

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HALKALAR TEORİSİNDE GENELLEŞTİRİLMİŞ TERSİNİRLER
VE KISMİ SIRALAMA BAĞINTILARI

Savcı Rahman ARGÜN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA

2019

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Savcı Rahman ARGÜN tarafından hazırlanan “**Halkalar Teorisinde Genelleştirilmiş Tersinirler ve Kısmi Sıralama Bağlantıları**” adlı tez çalışması 11/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman

: Doç. Dr. Burcu ÜNGÖR



Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü

Jüri Üyeleri :

Başkan

: Prof. Dr. Ercan ALTINIŞIK



Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü

Üye

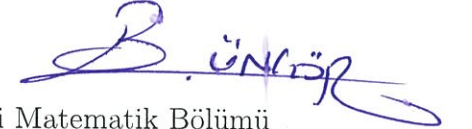
: Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU



Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü

Üye

: Doç. Dr. Burcu ÜNGÖR



Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Özlem YILDIRIM

Enstitü Müdürü Vekili

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

11/06/2019



Savcı Rahman ARGÜN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HALKALAR TEORİSİNDE GENELLEŞTİRİLMİŞ TERSİNİRLER VE KISMİ SIRALAMA BAĞINTILARI

Savcı Rahman ARGÜN

Ankara Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Burcu ÜNGÖR

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde çalışmanın amacı anlatılmaktadır. İkinci bölümde çalışma için gerekli ön bilgiler verilmektedir. Üçüncü bölümde genelleştirilmiş tersinirler yardımı ile sıralama bağıntıları tanımlanmakta, bu bağıntıların özellikleri incelenmekte ve söz konusu bağıntıların birbirleri ile olan ilişkileri incelenmektedir.

Haziran 2019, 58 sayfa

Anahtar Kelimeler : Genelleştirilmiş tersinirler, Grup tersinir, Drazin tersinir, Moore-Penrose tersinir, İç genelleştirilmiş tersinir, Yansıyan genelleştirilmiş tersinir, Kısmi Sıralama bağıntısı, Eksi kısmi sıralama bağıntısı, Drazin bağıntısı, Keskin kısmi sıralama bağıntısı, C-N kısmi sıralama bağıntısı, S-Eksi kısmi sıralama bağıntısı, Yıldız kısmi sıralama bağıntısı.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

GENERALIZED INVERSES AND PARTIAL ORDERS IN RING THEORY

Savcı Rahman ARGÜN

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Burcu ÜNGÖR

This thesis consists of three chapters. The first chapter is the introduction of the thesis. In the second chapter, basic concepts which are necessary for the thesis are given. In the third chapter, definitions of the order relations based on generalized inverses are given, some properties of the order relations are observed and connections between those order relations are studied.

June 2019, 58 pages

Key Words : Generalized inverses, Group inverse, Drazin inverse, Moore-Penrose inverse, Inner generalized inverse, Reflexive generalized inverse, Partial order relation, Minus partial order, Drazin partial order, Sharp partial order, C-N partial order, S-Minus partial order, Star partial order.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma, danışmanım Doç. Dr. Burcu ÜNGÖR ün destekleri ve yardımları ile ortaya çıkmıştır. Çalışma süresinde desteklerini esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU na ve üzerimde emekleri olan sayın Prof. Dr. Abdullah HARMANCI ya teşekkürlerimi sunarım. Çıktığım bu yolculukta beni yalnız bırakmadıkları için sevgili anne ve babama teşekkürlerimi sunarım.

Savcı Rahman ARGÜN

Ankara, Haziran 2019

İÇİNDEKİLER

ETİK.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	4
2.1. Temel Kavramlar	4
2.2. Genelleştirilmiş Tersler.....	5
2.3. Halkada Birimin Parçalanması.....	7
3. KISMİ SIRALAMA BAĞINTILARI.....	8
3.1. Eksi Kısmi Sıralama Bağıntısı	8
3.2. Drazin Bağıntısı.....	14
3.2.1. C-N Kısmi Sıralama Bağıntısı.....	22
3.2.2. S-Eksi Kısmi Sıralama Bağıntısı.....	25
3.3. Yıldız Sıralama Bağıntısı	30
3.3.1. Sağ-Yıldız ve Sol-Yıldız Sıralama Bağıntıları	44
4. SONUÇ	54
KAYNAKLAR.....	55
ÖZGEÇMİŞ	58

SİMGELER DİZİNİ

$B(H)$	H Hilbert uzayının sınırlı lineer operatörlerinin kümesi
$\mathcal{C}^\dagger$	$\mathcal{C}^*$ cebirinin Moore-Penrose tersinir elemanlarının kümesi
$\mathcal{N}(\mathcal{A})$	$\mathcal{A}$ halkasının üstel sıfır elemanlarının kümesi
$r_{\mathcal{A}}(a)$	a nın $\mathcal{A}$ daki sağ sıfırlayanı
$l_{\mathcal{A}}(a)$	a nın $\mathcal{A}$ daki sol sıfırlayanı
a^-	a nın genelleştirilmiş iç tersi
$a^\#$	a nın grup tersi
a^D	a nın Drazin tersi
$a^\dagger$	a nın Moore-Penrose tersi
$\{a^{(1)}\}$	a nın genelleştirilmiş iç terslerinin kümesi
$\{a^{(1,2)}\}$	a nın genelleştirilmiş yansıyan terslerinin kümesi
$\{a^\#\}$	a nın grup terslerinin kümesi
$\{a^\dagger\}$	a nın Moore-Penrose terslerinin kümesi
$i(a)$	a nın indeksi
$\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$	bileşenleri $\mathbb{F}$ cisminden gelen $n \times n$ tipindeki matrislerin kümesi
$\text{Ker } A$	Sınırlı lineer A operatörünün sıfır uzayı
$\text{Im } A$	Sınırlı lineer A operatörünün görüntü uzayı
$\overline{\text{Im } A}$	A sınırlı lineer operatörünün görüntü uzayının kapanışı
$\leq^-$	eksi kısmi sıralama bağıntısı
$\leq^\#$	keskin kısmi sıralama bağıntısı
$\leq^D$	Drazin bağıntısı
$\leq^{\#,-}$	C-N kısmi sıralama bağıntısı
$\leq^\ominus$	S -eksi kısmi sıralama bağıntısı
$\leq_*$	yıldız kısmi sıralama bağıntısı
$\leq^*$	sağ-yıldız kısmi sıralama bağıntısı
$\leq_*$	sol-yıldız kısmi sıralama bağıntısı

1. GİRİŞ

20. yüzyılın ortalarından itibaren yarı gruplar üzerinde geliştirilmiş tersinir elemanlar yardımı ile bir çok kısmi sıralama bağıntısı tanımlanmış ve bu bağıntıların özelliklerini araştıran çalışmalar yapılmıştır. Vagner (1952) ters yarı grup ve doğal kısmi sıralama bağıntısını tanımlamıştır. Bu kısmi sıralama bağıntısı $a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}$ ve $aa^{-1}a = a$ şartlarını sağlayan a^{-1} elemanı a nın geliştirilmiş tersi olmak üzere

$$a \leq b \Leftrightarrow a^{-1}a = a^{-1}b$$

şeklinde tanımlanmıştır. Daha sonra Clifford ve Preston (1961) ve Lyapın (1960) keyfi yarı grupların eşkare elemanlarının kümesi üzerinde

$$e \leq f \Leftrightarrow e = ef = fe$$

kısmi sıralama bağıntısını tanımlamıştır. Bu bağıntının daha geniş elemanların kümesi üzerine nasıl genişletileceği sorusu doğal olarak ortaya çıkmıştır. Bu soruyu Drazin (1978) öz $*$ -yarı gruplar üzerinde ele almıştır. Bu doğrultuda

$$a \underset{*}{\leq} b \Leftrightarrow a^*a = a^*b \quad \text{ve} \quad aa^* = ba^* \quad (1.1)$$

şeklinde bir bağıntı tanımlamış ve bu bağıntıya yıldız kısmi sıralama bağıntısı adını vermiştir. Bu bağıntı Moore-Penrose tersinir elemanların kümesi üzerinde $a^\dagger$ elemanı a elemanının Moore-Penrose tersi olmak üzere

$$a \leq b \Leftrightarrow a^\dagger a = a^\dagger b \quad \text{ve} \quad aa^\dagger = ba^\dagger \quad (1.2)$$

bağıntısına denktir. Hartwig (1980) ve Nambooripad (1980) birbirlerinden bağımsız olarak yarı gruplar üzerinde a^- elemanı $aa^-a = a$ şartını sağlamak üzere

$$a \leq b \Leftrightarrow a^-a = a^-b \quad \text{ve} \quad aa^- = ba^- \quad (1.3)$$

bağıntısını tanımlamışlardır. Bu bağıntının düzenli yarı gruplar üzerinde kısmi sıralama bağıntısı olduğu ispatlanmış ve bağıntı eksi kısmi sıralama bağıntısı olarak adlandırılmıştır. Daha sonra Mitsch (1986) $x, y \in S^{(1)}$ olmak üzere

$$a \leq b \Leftrightarrow xb = xa = a = ay = by$$

bağıntısını tanımlayarak eksi kısmi sıralama bağıntısını keyfi yarı gruplar üzerine genelleştir-miştir. Burada $\mathcal{S}^{(1)}$ birimli bir yarı grubu ifade etmektedir. Bu bağıntı $\mathcal{S}$ yarı grubunun düzenli olması durumunda Hartwig ve Nambooripad'ın tanımladığı eksi kısmi sıralama bağıntısına denktir.

Yarı gruplar üzerindeki kısmi sıralama bağıntıları ile ilgili çalışmalar matris kümeleri üzerinde kısmi sıralama bağıntılarının çıkmasının altında yatan fikirdir. Bu sayede kompleks matrislerin kümesi üzerinde eksi, keskin sıralama bağıntıları ortaya çıkmıştır. Bu bağıntılar orijinal olarak yarı gruplar üzerinde tanımlanmış olmasına rağmen çoğunluk ile matrisler üzerindeki karşılıkları çalışılmıştır. Mitra (1987) grup tersinir eleman yardımı ile indeksi 1 olan kare matrislerin kümesi üzerinde keskin kısmi sıralama bağıntısını $A^\#$ matrisi A matrisinin grup tersi olmak üzere

$$A \leq B \Leftrightarrow AA^\# = BA^\# \text{ ve } A^\#A = A^\#B \quad (1.4)$$

şeklinde tanımlamıştır. Semrl (2010) tarafından eksi kısmi sıralama bağıntısı matris teorisinden sonra Hilbert uzaylarının sınırlı lineer operatörlerinin cebiri üzerinde de çalışılmıştır.

Drazin (1978)

$$ba = ab, \quad b = ab^2 \quad \text{ve} \quad a^k = a^{k+1}b \quad (1.5)$$

şartlarını sağlayan $b \in \mathcal{S}$ elemanına a nın Drazin tersi diyerek yarı gruplar üzerinde yeni bir genelleştirilmiş tersinir eleman kavramı tanımlamıştır. Ayrıca Drazin tersinir eleman yardımı ile Drazin bağıntısını tanımlamıştır. Bu bağıntının bir cisim üzerinde kurulmuş kare matrislerin kümesi üzerindeki karşılığının özelliklerini Mitra, Bhimasankaram ve Malik (2010) da incelemiştir. Sonlu Markov zincirleri (Campbell 2009), singular diferansiyel ve fark deklemleri (Campbell ve Meyer 2009), kriptografi (Hartwig ve Levine 1981), nümerik analizde İterative Metodlar (Miller ve Neumann 1987), Drazin tersinir elemanın uygulamalarından bazılarıdır.

Aşıkarak olarak her halka çarpma işlemine göre bir yarı gruptur. Ayrıca halkalar üzerinde genelleştirilmiş tersinir elemanlardan söz edilebilir. Önemli bir cebirsel yapı olan halkalar üzerinde de çarpma işlemi göz önünde bulundurarak bu halkaların yapısını ve özelliklerini ortaya çıkarmak amacı ile genelleştirilmiş tersinir elemanlar

ve onlar aracılığı ile ortaya çıkan kısmi sıralama bağıntıları mevcuttur. Son yıllarda bu doğrultuda halkalar üzerinde önemli düzeyde bir çok çalışma yapılmıştır. Marovt (2018) çalışmasında Mitra (1987)'nin çalışmasından faydalanarak halkalar üzerin-de C-N kısmi sıralama bağıntısını ve S-Eksi sıralama bağıntılarını tanımlamıştır. Hilbert uzayının sınırlı lineer operatörlerinin üzerinde tanımlanmış olan yıldız, sol-yıldız, sağ-yıldız sıralama bağıntılarını Marovt, Rakić ve Djordjević (2015) *-halkalar üzerine taşımışlardır. Ayrıca Marovt, Rakić ve Djordjević, Baksalary ve Mitra (1991) ve Liu, Benitez ve Zhong (2010)'un çalışmalarından yararlanarak C birimli C^* cebiri ve C cebirinin Moore-Penrose tersinir elemanlarının kümesi $\mathcal{C}^\dagger$ ve $a \in C$, $a_l^\pi = 1 - a^\dagger a$ ve $a_r^\pi = 1 - aa^\dagger$ olmak üzere a_r^π, a_l^π kendine eş, eşkare elemanları yardımı ile sol-yıldız ve sağ-yıldız sıralama bağıntılarının farklı bir karakterizasyonunu vermişlerdir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde genelleştirilmiş terslerin halka teorisindeki tanımları ve tez içerisinde kullanılacak temel tanım, kavram, gösterim ve özellikler verilmektedir.

2.1 Temel Kavramlar

Bu kısımda tezin ilerleyen bölümlerinde yardımcı olacak temel kavram ve tanımlar verilmektedir.

Tanım 2.1.1. $\mathcal{A}$ bir halka olsun. $a \in \mathcal{A}$ elemanı için $axa = a$ olacak şekilde $x \in \mathcal{A}$ elemanı varsa a ya *von Neumann düzenli* eleman (*von Neumann regular element*) denir. Eğer $\mathcal{A}$ halkasının her elemanı düzenli ise $\mathcal{A}$ halkasına düzenli halka denir.

Tanım 2.1.2. $\mathcal{A}$ bir halka olsun. $a \in \mathcal{A}$ olmak üzere $xa = 0$ şartını sağlayan $x \in \mathcal{A}$ elemanına a nın $\mathcal{A}$ halkası içindeki *sol sıfırlayanı* (*left annihilator*) denir ve a nın $\mathcal{A}$ halkası içindeki sol sıfırlayanları $l_{\mathcal{A}}(a) = \{x \in \mathcal{A} : xa = 0\}$ kümesi ile temsil edilir.

Tanım 2.1.3. $\mathcal{A}$ bir halka olsun. $a \in \mathcal{A}$ olmak üzere $ax = 0$ şartını sağlayan $x \in \mathcal{A}$ elemanına a nın $\mathcal{A}$ halkası içindeki *sağ sıfırlayanı* (*right annihilator*) denir ve a nın $\mathcal{A}$ halkası içindeki sağ sıfırlayanları $r_{\mathcal{A}}(a) = \{x \in \mathcal{A} : ax = 0\}$ kümesi ile temsil edilir.

Tanım 2.1.4. $\mathcal{A}$ bir halka olsun. $e \in \mathcal{A}$ için $e^2 = e$ sağlanıyor ise, e ye *eşkare* (*idempotent*) eleman denir.

Tanım 2.1.5. $\mathcal{A}$ bir halka ve $a \in \mathcal{A}$ olsun. $a^n = 0$ olacak şekilde n pozitif tamsayısı varsa a elemanına *üstel sıfır* (*nilpotent*) eleman denir. $\mathcal{A}$ halkasının üstel sıfır elemanlarının kümesi $\mathcal{N}(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} : a^n = 0 \text{ olacak şekilde } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ vardır.}\}$ biçiminde temsil edilir.

Tanım 2.1.6. $\mathcal{A}$ bir halka olsun. Her $a \in \mathcal{A}$ elemanı için $l_{\mathcal{A}}(a) = \mathcal{A}q$ ve $r_{\mathcal{A}}(a) = p\mathcal{A}$ olacak şekilde $p, q \in \mathcal{A}$ eşkare elemanları mevcut ise $\mathcal{A}$ ya *Rickart halka* (*Rickart ring*) denir.

Tanım 2.1.7. $\mathcal{A}$ bir halka olsun. $\mathcal{A}$ halkası üzerinde tanımlı, her $a, b \in \mathcal{A}$ elemanları için

$$(a^*)^* = a, \quad (ab)^* = b^*a^*, \quad (a + b)^* = a^* + b^*$$

şartlarını sağlayan birebir $a \mapsto a^*$ dönüşümüne *involüsyon* (*involution*) adı verilir.

Üzerinde involüsyon tanımlanabilen halkaya **-halka* adı verilir.

Tanım 2.1.8. $\mathcal{A}$ bir *-halka olsun. $a \in \mathcal{A}$ elemanı $a^* = a$ şartını sağlıyor ise a elemanına *kendine eş* (*self-adjoint*) eleman denir.

Tanım 2.1.9. $\mathcal{A}$ bir *-halka olsun. $a \in \mathcal{A}$ elemanı $a^*a = aa^*$ şartını sağlıyor ise a elemanına *normal* eleman denir.

Tanım 2.1.10. $\mathcal{A}$ bir *-halka olsun. Her $a \in \mathcal{A}$ elemanı için $aa^* = 0$ olması $a = 0$ olmasını gerektiriyor ise $\mathcal{A}$ ya *öz *-halka* (*proper *-ring*) denir.

Tanım 2.1.11. $\mathcal{A}$ bir *-halka olsun. Her $a \in \mathcal{A}$ elemanı için $l_{\mathcal{A}}(a) = \mathcal{A}e$ olacak şekilde $e = e^* = e^2$ şartlarını sağlayan $e \in \mathcal{A}$ varsa $\mathcal{A}$ ya *Rickart *-halka* (*Rickart *-ring*) adı verilir.

Ayrıca $\mathcal{A}$ Rickart *-halka ise *öz *-halkadır*.

Tanım 2.1.12. $\mathcal{A}$ bir Rickart *-halka olsun. $\omega \in \mathcal{A}$ elemanı için $\omega\omega^*\omega = \omega$ oluyor ise ω ya *kısmi izometri* (*partial isometry*) denir.

Tanım 2.1.13. Bir $\mathcal{A}$ öz *-halkasının her elemanı düzenli ise $\mathcal{A}$ halkasına *düzenli *-halka* (*regular *-ring*) denir.

2.2 Genelleştirilmiş Tersler

Bu bölümde genelleştirilmiş terslerin halkalar üzerindeki tanımları verilecektir.

Tanım 2.2.1. $\mathcal{A}$ bir halka ve $a \in \mathcal{A}$ olsun. $axa = a$ denkleminin çözümü olan $x \in \mathcal{A}$ elemanına a nın *genelleştirilmiş iç tersi* (*generalized inner inverse*) denir.

