

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Başak ERGİNKARA

SERBEST LİE CEBİRLERİNİN OTOMORFİZM GRUBU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2019

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

SERBEST LİE CEBİRLERİNİN OTOMORFİZM GRUBU

Başak ERGİNKARA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez .../.../2019 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Şehmus FINDIK
DANIŞMAN

Doç. Dr. Nazar Şahin ÖĞÜŞLÜ
ÜYE

Doç. Dr. Tuncay TUNÇ
ÜYE

Bu Tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Kod No:

**Prof. Dr. Mustafa GÖK
Enstitü Müdürü**

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SERBEST LİE CEBİRLERİNİN OTOMORFİZM GRUBU

Başak ERGİNKARA

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman: Doç. Dr. Şehmus FINDIK

Yıl: 2019, Sayfa: 38

Jüri : Doç. Dr. Şehmus FINDIK
: Doç. Dr. Nazar Şahin ÖĞÜŞLÜ
: Doç. Dr. Tuncay TUNÇ

F_m karakteristiği sıfır olan bir K cismi üzerinde rankı $m \geq 2$ olan serbest metabelyen Lie cebiri olsun. F_m nin sırasıyla otomorfizmleri grubunu ve iç otomorfizmleri normal altgrubunu $\text{Aut}(F_m)$ ve $\text{Inn}(F_m)$ ile gösterelim. $\text{Inn}(F_m)$ içindeki her bir otomorfizm ile değişmeli olan bir φ otomorfizmine merkezi otomorfizm denir. Bu şekildeki otomorfizmler bir grup oluşturur ve bu grup $\text{Inn}(F_m)$ nin $\text{Aut}(F_m)$ içindeki merkezleyenidir. Merkezi otomorfizmler grubunu $C(\text{Inn}(F_m))$ ile gösterelim. $\text{Inn}(F_m)$ grubu değişmeli bir grup olup $C(\text{Inn}(F_m))$ tarafından içerilir.

Bu çalışmada $C(\text{Inn}(F_m))$ grubunun $\text{Inn}(F_m)$ grubuna eşit olduğu elemanter olarak gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Serbest Metabelyen Lie Cebiri, Merkezi Otomorfizm, İç Otomorfizm.

ABSTRACT

MSc THESIS

AUTOMORPHISM GROUP OF FREE LIE ALGEBRAS

Başak ERGİNKARA

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Şehmus FINDIK

Year: 2019, Pages: 38

Jury : Assoc. Prof. Dr. Şehmus FINDIK

: Assoc. Prof. Dr. Nazar Şahin ÖĞÜŞLÜ

: Assoc. Prof. Dr. Tuncay TUNÇ

Let F_m be the free metabelian Lie algebra of rank $m \geq 2$ over a field K of characteristic 0. Let $\text{Aut}(F_m)$ and $\text{Inn}(F_m)$ indicate the group of automorphisms of F_m and the group of inner automorphisms of F_m , respectively. An automorphism φ is said to be a central automorphism if it commutes with each automorphism in $\text{Inn}(F_m)$. Such automorphisms form a group which is the centralizer of $\text{Inn}(F_m)$ in $\text{Aut}(F_m)$. Let $C(\text{Inn}(F_m))$ stand for the group of central automorphisms. $\text{Inn}(F_m)$ is an abelian group, hence it is contained by $C(\text{Inn}(F_m))$.

In this study, we show by elementary techniques that the group $C(\text{Inn}(F_m))$ is equal to the group $\text{Inn}(F_m)$.

Keywords: Free metabelian Lie algebra, Central automorphism, Inner automorphism.

GENİŞLETİLMİŞ ÖZET

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde bu çalışmada genel olarak hangi aşamalardan gidileceğinden bahsedildi.

Çalışmanın ikinci bölümünde ise, ana sonuçların yer aldığı üçüncü bölümde kullanılacak olan bazı kavramlar tanıtıldı. Vektör uzayları, alt vektör uzayları, baz ve boyut kavramları, lineer dönüşümler, cebirler ve serbest cebirler, Lie cebirleri, bunların alt cebirleri ve idealleri, Lie cebiri homomorfizmleri ve izomorfizmleri, serbest Lie cebiri ve metabelyen Lie cebiri tanımlandı ve bazı teoremlerin ispatlarına yer verildi.

Sonlu ranklı serbest metabelyen Lie cebiri F_m nin elemanter dönüşümleri, $\text{Aut}(F_m)$ otomorfizm grubu, IA-otomorfizmleri $\text{IA}(F_m)$, $\text{Inn}(F_m)$ iç otomorfizmler grubu ve $\text{C}(\text{Inn}(F_m))$ iç otomorfizmler grubunun merkezi otomorfizmler grubu tanımlanıp bu gruplarla ilgili bazı özellikler verildi.

A_m ve B_m , sırasıyla bazları $\{a_1, \dots, a_m\}$ ve $\{b_1, \dots, b_m\}$ olan m -boyutlu abelyen Lie cebirleri olmak üzere A_m ve B_m nin abelyen wreath çarpımı $A_m \text{wr} B_m$ tanımlandı. $A_m \text{wr} B_m$ metabelyen Lie cebiri olduğundan, her $\{x_1, \dots, x_m\} \rightarrow A_m \text{wr} B_m$ dönüşümü bir $F_m \rightarrow A_m \text{wr} B_m$ homomorfizmine bir tek şekilde genişletilebilir. Tezde sıkça başvurulan teoremlerden biri olan Shmel'kin teoreminin bir özel durumu olarak, $\varepsilon(x_i) = a_i + b_i$, $i = 1, \dots, m$, şeklinde tanımlanan dönüşümün homomorfik genişlemesi olan $\varepsilon: F_m \rightarrow A_m \text{wr} B_m$ homomorfizmi bir monomorfizmdir. Her $f \in F'_m$ komutatör ideal elemanının bu dönüşüm altındaki görüntüsü; $f_{ij}(t_1, \dots, t_m) \in K[t_1, \dots, t_m]$ ve

$$f = \sum [x_i, x_j] f_{ij}(\text{adx}_1, \dots, \text{adx}_m)$$

olmak üzere

$$\varepsilon(f) = \sum (a_i t_j - a_j t_i) f_{ij}(t_1, \dots, t_m)$$

biçimindedir.

Serbest metabelyen F_m Lie cebiri için $C(\text{Inn}(F_m)) = \text{Inn}(F_m)$ olduğu Shmelkin'in (1973) teoreminin özel bir halidir. Bu tezde onun ispatta kullandığı tekniklerden bağımsız olarak bu eşitliği daha farklı ve elemanter tekniklerle ispatlamayı hedeflemekteyiz.

Son bölümde $C(\text{Inn}(F_m)) \subseteq \text{IA}(F_m)$ ve her $v \in F'_m$ için $\varphi(v) = v$, $\varphi \in C(\text{Inn}(F_m))$, olduğu gösterilmiş ve bundan faydalanılarak $C(\text{Inn}(F_m)) = \text{Inn}(F_m)$ olduğu ispatlanmıştır.



TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında bilgi ve tecrübesiyle beni aydınlatan danışmanım Doç. Dr. Şehmus FINDIK'a sonsuz saygılarımı sunar, büyük bir teşekkürü borç bilirim. Tez sunumu sırasında önerileri ve sorularıyla gelişimime katkıda bulunan değerli jüri üyeleri Doç. Dr. Nazar Şahin ÖĞÜŞLÜ ve Doç. Dr. Tuncay TUNÇ'a teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim hayatım boyunca her an yanımda olan ve her konuda bana destek veren annem Özenç ERGİNKARA ve babam Adnan ERGİNKARA'ya sonsuz sevgi, saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZ.....	I
ABSTRACT.....	II
GENİŞLETİLMİŞ ÖZET.....	III
TEŞEKKÜR.....	V
İÇİNDEKİLER.....	VI
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER.....	3
3. ANA SONUÇLAR.....	13
3.1. Serbest Metabelyen Lie Cebirlerinin İç Otomorfizmleri.....	13
3.2. Serbest Metabelyen Lie Cebirlerinin Merkezi Otomorfizmleri.....	14
KAYNAKLAR.....	27
ÖZGEÇMİŞ.....	29

1. GİRİŞ

Sonlu üretilmiş serbest cebirlerin otomorfizm gruplarının belirlenmesi problemi, modern cebirde önemli bir problemidir. Değişmeli olmayan ve birleşmeli olmayan cebirlere verilebilecek önemli bir örnek olarak Lie cebirlerini ele aldığımızda serbest Lie cebirlerinin otomorfizmleri, Lie cebirleri ile ilgili birçok çalışmada önemli bir kriter olarak önümüze çıkar. Serbest Lie cebirlerinin otomorfizm grubunun tame olduğu gösterilmiştir. Bunun yanında metabelyen Lie cebirleri sınıfındaki serbest cebirlerin otomorfizm grubu, endomorfizm yarıgrubu, test elemanları üzerinde birçok çalışma mevcuttur (Bryant ve Drensky, 1993; Drensky, 1993; Roman'kov, 2008; Fındık, 2011; Drensky ve Fındık, 2012; Öztekin ve Ekici, 2017).

F_m karakteristiği sıfır olan bir K cismi üzerinde $x_1, \dots, x_m$ tarafından üretilmiş ve rankı $m \geq 2$ olan serbest metabelyen Lie cebiri olsun. ζ^2 ile Lie cebirlerinin metabelyen (2. dereceden çözülebilir) sınıfını gösterelim. Bu durumda F_m , ζ^2 Lie cebirleri sınıfında rankı m olan serbest cebirdir.

G abelyen bir grup olmak üzere $C(\text{Inn}(G)) = \text{Aut}(G)$ olduğu, G nin iç otomorfizmlerinin tanımının bir sonucudur.

Grubun abelyen olmadığı durumlar için Miller (1913) yaptığı çalışmada otomorfizmler grubu abelyen olacak şekilde non-abelyen bir G grubu inşa etmiş ve dolayısıyla $C(\text{Inn}(G)) = \text{Aut}(G)$ elde etmiştir. Bu konudaki bir diğer çalışma Curran ve McChaugan (2001) tarafından yapılmış ve G abelyen olmayan bir p -grup olmak üzere $C(\text{Inn}(G)) = \text{Inn}(G)$ olması için gerek ve yeter koşul verilmiştir.

Benzer problem serbest cebirler için aşıkâr sonuçlar vermeyip, A bir cebir olmak üzere $C(\text{Inn}(A)) = \text{Inn}(A)$ ve $C(\text{Inn}(A)) = \text{Aut}(A)$ gibi ekstrem durumların serbest metabelyen cebirleri için çalışılması doğaldır.

F_m serbest metabelyen Lie cebiri için $C(\text{Inn}(F_m)) = \text{Inn}(F_m)$ olduğu Shmelkin'in (1973) makalesinin bir sonucudur. Bu tezde onun ispatta kullandığı tekniklerden bağımsız olarak bu eşitliği daha farklı ve elemanter bir yolla ispatlamayı hedeflemekteyiz.



2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu çalışmada aksi belirtilmedikçe tüm cebirlerin bir K cismi üzerinde olduğu varsayılacaktır. V , K cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere V nin boyutunu $\dim V$ ya da $\dim_K V$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.1: V ve W , K cismi üzerinde iki vektör uzayı olsun. $T: V \rightarrow W$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa T ye bir lineer dönüşüm ya da vektör uzayı homomorfizmi denir.

- (i) $v_1, v_2 \in V$ için $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$
- (ii) $v \in V$ ve her $c \in K$ için $T(cv) = cT(v)$

Tanım 2.2: V ve W , K cismi üzerinde iki vektör uzayı olmak üzere $T: V \rightarrow W$ bir lineer dönüşüm olsun.

1. $\ker T = \{v \mid T(v) = 0\}$ kümesine T lineer dönüşümünün çekirdeği denir. $\ker T$ kümesi V nin alt vektör uzayıdır.
2. $\text{im} T = \{T(v) \in W \mid v \in V\}$ kümesine T lineer dönüşümünün görüntüsü denir. $\text{im} T$ kümesi W nun alt vektör uzayıdır.

Teorem 2.3: V ve W , K cismi üzerinde iki vektör uzayı olmak üzere $T: V \rightarrow W$ lineer dönüşüm olsun. $\ker T = \{0\}$ olması için gerek ve yeter koşul T lineer dönüşümünün birebir olmasıdır.

Tanım 2.4: V ve W , K cismi üzerinde iki vektör uzayı olmak üzere $T: V \rightarrow W$ lineer dönüşümü birebir ve örten ise T ye bir izomorfizm, V ve W uzaylarına da izomorf uzaylar denir ve $V \cong W$ ile gösterilir. Eğer $T: V \rightarrow V$ lineer dönüşümü birebir ve örtense T ye bir otomorfizm denir.

Bir $T: V \rightarrow W$ izomorfizminin tersi olan $T^{-1}: W \rightarrow V$ lineer dönüşümü de bir izomorfizmdir. Ayrıca $T_1: V \rightarrow W$ ve $T_2: U \rightarrow V$ iki izomorfizm olmak üzere $T_1 \circ T_2: U \rightarrow W$ bileşkesi de bir izomorfizmdir.

Tanım 2.5: V, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. V üzerinde aşağıdaki koşullar sağlanacak şekilde bir “ $\times$ ” işleminin tanımlandığını kabul edelim.

1. Her $u, v \in V$ için $u \times v \in V$ dir. (Yani $\times: V \times V \rightarrow V$ bir ikili işlemdir.)
2. Her $u, v, w \in V$ için

$$(u + v) \times w = (u \times w) + (v \times w)$$

$$u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)$$

dir.

3. Her $u, v, w \in V$ için $(u \times v) \times w = u \times (v \times w)$ dir.
4. Her $u, v \in V$ ve $c \in K$ için $c \cdot (u \times v) = (c \cdot u) \times v = u \times (c \cdot v)$ dir.

Bu durumda V vektör uzayına “ $\times$ ” işlemi ile birlikte bir cebir denir. Eğer V cebirinin birim elemanı varsa V ye birimli cebir denir. Eğer V cebirinde “ $\times$ ” işlemine göre değişme özelliği varsa V ye değişmeli cebir denir.

