γ_1 üzerinde bulunmalıdır. Bununla birlikte kendini kesen γ_2 eğrisinin, (1.2) ile tanımlanan evolüsyonu ifade etmeyeceğine dikkat edilmelidir.

1.2 Sonsuz Küçük Dönüşümler

Birim eleman $e = 0$, birleşim kuralı ϕ olan

$$x^* = X(x; \epsilon) \tag{1.3}$$

Lie dönüşüm grubunu ele alalım. (1.3) ü $\epsilon = 0$ civarında

$$x^* = x + \epsilon \left(\frac{\partial X}{\partial \epsilon}(x; \epsilon) \right)_{\epsilon=0} + \left(\frac{\epsilon^2}{2} \right) \left(\frac{\partial^2 X}{\partial \epsilon^2}(x; \epsilon) \right)_{\epsilon=0} + \dots$$

$$= \mathbf{x} + \epsilon \left(\frac{\partial X}{\partial \epsilon}(\mathbf{x}; \epsilon) \right) |_{\epsilon=0} + O(\epsilon^2) \quad (1.4)$$

serisine açalım.

$$\xi(\mathbf{x}) = \frac{\partial X}{\partial \epsilon}(\mathbf{x}; \epsilon) \quad (1.5)$$

olsun. $\mathbf{x} + \epsilon \xi(\mathbf{x})$ dönüşümüne (1.3) Lie dönüşüm grubunun sonsuz küçük dönüşümü, $\xi(\mathbf{x})$ in bileşenlerine de $\mathbf{x}^* = X(\mathbf{x}; \epsilon)$ Lie dönüşüm grubunun sonsuz küçükleri denir.

Önce aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 1.2.1.

$$X(\mathbf{x}; \epsilon + \Delta\epsilon) = X(X(\mathbf{x}; \epsilon); \phi(\epsilon^{-1}, \epsilon + \Delta\epsilon)) \quad (1.6)$$

ispat.

$$\begin{aligned} X(X(\mathbf{x}); \phi(\epsilon^{-1}, \epsilon + \Delta\epsilon)) &= X(\mathbf{x}; \phi(\epsilon, \phi(\epsilon^{-1}, \epsilon + \Delta\epsilon))) \\ &= X(\mathbf{x}; \phi(\phi(\epsilon, \epsilon^{-1}), \epsilon + \Delta\epsilon)) \\ &= X(\mathbf{x}; \phi(0, \epsilon + \Delta\epsilon)) \\ &= X(\mathbf{x}; (\epsilon + \Delta\epsilon)). \end{aligned}$$

Teorem 1.2.1.(Lie'nin birinci temel teoremi): $\mathbf{x}^* = X(\mathbf{x}; \epsilon)$ Lie dönüşüm grubunun

$$\frac{d\mathbf{x}^*}{d\tau} = \xi(\mathbf{x}^*) \quad (1.7)$$

$$\tau = 0, \mathbf{x}^* = \mathbf{x} \quad (1.8)$$

birinci mertebeden diferansiyel denklem sistemi ile verilen başlangıç değer problemine denk olduğu bir $\tau(\epsilon)$ parametrelemesi vardır.

Özel olarak

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{\partial \phi(a, b)}{\phi b} |_{(a, b) = (\epsilon^{-1}, \epsilon)} \quad (1.9)$$

ve

$$\Gamma(0) = 1 \quad (1.10)$$

olmak üzere

$$\tau(\epsilon) = \int_0^\epsilon \Gamma(\epsilon') d\epsilon' \quad (1.11)$$

dir.

ispat. Önce (1.6) da görünen $X(\mathbf{x}; \epsilon + \Delta\epsilon)$ ve $\phi(\epsilon^{-1}, \epsilon + \Delta\epsilon)$ u $\Delta\epsilon = 0$ civarında seriye açarsak

$$X(\mathbf{x}; \epsilon + \Delta\epsilon) = \mathbf{x}^* + \frac{\partial X(\mathbf{x}; \epsilon)}{\partial \epsilon} \Delta\epsilon + O((\Delta\epsilon)^2) \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned}
\phi(\epsilon^{-1}, \epsilon + \Delta\epsilon) &= \phi(\epsilon, \epsilon^{-1}) + \frac{\phi(\epsilon, \epsilon^{-1})}{\partial\epsilon} \Delta\epsilon + O((\Delta\epsilon)^2) \\
&= \Gamma(\epsilon)\Delta\epsilon + O((\Delta\epsilon)^2)
\end{aligned} \tag{1.13}$$

buluruz. (1.6) nın sağ tarafını da $\Delta\epsilon = 0$ civarında seriye açtığımızda

$$\begin{aligned}
X(\mathbf{x}; \epsilon + \Delta\epsilon) &= X(\mathbf{x}; \phi(\epsilon^{-1}, \epsilon + \Delta\epsilon)) \\
&= X(\mathbf{x}; \Gamma(\epsilon)\Delta\epsilon + O((\Delta\epsilon)^2)) \\
&= X(\mathbf{x}; 0) + \Delta\epsilon \Gamma(\epsilon) \frac{\partial X}{\partial \delta}(\mathbf{x}^*; \delta) |_{\delta=0} + O((\Delta\epsilon)^2) \\
&= \mathbf{x}^* + \Gamma(\epsilon)\xi(\mathbf{x}^*)\Delta\epsilon + O((\Delta\epsilon)^2)
\end{aligned} \tag{1.14}$$

elde ederiz. (1.12) ile (1.14) ü eşitlediğimizde $\mathbf{x}^* = X(\mathbf{x}; \epsilon)$ dönüşümünün

$$\frac{d\mathbf{x}^*}{d\epsilon} = \Gamma(\epsilon)\xi(\mathbf{x}^*) \tag{1.15}$$

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}, \epsilon = 0 \tag{1.16}$$

diferansiyel denklem sistemi ile verilen başlangıç değer problemini sağladığını görürüz, (1.4) den $\Gamma(0) = 1$ çıkar ve $\tau(\epsilon) = \int_0^\epsilon \Gamma(\epsilon') d\epsilon'$ parametrelemesi (1.7-8) ifadelerini verir.

$\frac{\partial \xi}{\partial x_i}(\mathbf{x}), i = 1, 2, \dots, n$, sürekli olduğundan dolayı, birinci mertebeden diferansiyel denklem sistemi için başlangıç değer probleminin varlık ve teklik teoreminden (1.7-8) ve de (1.15-16) nin çözümleri vardır ve tektir. Bu çözümde (1.3) olmalıdır. Lie'nin birinci temel teoremi gösteriyor ki ; bir-parametrelili Lie dönüşüm grubunu belirlerken, sonsuz küçük dönüşümler önemli bilgiler içerir. Verilen bir grup, τ_1 ve τ_2 parametreleri ϕ işlemini $\phi(\tau_1, \tau_2) = \tau_1 + \tau_2$ haline getirecek şekilde yeniden parametrelendirilebilir. Lie'nin birinci temel teoremi göstermektedir ki; (1.3) Lie dönüşümler grubu (1.7-8) ile tanımlanan sabit bir akış tanımlar, üstelik herhangi bir (1.7-8) sabit akışı bir-parametrelili Lie dönüşüm grubu tanımlar.

1.3 Sonsuz Küçük Üreteçler

Lie'nin birinci temel teoremine göre genelliği bozmaksızın bir-parametrelili Lie dönüşümler grubu, $\phi(a, b) = a + b$ işlemi $\epsilon^{-1} = -\epsilon$ ve $\Gamma(\epsilon) = 1$ olacak şekilde parametrelendirilebilir. Böylece $\xi(\mathbf{x})$ sonsuz küçüklerine göre (1.3) Lie dönüşümler grubu

$$\frac{d\mathbf{x}^*}{d\epsilon} = \xi(\mathbf{x}^*) \tag{1.17}$$

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}, \epsilon = 0 \tag{1.18}$$

haline gelir.

Tanım . $\mathbf{x}^* = X(\mathbf{x}; \epsilon)$ bir-parametrelili Lie dönüşümler grubunun sonsuz küçük

üreteci

$$X = X(\mathbf{x}) = \xi(\mathbf{x}) \cdot \nabla = \sum_{i=1}^n \xi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (1.19)$$

şeklinde bir operatördür. Burada ∇

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \quad (1.20)$$

gradyent operatörü; $F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ diferansiyellenebilen fonksiyonu için

$$XF(\mathbf{x}) = \xi(\mathbf{x}) \cdot \nabla F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \xi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_i}$$

dir. $X\mathbf{x} = \xi(\mathbf{x})$ olduğuna dikkat edelim.

Lie'nin birinci temel teoreminden kendi sonsuz küçük dönüşümüne denk olan bir-parametrelili Lie dönüşüm grubu, aynı zamanda kendi sonsuz küçük üreticisine denktir. Aşağıdaki teorem gösterirki; (1.19) sonsuz küçük üreticinin kullanımı, (1.17-18) başlangıç değer probleminin çözümünü bulmada bir algoritma verir.

Teorem 1.3.1 Bir-parametrelili Lie dönüşümler grubu

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* = e^{\epsilon X} \mathbf{x} &= \mathbf{x} + \epsilon X\mathbf{x} + \frac{\epsilon^2}{2} X^2 \mathbf{x} + \dots \\ &= [1 + \epsilon X + \frac{\epsilon^2}{2} X^2 + \dots] \mathbf{x} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} X^k \mathbf{x} \end{aligned} \quad (1.21)$$

ifadesine denktir, burada $X = X(\mathbf{x})$ operatörü (1.19) ile tanımlanır ve $X^k = XX^{k-1}, k = 1, 2, \dots$; özel olarak $X^k F(\mathbf{x})$ fonksiyonu, X operatörünü $X^{k-1} F(\mathbf{x})$, $k = 1, 2, \dots$, $X^0 F(\mathbf{x}) \equiv F(\mathbf{x})$, fonksiyonuna uygulamakla elde edilir:

ispat.

$$X = X(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \xi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (1.22)$$

ve

$$X(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^n \xi_i(\mathbf{x}^*) \frac{\partial}{\partial x_i^*} \quad (1.23)$$

olsun. Taylor Teoreminden, (1.3) ü $\epsilon = 0$ civarında seriye açarsak

$$\mathbf{x}^* = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \left(\frac{\partial^k X(\mathbf{x}; \epsilon)}{\partial \epsilon^k} \right)_{\epsilon=0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \left(\frac{d^k \mathbf{x}^*}{d\epsilon^k} \right)_{\epsilon=0} \quad (1.24)$$

buluruz. Herhangi bir $F(\mathbf{x})$ diferansiyellenebilen fonksiyonu için,

$$\frac{d}{d\epsilon} F(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i^*} \frac{\partial x_i^*}{\partial \epsilon} = \sum_{i=1}^n \xi_i(\mathbf{x}^*) \frac{\partial F(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i^*} = X(\mathbf{x}^*) F(\mathbf{x}^*) \quad (1.25)$$

olur. Buradan

$$\frac{dx^*}{d\epsilon} = X(x^*)x^* \quad (1.26)$$

$$\frac{d^2x^*}{d\epsilon^2} = \frac{d}{d\epsilon}\left(\frac{dx^*}{d\epsilon}\right) = X^2(x^*)x^* \quad (1.27)$$

ve genel halde

$$\frac{d^k x^*}{d\epsilon^k} = X^k(x^*)x^*, k = 1, 2, \dots \quad (1.28)$$

Sonuçta (1.21) i veren

$$\left.\frac{d^k x^*}{d\epsilon^k}\right|_{\epsilon=0} = X^k(x)x = X^k x, k = 1, 2, \dots \quad (1.29)$$

eşitliğini elde ederiz.

Böylece, (1.3) Lie dönüşümler grubu tanımlayan bir $X(x; \epsilon)$ fonksiyonunun $\epsilon = 0$ civarındaki seriye açılımı, $O(\epsilon)$ teriminin katsayısı olan $\left.\frac{\partial X}{\partial \epsilon}(x; \epsilon)\right|_{\epsilon=0} = \xi(x)$ sonsuz küçüküyle belirlenir.

Bir-parametrelili Lie dönüşümler grubunu, sonsuz küçük dönüşümünden elde etmek için iki yol vardır:

- (i) Grubu, Lie serisi denen ve (1.19) sonsuz küçük üreticiyle elde edilen (1.21) kuvvet serisi ile ifade etmek;
- (ii) (1.17-18) başlangıç değer problemini çözmek.

Sonuç Teorem . $F(x)$ sonsuz diferansiyellenebilen bir fonksiyon ise (1.22) üreticili $x^* = X(x; \epsilon)$ Lie dönüşümler grubu için

$$F(x^*) = F(e^{\epsilon X} x) = e^{\epsilon X} F(x) \quad (1.30)$$

1.4 Değişmez Fonksiyonlar

Tanım . Sonsuz diferansiyellenebilen bir $F(x)$ fonksiyonu ancak ve ancak herhangi bir (1.3) dönüşüm grubu için

$$F(x^*) \equiv F(x) \quad (1.31)$$

olduğunda Lie dönüşüm grubunun değişmez bir fonksiyonudur, $F(x)$ e bu dönüşümün değişmezi denir.

Teorem 1.4.1. Lie dönüşüm grubu altında $F(x)$, ancak ve ancak

$$XF(x) \equiv 0 \quad (1.32)$$

olduğunda değişmezdir.

ispat.

$$F(\mathbf{x}^*) \equiv e^{\epsilon X} F(\mathbf{x}) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} X^k F(\mathbf{x}) \equiv F(\mathbf{x}) + \epsilon X F(\mathbf{x}) + \frac{\epsilon^2}{2!} X^2 F(\mathbf{x}) + \dots \quad (1.33)$$

$F(\mathbf{x}^*) \equiv F(\mathbf{x})$ ise (1.33) den $X F(\mathbf{x}) \equiv 0$ olduğu çıkar.

Tersine $F(\mathbf{x})$, $X F(\mathbf{x}) \equiv 0$ i sağlayan bir fonksiyon olsun. Buradan $X^n F(\mathbf{x}) \equiv 0, n=1,2,\dots$ ve $F(\mathbf{x}^*) \equiv F(\mathbf{x})$ bulunur.

Teorem 1.4.2. Bir Lie dönüşüm grubu için

$$F(\mathbf{x}^*) \equiv F(\mathbf{x}) + \epsilon \Leftrightarrow X F(\mathbf{x}) \equiv 1.$$

ispat. $F(\mathbf{x})$; $F(\mathbf{x}^*) \equiv F(\mathbf{x}) + \epsilon$ özdeşliğini sağlayan bir fonksiyon ise

$$F(\mathbf{x}) + \epsilon \equiv F(\mathbf{x}) + \epsilon X F(\mathbf{x}) + \frac{\epsilon^2}{2!} X^2 F(\mathbf{x}) + \dots$$

Buradan $X F(\mathbf{x}) \equiv 1$ elde edilir.

Tersine; $X F(\mathbf{x}) \equiv 1$ sağlansa $X^n F(\mathbf{x}) \equiv 0, n=2,3,\dots$, dir ve

$$F(\mathbf{x}^*) = e^{\epsilon X} F(\mathbf{x}) \equiv F(\mathbf{x}) + \epsilon X F(\mathbf{x}) \equiv F(\mathbf{x}) + \epsilon$$

bulunur.

1.5 Kanonik Koordinatlar

Uygun bir bölge üzerinde, sürekli diferansiyellenebilen ve birebir

$$\mathbf{y} = Y(\mathbf{x}) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) \quad (1.34)$$

koordinat dönüşümü olsun. Bir-parametrelili (1.3) Lie dönüşüm grubu için $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ koordinatlarına göre $X = \sum_{i=1}^n \xi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i}$ sonsuz küçük üretici yeni koordinatlar $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ olmak üzere

$$Y = \sum_{i=1}^n \eta_i(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_i} \quad (1.35)$$

şekline dönüşür. Aynı grup etkisini elde etmek için $Y = X$ olmalıdır. $\mathbf{y}$ koordinatlarına göre sonsuz küçük üretici

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{y}) = (\eta_1(\mathbf{y}), \eta_2(\mathbf{y}), \dots, \eta_n(\mathbf{y})) = Y \mathbf{y}$$

dir.

Teorem 1.5.1. $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{y}) = X \mathbf{y}$ dir.

ispat. Zincir kuralını kullanarak

$$X = \sum_{i=1}^n \xi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i,j=1}^n \xi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial y_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} = \sum_{j=1}^n \eta_j(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_j} = Y$$

elde edilir. Burada $\eta_j(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \xi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial y_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} = X y_j, j = 1, 2, \dots, n$ dir.

Teorem 1.5.2. $\mathbf{y} = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$ koordinatlarına göre (1.3) Lie dönüşüm grubu

$$\mathbf{y}^* = e^{\epsilon Y} \mathbf{y} \quad (1.36)$$

şeklini alır.

ispat. $F(\mathbf{x}^*) = e^{\epsilon X} F(\mathbf{x})$ ve $\mathbf{y} = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$ den hemen $\mathbf{y}^* = Y(\mathbf{x}^*) = e^{\epsilon X} Y(\mathbf{x}) = e^{\epsilon X} Y = e^{\epsilon Y} \mathbf{y}$ bulunur.

Tanım. Bir $\mathbf{y} = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$ koordinat dönüşümü, $\mathbf{x}^* = X(\mathbf{x}; \epsilon)$

Lie dönüşümler grubu için, eğer dönüşüm grubu bu şekildeki koordinatlara göre

$$y_i^* = y_i, i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$y_n^* = y_n + \epsilon$$

haline geliyorsa bir kanonik koordinatlar kümesi tanımlar.

Teorem 1.5.3. $\mathbf{x}^* = X(\mathbf{x}; \epsilon)$ Lie dönüşüm grubu için

$$y_i^* = y_i, i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$y_n^* = y_n + \epsilon$$

dönüşüm grubuna denk $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ kanonik koordinatlar cümlesi vardır.

ispat. Teorem (1.4.1.) den $y_i^* = y_i(\mathbf{x}^*) = y_i(\mathbf{x})$ kalması ancak ve ancak

$X y_i(\mathbf{x}) \equiv 0, i=1, 2, \dots, n-1$ olmasıyla sağlanır.

$$X u(\mathbf{x}) = \xi_1(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \xi_2(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + \xi_n(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \quad (1.37)$$

birinci mertebeden homogen kısmi diferansiyel denklemin (n-1) fonksiyonel bağımsız çözümü vardır. Bu çözümler

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \frac{dx_2}{\xi_2} = \dots = \frac{dx_n}{\xi_n} \quad (1.38)$$

karakteristik denkleminde elde edilen birinci mertebeden adi diferansiyel denklemler sisteminin genel çözümünden ortaya çıkan $(y_1(x), y_2(x), \dots, y_{n-1}(x))$ (n-1) tane temel sabittir. Bu çözümler $y_i^* = y_i, i = 1, 2, \dots, n-1$ i sağlayan (n-1) tane koordinatı verir.

Teorem (1.4.2.) ye göre $y_n(\mathbf{x})$ kanonik koordinatı için

$$y_n^* = y_n(\mathbf{x}^*) = y_n(\mathbf{x}) + \epsilon \Leftrightarrow X y_n(\mathbf{x}) \equiv 1 \text{ geçerlidir.}$$

Böylece $v(\mathbf{x}) = y_n(\mathbf{x})$ alınırsa, $v(\mathbf{x})$

$$Xv(\mathbf{x}) = \xi_1(\mathbf{x}) \frac{\partial v}{\partial x_1} + \xi_2(\mathbf{x}) \frac{\partial v}{\partial x_2} + \dots + \xi_n(\mathbf{x}) \frac{\partial v}{\partial x_n} = 1 \quad (1.39)$$

homogen olmayan lineer diferansiyel denklem sisteminin bir özel çözümüdür ve

$$\frac{dv}{dt} = 1$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \xi(\mathbf{x})$$

(n-1) tane adi diferansiyel denklemden oluşan karakteristik sistemin bir özel çözümünü belirleyerek bulunur.

Teorem 1.5.4. Herhangi bir $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ kanonik koordinatlar cümlesi için (1.3) Lie dönüşüm grubunun sonsuz küçük üretici

$$Y = \frac{\partial}{\partial y_n} \quad (1.40)$$

dir.

ispat. $Y = \sum_{i=1}^n \eta_i(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_i}$ kanonik koordinatlara göre

$$y_i^* = y_i(\mathbf{x}^*) = y_i(\mathbf{x}) \Leftrightarrow X y_i(\mathbf{x}) \equiv 0$$

ve

$$y_n^* = y_n(\mathbf{x}^*) = y_n(\mathbf{x}) + \epsilon \Leftrightarrow X y_n(\mathbf{x}) \equiv 1$$

ifadelerinden

$$\eta_i(\mathbf{y}) = X y_i = 0; i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\eta_n(\mathbf{y}) = X y_n = 1$$

buradan da $Y = \frac{\partial}{\partial y_n}$ bulunur.

1.6 Değişmez Yüzeyler, Değişmez Eğriler, Değişmez Noktalar.

Tanım. Bir $F(\mathbf{x}) = 0$ yüzeyi ancak ve ancak, $F(\mathbf{x}) = 0$ iken $F(\mathbf{x}^*) = 0$ oluyorsa bir- parametrelili Lie dönüşüm grubu altında bir değişmez yüzeydir.

Tanım. Bir $F(x, y) = 0$ eğrisi ancak ve ancak, $F(x, y) = 0$ iken $F(x^*, y^*) = 0$ oluyorsa $X = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$ üreteçli

$$x^* = X(x, y; \epsilon) = x + \epsilon\xi(x, y) + O(\epsilon^2) \quad (1.41)$$

$$y^* = Y(x, y; \epsilon) = y + \epsilon\eta(x, y) + O(\epsilon^2) \quad (1.42)$$

Lie dönüşüm grubu için değişmez bir eğridir.

Teorem 1.6.1.(i) $F(x) = x_n - f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ şeklinde yazılmış bir yüzey, ancak ve ancak $F(x) = 0$ iken $XF(x) = 0$ olduğunda Lie dönüşüm grubu için bir değişmez yüzeydir.

(ii) $F(x, y) = y - f(x) = 0$ şeklinde yazılmış bir eğri, ancak ve ancak $F(x, y) = y - f(x) = 0$ iken $XF(x, y) = \eta(x, y) - \xi(x, y)f'(x) = 0$ olduğunda (1.41-42) için değişmez bir eğridir. [1]

Tanım. Bir x noktası, ancak ve ancak (1.3) Lie dönüşüm grubu altında $x^* = x$ oluyorsa dönüşüm grubu için bir değişmez noktadır.

Teorem 1.6.2. Bir x noktası $x^* = X(x; \epsilon)$ Lie dönüşüm grubu için ancak ve ancak $\xi(x) = 0$ oluyorsa değişmez noktadır.

Geometrik olarak bir adi diferansiyel denklemin genel çözümü bir eğri ailesiyle, bir kısmi diferansiyel denklemin genel çözümü ise bir yüzey ailesiyle ifade edilir. Bir dönüşüm grubu bir diferansiyel denklemin bir çözüm eğrisini başka bir çözüm eğrisine dönüştürüyorsa bu denklem tarafından kabul ediliyor denir. Özel olarak bir diferansiyel denklem tarafından kabul edilen bir dönüşüm grubu, çözüm eğrilerini değişmez bırakmak zorundadır.

Tanım. $\omega(x) = \text{sabit} = c$ yüzey ailesiyle ancak ve ancak $\omega(x) = c$ iken $\omega(x^*) = c^* = \text{sabit}$ olduğunda değişmez bir yüzey ailesidir.

Tanım. $\omega(x, y) = \text{sabit} = c$ eğri ailesiyle ancak ve ancak $\omega(x, y) = c$ iken $\omega(x^*, y^*) = c^*$ oluyorsa

$$x^* = X(x, y; \epsilon) = x + \epsilon\xi(x, y) + O(\epsilon^2)$$

$$y^* = Y(x, y; \epsilon) = y + \epsilon\eta(x, y) + O(\epsilon^2)$$

dönüşüm grubu için değişmez bir eğri ailesidir.

Bu tanımlardan hareketle, ϵ parametresi ve c nin C gibi bir fonksiyonu için $c^* = C(c, \epsilon)$ bulunur. Genelliği bozmaksızın $c^* \neq c$ kabul edelim aksi takdirde her bir yüzeyin kendisi bir değişmez yüzeydir.

Teorem 1.6.3.(i) $\omega(x) = \text{sabit} = c$ yüzey ailesi ancak ve ancak sonsuz

diferansiyellenebilen bir $\Omega(\omega)$ fonksiyonu için

$$X\omega = \Omega(\omega) \quad (1.43)$$

olduğunda değişmez bir yüzey ailesidir.

(ii) $\omega(x, y) = \text{sabit} = c$ eğri ailesi ancak ve ancak sonsuz diferansiyellenebilen bir $\Omega(\omega)$ fonksiyonu için

$$X\omega = \xi(x, y) \frac{\partial \omega}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial \omega}{\partial y} = \Omega(\omega) \quad (1.44)$$

olduğunda

$$x^* = X(x, y; \epsilon) = x + \epsilon \xi(x, y) + O(\epsilon^2)$$

$$y^* = Y(x, y; \epsilon) = y + \epsilon \eta(x, y) + O(\epsilon^2)$$

dönüşümü için değişmez bir eğri ailesidir.

ispat. $\omega(\mathbf{x}) = c$, Lie dönüşüm grubu için değişmez bir yüzey ailesi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{x}^*) &= e^{\epsilon X} \omega(\mathbf{x}) \\ &= \omega(\mathbf{x}) + \epsilon X\omega(\mathbf{x}) + \frac{\epsilon^2}{2} X^2\omega(\mathbf{x}) + \dots \\ &= c^* = C(c; \epsilon) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece bir $\Omega(\omega)$ fonksiyonu için $\omega(\mathbf{x}) = c$ iken

$X\omega(\mathbf{x}) = \Omega(\omega)$ olur. Buna ek olarak $X^2\omega = \Omega'(\omega)X\omega = \Omega'(\omega)\Omega(\omega)$ yazılabilir.

Tersine, sonsuz diferansiyellenebilen bir $\Omega(\omega)$ fonksiyonu için $X\omega = \Omega(\omega)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda bir $f_n(\omega)$, $n=1,2,\dots$, fonksiyonu için $X^2\omega = \Omega'(\omega)\Omega(\omega)$ ve $X^n\omega = f_n(\omega)$ yazılabilir. Sonuç olarak eğer $\omega(\mathbf{x}) = c$ ise buradan

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{x}^*) &= e^{\epsilon X} \omega(\mathbf{x}) \\ &= \omega(\mathbf{x}) + \epsilon X\omega(\mathbf{x}) + \frac{\epsilon^2}{2} X^2\omega(\mathbf{x}) + \dots \\ &= \omega(\mathbf{x}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n f_n(\omega(\mathbf{x}))}{n!} \\ &= c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n f_n(c)}{n!} \\ &= \text{sabit} = c^* \end{aligned}$$

elde edilir.