Bir $\mathcal{A}$ halkasında $a \in \mathcal{A}$ elemanın genelleştirilmiş iç tersi tek olmak zorunda değildir. $\{a^{(1)}\} = \{x \in \mathcal{A} : axa = a\}$ kümesi $a \in \mathcal{A}$ elemanın genelleştirilmiş iç terslerinin kümesidir.

Tanım 2.2.2. $\mathcal{A}$ bir halka ve $a \in \mathcal{A}$ olsun. $axa = a$ ve $xax = x$ denklemlerinin ortak çözümü olan $x \in \mathcal{A}$ elemanına a nın *genelleştirilmiş yansıyan tersi* (*generalized reflexive inverse*) denir.

$\{a^{(1,2)}\} = \{x \in \mathcal{A} : axa = a, xax = x\}$ kümesi $a \in \mathcal{A}$ elemanın genelleştirilmiş yansıyan terslerinin kümesidir.

Lemma 2.2.3. $\mathcal{A}$ bir halka ve $a \in \mathcal{A}$ olsun. Eğer a elemanın $\mathcal{A}$ halkası içinde genelleştirilmiş iç tersi mevcut ise a nın genelleştirilmiş yansıyan tersi vardır.

İspat: $x \in \{a^{(1)}\}$ olsun. $y = xax$ olmak üzere

$$aya = axaxa = a \quad \text{ve} \quad yay = xaxaxa = xax = y \quad (2.6)$$

eşitlikleri vardır. Dolayısı ile $y \in \{a^{(1,2)}\}$ dir.

Tanım 2.2.4. $\mathcal{A}$ bir halka ve $a \in \mathcal{A}$ olsun.

$$axa = a, \quad xax = x, \quad ax = xa \quad (2.7)$$

şartlarını sağlayan $x \in \mathcal{A}$ elemanına a nın *grup tersi* (*group inverse*) denir.

$\{a^\sharp\} = \{x \in \mathcal{A} : axa = a, xax = x, ax = xa\}$ kümesi $a \in \mathcal{A}$ elemanın grup terslerinin kümesidir.

Tanım 2.2.5. $\mathcal{A}$ birimli bir $*$ -halka ve $a \in \mathcal{A}$ olsun.

$$axa = a, \quad xax = x, \quad (ax)^* = ax, \quad (xa)^* = xa \quad (2.8)$$

şartlarını sağlayan $x \in \mathcal{A}$ elemanına a nın *Moore-Penrose tersi* (*Moore-Penrose inverse*) denir.

$\{a^\dagger\} = \{x \in \mathcal{A} : axa = a, xax = x, (ax)^* = ax, (xa)^* = xa\}$ kümesi $a \in \mathcal{A}$ elemanın Moore-Penrose terslerinin kümesidir.

Tanım 2.2.6. $\mathcal{A}$ birimli bir halka, $a \in \mathcal{A}$ olsun.

$$ab = ba, \quad b = ab^2, \quad \text{ve} \quad a - a^2b \in \mathcal{N}(\mathcal{A}) \quad (2.9)$$

olacak şekilde $b \in \mathcal{A}$ elemanına a nın *Drazin tersi* (*Drazin inverse*) denir (Koliha 1996).

Uyarı 2.2.7. $a^k = a^{k+1}b$ şartını sağlayan en küçük negatif olmayan k tamsayısına a nın indeksi denir ve $i(a)$ ile gösterilir. Bir a elemanı Drazin tersinir ise a nın Drazin tersi tektir. Ayrıca $a \in \mathcal{A}$ elemanının indeksi $a - a^2b$ nin öz üstel sıfırlık indeksine eşittir. Eğer $i(a) \leq 1$ ise a nın Drazin tersi, grup tersi olarak bilinir (Koliha 1996). Grup tersi, Drazin tersinin özel bir halidir.

2.3 Halkada Birimin Parçalanması

Tanım 2.3.1. $\mathcal{A}$ birimli bir halka, $e_1, e_2, \dots, e_n$ elemanları $\mathcal{A}$ halkası içinde eşkare ve $i \neq j$ için $e_i e_j = 0$ oluyor ise $1 = e_1 + e_2 + \dots + e_n$ eşitliğine $\mathcal{A}$ halkasının biriminin bir parçalanması denir.

Uyarı 2.3.2. $1 = e_1 + e_2 + \dots + e_n$ ve $1 = f_1 + f_2 + \dots + f_n$, $\mathcal{A}$ halkasının biriminin iki farklı parçalanması olsun. Bu durumda

$$x = 1 \cdot x \cdot 1 = (e_1 + e_2 + \dots + e_n)x(f_1 + f_2 + \dots + f_n) = \sum_{i,j=1}^n e_i x f_j$$

olur. Dolayısı ile her $x \in \mathcal{A}$ elemanı özel olarak $x_{ij} = e_i x f_j \in e_i \mathcal{A} f_j$ olmak üzere aşağıdaki matris ile temsil edilebilir:

$$\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}_{e \times f}$$

Eğer $x = [x_{ij}]_{e \times f}$ ve $y = [y_{ij}]_{e \times f}$ ise $x + y = [x_{ij} + y_{ij}]_{e \times f}$ olur. Ayrıca $1 = g_1 + g_2 + \dots + g_n$, $\mathcal{A}$ halkasının biriminin bir parçalanması ve $z = [z_{ij}]_{f \times e}$ ise eşkare elemanlar ortogonal olduğundan, $xz = [\sum_{k=1}^n x_{ik} z_{kj}]_{e \times e}$ elde edilir. Dolayısı ile $\mathcal{A}$ halkası üzerindeki cebirsel işlemler $n \times n$ tipindeki matrisler üzerindeki işlemlere dönüşür.

3. KİSMİ SIRALAMA BAĞINTILARI

3.1 Eksi Kısmi Sıralama Bağıntısı

Bu kısımda eksi kısmi sıralama bağıntısının (*minus partial order*) halkalar üzerindeki tanımından bahsedilecektir. Ayrıca eksi kısmi sıralama bağıntısının özellikleri ve karakterizasyonları incelenecektir.

Tanım 3.1.1. $\mathcal{S}$ bir yarı grup, $a, b \in \mathcal{S}$ ve $a^{(1)} \in \mathcal{S}$, a nın genelleştirilmiş iç tersi olsun. Eğer $aa^{(1)} = ba^{(1)}$ ve $a^{(1)}a = a^{(1)}b$ şartları sağlanıyor ise $a \leq^- b$ dir (Hartwig 1980). Bu bağıntıya *eksi sıralama bağıntısı* (*minus partial order*) adı verilir.

Tanım 3.1.2. $\mathcal{A}$ bir düzenli halka ve $a, b \in \mathcal{A}$ olsun . $aa^- = ba^-$ ve $a^-a = a^-b$ olacak şekilde $a^- \in \{a^{(1)}\}$ elemanı varsa $a \leq^- b$ dir (Hartwig 1980).

Teorem 3.1.3. $\mathcal{A}$ bir halka ve $a, b \in \mathcal{A}$ düzenli elemanlar olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) $a \leq^- b$,
- (2) Her $b^- \in \{b^{(1)}\}$ için $a = ab^-b = bb^-a = ab^-a$ eşitlikleri sağlanır (Hartwig 1980).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) : $a \leq^- b$ olsun. O zaman $aa^- = ba^-$ ve $a^-a = a^-b$ olacak şekilde $a^- \in \{a^{(1)}\}$ elemanı vardır. Her $b^- \in \{b^{(1)}\}$ elemanı için

$$\begin{aligned} ab^-a &= aa^-ab^-aa^-a = aa^-bb^-ba^-a = aa^-ba^-a = aa^-aa^-a = a, \\ ab^-b &= aa^-ab^-b = aa^-bb^-b = aa^-b = aa^-a = a, \\ bb^-a &= bb^-aa^-a = bb^-ba^-a = ba^-a = aa^-a = a \end{aligned} \tag{3.10}$$

olur.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Her $b^- \in \{b^{(1)}\}$ için $a = ab^-b = bb^-a = ab^-a$ eşitlikleri sağlansın. $x = b^-ab^-$ olsun. $axa = ab^-ab^-a = a$ olduğundan $x \in \{a^{(1)}\}$ dır. Ayrıca

$$\begin{aligned} ax &= ab^-ab^- = ab^- = bb^-ab^- = bx, \\ xa &= b^-ab^-a = b^-a = b^-ab^-b = xb \end{aligned} \tag{3.11}$$

olur. Dolayısı ile $a \leq^- b$ dir.

Lemma 3.1.4. $a \leq^- b$ olsun. Her $b^- \in \{b^{(1)}\}$ için

$$a^-a = a^-b = b^-a \quad \text{ve} \quad aa^- = ba^- = ab^- \quad (3.12)$$

olacak şekilde $a^- \in \{a^{(1)}\}$ elemanı vardır (Hartwig 1980).

İspat: $a \leq^- b$ olsun. Teorem 3.1.3 gereğince keyfi bir $b^- \in \{b^{(1)}\}$ elemanı için $a = ab^-b = bb^-a = ab^-a$ eşitlikleri sağlanır. $x = b^-ba^-bb^-$ olsun. $axa = ab^-ba^-bb^-a = aa^-a = a$ olduğundan $x \in \{a^{(1)}\}$ dır. Böylece

$$ax = ab^-ba^-bb^- = aa^-bb^- = ab^-$$

$$bx = bb^-ba^-bb^- = ba^-bb^- = ab^-$$

ve

$$xa = b^-ba^-bb^-a = b^-ba^-a = b^-a$$

$$xb = b^-ba^-bb^-b = b^-ba^-b = b^-a$$

olur.

Teorem 3.1.5. Tanım 3.1.2 de verilen bağıntı kısmi sıralama bağıntısıdır (Hartwig 1980).

İspat: Yansıma: $\mathcal{A}$ düzenli halka olduğundan her $a \in \mathcal{A}$ için $a = aa^-a$ olacak şekilde $a^- \in \mathcal{A}$ elemanı vardır. Dolayısı ile $a \leq^- a$ dır.

Ters Simetri: $a \leq^- b$ ve $b \leq^- a$ olacak biçimde $a, b \in \mathcal{A}$ olsun. O zaman $a = aa^-a = ba^-a = ab^-ba^-a = ab^-aa^-a = ab^-a = bb^-b = b$ olur.

Geçişme: $a \leq^- b$ ve $b \leq^- c$ olacak biçimde $a, b, c \in \mathcal{A}$ olsun. O zaman $b^-b = b^-c$ ve $bb^- = cb^-$ olacak şekilde $b^- \in \{b^{(1)}\}$ elemanı vardır. $x = a^-aa^-$ olmak üzere $axa = aa^-aa^-a = a$ olduğundan $x \in \{a^{(1)}\}$ dir. $a \leq^- b$ olduğundan Lemma 3.1.4 ve Teorem 3.1.3 gereğince

$$xc = (a^-aa^-)c = a^-a(b^-c) = a^-ab^-b = a^-a = a^-aa^-a = xa$$

ve

$$cx = c(a^-aa^-) = (cb^-)aa^- = bb^-aa^- = aa^- = aa^-aa^- = ax$$

olur. Dolayısı ile $a \leq^- c$ dir.

Teorem 3.1.6. $\mathcal{A}$ düzenli bir halka ve $b \in \mathcal{A}$ olsun. $a \leq^- b$ olması için gerek ve yeter şart her $b^- \in \{b^{(1)}\}$ elemanı için $aa^- \leq^- bb^-$, $a^-a \leq^- b^-b$ ve $ba^-b = a = ab^-a$ olacak şekilde $a^- \in \{a^{(1)}\}$ elemanının var olmasıdır (Hartwig 1980).

İspat: $a \leq^- b$ olsun. O zaman $aa^- = ba^-$ ve $a^-a = a^-b$ olacak şekilde $a^- \in \{a^{(1)}\}$ elemanı vardır. Ayrıca Teorem 3.1.3 gereğince her $b^- \in \{b^{(1)}\}$ elemanı için $a = ab^-a = bb^-a = ab^-b$ eşitlikleri sağlanır.

Teorem 3.1.7. $\mathcal{A}$ bir halka ve $a, b \in \mathcal{A}$ elemanları düzenli olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) $a \leq^- b$,
- (2) $1 = e_1 + e_2 + e_3$ ve $1 = f_1 + f_2 + f_3$ eşitlikleri $\mathcal{A}$ halkasının biriminin iki farklı parçalanması olmak üzere $a, b \in \mathcal{A}$ elemanları aşağıdaki matris formlarına sahiptir.

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times f}, \quad b = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b - a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times f} \quad (3.13)$$

(Rakić ve Djordjević 2015).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) : $a \leq^- b$ olsun. O zaman $h \in \{b^{(1)}\}$ için Teorem 3.1.3 gereğince

$$e_1 = ah, \quad e_2 = (b - a)h, \quad e_3 = 1 - bh$$

ve

$$f_1 = ha, \quad f_2 = h(b - a), \quad f_3 = 1 - hb$$

eşitlikleri $\mathcal{A}$ halkasının biriminin iki farklı parçalanmasını verir. Bu durumda

$$e_1af_1 = ahaha = a \quad \text{ve} \quad e_1af_1 + e_2bf_2 = a + (b - a)hbh(b - a) = b \quad (3.14)$$

olduğundan a ve b elemanları (3.13) matris formlarına sahiplerdir.

(2) $\Rightarrow$ (1) : $1 = e_1 + e_2 + e_3$ ve $1 = f_1 + f_2 + f_3$ eşitlikleri $\mathcal{A}$ halkasının biriminin iki

farklı parçalanması olsun. $g \in \{a^{(1)}\}$ olmak üzere $x = f_1 g e_1$ olsun. $axa = af_1 g e_1 a = e_1 a f_1 f_1 g e_1 e_1 a f_1 = e_1 a f_1 g e_1 a f_1 = aga = a$ olur. Dolayısı ile $x \in \{a^{(1)}\}$ dir. Ayrıca

$$bx = [e_1 a f_1 + e_2(b - a)f_2]f_1 g e_1 = e_1 a f_1 f_1 g e_1 = ax$$

ve

$$xb = f_1 g e_1 [e_1 a f_1 + e_2(b - a)f_2] = f_1 g e_1 e_1 a f_1 = xa$$

eşitlikleri sağlandığından $a \leq^- b$ dir.

Teorem 3.1.8. $\mathcal{A}$ bir düzenli halka ve $a, b, c, d \in \mathcal{A}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- (1) Her $a \in \mathcal{A}$ için $0 \leq^- a$ dir.
- (2) $a \leq^- b$ ve $b^2 = 0$ ise $a^2 = 0$ dir.
- (3) $a \leq^- b$ ve $b\mathcal{A} \subseteq a\mathcal{A}$ ise $a = b$ dir.
- (4) $a \leq^- ad$ ise $a = ad$ dir.
- (5) $a \leq^- ca$ ise $a = ca$ dir.
- (6) $a^2 = a$ olması için gerek ve yeter şart $aa^- \leq^- a$ olacak şekilde $a^- \in \{a^{(1)}\}$ elemanının var olmasıdır.
- (7) $a^3 = a$ olması için gerek ve yeter şart $a \leq^- a^-$ olacak şekilde $a^- \in \{a^{(1)}\}$ elemanının var olmasıdır (Hartwig 1980).

İspat: (1) : Açıktır.

(2) : $a \leq^- b$ ve $b^2 = 0$ olsun. O zaman $aa^- = ba^-$ ve $a^-a = a^-b$ olacak şekilde $a^- \in \{a^{(1)}\}$ elemanı vardır. Bu durumda $a^2 = (aa^-b)^2 = aa^-baa^-b = aa^-bba^-b = aa^-b^2a^-b = 0$ olur.

(3) : $a \leq^- b$ ve $b\mathcal{A} \subseteq a\mathcal{A}$ olsun. O zaman $aa^- = ba^-$ ve $a^-a = a^-b$ olacak şekilde $a^- \in \{a^{(1)}\}$ elemanı vardır. $a\mathcal{A} \subseteq b\mathcal{A}$ olduğundan $b = ax$ olacak şekilde $x \in \mathcal{A}$ vardır. Bu durumda

$$a = aa^-a = aa^-b = aa^-ax = ax = b$$

olur.

(4) : $a \leq^- ad$ olsun. O zaman $aa^- = ada^-$ ve $a^-a = a^-ad$ olacak şekilde $a^- \in \{a^{(1)}\}$ elemanı vardır. Bu durumda $a = aa^-a = aa^-ad = ad$ olur.

(5) : (4) ifadesine benzer şekilde gösterilir.

(6) : $\Rightarrow: a^2 = a$ olsun. O zaman $a^- = a$ seçilirse $aa^-a = aaa = a^2a = a^2 = a$ olup $a^- = a \in \{a^{(1)}\}$ olur. Ayrıca

$$aa^- = aaa = aa^-a^-$$

ve

$$a^-a = aaa = a^-a^-a$$

olduğundan $aa^- \leq^- a$ olur.

$\Leftarrow: aa^- \leq^- a$ olsun. O zaman $aa^-x = ax$ ve $xaa^- = xa$ olacak şekilde $x \in \{a^{(1)}\}$ elemanı vardır. Bu durumda

$$xaa^- = xa \Rightarrow axaa^- = axa = a \Rightarrow aa^- = a \Rightarrow a = a^2.$$

olur.

(7) : $\Rightarrow: a^3 = a$ olsun. $a^- = a$ seçilsin. $aa^-a = a^3 = a$ olduğundan $a \in \{a^{(1)}\}$ dir. $\leq^-$ bağıntısı kısmi sıralama bağıntısı olduğundan her $a \in \mathcal{A}$ elemanı için $a \leq^- a$ dir. Dolayısı ile $a \leq^- a^-$ olur.

$\Leftarrow: a \leq^- a^-$ olsun. Lemma 3.1.4 deki eşitliklerde $b = a^-$ seçimi yapılır ise $a^-a = a^2$ eşitliği elde edilir. Eşitliğin iki tarafı da soldan a ile çarpılırsa $a = a^3$ olur.

Tanım 3.1.9. $\mathcal{A}$ birimli bir halka ve $a, b \in \mathcal{A}$ olsun.

$$(1) \quad l_{\mathcal{A}}(a) = \mathcal{A}(1 - p),$$

$$(2) \quad r_{\mathcal{A}}(a) = (1 - q)\mathcal{A},$$

$$(3) \quad pa = pb,$$

$$(4) \quad aq = bq$$

şartlarını sağlayacak şekilde $p, q \in \mathcal{A}$ eşkare elemanları varsa $a \leq b$ dir (Marovt, Rakić ve Djodjevic 2013).

Teorem 3.1.10. Düzenli birimli halkalar üzerinde Tanım 3.1.2 ve Tanım 3.1.9 birbirlerine denktir.