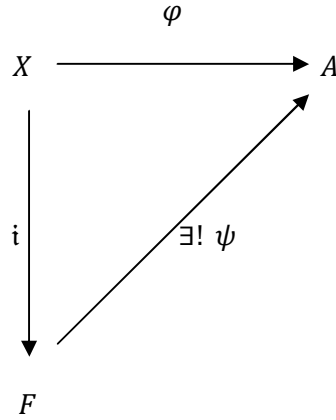
Tanım 2.6: V, K cismi üzerinde bir cebir ve S kümesi de V nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer S kümesi V deki işlemlerle bir cebir oluyorsa yani V üzerindeki işlemler olan toplama, çarpma ve skalerle çarpma altında kapalı oluyorsa S ye V nin bir alt cebiri denir.

Tanım 2.7: U ve V , bir K cismi üzerinde iki cebir olsun. Her $\alpha \in K$ ve her $u, v \in U$ için $\varphi: U \rightarrow V$ dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlıyorsa φ ye bir cebir homomorfizmi denir.

- i. $\varphi(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot \varphi(u)$
- ii. $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$
- iii. $\varphi(u \times v) = \varphi(u) \times \varphi(v)$

Eğer φ homomorfizmi birebir ise monomorfizm, örten ise epimorfizm, birebir ve örtense izomorfizm olarak adlandırılır. Eğer $U = V$ ise φ homomorfizmi endomorfizm, φ izomorfizmi otomorfizm olarak adlandırılır. Ayrıca her $\varphi: U \rightarrow V$ izomorfizminin tersi $\varphi^{-1}: V \rightarrow U$ de bir izomorfizmdir.

Tanım 2.8: X boştan farklı bir küme, F bir birleşmeli cebir ve $i: X \rightarrow F$ bir gömme dönüşümü olsun. Her A cebiri ve her $\varphi: X \rightarrow A$ dönüşümü için $\varphi = \psi \circ i$ olacak şekilde bir tek $\psi: F \rightarrow A$ cebir homomorfizmi varsa F ye X kümesi tarafından üretilen serbest birleşmeli cebir denir. Yani aşağıdaki diyagram değişmelidir.



Tanım 2.9: L, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. L üzerinde her $x, y \in L$ için (x, y) ikilisine $[x, y]$ elemanını karşılık getiren ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir $[\]: L \times L \rightarrow L$ işlemi tanımlı ise L ye K cismi üzerinde bir Lie cebiri denir.

L1) Her $x \in L$ için

$$[x, x] = 0$$

L2) Her $x, y, z \in L$ ve $a, b \in K$ için

$$[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z]$$

$$[x, ay + bz] = a[x, y] + b[x, z]$$

L3) Her $x, y, z \in L$ için

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \quad (\text{Jacobi özdeşliği})$$

$[\]$ çarpımına komütatör çarpım veya braket çarpımı veya Lie çarpımı denir. Lie cebirleri Jacobi özdeşliğinden dolayı asosyatif değildir.

L1) koşulundan

$$[x + y, x + y] = 0$$

$$[x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = 0$$

$$[x, y] + [y, x] = 0$$

$$[x, y] = -[y, x] \quad L1)'$$

elde edilir. Fakat genelde $L1)'$ koşulu $L1)$ koşulunu gerektirmez:

$$[x, y] = -[y, x]$$

olsun ve özel olarak $x = y$ alalım.

$$[x, x] = -[x, x]$$

$$2[x, x] = 0$$

olur. Eğer $\text{char}K = 2$ ise $[x, x] \neq 0$ dır.

O halde $L1)$ koşulu bir Lie cebirinin antikomütatif olduğunu gösterir. Lie cebirlerinin antikomütatif olmalarından dolayı her $x, y \in L$ için $[x, y] = 0$ ise L abelyendir.

Tanım 2.10: V, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $V \rightarrow V$ ye olan tüm lineer dönüşümlerin kümesi bileşke işlemiyle bir vektör uzayıdır. Bu vektör uzayı üzerinde $[x, y] = x \circ y - y \circ x$ şeklinde tanımlanan çarpım ile bir Lie cebiridir. Bu Lie cebiri $gl(V)$ ile gösterilir. Bu cebire genel lineer Lie cebiri denir.

Tanım 2.11: L Lie cebirinin merkezi

$$Z(L) = \{x \in L: \text{her } y \in L \text{ için } [x, y] = 0\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 2.12: L bir Lie cebiri ve A , L nin bir alt uzayı olsun. Eğer A, L deki Lie çarpımı altında kapalı ise A ya L nin bir Lie alt cebiri denir ve $A \leq L$ ile gösterilir.

Tanım 2.13: L bir Lie cebiri ve I , L nin bir alt cebiri olsun. Eğer her $x \in I$ ve $y \in L$ için $[x, y] \in I$ ise I ya L nin bir ideali denir ve $I \trianglelefteq L$ ile gösterilir.

Tanım 2.14: L_1 ve L_2 , K cismi üzerinde iki Lie cebiri ve $\varphi: L_1 \rightarrow L_2$ bir dönüşüm olsun. Eğer

i) φ lineer ise yani her $x, y \in L$ ve $a, b \in K$ için

$$\varphi(ax + by) = a\varphi(x) + b\varphi(y)$$

ii) Her $x, y \in L$ için

$$\varphi[x, y] = [\varphi(x), \varphi(y)]$$

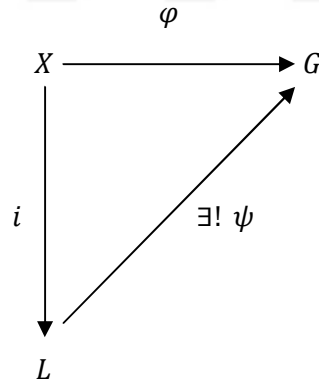
ise φ dönüşümüne bir Lie cebiri homomorfizmi denir.

Bir φ homomorfizminin çekirdeğini $Ker\varphi$ ve görüntüsünü $Im\varphi$ ile göstereceğiz. Eğer φ birebir ve örten bir Lie cebiri homomorfizmi ise φ bir izomorfizmdir. Bu durumda L_1 ile L_2 izomorf cebirlerdir ve $L_1 \cong L_2$ şeklinde gösterilir. L bir Lie cebiri ve $\varphi: L \rightarrow L$ dönüşümü bir izomorfizm ise φ ye bir otomorfizm denir.

Örnek 2.15: Her $x, y \in L$ için $\text{adx}(y) = [y, x]$ dönüşümünü tanımlayalım. adx dönüşümü L nin bir derivasyonudur:

$$\begin{aligned}
 \text{adx}([y, z]) &= [[y, z], x] \\
 &= -[z, x], y] - [x, y], z] \\
 &= [y, [z, x]] + [y, x], z] \\
 &= [y, \text{adx}(z)] + [\text{adx}(y), z]
 \end{aligned}$$

Tanım 2.16: L, K cismi üzerinde bir Lie cebiri ve X, L nin boştan farklı bir altkümesi olsun. L nin X tarafından üretildiğini varsayalım. G, K cismi üzerinde bir Lie cebiri ve $i: X \rightarrow L$ bir gömme dönüşümü olmak üzere her $\varphi: X \rightarrow G$ fonksiyonu $\psi: L \rightarrow G$ homomorfizmine bir tek şekilde genişletilebiliyorsa L ye X tarafından serbestçe üretilen Lie cebiri denir ve $\varphi = \psi \circ i$ olacak şekilde bir tek Lie cebiri homomorfizmi vardır öyle ki



diyagramı değişmelidir. Burada $|X|$ yani X in kardinalitesine L serbest Lie cebirinin rankı denir.

