T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YARI AYIRMA AKSİYOMLARI ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Neriman ŞAHAN

DANIŞMAN
Doç. Dr. Ayhan ERCİYES

AKSARAY, 2019

Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 172342601 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi **Neriman ŞAHAN** tarafından hazırlanan **YARI AYIRMA AKSİYOMLARI ÜZERİNE** adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir

Danışman: Doç. Dr. Ayhan ERCİYES

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Ali AYTEKİN

Pamukkale Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Üye: Doç. Dr. Halis BİLGİL

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Tez Savunma Tarihi: 26/04/2019

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onayladığını onaylıyorum.

....

Doç. Dr. Mehmet Ali HINIS

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinalliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Neriman ŞAHAN

TEŞEKKÜR

"Yarı Ayırma Aksiyomları Üzerine" konulu tez çalışmasının seçiminde, yürütülmesinde, sonuçlandırılmasında ve sonuçlarının değerlendirilmesinde değerli zamanını feda ederek, her türlü destek ve yardımlarını esirgemeyen ve beni yönlendiren değerli hocam sayın Doç. Dr. Ayhan ERCİYES'e, tezin hazırlanma aşamasında beni yönlendiren ve tecrübelerini benimle paylaşan Aksaray Üniversitesi Matematik Bölümündeki değerli hocalarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tüm hayatım boyunca bana verdikleri manevi destek, göstermiş oldukları sabır ve anlayıştan dolayı aileme, desteklerinden dolayı eşime ve oğlum Ahmet Emin'e teşekkür ederim.

Neriman ŞAHAN

AKSARAY, 2019

İÇİNDEKİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YARI AYIRMA AKSİYOMLARI ÜZERİNE

Neriman ŞAHAN

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ayhan ERCİYES

ÖZET

Bir küme üzerinde bir topoloji bu kümenin açık alt kümeleri tarafından oluşturulur. Elde edilen bu açık kümeler kullanılarak bir topolojik uzayda yarı-açık küme kavramı geliştirilmiştir. Bir açık küme ile bu açık kümenin kapanışı arasında kalan bütün kümelere yarı-açık küme adı verilir. Genel topolojide iyi bilinen, açık kümeler veya kapalı kümelerle ifade edilen bütün özellikler yarı-açık kümeler veya yarı-kapalı kümeler kullanılarak genelleştirilebilir. Böylece yeni özellikler elde edilmiş olur. Bu yeni elde edilen özelliklerin topolojik özellik olup olmadığı yaklaşık elli yıldır araştırılmaktadır. Bu tezde de bazı ayırma aksiyomlarının yarı-açık küme kavramı kullanılarak genelleştirilmeleri ve bu genelleştirmelerin bazı özellikleri derlenmiştir. Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, yarı-açık küme kavramının ne zaman ve nasıl tanımlandığı ve yarı-açık küme kavramı ile ilgili çalışmalardan bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, genel topoloji teorisinde bilinen ve tezin diğer bölümlerinde kullanılacak temel kavram ve özellikler hatırlatılmıştır.

Üçüncü bölümde, yarı-açık küme, yarı-kapalı küme, yarı-iç, yarı-kapanış, yarı-süreklilik, kararsızlık ve yarı-topolojik özellik kavramları hatırlatılıp yine bunlarla ilgili bazı önemli sonuçlar verilmiştir.

Dördüncü bölümde, yarı-açık ve yarı-kapalı küme kavramları kullanılarak literatürde verilen genelleştirilmiş ayırma aksiyomları hatırlatılmış ve çeşitli özellikleri incelenmiştir.

Beşinci bölümde, tezde elde edilen sonuçlar tartışılıp yapılabilecek yeni çalışmalar için bazı öneriler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yarı-açık küme, Yarı topolojik uzay, Yarı süreklilik, Yarı ayırma aksiyomları.

Nisan 2019; 35 sayfa

M.Sc. THESIS

ON SEMI SEPARATION AXIOMS

Neriman ŞAHAN

Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ayhan ERCİYES

ABSTRACT

A topology on a set is created by the open subsets of this set. Using these open sets, the concept of semi-open set in a topological space has been developed. All sets between an open set and the closure of this open set are called semi-open sets. All well-known properties in the general topology which are expressed by using open sets or closed sets can be generalized using semi-open sets or semi-closed sets. Thus, new features are obtained. The topological characteristics of these newly acquired properties have been investigated for about fifty years. In this thesis, generalization of some separation axioms using semi-open set concept and some features of these generalizations are compiled. This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, the origin of the concept of semi-open set, how it is defined and studies about the concept of semi-open set are mentioned.

In the second chapter, the basic concepts and features that are known in general topology theory which are used in other parts of the thesis are reminded.