Bir Lie dönüşüm grubu için değişmez eğri (yüzey) ailelerini bulmak için genelliği bozmaksızın $\Omega(\omega) \equiv 1$ alabiliriz. Buradan da $\omega(\mathbf{x}) = c$ değişmez bir eğri ailesi

ise, herhangi bir F fonksiyonu için $F(\omega(c)) = F(c)$ dir. $XF(\omega(x)) = F'(\omega)X\omega = F'(\omega)\Omega(\omega)$ da $F'(\omega) = \frac{1}{\Omega(\omega)}$ konursa $XF(\omega) \equiv 1$ bulunur. Burada $\Omega(\omega) \neq 0$ kabul ettik, aksi takdirde değişmez yüzey ailesindeki her bir yüzey, Lie dönüşüm grubu için bir değişmez yüzeydir.

1.7 Genişletilmiş Dönüşümler (Uzanımlar)

Sonraki bölümlerde verilen bir S diferansiyel denklem sistemi tarafından kabul edilen bir-parametrelili Lie dönüşüm gruplarını belirlemeye çalışacağız. Böyle bir dönüşüm grubu

$$\begin{aligned} x^* &= X(x, u; \epsilon) \\ u^* &= U(x, u; \epsilon) \end{aligned} \quad (1.45)$$

şeklindedir, ve $(n+m)$ değişkenli $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $u = (u^1, u^2, \dots, u^n)$ uzayında bulunur. x , n bağımsız değişkeni; u ise m bağımlı değişkeni gösterir.

$$u = f(x) = (f^1(x), f^2(x), \dots, f^n(x)) \quad (1.46)$$

S tarafından kabul edilen, sistemin bir çözümünü gösterir. $x^* = X(x, u; \epsilon)$, $u^* = U(x, u; \epsilon)$ şeklindeki bir Lie dönüşümler grubu ; (i) S deki bir $u = f(x)$ çözümünü S in diğer bir çözümüne görüntüler; (ii) dönüşmüş (x^*, u^*) değişkenlerine göre S sistemini değişmez bırakır; şeklinde birbirine eşdeğer özelliklere sahiptir.

$x^* = X(x, u; \epsilon)$, $u^* = U(x, u; \epsilon)$ Lie dönüşümler grubu için u bağımlı değişkeninin x bağımsız değişkenine göre türevleri, bir $u = f(x)$ fonksiyonu için değme şartlarını koruyacak şekilde dönüştürülür. [2]

u ile u nun x e göre bütün birinci mertebeden kısmi türevlerini gösterelim:

u in
1

$$u = \left(\frac{\partial u^1}{\partial x_1}, \frac{\partial u^1}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u^1}{\partial x_n}, \frac{\partial u^2}{\partial x_1}, \frac{\partial u^2}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u^2}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial u^m}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u^m}{\partial x_n} \right);$$

bileşeni vardır.

Genel halde u , $k \geq 1$ için u nun x e göre bütün k ıncı mertebeden kısmi

türevlerini gösterebilirsin, u ya göre bir koordinat $u_{i_1 i_2 \dots i_k}^\mu = \frac{\partial u^\mu}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}$ ile gösterilir,

$\mu = 1, 2, \dots, m; i_j = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, k$.

Bağımlı değişkenlerin türevlerinin 'doğal' dönüşümü, $x^* = X(x, u; \epsilon)$, $u^* = U(x, u; \epsilon)$ Lie dönüşüm gruplarının doğal uzanımlarını vereceği açıktır. Verilen

bir S diferansiyel denklem sistemi için k , S deki en yüksek mertebeden türev olacaktır. Bu durumda (1.45) dönüşüm grubunun sonsuz küçük dönüşümü, $(x, u, u_1, u_2, \dots, u_k)$ uzayında bulunan sonsuz küçük dönüşüme genişletilir.

Şimdi bir S diferansiyel denklemi tarafından kabul edilen $x^* = X(x, u; \epsilon)$, $u^* = U(x, u; \epsilon)$ Lie dönüşüm grubunun bulunması problemini inceleyelim :

1.7.1 Genişletilmiş Dönüşüm Grupları Bir Bağımsız ve Bir Bağımlı Değişken

x bağımsız, u bağımlı değişkenli k ıncı mertebeden adi diferansiyel denklemlerin değişmezlik özelliklerini incelemek üzere, bu denklem tarafından kabul edilen bir-parametrelili

$$\left. \begin{aligned} x^* &= X(x, y; \epsilon) \\ y^* &= Y(x, y; \epsilon) \end{aligned} \right\} \quad (1.47)$$

şeklinde Lie dönüşüm gruplarını bulmaya çalışacağız. (1.47) Lie dönüşüm grubu için

$$\begin{aligned} x^* &= (x^*, y^*) = X(x; \epsilon) = (X(x, y; \epsilon), Y(x, y; \epsilon)) \\ &= X(x, y; \epsilon) = (X(x; \epsilon), Y(x; \epsilon)) \end{aligned}$$

gösterimini kullanacağız.

$y_k = y = \frac{d^k y}{dx^k}$, $k=1,2,\dots$ olsun. $x^* = X(x, y; \epsilon)$, $y^* = Y(x, y; \epsilon)$ dönüşümünü

$(x, y, y_1, \dots, y_k)$ uzayına, x^*, y^* dönüşümünün $dx, dy, dy_1, \dots$ diferansiyelleriyle ilişkili

$$dy = y_1 dx, \dots, dy_k = y_{k+1} dx, k = 1, 2, \dots$$

değme şartlarını sağlayacak şekilde genişletelim. (1.47) de dönüşüm $\{y_k^*\}$, $k = 1, 2, \dots$ türevleri

$$dy^* = y_1^* dx^*$$

$$dy_k^* = y_{k+1}^* dx^*$$

ile tanımlanır. Buradan

$$dy^* = dY(x; \epsilon) = \frac{\partial Y}{\partial x}(x; \epsilon) dx + \frac{\partial Y}{\partial y}(x; \epsilon) dy$$

$$dx^* = dX(x; \epsilon) = \frac{\partial X}{\partial x}(x; \epsilon) dx + \frac{\partial X}{\partial y}(x; \epsilon) dy$$

bulunur. Sonuçta y_1^*

$$\frac{\partial Y}{\partial x}(x; \epsilon) dx + \frac{\partial Y}{\partial y}(x; \epsilon) dy = y_1^* \left[\frac{\partial X}{\partial x}(x; \epsilon) dx + \frac{\partial X}{\partial y}(x; \epsilon) dy \right] \quad (1.48)$$

eşitliğini sağlar. $dy = y_1 dx$ ifadesini (1.48) de yerine yazarsak

$$y_1^* = Y_1(x, y, y_1, \epsilon) = \frac{\frac{\partial Y}{\partial x}(\mathbf{x}; \epsilon) + y_1 \frac{\partial Y}{\partial y}(\mathbf{x}; \epsilon)}{\frac{\partial X}{\partial x}(\mathbf{x}; \epsilon) + y_1 \frac{\partial X}{\partial y}(\mathbf{x}; \epsilon)}$$

olduğunu görürüz.

Teorem 1.7.1. (x, y) uzayında bulunan $x^* = X(x, y; \epsilon)$, $y^* = Y(x, y; \epsilon)$ Lie dönüşüm grubu, (x, y, y_1) uzayındaki

$$x^* = X(x, y; \epsilon)$$

$$y^* = Y(x, y; \epsilon)$$

$$y_1^* = Y_1(x, y, y_1; \epsilon)$$

bir-parametrelili Lie dönüşüm grubuna genişler.

İspat. Kapalılık özelliğinin $x^* = X(x, y; \epsilon)$, $y^* = Y(x, y; \epsilon)$ dönüşümünün birinci uzanımında korunduğunu göstererek ispatlayacağız :

Bir-parametrelili Lie dönüşümler grubunun diğer özellikleri, birinci uzanımdan hemen sonra elde edilebilir.

$\phi(\epsilon, \delta)$, ϵ ile δ arasında bir işlem tanımlasın ve $x^{**} = X(x^*; \delta)$ olsun. Bu durumda $x^* = X(x, y; \epsilon)$, $y^* = Y(x, y; \epsilon)$ grubunun kapalılık özelliğinden $x^{**} = X(x; \phi(\epsilon, \delta))$ çıkar. Ayrıca y_1^{**} , $dy^{**} = y_1^{**} dx^{**}$ eşitliğini sağlar. Sonuçta

$$y_1^{**} = Y_1(x, y, y_1, \phi(\epsilon, \delta)) = \frac{\frac{\partial Y}{\partial x}(\mathbf{x}; \phi(\epsilon, \delta)) + y_1 \frac{\partial Y}{\partial y}(\mathbf{x}; \phi(\epsilon, \delta))}{\frac{\partial X}{\partial x}(\mathbf{x}; \phi(\epsilon, \delta)) + y_1 \frac{\partial X}{\partial y}(\mathbf{x}; \phi(\epsilon, \delta))}$$

bulunur.

Teorem 1.7.2. $x^* = X(x, y; \epsilon)$, $y^* = Y(x, y; \epsilon)$ Lie dönüşüm grubu, (x, y, y_1, y_2) uzayında bulunan

$$x^* = X(x, y; \epsilon),$$

$$y^* = Y(x, y; \epsilon),$$

$$y_1^* = Y_1(x, y, y_1; \epsilon),$$

$$y_2^* = Y_2(x, y, y_1, y_2; \epsilon) = \frac{\frac{\partial Y_1}{\partial x} + y_1 \frac{\partial Y_1}{\partial y} + y_2 \frac{\partial Y_1}{\partial y_1}}{\frac{\partial X}{\partial x}(\mathbf{x}; \epsilon) + y_1 \frac{\partial X}{\partial y}(\mathbf{x}; \epsilon)}$$

ikinci uzanımına genişler.

Teorem 1.7.3. $x^* = X(x, y; \epsilon)$, $y^* = Y(x, y; \epsilon)$ Lie dönüşüm grubu, $(x, y, y_1, \dots, y_k)$ uzayındaki k ıncı uzanımı , $k \geq 2$

$$x^* = X(x, y; \epsilon),$$

$$\begin{aligned}
y^* &= Y(x, y; \epsilon), \\
y_1^* &= Y_1(x, y, y_1; \epsilon), \\
&\vdots \\
y_k^* &= Y_k(x, y, y_1, \dots, y_k; \epsilon) = \frac{\frac{\partial Y_{k-1}}{\partial x} + y_1 \frac{\partial Y_{k-1}}{\partial y} + \dots + y_k \frac{\partial Y_{k-1}}{\partial y_{k-1}}}{\frac{\partial X}{\partial x}(x; \epsilon) + y_1 \frac{\partial X}{\partial y}(x; \epsilon)}
\end{aligned}$$

olan Lie dönüşüm grubuna genişler, burada $Y_{k-1} = Y_{k-1}(x, y, y_1, \dots, y_k; \epsilon)$ dir.

Dönüşümler grubu olması gerekmeyen herhangi bir

$$x^\dagger = X(x, y)$$

$$y^\dagger = Y(x, y)$$

birebir dönüşümler cümlesini, (x, y) uzayının bir D bölgesinden $(x^\dagger, y^\dagger)$ uzayındaki bir $D^\dagger$ bölgesine genişletebiliriz, burada $X(x, y)$ ve $Y(x, y)$, D de k defa diferansiyellenebilen fonksiyonlardır. $x^\dagger, y^\dagger$ dönüşümleri; $dy = y_1 dx, \dots, dy_k = y_{k+1} dx$ değme şartları korunacak şekilde $(x, y, y_1, \dots, y_k)$ uzayına genişletilebilir:

$$dy^\dagger = y_1^\dagger dx^\dagger, dy_k^\dagger = y_{k+1}^\dagger dx^\dagger, k = 1, 2, \dots$$

$(x, y, y_1, \dots, y_k)$ uzayından $(x^\dagger, y^\dagger, y_1^\dagger, \dots, y_k^\dagger)$ uzayına k defa genişletilmiş dönüşüm

$$x^\dagger = X(x, y)$$

$$y^\dagger = Y(x, y)$$

$$y_1^\dagger = Y_1(x, y, y_1)$$

$\vdots$

$$y_k^\dagger = Y_k(x, y, y_1, \dots, y_k) = \frac{\frac{\partial Y_{k-1}}{\partial x} + y_1 \frac{\partial Y_{k-1}}{\partial y} + \dots + y_k \frac{\partial Y_{k-1}}{\partial y_{k-1}}}{\frac{\partial X}{\partial x}(x; \epsilon) + y_1 \frac{\partial X}{\partial y}(x; \epsilon)}$$

ile verilir, burada $Y_1 = Y_1(x, y, y_1) = \frac{\frac{\partial Y}{\partial x}(x, y) + y_1 \frac{\partial Y}{\partial y}(x, y)}{\frac{\partial X}{\partial x}(x, y) + y_1 \frac{\partial X}{\partial y}(x, y)}$ dir.

Tanım.(Toplam Türev Operatörü)

Toplam türev operatörü

$$\frac{D}{Dx} = \frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + y_{n+1} \frac{\partial}{\partial y_n} + \dots \quad (1.49)$$

şeklinde tanımlanır ve verilen bir $F(x, y, y_1, \dots, y_l)$ diferansiyellenebilir fonksiyonu için

$$\frac{D}{Dx} F(x, y, y_1, \dots, y_l) = F_x + y_1 F_y + y_2 F_{y_1} + \dots + y_{l+1} F_{y_l}$$

dir. Toplam türev operatörüne göre Teorem (1.7.3.) ü tekrar ifade edersek :

Teorem 1.7.4. $x^* = X(x, y; \epsilon), y^* = Y(x, y; \epsilon)$, bir-parametrelili Lie dönüşüm

grubunun k ıncı uzanımı, $Y_0 = Y(x, y; \epsilon)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x^* &= X(x, y; \epsilon), \\ y^* &= Y(x, y; \epsilon), \\ y_i^* &= Y_i(x, y, y_1, \dots, y_i; \epsilon) = \frac{\frac{DY_{i-1}}{Dx}}{\frac{DX(x, y; \epsilon)}{Dx}}, i = 1, 2, \dots, k \end{aligned}$$

ile verilebilir.

1.7.2 Genişletilmiş Sonsuz Küçük Dönüşümler Bir Bağımsız ve Bir Bağımlı Değişken

(x, y) uzayında verilmiş bir-parametrelî Lie dönüşümler grubu

$$\left. \begin{aligned} x^* &= X(x, y; \epsilon) = x + \epsilon \xi(x, y) + O(\epsilon^2) \\ y^* &= Y(x, y; \epsilon) = y + \epsilon \eta(x, y) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \right\} \quad (1.50)$$

olsun. Bu grubun sonsuz küçüğü $\xi(x) = (\xi(x, y), \eta(x, y))$ olmak üzere $X = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ sonsuz küçük üreticine sahiptir. (1.50) nin k ıncı uzanımı

$$\left. \begin{aligned} x^* &= X(x, y; \epsilon) = x + \epsilon \xi(x, y) + O(\epsilon^2) \\ y^* &= Y(x, y; \epsilon) = y + \epsilon \eta(x, y) + O(\epsilon^2) \\ y_1^* &= Y_1(x, y; \epsilon) = y_1 + \epsilon \eta^{(1)}(x, y, y_1) + O(\epsilon^2) \\ &\vdots \\ y_k^* &= Y_k(x, y, y_1, \dots, y_k; \epsilon) = y_k + \epsilon \eta^{(k)}(x, y, y_1, \dots, y_k) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \right\} \quad (1.51)$$

şeklinde ve $\xi(x, y), \eta(x, y), \eta^{(1)}(x, y, y_1), \dots, \eta^{(k)}(x, y, y_1, \dots, y_k), k = 1, 2, \dots$ sonsuz küçüğü olmak üzere

$$X^{(k)} = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + \eta^{(1)}(x, y, y_1) \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + \eta^{(k)}(x, y, y_1, \dots, y_k) \frac{\partial}{\partial y_k}$$

sonsuz küçük üreticine sahiptir.

Teorem 1.7.5. $\eta^{(0)} = \eta(x, y)$ olmak üzere

$$\eta^{(k)}(x, y, y_1, \dots, y_k) = \frac{D\eta^{(k-1)}}{Dx} - y_k \frac{D\xi(x, y)}{Dx}, k = 1, 2, \dots$$

dir.

ispat.

$$y_i^* = Y_i(x, y, y_1, \dots, y_i; \epsilon) = \frac{\frac{DY_{i-1}}{Dx}}{\frac{DX(x, y; \epsilon)}{Dx}}, i = 1, 2, \dots, k$$

(1.51) ve toplam türev operatörü tanımından

$$Y_k(x, y, y_1, \dots, y_k; \epsilon) = \frac{\frac{DY_{k-1}}{Dx}}{\frac{DX(x, y; \epsilon)}{Dx}} = \frac{\frac{D[y_{k-1} + \epsilon \eta^{(k-1)} + O(\epsilon^2)]}{Dx}}{\frac{D[x + \epsilon \xi(x, y) + O(\epsilon^2)]}{Dx}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{[y_k + \epsilon \frac{D\eta^{(k-1)}}{Dx}]}{[1 + \epsilon \frac{D\xi(x,y)}{Dx}]} + O(\epsilon^2) = y_k + \epsilon [\frac{D\eta^{(k-1)}}{Dx} - y_k \frac{D\xi(x,y)}{Dx}] + O(\epsilon^2) \\
&= y_k + \epsilon \eta^{(k)} + O(\epsilon^2)
\end{aligned}$$

Teorem (1.7.5) den $\{\eta^{(k)}\}$ açık ifadeleri çıkarılabilir. Örneğin;

$$\begin{aligned}
\eta^{(1)} &= \eta_x + (\eta_y - \xi_x)y_1 - \xi_y(y_1)^2 \\
\eta^{(2)} &= \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y_1 + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})(y_1)^2 - \xi_{yy}(y_1)^3 \\
&\quad + (\eta_y - 2\xi_x)y_2 - 3\xi_y y_1 y_2, \\
\eta^{(3)} &= \eta_{xxx} + (3\eta_{xy} - \xi_{xxx})y_1 + 3(\eta_{xyy} - \xi_{xxy})(y_1)^2 \\
&\quad + (\eta_{yyy} - 3\xi_{yyy})(y_1)^3 - \xi_{yyy}(y_1)^4 \\
&\quad + 3(\eta_{xy} - \xi_{xx})y_2 + 3(\eta_{yy} - 3\xi_{xy})y_1 y_2 \\
&\quad - 6\xi_{yy}(y_1)^2 y_2 - 3\xi_y(y_2)^2 + \\
&\quad (\eta_y - 3\xi_x)y_3 - 4\xi_y y_1 y_3,
\end{aligned}$$

hemen elde edilebilir ve $\{\eta^{(k)}\}$ nın şu özellikleri gözlenebilir:

- (i) $\eta^{(k)}$, y_k ya göre lineerdir, $k=2,3,\dots$
- (ii) $\eta^{(k)}$, katsayıları, $(\xi(x,y), \eta(x,y))$ ye göre k ıncı mertebeye kadar kısmi türevleri içeren $y_1, y_2, \dots, y_k$ nın lineer homogen polinomu şeklindedir.

1.7.3 Genişletilmiş Dönüşümler

Bir Bağımlı ve n Bağımsız Değişken

u bağımlı değişkenli, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ bağımsız değişkenli k . mertebeden bir diferansiyel denklemin değişmezlik özelliklerini incelerken, (x, u) uzayındaki dönüşümlerin $(x, u, u, \dots, u)$ uzayına genişletilmesi problemiyle karşılaşırız.

Öncelikle $x^\dagger = X(x, u)$, $u^\dagger = U(x, u)$ nokta dönüşümler cümlesinin genişletilmiş dönüşümlerini ele alalım. $(X(x, u), U(x, u))$ bir D bölgesinde k defa diferansiyellenebilen fonksiyonlar olmak üzere, $x^\dagger, u^\dagger$ dönüşümleri, D de birebir kabul edilir.

$x^\dagger, u^\dagger$ dönüşümleri, $(x, u, u, \dots, u)$ uzayındaki bir D bölgesinde

$$du = u dx$$

$\vdots$

$$d u = u dx$$

değme şartlarını ancak ve ancak $(x^\dagger, u^\dagger, u_1^\dagger, \dots, u_k^\dagger)$ uzayındaki bir $D^\dagger$ bölgesinde

$$du^\dagger = u_1^\dagger dx^\dagger$$

$$\vdots$$

$$d u_{k-1}^\dagger = u_k^\dagger dx^\dagger$$

değme şartlarını sağladığı takdirde, sağlar.

$u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, u_i^\dagger = \frac{\partial u^\dagger}{\partial x_i^\dagger} = \frac{\partial U}{\partial X_i}$ olsun. Buradan itibaren tekrarlı indis üzerinde toplam olduğunu varsayacağız. Yani $du = u dx$ eşitliği $du = u_j dx_j$

$d u_{k-1} = u dx$ ise $du_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}} = u_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} j} dx_j, i_l = 1, 2, \dots, n, l = 1, 2, \dots, k-1$ denk-

lemeler cümlesini temsil edecektir. Benzer gösterimler $du^\dagger, d u_{k-1}^\dagger$ ifadeleri içinde geçerlidir.

$$D_i = \frac{D}{Dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial}{\partial u} + u_{ij} \frac{\partial}{\partial u_j} + \dots + u_{i i_1 i_2 \dots i_n} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 \dots i_n}} + \dots, i = 1, 2, \dots, n$$

toplam türev operatörleri, diferansiyellenebilen bir $F(x, u, u_1, \dots, u_l)$ fonksiyonuna uygulanacak olursa

$$D_i F(x, u, u_1, \dots, u_l) = \frac{\partial F}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial F}{\partial u} + u_{ij} \frac{\partial F}{\partial u_j} + \dots + u_{i i_1 i_2 \dots i_l} \frac{\partial F}{\partial u_{i_1 i_2 \dots i_l}} + \dots, i = 1, 2, \dots, n$$

eşitliği yazılabilir.

Şimdi $u_j^\dagger = U_j(x, u, u), j = 1, 2, \dots, n$ genişletilmiş dönüşümünü belirlemek için

$du^\dagger = u_j^\dagger dx_j^\dagger$ korunmuş değme şartını ele alalım. $x^\dagger = X(x, u), u^\dagger = U(x, u)$ dönüşümlerinden $du^\dagger = (D_i U) dx_i$ ve $dx_j^\dagger = (D_i X_j) dx_i, i, j = 1, 2, \dots, n$ elde edilir. $(D_i X_j) u_j^\dagger = D_i U, i = 1, 2, \dots, n$ bulunur. A matrisi

$$A = \begin{bmatrix} D_1 X_1 & \dots & D_1 X_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ D_n X_1 & \dots & D_n X_n \end{bmatrix} \text{ ve } A^{-1} \text{ varolsun.}$$

Bu durumda

$$\begin{bmatrix} u_1^\dagger \\ u_2^\dagger \\ \vdots \\ u_n^\dagger \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} D_1 U \\ D_2 U \\ \vdots \\ D_n U \end{bmatrix} \quad (1.52)$$

Bu bize (x, u, u) uzayındaki genişletilmiş

$$\begin{aligned} x^\dagger &= X(x, u) \\ u^\dagger &= U(x, u) \\ u_1^\dagger &= U(x, u, u_1) \end{aligned}$$

dönüşümünü verir. $(x, u, u, \dots, u)$ uzayına genişletilmiş dönüşüm ise

$$\begin{aligned} x^\dagger &= X(x, u) \\ u^\dagger &= U(x, u) \\ u_1^\dagger &= U(x, u, u_1) \\ &\vdots \\ u_k^\dagger &= U(x, u, u_1, \dots, u_k) \end{aligned}$$

şeklinde verilir. Burada $u_k^\dagger$ nın bileşenleri

$$\begin{bmatrix} u_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} 1}^\dagger \\ u_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} 2}^\dagger \\ \vdots \\ u_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} n}^\dagger \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} 1} \\ U_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} 2} \\ \vdots \\ U_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} n} \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} D_1 U_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}} \\ D_2 U_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}} \\ \vdots \\ D_n U_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}} \end{bmatrix}$$

$i_l = 1, 2, \dots, n, l = 1, 2, \dots, k-1, k = 2, 3, \dots$; olmak üzere ve $U(x, u, u)$, (1.52)

eşitliğiyle verilir.

$x^\dagger = X(x, u), u^\dagger = U(x, u)$ dönüşümleri, (x, u) uzayında $x^* = X(x, u; \epsilon)u^* = U(x, u; \epsilon)$ şeklinde bir-parametrelili Lie dönüşümler grubu tanımlarsa,

$$\left. \begin{aligned} x^* &= X(x, u; \epsilon) \\ u^* &= U(x, u; \epsilon) \\ u_1^* &= U(x, u, u; \epsilon) \\ &\vdots \\ u_k^* &= U(x, u, u, \dots, u; \epsilon) \end{aligned} \right\} \quad (1.53)$$

dönüşümleri $(x, u, u_1, \dots, u_k)$ uzayına genişlemiş olan bir-parametrelî Lie dönüşümler grubu tanımlar. (1.53) de

$$\begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ \vdots \\ u_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} D_1 U \\ D_2 U \\ \vdots \\ D_n U \end{bmatrix} \quad (1.54)$$

$$\begin{bmatrix} u_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} 1}^* \\ u_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} 2}^* \\ \vdots \\ u_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} n}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} 1} \\ U_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} 2} \\ \vdots \\ U_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} n} \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} D_1 U_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}} \\ D_2 U_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}} \\ \vdots \\ D_n U_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}} \end{bmatrix} \quad (1.55)$$

dir, burada $\{u_i^* = U_i\}$, $u_1^* = U_1$ in ; $\{u_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} i}^* = U_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} i}\}$ ise $u_k^* = U_k$ nin bileşenleridir.

1.7.4 Genişletilmiş Sonsuz Küçük Dönüşümler Bir Bağımlı ve n Bağımsız Değişken

(x, u) uzayında verilen

$$\begin{aligned} x_i^* &= X_i(x, u; \epsilon) = x_i + \epsilon \xi_i(x, u) + O(\epsilon^2) \\ u^* &= U(x, u; \epsilon) = u + \epsilon \eta(x, u) + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

şeklindeki bir-parametrelî Lie dönüşümler grubunun sonsuz küçük üretici, $X = \xi_i(x, u) \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta(x, u) \frac{\partial}{\partial u}$ şeklindedir. x_i^*, u^* dönüşümlerinin k'ncı uzanımı ise

$$\begin{aligned} x_i^* &= X_i(x, u; \epsilon) = x_i + \epsilon \xi_i(x, u) + O(\epsilon^2) \\ u^* &= U(x, u; \epsilon) = u + \epsilon \eta(x, u) + O(\epsilon^2) \\ u_i^* &= U_i(x, u, u; \epsilon) = u_i + \epsilon \eta_i^{(1)}(x, u, u) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (1.56)$$

$\vdots$

$$\begin{aligned} u_{i_1 i_2 \dots i_k}^* &= U_{i_1 i_2 \dots i_k}(x, u, u_1, \dots, u_k; \epsilon) \\ &= u_{i_1 i_2 \dots i_k} + \epsilon \eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)}(x, u, u_1, \dots, u_k) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (1.57)$$

dır, burada $i = 1, 2, \dots, n; i_l = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots, k; k = 1, 2, \dots$ olmak üzere

$$X^{(k)} = \xi_i(x, u) \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta(x, u) \frac{\partial}{\partial u} + \eta_i^{(1)}(x, u, u_1) \frac{\partial}{\partial u_i} + \dots + \eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 \dots i_k}}, k = 1, 2, \dots$$

üreteçli, k defa genişletilmiş $(\xi(x, u), \eta^{(1)}(x, u, u), \dots, \eta^{(k)}(x, u, u, \dots, u))$ sonsuz küçüğüne sahiptir.