Tanım 2.17: $L_m = K\langle y_1, \dots, y_m \rangle$, m - üreteçli karakteristiği sıfır olan bir K cismi üzerindeki serbest Lie cebiri olsun. L'_m ile L_m nin $a, b \in L_m$ olmak üzere $[a, b]$ biçimindeki elemanlar tarafından üretilen idealini gösterelim. Bu ideale L_m nin komütatör ideali veya türetilmiş ideali denir.

L''_m ile L_m nin $c, d \in L'_m$ olmak üzere $[c, d]$ biçimindeki elemanlar tarafından üretilen idealini gösterelim. Bu durumda;

$$F_m = L_m / L''_m$$

Lie cebirinden bahsedebiliriz. F_m içerisinde

$$[[x, y], [z, t]] = 0$$

özdeşliği sağlanır. F_m serbest metabelyen Lie cebiri olup rankı m dir. Üreteçleri

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + L''_m \\ x_2 &= y_2 + L''_m \\ &\vdots \\ x_m &= y_m + L''_m \end{aligned}$$

biçimindedir.

F_m serbest metabelyen Lie cebirinin komütatör çarpımı için çarpımı sol normlu olarak kullanalım:

$$[u_1, \dots, u_{n-1}, u_n] = [[u_1, \dots, u_{n-1}], u_n], \quad n = 3, 4, \dots$$

Gözlem: $w \in F'_m$ olsun. Jacobi özdeşliğinden

$$[w, x, y] + [y, w, x] + [x, y, w] = 0$$

olur. $\underbrace{[x, y, w]}_{\substack{\in F'_m \\ \in F'_m}} = 0$ olup

$$[w, x, y] = -[y, w, x] = [w, y, x]$$

elde edilir. Böylece $\sigma, \{3, \dots, k\}$ nin rastgele bir permutasyonu olmak üzere

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_{\sigma(i_3)}}, \dots, x_{i_{\sigma(i_k)}}] = [x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, \dots, x_{i_k}]$$

dir (Bahturin, 1987). F'_m aşağıdaki şartları sağlayan tüm monomiallerden oluşan bir baza sahiptir:

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, \dots, x_{i_k}] , 1 \leq i_j \leq m , i_1 > i_2 \leq i_3 \leq \dots \leq i_k .$$

Örneğin $m = 2$ için $F_2 = K\langle x_1, x_2 \rangle$ serbest metabelyen Lie cebirinin bazı

$$[x_2, x_1], [x_2, x_1, x_1], [x_2, x_1, x_2], [x_2, x_1, x_1, x_1], [x_2, x_1, x_1, x_2], [x_2, x_1, x_2, x_2], \dots$$

şeklindedir. Genel olarak n - uzunluklu bir baz elemanı:

$$[x_2, x_1, \underbrace{x_1, \dots, x_1}_{r \text{ tane}}, \underbrace{x_2, \dots, x_2}_{n-r-2 \text{ tane}}]$$

şeklindedir.

Teorem 2.18 (Shmel'kin, 1973): V, K cismi üzerindeki Lie cebirlerinin multihomojen bir sınıfı olsun. L, V sınıfında üreteç kümesi $\{x_i: i \in I\}$ olan bir serbest Lie cebiri ve M, L nin bir ideali olsun. $\bar{g}$ ile $g \in L$ nin L/M bölüm cebirindeki denklik sınıfını gösterelim. O zaman $A = L(\{x_i: i \in I\}, V)$ için $a_i \in A$ olmak üzere $i \in I$ için $\varepsilon: x_i \rightarrow \bar{x}_i + a_i$ dönüşümü

$$L/V(M) \rightarrow A \wr L/M$$

monomorfizmine genişletilebilir.

Şimdi yukarıdaki teoremi serbest metabelyen Lie cebirleri için yorumlayalım: $K[t_1, \dots, t_m]$ ile bir K cismi üzerinde $t_1, \dots, t_m$ tarafından serbestçe üretilmiş (değişmeli) polinom cebirini ve A_m ve B_m ile bazıları sırasıyla $\{a_1, \dots, a_m\}$ ve $\{b_1, \dots, b_m\}$ olan m -boyutlu abelyen Lie cebirlerini gösterelim. C_m , $a_1, \dots, a_m$ tarafından üretilmiş serbest sağ $K[t_1, \dots, t_m]$ modül olsun. Trivial çarpımla bir Lie cebiri inşa edelim. Abelyen wreath çarpım $A_m wr B_m$, $C_m \rtimes B_m$ yarı direkt toplamına eşittir. $A_m wr B_m$ nin elemanları f_i ler $K[t_1, \dots, t_m]$ de polinomlar ve $\beta_i \in K$ olmak üzere $\sum_{i=1}^m a_i f_i(t_1, \dots, t_m) + \sum_{i=1}^m \beta_i b_i$ formundadır. $A_m wr B_m$ çarpımı aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$[C_m, C_m] = [B_m, B_m] = 0,$$

$$[a_i f_i(t_1, \dots, t_m), b_j] = a_i f_i(t_1, \dots, t_m) t_j, \quad i, j = 1, \dots, m.$$

$A_m wr B_m$ metabelyen bir Lie cebiri olup her $\{x_1, \dots, x_m\} \rightarrow A_m wr B_m$ dönüşümü bir $F_m \rightarrow A_m wr B_m$ homomorfizmine genişleyebilir. Shmel'kin'in gömme teoreminin bir özel durumu olarak, $\varepsilon(x_i) = a_i + b_i$, $i = 1, \dots, m$, şeklinde tanımlanan $\varepsilon: F_m \rightarrow A_m wr B_m$ homomorfizmi bir monomorfizmdir. Eğer $f_{ij}(t_1, \dots, t_m) \in K[t_1, \dots, t_m]$ olmak üzere

$$f = \sum [x_i, x_j] f_{ij}(adx_1, \dots, adx_m)$$

ise o zaman

$$\varepsilon(f) = \sum (a_i t_j - a_j t_i) f_{ij}(t_1, \dots, t_m)$$

dir. Şimdi her bir $j = 1, \dots, m$ için $T_j = \{t_j, \dots, t_m\}$ tanımlayalım.

Yardımcı Teorem 2.19: $f_j(T_j) \in K[T_j]$ olmak üzere $i < j$ ve $1 < j \leq m$ için

$$t_i | t_j f_j(T_j) + \dots + t_m f_m(T_m)$$

olsun. O zaman $j \leq k \leq m$ için $f_k(T_k) = 0$ dir.