İspat: $a \leq^- b$ olsun. O zaman $a^-a = a^-b$ ve $aa^- = ba^-$ olacak şekilde $a^- \in \{a^{(1)}\}$ elemanı vardır. $p = aa^-$ ve $q = a^-a$ olsun. $p^2 = aa^-aa^- = aa^- = p$ ve $q^2 = a^-aa^-a = a^-a = q$ olduğundan $p, q \in \mathcal{A}$ elemanları eşkaredir. $pa = aa^-a = aa^-b = pb$ ve $aq = aa^-a = ba^-a = bq$ olur. $x \in l_{\mathcal{A}}(a)$ olsun. O zaman $xa = 0$ dır. Bu durumda $x - xaa^- = x(1 - aa^-) = x(1 - p) = x$ olduğundan $x \in \mathcal{A}(1 - p)$ olur. Dolayısı ile $l_{\mathcal{A}}(a) \subseteq \mathcal{A}(1 - p)$ elde edilir.

Diğer taraftan $x(1 - p) \in \mathcal{A}(1 - p)$ olsun. $x(1 - p)a = xa - xpa = xa - xaa^-a = xa - xa = 0$ ve $x(1 - p) \in l_{\mathcal{A}}(a)$ olur. Dolayısı ile $\mathcal{A}(1 - p) \subseteq l_{\mathcal{A}}(a)$ elde edilir. Sonuç olarak $l_{\mathcal{A}}(a) = \mathcal{A}(1 - p)$ olur. Benzer şekilde $r_{\mathcal{A}}(a) = (1 - q)\mathcal{A}$ eşitliği elde edilir.

Karşıt olarak $p, q \in \mathcal{A}$ eşkare elemanları için Tanım 3.1.9 sağlansın. $\mathcal{A}$ halkası düzenli olduğundan $axa = a$ olacak şekilde $x \in \mathcal{A}$ elemanı mevcuttur. $y = pxq$ olsun. $aya = apxqa = axa = a$ olduğundan $y \in \{a^{(1)}\}$ dir. Ayrıca

$$ay = apxq = bpxq = by$$

ve

$$ya = pxqa = pxqb = yb$$

eşitlikleri sağlanır. Dolayısı ile $a \leq^- b$ dir.

Teorem 3.1.11. $\mathcal{A}$ birimli bir halka ve $a, b \in \mathcal{A}$ olsun. Eğer $b^2 = b$ ve $a \leq^- b$ ise $a^2 = a$ olur (Marovt, Rakić ve Djodjevic 2013).

İspat: $b^2 = b$ ve $a \leq^- b$ olsun. O zaman $a = pb = bq$ olacak şekilde $p, q \in \mathcal{A}$ eşkare elemanları mevcuttur. Bu durumda

$$a = bq = b^2q = ba$$

olur. Dolayısı ile $1 - b \in l_{\mathcal{A}}(a) = l_{\mathcal{A}}(p)$ olup $p = bp$ elde edilir. $p = p^2 = pbp = ap$ olduğundan

$$a = pa = apa = aa = a^2$$

sonucuna ulaşılır.

3.2 Drazin Bağıntısı

Tanım 3.2.1. $\mathcal{A}$ birimli bir halka ve $a \in \mathcal{A}$ elemanı grup tersinir olsun. $aa^\# = ba^\#$ ve $a^\#a = a^\#b$ olacak şekilde $a^\# \in \{a^\#\}$ elemanı varsa $a \leq^\# b$ denir. Bu bağıntıya *keskin kısmi sıralama bağıntısı* (*sharp partial order*) adı verilir (Rakić 2015).

Teorem 3.2.2. $\mathcal{A}$ birimli bir halka, $a \in \mathcal{A}$ elemanı grup tersinir ve $b \in \mathcal{A}$ olsun. Eğer $a \leq^\# b$ ise $a \leq^- b$ dir (Marovt 2018).

İspat: $a \leq^\# b$ olsun. O zaman $aa^\# = ba^\#$ ve $a^\#a = a^\#b$ olacak şekilde $a^\# \in \{a^\#\}$ elemanı vardır. $a^\#$ elemanı a elemanının grup tersi olduğundan $aa^\#a = a$ şartını sağlar. Dolayısı ile $a^\# \in \{a^-\}$ dir. Tanım 3.1.2 gereğince $a \leq^- b$ dir.

Uyarı 3.2.3. $a \in \mathcal{A}$ Drazin tersinir eleman olsun. Bu durumda a elemanı $c \in \mathcal{A}$ grup tersinir eleman, $n \in \mathcal{A}$ üstel sıfırlık indeksi $i(a)$ ya eşit olan bir üstel sıfır eleman ve $cn = nc = 0$ olmak üzere

$$a = c + n$$

şeklinde yazılır (Rakočević 1999). Burada c grup tersinir elemanına a nın çekirdek kısmı ve n elemanına a nın üstel sıfır kısmı denir. $c^\#cc^\# = c^\#$ olduğundan $c^\#n = nc^\# = 0$ olup $c^\#ac^\# = c^\#$, $ac^\# = c^\#a$ ve $a - a^2c^\# = n$ sonucuna varılır. Dolayısıyla $a^D = c^\#$ olur. $\mathcal{A}$ da bir elemanın Drazin tersinin (varsa) tekliğinden c ve n tektir. Özellikle

$$c = a^2a^D, \quad n = a - a^2a^D$$

dir. $c + n$ elemanı a nın çekirdek üstel sıfır parçalanması olarak adlandırılır.

Uyarı 3.2.4. Bu bölümde aksi belirtilmediği sürece $\mathcal{A}$ birimli halka olarak alınacaktır.

Tanım 3.2.5. $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ olsun. A_1 ve B_1 sırası ile A ve B matrislerinin çekirdek kısmı olmak üzere $A_1 \leq^\# B_1$ olur ise $A \leq^D B$ denir. Bu bağıntıya *Drazin bağıntısı* (*Drazin order*) adı verilir (Mitra, Bhimasankaram ve Malik 2010).

Uyarı 3.2.6. $\leq^D$ bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısı değildir. Bağıntı elemanların üstel sıfır kısımlarını yok saydığı için bağıntı ters simetri özelliğini sağlamaz.

Tanım 3.2.7. $\mathcal{A}$ bir halka ve $a, b \in \mathcal{A}$ elemanları Drazin tersinir olsun. Sırası ile $a = c_a + n_a$ ve $b = c_b + n_b$, a ile b elemanlarının çekirdek üstel sıfır parçalanmaları olmak üzere, eğer $c_a \leq^\# c_b$ ise $a \leq^D b$ denir (Marovt 2018).

Bu bağıntı elemanların üstel sıfır kısımlarını yok saydığından ters simetri özelliğini sağlamaz, dolayısı ile kısmi sıralama bağıntısı değildir.

Uyarı 3.2.8. $a, b \in \mathcal{A}$ elemanları Drazin tersinir ve c_a ile c_b sırası ile a ve b elemanlarının çekirdek kısımları olsun. Bu durumda $c_a \leq^\# c_b$ ise $a \leq^D b$ dir. Dolayısı ile

$$a \leq^D b \Leftrightarrow a^D \leq^\# b^D \quad \text{dir.}$$

Lemma 3.2.9. $\mathcal{A}$ bir halka olsun. Her $c \in \mathcal{A}$ grup tersinir elemanı için

$$l_{\mathcal{A}}(c) = l_{\mathcal{A}}(c^\#) \quad \text{ve} \quad r_{\mathcal{A}}(c) = r_{\mathcal{A}}(c^\#) \quad (3.15)$$

dir (Marovt 2018).

İspat: $x \in l_{\mathcal{A}}(c)$ olsun. O zaman

$$xc = 0 \Rightarrow xcc^\# = 0 \Rightarrow xc^\#c = 0 \Rightarrow xc^\#cc^\# = 0 \Rightarrow xc^\# = 0$$

olur. Dolayısı ile $l_{\mathcal{A}}(c) \subseteq l_{\mathcal{A}}(c^\#)$ dir.

Diğer taraftan $x \in l_{\mathcal{A}}(c^\#)$ olsun. O zaman

$$xc^\# = 0 \Rightarrow xc^\#c = 0 \Rightarrow xcc^\# = 0 \Rightarrow xcc^\#c = 0 \Rightarrow xc = 0$$

olur. Dolayısı ile $l_{\mathcal{A}}(c^\#) \subseteq l_{\mathcal{A}}(c)$ dir. Sonuç olarak $l_{\mathcal{A}}(c) = l_{\mathcal{A}}(c^\#)$ dir.

Benzer şekilde $r_{\mathcal{A}}(c) = r_{\mathcal{A}}(c^\#)$ eşitliği gösterilebilir.

Teorem 3.2.10. $\mathcal{A}$ bir halka ve $a, b \in \mathcal{A}$ elemanları Drazin tersinir olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

$$(1) \quad a \leq^D b,$$

$$(2) \quad aa^D = ba^D = a^Db = a^Da,$$

- (3) a elemanın üstel sıfır kısmı $n_a = c_3 + c_4 + c_5 + c_6$, c_2 grup tersinir eleman ve n_2 üstel sıfır olmak üzere a ve b elemanlarının

$$a = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & c_4 \\ 0 & c_5 & c_6 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_2 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

matris gösterimleri olacak şekilde $1 = e_1 + e_2 + e_3$ halkanın biriminin parçalanması vardır,

- (4) $k = i(a)$ olmak üzere $a^k b = b a^k = a^{k+1}$ dır,

- (5) $a^k b = b a^k = a^{k+1}$ olacak şekilde $k \leq 0$ vardır (Marovt 2018).

İspat: a ve b elemanlarının çekirdek üstel sıfır parçalanmaları sırası ile $a = c_a + n_a$, $b = c_b + n_b$ ve $p = a a^D$ olmak üzere a elemanın

$$a = \begin{bmatrix} c_a & 0 \\ 0 & n_a \end{bmatrix}_{p \times p} \quad (3.17)$$

matris gösterimi vardır. $p a^D p = a a^D a^D a a^D = a^D$ olduğundan $a^D = \begin{bmatrix} a^D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times p}$

matrisi ile ifade edilebilir. Ayrıca $a^D = c_a^\#$ olduğundan

$$a a^D = (c_a + n_a) c_a^\# = c_a c_a^\#$$

dir. Dolayısı ile

$$p = a a^D = a^D a = c_a c_a^\# = c_a^\# c_a \quad (3.18)$$

olur.

- (1) $\Rightarrow$ (2) : $a \leq^D b$ olsun. O zaman $c_a \leq^\# c_b$ olur. Dolayısı ile $c_a c_a^\# = c_b c_b^\#$ ve $c_a^\# c_a = c_b^\# c_b$ olacak şekilde $c_a^\# \in \{a^\#\}$ elemanı vardır. $c_a = c_a c_a^\# c_b = c_b c_b^\# c_a$ olduğundan $l_{\mathcal{A}}(c_b) \subseteq l_{\mathcal{A}}(c_a)$ ve $r_{\mathcal{A}}(c_b) \subseteq r_{\mathcal{A}}(c_a)$ olur. Ayrıca $c_b n_b = 0 = n_b c_b$ olduğundan

$$n_b \in l_{\mathcal{A}}(c_b) \cap r_{\mathcal{A}}(c_b) \subseteq l_{\mathcal{A}}(c_a) \cap r_{\mathcal{A}}(c_a)$$

dir. Lemma 3.2.9 gereğince $n_b c_a^\# = c_a^\# n_b$ ve (3.18) gereğince

$$a a^D = c_a c_a^\# = c_b c_a^\# + c_b c_a^\# + n_b c_a^\# = b c_a^\# = b a^D$$

olur. Benzer şekilde $a^D a = a^D b$ olduğu gösterilebilir. Ayrıca $aa^D = a^D a$ olduğundan

$$aa^D = ba^D = a^D b = a^D a$$

eşitlikleri sağlanır.

$$(2) \Rightarrow (3) : aa^D = ba^D = a^D b = a^D a \text{ ve } b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \text{ olsun.}$$

$$aa^D = \begin{bmatrix} c_a & 0 \\ 0 & n_a \end{bmatrix}_{p \times p} \begin{bmatrix} c_a^\# & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times p} = \begin{bmatrix} c_a c_a^\# & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times p} \quad (3.19)$$

ve

$$ba^D = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}_{p \times p} \begin{bmatrix} c_a^\# & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times p} = \begin{bmatrix} b_1 c_a^\# & 0 \\ b_3 c_a^\# & 0 \end{bmatrix}_{p \times p} \quad (3.20)$$

olur. Bu durumda $c_a c_a^\# = b_1 c_a^\#$ ve $b_3 c_a^\# = 0$ eşitlikleri elde edilir. Benzer şekilde $a^D b = a^D a$ eşitliğinden $c_a^\# b_1 = c_a^\# c_a$ olur. $b_3 \in (1-p)\mathcal{A}p$ ve $b_3 c_a^\# c_a = b_3 p$ olduğundan $b_3 = 0$ dır. Benzer şekilde $b_2 \in p\mathcal{A}(1-p)$ ve $c_a^\# b_2 = 0$ olduğundan $pb_2 = 0$ ve dolayısı ile $b_2 = 0$ dır. $c_a^\# c_a = c_a^\# b_1$ eşitliğinden $c_a = c_a c_a^\# b = pb_1$ olur. $b_1 \in p\mathcal{A}p$ olduğundan $b_1 = c_a$ dır. Dolayısı ile $b_4 c_a = 0 = c_a b_4$ olmak üzere b elemanının

$$b = \begin{bmatrix} c_a & 0 \\ 0 & b_4 \end{bmatrix}_{p \times p} \quad (3.21)$$

matris gösterimi vardır. Bu durumda

$$(-c_a)b = (-c_a)(c_a + b_4) = -c_a^2 = (c_a + b_4)(-c_a) = b(-c_a)$$

olur. $i(c_a) \leq 1$ olduğunda $c_a^\# = c_a^D$ olur. Ayrıca $(-c_a)^\# = -c_a^\#$ eşitliği vardır. Dolayısı ile $(-c_a)(-c_a)^D = (-c_a)(-c_a)^\# b_4 = c_a c_a^\# b_4 = c_a^\# c_a b_4 = 0$ olur. $0 \in \mathcal{A}$ elemanı Drazin tersinir eleman olduğundan $b_4 = -c_a + b$ elemanı da Drazin tersinirdir. Bu

durumda c_{b_4} , b_4 elemanının çekirdek kısmı, n_{b_4} üstel sıfır kısmı ve $q = b_4 b_4^D$ olmak üzere $b_4 = \begin{bmatrix} c_{b_4} & 0 \\ 0 & n_{b_4} \end{bmatrix}_{q \times q}$ matris gösterimi vardır. $b = c_a + b_4 = c_a + c_{b_4} + n_{b_4}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
b &= pbp + qb_4q + (1-q)b_4(1-q) \\
&= pbp + q(1-p)b(1-p)q + (1-q)(1-p)b(1-p)(1-q) \\
&= pbp + (q - qp(b)(q - pq) + (1 - q - p + qp)b(1 - p - q + pq))
\end{aligned}$$

olur. $b_4 \in (1-p)\mathcal{A}(1-p)$ olduğundan $qp = b_4b_4^Dp = b_4^Db_4p = 0$ olur. Benzer şekilde $pq = 0$ dir. Dolayısı ile $b = pbp + qbq + (1-p-q)b(1-p-q)$ elde edilir. $c_a = pbp$, $c_{b_4} = qbq$ ve $n_{b_4} = (1-q)(1-p)b(1-p)(1-q) = (1-p-q)b(1-p-q)$ olduğundan, $e_1 = p$, $e_2 = q$, $e_3 = 1 - p - q$ olmak üzere b elemanının

$$b = \begin{bmatrix} c_a & 0 & 0 \\ 0 & c_{b_4} & 0 \\ 0 & 0 & n_{b_4} \end{bmatrix}_{e \times e} \quad (3.22)$$

matris gösterimi vardır. $b_4 \in (1-p)\mathcal{A}(1-p)$ olduğundan $paq = aa^Dab_4b_4^D = apb_4b_4^D = 0$ dir. Ayrıca $pa(1-p-q) = pa - pap - paq = c_a - c_a - 0 = 0$ olur. Benzer şekilde $qap = 0 = (1-p-q)ap$ dir. Dolayısı ile $n_a = c_1 + c_2 + c_3 + c_4$ olmak üzere a elemanının

$$a = \begin{bmatrix} c_a & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & c_4 \\ 0 & c_5 & c_6 \end{bmatrix}_{e \times e} \quad (3.23)$$

matris gösterimi vardır.

(3) $\Rightarrow$ (4) : $k = i(a)$ ve $a, b \in \mathcal{A}$ elemanlarının (3.16) deki matris gösterimleri var olsun. $n_a^k = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
a^kb &= \begin{bmatrix} c_1^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times e} \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_2 \end{bmatrix}_{e \times e} = c_1^{k+1} \\
&= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_2 \end{bmatrix}_{e \times e} \begin{bmatrix} c_1^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times e} = ba^k
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca $a^{k+1} = c_1^{k+1}$ olduğundan $a^k b = ba^k = a^{k+1}$ eşitliği elde edilir.

(4) $\Rightarrow$ (5) : Açıktır.

(5) $\Rightarrow$ (2) : $a^k = ba^k = a^{k+1}$ olacak şekilde $k \geq 0$ olsun. $a^D aa^D = a^D$ ve $a^D a = aa^D$ olduğundan her $t \geq 0$ tamsayısı için $a^D = (a^D)^{t+1} a^t$ olur. Dolayısı ile $a^D a = (a^D)^{k+1} a^{k+1} = (a^D)^{k+1} a^k b = a^D b$ olur. Benzer şekilde $ba^D = aa^D$ olduğu gösterilir. Sonuç olarak $aa^D = ba^D = a^D b = a^D a$ eşitliği sağlanır.

(2) $\Rightarrow$ (1) : $aa^D = ba^D = a^D b = a^D a$ ve sırası ile $a = c_a + n_a$ ile $b = c_b + n_b$, $a, b \in \mathcal{A}$ elemanlarının çekirdek üstel sıfır parçalanmaları olsun. Bilindiği üzere $c_a^\# = a^D$ ve $c_a^\# n_a = 0 = n_a c_a^\#$ eşitlikleri vardır. Ayrıca a Drazin tersinir eleman olduğundan $aa^D = a^D a$ dir.

$$c_b c_a^\# = c_b c_a^\# + n_b c_a^\# = (c_b + n_b) c_a^\# = b c_a^\# = ba^D = aa^D = a c_a^\# = (c_a + n_a) c_a^\# = c_a c_a^\#$$

olur. Benzer şekilde $c_a^\# c_b = c_a^\# c_b$ olduğu görülür. Dolayısı ile $c_a \leq^\# c_b$ olur. Sonuç olarak $a \leq^D b$ dir.

Sonuç 3.2.11. $a, b \in \mathcal{A}$ Drazin tersinir olsun. $a \leq^D b$ olması için gerek ve yeter şart $a^D ba^D = a^D$ ve $a^D b = ba^D$ olmasıdır (Marovt 2018).

İspat: $a \leq^D b$ olsun. Bu durumda $aa^D = ba^D = a^D b = a^D a$ dir. Dolayısı ile $a^D = a^D aa^D = a^D ba^D$ olur.