Teorem 1.7.6.

$$\eta_i^{(1)} = D_i \eta - (D_i \xi_j) u_j, i = 1, 2, \dots, n$$

$$\eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)} = D_{i_k} \eta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} - (D_{i_k} \xi_j) u_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} j}, i_l = 1, 2, \dots, n, l = 1, 2, \dots, k, k = 2, 3, \dots$$

dir.

ispat.

$$A = \begin{bmatrix} D_1 X_1 & \dots & D_1 X_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ D_n X_1 & \dots & D_n X_n \end{bmatrix} \quad (1.58)$$

ve $x_i^* = X_i(x, u; \epsilon) = x_i + \epsilon \xi_i(x, u) + O(\epsilon^2)$ eşitliklerinden

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} D_1(x_1 + \epsilon \xi_1) & D_1(x_2 + \epsilon \xi_2) & \dots & D_1(x_n + \epsilon \xi_n) \\ D_2(x_1 + \epsilon \xi_1) & D_2(x_2 + \epsilon \xi_2) & \dots & D_2(x_n + \epsilon \xi_n) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ D_n(x_1 + \epsilon \xi_1) & D_n(x_2 + \epsilon \xi_2) & \dots & D_n(x_n + \epsilon \xi_n) \end{bmatrix} + O(\epsilon^2) \\ &= I + \epsilon B + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

buluruz. Burada $I, n \times n$ lik birim matris, B ise

$$B = \begin{bmatrix} D_1 \xi_1 & \dots & D_1 \xi_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ D_n \xi_1 & \dots & D_n \xi_n \end{bmatrix} \quad (1.59)$$

şeklindedir. Bu durumda

$$A^{-1} = I - \epsilon B + O(\epsilon^2) \quad (1.60)$$

olarak elde edilir.

$$\begin{aligned} (1.54), u^* &= U(x, u; \epsilon) = u + \epsilon \eta(x, u) + O(\epsilon^2), \\ u_i^* &= U_i(x, u, u; \epsilon) = u_i + \epsilon \eta_i^{(1)}(x, u, u) + O(\epsilon^2), B \text{ matrisi ve } A^{-1} = I - \epsilon B + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$\begin{bmatrix} u_1 + \epsilon \eta_1^{(1)} \\ u_2 + \epsilon \eta_2^{(1)} \\ \vdots \\ u_n + \epsilon \eta_n^{(1)} \end{bmatrix} = [I - \epsilon B] \begin{bmatrix} u_1 + \epsilon D_1 \eta \\ u_2 + \epsilon D_2 \eta \\ \vdots \\ u_n + \epsilon D_n \eta \end{bmatrix} + O(\epsilon^2)$$

ve buradan da $\eta_i^{(1)} = D_i \eta - (D_i \eta_j) u_j, i = 1, 2, \dots, n$ ifadesini veren

$$\begin{bmatrix} \eta_1^{(1)} \\ \eta_2^{(1)} \\ \vdots \\ \eta_n^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \eta \\ D_2 \eta \\ \vdots \\ D_n \eta \end{bmatrix} - B \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad (1.61)$$

eşitliğini buluruz. (1.55-60) eşitliklerini kullanarak

$$\begin{bmatrix} u_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} 1} + \epsilon \eta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} 1}^{(k)} \\ u_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} 2} + \epsilon \eta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} 2}^{(k)} \\ \vdots \\ u_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} n} + \epsilon \eta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} n}^{(k)} \end{bmatrix} = (I - \epsilon B) \begin{bmatrix} u_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} 1} + \epsilon D_1 \eta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} \\ u_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} 2} + \epsilon D_2 \eta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} \\ \vdots \\ u_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} n} + \epsilon D_n \eta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} \end{bmatrix} + O(\epsilon^2)$$

ve sonuçta

$$\begin{bmatrix} \eta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} 1}^{(k)} \\ \eta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} 2}^{(k)} \\ \vdots \\ \eta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} n}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \eta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} \\ D_2 \eta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} \\ \vdots \\ D_n \eta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} \end{bmatrix} - B \cdot \begin{bmatrix} u_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} 1} \\ u_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} 2} \\ \vdots \\ u_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} n} \end{bmatrix}$$

$i_l = 1, 2, \dots, n, l = 1, 2, \dots, k-1, k = 2, 3, \dots,$

$\eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)} = D_{i_k} \eta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} - (D_{i_k} \xi_j) u_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} j}$, eşitliği ispatlanmış olur.

Teorem (1.7.6) yı, bir bağımlı iki bağımsız değişkene indirgeyerek ifade ettiğimizde genelleştirilmiş bir-parametrelili Lie dönüşüm grubu

$$\begin{aligned} x_i^* &= X_i(x_1, x_2, u; \epsilon) = x_i + \epsilon \xi_i(x_1, x_2, u) + O(\epsilon^2) \quad i = 1, 2 \\ u^* &= U(x_1, x_2, u; \epsilon) = u + \epsilon \eta(x_1, x_2, u) + O(\epsilon^2) \\ u_i^* &= U_i(x_1, x_2, u, u_1, u_2; \epsilon) = u_i + \epsilon \eta_i^{(1)}(x_1, x_2, u, u_1, u_2) + O(\epsilon^2) \quad i = 1, 2 \\ u_{ij}^* &= U_{ij}(x_1, x_2, u, u_1, u_2, u_{11}, u_{12}, u_{22}; \epsilon) \\ &= u_{ij} + \epsilon \eta_{ij}^{(2)}(x_1, x_2, u, u_1, u_2, u_{11}, u_{12}, u_{22}) + O(\epsilon^2), \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

şeklinde dir.

Bu dönüşüm grubunun genelleştirilmiş sonsuz küçükleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \eta_1^{(1)} &= \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \left[\frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right] u_1 - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} u_2 - \frac{\partial \xi_1}{\partial u} u_1^2 - \frac{\partial \xi_2}{\partial u} u_1 u_2, \\ \eta_2^{(1)} &= \frac{\partial \eta}{\partial x_2} + \left[\frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right] u_2 - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} u_1 - \frac{\partial \xi_2}{\partial u} u_2^2 - \frac{\partial \xi_1}{\partial u} u_1 u_2, \\ \eta_{11}^{(2)} &= \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1^2} + \left[2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1 \partial u} - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1^2} \right] u_1 - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_1^2} u_2 + \left[\frac{\partial \eta}{\partial u} - 2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right] u_{11} \\ &\quad - 2 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} u_{12} + \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial u} \right] u_1^2 - 2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_1 \partial u} u_1 u_2 - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial u^2} u_1^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial u^2} u_1^2 u_2 - 3 \frac{\partial \xi_1}{\partial u} u_1 u_{11} - \frac{\partial \xi_2}{\partial u} u_2 u_{11} - 2 \frac{\partial \xi_2}{\partial u} u_1 u_{12}, \\
\eta_{12}^{(2)} &= \eta_{21}^{(2)} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1 \partial x_2} + \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1 \partial u} - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right] u_2 + \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_2 \partial u} - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right] u_1 - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} u_{22} \\
& + \left[\frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right] u_{12} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} u_{11} - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_1 \partial u} u_2^2 \\
& + \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial u} - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_2 \partial u} \right] u_1 u_2 - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2 \partial u} u_1^2 - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial u^2} u_1 u_2^2 - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial u^2} u_1^2 u_2 \\
& - 2 \frac{\partial \xi_2}{\partial u} u_2 u_{12} - 2 \frac{\partial \xi_1}{\partial u} u_1 u_{12} - \frac{\partial \xi_1}{\partial u} u_2 u_{11} - \frac{\partial \xi_2}{\partial u} u_1 u_{22}, \\
\eta_{22}^{(2)} &= \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_2^2} + \left[2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_2 \partial u} - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_2^2} \right] u_2 - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2^2} u_1 + \left[\frac{\partial \eta}{\partial u} - 2 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right] u_{22} - 2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} u_{12} \\
& + \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_2 \partial u} \right] u_2^2 - 2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2 \partial u} u_1 u_2 - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial u^2} u_2^3 - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial u^2} u_2^2 u_1 \\
& - 3 \frac{\partial \xi_2}{\partial u} u_2 u_{22} - \frac{\partial \xi_1}{\partial u} u_1 u_{22} - 2 \frac{\partial \xi_1}{\partial u} u_2 u_{12}.
\end{aligned}$$

1.8 Lie Cebirleri

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve parametreler $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_r)$ olmak üzere r -parametrelili $\mathbf{x}^* = X(\mathbf{x}, \epsilon)$ dönüşüm grubunu ele alalım. Parametrelerin ϕ birleşim işlemi

$$\phi(\epsilon, \delta) = (\phi_1(\epsilon, \delta), \phi_2(\epsilon, \delta), \dots, \phi_r(\epsilon, \delta)), \delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r)$$

ile gösterilir. $\phi(\epsilon, \delta)$ işlemi $\epsilon = 0$ için $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = \epsilon_r = 0$ birim elemanına karşı gelen grup aksiyomlarını sağlar. $\phi(\epsilon, \delta)$, tanım bölgesinde analitiktir.

Tanım. r -parametrelili $\mathbf{x}^* = X(\mathbf{x}, \epsilon)$ Lie dönüşüm grubunun ϵ_α parametresine karşı gelen X_α sonsuz küçük üretici,

$$X_\alpha = \sum_{j=1}^n \xi_{\alpha j}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j}, \alpha = 1, 2, \dots, r \quad (1.62)$$

şeklinde dir. r -parametrelili $\mathbf{x}^* = X(\mathbf{x}, \epsilon)$ Lie dönüşüm grubunun hem $\mathbf{x}^* = e^{\epsilon \sum_{\alpha=1}^r \lambda_\alpha X_\alpha} \mathbf{x}$ hem de $\mathbf{x}^* = \prod_{\alpha=1}^r e^{\mu_\alpha X_\alpha} \mathbf{x} = e^{\mu_1 X_1} e^{\mu_2 X_2} \dots e^{\mu_r X_r} \mathbf{x}$ dönüşümlerine eşdeğer olduğu kolayca gösterilebilir.

Ayrıca $X = \sum_{\alpha=1}^r \sigma_\alpha X_\alpha = \sum_{j=1}^n \zeta_j(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j}$ sonsuz küçük üreticiyle elde edilen bir-parametrelili $\mathbf{x}^* = e^{\epsilon X} \mathbf{x} = e^{\epsilon \sum_{\alpha=1}^r \sigma_\alpha X_\alpha} \mathbf{x}$ Lie dönüşüm grubu, r -parametrelili dönüşüm grubunun bir-parametrelili bir altgrubunu tanımlar. Burada $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ reel sabitler ve $\zeta_j(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^r \sigma_\alpha \xi_{\alpha j}(\mathbf{x}), j = 1, 2, \dots, n$ dir.

Tanım . (1.62) ifadesiyle tanımlanmış $\{X_\alpha\}, \alpha = 1, 2, \dots, r$ üreticili, r -parametrelili $\mathbf{x}^* = X(\mathbf{x}, \epsilon)$, Lie dönüşüm grubu olsun. X_α ve X_β operatörlerinin komütatörü

$$[X_\alpha, X_\beta] = X_\alpha X_\beta - X_\beta X_\alpha = \sum_{i,j=1}^n \left((\xi_{\alpha i}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i})(\xi_{\beta j}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j}) \right)$$

$$- (\xi_{\beta i}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i})(\xi_{\alpha j}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j})] \sum_{j=1}^n \eta_j(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

şeklinde birinci mertebeden bir operatördür. Burada $\eta_j(\mathbf{x})$

$$\eta_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n [\xi_{\alpha i}(\mathbf{x}) \frac{\partial \xi_{\beta j}(\mathbf{x})}{\partial x_i} - \xi_{\beta i}(\mathbf{x}) \frac{\partial \xi_{\alpha j}(\mathbf{x})}{\partial x_i}]$$

dir. $[X_\alpha, X_\beta] = -[X_\beta, X_\alpha]$ olacağı hemen görülebilir.

Teorem (Lie'nin İkinci Temel Teoremi) Bir r -parametrelili Lie dönüşüm grubunun herhangi iki sonsuz küçük üreticinin komütatörü, yine sonsuz küçük bir operatördür. $[X_\alpha, X_\beta] = C_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma$, $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, r$; burada $C_{\alpha\beta}^\gamma$ katsayılarına yapı sabitleri denir.

Herhangi $X_\alpha, X_\beta, X_\gamma$ sonsuz küçük üreticileri için

$$[X_\alpha, [X_\beta, X_\gamma]] + [X_\beta, [X_\gamma, X_\alpha]] + [X_\gamma, [X_\alpha, X_\beta]] = 0 \quad (1.63)$$

Jacobi özdeşliği geçerlidir.

Teorem (Lie'nin Üçüncü Temel Teoremi) $[X_\alpha, X_\beta] = C_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma$ bağıntılarıyla tanımlanan yapı sabitleri,

$$C_{\alpha\beta}^\gamma = -C_{\beta\alpha}^\gamma$$

$$C_{\alpha\beta}^\rho C_{\rho\gamma}^\delta + C_{\beta\gamma}^\rho C_{\rho\alpha}^\delta + C_{\gamma\alpha}^\rho C_{\rho\beta}^\delta = 0$$

denklemlerini sağlar. [3]

Tanım . Bir $\mathcal{L}$ Lie cebri, F cismi üzerinde $[X_\alpha, X_\beta] = C_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma$ ve Jacobi özdeşliğini sağlayan toplamaya göre kapalı olan bir vektör uzayıdır.

Özel olarak, r -parametrelili Lie dönüşüm grubunun $\{X_\alpha\}$, $\alpha = 1, 2, \dots, r$ sonsuz küçük üreticileri R cismi üzerinde bir r -boyutlu $\mathcal{L}^r$ Lie cebri oluşturur eğer, $X_\alpha, X_\beta, X_\gamma \in \mathcal{L}^r$, $a, b \in R$ için

$$(i) aX_\alpha + bX_\beta \in \mathcal{L}^r;$$

$$(ii) X_\alpha + X_\beta = X_\beta + X_\alpha;$$

$$(iii) X_\alpha + (X_\beta + X_\gamma) = (X_\alpha + X_\beta) + X_\gamma;$$

$$(iv) [X_\alpha, X_\beta] \in \mathcal{L}^r;$$

$$(v) [X_\alpha, X_\beta] = -[X_\beta, X_\alpha];$$

$$(vi) [X_\alpha, [X_\beta, X_\gamma]] + [X_\beta, [X_\gamma, X_\alpha]] + [X_\gamma, [X_\alpha, X_\beta]] = 0;$$

$$(vii) [(aX_\alpha + bX_\beta), X_\gamma] = a[X_\alpha, X_\gamma] + b[X_\beta, X_\gamma].$$

G_r , r -parametrelili Lie dönüşüm grubu olsun. G_r nin herhangi bir-parametrelili altgrubunun, $\mathcal{L}^r$ de bulunan sonsuz küçük bir üretici vardır.

Teorem. $X_\alpha^{(k)}, X_\beta^{(k)}$; X_α, X_β sonsuz küçük üreteçlerinin k ıncı mertebeden genişletilmiş sonsuz küçük üreteçleri ve $[X_\alpha, X_\beta]^{(k)}$ ise $[X_\alpha, X_\beta]$ komütatörünün genişletilmiş sonsuz küçük üretici olsun.

$[X_\alpha, X_\beta]^{(k)} = [X_\alpha^{(k)}, X_\beta^{(k)}], k = 1, 2, \dots$ elde edilir, bu durumda eğer $[X_\alpha, X_\beta] = X_\gamma$ ise $[X_\alpha^{(k)}, X_\beta^{(k)}] = X_\gamma^{(k)}, k = 1, 2, \dots$ dir.

Tanım. Herhangi $X_\alpha, X_\beta \in I$ için $[X_\alpha, X_\beta] \in I$ oluyorsa $I \subset \mathcal{L}$ altuzayına $\mathcal{L}$ Lie cebrinin altcebrı denir.

1.8.1 Çözülebilir Lie Cebirleri

Sonraki bölümde r -parametrelı Lie dönüşüm grubunu kabul eden n . mertebeden adi diferansiyel denklemleri ele alacağız. Gösterileceği üzere $r = 1$ ise, denklemin mertebesi bir basamak düşürülebilir, $n \geq 2$ ve $r = 2$ olduğunda mertebe iki basamak düşürülebilir, $n \geq 3$ ve $r = 3$ ise mertebe ikiden fazla düşürülemeyebilir. Bununla birlikte kabul edilen r -parametrelı grubun sonsuz küçük üreteçlerinin r -boyutlu Lie cebrinin, q -boyutlu çözülebilir bir altcebrı varsa bu durumda diferansiyel denklemin mertebesi q defa düşürülebilir..

Tanım. Herhangi $X \in I, Y \in \mathcal{L}$ için $[X, Y] \in I$ oluyorsa $I \subset \mathcal{L}$ altcebrine $\mathcal{L}$ nin bir ideali veya normal altcebrı denir.

Tanım. $\mathcal{L}^{(k)}$, k -boyutlu Lie cebri, $\mathcal{L}^{(k-1)}, k = 1, 2, \dots, q$ $\mathcal{L}^{(k)}$ nin bir ideali ve

$$\mathcal{L}^{(1)} \subset \mathcal{L}^{(2)} \subset \dots \subset \mathcal{L}^{(q-1)} \subset \mathcal{L}^{(q)} = \mathcal{L}^q$$

şeklinde altcebrler zinciri varsa, $\mathcal{L}^q$, q -boyutlu çözülebilir bir Lie cebridir.

Tanım. Herhangi $X_\alpha, X_\beta \in \mathcal{L}$ için $[X_\alpha, X_\beta] = 0$ oluyorsa $\mathcal{L}$ ye değışmeli Lie cebri denir.

Teorem. Her değışmeli Lie cebri, çözülebilir bir Lie cebridir.

Teorem. Her iki-boyutlu Lie cebri, çözülebilirdir.

İspat. $\mathcal{L}$ iki-boyutlu Lie cebrinin X_1, X_2 sonsuz küçük üreteçlerini baz vektörleri olarak alalım ve $[X_1, X_2] = aX_1, bX_2 = Y$ olsun. Eğer $c_1X_1 + c_2X_2 \in \mathcal{L}$ ise

$$\begin{aligned} [Y, c_1X_1 + c_2X_2] &= c_1[Y, X_1] + c_2[Y, X_2] \\ &= c_1b[X_2, X_1] + c_2a[X_1, X_2] \\ &= (c_2a - c_1b)Y \end{aligned}$$

bulunur, buradan da $Y, \mathcal{L}$ nin bir-boyutlu idealidir.

BÖLÜM 2 ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN DEĞİŞMEZLİĞİ

Bu bölümde sonsuz küçük dönüşümleri n inci mertebeden

$$y_n = f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}) \quad (2.1)$$

şeklindeki adi diferansiyel denklemlere uygulayacağız. Burada $k = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $y_k = \frac{d^k y}{dx^k}$ dir ve $y_n = f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})$, $(x, y, y_1, \dots, y_n)$ uzayında bir yüzey tanımlar.

Tanım. $x^* = X(x, y; \epsilon)$, $y^* = Y(x, y; \epsilon)$ bir-parametrelili Lie dönüşüm grubu ancak ve ancak grubun n inci genişlemesi (2.1) yüzeyini değişmez bırakıyorsa $y_n = f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})$ denklemini değişmez bırakır.

(2.1) denkleminin $y = \Theta(x)$ çözüm eğrisi, $\Theta^{(n)} = f(x, \Theta(x), \Theta^{(1)}(x), \dots, \Theta^{(n-1)}(x))$ eşitliğini sağlar ve (2.1) yüzeyi üzerindedir. Lie dönüşüm grubunun n inci genişlemesi altında (2.1) yüzeyinin değişmezliği, grup etkisi altında (2.1)'in herhangi bir $y = \Theta(x)$ çözüm eğrisinin başka bir $y = \phi(x; \epsilon)$ çözümüne dönüşmesi anlamına gelir.

Ayrıca eğer, x^*, y^* dönüşümü $y_n = f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})$ denkleminin herhangi bir $y = \Theta(x)$ çözümünü başka bir $y = \phi(x; \epsilon)$ çözümüne dönüştürüyorsa bu durumda,

$$y_k = \frac{\partial^k \phi(x; \epsilon)}{\partial x^k}, k = 1, 2, \dots, n$$

olmak üzere (2.1) yüzeyi bu dönüşüm altında değişmezdir. Buradan hemen (2.1) diferansiyel denklemini x^*, y^* dönüşümünü kabul ediyorsa denklemin çözüm eğrilerinin ailesi bu dönüşüm altında değişmez olduğu sonucu çıkar.

Teorem (1) $x^* = X(x, y; \epsilon)$, $y^* = Y(x, y; \epsilon)$ dönüşümünün sonsuz küçük üretici

$$X = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \quad (2.2)$$

ve

$$\begin{aligned} X^{(n)} = & \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + \\ & \eta^{(1)}(x, y, y_1) \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + \eta^{(n)}(x, y, y_1, \dots, y_n) \frac{\partial}{\partial y_n} \end{aligned} \quad (2.3)$$

bu üreticinin k ıncı uzanımı olsun. Burada $\eta^{(n)}(x, y, y_1, \dots, y_n)$

$$\eta^{(n)}(x, y, y_1, \dots, y_n) = \frac{D\eta^{(n-1)}}{Dx} - y_n \frac{D\xi(x, y)}{Dx}$$

şeklindedir.

$$X^{(n)}(y_n - f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})) = 0$$

yani

$$\eta^{(n)}(x, y, y_1, \dots, y_n) = X^{(n-1)}f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}) \quad (2.4)$$

olduğunda $x^* = X(x, y; \epsilon)$, $y^* = Y(x, y; \epsilon)$ grubu diferansiyel denklem tarafından kabul edilir, daha genel olarak ifade edilirse $F(x, y, y_1, \dots, y_n) = 0$ şeklinde bir diferansiyel denklem ancak ve ancak $F(x, y, y_1, \dots, y_n) = 0$ iken

$$X^{(n)}F(x, y, y_1, \dots, y_n) = 0$$

oluyorsa x^*, y^* dönüşümünü kabul eder. [4]

Bir adi diferansiyel denklemin değişmezliği için verilen bu kriterin, diferansiyel denklemin kabul ettiği $(\xi(x, y), \eta(x, y))$ sonsuz küçüklerinin belirlenmesinde bir algoritma sağladığını göstereceğiz. Daha da önemlisi, bir-parametrelili bir Lie dönüşüm grubu bir adi diferansiyel denklem tarafından kabul edilirse bu durumda denklemin mertebesinin bir basamak düşürülebileceğidir.

Birinci mertebeden denklemler için bu ifade integral alma işlemine karşı gelir. Bu mertebe düşürme işlemi, kanonik koordinatlar kullanılarak yapılabilir.

Daha yüksek mertebeden ($n \geq 2$) diferansiyel denklemler için mertebenin indirgenmesi diferansiyel değişmezler kullanılarak çözülür. Ayrıca eğer denklem, Lie cebri çözülebilir r -parametrelili dönüşüm grubu altında değişmez ise bu durumda mertebe r defa düşürülebilir.

2.1 Kanonik Koordinatlar

$$\left. \begin{aligned} x^* &= X(x, y; \epsilon) = x + \epsilon \xi(x, y) + O(\epsilon^2) \\ y^* &= Y(x, y; \epsilon) = y + \epsilon \eta(x, y) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

bir-parametrelili Lie dönüşüm grubu için $Xr = 0$ ve $Xs = 1$ denklemlerinin çözümü olan $(r(x, y), s(x, y))$ kanonik koordinatları vardır öyle ki koordinat değişiminden sonra (2.5) dönüşümü

$$\left. \begin{aligned} r^* &= r \\ s^* &= s + \epsilon \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

öteleme grubuna dönüşür. $y' = f(x, y)$ şeklindeki denklem kanonik koordinatlara göre

$$\frac{ds}{dr} = \frac{s_x + s_y y'}{r_x + r_y y'} = F(r, s) = \frac{s_x + s_y f(x, y)}{r_x + r_y f(x, y)} \quad (2.7)$$

haline gelir. $y' = f(x, y)$ ve (2.7) denklemlerinin (2.6) dönüşümü altında değişmezliği, $F(r, s)$ nin s ye bağlı olmadığı anlamına gelir. Böylece (2.7) denklemi

$$\frac{ds}{dr} = G(r) = \frac{s_x + s_y f(x, y)}{r_x + r_y f(x, y)}$$

şeklinde dir.

Sonuç olarak, $y' = f(x, y)$ denkleminin genel çözümü, C sabit olmak üzere $s(x, y) = \int^{r(x, y)} G(\rho) d\rho + C$ ile verilir.

2.2 İntegrasyon Çarpanı

$y' = f(x, y)$ adi diferansiyel denklemi

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2.8)$$

şeklinde yazılabilir, burada $f(x, y) = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$ dir. Eğer $\omega(x, y) = \text{sabit}$ $y' = f(x, y)$ denkleminin genel çözümü ise

$$N \frac{\partial \omega}{\partial x} - M \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0 \quad (2.9)$$

dır. $y' = f(x, y)$ denkleminin bir-parametrelili bir Lie dönüşüm grubu kabul ettiğini varsayalım. Bu durumda (2.5) dönüşümü, $\omega(x, y) = C$ çözüm eğrileri ailesini değişmez bırakır. (2.5) dönüşüm grubunun, $\omega(x, y) = C$ çözüm eğrilerinin değişmez eğriler olmayacak şekilde bir grup olduğunu varsayalım. Bu halde genelliği bozmaksızın $\omega(x, y) = C$ çözüm eğrileri ailesi, $X = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ sonsuz küçük üretici için

$$X\omega = \xi(x, y) \frac{\partial \omega}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial \omega}{\partial y} = 1 \quad (2.10)$$

eşitliğini sağlar. (2.9) ve (2.10) sisteminden $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ ve $\frac{\partial \omega}{\partial y}$ türevleri,

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{M}{M\xi + N\eta}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{N}{M\xi + N\eta}$$

şeklinde çözülebilir. Ayrıca $d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega}{\partial y} dy$ bir tam diferansiyeldir. Buradan $\mu(x, y) = \frac{1}{M\xi + N\eta}$ denklemin bir integrasyon çarpanıdır. Tersine aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 2.2.1 Eğer $\mu(x, y)$ birinci mertebeden bir diferansiyel denklemin bir integrasyon çarpanı ise bu durumda $\mu(x, y) = \frac{1}{M\xi + N\eta}$ yı sağlayan herhangi bir $(\xi(x, y), \eta(x, y))$, $y' = f(x, y)$ denklemi tarafından kabul edilen

$X = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ sonsuz küçük üreticini tanımlar.