İspat: $j \leq k \leq m$ için $P_k = t_k f_k(T_k) + \dots + t_m f_m(T_m)$ şeklinde tanımlayalım. Şimdi $t_i | P_j$ olsun. Varsayalım ki $P_j \neq 0$ olsun. O zaman $t_i, P_j \in K[T_j]$ nin bir çarpanı olur ki buradan çelişki elde ederiz. Bu yüzden $P_j = 0$ olduğundan $t_i | P_{j+1}$ olur. Benzer şekilde $P_{j+1} = 0$ elde ederiz. Bu şekilde devam edersek

$$P_j = \dots = P_m = 0$$

elde ederiz ve bu yüzden $f_j(T_j) = \dots = f_m(T_m) = 0$ olur.

3. ANA SONUÇLAR

Bu bölümde rankı m olan F_m serbest metabelyen Lie cebiri için $C(\text{Inn}(F_m)) = \text{Inn}(F_m)$ olduğunu göstereceğiz.

3.1. Serbest Metabelyen Lie Cebirlerinin İç Otomorfizmleri

Tanım 3.1.1: F_m nin modülo F'_m ne göre birim etkisine sahip otomorfizmlerine IA-otomorfizm denir. Bu şekildeki otomorfizmlerin kümesini $\text{IA}(F_m)$ ile gösterelim, yani

$$\text{IA}(F_m) = \{\varphi \in \text{Aut}(F_m) : \varphi(x) = x \pmod{F'_m}\}$$

dir.

Tanım 3.1.2: Her bir $v \in F'_m$ için $\text{adv} : F_m \rightarrow F_m$ adjoint dönüşümünü

$$\text{adv}(u) = [u, v], \quad u \in F_m$$

olarak tanımlayalım. $F''_m = \{0\}$ olduğundan $(\text{adv})^2 = \text{ad}^2 v = 0$ olup adv derivasyonu nilpotenttir.

$$\exp(\text{adv}) = 1 + \frac{\text{adv}}{1!} + \frac{\text{ad}^2 v}{2!} + \dots = 1 + \text{adv}$$

lineer dönüşümü iyi tanımlıdır ve F_m nin bir otomorfizmidir. Bu şekildeki tüm otomorfizmlerin kümesi $\text{Aut}(F_m)$ nin bir normal altgrubudur ve bu grup F_m nin iç otomorfizmler grubu olarak adlandırılır ve $\text{Inn}(F_m)$ ile gösterilir. Yani

$$\text{Inn}(F_m) = \{\psi_v = 1 + \text{adv} = \exp(\text{adv}) : v \in F'_m\}$$

dir . $\forall u, v \in F'_m$ için

$$\begin{aligned}
 (\text{adv} + \text{adu})(x) &= \text{adv}(x) + \text{adu}(x) \\
 &= [x, v] + [x, u] \\
 &= [x, v + u] \\
 &= \text{ad}(v + u)(x) \\
 &= \text{ad}(u + v)(x)
 \end{aligned}$$

Ayrıca

$$\begin{aligned}
 ((\text{adv})(\text{adu}))(x) &= \text{adv}(\text{adu}(x)) \\
 &= \text{adv}([x, u]) = \underbrace{[[x, u], v]}_{\substack{\in F'_m \\ \in F'_m}} = 0
 \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $(\text{adv})(\text{adu}) = 0$ dönüşümü elde edilir. O zaman $\forall u, v \in F'_m$ için

$$\begin{aligned}
 \psi_v \psi_u &= \exp(\text{adv}) \exp(\text{adu}) = (1 + \text{adv})(1 + \text{adu}) \\
 &= 1 + (\text{adv}) + (\text{adu}) + (\text{adv})(\text{adu}) \\
 &= 1 + (\text{adv} + u) \\
 &= \exp(\text{adv} + u) \\
 &= \psi_{v+u} = \psi_{u+v} = \psi_u \psi_v
 \end{aligned}$$

olup $\text{Inn}(F_m)$ grubu değişmeli bir gruptur.

3.2. Serbest Metabelyen Lie Cebirlerinin Merkezi Otomorfizmleri

Tanım 3.2.1: F_m nin iç otomorfizmler grubu $\text{Inn}(F_m)$ içindeki her bir otomorfizm ile değişmeli olan otomorfizmlerin oluşturduğu gruba F_m nin merkezi otomorfizmleri grubu denir ve $C(\text{Inn}(F_m))$ ile gösterilir. Yani

$$C(\text{Inn}(F_m)) = \{\rho \in \text{Aut}(F_m) : \rho\psi_v = \psi_v\rho, \forall v \in F'_m\}$$

dir. $\text{Inn}(F_m)$ grubu değişmeli bir grup olduğundan $\text{Inn}(F_m) \subseteq C(\text{Inn}(F_m))$ olduğu açıktır. Bundan sonraki amacımız $C(\text{Inn}(F_m)) \subseteq \text{Inn}(F_m)$ olduğunu göstermektir.

Teorem 3.2.2: Her $u \in F'_m$ için $\varphi \in C(\text{Inn}(F_m))$ olmak üzere $\varphi(u) = u$ dur.

İspat: $v \in F'_m$ ve $u \in F_m$ için $\psi_v \in \text{Inn}(F_m)$ alalım. $\varphi \in C(\text{Inn}(F_m))$ merkezi otomorfizmini aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$\varphi(x_i) = \overline{\varphi(x_i)} + u_i, \quad \overline{\varphi(x_i)} = \sum_{j=1}^m c_{ij}x_j$$

φ merkezi bir otomorfizm olup ψ_v iç otomorfizmi ile değişmelidir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \psi_v \varphi \psi_{-v}(u) \\ &= \psi_v \varphi(u - [u, v]) \\ &= \psi_v(\varphi(u) - [\varphi(u), \varphi(v)]) \\ &= \varphi(u) - [\varphi(u), \varphi(v)] + [\varphi(u), v] \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} [\varphi(v) - v, \varphi(u)] &= 0 \\ [\underbrace{\varphi(v) - v}_{w \in F'_m}, \underbrace{\overline{\varphi(u)}}_{\text{lineer}}] &= 0 \end{aligned}$$

dir. $w = \varphi(v) - v \in F'_m$ olup

$$\varepsilon(w) = a_1 f_1 + \cdots + a_m f_m \in C_m \subseteq A_m w r B_m$$

olacak şekilde tek türlü belirli $f_1, \dots, f_m \in K[t_1, \dots, t_m]$ polinomları mevcuttur. Buradan, $\varepsilon([w, \overline{\varphi(u)}]) = 0$ kullanılarak

$$\varepsilon([w, \overline{\varphi(u)}]) = a_1 f_1 g + \dots + a_m f_m g = 0, \quad g = (\sum_{j=1}^m c_{ij} t_j)$$

ve C_m $a_1, \dots, a_m$ tarafından serbestçe üretilen sağ $K[t_1, \dots, t_m]$ modül olup

$$f_1 g = \dots = f_m g = 0$$

elde edilir. φ bir otomorfizm olup $\overline{\varphi(x_i)} = \sum_{j=1}^m c_{ij} x_j$ sıfır olamaz. Buradan $g \neq 0$ dır. $K[t_1, \dots, t_m]$ bir tamlık bölgesi olup

$$f_1 = \dots = f_m = 0$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\varepsilon(w) = a_1 f_1 + \dots + a_m f_m = 0$$

ve ε homomorfizmi bir monomorfizm olduğundan

$$w = 0 = \varphi(v) - v$$

elde edilir. Sonuç olarak her $v \in F'_m$ için $\varphi(v) = v$ dir.