Karşıt olarak $a^D aa^D = a^D ba^D$ ve $ba^D = a^D b$ olsun. O zaman $a^D a = a^D ba^D a = ba^D a^D a = ba^D aa^D$ ve dolayısı ile $aa^D = ba^D = a^D b = a^D a$ elde edilir. Teorem 3.2.10 gereğince $a \leq^D b$ dir.

Sonuç 3.2.12. $a, b \in \mathcal{A}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) $a \leq^D b$,

(2) $b(a^D)^{r+1} = (a^D)^{r+1} b = (a^D)^r$ olacak şekilde r pozitif tamsayısı vardır,

(3) Her bir r pozitif tamsayısı için $b(a^D)^{r+1} = (a^D)^{r+1} b = (a^D)^r$ dir (Marovt 2018).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (3) : $a \leq^D b$ olsun. Sonuç 3.2.11 gereğince $a = a^D ba^D$ ve $ba^D = a^D b$ dir. Bu durumda $(a^D)^2 b = b(a^D)^2$ eşitliği sağlanır. Dolayısı ile $r = 1$ için (3) ifadesi sağlanır. Şimdi $r \geq 1$ olsun, bu ise $b(a^D)^{r-1} (a^D)^2 = (a^D)^r = (a^D)^2 (a^D)^{r-1} b$ olmasını

gerektirir. Sonuç olarak her r pozitif tamsayısı için (3) sağlanır.

(3) $\Rightarrow$ (2) : Açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (1) : r bir pozitif tamsayı olmak üzere $b(a^D)^{r+1} = (a^D)^{r+1}b = (a^D)^r$ olsun. Dolayısı ile $b(a^D)^{r+1}a^r = (a^D)^r a^r = a^D a$ ve $a^r(a^D)^{r+1}b = a^r(a^D)^r = aa^D$ elde edilir. $(a^D)^{r+1}a^r = a^D = a^r(a^D)^{r+1}$ olduğundan $ba^D = a^D a = aa^D = a^D b$ olur. Sonuç olarak $a \leq^D b$ dir.

Uyarı 3.2.13. r bir pozitif tamsayı olsun. $a \leq^D b$ ise $ba^D = a^D a = aa^D = a^D b$ dir. Bu ise $(a^r)^D b^r = b^r (a^r)^D$ ve $(a^r)^D b^r = (a^r)^D a^r$ olmasını gerektirir. Dolayısı ile sıradaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.14. $a, b \in \mathcal{A}$ elemanları Drazin tersinir olsun. Her r pozitif tamsayısı için $a \leq^D b$ ise $a^r \leq^D b^r$ dir (Marovt 2018).

Teorem 3.2.15. $a \in \mathcal{A}$ Drazin tersinir ve $p = aa^D$ olmak üzere $a = \begin{bmatrix} c_a & 0 \\ 0 & n_a \end{bmatrix}_{p \times p}$, matrisi a nın çekirdek üstel sıfır parçalanması ve $b \in \mathcal{A}$ Drazin tersinir elemanı olsun. $a \leq^D b$ olması için gerek ve yeter şart $t \in (1-p)\mathcal{A}(1-p)$ olmak üzere

$$b = \begin{bmatrix} c_a & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}_{p \times p}$$

matris gösteriminin olmasıdır (Marovt 2018).

İspat: $a \leq^D b$ ve $c_b + n_b$, b elemanının çekirdek üstel sıfır parçalanması olsun. O zaman Drazin bağıntısının tanımı gereği $c_a c_a^\# = c_b c_a^\#$ ve $c_a^\# c_a = c_a^\# c_b$ olacak şekilde $c_a^\# \in \{c_b^\#\}$ elemanı vardır. Bu durumda $p = aa^D = (c_a - n_a)c_a^\# = c_a c_a^\#$ olur. Lemma 3.2.9 gereğince

$$pbp = c_a c_a^\# (c_b + n_b) c_a c_a^\# = c_a c_a^\# c_b c_a c_a^\# + c_a c_a^\# n_b c_a c_a^\# = c_a c_a^\# c_a c_a c_a^\# = c_a$$

olur. Ayrıca $pb(1-p) = c_a c_a^\# (c_b + n_b)(1 - c_a c_a^\#) = [c_a c_a^\# c_b + c_a c_a^\# n_b](1 - c_a c_a^\#) = c_a c_a^\# c_a (1 - c_a c_a^\#) = 0$ ve benzer şekilde $(1-p)bp = 0$ olur. Dolayısı ile $t \in (1-p)\mathcal{A}(1-p)$ olmak üzere $b \in \mathcal{A}$ elemanının

$$b = \begin{bmatrix} c_a & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}_{p \times p}$$

matris gösterimi vardır.

Karşıt olarak $t \in (1-p)\mathcal{A}(1-p)$ olmak üzere $b \in \mathcal{A}$ elemanının

$$b = \begin{bmatrix} c_a & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}_{p \times p}$$

matris gösterimi var olsun. $c_a^\# = \begin{bmatrix} c_a^\# & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times p}$ olmak üzere

$$c_a^\# b = \begin{bmatrix} c_a^\# & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times p} \begin{bmatrix} c_a & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}_{p \times p} = \begin{bmatrix} c_a c_a^\# & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times p} = c_a^\# a$$

olur. Benzer şekilde $bc_a^\# = ac_a^\#$ olduğu gösterilebilir. $a^D = c_a^\#$ olduğundan $a \leq^D b$ olur.

Teorem 3.2.16. $a \in \mathcal{A}$ Drazin tersinir ve $i(a) = k$ olsun. $b \in \mathcal{A}$ Drazin tersinir elemanı için aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) $a \leq^D b$,
- (2) $u \in \mathcal{A}$ ve $a^D u = u a^D = 0$ olmak üzere $b = a + u$ dur (Marovt 2018).

İspat: $c_a + n_a$, a nın çekirdek üstel sıfır parçalanması, $b \in \mathcal{A}$ Drazin tersinir olmak üzere $a \leq^D b$ ve $p = aa^D$ olsun. Teorem 3.2.15 gereğince $b = c_a + t$ olacak şekilde $t \in (1-p)\mathcal{A}(1-p)$ vardır. Bu durumda $c = c_a + n_a - n_a + t$ dir. $u = t - n_a$ olmak üzere $u \in (1-p)\mathcal{A}(1-p)$ olur. Dolayısı ile $b = a + u$ ve $a^D \in p\mathcal{A}p$ olduğundan $a^D u = 0 = u a^D$ dir.

Karşıt olarak $u \in \mathcal{A}$ olmak üzere $b = a + u$ ve $a^D u = u a^D = 0$ olsun. O zaman $u = b - a$ ve dolayısı ile $a^D(b-a) = (b-a)a^D = 0$ olur, bu ise $aa^D = ba^D = a^D b = a^D a$ olmasını gerektirir. Teorem 3.2.10 gereğince $a \leq^D b$ dir.

Uyarı 3.2.17. $a \in \mathcal{A}$ Drazin tersinir olsun. $u \in \mathcal{A}$ için $a^D u = 0 = u a^D$ olması $aa^D u = u a a^D = 0$ olmasını gerektirir. Dolayısı ile $a^D u = 0 = u a^D$ ve $u \in (1 - aa^D)\mathcal{A}(1 - a^D a)$ birbirlerine denk ifadelerdir. Teorem 3.2.16 gereğince $a \leq^D b$ olacak şekilde $b \in \mathcal{A}$ Drazin tersinir elemanların kümesi $z \in \mathcal{A}$ keyfi ve $u = (1 - aa^D)z(1 - a^D a)$ olmak üzere $b = a + u$ şeklinde verilebilir.

3.2.1 C-N Kısmi Sıralama Bağıntısı

Drazin bağıntısında elemanların üstel sıfır kısımları göz önüne alınmadığından sıradaki tanım ile elemanların üstel sıfır kısımlarını da dahil eden bir bağıntı verilecektir.

Tanım 3.2.18. $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ olsun. Sırası ile A_1 ve B_1 matrisleri A ve B matrislerinin çekirdek kısımları, A_2 ve B_2 matrisleri A ile B matrislerinin üstel sıfır kısımları olmak üzere eğer $A_1 \leq^\# B_1$ ve $A_2 \leq^- B_2$ ise $A \leq^{\#,-} B$ denir. Bu bağıntıya *C-N kısmi sıralama bağıntısı* (*C-N partial order*) adı verilir (Mitra ve Hartwig 1992).

Tanım 3.2.19. $\mathcal{A}$ birimli bir halka ve $a, b \in \mathcal{A}$ elemanları Drazin tersinir olsun. $a = c_a + n_a$ ve $b = c_b + n_b$ sırası ile a ve b nin çekirdek üstel sıfır parçalanması olmak üzere eğer $c_a \leq^\# c_b$ ve $n_a \leq^- n_b$ oluyor ise $a \leq^{\#,-} b$ denir (Marovt 2018).

Teorem 3.2.20. $\leq^{\#,-}$ bağıntısı $\mathcal{A}$ üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

İspat: $\leq^\#$ ve $\leq^-$ bağıntıları birimli halkalar üzerinde kısmi sıralama bağıntısı olduklarından $\leq^{\#,-}$ bağıntısı da kısmi sıralama bağıntısı olur.

Teorem 3.2.21. $a, b \in \mathcal{A}$ Drazin tersinir olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) $a \leq^{\#,-} b$,
- (2) $a \leq^D b$ ve $a - aa^D a \leq^- b - bb^D b$,
- (3) $c_1, c_2 \in \mathcal{A}$ grup tersinir, $n_1, n_2 \in \mathcal{A}$, $n_1 \leq^- n_2$ olacak şekilde üstel sıfır elemanlar ve $1 = e_1 + e_2 + e_3$ $\mathcal{A}$ halkasının biriminin bir parçalanması olmak üzere a ve b elemanlarının

$$a = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_1 \end{bmatrix}_{e \times e}, \quad b = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_2 \end{bmatrix}_{e \times e}$$

matris gösterimleri vardır (Marovt 2018).

İspat: $p = aa^D$ olmak üzere $a = c_a + n_a = \begin{bmatrix} c_a & 0 \\ 0 & n_a \end{bmatrix}_{p \times p}$ ve $b = c_b + n_b$ sırası ile a ve b nin çekirdek üstel sıfır parçalanmaları olsun.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) : $c_a = a^2a^D$ ve $n_a = a - aa^Da$ olduklarından daha önce bahsedilmişti. Benzer şekilde $c_b = bb^Db$ ve $n_b = b - b^Db$ dir. Dolayısı ile (1) ve (2) birbirlerine denktir.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) : $a \leq^{\sharp, -} b$ olsun. Bu durumda $a \leq^D b$ ve dolayısı ile $n_a = c_3 + c_4 + c_5 + c_6$, c_2 grup tersinir, n_2 üstel sıfır ve $1 = e_1 + e_2 + e_3$ halkada birimin parçalanması olmak üzere

$$a = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & c_4 \\ 0 & c_5 & c_6 \end{bmatrix}_{e \times e}, \quad b = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_2 \end{bmatrix}_{e \times e} \quad (3.24)$$

olur. $c_a = c_1$ dir. c_1 ve c_2 grup tersinir olmak üzere $c_1 + c_2$, b nin çekirdek kısmı olur ve dolayısı ile $n_b = n_2$ olur. $a \leq^{\sharp, -} b$ olduğundan $n_a \leq^- n_b$ ve böylece $c_3 + c_4 + c_5 + c_6 \leq^- n_2$ dir. Dolayısı ile $c_3 + c_4 + c_5 + c_6 = xn_2 = n_2y$ olacak şekilde $x, y \in \mathcal{A}$ vardır. Bu sebeple $l_{\mathcal{A}}(n_2) \subseteq l_{\mathcal{A}}(c_3 + c_4 + c_5 + c_6)$ ve $r_{\mathcal{A}}(n_2) \subseteq r_{\mathcal{A}}(c_3 + c_4 + c_5 + c_6)$ olur. Ayrıca $c_3 + c_4 + c_5 + c_6 = e_2ae_2 + e_2ae_3 + e_3ae_2 + e_3ae_3$ ve $n_2 = e_3be_3$ dir. Burada $e_2e_3 = 0 = e_3e_2$ olduğundan $e_2n_2 = 0 = n_2e_2$ ve $e_2 \in l_{\mathcal{A}}(n_2) \cap r_{\mathcal{A}}(n_2)$ olur. Dolayısı ile $e_2 \in l_{\mathcal{A}}(c_3 + c_4 + c_5 + c_6) \cap r_{\mathcal{A}}(c_3 + c_4 + c_5 + c_6)$ ve böylece

$$0 = e_2(c_3 + c_4 + c_5 + c_6) = e_2ae_2 + e_2ae_3 = c_3 + c_4 \quad (3.25)$$

ve

$$0 = (c_3 + c_4 + c_5 + c_6)e_2 = e_2ae_2 + e_3ae_2 = c_3 + c_5 \quad \text{dir.} \quad (3.26)$$

Bu durumda $c_4 = c_5 = -c_3$, $c_4 \in e_2\mathcal{A}e_3$ ve $c_4 \in e_3\mathcal{A}e_2$ olur. $e_2\mathcal{A}e_3 \cap e_3\mathcal{A}e_2 = \{0\}$ olduğundan $c_3 = c_4 = c_5 = 0$ dir. $c_6 = n_1$ denirse ve $n_1 \leq^- n_2$ olduğundan

$$a = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_1 \end{bmatrix}_{e \times e}, \quad b = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_2 \end{bmatrix}_{e \times e} \quad (3.27)$$

olur.

(3) $\Leftrightarrow$ (1) : a, b verilen matris formuna sahip olsun. $c_1, c_1n_1 = n_1c_1 = 0$ ve

n_1 üstel sıfır olacak şekilde grup tersinir olduğundan a nın çekirdek üstel sıfır parçalanmasının tekliğinden $c_1 = c_a$ ve $n_1 = n_a$ olur. Benzer şekilde $c_b = c_1 + c_2$ ve $n_2 = n_b$ olduğundan $c_a \leq^\# c_b$ ve $n_a \leq^- n_b$ dir. Dolayısı ile $a \leq^{\#,-} b$ elde edilir.

Teorem 3.2.22. $a, b \in \mathcal{A}$ Drazin tersinir olsun. Eğer $a \leq^{\#,-} b$ ise $a \leq^- b$ dir (Marovt 2018).

İspat: $a \leq^{\#,-} b$ olsun. Teorem 3.2.21 gereğince $1 = e_1 + e_2 + e_3$ halkanın biriminin parçalanması, c_1 ve c_2 grup tersinir, n_1 ve n_2 ise $n_1 \leq^- n_2$ olacak şekilde üstel sıfır elemanlar olmak üzere

$$a = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_1 \end{bmatrix}_{e \times e}, \quad b = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_2 \end{bmatrix}_{e \times e} \quad (3.28)$$

olur. $n_1, n_2 \in e_3 \mathcal{A} e_3$ olduğundan $n_1 = sn_2 = n_2 z$ ve $sn_1 = n_1$ olacak şekilde

$s, z \in e_3 \mathcal{A} e_3$ elemanları vardır. $x = c_1 c_1^\# + s = a = \begin{bmatrix} c_1 c_1^\# & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}_{e \times e}$ olsun. Bu

durumda

$$xa = \begin{bmatrix} c_1 c_1^\# c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sn_1 \end{bmatrix}_{e \times e} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_1 \end{bmatrix}_{e \times e} = a \quad (3.29)$$

ve

$$xb = \begin{bmatrix} c_1 c_1^\# c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sn_2 \end{bmatrix}_{e \times e} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_1 \end{bmatrix}_{e \times e} = a \quad (3.30)$$

olur. Benzer şekilde $y = c_1 c_1^\# + z$ için $by = a$ olduğu görülür. Sonuç olarak $a \leq^- b$ dir.

3.2.2 S-Eksi Kısmi Sıralama Bağıntısı

Bu kısımda S -Eksi kısmi sıralama bağıntısının tanımı verilecektir. Ayrıca bazı özellikleri incelenecektir.

Tanım 3.2.23. $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ olsun. A_1 ve B_1 matrisleri sırasıyla A ile B matrislerinin çekirdek kısımları olmak üzere $A_1 \leq^\# B_1$ ve $A \leq^- B$ ise $A \leq^\ominus B$ dir. Bu bağıntıya *S-eksi kısmi sıralama bağıntısı* (*S-minus partial order*) adı verilir (Mitra, Bhimasankaram ve Malik 2010).

Tanım 3.2.24. $a, b \in \mathcal{A}$ Drazin tersinir ve sırasıyla $c_a + n_a$ ile $c_b + n_b$, a ve b nin çekirdek üstel sıfır parçalanmaları olsun. Eğer $c_a \leq^\# c_b$ ve $a \leq^- b$ ise $a \leq^\ominus b$ dir (Marovt 2018).

Teorem 3.2.25. $\leq^\ominus$ bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır (Marovt 2018).

İspat: Eksi ve keskin sıralama bağıntıları, kısmi sıralama bağıntıları olduklarından *S-eksi kısmi sıralama bağıntısı* da kısmi sıralama bağıntısıdır.

Teorem 3.2.26. $a, b \in \mathcal{A}$ Drazin tersinir elemanlar, $k = \max\{i(a), i(b)\}$ ve $a \leq^\ominus b$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) $a \leq^{\#,-} b$,
- (2) $l_{\mathcal{A}}(b^k) \subseteq l_{\mathcal{A}}(ab^k)$ ve $b^k a = a^{k+1}$,
- (3) $ab^k = b^k a = a^{k+1}$ (Marovt 2018).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (3) : $a \leq^{\#,-} b$ olsun. Teorem 3.2.21 gereğince $1 = e_1 + e_2 + e_3$, $\mathcal{A}$ halkasının biriminin parçalanması, c_1 ve c_2 grup tersinir elemanlar, n_1 ve n_2 elemanları $n_1 \leq^- n_2$ şartını sağlayan üstel sıfır elemanlar olmak üzere a ve b elemanlarının

$$a = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_1 \end{bmatrix}_{e \times e}, \quad b = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_2 \end{bmatrix}_{e \times e} \quad (3.31)$$

matris gösterimleri vardır. c_1 , a elemanının çekirdek kısmı, n_1 , a elemanının üstel sıfır kısmı ve $c_1 + c_2$, b elemanının çekirdek kısmı, n_2 , b elemanının üstel sıfır kısmıdır.

O zaman $n_1^k = 0 = n_2^k$ olur. Dolayısı ile

$$a^{k+1} = \begin{bmatrix} c_1^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times e} \quad \text{ve} \quad b^k = \begin{bmatrix} c_1^k & 0 & 0 \\ 0 & c_2^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times e} \quad (3.32)$$

olur. O zaman

$$b^k a = \begin{bmatrix} c_1^k & 0 & 0 \\ 0 & c_2^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times e} \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_1 \end{bmatrix}_{e \times e} = \begin{bmatrix} c_1^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times e} = a^{k+1}$$

ve

$$ab^k = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_1 \end{bmatrix}_{e \times e} \begin{bmatrix} c_1^k & 0 & 0 \\ 0 & c_2^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times e} = \begin{bmatrix} c_1^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times e} = a^{k+1}$$

eşitlikleri elde edilir. Dolayısı ile $ab^k = b^k a = a^{k+1}$ olur.