Teorem 2.2.2 Herhangi bir $\xi(x, y)$ fonksiyonu için

$$X = \xi(x, y) \left[\frac{\partial}{\partial x} + f(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \right] \quad (2.11)$$

üreteçli bir-parametrelî Lie dönüşüm grubu, $y' = f(x, y)$ denkleminin her çözüm eğrisini değişmez bırakır.

ispat. $y = \Theta(x)$, $y' = f(x, y)$ nin bir çözüm eğrisi olsun. Bu durumda $y' = \Theta'(x) = f(x, \Theta(x))$ olur. (2.11) ile verilen üretici ele alalım.
 $X(y - \Theta(x)) = \xi(x, y)[f(x, y) - \Theta'(x)]$; $y = \Theta(x)$ ise

$$X(y - \Theta(x)) = \xi(x, y(x))[f(x, y(x)) - \Theta'(x)] = 0$$

bulunur. Sonuç olarak $y - \Theta(x) = 0$, bir-parametrelî Lie dönüşüm grubu için değişmez bir eğridir.

2.2.1 İki ve Daha Yüksek Mertebeden Diferansiyel Denklemler

$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ veya

$$y_n = f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}) \quad (2.12)$$

şeklindeki diferansiyel denklemlere sonsuz küçük dönüşümlerin uygulamalarını ele alalım. Burada $n \geq 2$ ve $y^{(k)} = y_k = \frac{d^k y}{dx^k}$, $k = 1, 2, \dots, n$
 $y' = y^{(1)}$, $y'' = y^{(2)}$, ... dir.

(2.12) denkleminin, $X = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ üreteçli

$$\left. \begin{aligned} x^* &= X(x, y; \epsilon) = x + \epsilon \xi(x, y) + O(\epsilon^2) \\ y^* &= Y(x, y; \epsilon) = y + \epsilon \eta(x, y) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

bir-parametrelî Lie dönüşüm grubunu kabul ettiğini varsayalım.

$$y_n = f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})$$

denkleminin bu dönüşüm altında kanonik koordinatlar veya diferansiyel değişmezler yardımıyla bir merteye düşürülebileceğini göstereceğiz.

2.3 Kanonik Koordinatlar Yardımıyla Mertebe İndirgeme

Teorem 2.3.1 Trivial olmayan $X = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ üreteçli bir-parametrelili Lie dönüşüm grubunun ($n \geq 2$) olan (2.12) denklemi tarafından kabul edildiğini varsayalım. $(r(x, y), s(x, y))$, $Xr = 0, Xs = 1$ denklemlerini sağlayan kanonik koordinatlar olsun. Bu durumda n inci mertebeden (2.12) denklemini çözme problemi ($n-1$) inci mertebeden

$$\frac{d^{n-1}z}{dr^{n-1}} = G(r, z, \frac{dz}{dr}, \dots, \frac{d^{n-2}z}{dr^{n-2}}) \quad (2.14)$$

denkleminin çözülmesi problemine indirgenir. Burada $\frac{ds}{dr} = z$ dir. [5]

ispat. (r, s) kanonik koordinatlarına göre

$$\frac{ds}{dr} = \frac{s_x + s_y y'}{r_x + r_y y'} \quad (2.15)$$

yazıp y' ye göre çözersek, $F_0(r, s, \frac{ds}{dr})$ herhangi bir fonksiyon olmak üzere $y' = F_0(r, s, \frac{ds}{dr})$ buluruz. (2.13) dönüşümü non-trivial olduğundan

$$r_x + r_y y' \neq 0$$

olduğu açıktır. Yani $y_n = f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})$ denkleminin keyfi bir $y = \Theta(x)$ çözümü için $\frac{\eta}{\xi} \neq y' = \Theta'(x)$ dir. Herhangi bir $f_1(r, s, \frac{ds}{dr})$ fonksiyonu için

$$\frac{d^2 s}{dr^2} = \frac{d(\frac{s_x + s_y y'}{r_x + r_y y'})}{dr} = y'' \left[\frac{s_y r_x - s_x r_y}{(r_x + r_y y')^3} \right] + f_1(r, s, \frac{ds}{dr})$$

ve buradan da $G_1(r, s, \frac{ds}{dr}) = -f_1 F_1$ ve $F_1(r, s, \frac{ds}{dr}) = \frac{(r_x + r_y y')^3}{s_y r_x - s_x r_y}$ olmak üzere

$$y'' = \frac{d^2 s}{dr^2} F_1(r, s, \frac{ds}{dr}) + G_1(r, s, \frac{ds}{dr})$$

şeklindedir, (r, s) kanonik koordinatlar olduğundan $s_y r_x - s_x r_y \neq 0$ yazılır. Bu şekilde devam edilerek herhangi bir $f_{k-1}(r, s, \frac{ds}{dr}, \dots, \frac{d^{k-1}s}{dr^{k-1}})$ fonksiyonu için

$$\frac{d^k s}{dr^k} = y_k \left[\frac{s_y r_x - s_x r_y}{(r_x + r_y y')^{k+1}} \right] + f_{k-1}(r, s, \frac{ds}{dr}, \dots, \frac{d^{k-1}s}{dr^{k-1}}) \quad (2.16)$$

bulunur. $G_1(r, s, \frac{ds}{dr}, \dots, \frac{d^{k-1}s}{dr^{k-1}}) = -f_{k-1} F_{k-1}$ ve $F_{k-1}(r, s, \frac{ds}{dr}, \dots, \frac{d^{k-1}s}{dr^{k-1}}) = \frac{(r_x + r_y y')^{k+1}}{s_y r_x - s_x r_y}$ olmak üzere

$$y_k = \frac{d^k s}{dr^k} F_{k-1}(r, s, \frac{ds}{dr}, \dots, \frac{d^{k-1}s}{dr^{k-1}}) + G_{k-1}(r, s, \frac{ds}{dr}, \dots, \frac{d^{k-1}s}{dr^{k-1}})$$

elde edilir.

Böylece $(r(x, y), s(x, y))$ kanonik koordinatlarına göre (2.12) denklemi

$$F(r, s, \frac{ds}{dr}, \dots, \frac{d^{n-1}s}{dr^{n-1}})$$

herhangi bir fonksiyon olmak üzere $\frac{d^n s}{dr^n} = F(r, s, \frac{ds}{dr}, \dots, \frac{d^{n-1}s}{dr^{n-1}})$ şeklinde yazılabilir. Bu denklem $r^* = r, s^* = s + \epsilon$ grubunu kabul eder ve F in s den bağımsız olduğu çıkar. Sonuç olarak $y_n = f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})$ denklemi (2.14) denkleminde indirgenir.

(2.14) denkleminin genel çözümü $z = \phi(r; C_1, C_2, \dots, C_{n-1})$ şeklindeyse bu durumda $y_n = f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})$ denkleminin genel çözümü $C_1, C_2, \dots, C_n$ ler integrasyon sabitleri olmak üzere, $s(x, y) = \int^{r(x,y)} \phi(\rho; C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) d\rho + C_n$ şeklindedir.

Bir-parametrelili Lie dönüşüm grubu altında $y_n = f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})$ denkleminin değişmezliği, $(n-1)$ inci mertebeden bir diferansiyel denklemin çözümüne indirgenir.

2.4 Diferansiyel Değişmezler Yardımıyla Mertebe İndirgeme

n inci mertebeden

$$\mathcal{F}(x, y, y_1, \dots, y_n) = y_n - f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}) = 0 \quad (2.17)$$

adi diferansiyel denklemi

$$\begin{aligned} x^* &= X(x, y; \epsilon) = x + \epsilon \xi(x, y) + O(\epsilon^2) \\ y^* &= Y(x, y; \epsilon) = y + \epsilon \eta(x, y) + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

dönüşüm grubunu ancak ve ancak $\mathcal{F} = 0$ iken $X^{(n)}\mathcal{F} = 0$ oluyorsa kabul eder. Böylece $\mathcal{F}$ fonksiyonu, $Xu(x, y) = 0, X^{(k)}v_k(x, y, y_1, \dots, y_k) = 0; \frac{\partial v_k}{\partial y_k} \neq 0$, $k = 1, 2, \dots, n$ şartlarını sağlayan

$$u(x, y), v_1(x, y, y_1), \dots, v_k(x, y, y_1, \dots, y_k) \quad (2.18)$$

değişmezlerinin bir fonksiyonudur.

$$\begin{aligned} x^* &= X(x, y; \epsilon) = x + \epsilon \xi(x, y) + O(\epsilon^2) \\ y^* &= Y(x, y; \epsilon) = y + \epsilon \eta(x, y) + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

dönüşüm grubunun n inci genişlemesi için $u^* = u, v_k^* = v_k, k = 1, 2, \dots, n$ çıkar; $v_k(x, y, y_1, \dots, y_k)$

$$\frac{dx}{\xi(x, y)} = \frac{dy}{\eta(x, y)} = \frac{dy_1}{\eta^{(1)}(x, y, y_1)} = \dots = \frac{dy_k}{\eta^{(k)}(x, y, y_1, \dots, y_k)}$$

karakteristik denklemlerinin integrasyon sabitidir. (2.18) değişmezlerinin herhangi bir kümesi için (2.17) denklemi, G herhangi bir fonksiyon olmak üzere

$$G(u, v_1, v_2, \dots, v_n) = 0 \quad (2.19)$$

haline gelir. $s(x, y)$ kanonik koordinatını hesaplamaksızın, (2.18) değişmezlerinin her zaman elde edilebileceğini gösterelim:

$X^{(1)}$ birinci uzanımının $u(x, y), v_1(x, y, y_1)$ değişmezleri

$$\frac{dx}{\xi(x, y)} = \frac{dy}{\eta(x, y)} = \frac{dy_1}{\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y_1 - \xi_y(y_1)^2}$$

karakteristik denklemlerinin integrasyon sabitleridir. $u(x, y)$ açık olarak belirlenebilirse $v(x, y, y_1)$ nin hesaplanması, bir integral alma işlemine indirgenir.

$u(x, y)$ ve $v(x, y, y_1)$, x^*, y^* dönüşümlerinin k inci genişlemeleri altında değişmez olduklarından ve $(\frac{dv}{du})^* = \frac{dv^*}{du^*} = \frac{dv}{du}, k \geq 1$ den hareketle $\frac{dv}{du}$, bu dönüşüm grubunun $(k+1)$ inci genişlemesi altında değişmez bir gruptur. Bu şekilde devam edildiğinde, $\frac{dv}{du}, \frac{d^2v}{du^2}, \dots, \frac{d^{n-1}v}{du^{n-1}}$ lerin x^*, y^* dönüşümlerinin n inci genişlemesi altında değişmez oldukları görülür. Bu değişmezler x^*, y^* dönüşümlerinin n inci mertebeden genişletilmiş grubunun diferansiyel değişmezleri denir. Ayrıca böyle diferansiyel değişmezler, x^*, y^* dönüşümlerinin birinci mertebeden genişletilmiş grubunun herhangi $u(x, y), v(x, y, y_1), [\frac{\partial v}{\partial y_1} \neq 0]$ değişmez seçimi ile oluşturulabilir. Bu durumda, $g_1(x, y, y_1)$ herhangi bir fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{aligned} \frac{dv}{du} &= \frac{\frac{\partial v}{\partial x} + y_1 \frac{\partial v}{\partial y} + y_2 \frac{\partial v}{\partial y_1}}{\frac{\partial u}{\partial x} + y_1 \frac{\partial u}{\partial y}} \\ &= v_2(x, y, y_1, y_2) \\ &= y_2 \left[\frac{\frac{\partial v}{\partial y_1}}{\frac{\partial u}{\partial x} + y_1 \frac{\partial u}{\partial y}} \right] + g_1(x, y, y_1) \end{aligned}$$

dir. Bu şekilde devam edilerek ; $g(x, y, y_1, \dots, y_k)$ olmak üzere $k = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} \frac{d^k v}{du^k} &= v_{k+1}(x, y, y_1, y_2, \dots, y_{k+1}) \\ &= y_{k+1} \left[\frac{\frac{\partial v}{\partial y_1}}{(\frac{\partial u}{\partial x} + y_1 \frac{\partial u}{\partial y})^k} \right] + g_k(x, y, y_1, \dots, y_k) \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak $\{v_k(x, y, y_1, \dots, y_k)\}, k = 2, 3, \dots, n$ değişmezleri diferansiyel değişmezler olarak oluşturulur. Burada

$$A(x, y, y_1) = \frac{(\frac{\partial u}{\partial x} + y_1 \frac{\partial u}{\partial y})^k}{\frac{\partial v}{\partial y_1}}, B_k = -A_k g_k, k = 1, 2, \dots, n-1.$$

olmak üzere

$$y_{k+1} = \frac{d^k v}{du^k} A_k(x, y, y_1) + B_k(x, y, y_1, \dots, y_k)$$

olduğu görülmelidir.

Böylece diferansiyel değişmezlere göre indirgenmiş (2.19) denklemi, herhangi bir $H(u, v, \frac{dv}{du}, \dots, \frac{d^{n-2}v}{du^{n-2}})$ fonksiyonu için

$$\frac{d^{n-1}v}{du^{n-1}} = H(u, v, \frac{dv}{du}, \dots, \frac{d^{n-2}v}{du^{n-2}}) \quad (2.20)$$

biçiminde (n-1) inci mertebeden bir adi diferansiyel denklemdir.

Ayrıca $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$ ler keyfi sabitler olmak üzere $v = \phi(u; C_1, C_2, \dots, C_{n-1})$ (2.20) denkleminin genel çözümüdür ve bu durumda (2.17) denkleminin genel çözümü, birinci mertebeden

$$v(x, y, y_1) = \phi(u(x, y); C_1, C_2, \dots, C_{n-1})$$

diferansiyel denklemini çözerek bulunur.

2.5 n inci Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemlerin Sonsuz Küçük Dönüşümleri için Belirleyici Denklemler

Teorem (1) e göre n inci mertebeden

$$y_n = f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}) \quad (2.21)$$

şeklinde bir denklemin

$$X = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \quad (2.22)$$

üreteçli, bir-parametrelî Lie dönüşüm grubunu kabul etmesi ancak ve ancak $y_n - f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}) = 0$ iken

$$X^{(n)}[y_n - f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})] = 0 \quad (2.23)$$

ise mümkündür. Burada $X^{(n)}$ üretici

$$X^{(n)} = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + \eta^{(1)}(x, y, y_1) \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + \eta^{(n)}(x, y, y_1, \dots, y_n) \frac{\partial}{\partial y_n}$$

şeklinde, X in n inci uzanımıdır. Buradan (2.23) ifadesi

$$\eta^{(n)} - [\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta^{(1)} \frac{\partial f}{\partial y_1} + \dots + \eta^{(n-1)} \frac{\partial f}{\partial y_{n-1}}] = 0 \quad (2.24)$$

haline gelir.

$f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})$, $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ lere göre polinom ise bu durumda (2.24); katsayıları, $(\xi(x, y), \eta(x, y))$ ve bunların n inci mertebeye kadar türevlerine göre lineer homogen olan, $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ lere göre polinom şeklinde bir denklemdir. Herhangi bir adi diferansiyel denklem için belli bir x değeri için her bir $y, y_1, \dots, y_{n-1}$ e keyfi değerler atanabileceğinden (2.24) deki polinomda her terimin katsayısı sıfır olmalıdır. Bu ise $(\xi(x, y), \eta(x, y))$ için bir lineer homogen kısmi diferansiyel denklem sistemi verir. Bu lineer sistem, $y_n = f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})$ tarafından kabul edilen sonsuz küçükler için belirleyici denklemler cümlesini tanımlar. Eğer denklem sayısı, ξ ve η bilinmeyen sayısından fazla ise bu kümeye aşırı belirlenmiş sistem denir.

$f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})$, $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ lere göre polinom şeklinde değilse, (2.24) deki $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ değişkenlerinin bağımsızlığı üzerine kurulmuş belirleyici denklemlere karşı gelen bir küme elde edilebilir. ikinci mertebeden bir adi diferansiyel denklemin en fazla 8-parametrelili bir Lie dönüşüm grubu; $n \geq 2$ olmak üzere n inci mertebeden bir denklemin ise en fazla $(n+4)$ -parametrelili Lie dönüşüm grubu kabul edeceği gösterilebilir.

Adi diferansiyel denklemler tarafından kabul edilen sonsuz küçük üreticilerin formları hakkında bazı teoremler vereceğiz. Bu teoremler uygulamalarda ortaya çıkan birçok adi diferansiyel denklemini kapsamaktadır.

Teorem 2.5.1 $n \geq 3$ olmak üzere n inci mertebeden

$$y_n = g(x, y, y_1)y_{n-1} + h(x, y, y_1, \dots, y_{n-2}) \quad (2.25)$$

adi diferansiyel denklemini $X = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$ üreticini kabul ederse $\xi_y = 0$ dir.

Teorem 2.5.2 $n \geq 3$ olmak üzere n inci mertebeden

$$y_n = g(x, y)y_{n-1} + h(x, y, y_1, \dots, y_{n-2})$$

adi diferansiyel denklemini $X = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$ üreticini kabul ederse $\xi_y = 0, \eta_{yy} = 0$ dir.

Teorem 2.5.3

$$y_2 = g(x, y)y_1 + h(x, y)$$

şeklindeki bir adi diferansiyel denklem $\xi_y = 0$ olan $X = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$ üreticini kabul ederse $\eta_{yy} = 0$ dir.

2.6 Blasius Denkleminin Kabul Ettiği Simetriler

$y''' + \frac{1}{2}yy'' = 0$ denklemi $X = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$ üreteçli bir Lie dönüşüm grubu kabul etsin. $\xi(x, y), \eta(x, y)$ sonsuz küçüklerini bulalım:

$$X^{(3)} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \eta^{(1)}\frac{\partial}{\partial y_1} + \eta^{(2)}\frac{\partial}{\partial y_2} + \eta^{(3)}\frac{\partial}{\partial y_3}$$

uzanımını denkleme uygularsak;

$$X^{(3)}[y''' + \frac{1}{2}yy''] = \frac{1}{2}y''\eta + \frac{1}{2}y\eta^{(2)} + \eta^{(3)} = 0, y''' = \frac{1}{2}yy''. \quad (2.26a)$$

$$\begin{aligned} \eta^{(2)} &= \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})(y')^2 - \xi_{yy}(y')^3 + (\eta_y - 2\xi_x)y'' - 3\xi_y y'y'' \\ \eta^{(3)} &= \eta_{xxx} + (3\eta_{xy} - \xi_{xxx})y' + 3(\eta_{xyy} - \xi_{xxy})(y')^2 + (\eta_{yyy} - 3\xi_{xyy})(y')^3 - \xi_{yyy}(y')^4 \\ &+ 3(\eta_{xy} - \xi_{xx})y'' + 3(\eta_{yy} - 3\xi_{xy})y'y'' - 6\xi_{yy}(y')^2 y'' - 3\xi_y (y'')^2 + (\eta_y - 3\xi_x)y''' - 4\xi_y y'y''' \end{aligned}$$

ifadelerini kullanırsak (2.26a) denklemi,

$$\begin{aligned} &[\eta_{xxx} + \frac{1}{2}y\eta_{xx}] + [3\eta_{xy} - \xi_{xxx} + y\eta_{xy} - \frac{1}{2}y\xi_{xx}]y' \\ &+ [3\eta_{xyy} - 3\xi_{xxy} + \frac{1}{2}y\eta_{yy} - y\xi_{xy}](y')^2 - [\eta_{yyy} - 3\xi_{xyy} - \frac{1}{2}y\xi_{yy}](y')^3 - \xi_{yyy}(y')^4 \\ &+ [3\eta_{xy} - 3\xi_{xx} + \frac{1}{2}y\xi_x + \frac{1}{2}\eta]y'' + [3\eta_{yy} - 9\xi_{xy} + \frac{1}{2}y\xi_y]y'y'' \\ &- 6\xi_{yy}(y')^2 y'' - 3\xi_y (y'')^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.26b)$$

şeklinde y' ye göre düzenlendiğinde polinom yapısında bir denklemdir. Buradan $\xi(x, y), \eta(x, y)$ sonsuz küçükleri için belirleyici denklemler

$$\eta_{xxx} + \frac{1}{2}y\eta_{xx} = 0 \quad (2.26c)$$

$$3\eta_{xy} - \xi_{xxx} + y\eta_{xy} - \frac{1}{2}y\xi_{xx} = 0 \quad (2.26d)$$

$$3\eta_{xyy} - 3\xi_{xxy} - y\xi_{xy} + \frac{1}{2}y\eta_{yy} = 0 \quad (2.26e)$$

$$3\xi_{xxy} + \frac{1}{2}y\xi_{yy} - \eta_{yyy} = 0 \quad (2.26f)$$

$$\xi_{yyy} = 0 \quad (2.26g)$$

$$3\eta_{xy} - 3\xi_{xx} + \frac{1}{2}y\xi_x + \frac{1}{2}\eta = 0 \quad (2.26h)$$

$$3\eta_{yy} - 9\xi_{xy} + \frac{1}{2}y\xi_y = 0 \quad (2.26i)$$

$$\xi_{yy} = 0 \quad (2.26j)$$

$$\xi_y = 0 \quad (2.26k)$$

şeklinde elde edilir.

Hemen görülebilir ki (2.26k) sağlandığında $\xi = \xi(x)$ ve (2.26g-j) ve (2.26i) den (2.26e-f) sağlanacak şekilde

$$\eta_{yy} = 0 \quad (2.26m)$$

buluruz. (2.26d) de y ye göre, (2.26h) da ise x ve y ye göre türev alırsak

$$\eta_{xy} = \xi'' = 0 \quad (2.26n)$$

çıkar, (2.26n) de bulunanlar (2.26d) denklemini de sağlar. Bu durumda

$$\left. \begin{aligned} \xi(x) &= \alpha + \beta x \\ \eta(x, y) &= \gamma y + a(x) \end{aligned} \right\} \quad (2.26p)$$

bulunur. (2.26h) dan

$$\frac{1}{2}y\beta + \frac{1}{2}\eta = \frac{1}{2}(y\beta + \gamma y + a(x)) = 0$$

$a(x) = 0$ ve $\gamma = -\beta$ elde edilir. Böylece Blasius denklemi sadece iki-parametrelili bir Lie dönüşüm grubu kabul eder ve buna karşı gelen sonsuz küçükler

$$\xi = \alpha + \beta x$$

$$\eta = -\beta y, \alpha, \beta = \text{sabit}$$

şeklindedir. Dönüşümün üreteçleri ise $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ ve $X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$ dir.

2.6.1 $y'' = 0$ Denkleminin Simetrileri

$y'' = 0$ denkleminin değişmezlik kriteri

$$X^{(2)}[y''] = \xi(x, y)\frac{\partial y''}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial y''}{\partial y} + \eta^{(1)}(x, y, y')\frac{\partial y''}{\partial y'} + \eta^{(2)}(x, y, y', y'')\frac{\partial y''}{\partial y''} = 0$$

$$y'' = 0 \text{ olduğunda } \eta^{(2)} = 0$$

olmasıdır. Buradan $(\xi(x, y), \eta(x, y))$,

$$\eta^{(2)} = \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})(y')^2 - \xi_{yy}(y')^3 = 0 \quad (2.27a)$$

denklemini sağlar. Bu denklem y' nün 3 üncü dereceden bir polinomu şeklindedir. Denklemin katsayılarını sıfıra eşitlersek

$$\xi_{yy} = 0 \quad (2.27b)$$

$$\eta_{xx} = 0 \quad (2.27c)$$

$$\eta_{yy} - 2\xi_{xy} = 0 \quad (2.27d)$$

$$\xi_{xx} - 2\eta_{xy} = 0 \quad (2.27e)$$

belirleyici denklem kümesini elde ederiz. (2.27b) ve (2.27c) denklemlerinden

$$\xi(x, y) = a(x)y + b(x)$$

$$\eta(x, y) = c(y)x + d(y)$$

ve buradan da (2.27d) ve (2.27e) denklemlerinden

$$xc''(y) + d''(y) - 2a'(x) = 0 \quad (2.27f)$$

$$ya''(x) + b''(x) - 2c'(y) = 0 \quad (2.27g)$$

buluruz. (2.27f) nin x e göre, (2.27g) nin y ye göre türevini alarak $c''(y) = a''(x) = 0$, ve integre ederek

$$a(x) = \alpha_1 x + \alpha_2, c(y) = \alpha_3 y + \alpha_4$$

elde ederiz. Benzer şekilde

$$d''(y) = 2a'(x) = 2\alpha_1, b''(x) = 2c'(y) = 2\alpha_3$$

den

$$d(y) = \alpha_1 y^2 + \alpha_5 y + \alpha_6, b(x) = \alpha_3 x^2 + \alpha_7 x + \alpha_8$$

bulunur. Böylece $y'' = 0$ denklemi,

$$\xi(x, y) = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 xy + \alpha_3 x + \alpha_4 y + \alpha_5$$

$$\eta(x, y) = \alpha_1 xy + \alpha_2 y^2 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_8$ ler keyfi sabitler olmak üzere sekiz-parametrel bir Lie dönüşüm grubu kabul eder. Bu sonsuz küçüklere karşı gelen üreteçler ise

$$X_1 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y}, X_2 = xy \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y}, X_3 = x \frac{\partial}{\partial x}, X_4 = y \frac{\partial}{\partial x}$$

$$X_5 = \frac{\partial}{\partial x}, X_6 = x \frac{\partial}{\partial y}, X_7 = y \frac{\partial}{\partial y}, X_8 = \frac{\partial}{\partial y}$$

şeklinde bulunur. Bu sekiz üreteçli vektör uzayı bir $\mathcal{L}^8$ Lie cebri oluşturur. $\mathcal{L}^8$ Lie cebrinin komütatörlerini komütatör tablosu yardımıyla göstermek uygun olacaktır. $[X_\alpha, X_\beta] = -[X_\beta, X_\alpha]$ olduğundan köşegen üzerindeki bütün elemanlar sıfırdır.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
X_1	0	0	$-X_1$	$-X_2$	$-2X_3 - X_7$	0	0	$-X_8$
X_2	0	0	0	0	$-X_4$	$-X_1$	$-X_2$	$-X_3 - 2X_7$
X_3	X_1	0	0	$-X_4$	$-X_5$	X_6	0	0
X_4	X_2	0	X_4	0	0	$X_7 - X_3$	$-X_4$	$-X_5$
X_5	$2X_3 + X_7$	X_4	X_5	0	0	X_8	0	0
X_6	0	X_1	$-X_6$	$X_3 - X_7$	$-X_8$	0	X_6	0
X_7	0	X_2	0	X_4	0	$-X_6$	0	$-X_8$
X_8	X_6	$X_3 + 2X_7$	0	X_5	0	0	X_8	0

2.7 Verilen Bir Grup Altında Değişmez Olan n. Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemlerin Belirlenmesi

Verilen bir-parametrelili bir Lie dönüşüm grubunu kabul eden n inci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin bulunması problemini ele alalım. (2.21) denkleminin (2.22) üreteli bir Lie dönüşümler grubunu kabul ettiğini varsayalım. iki şekilde hareket edebiliriz:

(i) Kanonik Değişkenler Metodu

$X = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ üreteline karşı gelen $(r(x, y), s(x, y))$ kanonik koordinatları $Xr = 0$ ve $Xs = 1$ denklemlerini sağlayacaktır. $y_n = f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})$ denklemi tarafından kabul edilen grup, şimdi

$$r^* = r, s^* = s + \epsilon \quad (2.28)$$

dir ve bu grup altında değişmezler $\frac{d^k s}{dr^k}, k = 1, 2, \dots, n$ şeklindedir.