Teorem 3.2.3: $C(\text{Inn}(F_m)) \subseteq \text{IA}(F_m)$ dir.

İspat: $i = 1, \dots, m$ için $u_i \in F'_m$ olmak üzere

$$\varphi: x_i \rightarrow \sum_{k=1}^m c_{ik} x_k + u_i$$

şekildeki bir $\varphi \in C(\text{Inn}(F_m))$ otomorfizmini alalım. φ bir merkezi otomorfizm olduğundan Teorem 3.2.2 den dolayı

$$\varphi([x_2, x_1]) = [x_2, x_1] \quad \text{ve} \quad \varphi([x_2, x_1, x_j]) = [x_2, x_1, x_j] \quad , j = 1, \dots, m$$

olur. Her bir $j = 1, \dots, m$ için

$$\begin{aligned} \varphi([x_2, x_1, x_j]) &= [\varphi([x_2, x_1]), \varphi(x_j)] \\ [x_2, x_1, x_j] &= [x_2, x_1, c_{j1}x_1 + \dots + c_{jm}x_m + u_j] \\ [x_2, x_1, x_j](1 - c_{jj}) &= \sum_{k \neq j} [x_2, x_1, x_k] c_{jk} \end{aligned}$$

olur. F_m nin $A_m \text{ wr } B_m$ wreath çarpımı içine gömüldüğünü kullanarak

$$(a_2 t_1 - a_1 t_2) t_j (1 - c_{jj}) - (a_2 t_1 - a_1 t_2) \sum_{k \neq j} t_k c_{jk} = 0$$

eşitliğini elde ederiz. a_1 ve a_2 üreteçleri serbest üreteçler olduğundan

$$t_2(t_j(1 - c_{jj}) - \sum_{k \neq j} t_k c_{jk}) = 0 \quad \text{ve} \quad t_1(t_j(1 - c_{jj}) - \sum_{k \neq j} t_k c_{jk}) = 0$$

olup

$$t_j(1 - c_{jj}) - \sum_{k \neq j} t_k c_{jk} = 0$$

elde edilir. Buradan her $k \neq j$ için $c_{jj} = 1$ ve $c_{jk} = 0$ elde ederiz.

Teorem 3.2.4: $C(\text{Inn}(F_2)) = \text{Inn}(F_2)$.

İspat: $\varphi \in C(\text{Inn}(F_m))$ olmak üzere ve Teorem 3.2.3 den dolayı $\varphi \in \text{IA}(F_m)$ olup;

Durum 1: $\deg \alpha = \deg \beta = 0$ olacak şekilde polinomlar olsun. Yani $\alpha, \beta \in K$ için

$$\varphi: x_1 \rightarrow x_1 + \alpha[x_2, x_1]$$

$$x_2 \rightarrow x_2 + \beta[x_2, x_1]$$

şeklinde verilsin.

$$\varphi([x_2, x_1]) = [x_2 + \beta[x_2, x_1], x_1 + \alpha[x_2, x_1]]$$

$$[x_2, x_1] = [x_2, x_1] + \alpha[x_2, [x_2, x_1]] - \beta[x_1, [x_2, x_1]]$$

$$\alpha[x_2, [x_2, x_1]] - \beta[x_1, [x_2, x_1]] = 0$$

$$\beta[[x_2, x_1], x_1] - \alpha[[x_2, x_1], x_2] = 0$$

elde edilir. $[[x_2, x_1], x_1]$ ve $[[x_2, x_1], x_2]$ F_2 nin baz elemanları olduğundan $\alpha = \beta = 0$ elde edilir. Böylece $\varphi = 1$ dönüşümü bulunur.

Durum 2: $\deg \beta = 0$ ve $\deg f \geq 1$ olacak şekilde polinomlar olsun ve

$$\varphi: x_1 \rightarrow x_1 + [x_2, x_1]f$$

$$x_2 \rightarrow x_2 + \beta[x_2, x_1]$$

şeklinde verilsin. Benzer hesaplamalarla

$$\varphi([x_2, x_1]) = [x_2 + \beta[x_2, x_1], x_1 + [x_2, x_1]f]$$

$$[x_2, x_1] = [x_2, x_1] + [x_2, [x_2, x_1]f] - \beta[x_1, [x_2, x_1]]$$

$$[x_2, x_1](\beta x_1 - x_2 f) = 0$$

elde edilir. Bu eşitliği wreath çarpım içerisinde değerlendirirsek,

$$(a_2 t_1 - a_1 t_2)(\beta t_1 - t_2 f(t_1, t_2)) = 0$$

ve buradan $f = \beta = 0$ elde edilir, yani $\varphi = 1$ dir. Bu hesaplamada $\deg f \geq 1$ olduğu göz önünde tutulmuştur. Yine benzer şekilde $\deg \alpha = 0$ ve $\deg g \geq 1$ olacak şekilde polinomlar ve

$$\begin{aligned}\varphi: x_1 &\rightarrow x_1 + \alpha[x_2, x_1] \\ x_2 &\rightarrow x_2 + [x_2, x_1]g\end{aligned}$$

Şeklindeki merkezi otomorfizmler de birim dönüşüm belirler.

Durum 3: $\deg f, \deg g \geq 1$ olmak üzere $f = f(t_1, t_2), g = g(t_1, t_2) \in K[t_1, t_2]$ ve

$$\begin{aligned}\varphi: x_1 &\rightarrow x_1 + [x_2, x_1]f(\text{ad}x_1, \text{ad}x_2) \\ x_2 &\rightarrow x_2 + [x_2, x_1]g(\text{ad}x_1, \text{ad}x_2)\end{aligned}$$

formunda bir merkezi otomorfizm olsun. φ merkezi otomorfizm olduğundan $\varphi([x_2, x_1]) = [x_2, x_1]$ ve

$$\begin{aligned}\varphi([x_2, x_1]) &= [x_2 + [x_2, x_1]g, x_1 + [x_2, x_1]f] \\ [x_2, x_1] &= [x_2, x_1] + [x_2, x_1](\text{ad}x_2 f - \text{ad}x_1 g)\end{aligned}$$

olur. F_2 nin $A_2 wr B_2$ wreath çarpımı içine gömüldüğünü kullanarak

$$(a_2 t_1 - a_1 t_2)(t_2 f - t_1 g) = 0$$

olup

$$t_2 f = t_1 g$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan, öyle bir $p(t_1, t_2) \in K[t_1, t_2]$ vardır ki $f(t_1, t_2) = t_1 p(t_1, t_2)$ ve $g(t_1, t_2) = t_2 p(t_1, t_2)$ biçiminde yazılabilir. Bu yüzden

$$\varphi = \psi_u, \quad u = -[x_2, x_1]p(\text{adx}_1, \text{adx}_2)$$

bulunur.