In the third chapter, the concepts of semi-open set, semi-closed set, semi-inner, semi-closure, semi-continuity, irresoluteness, and semi-topological properties were reminded and some important results were given.

In the fourth chapter, generalized separation axioms given in the literature by using the concepts of semi-open and semi-closed sets were reminded and various features were examined.

In the fifth chapter, some suggestions are given for new studies which can be discussed and the results obtained in the thesis.

Keywords: Semi-open set, Semi topological space, Semi continuity, Semi separation axioms.

April, 2019; 35 pages

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\boldsymbol{P.O.(X,\tau)}$	(X,τ) Topolojik Uzayındaki Ön-Açık Kümeler
$\boldsymbol{p_s}$	Doğal Bölüm Fonksiyonu
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
so-1-sürekli	Birinci Yarı-Açık Süreklilik
so-2-sürekli	İkinci Yarı-Açık Süreklilik
so-3-sürekli	Üçüncü Yarı-Açık Süreklilik
$\boldsymbol{S.O.(X,\tau)}$	(X,τ) Topolojik Uzayındaki Yarı-Açık Kümeler
s$\mathbf{T_0}$	Yarı T_0-Uzayı
s$\mathbf{T_1}$	Yarı T_1-Uzayı
s$\mathbf{T_2}$	Yarı T_2-Uzayı
s$\mathbf{T_3}$	Yarı T_3-Uzayı
s$\mathbf{T_4}$	Yarı T_4-Uzayı
$\boldsymbol{(X,\tau)}$	Topolojik Uzay
$\boldsymbol{X/\sim}$	Bölüm Kümesi
$\boldsymbol{\left(X_s, Q(X_s)\right)}$	(X,τ) Topolojik Uzayının T_0-laştırması
$\boldsymbol{[X, S.O.(X,\tau)]}$	(X,τ) ile Aynı Yarı-Açıklara Sahip Uzaylar Sınıfı
$\boldsymbol{\left(X, F(\tau)\right)}$	$[X, S.O.(X,\tau)]$ Sınıfının Maksimal Elemanı
$\boldsymbol{A^o}$	Bir A Kümesinin İçi
$\boldsymbol{\overline{A}}$	Bir A Kümesinin Kapanışı
$\boldsymbol{{}_oA}$	Bir A Kümesinin Yarı-İçi
$\boldsymbol{\underline{A}}$	Bir A Kümesinin Yarı-Kapanışı
$\boldsymbol{\tau}$	Topoloji
$\boldsymbol{\tau_A}$	A Alt Kümesi Üzerindeki Alt Uzay Topolojisi

1. GİRİŞ

$\mathbb{R}$ reel sayılar üzerindeki standart topoloji

$$\tau = \{U \subseteq \mathbb{R} \mid \forall x \in U, \exists \varepsilon \in \mathbb{R}, (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq U\} \tag{1.1}$$

olmak üzere $a < b$ olacak şekildeki $a, b \in \mathbb{R}$ reel sayıları için $(a, b]$ ve $[a, b)$ aralıkları yarı-açık aralık olarak adlandırılır. Levine bu motivasyonla genel olarak yarı-açık kümeleri (semi-open sets) herhangi bir topolojik uzay için bir açık küme ile bu açık kümenin kapanışı arasında kalan kümeler olarak tanımlamış ve bildiğimiz topoloji teorisindeki süreklilik kavramını yarı-açık kümeler yardımıyla genelleştirerek yarı-süreklilik (semi-continuity) kavramını geliştirmiştir [1]. Levine tarafından verilen yarı-süreklilik tanımında bir fonksiyonun yarı-sürekli olması için değer kümesindeki her açık kümenin ters görüntüsünün tanım kümesinde yarı-açık küme olması gerektiğin söylemiştir. Daha sonra 1971 yılında Crossley ve Hildebrand tarafından yarı-kapalı küme (semi-closed set) ve yarı-kapanış (semi-closure) kavramları elde edilmiştir [2,3]. Crossley ve Hildebrand, Levine'den farklı olarak bir fonksiyon için değer kümesindeki her yarı-açık kümenin ters görüntüsünün tanım kümesinde bir yarı-açık küme olması durumunda bu fonksiyonu kararsız (irresolute) fonksiyon olarak adlandırmışlardır. Kararsız fonksiyonların sürekli fonksiyonlarla bir ilişkisi olmamakla birlikte her kararsız fonksiyon bir yarı-sürekli fonksiyondur. Yani kararsız fonksiyonlar yarı-sürekli fonksiyonların bir özel halidir. Yarı-açık kümeler kullanılarak üç farklı süreklilik kavramı tanımlanabilir. Bunlar Scheers tarafından so-1-süreklilik, so-2-süreklilik ve so-3-süreklilik olarak adlandırılmıştır [4]. so-1-sürekli fonksiyonlar Levine tarafından tanımlanan yarı-sürekli fonksiyonlar, so-2-sürekli fonksiyonlar Crossley ve Hildebrand tarafından tanımlanan kararsız fonksiyonlar ve son olarak so-3-sürekli fonksiyonlar ise değer kümesindeki her yarı-açık kümenin ters görüntüsünün tanım kümesinde yarı-açık olduğu fonksiyonlardır. Açıkça görülüyor ki her so-3-sürekli fonksiyon hem sürekli hem de so-2-süreklidir. Ayrıca her sabit fonksiyon so-3-süreklidir [4].