(2.15-16) eşitlikleri yardımıyla bu değişmezler $x, y, y', \dots, y^{(n)}$ lere göre ifade edilebilir ve (2.22) yi kabul eden en genel n inci mertebeden adi diferansiyel denklem $G(r, \frac{ds}{dr}, \frac{d^2 s}{dr^2}, \dots, \frac{d^{n-1} s}{dr^{n-1}})$ argümanlarının keyfi bir fonksiyonu olmak üzere $\frac{ds}{dr}$ ye göre (n-1) inci mertebeden

$$\frac{d^n s}{dr^n} = G(r, \frac{ds}{dr}, \frac{d^2 s}{dr^2}, \dots, \frac{d^{n-1} s}{dr^{n-1}}) \quad (2.29)$$

ile verilebilir.

(ii) Diferansiyel Değişmezler Metodu

Burada ilk olarak $u(x, y), v(x, y, y_1)$ değişmezlerini bulalım ve $x, y, y_1, \dots, y_n$ lere göre ifade edilebilen $\frac{d^k v}{du^k}, k = 1, 2, \dots, n-1$ diferansiyel değişmezlerini hesaplayalım.

$X = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ yi kabul eden en genel n inci mertebeden adi diferansiyel denklem; $H(u, v, \frac{dv}{du}, \dots, \frac{d^{n-2} v}{du^{n-2}})$, argümanlarının keyfi bir fonksiyonu olmak üzere

$$\frac{d^{n-1} v}{du^{n-1}} = H(u, v, \frac{dv}{du}, \dots, \frac{d^{n-2} v}{du^{n-2}}) \quad (2.30)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu denklemin mertebesi (n-1) dir.

2.8 Çok-parametrelili Gruplar Altında Adi Diferansiyel Denklemlerin Değişmezliği

Bu kısımda r -parametrelili bir Lie dönüşüm grubu altında, $2 \leq r \leq n$, n inci mertebeden bir adi diferansiyel denklemin değişmezliğini inceleyeceğiz. Eğer r -boyutlu Lie cebri çözülebilir ise bu durumda verilen bir n inci mertebeden diferansiyel denklemin $(n-r)$ inci mertebeden bir denkleme indirgenebileceğini göstereceğiz. Herhangi iki-boyutlu Lie cebrinin çözülebilir olduğunu göstermiştik. $\mathbb{R}^n$ deki her çift-boyutlu Lie cebrinin bir iki-boyutlu altcebir içerdiğini söyleyebiliriz.

2.8.1 İki-parametrelili Bir Grup Altında İkinci Mertebeden Bir Adi Diferansiyel Denklemin Değişmezliği

İki-parametrelili bir Lie dönüşüm grubunu kabul eden

$$y'' = f(x, y, y') \quad (2.31)$$

şeklindeki bir diferansiyel denklemin mertebesinin iki defa düşürülerek denklemin genel çözümünün bulunabileceğini göstereceğiz.

X_1 ve X_2 , verilen iki-parametrelili Lie dönüşüm grubunun Lie cebrinin baz operatörleri ve $X_i^{(k)}$, X_i operatörlerinin k ıncı uzanımı olsun. Her iki-boyutlu Lie cebrinin çözülebilir olduğu teoreminden hareketle

$$[X_1, X_2] = \lambda X_1, \lambda = \text{sabit}$$

kabul edebiliriz. $u(x, y)$ ve $v(x, y, y_1)$, $X_1^{(2)}$ nin

$$X_1 u = 0, X_1^{(1)} v = 0$$

olacak şekilde değişmezleri olsun. Bu durumda $\frac{dv}{du}$ diferansiyel değişmezi

$$X_1^{(2)} \frac{dv}{du} = 0$$

denklemini sağlar ve herhangi bir $H(u, v)$ fonksiyonu için (2.31) denklemini

$$\frac{dv}{du} = H(u, v) \quad (2.32)$$

denklemine indirgenir, buradan da

$$X_1 X_2 u = X_2 X_1 u + \lambda X_1 u = 0$$

çıkar. Böylece herhangi bir $\alpha(u)$ fonksiyonu için

$$X_2 u = \alpha(u) \quad (2.33)$$

elde edilir. Benzer şekilde yukarıdaki teoremden

$$X_1^{(1)} X_2^{(1)} u = 0, \quad X_1^{(2)} X_2^{(2)} \frac{dv}{du} = 0$$

bulunur. Böylece herhangi bir $\beta(u, v)$ fonksiyonu için

$$X_2^{(1)} v = \beta(u, v) \quad (2.34)$$

çıkar. (2.31) denklemi X_2 yi kabul ettiğinden $\frac{dv}{du} = H(u, v)$ olmak üzere

$$X_2^{(2)} \left(\frac{dv}{du} - H(u, v) \right) = 0$$

bulunur. (2.33-34) den $X_2^{(1)}$, (u, v) koordinatlarında

$$X_2^{(1)} = \alpha(u) \frac{\partial}{\partial u} + \beta(u, v) \frac{\partial}{\partial v}$$

haline gelir, bu sonsuz küçük üreteç, (2.32) tarafından kabul edilir.

$$(R(u, v), S(u, v)),$$

$$X_2^{(1)} R = 0, \quad X_2^{(1)} S = 1$$

denklemlerini sağlayan kanonik koordinatlar olsun. Bu durumda $(R(u, v), S(u, v))$

$$\alpha(u) \frac{\partial R}{\partial u} + \beta(u, v) \frac{\partial R}{\partial v} = 0$$

$$\alpha(u) \frac{\partial S}{\partial u} + \beta(u, v) \frac{\partial S}{\partial v} = 1$$

denklemlerini sağlar; böylece

$$\left. \begin{aligned} R^* &= R \\ S^* &= S + \epsilon \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

bir-parametrelî Lie dönüşümler grubu, (2.32) tarafından kabul edilir. Dolayısıyla (2.32) denklemi $I(R)$, R nin herhangi bir fonksiyonu olmak üzere

$$\frac{dS}{dR} = I(R) \quad (2.36)$$

bağıntısını sağlar. Bu denklemi integre ederek C_1 keyfî bir sabit olmak üzere

$$S(u, v) = \int^{R(u, v)} I(R) dR + C_1$$

bulunur.

$$S(u(x, y), v(x, y, y')) = \int^{R(u(x, y), v(x, y, y'))} I(R) dR + C_1$$

diferansiyel denklemi X_1 i kabul eder ve

$$X_1 r = 0, X_1 s = 1$$

denklemlerini sağlayacak şekilde belirlendikten sonra kanonik koordinatlar yardımıyla integral alma işlemine indirgenir.

Sonuç olarak, iki-parametrelili Lie dönüşümler grubunu kabul eden herhangi bir adi diferansiyel denklem, bir integral alma işlemine indirgenir.

2.8.2 İki-Parametrelili Bir Grup Altında n inci Mertebeden Bir Adi Diferansiyel Denklemin Değişmezliği

n inci mertebeden

$$y_n = f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}) \quad (2.37)$$

adi diferansiyel denklemini ele alalım ve bu diferansiyel denklemin; $n \geq 3$ ve keyfi bir λ sabiti için $[X_1, X_2] = \lambda X_1$ olacak şekilde X_1, X_2 üreteçli, iki-parametrelili bir Lie dönüşüm grubu altında değişmez olduğunu kabul edelim. $u(x, y), v(x, y, y_1), X_1^{(2)}$ nin değişmezleri olsun. Bu durumda $\dot{v} = \frac{dv}{du}$ olmak üzere $X_1^{(2)}\dot{v} = 0$ dır ve (2.37) denklemi, herhangi bir

$$H(u, v, \frac{dv}{du}, \dots, \frac{d^{n-2}v}{du^{n-2}})$$

fonksiyonu için

$$\frac{d^{n-1}v}{du^{n-1}} = H(u, v, \frac{dv}{du}, \dots, \frac{d^{n-2}v}{du^{n-2}}) \quad (2.38)$$

indirgenir.

$$[X_1^{(k)}, X_2^{(k)}] = \lambda X_1^{(k)}, k = 1, 2, \dots,$$

olduğundan herhangi $\alpha(u), \beta(u, v), \gamma(u, v, \dot{v})$ fonksiyonları için

$$X_2 u = \alpha(u),$$

$$X_2^{(1)} v = \beta(u, v),$$

$$X_2^{(2)} \dot{v} = \gamma(u, v, \dot{v}),$$

elde edilir. Bu durumda birinci uzanımı

$$X_2^{(2)} = \alpha(u) \frac{\partial}{\partial u} + \beta(u, v) \frac{\partial}{\partial v} + \gamma(u, v, \dot{v}) \frac{\partial}{\partial \dot{v}}$$

olan

$$X_2^{(1)} = \alpha(u) \frac{\partial}{\partial u} + \beta(u, v) \frac{\partial}{\partial v}$$

üreteci (2.38) tarafından kabul edilir.

$U(u, v)$ ve $V(u, v, \dot{v})$,

$$X_2^{(1)}U = 0, \quad X_2^{(2)}V = 0$$

denklemlerini sağlasın. Bu durumda

$$X_2^{(3)}\frac{dV}{dU} = 0$$

dır, buradan (2.37) ve (2.38) denklemlerinin, $I(U, V, \frac{dV}{dU}, \dots, \frac{d^{n-3}V}{dU^{n-3}})$, argümanlarının herhangi bir fonksiyonu olmak üzere

$$\frac{d^{n-2}V}{dU^{n-2}} = I(U, V, \frac{dV}{dU}, \dots, \frac{d^{n-3}V}{dU^{n-3}}) \quad (2.39)$$

denklemine indirgendigi görülür. Eğer

$$V = \phi(U; C_1, C_2, \dots, C_{n-2})$$

bu denklemin genel çözümü ise birinci mertebeden

$$V(u, v, \frac{dv}{du}) = \phi(U(u, v); C_1, C_2, \dots, C_{n-2}) \quad (2.40)$$

denklemini $X_2^{(1)} = \alpha(u)\frac{\partial}{\partial u} + \beta(u, v)\frac{\partial}{\partial v}$ yi kabul eder. Böylece (2.40) denklemini

$$v = \psi(u; C_1, C_2, \dots, C_{n-2}, C_{n-1})$$

kuadratüre indirgenir. Fakat birinci mertebeden

$$v(x, y, y') = \psi(u(x, y); C_1, C_2, \dots, C_{n-2}, C_{n-1}) \quad (2.41)$$

adi diferansiyel denklemini X_1 i simetri grubu olarak kabul eder ve sonuçta (2.41), kuadratüre indirgenir; (2.37) nin genel çözümü elde edilir. [6]

2.8.3 r-Parametrelili Bir Grup Altında n inci Mertebeden Bir Adi Diferansiyel Denklemin Değişmezliği

Eğer r-parametrelili ($r \geq 3$) bir Lie grubu n inci mertebeden bir adi diferansiyel denklem tarafından kabul edilirse, her zaman denklemini $(n - r)$ inci mertebeye indirgeyemeyiz. Fakat $\mathcal{L}^r$ Lie cebri çözülebilir ise mümkündür, bu durumda $\mathcal{L}^r$ Lie cebri

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{j-1} C_{ij}^k X_k, \quad 1 \leq i < j, \quad j = 2, 3, \dots, r \quad (2.42)$$

şartlarını sağlayan $\{X_1, \dots, X_r\}$ baz cümlesine sahiptir. Dolayısıyla $\{X_j^{(m)}\}$ operatörleri

$$[X_i^{(m)}, X_j^{(m)}] = \sum_{k=1}^{j-1} C_{ij}^k X_k^{(m)}, \quad 1 \leq i < j, \quad j = 2, 3, \dots, r \quad (2.43)$$

Şimdi

$$y_n = F_n(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}) \quad (2.44)$$

denklemini ele alalım, burada F_n argümanlarının verilen bir fonksiyonudur. (2.44) denkleminin, sonsuz küçük üreticileri, çözülebilir bir Lie cebri oluşturan r-parametrelili bir Lie dönüşümler grubu kabul ettiğini varsayalım ve genelliği bozmaksızın (2.44) denklemi (2.42) yi kabul etsin. $x_{(1)}(x, y)$ ve $y_{(1)}(x, y, y_1)$,

$$X_1 x_{(1)} = 0 \quad , \quad X_1^{(1)} y_{(1)} = 0$$

denklemlerini sağlayacak şekilde fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$X_1^{(k+1)} \frac{d^k y_{(1)}}{dx_{(1)}^k} = 0; \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

$\frac{d^k y_{(1)}}{dx_{(1)}^k}$ değişmezine $y_{(1)k}$ diyelim : $y_{(1)k} = \frac{d^k y_{(1)}}{dx_{(1)}^k}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$ $X_1^{(n)}$ nin $x_{(1)}$, $y_{(1)}$ ve $\{y_{(1)k}\}$ diferansiyel değişmezlerine göre (2.44) denklemi $(n-1)$ inci mertebeden

$$y_{(1)n-1} = F_{n-1}(x_{(1)}, y_{(1)}, y_{(1)1}, \dots, y_{(1)n-2}) \quad (2.45)$$

denklemine indirgenir. Burada F_{n-1} , $X_1^{(n)}$ nin değişmezlerinin herhangi bir fonksiyonudur (2.42) ve (2.43) den

$$\begin{aligned} X_2 x_{(1)} &= \alpha_1(x_{(1)}) \\ X_2^{(1)} y_{(1)} &= \beta_1(x_{(1)}, y_{(1)}) \\ X_2^{(2)} y_{(1)1} &= \gamma_1(x_{(1)}, y_{(1)}, y_{(1)1}) \end{aligned}$$

yazılır, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ argümanlarının fonksiyonlarıdır. Böylece birinci uzanımı

$$X_2^{(2)} = X_2^{(1)} + \gamma_1(x_{(1)}, y_{(1)}, y_{(1)1}) \frac{\partial}{\partial y_{(1)1}}$$

olan

$$X_2^{(1)} = \alpha_1(x_{(1)}) \frac{\partial}{\partial x_{(1)}} + \beta_1(x_{(1)}, y_{(1)}) \frac{\partial}{\partial y_{(1)}}$$

üretici (2.45) tarafından kabul edilir. $x_{(2)}(x_{(1)}, y_{(1)}), y_{(2)}(x_{(1)}, y_{(1)}, y_{(1)1})$

$$X_2^{(1)} x_{(2)} = 0 \quad , \quad X_2^{(2)} y_{(2)} = 0 \quad (2.46)$$

olacak şekilde fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$X_2^{(k+2)} \frac{d^k y_{(2)}}{dx_{(2)}^k} = 0; \quad k = 1, 2, \dots, n-2$$

denklemini sağlar.

$$\frac{d^k y_{(2)}}{dx_{(2)}^k} = y_{(2)k}, \quad k = 1, 2, \dots, n-2$$

olsun. $X_2^{(n)}$ nin $x_{(2)}, y_{(2)}, \{y_{(2)k}\}$, $k = 1, 2, \dots, n-2$ değişmezlerine göre (bunlar aynı zamanda $X_1^{(n)}$ nin de değişmezleridir) (2.45) denklemi

$$y_{(2)n-2} = F_{n-2}(x_{(2)}, y_{(2)}, y_{(2)1}, \dots, y_{(2)n-3}) \quad (2.47)$$

haline gelir, F_{n-2} , $X_1^{(n)}$ ve $X_2^{(n)}$ nin değişmezlerinin herhangi bir fonksiyonudur. (2.42) ve (2.43) den

$$X_1^{(1)} X_3^{(1)} x_{(2)} = 0 \quad (2.48)$$

$$X_2^{(1)} X_3^{(1)} x_{(2)} = 0. \quad (2.49)$$

Burada (2.48) den

$$X_3^{(1)} x_{(2)} = A(x_{(1)}, y_{(1)}). \quad (2.50)$$

$A(x_{(1)}, y_{(1)})$ herhangi bir fonksiyondur. (2.49) dan ise

$$X_2^{(1)} A(x_{(1)}, y_{(1)}) = 0$$

çıkar. Böylece (2.46) dan $\alpha_2(x_{(2)})$ herhangi bir fonksiyon olmak üzere

$$X_3^{(1)} x_{(2)} = A(x_{(1)}, y_{(1)}) = \alpha_2(x_{(2)})$$

bulunur. Benzer şekilde β_2 ve γ_2 argümanlarının fonksiyonları olmak üzere

$$X_3^{(2)} y_{(2)} = \beta_2(x_{(2)}, y_{(2)})$$

$$X_3^{(3)} y_{(2)1} = \gamma_2(x_{(2)}, y_{(2)}, y_{(2)1})$$

çıkar, buradan da birinci uzanımı

$$X_3^{(3)} = X_3^{(2)} + \gamma_2(x_{(2)}, y_{(2)}, y_{(2)1}) \frac{\partial}{\partial y_{(2)1}}$$

olan

$$X_3^{(2)} = \alpha_2(x_{(2)}) \frac{\partial}{\partial x_{(2)}} + \beta_2(x_{(2)}, y_{(2)}) \frac{\partial}{\partial y_{(2)}}$$

üretici (2.47) denklemi tarafından kabul edilir. Bu durumda, $x_{(3)}(x_{(2)}, y_{(2)})$, $y_{(3)}(x_{(2)}, y_{(2)}, y_{(2)1})$

$$X_3^{(2)} x_{(3)} = 0 \quad , \quad X_3^{(3)} y_{(3)} = 0$$

olacak şekilde fonksiyonlar olsun. Sonuçta

$$X_3^{(k+3)} \frac{d^k y_{(3)}}{dx_{(3)}^k} = 0; \quad k = 1, 2, \dots, n-3.$$

çıkar.

$$\frac{d^k y_{(3)}}{dx_{(3)}^k} = y_{(3)k}, \quad k = 1, 2, \dots, n-3$$

olsun. $X_3^{(n)}$ nin $x_{(3)}, y_{(3)}, \{y_{(3)k}\}$ değişmezlerine göre (2.47) denklemi ve dolayısıyla (2.44) denklemi $(n-3)$ üncü mertebeden

$$y_{(3)n-3} = F_{n-3}(x_{(3)}, y_{(3)}, y_{(3)1}, \dots, y_{(3)n-4}) \quad (2.51)$$

denklemine indirgenir.

Ardışık olarak devam edilsin ve $q = 3, \dots, m$, $m < r$ için $x_{(q)}(x_{(q-1)}, y_{(q-1)}), y_{(q)}(x_{(q-1)}, y_{(q-1)}, y_{(q-1)1})$ fonksiyonları

$$X_p^{(q-1)}x_{(q)} = 0, \quad X_p^{(q)}y_{(q)} = 0, \quad p = 1, 2, \dots, q$$

$$X_p^{(q+k)} \frac{d^k y_{(q)}}{dx_{(q)}^k} = 0; \quad k = 1, 2, \dots, n-q, \quad 1 \leq p \leq q$$

denklemlerini sağlayacak şekilde olsun, $\frac{d^k y_{(q)}}{dx_{(q)}^k} = y_{(q)k}$, $k = 1, 2, \dots, n-q$ böylece (2.44) denklemi $(n-m)$ inci mertebeden

$$y_{(m)n-m} = F_{n-m}(x_{(m)}, y_{(m)}, y_{(m)1}, \dots, y_{(m)n-m-1}) \quad (2.52)$$

denklemine indirgenir. Burada $F_{n-m}, X_m^{(n)}, X_{m-1}^{(n)}, \dots, X_2^{(n)}, X_1^{(n)}$ üreteçlerinin değişmezlerinin herhangi bir fonksiyonudur. Daha sonra indüksiyonla m inci adımdan $(m+1)$ inci adıma geçiş gösterilebilir.

2.9 Değişmez Çözümler

$$X = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \quad (2.53)$$

sonsuz küçük üreteçli bir-parametrelî Lie dönüşüm grubunu kabul eden adi diferansiyel denklem

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2.54)$$

olsun.

Tanım. $y = \phi(x)$ ancak ve ancak

(i) $y = \phi(x)$, (2.53) ün değişmez bir eğrisidir,

(ii) $y = \phi(x)$, (2.54) ün çözümüdür,

şartlarını sağladığında $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ in kabul ettiği (2.53) üreteğine karşı gelen $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ denkleminin bir değişmez çözümüdür.

$y = \phi(x)$ in ancak ve ancak

$$\xi(x, \phi)\phi' = \eta(x, \phi); \quad (2.55)$$

$$\phi^{(n)} = f(x, \phi, \phi', \dots, \phi^{(n-1)}) \quad (2.56)$$

şartlarını sağladığında, (2.53) üretici altında değişmez olduğundan, (2.54) ün bir değişmez çözümü olduğu ortaya çıkar.

Daha genel ifade edilirse $\Phi(x, y) = 0$, (2.54) ün (2.53) altında bir değişmez çözümünü tanımlar ancak ve ancak

- (i) $\Phi(x, y) = 0$, (2.53) nin değişmez bir eğrisidir,
- (ii) $\Phi(x, y) = 0$, $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ in çözümüdür.

(2.54) denkleminin değişmez çözümlerini bulmak için en uygun yol; $y' = \frac{\eta(x, y)}{\xi(x, y)}$ denklemini çözerek bunun $g(x, y, C) = 0$ genel çözümünü elde etmektir. C değerleri, bu genel çözümü (2.54) de yerine yazarak belirlenir. Böyle $C = C^*$ değerlerinin herbiri, (2.54) denkleminin $\Phi(x, y) = g(x, y; C^*) = 0$ şeklindeki bir değişmez çözümünü belirler.

Şimdi ispatlayacağımız teoreme göre (2.54) ün değişmez çözümlerini bulmak için $y' = \frac{\eta(x, y)}{\xi(x, y)}$ denklemini veya bir başka diferansiyel denklemi çözmeye gerek yoktur:

Teorem 2.9.1 $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ diferansiyel denkleminin

$$X = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

üreticini kabul ettiğini varsayalım. Genelliği bozmaksızın $\xi \neq 0$ kabul edelim. $Y = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\eta(x, y)}{\xi(x, y)} \frac{\partial}{\partial y}$ ve $\psi(x, y) = \frac{\eta(x, y)}{\xi(x, y)}$ olsun. $y_k = Y^{k-1}\psi, k = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere

$$Q(x, y) = y_n - f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}) = Y^{n-1}\psi - f(x, y, \psi, Y\psi, \dots, Y^{n-2}\psi) \quad (2.57)$$

ile tanımlanan $Q(x, y)$ cebirsel ifadesini ele alalım. $Q(x, y) = 0$ cebirsel denklemi için üç hal söz konusudur:

- (i) $Q(x, y) = 0$; xy -uzayında eğriler tanımlamaz;
- (ii) $Q(x, y) = 0$; her x, y değeri için özdeş olarak sağlanır;
- (iii) $Q(x, y) = 0$; xy düzleminde eğriler tanımlar.

(i) halinde, (2.54) denkleminin (2.53) sonsuz küçük üretici altındaki değişmezliğinden çıkan değişmez çözümler yoktur.

(ii) halinde, $y' = \frac{\eta(x, y)}{\xi(x, y)}$ denkleminin herhangi bir çözümü (2.54) denkleminin değişmez bir çözümüdür.

(iii) halinde ise, (2.53) altında değişmez olan (2.54) ün bir çözümü, $Q(x, y) = 0$ denklemini sağlamalıdır, tersine de $Q(x, y) = 0$ ı sağlayan herhangi bir eğri, (2.54) denkleminin (2.53) üretici altında değişmez olan , bir değişmez çözümüdür.

ispat. $y_1 = y' = \frac{\eta}{\xi} = \psi$ ise $y_k = y^{(k)} = Y^{k-1}\psi, k = 1, 2, \dots, n$ dir. Böylece $X = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$ üretici altında değişmez olan (2.54) ün herhangi bir çözümü $Q(x, y) = 0$ cebirsel denklemini sağlar. Buradan, (i) $Q(x, y) = 0$, xy -uzayında eğri tanımlamazsa bu durumda (2.54) denkleminin değişmez bir çözümü olmadığı ve (ii) bütün x, y ler için $Q(x, y) = 0$ ise $y' = \frac{\eta}{\xi}$ nin herhangi bir çözümü, (2.54) ün bir değişmez çözümü olduğu sonuçları çıkar.

(iii) halinde $Q(x, y) = 0$ denklemini sağlayan herhangi bir eğriyi ele alalım. Eğer;

$$Q_x + Q_y y' = 0$$

$y' = \frac{\eta(x, y)}{\xi(x, y)}$ denklemini çözerse; bu eğri, $X = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$ altında (2.54) denkleminin değişmez bir çözümüdür. $Q = 0$ iken $YQ = 0$ ise bu ifade doğrudur.

Şimdi $Q = 0$ iken $YQ = 0$ olduğunu gösterelim:

$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ denklemini $X = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$ üreticini kabul ettiğinden ,

$$\eta^{(n)} = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta^{(1)} \frac{\partial f}{\partial y_1} + \dots + \eta^{(n-1)} \frac{\partial f}{\partial y_{n-1}} \quad (2.58)$$

değişmezlik denklemini,

$$y_n - f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}) = 0 \quad (2.59)$$

denklemini sağlayan bütün $(x, y, y_1, \dots, y_n)$ değerleri için gerçekleşmelidir. Burada $\eta^{(1)}$ ve $\eta^{(k)}$ lar, $\frac{D}{Dx}$ toplam türev operatörü ile

$$\eta^{(1)} = \frac{D\eta}{Dx} - y_1 \frac{D\xi}{Dx}, \quad \eta^{(k)} = \frac{D\eta^{(k-1)}}{Dx} - y_k \frac{D\xi}{Dx}, \quad k = 2, 3, \dots, n$$

şeklinde tanımlanır. $y_k = Y^{k-1}\psi, k = 1, 2, \dots, n$ olsun . Bu durumda

$y^{(n)} - f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}) = 0$ denklemini $Q = 0$, toplam operatörü ise $\frac{D}{Dx} = Y$ haline gelir.

Böylece

$$\begin{aligned} \eta^{(1)} &= Y\eta - \psi Y\xi \\ &= Y(\xi\psi) - \psi Y\xi \\ &= \xi Y\psi \end{aligned}$$

olur, bu şekilde devam edildiğinde ,

$$\eta^{(k)} = \xi Y^k \psi, k = 1, 2, \dots, n$$

olduğu gösterilebilir. Eğer $\eta^{(k)} = \xi Y^k \psi$ ise

$$\begin{aligned} \eta^{(k+1)} &= Y\eta^{(k)} - (Y^k \psi)(Y\xi) \\ &= Y(\xi Y^k \psi) - (Y^k \psi)(Y\xi) \\ &= \xi Y^{k+1} \psi \end{aligned}$$

elde edilir ve sonuç olarak (2.54) denklemi (2.53) üreticini kabul ederse (2.58) den , $Q(x, y) = 0$ ı sağlayan herhangi bir eğri için, $(\xi \neq 0)$ $y_k = Y^{k-1}\psi, k = 1, 2, \dots, n$ değerine karşı

$$Y^n\psi = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\eta}{\xi} \frac{\partial f}{\partial y} + (Y\psi) \frac{\partial f}{\partial y_1} + \dots + (Y^{n-1}\psi) \frac{\partial f}{\partial y_{n-1}} \quad (2.60)$$

elde ederiz. Fakat (2.57) den $y_k = Y^{k-1}\psi, k = 1, 2, \dots, n$ değerine karşı

$$YQ \equiv Q_x + \frac{\eta}{\xi} Q_y \equiv Y^n\psi - \left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\eta}{\xi} \frac{\partial f}{\partial y} + (Y\psi) \frac{\partial f}{\partial y_1} + \dots + (Y^{n-1}\psi) \frac{\partial f}{\partial y_{n-1}} \right] \quad (2.61)$$

bulunur. (2.49) yardımıyla $Q = 0$ için $YQ = 0$ olduğunu göstermiş oluruz.