(3) $\Rightarrow$ (2) : $ab^k = b^k a = a^{k+1}$ ve $z \in l_{\mathcal{A}}(b^k)$ olsun. O zaman $zb^k = 0$ dir. Kabul gereği $0 = zb^k a = zab^k$ olur. Dolayısı ile $z \in l_{\mathcal{A}}(ab^k)$ elde edilir.

(2) $\Rightarrow$ (1) : $l_{\mathcal{A}}(b^k) \subseteq l_{\mathcal{A}}(ab^k)$ ve $b^k a = a^{k+1}$ olsun. $a \leq^{\ominus} b$ olduğundan $a \leq^- b$ ve $c_a \leq^{\#} c_b$ dir. Teorem 3.2.10 gereğince $n_a = c_3 + c_4 + c_5 + c_6$, a elemanının üstel sıfır kısmı, c_2 grup tersinir, n_2 üstel sıfır eleman, $e_1 = c_1 c_1^{\#}$, $e_2 = c_2 c_2^{\#}$ ve $1 = e_1 + e_2 + e_3$, $\mathcal{A}$ halkasının biriminin parçalanması olmak üzere

$$a = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & c_4 \\ 0 & c_5 & c_6 \end{bmatrix}_{e \times e} \quad \text{ve} \quad b = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_2 \end{bmatrix}_{e \times e}$$

matris gösterimleri vardır. $n_1^k = 0 = n_2^k$ olduğundan

$$b^k a = \begin{bmatrix} c_1^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & c_2^k c_3 & c_2^k c_4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times e} \quad \text{ve} \quad a^{k+1} = \begin{bmatrix} c_1^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times e} \quad \text{olur.}$$

Dolayısı ile $c_2^k c_3 = 0 = c_2^k c_4$ elde edilir. Bu durumda $(c_2^{\#})^k c_2^k c_3 = 0 = (c_2^{\#})^k c_2^k c_4$ ve böylece $e_2^k c_3 = 0 = e_2^k c_4$ olur. $c_3 \in e_2 \mathcal{A} e_2$ ve $c_4 \in e_2 \mathcal{A} e_3$ olduğundan $c_3 = 0 = c_4$

elde edilir. O zaman $a \in \mathcal{A}$ elemanının matris gösterimi $a = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_5 & c_6 \end{bmatrix}_{e \times e}$ olur.

Ayrıca

$$e_3 b^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{bmatrix}_{e \times e} \begin{bmatrix} c_1^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & c_2^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times e} = 0$$

olduğundan $e_3 \in l_{\mathcal{A}}(b^k)$ olur. Hipotez gereğince $e_3 \in l_{\mathcal{A}}(ab^k)$ elde edilir. Dolayısı ile

$$0 = e_3(ab^k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_3 c_5 c_2^k & 0 \end{bmatrix}_{e \times e}$$

ve $e_3 c_5 c_2^k = 0$ olur. $c_5 \in e_3 \mathcal{A} e_2$ olduğundan $c_5 c_2^k = 0$ dir. O zaman $0 = c_5 c_2^k = c_5 c_2^k (c_2^\#)^k = c_5 e_2^k = c_5$ olur. $n_1 = n_a$ ve $n_2 = n_b$ olduğu bilindiğinden $c_6 = n_a$ olur.

Dolayısı ile $a = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_a \end{bmatrix}_{e \times e}$ matris gösterimi vardır. $a \leq^- b$ olduğundan $a =$

$xb = by$ ve $xa = a$ olacak şekilde $x, y \in \mathcal{A}$ elemanları vardır. $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{bmatrix}_{e \times e}$

ve $y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_4 & y_5 & y_6 \\ y_7 & y_8 & y_9 \end{bmatrix}_{e \times e}$ olsun.

$$\begin{aligned} a &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_a \end{bmatrix}_{e \times e} = \begin{bmatrix} x_1 c_1 & x_2 c_2 & x_3 n_b \\ x_4 c_1 & x_5 c_2 & x_6 n_b \\ x_7 c_1 & x_8 c_2 & x_9 n_b \end{bmatrix}_{e \times e} = \begin{bmatrix} c_1 y_1 & c_1 y_2 & c_1 y_3 \\ c_2 y_4 & c_2 y_5 & c_2 y_6 \\ n_b y_7 & n_b y_8 & n_b y_9 \end{bmatrix}_{e \times e} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 c_1 & 0 & x_3 n_a \\ x_4 c_1 & 0 & x_6 n_a \\ x_7 c_1 & 0 & x_9 n_a \end{bmatrix}_{e \times e} \end{aligned}$$

olur. Bu durumda $n_a = x_9 n_b = n_b y_9$ ve $n_a = x_9 n_a$ olur. Dolayısı ile $n_a \leq^- n_b$ elde edilir. Sonuç olarak $a \leq^{\#,-} b$ olur.

Teorem 3.2.27. $\mathcal{A}$ birimli bir $*$ -halka, $a, b \in \mathcal{A}$ Drazin tersinir ve $k = \max\{i(a), i(b)\}$

olsun. $a \leq^{\sharp, -} b$ olması için gerek ve yeter şart $a \leq^{\ominus} b$, $l_{\mathcal{A}}((b^k)^*) \subseteq l_{\mathcal{A}}((b^k a)^*)$ ve $ab^k = a^{k+1}$ olmasıdır (Marovt 2018).

İspat: $a \leq^{\sharp, -} b$ olsun. O zaman $ab^k = a^{k+1} = c_1^{k+1} = b^k a$ olur. $z \in l_{\mathcal{A}}((b^k)^*)$ olsun. $b^k = c_1^k + c_2^k$ olduğundan $z(c_1^k)^* + z(c_2^k)^* = 0$ ve dolayısı ile $z(c_1^{k+1})^* + z(c_2^k)^* c_1^* = 0$ olur. Ayrıca $c_1 c_2 = 0 = c_2 c_1$ eşitliğinden $c_1^* c_2^* = 0 = c_2^* c_1^*$ elde edilir. $0 = z(c_1^{k+1})^* = z(b^k a)^*$ olduğundan $z \in l_{\mathcal{A}}((b^k a)^*)$ olur.

Karşıt olarak $a \leq^{\ominus} b$, $l_{\mathcal{A}}((b^k)^*) \subseteq l_{\mathcal{A}}((b^k a)^*)$ ve $ab^k = a^{k+1}$ olsun. O zaman $1 = e_1 + e_2 + e_3$, $\mathcal{A}$ halkasının biriminin bir parçalanması olmak üzere a ve b elemanlarının

$$a = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & c_4 \\ 0 & c_5 & c_6 \end{bmatrix}_{e \times e}, \quad b = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_2 \end{bmatrix}_{e \times e}$$

matris gösterimleri vardır. Burada $e_1 = c_1 c_1^{\sharp}$ ve $e_2 = c_2 c_2^{\sharp}$ dir. Bu durumda $ab^k = a^{k+1}$ olduğu görülür. O zaman $c_3 = 0 = c_5$ dir. Ayrıca $1 = e_1^* + e_2^* + e_3^*$ eşitliği de $\mathcal{A}$ halkasının bir parçalanmasıdır. Bu bilgiyi göz önünde bulundurarak

$$(b^k a)^* = \begin{bmatrix} (c_1^{k+1})^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_4^* (c_2^k)^* & 0 \end{bmatrix}_{e^* \times e^*}$$

matris gösterimi vardır.

$$e_3^* (b^k)^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_3^* \end{bmatrix}_{e^* \times e^*} \begin{bmatrix} (c_1^k)^* & 0 & 0 \\ 0 & (c_2^k)^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e^* \times e^*} = 0$$

olduğundan $e_3^* \in l_{\mathcal{A}}((b^k)^*) \subseteq l_{\mathcal{A}}((ab^k)^*)$ olur.

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_3^* \end{bmatrix}_{e^* \times e^*} \begin{bmatrix} (c_1^{k+1})^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_4^* (c_2^k)^* & 0 \end{bmatrix}_{e^* \times e^*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_3^* c_4^* (c_2^k)^* & 0 \end{bmatrix}_{e^* \times e^*}$$

olduğundan $e_3^* c_4^* (c_2^k)^* = 0$ elde edilir. Buradan $c_2^k c_4 e_3 = 0$ olur. $c_4 \in e_2 \mathcal{A} e_3$ ve

$$0 = (c_2^{\sharp})^k c_2^k c_4 e_3 = e_2^k c_4 e_3 = c_4 \text{ olduğundan } a = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_a \end{bmatrix}_{e \times e} \text{ matris gösterimine}$$

sahiptir. $a \leq^- b$ olduğundan Teorem 3.2.26'nin ispatından $n_a \leq^- n_b$ olur. Dolayısı ile $a \leq^{\sharp,-} b$ olur.



3.3 Yıldız Kısmi Sıralama Bağıntısı

Bu bölümde Drazin (1978) ın tanımladığı yıldız kısmi sıralama bağıntısına denk $*$ -halkalarda kısmi sıralama bağıntısı tanımlanıp bazı özellikleri incelenecektir.

Tanım 3.3.1. $\mathcal{A}$ bir $*$ -halka olsun. $a^*a = a^*b$ ve $aa^* = ba^*$ ise $a \underset{*}{\leq} b$ denir (Drazin 1978).

Tanım 3.3.2. H bir Hilbert uzayı, $B(H)$ Hilbert uzayının sınırlı lineer operatörlerinin kümesi ve $A, B \in B(H)$ olmak üzere $P, Q \in B(H)$ kendine eş, eşkare elemanları için;

$$(1) \overline{ImA} = \overline{ImB},$$

$$(2) KerA = KerB,$$

$$(3) PA = PB \text{ ve}$$

$$(4) QA = QB$$

şartları sağlanıyorsa $A \underset{*}{\leq} B$ denir (Dolinar ve Marovt 2011).

Tanım 3.3.3. H bir Hilbert uzayı, $B(H)$ Hilbert uzayının sınırlı lineer operatörlerinin kümesi ve $A, B \in B(H)$ olmak üzere $P, Q \in B(H)$ kendine eş, eşkare elemanları için;

$$(1) l_{B(H)}(A) = B(H) \cdot (I - P),$$

$$(2) r_{B(H)}(A) = (I - Q) \cdot B(H),$$

$$(3) PA = PB \text{ ve}$$

$$(4) QA = QB$$

şartları sağlanıyorsa $A \underset{*}{\leq} B$ denir (Dolinar, Guterman ve Marovt 2014).

Lemma 3.3.4. H bir Hilbert uzayı ve $A, B \in B(H)$ olsun. O zaman

$$(1) r_{B(H)}(A) = r_{B(H)}(B) \text{ olması için gerek ve yeter şart } KerA = KerB \text{ olmasıdır,}$$

$$(2) l_{B(H)}(A) = l_{B(H)}(B) \text{ olması için gerek ve yeter şart } \overline{ImA} = \overline{ImB} \text{ olmasıdır}$$

(Dolinar, Guterman ve Marovt 2014).

İspat: (1) : $A, B \in B(H)$ ve $r_{B(H)}(A) = r_{B(H)}(B)$ olsun. $x \in Ker A$ ve P kendine eş, eşkare elemanı için $Ker A = Im P$ olsun. Bu durumda $Px = x$ ve $AP = 0$ olur. Dolayısı ile $BP = 0$ ve $Bx = 0$ elde edilir. Bu durumda $Ker A \subseteq Ker B$ olur. Benzer şekilde $Ker B \subseteq Ker A$ olduğu gösterilebilir.

Diğer taraftan $A, B \in B(H)$ olmak üzere $Ker A = Ker B$ olsun. $X \in r_{B(H)}(A)$ olsun. O zaman $AX = 0$ olup $X \in Ker A$ dır. Her $z \in H$ elemanı için $BXz = 0$ olduğundan $X \in r_{B(H)}(B)$ olur. Dolayısı ile $r_{B(H)}(A) \subseteq r_{B(H)}(B)$ elde edilir. Benzer şekilde $r_{B(H)}(B) \subseteq r_{B(H)}(A)$ olduğu gösterilebilir. Dolayısı ile $r_{B(H)}(A) = r_{B(H)}(B)$ olur.

(2) : $l_{B(H)}(A) = l_{B(H)}(B)$ olması için gerek ve yeter şart $r_{B(H)}(A^*) = r_{B(H)}(B^*)$ olmasıdır. Bu durumda $l_{B(H)}(A) = l_{B(H)}(B)$ olması için gerek ve yeter şart $Ker A^* = Ker B^*$ olmasıdır. $Ker A^* = Ker B^*$ ifadesi ile $\overline{Im A} = \overline{Im B}$ ifadesi birbirlerine denk olduğundan ispat tamamlanmış olur.

Lemma 3.3.5. $\mathcal{A}$ birimli bir halka ve $p \in \mathcal{A}$ elemanı eşkare olsun.

$$(1) \quad r_{\mathcal{A}}(p) = (1 - p)\mathcal{A},$$

$$(2) \quad l_{\mathcal{A}}(p) = \mathcal{A}(1 - p) \text{ dir (Marovt, Rakić ve Djordjević 2015).}$$

İspat: (1) : $x \in r_{\mathcal{A}}(p)$ olsun. O zaman $px = 0$ olur. Bu durumda $x - px = x$ olup $(1 - p)x = x$ elde edilir. Dolayısı ile $x \in (1 - p)\mathcal{A}$ olur.

Diğer taraftan $x \in (1 - p)\mathcal{A}$ olsun. O zaman $x = (1 - p)y = y - py$ olacak şekilde $y \in \mathcal{A}$ elemanı vardır. Bu durumda $px = py - py = 0$ elde edilir. Dolayısı ile $x \in l_{\mathcal{A}}(p)$ olur. Sonuç olarak $r_{\mathcal{A}}(p) = (1 - p)\mathcal{A}$ eşitliği vardır.

(2) : $x \in l_{\mathcal{A}}(p)$ olsun. O zaman $xp = 0$ olur. Bu durumda $x - xp = x$ olup $x(1 - p) = x$ elde edilir. Dolayısı ile $x \in \mathcal{A}(1 - p)$ olur.

Diğer taraftan $x \in \mathcal{A}(1 - p)$ olsun. O zaman $x = y(1 - p) = y - yp$ olacak şekilde $y \in \mathcal{A}$ elemanı vardır. Bu durumda $xp = yp - yp = 0$ elde edilir. Dolayısı ile $x \in r_{\mathcal{A}}(p)$ olur. Sonuç olarak $l_{\mathcal{A}}(p) = \mathcal{A}(1 - p)$ eşitliği vardır.

Sonuç 3.3.6. H bir Hilbert uzayı ve $A, B \in B(H)$ olsun. Tanım 3.3.2 de tanımlanan bağıntı ile Tanım 3.3.3 te tanımlanan bağıntı birbirlerine denktir (Marovt, Rakić ve Djordjević 2015).

İspat: $P, Q \in B(H)$ eşkare elemanlar olsun. Lemma 3.3.5 gereğince $l_{B(H)}(A) = B(H) \cdot (I - P)$ ve $r_{B(H)}(A) = (I - Q) \cdot B(H)$ ifadeleri sırasıyla $l_{B(H)}(A) = l_{B(H)}(P)$ ve $r_{B(H)}(A) = r_{B(H)}(Q)$ eşitliklerine denktir. Lemma 3.3.4 gereğince $r_{B(H)}(A) = r_{B(H)}(B)$ olması için gerek ve yeter şart $Ker A = Ker B$ olmasıdır. $l_{B(H)}(A) = l_{B(H)}(B)$ olması için gerek ve yeter şart $\overline{Im A} = \overline{Im B}$ olmasıdır.

Tanım 3.3.7. $\mathcal{A}$ birimli bir $*$ -halka olsun. $a, b \in \mathcal{A}$ için

$$(1) \quad l_{\mathcal{A}}(a) = \mathcal{A}(1 - p),$$

$$(2) \quad r_{\mathcal{A}}(a) = (1 - q)\mathcal{A},$$

$$(3) \quad pa = pb,$$

$$(4) \quad aq = bq$$

şartlarını sağlayan $p, q \in \mathcal{A}$ kendine eş, eşkare elemanları varsa $a \leq_* b$ denir. Bu bağıntı yıldız sıralama bağıntısı olarak adlandırılır (Marovt, Rakić ve Djordjević 2015).

Uyarı 3.3.8.

$$LP(a) := \{p \in \mathcal{A} : p = p^2, l_{\mathcal{A}}(a) = \mathcal{A}(1 - p)\} = \{p \in \mathcal{A} : p = p^2, l_{\mathcal{A}}(a) = l_{\mathcal{A}}(p)\} \quad (3.33)$$

$$RP(a) := \{q \in \mathcal{A} : q = q^2, r_{\mathcal{A}}(a) = (1 - q)\mathcal{A}\} = \{q \in \mathcal{A} : q = q^2, r_{\mathcal{A}}(a) = r_{\mathcal{A}}(q)\} \quad (3.34)$$

kümeleri tanımlansın. $\mathcal{A}$ Rickart $*$ -halka olduğundan $LP(a)$ kümesinde kendine eş, eşkare eleman taktır. Bu eleman $lp(a)$ ile gösterilsin. Benzer şekilde $rp(a)$ ile $RP(a)$ içindeki tek kendine eş eşkare eleman gösterilsin. $a = lp(a)a = arp(a)$ olduğundan

$$a \leq_* b \Leftrightarrow a = lp(a)a = arp(a)$$

denkliği vardır. Djordjević, Rakić ve Marovt (2015) tarafından gösterildiği gibi eğer $a \in \mathcal{A}$, $p \in LP(a)$ ve $q \in RP(a)$ ise

$$LP(a) = \left\{ \begin{bmatrix} p & p_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times p} : p_1 \in p\mathcal{A}(1-p) \right\} \quad (3.35)$$

ve

$$RP(a) = \left\{ \begin{bmatrix} q & 0 \\ q_1 & 0 \end{bmatrix}_{q \times q} : q_1 \in (1-q)\mathcal{A}q \right\} \quad (3.36)$$

olur.

Lemma 3.3.9. $\mathcal{A}$ bir Rickart $*$ -halka ve $a \in \mathcal{A}$ olsun. Bu durumda

- (1) $r_{\mathcal{A}}(a^*) = r_{\mathcal{A}}(lp(a))$,
- (2) $l_{\mathcal{A}}(a^*) = l_{\mathcal{A}}(rp(a))$ dir (Marovt, Rakić ve Djordjević 2015).

İspat: (1) : $x \in r_{\mathcal{A}}(a^*)$ olsun. O zaman $a^*x = 0$ ve involüsyon gereği $x^*a = 0$ dir. Bu durumda $x^* \in l_{\mathcal{A}}(a) = l_{\mathcal{A}}(lp(a))$ olur. Dolayısı ile $x^*lp(a) = 0$ ve $lp(a)x = 0$ olur. Sonuç olarak $x \in r_{\mathcal{A}}(lp(a))$ olur.