Crossley ve Hildebrand yarı-iç ve yarı-kapanış operatörlerini tanımlayarak kümelerin yarı-içi ve yarı-kapanışı hakkında bildiğimiz topoloji teorisindekine benzer bazı özellikleri elde etmişlerdir [2]. Ayrıca bu operatörler ve kararsız fonksiyonlar ile ilgili de bildiğimiz topoloji teorisindekine benzer bazı özelliklerin sağlandığını göstermişlerdir. Ayrıca yarı-homeomorfizm (semi-homeomorfizm) kavramını tanımlayıp yarı-homeomorfizm altında korunan özellikleri yarı-topolojik özellikler (semi-topological properties) olarak adlandırmışlardır. Bilinen topoloji teorisindeki birçok özelliğin, örneğin T_0, T_1, regüler, normal, T_3, T_4, kompakt, Lindelöf ve metriklenebilir olma özellikleri gibi, yarı-topolojik özellik olmadığını, fakat örneğin T_2, ayrılabilir ve irtibatlı olma özelliklerinin birer yarı-topolojik özellik olduğunu göstermişlerdir [5]. Buradan anlaşılacağı üzere her yarı-topolojik özellik bir topolojik özellik değildir. Fakat her yarı-topolojik özellik bir topolojik özelliktir. Yine aynı makalede Crossley ve Hildebrand bir küme üzerindeki tanımlanabilen bütün topolojilerin sınıfının aynı yarı-açık kümelere sahip olanları ayırarak bir parçalanış elde etmişlerdir. Bu parçalanış sayesinde yarı-karşılık (semi-correspondant) olma olarak adlandırılan bir denklik bağıntısı elde ederek bu denklik bağıntısına göre her denklik sınıfının kapsama bağıntısına göre bir maksimum elemanı olduğunu göstermişlerdir. Yani bir küme üzerinde verilen bir topolojik uzayla aynı yarı-açık kümelere sahip olan topolojiler arasında bunların bir en incesinin var olduğunu kanıtlamışlardır. Yarı-topolojik özelliklerin incelenmesinde bu maksimal elemanın çok kullanışlı olduğunu görmüşler ve ispatlarında bu elemana çokça yer vermişlerdir [5]. Nayar ve Arya hangi topolojik özelliklerin bir yarı-topolojik özellik olduğunu kontrol etmek için bu maksimum elemanın kullanıldığı bir kriter geliştirmişlerdir [6]. Daha sonra Crossley hiçbir yerde yoğun olmayan kümeleri kullanarak bu maksimum elemanın bir karakterizasyonunu elde etmiş ve bu karakterizasyonun ispatları daha da kolaylaştırdığını görmüştür [7].

Bir taraftan, yapılan bu çalışmalardan sonra daha önceden bilinen çeşitli topolojik özelliklerin yarı-topolojik özellik olup olmadıkları farklı yazarlar tarafından incelenmiştir. Diğer taraftan ise bilinen bazı topolojik özelliklerin tanımlarında yarı-açık kümeler kullanarak yeni özellikler elde edilmiş ve bu özelliklerin hem topolojik özellik olup olmadıkları hem de yarı-topolojik özellik olup olmadıkları yine farklı yazarlar tarafından incelenmiştir. Örneğin, iyi bilinen ayırma aksiyomlarından olan T_0, T_1, T_2, regülerlik, normallik ve kompaktlık aksiyomlarının tanımlarındaki açık küme kavramı yerine yarı açık küme kavramı kullanılarak yarı-T_0, yarı-T_1, yarı-T_2 [8], s-regüler [9], s-normal [10] ve yarı-kompaktlık [11] kavramları tanımlanmış ve bu yeni kavramların eski kavramlardan daha zayıf olduğunu gösterilmiştir. Daha sonra, Dorsett kapalı kümeler yerine yarı-kapalı kümeleri kullanarak 1982 yılında s-regülerlikten daha kuvvetli bir kavram olan yarı-regülerlik (semi-regular) [12] ve 1985 yılında ise s-normallikten daha kuvvetli bir kavram olan yarı-normallik (semi-normal) [13] kavramlarını tanımlamıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

2.1 Topolojik Uzaylar

Bu kısımda topolojik uzaylarla ilgili iyi bilinen kavramlar hatırlatılıp bu kavramlarla ilgili yine iyi bilinen bazı özellikler verilmiştir.