BÖLÜM 3 DEĞME DÖNÜŞÜMLERİ ; DEĞME SİMETRİLERİ

3.1 Değme Dönüşümleri

Bir Değme dönüşümü,

$$x_j^\dagger = \phi_j(x, u, u_1) \quad (3.1)$$

$$u^\dagger = \psi(x, u, u_1) \quad (3.2)$$

$$u_j^\dagger = \psi_j(x, u, u_1) \quad (3.3)$$

$j = 1, 2, \dots, n$, şeklinde (x, u, u_1) uzayının bir D bölgesinde birebir ve $du^\dagger = u_j^\dagger dx_j^\dagger$ değme koşullarını sağlayan bir dönüşümdür. $\{\phi_i, \psi\}$ nin u_1 e bağlı olduğu kabul edilir. (Aksi takdirde bir değme dönüşümü, nokta dönüşümüdür).

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial}{\partial u} + u_{ij} \frac{\partial}{\partial u_j} \text{ ve}$$

$$A = \begin{bmatrix} D_1\phi_1 & D_1\phi_2 & \dots & D_1\phi_n \\ D_2\phi_1 & D_2\phi_2 & \dots & D_2\phi_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_n\phi_1 & D_n\phi_2 & \dots & D_n\phi_n \end{bmatrix}$$

olmak üzere A^{-1} mevcut olsun. Bu durumda yukarıdaki dönüşüm eğer,
(i) $\{\psi_i(x, u, u_1)\}$,

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} D_1\psi \\ D_2\psi \\ \vdots \\ D_n\psi \end{bmatrix}$$

denklemini sağlar ve,

(ii) $\frac{\partial}{\partial u_{jk}}(A^{-1}D_i\psi) = 0, i, j, k = 1, 2, \dots, n$ ise bir değme dönüşümü tanımlar.

Teorem 3.1 (3.1-3) dönüşümü ancak ve ancak $\{\phi_i, \psi, \psi_i\}$,

$$\frac{\partial \psi}{\partial u_i} - \psi_j \frac{\partial \phi_j}{\partial u_i} = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \psi}{\partial u} = \psi_j \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \phi_j}{\partial u} \right) \quad (3.5)$$

ifadelerini sağladığında bir değme dönüşümüdür. Bu teoremden; (3.4) veya (3.5) denklem sisteminden herhangi birisi $\{\psi_i\}$ yi belirlemede kullanılabilir, diğer denklemler kümesi $\{\phi_i, \psi\}$ nin sağlaması gereken şartları belirler ve böylece (3.1-3) değme dönüşümünü elde ederiz.

$(x, u, u_1, \dots, u_k)$ uzayına genişletilmiş değme dönüşümleri, nokta dönüşümlerinde olduğu gibi elde edilebilir.

Tanım. Bir-parametrelili Lie değme dönüşümler grubu

$$x_j^* = x_j + \epsilon \xi_j(x, u, u_1) + O(\epsilon^2) \quad (3.6)$$

$$u^* = u + \epsilon \eta(x, u, u_1) + O(\epsilon^2) \quad (3.7)$$

$$u_j^* = u_j + \epsilon \eta_j^{(1)}(x, u, u_1) + O(\epsilon^2) \quad (3.8)$$

$j = 1, 2, \dots, n$ şeklindedir ve bu grubun

$$\xi_j(x, u, u_1) \frac{\partial}{\partial x_j} + \eta(x, u, u_1) \frac{\partial}{\partial u} + \eta_j^{(1)}(x, u, u_1) \frac{\partial}{\partial u_j} \quad (3.9)$$

sonsuz küçük üretici, değme şartı korunacak şekilde tanımlanır.

$$B = \begin{bmatrix} D_1 \xi_1 & D_1 \xi_2 & \dots & D_1 \xi_n \\ D_2 \xi_1 & D_2 \xi_2 & \dots & D_2 \xi_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_n \xi_1 & D_n \xi_2 & \dots & D_n \xi_n \end{bmatrix}$$

olmak üzere değme şartlarının korunumu

$$\begin{bmatrix} \eta_1^{(1)} \\ \eta_2^{(1)} \\ \vdots \\ \eta_n^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \eta \\ D_2 \eta \\ \vdots \\ D_n \eta \end{bmatrix} - B \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

şeklinde verilir yani $\eta_j^{(1)} = D_j \eta - (D_j \xi_k) u_k, j = 1, 2, \dots, n$ dir.

Teorem 3.2 (3.6-8) denklemleri ancak ve ancak $\{\xi_j, \eta\}$,

$$\frac{\partial \eta}{\partial u_i} - \frac{\partial \xi_j}{\partial u_i} u_j = 0; i = 1, 2, \dots, n \quad (3.10)$$

denklemini sağladığında bir-parametrelili Lie değme dönüşümler grubu tanımlar.

ispat.

$$\eta_j^{(1)} = \frac{\partial \eta}{\partial x_j} + \frac{\partial \eta}{\partial u} u_j + \frac{\partial \eta}{\partial u_i} u_{ij} - \left[\frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_k}{\partial u} u_j + \frac{\partial \xi_k}{\partial u_i} u_{ij} \right] u_k, j = 1, 2, \dots, n.$$

(3.6-8) denklemleri ancak ve ancak $\frac{\partial \eta_j^{(1)}}{\partial u_{ij}} = 0, i, j, k = 1, 2, \dots, n$ olduğu zaman bir-parametrelili bir Lie değme dönüşümü tanımlar. Bu ise (3.10) denklemini verir.

W karakteristik fonksiyonunu

$$W = \xi_j u_j - \eta \quad (3.11)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 3.3 (3.9), bir-parametrelili bir Lie değme dönüşümler grubunun sonsuz küçük üretici olsun. $W = \xi_j u_j - \eta$ karakteristik fonksiyonuna göre sonsuz küçükler

$$\begin{aligned} \xi_j &= \frac{\partial W}{\partial u_j}, \\ \eta &= u_i \frac{\partial W}{\partial u_i} - W, \\ \eta_j^{(1)} &= -\frac{\partial W}{\partial x_j} - u_j \frac{\partial W}{\partial u}, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

ifadeleriyle verilir. [7]

Teorem 3.4 $W(x, u, u_1) \frac{\partial}{\partial u}$ sonsuz küçük üreticili herhangi bir Lie-Bäcklund dönüşümü,

$$\xi_j(x, u, u_1) \frac{\partial}{\partial x_j} + \eta(x, u, u_1) \frac{\partial}{\partial u} + \eta_j^{(1)}(x, u, u_1) \frac{\partial}{\partial u_j} \quad (3.12)$$

sonsuz küçük üreticili bir değme dönüşümüne denktir, burada ξ_j, η ve $\eta_j^{(1)}$ ler

$$\xi_j = \frac{\partial W}{\partial u_j}, \quad (3.13)$$

$$\eta = u_i \frac{\partial W}{\partial u_i} - W, \quad (3.14)$$

$$\eta_j^{(1)} = -\frac{\partial W}{\partial x_j} - u_j \frac{\partial W}{\partial u}, \quad (3.15)$$

$j = 1, 2, \dots, n$ şeklinde tanımlıdır.

ispat. η ve ξ_j (3.13-14) ü sağlasın. Bu durumda

$$\frac{\partial \eta}{\partial u_i} = \frac{\partial W}{\partial u_i} + u_j \frac{\partial^2 W}{\partial u_i \partial u_j} - \frac{\partial W}{\partial u_i} = u_j \frac{\partial^2 W}{\partial u_i \partial u_j} = u_j \frac{\partial \xi_j}{\partial u_i}, i = 1, 2, \dots, n$$

dir. Buradan (3.10) denkleminin sağlandığı görülür. Ayrıca

$$\begin{aligned} \eta - \xi_j u_j &= u_i \frac{\partial W}{\partial u_i} - W - u_j \frac{\partial W}{\partial u_j} = -W; \\ \eta_j^{(1)} &= \frac{\partial \eta}{\partial x_j} + \frac{\partial \eta}{\partial u} u_j - \left[\frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_k}{\partial u} u_j \right] u_k \\ &= u_i \frac{\partial^2 W}{\partial x_j \partial u_i} - \frac{\partial W}{\partial x_j} + u_i u_j \frac{\partial^2 W}{\partial u \partial u_i} - u_j \frac{\partial W}{\partial u} \\ &\quad - \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x_j \partial u_k} + \frac{\partial^2 W}{\partial u \partial u_k} u_j \right] u_k = -\frac{\partial W}{\partial x_j} - u_j \frac{\partial W}{\partial u} \end{aligned}$$

olduğu çıkar. Böylece (3.12) ve (3.13-15) ifadeleri $W(x, u, u) \frac{\partial}{\partial u}$ ya denk bir değme dönüşüm grubu tanımlar.

Sonuç olarak

$$\eta(x, u, u) \frac{\partial}{\partial u} \quad (3.16)$$

şeklindeki herhangi bir Lie-Bäcklund üretici, $\eta(x, u, u)$ karakteristik fonksiyon olmak üzere bir değme dönüşüm grubunun sonsuz küçük üreticine denktir.

Teorem 3.5 $\eta(x, u, u) \frac{\partial}{\partial u}$ şeklindeki bir üretici ancak ve ancak,

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial u_i \partial u_j} = 0; i, j = 1, 2, \dots, n$$

olduğu takdirde bir Lie nokta dönüşümler grubunun sonsuz küçük üreticine denktir.

Tanım. Bir diferansiyel denklemin bir Proper Lie-Bäcklund simetrisi, bir nokta simetrisi ve değme simetrisine denk olmayan bir Lie-Bäcklund simetrisidir.

3.2 $y''' = 0$ Denklemine Değme Simetrileri

$y''' = 0$ denkleminin değme simetrilerini bulalım. Bunun için W karakteristik fonksiyonunu belirlemeliyiz. W fonksiyonuyla yazılan

$$X = -W_p \frac{\partial}{\partial x} + (W - pW_p) \frac{\partial}{\partial y} + (W_x + pW_y) \frac{\partial}{\partial p}$$

üreticinin üçüncü uzanımı

$$X^{(3)} = X + \eta^{(2)} \frac{\partial}{\partial y''} + \eta^{(3)} \frac{\partial}{\partial y'''}$$

olduğuna göre belirleyici denklem

$$(X^{(3)}y''')|_{y'''=0} \equiv \eta^{(3)}|_{y'''=0} = 0$$

şeklindedir bu ise

$$(y'')^3 : W_{ppp} = 0 \quad (3.17)$$

$$(y'')^2 : W_{yp} + W_{xpp} + pW_{ypp} = 0 \quad (3.18)$$

$$(y'') : W_{xy} + W_{xyp} + pW_{yy} + 2pW_{xyp} + p^2W_{yyp} = 0 \quad (3.19)$$

$$(y'')^0 : W_{xxx} + 3pW_{xxy} + 3p^2W_{xyy} + p^3W_{yyy} = 0 \quad (3.20)$$

denklem sistemine ayırır. Bu denklem sistemini çözelim. (3.17) den integre ederek $W(x, y, p) = A(x, y)p^2 + B(x, y)p + C(x, y)$. Bu W fonksiyonunu (3.18) denkleminde yazarsak;

$$W_{yp} : 2pA_y + B_y$$

$$W_{xpp} : 2A_x$$

$$pW_{ypp} : 2pA_y$$

$4pA_y + B_y + 2A_x = 0$; p ye göre lineer bir denklem olduğundan $A_y = 0$ ve $B_y + 2A_x = 0$ sağlanmalıdır. $A_y = 0$ dan $A(x, y) = A(x)$ ve $B_y + 2A_x = 0$ dan $B(x, y) = -2A'(x)y + D(x)$ bulunur.

$$W(x, y, p) = A(x)p^2 + p(-2A'(x)y + D(x)) + C(x)$$

$W(x, y, p)$ yı (3.19) da yazalım:

$$W_{xy} : -2pA''(x) + C_{xy}$$

$$W_{xyp} : 2pA''(x) - 2yA'''(x) + D''(x)$$

$$pW_{yy} : pC_{yy}$$

$$2pW_{xyp} : -4pA''$$

$$p^2W_{yyp} : 0$$

$$p(C_{yy} - 4A''(x)) + C_{xy} + D''(x) - 2yA'''(x) = 0$$

$$C_{yy} - 4A''(x) = 0 \quad (3.21)$$

$$C_{xy} + D''(x) = 0 \quad (3.22)$$

$$A'''(x) = 0 \quad (3.23)$$

olmalıdır. (3.23) denkleminden $A(x) = c_1x^2 + c_2x + c_3$; (3.21) de yerine yazarak $C(x, y) = 4c_1y^2 + E(x)y + F(x)$ bulunur. (3.22) denklemi kullanılarak $E'(x) + D''(x) = 0$ elde edilir. W yı tekrar yazalım:

$$W(x, y, p) = p^2(c_1x^2 + c_2x + c_3) + p(-2y(2c_1x + c_2) + D(x)) + (4c_1y^2 + E(x)y + F(x))$$

şimdi W yi (3.20) denkleminde uygulayalım:

$$W_{xxx} : pD'''(x) + yE'''(x) + F'''(x)$$

$$3pW_{xxy} : 3pE'''(x)$$

$$3p^2W_{xyy} : 0$$

$$p^3W_{yyy} : 0$$

$$p(D'''(x) + 3E'''(x)) + yE'''(x) + F'''(x) = 0$$

$$D'''(x) + 3yE'''(x) = 0 \quad (3.24)$$

$$E'''(x) = 0 \quad (3.25)$$

$$F'''(x) = 0 \quad (3.26)$$

(3.25) den $E(x) = c_4x^2 + c_5x + c_6$, (3.26) dan $F(x) = c_7x^2 + c_8x + c_9$ bulunur. (3.22) denkleminden elde ettiğimiz $D''(x) + E'(x) = 0$ denkleminde türev alarak çözersek;

$$D'''(x) + 3E''(x) = 0$$

$$D'''(x) + E''(x) = 0$$

denklemlerinden $D'''(x) = 0$ ve $D(x) = c_{10}x^2 + c_{11}x + c_{12}$ bulunur.

$D'''(x) + E''(x) = 0$ den $2c_{10} + 2c_4x + c_5 = 0$; $c_{10} = \frac{c_5}{2}$, $c_4 = 0$ bulunur

$D(x) = -\frac{c_5}{2}x^2 + c_{11}x + c_{12}$ elde edilir.

Sonuçta W karakteristik fonksiyonu

$$W(x, y, p) = p^2[c_1x^2 + c_2x + c_3] + p[-2y(2c_1x + c_2) + (-\frac{c_5}{2}x^2 + c_{11}x + c_{12})] \\ + [4c_1y^2 + (c_5x + c_6)y(c_7x^2 + c_8x + c_9)]$$

şeklindedir düzenlenmiş halde ise

$$W(x, y, p) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4y + c_5p + c_6xp + c_7(x^2p - 2xy) + c_8p^2 \\ + c_9(xp^2 - 2yp) + c_{10}(x^2p^2 - 4xyp + 4y^2)$$

olarak yazılır. Böylece $y''' = 0$ denklemi on-parametrel bir Lie değme dönüşümler grubu kabul eder.

BÖLÜM 4 NOETHER TEOREMİ ve LİE-BÄCKLUND SİMETRİLERİ

4.1 GİRİŞ

Önceki bölümlerde diferansiyel denklemlerin Lie nokta dönüşüm gruplarının belirlenmesi için bir algoritma oluşturduk. Bu simetrileri kullanarak diferansiyel denklemleri çözmek için metodlar geliştirdik. Bu bölümde ise simetrilerin fiziksel problemlere uygulamalarından biri olan korunum yasalarına değineceğiz.

t, x, y, z bağımsız değişkenleri ve $u = u(t, x, y, z)$ bağımlı değişkeni sistemin durum fonksiyonunu göstermek üzere bir fiziksel sistemin korunum yasası

$$\text{div} f = D_t f^1 + D_x f^2 + D_y f^3 + D_z f^4 = 0$$

şeklinde bir denklemdir. Buradaki f fonksiyonu $t, x, y, z, u, u_1, \dots, u_k$ değiş-

kenlerine bağlı $f = f(f^1, f^2, f^3, f^4)$ şeklinde bir vektör fonksiyondur. Ayrıca buradaki D_t, D_x, D_y, D_z toplam türev operatörlerini göstermektedir.

Fiziksel olarak bir korunum yasası; "bir uzay bölgesi içindeki f^1 in değişim miktarı, bölgeyi çevreleyen yüzey boyunca (f^2, f^3, f^4) akısına eşit olmalıdır" anlamına gelmektedir. t zaman değişkeninin tek bağımsız değişken olduğu klasik mekanikte ortaya çıkan sistemler için korunum yasası

$$D_t f^1 = 0,$$

buradan da f^1 hareket sabiti olur. Her bir hareket sabiti, sistemin hareketini kısıtlar ve sistemin serbeslik derecesini bir düşürmede kullanılır. Aslında bir sistemin korunum yasasını bulmak, onun çözümünü bulmada ilk adımdır. Ne kadar fazla korunum yasası bulunursa tam çözüme o kadar yaklaşılr .

Genellikle verilen bir sistem için korunum yasalarını oluşturmak zordur. Bununla birlikte bir Lagrangian formulasyonundan ortaya çıkan sistemler için Emmy Noether [Noether(1918)] tarafından verilen bir teorem vardır. Noether, bir Lagrangian sistemin etki integrali tarafından kabul edilen her sonsuz küçük dönüşüm için korunum yasasının bulunabileceğini ispatladı. Noether'in ispatı, kabul edilen herhangi bir sonsuz küçük dönüşüm için korunum yasası inşa etmede bir algoritma verir. Burada önemli olan, Euler-Lagrange denklemlerinin değişmezlik özelliklerini inceliyerek bu şekildeki bütün dönüşümlerin bulunabilmesidir; yani buradaki

Euler-Lagrange denklemleri bir etki integralinin değişim formülasyonundan ortaya çıkan denklemlerdir.

Noether tarafından ele alınan sonsuz küçük dönüşümler daha önce incelediğimiz Lie nokta dönüşüm gruplarından daha geneldir. Noether ξ ve η sonsuz küçüklerinin x ve u dan başka $u_1, u_2, \dots$ türevlerine de bağlı olduğunu ifade etti.

Ne Lie ne de Bäcklund bu tür dönüşümleri ele almadıkları halde bu dönüşümler genellikle Lie-Bäcklund dönüşümleri olarak anılırlar. (Nokta simetrilerinin önemli özelliklerinden hiçbirisi, Lie-Bäcklund dönüşümleri tarafından kullanılmaz. Özellikle Lie-Bäcklund tipindeki bir sonsuz küçük dönüşüm, karakteristikler metodu yardımıyla bir global dönüşüme integre edilemez). Fakat sonsuz küçük Lie-Bäcklund dönüşümleri, korunum yasalarını ve değişmez çözümleri oluşturmada kullanılır. Ayrıca verilen bir diferansiyel denklem sistemi için kabul edilen sonsuz küçük nokta simetrilerinin bulunmasında, Lie algoritmasının basit bir genişlemesi yardımıyla kabul edilen sonsuz küçük Lie-Bäcklund dönüşümleri bulunabilir.

4.2 Noether Teoremi

Fiziğin pek çok problemi bir varyasyonel formülasyonla ifade edilebilir:

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ uzayındaki bir Ω bölgesinde tanımlanmış bir

$$L(x, u, u_1, u_2, \dots, u_k)$$

fonksiyonu verildiğinde

$$J[u] = \int_{\Omega} L(x, u, u_1, u_2, \dots, u_k) dx \quad (4.1)$$

integralinin extramumuna karşı gelen $u(x)$ fonksiyonlarının bulunması. L fonksiyonuna Lagrangian, $J[u]$ integraline de etki integrali denir.

$$u(x) = (u^1(x), u^2(x), \dots, u^m(x))$$

fonksiyonu sistemin durumunu tanımlar ve genellikle Ω bölgesinin $\partial\Omega$ sınırındaki sınır koşulları ile belirlenir. Eğer $u(x)$ (4.1) in bir extramumu ise bu durumda sınır koşullarını değiştirmeyen herhangi bir $u(x) \rightarrow u(x) + \epsilon v(x)$ sonsuz küçük değişimin $J[u]$ üzerinde bir etkisi olmamalıdır. Bir sistemin korunum yasası;

$$f(x, u, u_1, u_2, \dots, u_k) = (f^1, f^2, \dots, f^n)$$

bir vektör fonksiyon olmak üzere

$$\operatorname{div} f = D_i f^i = 0 \quad (4.2)$$

şeklinde tanımlanır. (4.2) denklemi (4.1) in extramumu olan her $u(x)$ fonksiyonu için geçerli olmalıdır. Ayrıca (4.2) den x uzayındaki herhangi bir kapalı yüzey boyunca f nin net akısının sıfır olduğu sonucu çıkar. Bundan dolayı f vektörüne bir "korunmuş akı"(conserved flux) denir .

Noether incelemelerinde keyfi Ω için $J[u]$ etki integralini değişmez bırakan

$$\begin{aligned} x^* &= x + \epsilon \xi(x, u, u_1, u_2, \dots, u_p) + O(\epsilon^2) \\ u^* &= u + \epsilon \eta(x, u, u_1, u_2, \dots, u_p) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (4.3)$$

şeklindeki dönüşümleri ele aldı ve ξ , η sonsuz küçükleri ile korunmuş f akısı arasında bir ilişki kurdu .

Noether Teoremini oluşturmak için önce değişim problemleriyle ilgili temel denklemleri çıkaracağız ve daha sonra Noether Teoreminin ispatını vereceğiz.

4.3 Euler-Lagrange Denklemleri

u nun $u(x) \rightarrow u(x) + \epsilon v(x)$ şeklinde sonsuz küçük değişimini dikkate alalım. Buna karşı gelen L deki değişim :

$$\begin{aligned} \delta L &= L(x, u + \epsilon v, u_1 + \epsilon v_1, \dots, u_k + \epsilon v_k) - L(x, u, u_1, \dots, u_k) = \\ &= \epsilon \left(\frac{\partial L}{\partial u^\gamma} v^\gamma + \frac{\partial L}{\partial u_i^\gamma} v_i^\gamma + \dots + \frac{\partial L}{\partial u_{i_1 i_2 \dots i_k}^\gamma} v_{i_1 i_2 \dots i_k}^\gamma \right) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (4.4)$$

dir . Burada i indisleri üzerinde toplam vardır .

$$E_\gamma = \frac{\partial}{\partial u^\gamma} - D_i \frac{\partial}{\partial u_i^\gamma} + D_i D_j \frac{\partial}{\partial u_{ij}^\gamma} + \dots + (-1)^k D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_k} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 \dots i_k}^\gamma} + \dots \quad (4.5)$$

Euler operatörünü kullanmak faydalı olacaktır .

$$\begin{aligned} W^i[u, v] &= v^\gamma \left[\frac{\partial L}{\partial u_i^\gamma} + \dots + (-1)^{k-1} D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_{k-1}} \frac{\partial L}{\partial u_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}^\gamma} \right] \\ &+ (D_{i_1} v^\gamma) \left[\frac{\partial L}{\partial u_{i_1 i}^\gamma} + \dots + (-1)^{k-2} D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_{k-1}} \frac{\partial L}{\partial u_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}^\gamma} \right] \\ &+ \dots + (D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_{k-1}} v^\gamma) \frac{\partial L}{\partial u_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}^\gamma} \end{aligned} \quad (4.6)$$

olsun. Bu durumda parça parça integrasyonla

$$\delta L = \epsilon [E_\gamma(L)v^\gamma + D_i W^i[u, v]] + O(\epsilon^2) \quad (4.7)$$

olduğu görülür. Burada $E_\gamma(L)$,

$$E_\gamma(L) = \frac{\partial}{\partial u^\gamma} - D_i \frac{\partial}{\partial u_i^\gamma} + D_i D_j \frac{\partial}{\partial u_{ij}^\gamma} + \dots + (-1)^k D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_k} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 \dots i_k}^\gamma} + \dots \quad (4.8)$$

dir. Yukarıdaki (4.7) bağıntısını ikinci mertebeden

$$L(x, y, u, v, u_x, v_x, u_y, v_y, u_{xx}, v_{xx}, u_{xy}, v_{xy}, u_{yy}, v_{yy})$$

Lagrangian'ı üzerinde gösterelim. $u \rightarrow u + \epsilon\eta$, $v \rightarrow v + \epsilon\xi$ artımlarını verelim. L deki değişim :

$$\begin{aligned} \delta L &= L(x, y, u + \epsilon\eta, v + \epsilon\xi, u + \epsilon\eta, v + \epsilon\xi, u + \epsilon\eta, v + \epsilon\xi) \\ &\quad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{matrix} \\ &- L(x, y, u, v, u, v, u, v) \\ &\quad \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 2 \end{matrix} \\ &= \epsilon \left[\eta \frac{\partial L}{\partial u} + \xi \frac{\partial L}{\partial v} + \eta_x \frac{\partial L}{\partial u_x} + \xi_x \frac{\partial L}{\partial v_x} + \eta_y \frac{\partial L}{\partial u_y} + \xi_y \frac{\partial L}{\partial v_y} + \eta_{xx} \frac{\partial L}{\partial u_{xx}} \right. \\ &\quad \left. + \xi_{xx} \frac{\partial L}{\partial v_{xx}} + \eta_{xy} \frac{\partial L}{\partial u_{xy}} + \xi_{xy} \frac{\partial L}{\partial v_{xy}} + \eta_{yy} \frac{\partial L}{\partial u_{yy}} + \xi_{yy} \frac{\partial L}{\partial v_{yy}} \right] + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

Burada parça parça integrasyon yapalım.