Karşıt olarak $x \in r_{\mathcal{A}}(lp(a))$ olsun. O zaman $lp(a)x = 0$ ve involüsyon gereği $x^*lp(a) = 0$ dir. Bu durumda $x^* \in l_{\mathcal{A}}(lp(a)) = l_{\mathcal{A}}(a)$ olur. Dolayısı ile $x^*a = 0$ ve $xa^* = 0$ olur. (2) ifadesi benzer şekilde ispat edilir.

Lemma 3.3.10. $\mathcal{A}$ bir Rickart $*$ -halka ve $a, b \in \mathcal{A}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) $a = lp(a)b$,
- (2) $a = pb$ olacak şekilde kendine eş p eşkare elemanı vardır,
- (3) $a^*a = a^*b$ dir (Marovt, Rakić ve Djordjević 2015).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) : $lp(a)$ kendine eş, eşkare eleman olduğundan açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (3) : $a = pb$ olacak şekilde p kendine eş, eşkare elemanı mevcut olsun.

$$a^*a = a^*pb = (pa)^*b = a^*b$$

olur.

(3) $\Rightarrow$ (1) : $a^*a = a^*b$ olsun. O zaman $a^*(b-a) = 0$ olur. Lemma 3.3.9 gereğince $lp(a)(b-a) = 0$ ve $LP(a)$ nın tanımından $a = lp(a)a$ olduğundan $a = lp(a)b$ olur.

Lemma 3.3.11. $\mathcal{A}$ bir Rickart $*$ -halka ve $a, b \in \mathcal{A}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) $a = brp(a)$,
- (2) $a = bq$ olacak şekilde kendine eş q eşkare elemanı vardır,
- (3) $aa^* = ba^*$ dır (Marovt, Rakić ve Djordjević 2015).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) : $rp(a)$ kendine eş, eşkare eleman olduğundan açıktır.

(2) $\Rightarrow$ (3) : $a = bq$ olacak şekilde q kendine eş, eşkare elemanı mevcut olsun.

$$aa^* = bqa^* = b(aq)^* = ba^*$$

olur.

(3) $\Rightarrow$ (1) : $aa^* = ba^*$ olsun. O zaman $(b - a)a^* = 0$ olur. Lemma 3.3.9 gereğince $(b - a)rp(a) = 0$ ve $RP(a)$ nin tanımından $a = arp(a)$ olduğundan $a = brp(a)$ olur.

Teorem 3.3.12. $\mathcal{A}$ bir Rickart $*$ -halka ve $a, b \in \mathcal{A}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) $a \leq_* b$,
- (2) $a = pb = bq$ olacak şekilde kendine eş p ve q eşkare elemanları vardır,
- (3) $a^*a = a^*b$ ve $aa^* = ba^*$ dir,
- (4) $p = lp(a)$ ve $q = rp(a)$ olmak üzere a ve b elemanlarının

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times q} \quad \text{ve} \quad b = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b_4 \end{bmatrix}_{p \times q} \quad (3.37)$$

matris gösterimleri vardır (Marovt, Rakić ve Djordjević 2015).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) : $\leq_* b$ olsun. O zaman $l_{\mathcal{A}}(a) = \mathcal{A}(1 - p)$, $r_{\mathcal{A}}(a) = (1 - q)\mathcal{A}$, $pa = pb$ ve $aq = bq$ şartlarını sağlayan $p, q \in \mathcal{A}$ kendine eş, eşkare elemanları vardır. Bu durumda $(1 - p)a = 0$ ve $a(1 - q) = 0$ olur. Dolayısı ile $a = pa = pb$ ve $a = aq = bq$ eşitlikleri elde edilir.

(2) $\Rightarrow$ (3) : $a = pb = bq$ olacak şekilde $p, q \in \mathcal{A}$ kendine eş, eşkare elemanları var olsun. O zaman $a = pa = aq$ olur. Bu durumda

$$a^*a = a^*pb = (pa)^*b = a^*b$$

ve

$$aa^* = bqa^* = b(aq)^* = ba^*$$

eşitlikleri elde edilir.

(3) $\Rightarrow$ (1) : $a^*a = a^*b$ ve $aa^* = ba^*$ olsun. Lemma 3.3.10 ve Lemma 3.3.11 gereğince $a \leq_* b$ olur.

(1) $\Rightarrow$ (4) : $a \leq_* b$ olsun. O zaman $p = lp(a)$ ve $q = rp(a)$ ve $a = pb = bq$ olacak şekilde $p, q \in \mathcal{A}$ kendine eş, eşkare elemanları vardır. $paq = a$ ve

$$pbq = bq q = bq = a$$

$$pb(1 - q) = bq(1 - q) = 0$$

$$(1 - p)bq = (1 - p)pb = 0$$

olduğundan $a, b \in \mathcal{A}$ elemanlarının (3.37) deki matris gösterimleri vardır.

(4) $\Rightarrow$ (1) : $a, b \in \mathcal{A}$ elemanlarının (3.37) deki matris gösterimleri var olsun. O zaman $lp(a)$ ve $rp(a)$ elemanlarının matris gösterimlerinden $a = pb = bq$ eşitliği elde edilir. Dolayısı ile $a \leq_* b$ dir.

Uyarı 3.3.13. $b_4 \in (1 - p)\mathcal{A}(1 - q)$ elemanı $b_4 = (1 - p)b(1 - q) = (b - pb)(1 - q) = (b - a)(1 - q) = b - a - bq + aq = b - a - a + a = b - a$ olur. Ancak tezin ilerleyen bölümlerinde işlemlerde kolaylık olması için b_4 kullanılmaya devam edilecektir.

Teorem 3.3.14. $\mathcal{A}$ bir Rickart $*$ -halka olsun. Tanım 3.3.7 de tanımlanan $\leq_*$ bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır (Marovt, Rakić ve Djordjević 2015).

İspat: Yansıma: $\mathcal{A}$ Rickart $*$ -halka olduğundan $a = pa = aq$ olacak şekilde p, q kendine eş, eşkare elemanları vardır. Dolayısı ile $a \leq_* a$ dir.

Ters Simetri: $a \leq_* b$ ve $b \leq_* a$ olacak şekilde $a, b \in \mathcal{A}$ olsun. O zaman $a = pb = bq$ ve $b = ra = as$ olacak şekilde $p, q, r, s \in \mathcal{A}$ kendine eş, eşkare elemanları mevcuttur. $a = paq$ ve $b = a + (1 - p)b(1 - q)$ olduğundan

$$b - a = (1 - p)b(1 - q) = (1 - p)ra(1 - q) = (1 - p)r(a - aq) = 0$$

olur. Dolayısı ile $a = b$ dir.

Geçişme: $a \underset{*}{\leq} b$ ve $b \underset{*}{\leq} c$ olacak şekilde $a, b, c \in \mathcal{A}$ olsun. O zaman

$$a = pa = pb = bq = pb$$

ve

$$b = rb = rc = cs = bs$$

olacak şekilde $p, q, r, s \in \mathcal{A}$ kendine eş, eşkare elemanları vardır. $rpa = ra = rbq = bq = a$ olduğundan $1 - rp \in l_{\mathcal{A}}(a) = l_{\mathcal{A}}(p)$ olur. Bu durumda $p = rp$ ve $p^* = p = (rp)^* = pr$ elde edilir. Ayrıca $aqs = as = qbs = qb = a$ olduğundan $1 - qs \in r_{\mathcal{A}}(a) = r_{\mathcal{A}}(q)$ olur. Bu durumda $q = qs$ ve $q^* = q = (qs)^* = sq$ elde edilir. $p' = p$ ve $q' = q$ olmak üzere

$$p'c = pc = prc = pb = a$$

$$cq' = cq = csq = bq = a$$

olur. Teorem 3.3.12 gereğince $a \underset{*}{\leq} c$ sonucuna varılır.

Sonuç 3.3.15. $\mathcal{A}$ bir Rickart $*$ -halka ve $a, b \in \mathcal{A}$ olsun. $a \underset{*}{\leq} b$ olması için gerek ve yeter şart $b - a \underset{*}{\leq} b$ olmasıdır (Marovt, Rakić ve Djordjević 2015).

İspat: $a \underset{*}{\leq} b$ olsun. Teorem 3.3.12 gereğince $a = pb = bq$ olacak şekilde $p, q \in \mathcal{A}$ kendine eş, eşkare elemanları vardır.

$$\begin{aligned} (1 - p)^2 &= (1 - p)(1 - p) = 1 - p - p + p^2 = 1 - p, \\ (1 - p)^* &= 1^* - p^* = 1 - p \end{aligned} \tag{3.38}$$

ve

$$\begin{aligned} (1 - q)^2 &= (1 - q)(1 - q) = 1 - q - q + q^2 = 1 - q, \\ (1 - q)^* &= 1^* - q^* = 1 - q \end{aligned} \tag{3.39}$$

olduğundan $1 - p, 1 - q \in \mathcal{A}$ elemanları kendine eş ve eşkare elemanlardır. Bu durumda

$$\begin{aligned} b - a &= b - pb = (1 - p)b \\ &\text{ve} \end{aligned} \tag{3.40}$$

$$b - a = b - bq = b(1 - q)$$

olur. Teorem 3.3.12 den $b - a \leq_* b$ olur.

Karşıt olarak $b - a \leq_* b$ olsun. O zaman Teorem 3.3.12 den $b - a = pb = bq$ olacak şekilde $p, q \in \mathcal{A}$ kendine eş, eşkare elemanları vardır. $a = b - pb = (1 - p)b$ ve $a = b - bq = b(1 - q)$ olduğundan Teorem 3.3.12 gereğince $a \leq_* b$ olur.

Teorem 3.3.16. $\mathcal{A}$ bir Rickart $*$ -halka ve $a, b \in \mathcal{A}$ olsun. $a \leq_* b$ olması için gerek ve yeter şart $e_1 = lp(a)$, $e_2 = lp(b - a)$, $f_1 = rp(a)$, $f_2 = rp(b - a)$, e_3, f_3 ler kendine eş, eşkare elemanlar ve

$$1 = e_1 + e_2 + e_3 \quad \text{ve} \quad 1 = f_1 + f_2 + f_3 \quad (3.41)$$

$\mathcal{A}$ halkasının biriminin iki farklı parçalanması olmak üzere a ve b nin

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times f} \quad \text{ve} \quad b = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b - a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times f} \quad (3.42)$$

matris formlarına sahip olmasıdır (Marovt, Rakić ve Djordjević 2015).

Lemma 3.3.17. $\mathcal{A}$ bir Rickart $*$ -halka ve $a, b \in \mathcal{A}$ olsun. $a \leq^- b$ olması için gerek ve yeter şart $p = lp(a)$, $q = rp(a)$, $p_1 \in p\mathcal{A}(1 - p)$, $q_1 \in (1 - q)\mathcal{A}q$ ve $b_4 \in (1 - p)\mathcal{A}(1 - q)$ olmak üzere

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times q} \quad \text{ve} \quad b = \begin{bmatrix} a + p_1 b_4 q_1 & p_1 b_4 \\ b_4 q_1 & b_4 \end{bmatrix}_{p \times q} \quad (3.43)$$

olmasıdır (Marovt, Rakić ve Djordjević 2015).

İspat: $a \leq^- b$ olsun. O zaman $a = p'b = bq'$ olacak şekilde $p' \in LP(a)$ ve $q' \in RP(a)$ elemanları vardır.

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times q} = a = bp' = \begin{bmatrix} p & p_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times p} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}_{p \times q} = \begin{bmatrix} b_1 + p_1 b_3 & b_2 + p_1 b_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times q}, \quad (3.44)$$

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times q} = a = q'b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}_{p \times q} \begin{bmatrix} q & 0 \\ q_1 & 0 \end{bmatrix}_{q \times q} = \begin{bmatrix} b_1 + b_2 q_1 & 0 \\ b_3 + b_4 q_1 & 0 \end{bmatrix}_{p \times q}.$$

(3.45)

Bu durumda $b_2 = -p_1b_4$, $b_3 = -b_4q_1$ ve $b_1 = a + p_1b_4q_1$ olur. Dolayısı ile a ve b nin (3.43) de istenen matris gösterimlerine ulaşılmış olur.

Karşıt olarak a ve b nin (3.43) deki matris gösterimleri mevcut olsun. $p \in LP(a)$ ve $q \in RP(a)$ olsun. (3.33) ve (3.34) den $p = \begin{bmatrix} p & p_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times p}$ ve $q = \begin{bmatrix} q & 0 \\ q_1 & 0 \end{bmatrix}_{q \times q}$ dir.

$$pb = \begin{bmatrix} p & p_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times p} \begin{bmatrix} a + p_1b_4q_1 & p_1b_4 \\ b_4q_1 & b_4 \end{bmatrix}_{p \times q} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times q} = a, \quad (3.46)$$

$$bq = \begin{bmatrix} a + p_1b_4q_1 & p_1b_4 \\ b_4q_1 & b_4 \end{bmatrix}_{p \times q} \begin{bmatrix} q & 0 \\ q_1 & 0 \end{bmatrix}_{q \times q} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times q} = a \quad (3.47)$$

dir. (3.46) ve (3.47) eşitliklerinden $a \leq^- b$ olur.

Teorem 3.3.18. $\mathcal{A}$ bir Rickart $*$ -halka ve $a \leq^- b$ olmak üzere $a, b \in \mathcal{A}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) $a \leq_* b$,
- (2) ba^* ve a^*b kendine eş elemanlardır,
- (3) ba^* ve a^*b normal elemanlardır (Marovt, Rakić ve Djordjević 2015).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) : $a \leq_* b$ ise $aa^* = ba^*$ ve $a^*a = a^*b$ dir. Böylece

$$(ba^*)^* = (aa^*)^* = aa^* = ba^* \quad \text{ve} \quad (3.48)$$

$$(a^*b)^* = (a^*a)^* = a^*a = a^*b$$

olduğundan ba^* ve a^*b kendine eş elemanlardır.

(2) $\Rightarrow$ (3) : ba^* ve a^*b elemanları kendine eş olduklarından normal oldukları açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (1) : $a \leq^- b$ ve ba^* , a^*b elemanları normal olsun. ba^* elemanının normalliğinden $ba^*ab^* = ab^*ba^*$ ve $a^*bb^*a = b^*aa^*b$ olur. $a \leq^- b$ olduğundan a ve b elemanlarının

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times q} \quad \text{ve} \quad b = \begin{bmatrix} a + p_1b_4q_1 & p_1b_4 \\ b_4q_1 & b_4 \end{bmatrix}_{p \times q}$$

matris gösterimleri vardır. Bu durumda

$$a^* = \begin{bmatrix} a^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times q} \quad \text{ve} \quad b = \begin{bmatrix} (a + p_1 b_4 q_1)^* & (b_4 q_1)^* \\ (p_1 b_4)^* & b_4^* \end{bmatrix}_{p \times q}$$

olur. Dolayısı ile

$$ba^*ab^* = \begin{bmatrix} (a + p_1 b_4 q_1)a^*a(a + p_1 b_4 q_1)^* & (a + p_1 b_4 q_1)a^*a(b_4 q_1)^* \\ a(a + p_1 b_4 q_1)^*(a + p_1 b_4 q_1)a^* & b_4 q_1 a^* a(b_4 q_1)^* \end{bmatrix}_{p \times p},$$

$$ab^*ba^* = \begin{bmatrix} a(a + p_1 b_4 q_1)^*(a + p_1 b_4 q_1)a^* + a(b_4 q_1)^*b_4 q_1 a^* & 0 \\ 0 & b_4 q_1 a^* a(b_4 q_1)^* \end{bmatrix}_{p \times p}$$

matrisleri elde edilir. $ba^*ab^* = ab^*ba^*$ olduğundan $0 = b_4 q_1 a^* a(b_4 q_1)^* = (b_4 q_1 a^*)(b_4 q_1 a^*)^*$ olur. Her Rickart $*$ -halka, öz $*$ -halka olduğundan $b_4 q_1 a^* = 0$ elde edilir. Bu durumda $b_4 q_1 \in l_{\mathcal{A}}(a^*) = l_{\mathcal{A}}(rp(a)) = l_{\mathcal{A}}(q)$ olur. $q_1 \in (1 - q)\mathcal{A}q$ olduğundan $b_4 q_1 = b_4 q_1 q = 0$ olur. Benzer şekilde a^*b elemanının normalliğinden $p_1 b_4 = 0$ elde edilir. Sonuç olarak

$$b = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b_4 \end{bmatrix}_{p \times q}$$

elde edilir. Teorem 3.3.12 gereğince $a \leq_* b$ olur.

Lemma 3.3.19. $\mathcal{A}$ bir Rickart $*$ -halka ve $a \in \mathcal{A}$ olsun.

- (1) $lp(a) = rp(a^*)$,
- (2) $lp(a) = lp(aa^*)$,
- (3) $rp(a^*) = rp(aa^*)$,
- (4) $lp(aa^*) = rp(aa^*) = lp(a) = rp(a^*)$ dir (Marovt, Rakić ve Djordjević 2015).

İspat: (1) : $x \in l_{\mathcal{A}}(a) \Leftrightarrow xa = 0 \Leftrightarrow a^*x^* = 0 \Leftrightarrow x^* \in r_{\mathcal{A}}(a^*) = r_{\mathcal{A}}(rp(a^*)) \Leftrightarrow x^*rp(a^*) = 0 \Leftrightarrow rp(a^*)x = 0 \Leftrightarrow x \in r_{\mathcal{A}}(rp(a^*)) = r_{\mathcal{A}}(a^*)$ olur. Dolayısı ile $lp(a) = rp(a^*)$ dir.

(2) : $x \in l_{\mathcal{A}}(a)$ olsun. O zaman $xa = 0$ olur. Bu durumda $xaa^* = 0$ ve dolayısı ile $x \in l_{\mathcal{A}}(aa^*)$ olur. Karşıt olarak $x \in l_{\mathcal{A}}(aa^*)$ olsun. $xaa^* = 0$ ise $0 = xaa^*x^* = (xa)(xa)^*$ olur. Her Rickart $*$ -halka, öz $*$ -halka olduğundan $xa = 0$ ve dolayısı ile

$x \in l_{\mathcal{A}}(a)$ olur. Sonuç olarak $l_{\mathcal{A}}(a) = l_{\mathcal{A}}(aa^*)$ elde edilir, bu ise $lp(a) = lp(aa^*)$ olmasını gerektirir.

(3) : $x \in r_{\mathcal{A}}(a^*)$ olsun. O zaman $a^*x = 0$ olur. Bu durumda $aa^*x = 0$ ve dolayısı ile $x \in r_{\mathcal{A}}(aa^*)$ olur. Karşıt olarak $x \in r_{\mathcal{A}}(aa^*)$ olsun. $aa^*x = 0$ ise $0 = x^*aa^*x = (a^*x)^*(a^*x)$ olur. Halka Rickart *-halka olduğundan öz *-halkadır, $a^*x = 0$ ve dolayısı ile $x \in r_{\mathcal{A}}(a^*)$ olur. Sonuç olarak $r_{\mathcal{A}}(a^*) = r_{\mathcal{A}}(aa^*)$ elde edilir, bu ise $rp(a^*) = rp(aa^*)$ olmasını gerektirir.