Teorem 3.2.5: Bir $\varphi \in \text{C}(\text{Inn}(F_m))$ otomorfizmi $2 \leq j \leq m$ için $f_{p1}^{(1)}(t_2, \dots, t_m) \in K[T_2]$ ve $f_{pq}^{(j)}(t_q, \dots, t_m) \in K[T_q]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \varphi: x_1 &\rightarrow x_1 + \sum_{p=2}^m [x_p, x_1] f_{p1}^{(1)}(\text{adx}_2, \dots, \text{adx}_m) \\ x_j &\rightarrow x_j + \sum_{p>q>1} [x_p, x_q] f_{pq}^{(j)}(\text{adx}_q, \dots, \text{adx}_m), \quad 2 \leq j \leq m \end{aligned}$$

olsun. O zaman $\varphi = 1$ birim dönüşümdür.

İspat . F_m nin rankı $m \geq 2$ üzerinden tümevarım yapalım. $m = 2$ ve φ

$$\begin{aligned} \varphi: x_1 &\rightarrow x_1 + [x_2, x_1] f_{21}^{(1)}(\text{adx}_2) \\ x_2 &\rightarrow x_2 \end{aligned}$$

formunda olsun. Teorem 3.2.4 yi uygularsak

$$\varphi = \psi_u, \quad u = -[x_2, x_1]p(\text{adx}_1, \text{adx}_2)$$

öyle ki $f_{21}^{(1)}(t_2) = t_1 p(t_1, t_2)$ ve $0 = t_2 p(t_1, t_2)$ olup $p(t_1, t_2) = 0$ ve $f_{21}^{(1)}(\text{adx}_2) = 0$ elde edilir ve böylece $\varphi = 1$ bulunur.

Şimdi $m > 2$ ve φ , $2 \leq j \leq m$ için $f_{p1}^{(1)}(t_2, \dots, t_m) \in K[T_2]$ ve $f_{pq}^{(j)}(t_q, \dots, t_m) \in K[T_q]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \varphi: x_1 &\rightarrow x_1 + \sum_{p=2}^m [x_p, x_1] f_{p1}^{(1)}(\text{adx}_2, \dots, \text{adx}_m) \\ x_j &\rightarrow x_j + \sum_{p>q>1} [x_p, x_q] f_{pq}^{(j)}(\text{adx}_q, \dots, \text{adx}_m), \quad 2 \leq j \leq m \end{aligned}$$

formunda bir merkezi otomorfizm olsun. $\mathbb{I}_1$ ile F_m nin x_1 tarafından üretilen idealini gösterelim. $F_m/\mathbb{I}_1 \cong F_{m-1} = K \langle \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m \rangle$ olduğunu biliyoruz (Bahturin, 1987). Ayrıca $\varphi(\mathbb{I}_1) \subseteq \mathbb{I}_1$ olduğundan

$$\bar{\varphi}: F_m/\mathbb{I}_1 \rightarrow F_m/\mathbb{I}_1, \quad \bar{\varphi}(\bar{x}_j) = \varphi(x_j) + \mathbb{I}_1$$

olacak şekilde otomorfizm belirler. Bu otomorfizm F_{m-1} in bir merkezi otomorfizmidir: $v \in F'_m$ ve $\bar{v} = v + \mathbb{I}_1 \in F'_{m-1}$ olsun. Teorem 3.2.2 den $\varphi(v) = v$ olup

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}\psi_{\bar{v}}(\bar{x}_j) &= \bar{\varphi}(\bar{x}_j + [\bar{x}_j, \bar{v}]) = \varphi(x_j) + [\varphi(x_j), \varphi(v)] + \mathbb{I}_1 \\ \bar{\varphi}\psi_{\bar{v}}(\bar{x}_j) &= \bar{\varphi}(\bar{x}_j + [\bar{x}_j, \bar{v}]) = \varphi(x_j) + [\varphi(x_j), v] + \mathbb{I}_1 \\ &= \bar{\varphi}(\bar{x}_j) + [\bar{\varphi}(\bar{x}_j), \bar{v}] = \psi_{\bar{v}}\bar{\varphi}(\bar{x}_j) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu otomorfizm aşağıdaki formdadır.

$$\bar{\varphi}: \bar{x}_j \rightarrow \bar{x}_j + \sum_{p>q>1} [\bar{x}_p, \bar{x}_q] f_{pq}^{(j)}(\text{ad}\bar{x}_q, \dots, \text{ad}\bar{x}_m), \quad 2 \leq j \leq m$$

Tümevarım hipotezinden her $j = 2, \dots, m$ ve $p > q > 1$ için $f_{pq}^{(j)}(t_q, \dots, t_m) = 0$ dir. $f_{p1}^{(1)}(t_2, \dots, t_m) \in K[T_2]$ olmak üzere φ merkezi otomorfizmini tekrar yazalım:

$$\begin{aligned} \varphi: x_1 &\rightarrow x_1 + \sum_{p=2}^m [x_p, x_1] f_{p1}^{(1)}(\text{ad}x_2, \dots, \text{ad}x_m) \\ x_j &\rightarrow x_j, \quad j = 2, \dots, m. \end{aligned}$$

φ merkezi otomorfizm olduğundan her $j = 2, \dots, m$ için $\varphi([x_j, x_1]) = [x_j, x_1]$ dir. Teorem 3.2.4 ün ispatındaki gibi benzer adımlar kullanarak kolayca $\varphi = 1$ buluruz.

Teorem 3.2.6: $C(\text{Inn}(F_m)) = \text{Inn}(F_m)$.

İspat: $C(\text{Inn}(F_m)) \subseteq \text{Inn}(F_m)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $C(\text{Inn}(F_2)) = \text{Inn}(F_2)$ olduğunu Teorem 3.2.4 ten biliyoruz. Şimdi her $1 \leq j \leq m$ için $h_{pq}^{(j)}(t_q, \dots, t_m) \in K[T_q]$ olmak üzere $m > 2$ ve φ merkezi otomorfizmi aşağıdaki formda olsun:

$$\varphi: x_j \rightarrow x_j + \sum_{p>q} [x_p, x_q] h_{pq}^{(j)}(\text{ad}x_q, \dots, \text{ad}x_m), \quad 1 \leq j \leq m.$$

$h_{p1}^{(1)}(t_1, \dots, t_m)$ i aşağıdaki gibi ifade edelim:

$$h_{p1}^{(1)}(t_1, \dots, t_m) = t_1 g_{p1}^{(1)}(t_1, \dots, t_m) + f_{p1}^{(1)}(t_2, \dots, t_m), \quad p = 2, \dots, m$$

ve

$$\psi_u = \exp(\text{ad}u), \quad u = \sum_{p=2}^m [x_p, x_1] g_{p1}^{(1)}(\text{ad}x_1, \dots, \text{ad}x_m)$$