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\epsilon} &= \eta \frac{\partial L}{\partial u} + \xi \frac{\partial L}{\partial v} - \eta D_x \frac{\partial L}{\partial u_x} - \xi D_x \frac{\partial L}{\partial v_x} - \eta D_y \frac{\partial L}{\partial u_y} - \xi D_y \frac{\partial L}{\partial v_y} + D_x \left(\eta \frac{\partial L}{\partial u_x} \right) \\ &+ D_x \left(\xi \frac{\partial L}{\partial v_x} \right) + D_y \left(\eta \frac{\partial L}{\partial u_y} \right) + D_y \left(\xi \frac{\partial L}{\partial v_y} \right) + \eta D_x D_x \frac{\partial L}{\partial u_{xx}} \\ &+ \xi D_x D_x \frac{\partial L}{\partial v_{xx}} + D_x \left(\eta_x \frac{\partial L}{\partial u_{xx}} \right) - D_x \left(\eta D_x \frac{\partial L}{\partial u_{xx}} \right) \\ &+ D_x \left(\xi_x \frac{\partial L}{\partial v_{xx}} \right) - D_x \left(\xi D_x \frac{\partial L}{\partial v_{xx}} \right) + \eta D_x D_y \frac{\partial L}{\partial u_{xy}} + \xi D_x D_y \frac{\partial L}{\partial v_{xy}} \\ &+ \eta D_y D_y \frac{\partial L}{\partial u_{yy}} + \xi D_y D_y \frac{\partial L}{\partial v_{yy}} + D_x \left(\eta_y \frac{\partial L}{\partial u_{xy}} \right) \\ &- D_y \left(\eta D_x \frac{\partial L}{\partial u_{xy}} \right) + D_x \left(\xi_y \frac{\partial L}{\partial v_{xy}} \right) - D_y \left(\xi D_x \frac{\partial L}{\partial v_{xy}} \right) + D_y \left(\eta_y \frac{\partial L}{\partial u_{yy}} \right) \\ &- D_y \left(\eta D_y \frac{\partial L}{\partial u_{yy}} \right) + D_y \left(\xi_y \frac{\partial L}{\partial v_{yy}} \right) - D_y \left(\xi D_y \frac{\partial L}{\partial v_{yy}} \right) \end{aligned}$$

η ve ξ leri sırasıyla E_u ve E_v ile gruplandırarak olursak

$$\begin{aligned} E_u &= \frac{\partial L}{\partial u} - D_x \frac{\partial L}{\partial u_x} - D_y \frac{\partial L}{\partial u_y} + D_x D_x \frac{\partial L}{\partial u_{xx}} + D_x D_y \frac{\partial L}{\partial u_{xy}} + D_y D_y \frac{\partial L}{\partial u_{yy}} \\ E_v &= \frac{\partial L}{\partial v} - D_x \frac{\partial L}{\partial v_x} - D_y \frac{\partial L}{\partial v_y} + D_x D_x \frac{\partial L}{\partial v_{xx}} + D_x D_y \frac{\partial L}{\partial v_{xy}} + D_y D_y \frac{\partial L}{\partial v_{yy}} \end{aligned}$$

elde olunur. D_x ve D_y parantezindeki ifadeleri de

$$W^x[u, v] = \eta \frac{\partial L}{\partial u_x} + \xi \frac{\partial L}{\partial v_x} + \eta_x \frac{\partial L}{\partial u_{xx}} + \xi_x \frac{\partial L}{\partial v_{xx}} - \eta D_x \frac{\partial L}{\partial u_{xx}} - \xi D_x \frac{\partial L}{\partial v_{xx}} + \eta_y \frac{\partial L}{\partial u_{xy}} + \xi_y \frac{\partial L}{\partial v_{xy}}$$

$$W^y[u, v] = \eta \frac{\partial L}{\partial u_y} + \xi \frac{\partial L}{\partial v_y} - \eta D_x \frac{\partial L}{\partial u_{xy}} - \xi D_x \frac{\partial L}{\partial v_{xy}} + \eta_y \frac{\partial L}{\partial u_{yy}} - \eta D_y \frac{\partial L}{\partial u_{yy}} + \xi_y \frac{\partial L}{\partial v_{yy}} - \xi D_y \frac{\partial L}{\partial v_{yy}}$$

ile gösterdiğimizde

$$\frac{\delta L}{\epsilon} = \eta E_u + \xi E_v + D_x W^x(u, v, \eta, \xi) + D_y W^y(u, v, \eta, \xi) + O(\epsilon)$$

olduğunu kolayca görürüz .

Tekrar genel hale dönersek; (4.7) ifadesini çıkarırken $u(x)$ üzerindeki sınır koşullarını kullanmadığımızdan, (4.6) ve (4.8) deki türevler varolduğu sürece bu denklemler, keyfi $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonları için geçerlidir.

Şimdi $u(x)$ fonksiyonunun extramum olması için gereken koşulları belirleyelim. (4.7) ve Diverjans Teoremini de kullanarak $J[u]$ nun değişimini inceleyelim:

$$\begin{aligned} \delta J[u] &= J[u + \epsilon v] - J[u] = \int_{\Omega} \delta L dx \\ &= \epsilon \int_{\Omega} [E_{\gamma}(L)v^{\gamma} + D_i W^i[u, v]] dx + O(\epsilon^2) \\ &= \epsilon \left[\int_{\Omega} E_{\gamma}(L)v^{\gamma} dx + \int_{\partial\Omega} W^i[u, v]n_i d\sigma \right] + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Burada $\int_{\partial\Omega}$, Ω nın sınır yüzeyi $\partial\Omega$ üzerindeki birim vektörünü göstermek üzere $J[u]$ nun $u(x)$ ekstremal fonksiyonu için $\delta J[u]$ nun $O(\epsilon)$ terimi sıfır olmalıdır:

$$\int_{\Omega} E_{\gamma}(L)v^{\gamma} dx + \int_{\partial\Omega} W^i[u, v]n_i d\sigma = 0. \quad (4.10)$$

$v(x)$ için verilen koşul, $u(x)$ in koşullarını değiştirmedikten dolayı genelliği bozmaksızın $W^i[u, v]$ deki $v(x)$ ve türevlerini sıfır varsayalım. Dolayısıyla $W^i[u, v]$, $v(x)$ ve türevlerine lineer bağlı olduğundan (4.10) daki hacim integrali, verilen homogen sınır koşullarını sağlayan her $v(x)$ için sıfır olmalıdır . $v(x)$ in Ω içindeki davranışı keyfi olduğundan, $u(x)$ ektramumu,

$$E_{\gamma} = \frac{\partial L}{\partial u^{\gamma}} - D_i \frac{\partial L}{\partial u_i^{\gamma}} D_i D_j \frac{\partial L}{\partial u_{ij}^{\gamma}} + \dots + (-1)^k D_{i_1} D_{i_2}, \dots, D_{i_k} \frac{\partial L}{\partial u_{i_1 i_2 \dots i_k}^{\gamma}} = 0, \quad (4.11)$$

$\gamma = 1, 2, \dots, m$ denklemini sağlar. (4.11) denklemlerine $J(u)$ nun bir $u(x)$ ektramumu için Euler-Lagrange Denklemleri denir. Sonucu şu teoremle özetleyebiliriz :

Bir $u(x)$ düzgün fonksiyonunun $J[u] = \int_{\Omega} L(x, u, u_1, \dots, u_k) dx$ etki integralinin ekstramumu olması için gerek koşul (4.11) denklemlerinin sağlanmasıdır. [8]

Örnek 1:(Sine-Gordon Denklemi)

$$L = -\frac{1}{2}u_1u_2 + \cos u \quad (4.12)$$

olsun. Buna karşı gelen Euler-Lagrange denklemi

$$\frac{\partial L}{\partial u} - D_1 \frac{\partial L}{\partial u_1} - D_2 \frac{\partial L}{\partial u_2} = 0 \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} -\sin u - D_1\left(-\frac{1}{2}u_2\right) - D_2\left(-\frac{1}{2}u_1\right) &= 0 \\ u_{12} - \sin u &= 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Bu son denklem Sine-Gordon denklemidir .

Örnek 2:

$$L = \frac{1}{2}u_1^1u_2^1 + \frac{1}{6}(u_1^1)^3 + u_1^1u_1^2 + \frac{1}{2}(u^2)^2$$

olsun. Buna karşı gelen Euler-Lagrange denklemleri ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u^1} - D_1 \frac{\partial L}{\partial u_1^1} - D_2 \frac{\partial L}{\partial u_2^1} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial u^2} - D_1 \frac{\partial L}{\partial u_1^2} - D_2 \frac{\partial L}{\partial u_2^2} &= 0 \end{aligned}$$

dır . Buradan $u_{12}^1 + u_1^1u_{11}^1 + u_{11}^2 = 0, u_{11}^1 - u^2 = 0$ denklemleri çıkar. Bu denklemlerde u^2 yi yokedersek

$$u_{12}^1 + u_1^1u_{11}^1 + u_{111}^1 = 0 \quad (4.15)$$

denklemine indirgenir. $x = x_1, t = x_2, \omega = u_1^1$ notasyonu ile (4.15) denklemi

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial^3 \omega}{\partial t^3} = 0 \quad (4.16)$$

Korteweg-de Vries denklemine dönüşür. Teorem (2.1.2) (4.5) ile tanımlı E_γ Euler operatörü ve iki defa sürekli diferansiyellenebilir $F(x, u, u_1, \dots, u_l)$ fonksiyonu

için

$$E_\gamma D_i F(x, u, u_1, \dots, u_l) = 0, \gamma = 1, 2, \dots, m; i = 1, \dots, n \quad (4.17)$$

özdeşlikleri geçerlidir. Bu teoremin sonucu olarak aşağıdaki teoremler verilebilir:

Teorem (2.1.3) Bir L Lagrangian'ı için Euler-Lagrange Denklemleri, eğer

$$L = D_i F^i(x, u, u_1, \dots, u_l)$$

diverjans formunda yazılabiliyorsa, özdeş olarak sıfırdır .

Teorem (2.1.4) Bir $A(x, u, u_1, \dots, u_l) = (A^1, A^2, \dots, A^n)$ vektörü için $L - L' =$

$\text{div} A$ ise, L ve L' Lagrangian'leri aynı Euler-Lagrange denklemleri kümesine sahiptir.

4.4 Değişim Simetrileri ve Korunum Kuralları; Boyer Formülasyonu

Euler-Lagrange Denklemleri birçok fiziksel sistemlerin bünye denklemleri olduğundan korunum kurallarının, doğrudan bu denklemlerin özelliklerinden çıkması beklenebilir. Bununla birlikte korunum kurallarını bulmak için Noether $J[u] = \int_{\Omega} L(x, u, u_1, \dots, u_k) dx$ etki integralini değişmez bırakan dönüşümleri in-

celemenin daha faydalı olacağını gösterdi ve korunum kurallarıyla bu şekildeki değişmezler arasında doğrudan bir bağlantı kurdu. Noether'in ele aldığı dönüşümler, ξ ve η nın u nun türevlerine bağlı olduğu

$$\left. \begin{aligned} x^* &= x + \epsilon \xi(x, u, u_1, u_2, \dots, u_p) + O(\epsilon^2) \\ u^* &= u + \epsilon \eta(x, u, u_1, u_2, \dots, u_p) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

genel formundadır. x in değişmez kaldığı daha basit bir dönüşüm elde edilebildiğini düşünerek Boyer, (4.18) dönüşümleri yerine

$$\left. \begin{aligned} x^* &= x \\ u^* &= u + \epsilon \eta(x, u, u_1, u_2, \dots, u_p) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

formundaki dönüşümleri kullanabileceğini farkettili. Şimdi Boyer formülasyonundan Noether Teoremi'ni elde edeceğiz :

(4.19) için genişletilmiş dönüşümler

$$\begin{aligned} u_i^* &= u_i + \epsilon D_i \eta + O(\epsilon^2); \\ u_{ij}^* &= u_{ij} + \epsilon D_i D_j \eta + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (4.20)$$

şeklinde verilir ve buna karşı gelen sonsuz küçük üretcin k ıncı uzanımı $\eta_{ij\dots s}{}^\gamma = D_i D_j \dots D_s \eta^\gamma$ olmak üzere

$$U^{(k)} = \eta^\gamma \frac{\partial}{\partial u^\gamma} + \eta_i^\gamma \frac{\partial}{\partial u_i^\gamma} + \eta_{ij}^\gamma \frac{\partial}{\partial u_{ij}^\gamma} + \dots + \eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^\gamma \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 \dots i_k}^\gamma} \quad (4.21)$$

formundadır. (4.19-20) dönüşümleri altında L Lagrangianının değişimi

$$\delta L = \epsilon U^{(k)} L + O(\epsilon^2)$$

kadardır.

Tanım . Bir $u(x)$ fonksiyonu için

$$U^{(k)}L = D_i A^i \quad (4.22)$$

olacak şekilde bir $A(x, u, u_1, u_2, \dots, u_k) = (A^1, A^2, \dots, A^n)$ vektör fonksiyonu varsa

(4.19) dönüşümü, $J[u]$ etki integralinin değişim simetrisidir. Bu simetrilere Noether Simetriteri de denir.

Şimdi keyfi u ve v fonksiyonları için sağlanan (4.7) eşitliğine bakalım.

$v = \eta, v_i = \eta_i, v_{ij} = \eta_{ij}, \dots$ dersek $\delta L = \epsilon U^{(k)}L + O(\epsilon^2)$ den

$$U^{(k)}L = E_\gamma(L)\eta^\gamma + D_i W^i[u, v] \quad (4.23)$$

çıkar. (4.22) ve (4.23) ü karşılaştırdığımızda (4.19) değişim simetrisi için

$$E_\gamma(L)\eta^\gamma + D_i W^i[u, v] = D_i A^i \quad (4.24)$$

ifadesini elde ederiz. Eğer $u(x)$ aşağıdaki Euler-Lagrange denklemlerinin bir çözümü ise yani $E_\gamma(L) = 0, \gamma = 1, 2, \dots, m$ oluyorsa (4.24) ifadesi $D_i(W^i - A^i) = 0$ şeklinde bir korunum kuralı verir ve bunu şu teoremle ifade ederiz.

Teorem (2.2.1) (Noether Teoreminin Boyer Formülasyonu)

$U = \eta^\gamma \frac{\partial}{\partial u^\gamma}$ (4.19) dönüşümlerinin sonsuz küçük üretici ve $U^{(k)}$ onun k ıncı uzanımı olsun. Eğer U , herhangi bir $u(x)$ fonksiyonu için $U^{(k)}L = D_i A^i$ eşitliğini sağlayacak şekilde (4.1) etki integralinin bir değişim simetrisinin sonsuz küçük üretici ise bu durumda $E_\gamma(L) = 0$ Euler-Lagrange denklemlerini sağlayan her $u(x)$ fonksiyonu için $D_i(W^i[u, \eta] - A^i) = 0$ korunum kuralı gerçekleşir. $\gamma = 1, 2, \dots, m$.

Noether Teoremi yardımıyla korunum kurallarını elde etmek için $W^i[u, \eta]$ $i = 1, 2, \dots, n$ açık ifadeleri gerekecektir. Bazen (4.23) formundaki $U^{(k)}L$ ifadesini yeniden düzenleyerek daha kolay elde edilebilir. Örneğin

$$L = 3(u_{11})^2 - (u_1)^3 - 3u_1u_2$$

Lagrangianını ele alırsak,

$$U^{(2)}L = 6u_{11}(D_1)^2\eta - 3(u_1)^2D_1\eta - 3u_2D_1\eta - 3u_1D_2\eta$$

her terimi parça parça integre edersek,

$$\begin{aligned}
 u_{11}(D_1)^2\eta &= D_1(u_{11}D_1\eta) - u_{111}D_1\eta \\
 &= D_1(u_{11}D_1\eta - u_{111}\eta) + u_{1111}\eta \\
 (u_1)^2D_1\eta &= D_1((u_1)^2\eta) - 2u_1u_{11}\eta \\
 u_2D_1\eta &= D_1(u_2\eta) - u_{12}\eta \\
 u_1D_2\eta &= D_2(u_1\eta) - u_{12}\eta
 \end{aligned}$$

elde ederiz. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
 U^{(2)}L &= E(L)\eta + D_1W^1[u, \eta] + D_2W^2[u, \eta], \\
 E(L) &= 6[u_{1111} + u_1u_{11} + u_{12}], \\
 W^1[u, \eta] &= 6[u_{11}(D_1)\eta - u_{111}D_1\eta] - 3[(u_1)^2\eta + u_2\eta] \\
 W^2[u, \eta] &= -3u_1\eta
 \end{aligned}$$

bulunur. $U = (x_2u_1 - x_1)\frac{\partial}{\partial u^7}$ üreticinin L için bir değişim simetrisi ve $A^1 = x_2[3(u_{11})^2 - (u_1)^3 - 3u_1u_2]$, $A^2 = 3u$ olduğuna göre Noether Teoreminden

$$\begin{aligned}
 D_1(W^1 - A^1) + D_2(W^2 - A^2) &= 0 \\
 D_1(x_2[3(u_{11})^2 - 2(u_1)^3 - 6u_1u_{111}] - 6u_{11} + 6x_1u_{111} + 3x_1[(u_1)^2 + u_2]) \\
 + D_2(3[-x_2(u_1)^2 + x_1u_1 - u]) &= 0
 \end{aligned}$$

korunum kuralını elde ettik .

4.5 Lie-Bäcklund Dönüşümlerinin Denklik Sınıfları, Lie-Bäcklund Simetrileri

Noether'in

$$\left. \begin{aligned} x^* &= x + \epsilon \xi(x, u, u_1, u_2, \dots, u_p) + O(\epsilon^2) \\ u^* &= u + \epsilon \eta(x, u, u_1, u_2, \dots, u_p) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

şeklindeki dönüşüm grupları, ξ ve η küçükleri aynı zamanda $u, u_1, \dots, u_p$ türevlerine

de bağlı olduğundan Lie nokta dönüşümlerinden daha geneldir. (4.25) dönüşümlerinin uzanımları

$$\begin{aligned} u_i^* &= u_i + \epsilon \eta_i^{(1)} + O(\epsilon^2), \\ &\vdots \\ u_{i_1 i_2 \dots i_k}^* &= u_{i_1 i_2 \dots i_k} + \epsilon \eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)}, \end{aligned}$$

dır. Burada

$$\begin{aligned} \eta_i^{(1)} &= D_i \eta - (D_i \xi) u_j, \\ &\vdots \\ \eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)} &= D_{i_{k-1}} \eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k-1)} - (D_{i_k} \xi) u_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} j}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

göstermektedir. Sonsuz küçük üreticinin k ıncı uzanımı ise

$$U^{(k)} = \xi_i \frac{\partial}{\partial u_i^\gamma} + \eta^\gamma \frac{\partial}{\partial u^\gamma} + \eta_i^{\gamma(1)} \frac{\partial}{\partial u_i^\gamma} + \dots + \eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)\gamma} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 \dots i_k}^\gamma}$$

ile verilir.

Verilen bir $u = f(x)$ fonksiyonunun (4.25) dönüşümü altında nasıl dönüştüğünü incelediğimizde, bu dönüşümün önemli bir özelliği ortaya çıkar. Gerçekten $u = f(x)$ i Noether dönüşümünde yerleştirirsek

$$x^* = x + \epsilon \xi(x, f(x), f(x), f(x), \dots, f(x)) + O(\epsilon^2) \quad (4.26)$$

$$u^* = f(x) + \epsilon \eta(x, f(x), f(x), f(x), \dots, f(x)) + O(\epsilon^2) \quad (4.27)$$

elde olunur. u^* ın x^* a bağıllığı, $f(x)$ in $f^*(x^*)$ görüntüsünü tanımlar. $f^*(x^*)$ ı elde etmek için (4.26-27) den x in yok edilmesi gerekir. (4.26) dan x i çözelim:

$$x = x^* - \epsilon \xi(x^*, f(x^*), f(x^*), f(x^*), \dots, f(x^*)) + O(\epsilon^2) \quad (4.28)$$

(4.28) i (4.27) de yerine koyarsak

$$\begin{aligned} f^*(x^*) &= f(x^*) + \epsilon[\eta(x^*, f(x^*), f(x^*), \dots, f(x^*)) \\ &\quad - \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} \xi_i(x^*, f(x^*), f(x^*), \dots, f(x^*))] + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (4.29)$$

elde ederiz. (4.29) da x^* yerine x konduğunda, (4.25) dönüşümü altında $f(x)$ in görüntüsü

$$\begin{aligned} f^*(x) &= f(x) + \epsilon[\eta(x, f(x), f(x), \dots, f(x)) \\ &\quad - \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \xi_i(x, f(x), f(x), \dots, f(x))] + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (4.30)$$

olur, buradan aynı $f^*(x)$ in

$$\left. \begin{aligned} x^* &= x \\ u^* &= u + \epsilon[\eta(x, u, u, \dots, u) - u_i \xi_i(x, u, u, \dots, u)] + O(\epsilon^2) \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

dönüşümü ile elde edileceği görülür. Böylece (4.25) ve (4.31) dönüşümleri fonksiyonlar üzerinde aynı etkiyi gösterir :

Teorem (2.3-1) $u = f(x)$ p-defa diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun.

$$\left. \begin{aligned} x^* &= x + \epsilon \xi(x, u, u, \dots, u) + O(\epsilon^2) \\ u^* &= u + \epsilon \eta(x, u, u, \dots, u) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$

ve

$$\left. \begin{aligned} x^* &= x \\ u^* &= u + \epsilon[\eta(x, u, u, \dots, u) - u_i \xi_i(x, u, u, \dots, u)] + O(\epsilon^2) \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

dönüşümleri $f(x)$ i (4.30) ile verilen aynı $f^*(x)$ fonksiyonuna dönüştürmesi anlamında eşdeğerdir. Bu anlamda

$$U = \xi_i(x, u, u, \dots, u) \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^\gamma(x, u, u, \dots, u) \frac{\partial}{\partial u^\gamma} \quad (4.34)$$

$$\hat{U} = [\eta^\gamma(x, u, u, \dots, u) - u_i^\gamma \xi_i(x, u, u, \dots, u)] \frac{\partial}{\partial u^\gamma} \quad (4.35)$$

üreteçleri de birbirine eşdeğerdir.

Geometrik olarak bir fonksiyon, (4.33) dönüşümü altında yatay olarak görüntülenirken (4.32) dönüşümüyle dikey olarak görüntülenir. Böylece

$$\left. \begin{aligned} x^* &= x \\ u^* &= u + \epsilon \eta(x, u, u_1, \dots, u_p) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

formundaki dönüşümleri veya

$$\eta^\gamma(x, u, u_1, \dots, u_p) \frac{\partial}{\partial u^\gamma} \quad (4.37)$$

formundaki sonsuz küçük üreteçleri dikkate almak kafidir.

Boyer formülasyonundan (4.32) formülasyonuna geçiş tek türlü değildir. Boyer formülasyonundaki η nın

$$\eta(x, u, u_1, \dots, u_p) = \hat{\eta}(x, u, u_1, \dots, u_p) - u_i \hat{\xi}_i(x, u, u_1, \dots, u_p) \quad (4.38)$$

şeklindeki bir ayrılışının bu formülasyona denk olan bir $x^* = x + \epsilon \hat{\xi} + O(\epsilon^2)$ $u^* = u + \epsilon \hat{\eta} + O(\epsilon^2)$ dönüşümü vereceği gösterilebilir. Başka bir deyişle (4.37) ye denk sonsuz sayıda sonsuz küçük üreteç ve her dönüşümün farklı yatay bileşenler cümlesi vardır. Bu ise (4.34) şeklindeki bir sonsuz küçük üretecin tek olmadığı anlamına gelir.

(4.38) e göre $U = x \frac{\partial}{\partial x} - 2u \frac{\partial}{\partial u}$ ölçme operatörü $\hat{U} = (-2u - xu_x) \frac{\partial}{\partial u}$ operatörüne denktir ve $\hat{U}$ da u_x sıfır olmamak şartıyla $\tilde{U} = \frac{2u}{u_x} \frac{\partial}{\partial x} - xu_x \frac{\partial}{\partial u}$ operatörüne denktir. $\eta - u_i \xi_i = u_k - u_k = 0$ olduğundan dolayı, toplam türev operatörü

$$D_k = \frac{\partial}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial}{\partial u}$$

$\hat{U} = 0$ operatörüne denktir. Geometrik olarak D_k operatörü noktaları, sadece verilen bir $u = f(x)$ eğrisi boyunca taşır.

Diferansiyel denklemin bir simetrisi, bu denklemin bir çözümünü yine aynı denklemin bir başka çözümüne dönüştüren bir dönüşüm olarak tanımlanmıştır. Bu açıdan değerlendirildiğinde, diferansiyel denklemlerin simetri kavramını Lie-Bäcklund dönüşümlerine genişletmek kolaydır. Dönüşümün kendisi çözüm dönüşümünü ifade ettiğinden dolayı sadece u da değişiklikler içeren dönüşümler için formülasyon basit hale gelir: Eğer

$$\left. \begin{aligned} x^* &= x \\ u^* &= u + \epsilon \eta(x, u, u_1, \dots, u_p) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \right\} \quad (4.39)$$

dönüşümü

$$F^\sigma(x, u, u_1, \dots, u_q) = 0, \sigma = 1, 2, \dots, m \quad (4.40)$$

kısmi diferansiyel denklem sisteminin bir simetrisini üretirse, (4.40) ın herhangi bir $u(x)$ çözümü için (4.39) ile tanımlanan $u^*(x)$ de (4.40) ın bir çözümü olmak zorundadır. [9]

Tanım . $U = \eta^\gamma \frac{\partial}{\partial u^\gamma}$ üreticine sahip (4.39) dönüşümü

$$F^\sigma(x, u, u_1, \dots, u_q) = 0, \sigma = 1, 2, \dots, m$$

denklem sistemini sağlayan herhangi bir $u(x)$ için

$$U^{(q)} F^\sigma(x, u, u_1, \dots, u_q) = 0, \sigma = 1, 2, \dots, m \quad (4.41)$$

denklemini sağlandığında (4.40) ın bir Lie-Bäcklund simetrisini tanımlar.

Verilen bir diferansiyel denklem sistemi tarafından kabul edilen Lie-Bäcklund simetrilerinin belirlenmesi işlemi, temelde nokta simetrilerinde yapılanların benzeridir. Küçük fark $U^{(q)} F^\sigma = 0$ denklemlerinin u nun $(p+q)$ uncu mertebeye kadar türevler içermesidir ve bu da $F^\sigma = 0$ nın

$$D_i F^\sigma = 0, D_i D_j F^\sigma = 0, D_i D_j D_k F^\sigma = 0, \dots \quad (4.42)$$

diferansiyel sonuçlarının kullanılmasını gerektirir.

(4.42) denklemleri, $x, u, u_i, u_{ij}, \dots$ değişkenleri tarafından sağlanması gereken şartlardır. (4.40) ve (4.42) bağıntılarından bir bağımsız değişken seçimi, $U^{(q)} F^\sigma = 0$ denklemlerini parçalara ayırır, bu ise η ya göre $F^\sigma = 0$ denklemlerinin Lie-Bäcklund simetrileri için belirleyici denklemler sistemini oluşturan bir lineer kısmi diferansiyel denklemler sistemi verir.

4.6 Burgers Denkleminin Lie-Bäcklund Simetrileri

$$u_{xx} - uu_x - u_1 = 0 \quad (4.43)$$

Denkleminde u_x için u_1 ; u_{xx} için u_2 ; u_{xxx} için u_3 kullanacağız. Bu durumda (4.43) denklemi

$$u_2 - uu_1 - u_1 = 0 \quad (4.44)$$

haline gelir. Bu durumda diferansiyel sonuçlar ise

$$u_3 - uu_2 - (u_1)^2 - u_{1t} = 0$$

$$u_4 - uu_3 - 3u_1u_2 - u_{2t} = 0$$

...