(4) : (1), (2) ve (3) ifadelerinden $lp(aa^*) = rp(aa^*) = lp(a) = rp(a^*)$ elde edilir.

Teorem 3.3.20. $\mathcal{A}$ bir Rickart *-halka, $a, b \in \mathcal{A}$ ve $a \leq^- b$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

$$(1) \quad a \underset{*}{\leq} b,$$

$$(2) \quad aa^* \underset{*}{\leq} bb^*,$$

$$(3) \quad a^*a \underset{*}{\leq} b^*b \text{ dir (Marovt, Rakić ve Djordjević 2015).}$$

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) : $a \underset{*}{\leq} b$ olsun. Bu durumda $aa^* = ba^* = ab^*$ ve $a^*a = a^*b = b^*a$ olur. O zaman

$$(aa^*)^*(bb^*) = aa^*bb^* = aa^*ab^* = aa^*aa^* = (aa^*)^*(aa^*)$$

ve

$$(bb^*)(aa^*)^* = bb^*aa^* = ba^*aa^* = aa^*aa^* = (aa^*)(aa^*)^*$$

eşitlikleri elde edilir. Dolayısı ile $aa^* \underset{*}{\leq} bb^*$ olur.

(2) $\Rightarrow$ (1) : $p = lp(a)$, $q = rp(a)$ ve $aa^* \underset{*}{\leq} bb^*$ olsun. O zaman $c \in (1-p)\mathcal{A}(1-p)$ olmak üzere

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times q}, \quad aa^* = \begin{bmatrix} aa^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times p} \quad \text{ve} \quad bb^* = \begin{bmatrix} aa^* & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}_{p \times p}$$

matris gösterimleri vardır. Ayrıca $a \leq^- b$ olduğundan Lemma 3.3.17 gereği

$$b = \begin{bmatrix} a + p_1 b_4 q_1 & p_1 b_4 \\ b_4 q_1 & b_4 \end{bmatrix}_{p \times q}$$

matris gösterimi vardır. Bu durumda

$$bb^* = \begin{bmatrix} (a + p_1b_4q_1)(a + p_1b_4q_1)^* + (p_1b_4)(p_1b_4)^* & (a + p_1b_4q_1)(p_1b_4)^* + p_1b_4b_4^* \\ b_4q_1(a + p_1b_4q_1)^* + b_4(p_1b_4)^* & b_4q_1(b_4q_1)^* + b_4b_4^* \end{bmatrix}_{p \times p}$$

olur. Dolayısı ile

$$\begin{aligned} aa^* &= (a + p_1b_4q_1)(a + p_1b_4q_1)^* + (p_1b_4)(p_1b_4)^* \\ &= (a + p_1b_4q_1)a^* + (a + p_1b_4q_1)(b_4q_1)^*p_1^* + (p_1b_4)(p_1b_4)^* \\ &= (a + p_1b_4q_1)a^* + (-p_1b_4b_4^*)p_1^* + (p_1b_4)(p_1b_4)^* \\ &= (a + p_1b_4q_1)a^* = aa^* + p_1b_4q_1a^* \end{aligned}$$

dır. Böylece $p_1b_4q_1a^* = 0$ olur. $q_1 \in (1 - q)\mathcal{A}q$ olduğundan ve Lemma 3.3.19 gereğince $0 = p_1b_4q_1q = p_1b_4q_1$ olur. Ayrıca yukarıdaki eşitliklerden $(p_1b_4)(p_1b_4)^* = 0$ elde edilir. $\mathcal{A}$ Rickart $*$ -halka olduğundan öz $*$ -halka olup $p_1b_4 = 0$ olur. Aynı zamanda $(a + p_1b_4q_1)(b_4q_1)^* + p_1b_4b_4^* = 0$ eşitliğinden $a(b_4q_1)^* = 0$ elde edilir. Dolayısı ile $q(b_4q_1)^* = 0$ ve $b_4q_1 = 0$ olur. Sonuç olarak

$$b = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b_4 \end{bmatrix}_{p \times q}$$

matris gösterimi vardır. Teorem 3.3.12 gereğince $a \leq b$ olur.

(1) $\Leftrightarrow$ (3) denkliği benzer şekilde gösterilebilir.

Lemma 3.3.21. $\mathcal{A}$ bir Rickart $*$ -halka olsun. Eğer $a \in \mathcal{A}$ elemanı normal ise $lp(a) = rp(a)$ olur (Marovt, Rakić ve Djordjević 2015).

İspat: Lemma 3.3.19 gereğince $lp(a) = rp(a^*) = rp(aa^*) = rp(a^*a) = rp(a)$ olur.

Teorem 3.3.22. $\mathcal{A}$ bir Rickart $*$ -halka, a elemanı normal ve $a \leq^- b$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) $a \underset{*}{\leq} b$,
- (2) a ve b değişmelidir,
- (3) a^* ve b değişmelidir,

(4) a ve b^* değişmelidir,

(5) a^* ve b^* değişmelidir (Marovt, Rakić ve Djordjević 2015).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) : $a \in \mathcal{A}$ elemanı normal ve $a \leq_* b$ olsun. Teorem 3.3.12 ve Lemma 3.3.19 gereğince $p = lp(a) = rp(a)$ olmak üzere

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times p} \quad \text{ve} \quad b = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b_4 \end{bmatrix}_{p \times p}$$

matris gösterimleri vardır. Bu durumda

$$ab = ba = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times p}$$

olur.

(2) $\Rightarrow$ (1) : $a \in \mathcal{A}$ normal eleman ve $a \leq^- b$ olsun. Lemma 3.3.19 gereğince $p = lp(a) = rp(a)$, $q_1 \in (1-p)\mathcal{A}p$ ve $p_1 \in p\mathcal{A}(1-p)$ olmak üzere

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times p} \quad \text{ve} \quad b = \begin{bmatrix} a + p_1 b_4 q_1 & p_1 b_4 \\ b_4 q_1 & b_4 \end{bmatrix}_{p \times p}$$

matris gösterimleri vardır. $ab = ba$ olduğundan

$$ab = \begin{bmatrix} a^2 + ap_1 b_4 q_1 & ap_1 b_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times p} = \begin{bmatrix} a^2 + p_1 b_4 q_1 a & 0 \\ b_4 q_1 a & 0 \end{bmatrix}_{p \times p} = ba$$

olur. $ap_1 b_4 = 0$ ve $l_{\mathcal{A}}(a) = l_{\mathcal{A}}(p_1)$ olduğundan $p_1 b_4 = 0$ olur. Benzer şekilde $b_4 q_1 a = 0$ ve $r_{\mathcal{A}}(a) = r_{\mathcal{A}}(q_1)$ olduğundan $b_4 q_1 = 0$ olur. Bu durumda $b \in \mathcal{A}$ elemanının

$$b = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b_4 \end{bmatrix}_{p \times p}$$

matris gösterimi vardır. Teorem 3.3.12 gereğince $a \leq_* b$ elde edilir.

Benzer şekilde (3), (4), (5) ifadelerinin (1) ifadesine denk oldukları gösterilebilir.

Teorem 3.3.23. $\mathcal{A}$ bir Rickart $*$ -halka ve $a, b \in \mathcal{A}$ elemanları kısmi izometrilere olsun. $a \leq_* b$ olması için gerek ve yeter şart $a \leq^- b$ olmasıdır (Marovt, Rakić ve Djordjević 2015).

İspat: Tanımları gereği $a \leq_* b$ ise $a \leq^- b$ olduğu açıktır. Diğer taraftan $a \leq^- b$ olsun. O zaman $a = pb = bq$ olacak şekilde $p, q \in \mathcal{A}$ eşkare elemanları vardır. Bu durumda $a = bq$ ve $a = pb$ olmak üzere

$$a^* = q^*b^* = q^*b^*bb^* = a^*bb^*$$

ve

$$a = pb = pbb^*b = ab^*b$$

eşitlikleri vardır. $a \leq b$ olduğunu görmek için Teorem 3.3.20 gereğince $a^*a \leq b^*b$ olduğunu görmek yeterlidir.

$$(a^*a)(a^*a)^* = a^*aa^*a = a^*a = b^*ba^* = (b^*b)(a^*a)^*$$

ve

$$(a^*a)^*(a^*a) = a^*aa^*a = a^*a = a^*ab^*b = (a^*a)^*(b^*b)$$

olur. Dolayısı ile $a^*a \leq_* b^*b$ elde edilir.

Teorem 3.3.24. $\mathcal{A}$ bir Rickart $*$ -halka, $a, b \in \mathcal{A}$ ve $a \leq_* b$ olsun.

$$(1) \quad b^2 = b \text{ ise } a^2 = a \text{ dır,}$$

$$(2) \quad b^2 = b = b^* \text{ ise } a^2 = a = a^* \text{ dır,}$$

$$(3) \quad b \in \mathcal{A} \text{ kısmi izometri ise } a \in \mathcal{A} \text{ kısmi izometridir (Marovt, Rakić ve Djordjević 2015).}$$

İspat: (1) : $a \leq_* b$ ise $a \leq^- b$ dir. Teorem 3.1.11 gereğince $a^2 = a$ olur.

(2) : Bir önceki ifadeden $b^2 = b$ ve $a \leq b$ olduğu durumda $a^2 = a$ olduğu bilinmektedir. O zaman $a \in \mathcal{A}$ elemanının kendine eş eleman olduğunu göstermek yeterlidir. $a \leq_* b$ olduğundan $a = pb = bq$ olacak şekilde $p = lp(a)$ ve $q = rp(a)$ elemanları vardır.

$$a = pa = bpa = b^*p^*a = (pb)^*a = a^*a = a^*$$

olur.

(3) : $b \in \mathcal{A}$ elemanı kısmi izometri olsun. $a \leq_* b$ olduğundan

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times q} \quad \text{ve} \quad b = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b - a \end{bmatrix}_{p \times q}$$

matris gösterimleri vardır. Bu durumda

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b-a \end{bmatrix}_{p \times q} &= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b-a \end{bmatrix}_{p \times q} \begin{bmatrix} a^* & 0 \\ 0 & b^* - a^* \end{bmatrix}_{p \times q} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b-a \end{bmatrix}_{p \times q} \\ &= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b-a \end{bmatrix}_{p \times q} = \begin{bmatrix} aa^*a & 0 \\ 0 & (b-a)(b-a)^*(b-a) \end{bmatrix}_{p \times q} \end{aligned}$$

olur. Dolayısı ile $a = aa^*a$ olup $a \in \mathcal{A}$ elemanı bir kısmi izometridir.

3.3.1 Sağ-Yıldız ve Sol-Yıldız Kısmi Sıralama Bağlılıkları

Baksalary ve Mitra (1991) *sol-yıldız kısmi sıralama bağıntısı* ve *sağ-yıldız kısmi sıralama bağıntısı* olarak adlandırılan aşağıdaki iki tanımı yapmışlardır.

Tanım 3.3.25. H bir Hilbert uzayı ve $A, B \in B(H)$ olmak üzere $A^*A = A^*B$ ve $ImA = ImB$ oluyor ise $A * \leq B$ denir (Baksalary ve Mitra 1991).

Tanım 3.3.26. H bir Hilbert uzayı $A, B \in B(H)$ olmak üzere $AA^* = BA^*$ ve $ImA^* = ImB^*$ oluyor ise $A \leq^* B$ denir (Baksalary ve Mitra 1991).

Tanım 3.3.27. H bir Hilbert uzayı $A, B \in B(H)$ olmak üzere

- (1) $ImP = \overline{ImA}$,
- (2) $KerA = KerQ$,
- (3) $PA = PB$,
- (4) $AQ = BQ$

şartlarını sağlayan $P \in B(H)$ kendine eş, eşkare elemanı ve $Q \in B(H)$ eşkare elemanı varsa $A * \leq B$ denir (Semrl 2010).

Tanım 3.3.28. H bir Hilbert uzayı $A, B \in B(H)$ olmak üzere

- (1) $ImP = \overline{ImA}$,
- (2) $KerA = KerQ$,
- (3) $PA = PB$,

$$(4) \quad AQ = BQ$$

şartlarını sağlayan $P \in B(H)$ eşkare elemanı ve $Q \in B(H)$ kendine eş, eşkare elemanı varsa $A \leq^* B$ denir (Semrl 2010).

Tanım 3.3.29. H bir Hilbert uzayı $A, B \in B(H)$ olmak üzere

$$(1) \quad l_{B(H)}(A) = B(H) \cdot (I - P),$$

$$(2) \quad r_{B(H)}(A) = (I - Q) \cdot B(H),$$

$$(3) \quad PA = PB,$$

$$(4) \quad AQ = BQ$$

şartlarını sağlayan $P \in B(H)$ kendine eş, eşkare elemanı ve $Q \in B(H)$ eşkare elemanı varsa $A * \leq B$ denir (Marovt, Rakić ve Djordjević 2015).

Tanım 3.3.30. H bir Hilbert uzayı $A, B \in B(H)$ olmak üzere

$$(1) \quad l_{B(H)}(A) = B(H) \cdot (I - P),$$

$$(2) \quad r_{B(H)}(A) = (I - Q) \cdot B(H),$$

$$(3) \quad PA = PB,$$

$$(4) \quad AQ = BQ$$

şartlarını sağlayan $P \in B(H)$ eşkare elemanı ve $Q \in B(H)$ kendine eş, eşkare elemanı varsa $A \leq^* B$ denir (Marovt, Rakić ve Djordjević 2015).

Tanım 3.3.31. $\mathcal{A}$ birimli bir $*$ -halka ve $a, b \in \mathcal{A}$ olsun.

$$(1) \quad l_{\mathcal{A}}(a) = \mathcal{A} \cdot (1 - p),$$

$$(2) \quad r_{\mathcal{A}}(a) = (1 - q) \cdot \mathcal{A},$$

$$(3) \quad pa = pb,$$

$$(4) \quad aq = bq$$

şartlarını sağlayan $p \in \mathcal{A}$ kendine eş, eşkare elemanı ve $q \in \mathcal{A}$ eşkare elemanı varsa $a * \leq b$ denir (Dolinar, Guterman ve Marovt 2014).

Tanım 3.3.32. $\mathcal{A}$ birimli bir $*$ -halka ve $a, b \in \mathcal{A}$ olsun.

$$(1) \ l_{\mathcal{A}}(a) = \mathcal{A}(1 - p),$$

$$(2) \ r_{\mathcal{A}}(a) = (1 - q)\mathcal{A},$$

$$(3) \ pa = pb,$$

$$(4) \ aq = bq$$

şartlarını sağlayan $p \in \mathcal{A}$ eşkare elemanı ve $q \in \mathcal{A}$ kendine eş, eşkare elemanı varsa $a \leq^* b$ denir (Dolinar, Guterman ve Marovt 2014).

Lemma 3.3.33. $a * \leq b$ olması için gerek ve yeter şart $a^* \leq^* b^*$ olmasıdır (Marovt, Rakić ve Djordjević 2015).

İspat: $\Rightarrow$: $a * \leq b$ olsun. $a = pb = bq$ olacak şekilde $p \in \mathcal{A}$ kendine eş, eşkare ve $q \in \mathcal{A}$ eşkare elemanları vardır. $a^* = q^*b^* = b^*p$ ve $q^* \in \mathcal{A}$ eşkare eleman olduğundan $a^* \leq^* b^*$ olur.

$\Leftarrow$: $a^* \leq^* b^*$ olsun. $a^* = pb^* = b^*q$ olacak şekilde $p \in \mathcal{A}$ eşkare ve $q \in \mathcal{A}$ kendine eş, eşkare elemanları vardır. $a = qb = bp^*$ ve $p^* \in \mathcal{A}$ eşkare eleman olduğundan $a * \leq b$ olur.

Teorem 3.3.34. $\mathcal{A}$ bir Rickart $*$ -halka ve $a, b \in \mathcal{A}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

$$(1) \ a * \leq b,$$

$$(2) \ a = pb = bq \text{ olacak şekilde kendine eş, eşkare } p \text{ elemanı ve } q \in RP(a) \text{ eşkare elemanı vardır,}$$

$$(3) \ a^*a = a^*b \text{ ve } q \in RP(a) \text{ eşkare elemanı için } a = bq \text{ dır,}$$

(4) $p = lp(a)$ ve $q \in RP(a)$ olmak üzere a ve b elemanlarının

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times q} \quad \text{ve} \quad b = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b_4 \end{bmatrix}_{p \times q} \quad (3.49)$$

matris gösterimleri vardır (Marovt, Rakić ve Djordjević 2015).

İspat: Teorem 3.3.12 ispatına benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 3.3.35. $\mathcal{A}$ bir Rickart $*$ -halka ve $a, b \in \mathcal{A}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) $a \leq_* b$,
- (2) $a = pb = bq$ olacak şekilde kendine eş, eşkare q elemanı ve $p \in LP(a)$ eşkare elemanı vardır,
- (3) $aa^* = ba^*$ ve $p \in LP(a)$ eşkare elemanı için $a = pb$ dır,
- (4) $p \in LP(a)$ ve $q = rp(a)$ olmak üzere a ve b elemanlarının

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times q} \quad \text{ve} \quad b = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b_4 \end{bmatrix}_{p \times q} \quad (3.50)$$

matris gösterimleri vardır (Marovt, Rakić ve Djordjević 2015).

İspat: Teorem 3.3.12 ispatına benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 3.3.36. $\mathcal{A}$ bir Rickart $*$ -halka olsun. $* \leq$ bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır (Marovt, Rakić ve Djordjević 2015).

İspat: Yansıma: $\mathcal{A}$ Rickart $*$ -halka olduğundan $a = pa = aq$ olacak şekilde $p \in \mathcal{A}$ kendine eş, eşkare elemanı ve $q \in RP(a)$ eşkare elemanı vardır. Dolayısı ile $a \leq_* a$ dır.

Ters Simetri: $a \leq_* b$ ve $b \leq_* a$ olacak şekilde $a, b \in \mathcal{A}$ olsun. O zaman $a = pb = bq$ ve $b = ra = as$ olacak şekilde $p, r \in \mathcal{A}$ kendine eş, eşkare elemanları ve $q, s \in RP(a)$ elemanları mevcuttur. $a = paq$ ve $b = a + (1 - p)b(1 - q)$ olduğundan

$$b - a = (1 - p)b(1 - q) = (1 - p)ra(1 - q) = (1 - p)r(a - aq) = 0$$

olur. Dolayısı ile $a = b$ dir.