tanımlayalım. O zaman $\phi = \psi_u \varphi$ bileşkesi

$$\begin{aligned} \psi_u \varphi(x_1) &= \varphi(x_1) + [\varphi(x_1), u] \\ &= x_1 + \sum_{p=2}^m [x_p, x_1] (x_1 g_{p1}^{(1)} + f_{p1}^{(1)}) + \sum_{p>q} [x_p, x_q] h_{pq}^{(1)} \\ &\quad + \left[x_1 + \sum_{p=2}^m [x_p, x_1] (x_1 g_{p1}^{(1)} + f_{p1}^{(1)}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{p>q} [x_p, x_q] h_{pq}^{(1)}, \sum_{p=2}^m [x_p, x_1] g_{p1}^{(1)} \right] \\ &= x_1 + \sum_{p=2}^m [x_p, x_1] x_1 g_{p1}^{(1)} \\ &\quad + \sum_{p=2}^m [x_p, x_1] f_{p1}^{(1)} + \sum_{p>q} [x_p, x_q] h_{pq}^{(1)} - \sum_{p=2}^m [x_p, x_1] x_1 g_{p1}^{(1)} \\ &= x_1 + \sum_{p=2}^m [x_p, x_1] f_{p1}^{(1)} + \sum_{p>q} [x_p, x_q] h_{pq}^{(1)} \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} \phi: x_1 &\rightarrow x_1 + \sum_{p=2}^m [x_p, x_1] f_{p1}^{(1)}(\text{ad}x_2, \dots, \text{ad}x_m) \\ &\quad + \sum_{p>q>1} [x_p, x_q] h_{pq}^{(1)}(\text{ad}x_q, \dots, \text{ad}x_m) \end{aligned}$$

$$x_j \rightarrow x_j + \sum_{p>q} [x_p, x_q] f_{pq}^{(j)} (\text{adx}_q, \dots, \text{adx}_m), 2 \leq j \leq m$$

formundadır. ϕ merkezi otomorfizm olduğundan $\phi([x_2, x_1]) = [x_2, x_1]$ dir. F_m nin $A_m \text{wr} B_m$ wreath çarpımı içine gömülmesiyle elde edilen eşitliklerle her $k = 2, \dots, m$ ve $m \geq p > q > 1$ için $f_{k1}^{(1)} \in K[T_2]$, $f_{pq}^{(1)} \in K[T_q]$ ve her $m \geq t > s > 1$ için $f_{ts}^{(2)} \in K[T_q]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & t_2(t_{m-1}f_{m(m-1)}^{(1)} + \dots + t_2f_{m2}^{(1)} + t_1f_{m1}^{(1)}) \\ & \quad = t_1(t_{m-1}f_{m(m-1)}^{(2)} + \dots + t_2f_{m2}^{(2)} + t_1f_{m1}^{(2)}) \\ & t_2 \left(-t_{m-1}f_{m(m-1)}^{(1)} + \sum_{k=1}^{m-2} t_k f_{(m-1)k}^{(1)} \right) = t_1 \left(-t_m f_{m(m-1)}^{(2)} + \sum_{k=1}^{m-2} t_k f_{(m-1)k}^{(2)} \right) \\ & \quad \vdots \\ & t_2 \left(-\sum_{k=4}^m t_k f_{k3}^{(1)} + t_2 f_{32}^{(1)} + t_1 f_{31}^{(1)} \right) = t_1 \left(-\sum_{k=4}^m t_k f_{k3}^{(2)} + t_2 f_{32}^{(2)} + t_1 f_{31}^{(2)} \right) \\ & t_2 \left(-\sum_{k=3}^m t_k f_{k3}^{(1)} + t_1 f_{21}^{(1)} \right) = t_1 \left(-\sum_{k=3}^m t_k f_{k2}^{(2)} + t_1 f_{21}^{(2)} \right) \end{aligned}$$

denklem sistemini elde ederiz. İlk eşitliği düşünelim. Açıkthatır ki

$$t_1 | t_{m-1}f_{m(m-1)}^{(1)} + \dots + t_2f_{m2}^{(1)}$$

Yardımcı Teorem 2.19 dan

$$f_{m(m-1)}^{(1)} = \dots = f_{m2}^{(1)} = 0$$

elde ederiz. Denklemden yerine konulursa

$$t_2 f_{m1}^{(1)} = t_{m-1} f_{m(m-1)}^{(2)} + \dots + t_2 f_{m2}^{(2)} + t_1 f_{m1}^{(2)}$$

olur. O halde

$$t_1 | t_2 f_{m1}^{(1)} - t_{m-1} f_{m(m-1)}^{(2)} - \dots - t_2 f_{m2}^{(2)} \in K[T_2]$$

dir. $t_2 f_{m1}^{(1)} - t_{m-1} f_{m(m-1)}^{(2)} - \dots - t_2 f_{m2}^{(2)} = 0$ olduğundan $f_{m1}^{(2)} = 0$ dır. Benzer şekilde diğer eşitlikler de kullanılarak her $m - 1 \geq p > q > 1$ için

$$f_{pq}^{(1)} = 0 \text{ ve } f_{p1}^{(2)} = 0$$

sonucuna varılır.

Sonuç olarak $j = 3, \dots, m$ için $[x_j, x_1]$ komütatörlerine ϕ merkezi otomorfizminin etkisi kullanılarak

$$f_{p1}^{(3)} = \dots = f_{p1}^{(m)} = 0$$

elde ederiz. Şimdi ϕ merkezi otomorfizmi Teorem 3.2.5 teki şartları sağlar. Bu yüzden $\phi = 1$ ve

$$\varphi = \exp(\text{ad}(-u)), \quad u = \sum_{p=2}^m [x_p, x_1] g_{p1}^{(1)}(\text{ad}x_1, \dots, \text{ad}x_m)$$

elde edilir.



KAYNAKLAR

- Bahturin Y. A. (1987). Identical Relations in Lie Algebras. Nauka, Moscow.
- Bryant R. M., Drensky V., (1993). Dense Subgroups of the Automorphism Groups of Free Algebras, *Canad. J. Math.* 45, 1135-1154.
- Curran M. J., Mcchaughan D. J. (2001). *Communications in Algebra*, 29(5), 2081-2087.
- Drensky V., Findik Ş. (2012). Inner and Outer Automorphisms of Free Metabelian Nilpotent Lie Algebras. *Comm. Algebra* 40 no. 12, 4389–4403.
- Drensky V. (1993). Endomorphisms and Automorphisms of Relatively Free Algebras. Recent Developments in the Theory of Algebras with Polynomial Identities *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl.* no. 31, 97–132.
- Findik Ş. (2011), Outer Endomorphisms of Free Metabelian Lie Algebras, *Serdica Math. Journal*, 37 261-276.
- Miller G. A. (1913). A Non-Abelian Group Whose Group of Isomorphisms is Abelian. *Messenger of Math.* 43, 124–125.
- Roman'kov V. (2008). On the Automorphism Group of a Free Metabelian Lie Algebra. *Internat. J. Algebra Comput.* 18, no. 2, 209–226.
- Öztekin Ö., Ekici N. (2017). Central Automorphisms of Free Nilpotent Lie Algebras. *J. Algebra Appl.* 16, no. 11, 1750205, 8 pp.
- Shmel'kin A. L. (1973). Wreath Products of Lie Algebras and Their Application in the Theory of Groups. *Trudy Moskov. Mat. Obshch.* 29, 247–260 (in Russian). English Translation: *Trans. Moscow Math. Soc.* 29, 239–252.



ÖZGEÇMİŞ

1992 yılında Adana’da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Adana’da tamamladıktan sonra Adana Özel Akdeniz Lisesi’nden mezun oldu. 2015 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünden mezun oldu ve aynı yıl Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik anabilim dalında tezli yüksek lisans eğitimine başladı.