şeklindedir. Bağımsız değişkenler olarak $x, t, u, u_1, u_2, \dots$ ler alınırsa u nun t ye göre bütün türevleri bu değişkenlere göre ifade edilebilir.

Şimdi Burgers denklemi tarafından kabul edilen

$$x^* = x, u^* = u + \epsilon \eta(x, t, u, u_1, u_2, u_3) + O(\epsilon^2) \quad (4.45)$$

şeklindeki Lie-Bäcklund simetrilerini araştıralım. Bu şekildeki bir dönüşümün üreticinin genel formu

$$U^{(k)} = \eta^\gamma \frac{\partial}{\partial u^\gamma} + \eta_i^\gamma \frac{\partial}{\partial u_i^\gamma} + \eta_{ij}^\gamma \frac{\partial}{\partial u_{ij}^\gamma} + \dots + \eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^\gamma \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 \dots i_k}^\gamma}$$

şeklindedir.

Burgers denklemi için yazıldığında ise

$$U^{(2)} = \eta \frac{\partial}{\partial u} + \eta_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \eta_{11} \frac{\partial}{\partial u_{11}}$$

olur. (4.44) denkleminin (4.45) formundaki simetrisi

$$U^{(2)}(u_2 - uu_1 - u_t) = (D_x)^2 \eta - u D_x \eta - u_1 \eta - D_t \eta = 0 \quad (4.46)$$

denklemini sağlar.

$$\begin{aligned} D_x \eta &= \eta_x + \eta_u u_1 + \eta_{u_1} u_2 + \eta_{u_2} u_3 + \eta_{u_3} u_4 \\ D_x(D_x \eta) &= \eta_{xx} + \eta_{xu} u_1 + \eta_{xu_1} u_2 + \eta_{xu_2} u_3 + \eta_{xu_3} u_4 + u_2 \eta_u \\ &\quad + u_1(\eta_{ux} + \eta_{uu} u_1 + \eta_{uu_1} u_2 + \eta_{uu_2} u_3 + \eta_{uu_3} u_4) + u_3 \eta_{u_1} \\ &\quad + u_2(\eta_{u_1 x} + \eta_{u_1 u} u_1 + \eta_{u_1 u_1} u_2 + \eta_{u_1 u_2} u_3 + \eta_{u_1 u_3} u_4) + u_4 \eta_{u_2} \\ &\quad + u_3(\eta_{u_2 x} + \eta_{u_2 u} u_1 + \eta_{u_2 u_1} u_2 + \eta_{u_2 u_2} u_3 + \eta_{u_2 u_3} u_4) + u_5 \eta_{u_3} \\ &\quad + u_4(\eta_{u_3 x} + \eta_{u_3 u} u_1 + \eta_{u_3 u_1} u_2 + \eta_{u_3 u_2} u_3 + \eta_{u_3 u_3} u_4) \\ D_t \eta &= \eta_t + \eta_u u_t + \eta_{u_1} u_{1t} + \eta_{u_2} u_{2t} + \eta_{u_3} u_{3t} \end{aligned}$$

Bu ifadeler ve (4.44) ün diferansiyel sonuçları (4.46) da yerine konduğunda,

$$\begin{aligned} &u_4[\eta_{u_3 u_3} u_4 + 2\eta_{u_2 u_3} u_3 + 2\eta_{u_1 u_3} u_2 + 2\eta_{uu_3} u_1 + 2\eta_{xu_3}] \\ &+ u_3[\eta_{u_2 u_2} u_3 + 2\eta_{u_1 u_2} u_2 + 2\eta_{uu_2} u_1 + 2\eta_{xu_2}] \\ &+ u_2[\eta_{u_1 u_1} u_2 + 2\eta_{uu_1} u_1 + 2\eta_{xu_1}] + u_1[\eta_{uu} u_1 + 2\eta_{xu}] \\ &+ [\eta_{xx} - \eta_x u - \eta_{u_1} - \eta_t + \eta_{u_1}(u_1)^2 + 3\eta_{u_2} u_1 u_2 \\ &+ 4\eta_{u_3} u_1 u_3 + 3\eta_{u_3}(u_2)^2] = 0 \end{aligned} \quad (4.47)$$

(4.47) denklemini $x, t, u, u_1, u_2, u_3, u_4$ lerin bütün değerleri için gerçekleşmelidir. η , u_4 e bağlı olmadığından dolayı (4.47) deki u_4 ve $(u_4)^2$ nin katsayıları sıfır olmalıdır:

$$\eta_{u_3 u_3} = 0 \quad (4.48)$$

$$\eta_{u_2 u_3} u_3 + \eta_{u_1 u_3} u_2 + \eta_{u u_3} u_1 + \eta_{x u_3} = 0 \quad (4.49)$$

(4.48) denkleminde $\eta = \alpha(x, t, u, u_1, u_2) u_3 + b(x, t, u, u_1, u_2)$ bulunur. η yı (4.49) denkleminde yerine koyalım.

$$u_3 \alpha_{u_2} + u_2 \alpha_{u_1} + u_1 \alpha_u + \alpha_x = 0$$

katsayıları tek tek sıfıra eşitlersek

$$\alpha_{u_2} = 0, \alpha_{u_1} = 0, \alpha_u = 0, \alpha_x = 0$$

denklemlerinden $\alpha = \alpha(t)$ çıkar.

$$\eta = \alpha(t) u_3 + b(x, t, u, u_1, u_2) \quad (4.50)$$

Burada α ve b , argümanlarının belirlenmemiş fonksiyonlarıdır.

(4.50) yı (4.47) de yerine koyup u_3 ve $(u_3)^2$ nin katsayılarını sıfıra eşitleyelim:

$$\begin{aligned} & u_3 [b_{u_2 u_2} u_3 + 2b_{u_1 u_2} u_2 + 2b_{u u_2} u_1 + 2b_{x u_2}] \\ & + u_2 [b_{u_1 u_1} u_2 + 2b_{u u_1} u_1 + 2b_{x u_1}] + u_1 [b_{u u} u_1 + 2b_{x u}] \\ & + [b_{xx} - u b_x - u_1 (\alpha u_3 + b) - \alpha' u_3 - b_t + (u_1)^2 b_{u_1} \\ & + 3u_1 u_2 b_{u_2} + 4u_1 u_3 \alpha + 3(u_2)^2 \alpha] = 0 \end{aligned}$$

$$(u_3)^2 : b_{u_2 u_2} = 0 \quad (4.51)$$

$$u_3 : 2u_2 b_{u_1 u_2} + 2u_1 b_{u u_2} + 2b_{x u_2} - u_1 \alpha - \alpha' + 4u_1 \alpha = 0 \quad (4.52)$$

(4.51) denkleminde $b = C(x, t, u, u_1) u_2 + D(x, t, u, u_1)$, (4.52) denkleminde ise $u_1 (2b_{u u_2} + 3\alpha) + 2u_2 b_{u_1 u_2} + (2b_{x u_2} - \alpha') = 0$ bulunur.

$$2b_{u_1 u_2} = 0 \Rightarrow C_{u_1} = 0 \Rightarrow C = C(x, t, u)$$

$$2b_{u u_2} + 3\alpha = 0 \Rightarrow C_u = -\frac{3}{2}\alpha \Rightarrow C = -\frac{3}{2}\alpha(t)u + A(x, t)$$

$$2b_{x u_2} - \alpha' = 0 \Rightarrow C_x = \frac{\alpha'}{2} \Rightarrow A = \frac{\alpha'}{2}x + \beta(t)$$

Buradan b

$$b = [-\frac{3}{2}\alpha(t)u + \frac{\alpha'}{2}x + \beta(t)]u_2 + D(x, t, u, u_1).$$

$$\eta = \alpha(t)u_3 + [-\frac{3}{2}\alpha(t)u + \frac{\alpha'}{2}x + \beta(t)]u_2 + D(x, t, u, u_1) \quad (4.53)$$

β ve D , argümanlarının keyfi fonksiyonlarıdır.

(4.53) ü (4.47) de yerine koyup u_2 ve $(u_2)^2$ nin katsayılarını sıfıra eşitleyelim:

$$\begin{aligned}
 & u_3[u_3 0 + 2u_2 0 + 2u_2(-\frac{3}{2}\alpha(t)) + 2(\frac{1}{2}\alpha'(t))] \\
 & + u_2[u_2 D_{u_1 u_1} + 2u_1 D_{u u_1} + 2D_{x u_1}] + u_1[u_1 D_{u u} + 2D_{x u}] \\
 & + D_{xx} - u(\frac{1}{2}\alpha'(t)u_2 + D_x) - u_1[\alpha(t)u_3 + (-\frac{3}{2}\alpha(t)u + \frac{1}{2}\alpha'(t)x \\
 & + \beta(t))u_2 + D] - [\alpha'(t)u_3 + (-\frac{3}{2}\alpha'(t)u + \frac{1}{2}\alpha''(t)x + \beta'(t))u_2 + D_t] \\
 & + (u_1)^2 D_{u_1} + 3u_1 u_2(-\frac{3}{2}\alpha(t)u + \frac{1}{2}\alpha'(t)x + \beta(t)) \\
 & + 4u_1 u_3 \alpha(t) + 3(u_2)^2 \alpha(t) = 0
 \end{aligned}$$

$$(u_2)^2 : D_{u_1 u_1} + 3\alpha(t) = 0 \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned}
 (u_2) : 2u_1 \beta(t) + x u_1 \alpha'(t) - 3u u_1 \alpha(t) + u \alpha'(t) + 2u_1 D_{u u_1} \\
 2D_{x u_1} - \frac{1}{2} x \alpha''(t) - \beta'(t) = 0
 \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$(u_2)_r^0 : (u_1)^2 (D_{u_1} + D_{u u}) + u_1 (2D_{x u} - D) - u D_x + D_{xx} - D_t = 0 \quad (4.56)$$

(4.54) denkleminde $D = -\frac{3}{2}\alpha(t)u_1^2 + E(x, t, u)u_1 + F(x, t, u)$ bulunur. D yi (4.56) da yerine koyalım:

$$\begin{aligned}
 & u_1^2(-3\alpha(t)u_1 + E + u_1 E_{u u} + F_{u u}) + u_1(2u_1 E_{x u} + 2F_{x u} + \frac{3}{2}\alpha(t)u_1^2 - u_1 E - F) \\
 & - u(u_1 E_x + F_x) + u_1 E_{xx} + F_{xx} + \frac{3}{2}\alpha'(t)u_1^2 - u_1 E_t - F_t = 0
 \end{aligned}$$

u_1 e göre bir polinom şeklinde düzenlersek

$$(u_1)^3 : -3\alpha(t) + E_{u u} + \frac{3}{2}\alpha(t) = 0 \quad (4.57)$$

$$(u_1)^2 : E + F_{u u} + 2E_{x u} - E + \frac{3}{2}\alpha'(t) = 0 \quad (4.58)$$

$$(u_1)^1 : 2F_{x u} - F - u E_x = 0 \quad (4.59)$$

(4.57) den

$$E_{u u} = \frac{3}{2}\alpha(t) \Rightarrow E(x, t, u) = \frac{3}{4}\alpha(t)u^2 + G(x, t)u + H(x, t)$$

bulunur. D de yerine konursa

$$D = -\frac{3}{2}\alpha(t)u_1^2 + [\frac{3}{4}\alpha(t)u^2 + G(x, t)u + H(x, t)]u_1 + F(x, t, u)$$

elde edilir. Bunu (4.55) de yazalım.

$$u_1(2\beta(t) + x\alpha'(t) + 2G(x, t)) + u\alpha' + 2uG_x + 2H_x - \frac{1}{2}x\alpha''(t) - \beta'(t) = 0$$

u_1 e göre polinomik bir denklem,

$$2\beta(t) + x\alpha'(t) + 2G(x, t) = 0 \Rightarrow G(x, t) = -(\frac{1}{2}x\alpha' + \beta(t))$$

kalanı sıfıra eşitleyelim:

$$u\alpha'(t) + 2u(-\frac{1}{2}\alpha'(t)) + 2H_x - \frac{1}{2}x\alpha''(t) - \beta'(t) = 0$$

$$H_x = \frac{1}{4}x\alpha'(t) + \frac{1}{2}\beta'(t)$$

$$H(x, t) = \frac{1}{8}x^2\alpha''(t) + \frac{1}{2}x\beta'(t) + \gamma(t)$$

$$\begin{aligned} D(x, t, u, u_1) &= -\frac{3}{2}\alpha(t)u_1^2 + [\frac{3}{4}u^2\alpha(t) - (\frac{1}{2}x\alpha'(t) + \beta(t))u \\ &+ \frac{1}{8}x^2\alpha''(t) + \frac{1}{2}x\beta'(t) + \gamma(t)]u_1 + F(x, t, u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta &= \alpha(t)u_3 + [-\frac{3}{2}u\alpha(t) + \frac{1}{2}x\alpha'(t) + \beta(t)]u_2 - \frac{3}{2}\alpha(t)u_1^2 + \\ &[\frac{3}{4}u^2\alpha(t) - (\frac{1}{2}x\alpha'(t) + \beta(t))u + \frac{1}{8}x^2\alpha''(t) \\ &+ \frac{1}{2}x\beta'(t) + \gamma(t)]u_1 + F(x, t, u) \end{aligned}$$

η yı (4.47) denkleminde yerine koyup u_1^2 ve u_1 in katsayılarını sıfıra eşitleyelim:

$$\begin{aligned} u_2[u_2(-\frac{3}{2}\alpha(t)2) + 2u_1(\frac{3}{2}u\alpha(t) - \frac{1}{2}x\alpha'(t) - \beta(t)) + 2(-\frac{1}{2}u\alpha'(t) + \frac{1}{4}x\alpha''(t) + \\ \frac{1}{2}\beta'(t))] + u_1[u_1^2\frac{3}{2}\alpha(t) + u_1F_{uu} + 2(-\frac{1}{2}\alpha'(t)u_1 + F_{xu})] + \\ \frac{1}{4}u_1\alpha''(t) + F_{xx} - u[\frac{1}{2}u_2\alpha'(t) - \frac{1}{2}uu_1\alpha'(t) + \frac{1}{4}xu_1\alpha''(t) + \frac{1}{2}u_1\beta'(t) + F_x]] \\ -u_1\{\alpha(t)u_3 + [-\frac{3}{2}u\alpha(t) + \frac{1}{2}x\alpha'(t) + \beta(t)]u_2 - \frac{3}{2}\alpha(t)u_1^2 + \\ [\frac{3}{4}u^2\alpha(t) - (\frac{1}{2}x\alpha'(t) + \beta(t))u + \frac{1}{8}x^2\alpha''(t) + \frac{1}{2}x\beta'(t) + \gamma(t)]u_1 + F(x, t, u)\} \\ -\{\alpha'(t)u_3 + [-\frac{3}{2}u\alpha'(t) + \frac{1}{2}x\alpha''(t) + \beta'(t)]u_2 - \frac{3}{2}\alpha'(t)u_1^2 + \\ [\frac{3}{4}u^2\alpha'(t) - (\frac{1}{2}x\alpha''(t) + \beta'(t))u + \frac{1}{8}x^2\alpha'''(t) + \frac{1}{2}x\beta''(t) + \gamma'(t)]u_1 + F_t\} \\ +u_1^2\{-\frac{3}{2}2u_1\alpha(t) + [\frac{3}{4}u^2\alpha(t) - (\frac{1}{2}x\alpha'(t) + \beta(t))u + \frac{1}{8}x^2\alpha''(t) + \frac{1}{2}x\beta'(t) + \gamma(t)]\} \\ +3u_1u_2[-\frac{3}{2}u\alpha(t) + \frac{1}{2}x\alpha'(t) + \beta(t)] + 4u_1u_3\alpha(t) + 3u_2^2\alpha(t) = 0 \\ F_{uu} + \frac{1}{2}\alpha'(t) = 0 \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\beta'(t) + 2F_{xu} - F - \frac{1}{4}u^2\alpha'(t) + \frac{1}{4}xu\alpha''(t) + \frac{1}{4}\alpha''(t) \\ - \frac{1}{8}x^2\alpha'''(t) - \frac{1}{2}x\beta''(t) - \gamma'(t) = 0 \end{aligned} \quad (4.61)$$

(4.60) dan $F_{uu} = -\frac{1}{2}\alpha'(t) \Rightarrow F(x, t, u) = -\frac{1}{4}u^2\alpha'(t) + K(x, t)u + L(x, t)$
 F yi (4.61) de yerine koyalım :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\beta'(t) + 2K_x - uK(x, t) - L(x, t) + \frac{1}{4}xu\alpha''(t) + \frac{1}{4}\alpha''(t) - \frac{1}{8}x^2\alpha'''(t) \\ - \frac{1}{2}x\beta''(t) - \gamma'(t) = 0 \\ u(\frac{1}{2}\beta'(t) - K(x, t) + \frac{1}{4}x\alpha''(t)) + 2K_x - L(x, t) + \frac{1}{4}\alpha''(t) - \frac{1}{8}x^2\alpha'''(t) \\ - \frac{1}{2}x\beta''(t) - \gamma'(t) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\beta'(t) - K(x, t) + \frac{1}{4}x\alpha''(t) = 0 \Rightarrow K(x, t) = \frac{1}{4}x\alpha''(t) + \frac{1}{2}\beta'(t) \\ 2K_x - L(x, t) + \frac{1}{4}\alpha''(t) - \frac{1}{8}x^2\alpha'''(t) - \frac{1}{2}x\beta''(t) - \gamma'(t) = 0 \end{aligned}$$

$K(x, t)$ yi yerine koyalım.

$$L(x, t) = \frac{3}{4}\alpha''(t) - \frac{1}{8}x^2\alpha'''(t) - \frac{1}{2}x\beta''(t) - \gamma'(t)$$

Bu durumda $F(x, t, u)$,

$$F(x, t, u) = -\frac{1}{4}u^2\alpha'(t) + [\frac{1}{4}x\alpha''(t) + \frac{1}{2}\beta'(t)]u + \frac{3}{4}\alpha''(t) - \frac{1}{8}x^2\alpha'''(t) - \frac{1}{2}x\beta''(t) - \gamma'(t)$$

olarak bulunur. Son olarak F yi η da yerine koyup η yi belirleyici denklemde yazalım ve u^2, u^1, u^0 in katsayılarını sıfıra eşitleyelim:

$$\begin{aligned} 2u_1u_3(-\frac{3}{2}\alpha(t)) + 2u_3(\frac{1}{2}\alpha'(t)) + u_2[u_2(-3\alpha(t)) + 2u_1(\frac{3}{2}\alpha(t)u - \beta(t) - \frac{1}{2}\alpha'(t)x) + \\ 2(-\frac{1}{2}\alpha'(t)u + \frac{1}{4}\alpha''(t)x + \frac{1}{2}\beta'(t))] + u_1[u_1(\frac{3}{2}\alpha(t)u_1 - \frac{1}{2}\alpha'(t)) + 2(-\frac{1}{2}\alpha'(t)u + \frac{1}{2}\alpha''(t))] \\ (\frac{1}{4}\alpha''(t)u_1 - \frac{1}{4}\alpha'''(t)) - u(\frac{1}{2}\alpha'(t)u_2 - \frac{1}{2}\alpha'(t)uu_1 + \frac{1}{4}\alpha''(t)xu_1 + \frac{1}{2}\beta'(t)u_1 + \\ \frac{1}{4}\alpha''(t)u - \frac{1}{4}\alpha'''(t)x - \frac{1}{2}\beta''(t)) - u_1\eta(x, t, u, u_1, u_2, u_3) - \{\alpha'(t)u_3 + \\ [-\frac{3}{2}\alpha'(t)u + \frac{1}{2}\alpha''(t)x + \beta'(t)]u_2 - \frac{3}{2}\alpha'(t)u_1^2 + [\frac{3}{4}\alpha'(t)u^2 - (\beta'(t) + \frac{1}{2}\alpha''(t)x)u + \\ \frac{1}{8}\alpha'''(t)x^2 + \frac{1}{2}\beta''(t)x + \gamma]u_1 - \frac{1}{4}\alpha''(t)u^2 + (\frac{1}{4}\alpha'''(t)x + \frac{1}{2}\beta''(t))u + \\ \frac{3}{4}\alpha'''(t) - \frac{1}{8}\alpha'''(t)x^2 - \frac{1}{2}\beta'''(t)x - \gamma''(t)\} + u_1^2[-3\alpha(t)u_1 + \frac{3}{4}\alpha(t)u^2 - \beta(t)u \\ - \frac{1}{2}\alpha'(t)xu + \frac{1}{8}\alpha''(t)x^2 + \frac{1}{2}\beta'(t)x + \gamma(t)] + 3u_1u_2[-\frac{3}{4}\alpha(t)u + \frac{1}{2}\alpha'(t)x + \beta(t)] + \end{aligned}$$

$$4u_1u_3\alpha(t) + 3u_2^2\alpha(t) = 0$$

$$u^2 : \frac{3}{2}\alpha(t)u_1^2 = 0$$

$$u^1 : 0 = 0$$

$$u^0 : -\alpha'''(t) + \frac{1}{8}x^2\alpha''''(t) + \frac{1}{2}x\beta'''(t) + \gamma''(t) = 0$$

$$\alpha''''(t) = 0, \beta'''(t) = 0, \gamma''(t) - \alpha'''(t) = 0$$

$$\alpha''''(t) = 0 \Rightarrow \alpha(t) = p_3t^3 + p_2t^2 + p_1t + p_0$$

$$\gamma''(t) = \alpha'''(t) = 6p_3 \Rightarrow \gamma(t) = 3p_3t^2 + r_1t + r_0$$

$$\beta'''(t) = 0 \Rightarrow \beta(t) = q_2t^2 + q_1t + q_0$$

bulunur. Burada $p_0, p_1, p_2, p_3, q_0, q_1, r_0, r_1$ keyfi sabitlerdir. q_0, q_1, q_2, r_0, r_1 sabitlerine karşı gelen sonsuz küçük üreteçler:

$$U_1 = u_1 \frac{\partial}{\partial u}, U_2 = (u_2 - uu_1) \frac{\partial}{\partial u}, U_3 = [2t(u_2 - uu_1) + xu_1 + u] \frac{\partial}{\partial u},$$

$$U_4 = [t^2(u_2 - uu_1) + t(xu_1 + u) - x] \frac{\partial}{\partial u}, U_5 = [tu_1 - 1] \frac{\partial}{\partial u}$$

Bu üreteçlerde u_2 yerine $u_1 + uu_1$ koyup, $\eta = \hat{\eta} - u_i \hat{x}_i$ eşitliğini kullanırsak, Burgers' denklemi tarafından kabul edilen Lie nokta simetrilerinin üreteçlerini buluruz:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, X_3 = x \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t} - u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$X_4 = xt \frac{\partial}{\partial x} + t^2 \frac{\partial}{\partial t} + (x - tu) \frac{\partial}{\partial u}, X_5 = t \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}$$

p_0, p_1, p_2, p_3 e karşı gelen sonsuz küçük üreteçler, Burgers' denleminin nokta simetrilerine denk olmayan yüksek mertebeden simetrilere karşı gelir :

$$U_6 = [4u_3 - 6uu_2 - 6(u_1)^2 + 3u^2u_1] \frac{\partial}{\partial u},$$

$$U_7 = [4tu_3 + (2x - 6tu)u_2 - 6t(u_1)^2 + (3tu^2 - 2xu)u_1 - u^2] \frac{\partial}{\partial u},$$

$$U_8 = [4t^2u_3 + (4tx - 6t^2u)u_2 - 6t^2(u_1)^2 + (3t^2u^2 - 4txu + x^2)u_1 - 2tu^2 + 2xu + 6] \frac{\partial}{\partial u},$$

$$U_9 = [4t^3u_3 + (6t^2x - 6t^3u)u_2 - 6t^3(u_1)^2 + (3t^3u^2 - 6t^2xu + 3tx^2 + 12t^2)u_1 - 3t^2u^2 + 6txu - 3x^2 - 6t] \frac{\partial}{\partial u}.$$

SONUÇLAR

Bu çalışmada Lie dönüşüm gruplarının yapısını, özelliklerini ve adi diferansiyel denklemlerin çözümünde nasıl kullanıldığı üzerinde durduk. Özellikle nokta dönüşümü ile Blasius denkleminin, değme dönüşümü ile $y''' = 0$ denkleminin simetrilerini elde ettik. Ayrıca son bölümde Lie-Bäcklund dönüşümü ile Burgers' denkleminin kabul ettiği simetrileri bulduk.

Diferansiyel denklemlerin kabul ettiği simetrilerin oluşturduğu vektör uzayı bazı koşullarla birlikte Lie Cebri oluşturursa, bu taktirde diferansiyel denklemin mertebesi, Lie cebirinin boyutu kadar indirgenir. Böylece diferansiyel denklemin çözümünü daha düşük mertebeli bir diferansiyel denklemin çözümüne indirgemiş olduk.

Kısmi türevli bir diferansiyel denklemin kabul ettiği Lie grup dönüşümleri ile değişmez çözümleri inşa edilebilir ve bu, sınır değer problemlerine uygulanabilir.

Lie dönüşüm grupları altında Değişim problemlerinden ortaya çıkan korunum kuralları ile Euler-Lagrange denklemlerinin değişmezliği arasındaki ilişki daha ayrıntılı bir şekilde incelenerek, yeni korunum yasaları elde olunabilir.

KAYNAKLAR

- [1] BLUMAN,G.W.,and KUMEI,S., Symmetries and Differential Equations, Springer-Verlag, (1989)
- [2] OLVER, P.J., Aplications of Groups to Differential Equations, Springer-Verlag, (1965)
- [3] ROGERS,C.,and AMES,W.F., Nonlinear Boundary Value Problems in Science and Engineering, Academic Press, (1989)
- [4] IBRAGIMOV, N.Kh., Group Analysis of Ordinary Differential Equations and the Invariance Principle in Mathematical Physics, 89-156, Russian Math. Surveys, (1992)
- [5] STEPHANI, H., Differential Equations, Their solutions using symmetries Cambridge University Press, (1989)
- [6] BLUMAN,G.W., COLE, and J.D., Similarity Methods for Differential Equations, Springer-Verlag, (1974)
- [7] AKHATOV,Sh., GAZIZOV,R.K., and IBRAGIMOV,N.Kh., Bäcklund Transformations and Nonlocal Symmetries, 393-395 American Mathematical Society, (1988)
- [8] OVSIANNIKOV,L.V., Group Analysis of Differential Equations, Academic Press, (1982)
- [9] PAGE, J.M., Ordinary Differential Equations with an introduction to Lie's Theory of the Group of One Parameter, Macmillan, (1897)

ÖZGEÇMİŞ

Yalçın Yılmaz, 1970 yılında İzmit'te doğdu. İlk ve orta öğrenimini sırasıyla Kandıra ve İzmit'te tamamladı.

1987 yılında girdiği İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 1992 yılında mezun oldu. 1993 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik programında yüksek lisans öğrenimine başladı. Aynı yıl Sakarya Üniversitesi Fen-Ed Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma görevlisi olarak göreve başladı. Halen bu göreve devam etmektedir.