Geçişme: $a * \leq b$ ve $b * \leq c$ olacak şekilde $a, b, c \in \mathcal{A}$ olsun . O zaman

$$a = pa = pb = bq = pb$$

ve

$$b = rb = rc = cs = bs$$

olacak şekilde $p, r \in \mathcal{A}$ kendine eş, eşkare elemanları ve $q, s \in RP(a)$ elemanları mevcuttur. $rpa = ra = rbq = bq = a$ olduğundan $1 - rp \in l_{\mathcal{A}}(a) = l_{\mathcal{A}}(p)$ olur. Bu durumda $p = rp$ ve $p^* = p = (rp)^* = pr$ elde edilir.

$$a = bq = bsq = bqsq = bqqsq = aqsq \quad (3.51)$$

eşitliğinden $1 - qsq \in r_{\mathcal{A}}(a) = r_{\mathcal{A}}(q)$ olur. Bu durumda $q(1 - qsq) = 0$ eşitliği elde edilir. Bu eşitliklerden $q = qsq$ olur. $p' = p$ ve $q' = q + (1 - q)sq$ olsun. q' elemanı eşkaredir.

$$p'c = pc = prc = pb = a \quad (3.52)$$

ve

$$cq' = c[q + (1 - q)sq] = cq + csq - cqsq = csq = a \quad (3.53)$$

olur. Dolayısı ile $a * \leq c$ dir.

Teorem 3.3.37. $\mathcal{A}$ bir Rickart $*$ -halka olsun. $\leq *$ bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır (Marovt, Rakić ve Djordjević 2015).

İspat: Yansıma: $\mathcal{A}$ Rickart $*$ -halka olduğundan $a = pa = aq$ olacak şekilde $q \in \mathcal{A}$ kendine eş, eşkare elemanı ve $p \in LP(a)$ eşkare elemanı vardır. Dolayısı ile $a \leq * a$ dir.

Ters Simetri: $a \leq * b$ ve $b \leq * a$ olacak şekilde $a, b \in \mathcal{A}$ olsun. O zaman $a = pb = bq$ ve $b = ra = as$ olacak şekilde $q, s \in \mathcal{A}$ kendine eş, eşkare elemanları ve $p, r \in LP(a)$ elemanları mevcuttur. $a = paq$ ve $b = a + (1 - p)b(1 - q)$ olduğundan

$$b - a = (1 - p)b(1 - q) = (1 - p)ra(1 - q) = (1 - p)r(a - aq) = 0$$

olur. Dolayısı ile $a = b$ dir.

Geçişme: $a \leq^* b$ ve $b \leq^* c$ olacak şekilde $a, b, c \in \mathcal{A}$ olsun. O zaman

$$a = pa = pb = bq = pb$$

ve

$$b = rb = rc = cs = bs$$

olacak şekilde $q, s \in \mathcal{A}$ kendine eş, eşkare elemanları ve $p, r \in LP(a)$ elemanları mevcuttur. $aqs = as = qbs = qb = a$ olduğundan $1 - qs \in r_{\mathcal{A}}(a) = r_{\mathcal{A}}(q)$ olur. Bu durumda $q = qs$ ve $q^* = q = (qs)^* = sq$ elde edilir.

$$a = pb = prb = prpb = prppb = prpa \quad (3.54)$$

eşitliğinden $1 - prp \in l_{\mathcal{A}}(a) = l_{\mathcal{A}}(p)$ olur. Bu durumda $(1 - prp)p = 0$ eşitliği elde edilir. Bu eşitliklerden $p = prp$ olur. $p' = p + pr(1 - p)$ ve $q' = q$ olsun. p' elemanı eşkaredir.

$$cq' = cq = csq = bq = a \quad (3.55)$$

ve

$$p'c = [p + pr(1 - p)]c = pc + prc - prpc = prc = pb = a \quad (3.56)$$

olur. Dolayısı ile $a \leq^* c$ dir.

Teorem 3.3.38. $\mathcal{A}$ bir Rickart $*$ -halka ve $a, b \in \mathcal{A}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) $a * \leq b$,
- (2) $a \leq^- b$ ve a^*b kendine eş elemandır,
- (3) $p = lp(a)$ ve $q \in RP(a)$ olmak üzere

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times q} \quad \text{ve} \quad b = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b_4 q_1 & b_4 \end{bmatrix}_{p \times q} \quad (3.57)$$

matris gösterimleri vardır (Marovt, Rakić ve Djordjević 2015).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) : $a * \leq b$ olsun. Bu durumda $a \leq^- b$ ve $a^*a = a^*b$ dir. a^*b elemanının kendine eş olduğunu göstermek yeterlidir.

$$a^*b = a^*a = (a^*a)^* = (a^*b)^*$$

olur. Dolayısı ile $a^*b \in \mathcal{A}$ elemanı kendine eştir.

(2) $\Rightarrow$ (3) : $a \leq^- b$ ve a^*b kendine eş eleman olsun. Lemma 3.3.17 gereğince $p = lp(a)$ ve $q = rp(a)$ olmak üzere

$$a^*b = \begin{bmatrix} a^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{q \times p} \begin{bmatrix} a + p_1b_4q_1 & p_1b_4 \\ b_4q_1 & b_4 \end{bmatrix}_{p \times q} = \begin{bmatrix} a^*a + a^*p_1b_4q_1 & a^*p_1b_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{q \times q}$$

elde edilir. Bu durumda a^*b kendine eş eleman olduğundan $a^*p_1b_4 = 0$, $p_1b_4 \in r_{\mathcal{A}}(a^*) = r_{\mathcal{A}}(rp(a^*)) = r_{\mathcal{A}}(lp(a)) = r_{\mathcal{A}}(p)$ olur. $p_1 \in p\mathcal{A}(1-p)$ olduğundan $p_1b_4 = 0$ olur. Dolayısı ile $b \in \mathcal{A}$ elemanının

$$b = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b_4q_1 & b_4 \end{bmatrix}_{p \times q}$$

matris gösterimi vardır.

(3) $\Rightarrow$ (1) : $a, b \in \mathcal{A}$ elemanlarının matris gösterimleri

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times q} \quad \text{ve} \quad b = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b_4q_1 & b_4 \end{bmatrix}_{p \times q} \quad (3.58)$$

olsun. $q' = \begin{bmatrix} q & 0 \\ -q_1 & 0 \end{bmatrix}_{p \times q}$ olmak üzere $a^*a = a^*b$ ve $a = bq'$ sonuçları elde edilir.

Dolayısı ile $a * \leq b$ olur.

Teorem 3.3.39. $\mathcal{A}$ bir Rickart $*$ -halka olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

$$(1) \ a \leq_* b,$$

$$(2) \ a \leq^- b \text{ ve } b^*a \text{ kendine eş elemandır,}$$

$$(3) \ p \in LP(a) \text{ ve } q = rp(a) \text{ olmak üzere}$$

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times q} \quad \text{ve} \quad b = \begin{bmatrix} a & p_1b_4 \\ 0 & b_4 \end{bmatrix}_{p \times q} \quad (3.59)$$

matris gösterimleri vardır (Marovt, Rakić ve Djordjević 2015).

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) : $a \leq_* b$ olsun. Bu durumda $a \leq^- b$ ve $aa^* = ba^*$ dir. ba^* elemanın kendine eş olduğunu göstermek yeterlidir.

$$ba^* = aa^* = (aa^*)^* = (ba^*)^*$$

olur. Dolayısı ile $ba^* \in \mathcal{A}$ elemanı kendine eştir.

(2) $\Rightarrow$ (3) : $a \leq^- b$ ve ba^* kendine eş eleman olsun. Lemma 3.3.17 gereğince $p = lp(a)$ ve $q = rp(a)$ olmak üzere

$$ba^* = \begin{bmatrix} a + p_1 b_4 q_1 & p_1 b_4 \\ b_4 q_1 & b_4 \end{bmatrix}_{p \times q} \begin{bmatrix} a^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{q \times p} = \begin{bmatrix} aa^* + p_1 b_4 q_1 a^* & 0 \\ b_4 q_1 a^* & 0 \end{bmatrix}_{q \times q}$$

elde edilir. Bu durumda ba^* elemanını kendine eş olduğundan $b_4 q_1 a^* = 0$, $b_4 q_1 \in l_{\mathcal{A}}(a^*) = l_{\mathcal{A}}(rp(a^*)) = l_{\mathcal{A}}(lp(a)) = l_{\mathcal{A}}(q)$ olur. $q_1 \in (1 - q)\mathcal{A}q$ olduğundan $b_4 q_1 = 0$ olur. Dolayısı ile $b \in \mathcal{A}$ elemanının

$$b = \begin{bmatrix} a & p_1 b_4 \\ 0 & b_4 \end{bmatrix}_{p \times q}$$

matris gösterimi vardır.

(3) $\Rightarrow$ (1) : $a, b \in \mathcal{A}$ elemanlarının matris gösterimleri

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times q} \quad \text{ve} \quad b = \begin{bmatrix} a & p_1 b_4 \\ 0 & b_4 \end{bmatrix}_{p \times q} \quad (3.60)$$

olsun. $p' = \begin{bmatrix} p & -p_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{p \times q}$ olmak üzere $aa^* = ba^*$ ve $a = p'b$ sonuçları elde edilir.

Dolayısı ile $a \leq_* b$ olur.

Teorem 3.3.40. $\mathcal{A}$ bir Rickart $*$ -halka ve $a, b \in \mathcal{A}$ normal elemanlar olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

$$(1) \quad a \underset{*}{\leq} b$$

$$(2) \quad a *_\leq b$$

$$(3) \quad a \leq_* b \quad (\text{Marovt, Rakić ve Djordjević 2015}).$$

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) : Tanımları gereği $a \leq_* b$ olması $a *_\leq b$ olmasını gerektirir.

(2) $\Rightarrow$ (1) : $a, b \in \mathcal{A}$ elemanları normal ve $a *_\leq b$ olsun. Lemma 3.3.21 gereğince $lp(a) = rp(a)$ dır. $p = lp(a)$ olmak üzere

$$bb^* = \begin{bmatrix} a & p_1 b_4 \\ 0 & b_4 \end{bmatrix}_{p \times p} \begin{bmatrix} a^* & (b_4 q_1)^* \\ 0 & b_4^* \end{bmatrix}_{p \times p} = \begin{bmatrix} aa^* & a(b_4 q_1)^* \\ b_4 q_1 a^* & b_4 q_1 (b_4 q_1)^* + b_4 b_4^* \end{bmatrix}_{p \times p},$$

$$b^* b = \begin{bmatrix} a^* & (b_4 q_1)^* \\ 0 & b_4^* \end{bmatrix}_{p \times p} \begin{bmatrix} a & p_1 b_4 \\ 0 & b_4 \end{bmatrix}_{p \times p} = \begin{bmatrix} a^* a + (b_4 q_1)^* b_4 q_1 & (b_4 q_1)^* b_4 \\ b_4^* b_4 q_1 & b_4^* b_4 \end{bmatrix}_{p \times p}$$

eşitlikleri elde edilir. $a, b \in \mathcal{A}$ elemanları normal olduğundan $a^* a = aa^* = a^* a + (b_4 q_1)^* b_4 q_1$ olur. $(b_4 q_1)^* b_4 q_1 = 0$ ve $\mathcal{A}$ Rickart $*$ -halka olduğundan öz $*$ -halka olup $b_4 q_1 = 0$ olur. Dolayısı ile $b \in \mathcal{A}$ elemanının $b = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b_4 \end{bmatrix}_{p \times p}$ matris gösterimi vardır. Teorem 3.3.12 gereğince $a \leq_* b$ olur. Dolayısı ile $a *_\leq b$ olması $a \leq_* b$ olmasını gerektirir.

Benzer şekilde $a \leq_* b \Leftrightarrow a \leq_* b$ denkliği gösterilebilir.

Uyarı 3.3.41. $\mathcal{A}$ birimli $*$ -düzenli bir halka, a elemanı Moore-Penrose tersinir ve a nın Moore-Penrose tersi $a^\dagger$ olmak üzere $a_r^\pi = 1 - aa^\dagger$ ve $a_l^\pi = 1 - a^\dagger a$ elemanları göz önüne alınsın (Marovt, Rakić ve Djordjević 2015).

Tanım 3.3.42. $\mathcal{A}$ birimli $*$ -düzenli bir halka ve $a, b \in \mathcal{A}$ olsun. $a^* a = a^* b$ ve $b_r^\pi a = 0$ oluyor ise $a *_\leq b$ olur (Marovt, Rakić ve Djordjević 2015).

Tanım 3.3.43. $\mathcal{A}$ birimli $*$ -düzenli bir halka ve $a, b \in \mathcal{A}$ olsun. $aa^* = ba^*$ ve $ab_l^\pi = 0$ oluyor ise $a \preceq_* b$ olur (Marovt, Rakić ve Djordjević 2015).

Teorem 3.3.44. $\mathcal{A}$ birimli $*$ -düzenli bir halka ve $a, b \in \mathcal{A}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

$$(1) \leq_*$$

$$(2) \preceq_* \quad (\text{Marovt, Rakić ve Djordjević 2015}).$$

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) : $a \leq_* b$ olsun. Bu durumda $a = pb$ ve $a = bq$ olacak şekilde $p \in \mathcal{A}$ eşkare, $q \in \mathcal{A}$ kendine eş, eşkare elemanları vardır. Lemma 3.3.11 gereğince

$aa^* = ba^*$ olur. Ayrıca $ab^\dagger b = bb^\dagger bq = bq = a$ eşitliği sağlanır. Bu durumda $ab_l^\pi = a(1 - b^\dagger b) = a - ab^\dagger b = 0$ olur. Dolayısı ile $a \preceq^* b$ olur.

(2) $\Rightarrow$ (1) : $a \preceq^* b$ olsun. O zaman $aa^* = ba^*$ ve $ab_l^\pi = 0$ olacak şekilde $b^\dagger \in \{b^\dagger\}$ elemanı vardır. Bu durumda $a = ab^\dagger b$ olur. Lemma 3.3.11 gereğince $a = aq = bq$ olacak şekilde $q \in \mathcal{A}$ kendine eş, eşkare elemanı vardır. $p = ab^\dagger$ olsun. O zaman $pb = ab^\dagger b = a$ ve $p^2 = ab^\dagger ab^\dagger = ab^\dagger bqb^\dagger = aqb^\dagger = ab^\dagger$ olur. Ayrıca $xab^\dagger = 0$ ise $xab^\dagger b = 0$ olup $xa = 0$ elde edilir. Diğer taraftan $xa = 0$ ise $bab^\dagger = 0$ olur. Dolayısı ile $l_{\mathcal{A}}(p) = l_{\mathcal{A}}(a)$ olur. Dolayısı ile $a \leq^* b$ olur.

Teorem 3.3.45. $\mathcal{A}$ birimli $*$ -düzenli bir halka ve $a, b \in \mathcal{A}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

$$(1) \quad a * \leq b$$

$$(2) \quad a * \preceq b \quad (\text{Marovt, Rakić ve Djordjević 2015}).$$

İspat: Teorem 3.3.44 in ispatına benzer şekilde gösterilebilir.

4. SONUÇ

Bu çalışmada genelleştirilmiş tersinir elemanların yardımı ile sıralama bağıntıları tanımlanmıştır. Söz konusu olan sıralama bağıntılarının özellikleri incelenmiş, tanımlanan sıralama bağıntıları arasındaki ilişkilerden bahsedilmiştir. Ayrıca söz konusu olan sıralama bağıntıları yardımı ile bağıntılı olan elemanların matris formları verilmiştir.



KAYNAKLAR

- Baksalary J. K. ve Mitra S. K. 1991. Left-star and right-star partial orderings. Linear Algebra Appl., 149;73-89.
- Campbell S. L. ve Meyer C. D. 2009. Generalized inverse of linear transformations. SIAM: Philadelphia.
- Clifford A. H. ve Preston G. B. 1961. The Algebraic Theory of the Semigroups. Amer. Math. Soc.
- Drazin M. P. 1978. Natural Structures on semigroups with involution. Bull. Amer. Math. Soc., 84;139-141.
- Dolinar G. ,Guterman A. ve Marovt J. 2014. J. Monotone transformation on $B(H)$ with respect to the left-star and the right-star partial order. Math. Inequal. Appl., 17(2);17-43.
- Dolinar G. ve Marovt J. 2011. Star partial order on $B(H)$. Linear Algebra Appl., 434(1):319-326.
- Hartwig R. E. ve Levine J. 1981. Applications of the Drazin inverse to the Hill cryptographic system, Part III. Cryptologia., 5(2);67-77.
- Hartwig R. E. 1980. How to partially order regular elements. Math. Japon., 25;1-13.
- Koliha J. J. 1996. A generalized Drazin inverse, Glasgow Math. J., 38; 367-381.
- Ljapin E. S. 1960. Semigroups, Fitzmatzig, Moscow.

- Liu X., Benitez J. ve Zhong J. 2010. Some results on partial ordering and reserve order law of elements of C^* -algebras. J. Math. Anal. Appl., 370;295-301.
- Marovt J. 2018. Orders in rings based on the core-nilpotent decomposition. Linear Multilinear Algebra, 66(4);803-820.
- Marovt J., Rakić D. S. ve Djordjević D. S. 2015. Star, left-star and right-star partial orders in Rickart $*$ -rings. Linear Multilinear Algebra, 63;343-365.
- Miller V. A. ve Neumann M. 1987. Successive overrelaxation methods for solving the rank deficient linear least squares problem. Linear Algebra Appl., 88/89;533-557.
- Mitra S. K., Bhimasankaram P. ve Malik S. B. 2010. Matrix Partial Orders, Shorted Operators and Applications, Series in Algebra, 10, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ.
- Mitra S. K. 1987. On group inverses and the sharp order. Linear Algebra Appl., 92;17-37.
- Mitra S. K. ve Hartwig R. E. 1992. Partial orders based on outer inverses. Linear Algebra Appl., 176;3-20.
- Mitsch H. 1986. A natural partial order for semigroups. Proc. Amer. Math. Soc., 97(3);384-388.
- Nambooripad K. S. 1980. The natural partial order on a regular semigroup. Proc. Edinburgh Math. Soc., 23;249-260.

- Rakić D. S. 2015. Generalization of sharp and core partial order using annihilators. Banach J. Math. Anal., 9(3);228-242.
- Rakić D. S. ve Djordjević D. S. 2015. Partial orders in rings based on generalized inverses unified theory. Linear Algebra Appl., 471;203-223.
- Rakočević V. 1999. Continuity of the Drazin inverse. J. Oper. Theory, 41;55-68.
- Semrl P. 2010. Automorphism of $B(H)$ with respect to minus partial order. J. Math. Anal. Appl., 369;205-213.
- Vagner V. V. 1952. Generalized groups. Dokl. Akad. Nauk SSSR 84;1119-1122 (in Russian) English Translation.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Savcı Rahman ARGÜN
Doğum Yeri : Wales İngiltere
Doğum Tarihi : 07.04.1990
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Fethiye Kemal Mumcu Anadolu Lisesi (Temmuz 2008)
Lisans : Sakarya Üniversitesi (Haziran 2015)
Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi

Çalıştığı Kurum ve Yıl

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Araştırma Görevlisi (2019 -)