Tanım 2.1.1 X boştan farklı bir küme ve τ da X in alt kümelerinin bir sınıfı olsun. Eğer

[T1] $X, \emptyset \in \tau$,

[T2] $U, V \in \tau$ iken $U \cap V \in \tau$,

[T3] I bir indis kümesi olmak üzere her $i \in I$ için $U_i \in \tau$ iken $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$

şartları sağlanıyor ise τ sınıfına X üzerinde bir topoloji ve (X, τ) ikilisine de bir topolojik uzay denir.

Teorem 2.1.1 Bir (X, τ) topolojik uzayında bir $U \subseteq X$ alt kümesi için $U \in \tau$ dır ancak ve ancak her $x \in U$ için $x \in G_x \subseteq U$ olacak şekilde bir $G_x \in \tau$ vardır.

Tanım 2.1.2 Bir (X, τ) topolojik uzayında τ sınıfının elemanlarına açık kümeler denir.

Örnek 2.1.1 X boştan farklı bir küme olsun. $\tau = P(X)$ kuvvet kümesi X üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye X üzerindeki diskre topoloji denir.

Örnek 2.1.2. X boştan farklı bir küme olsun. $\tau = \{X, \emptyset\}$ kümesi X üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye X üzerindeki indiskre topoloji denir.

Örnek 2.1.3 $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesindeki açık aralıklar ve bunların keyfi birleşimlerinden oluşan $\tau = \{U \subseteq \mathbb{R} | \forall x \in U, \exists \varepsilon \in \mathbb{R}, (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U\}$ sınıfı $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde bir topolojidir. Bu şekilde elde edilen $\mathbb{R}$ üzerindeki topolojiye $\mathbb{R}$ nin alışılmış veya standart topolojisi denir.

Benzer şekilde, $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesindeki sınırlı, alttan açık ve üstten kapalı aralıklar ve bunların keyfi birleşimlerinden oluşan τ^L sınıfı ile sınırlı, alttan kapalı ve üstten açık aralıklar ve bunların keyfi birleşimlerinden oluşan τ_L sınıfı $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde birer topolojidir. Bu topolojiler sırası ile $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin üst limit ve alt limit topolojileri olarak adlandırılır.

Örnek 2.1.4 X boştan farklı bir küme olmak üzere $\tau = \{G \subseteq X | G^c \text{ sonlu}\} \cup \{\emptyset\}$ sınıfı X üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye X in tümleyeni sonlu (veya sonlu tümleyenler) topolojisi denir. Benzer olarak $\tau = \{G \subseteq X | G^c \text{ sayılabilir}\} \cup \{\emptyset\}$ sınıfı da X üzerinde bir topoloji olup X in tümleyeni sayılabilir (veya sayılabilir tümleyenler) topolojisi olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.3 X bir küme olmak üzere τ_1 ve τ_2 sınıfları X üzerinde birer topoloji olsun. Eğer $\tau_1 \subseteq \tau_2$ ise τ_1 topolojisi τ_2 den daha kaba veya τ_2 topolojisi τ_1 den daha ince denir.

Boştan farklı bir X kümesi üzerindeki en ince topoloji $\tau = P(X)$ diskre topoloji ve en kaba topoloji ise $\tau = \{X, \emptyset\}$ indiskre topolojisidir.

Tanım 2.1.4. (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ ve $a \in A$ olsun. Eğer $a \in G_a \subseteq A$ olacak şekilde bir $G_a \in \tau$ açık kümesi varsa a elemanına A nın bir iç noktası denir. A nın tüm iç noktalarının kümesine A nın içi denir ve A^o ile gösterilir.

Teorem 2.1.2 Bir (X, τ) topolojik uzayında bir $A \subseteq X$ alt kümesinin içi A kümesinin kapsadığı açık kümelerin birleşimi yani

$$A^o = \bigcup_{\substack{U \in \tau \\ U \subseteq A}} U \tag{2.1}$$

dir.

Teorem 2.1.3 (X, τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subseteq X$ olsun. Eğer $A \subseteq B$ ise $A^o \subseteq B^o$ dır.

Teorem 2.1.4 (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ ise aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(1) $A^o \subseteq A$ dır.

(2) A^o açıktır.

(3) A açıktır ancak ve ancak $A^o = A$ dır.

(4) A^o, A nın kapsadığı en geniş açık kümedir.

(5) $(A^o)^o = A$ dır.

Tanım 2.1.5 Bir (X,τ) topolojik uzayında bir $A \subseteq X$ alt kümesi verilsin. Eğer A^c açık ise A ya kapalı bir küme denir.

Tanım 2.1.6 (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A kümesini kapsayan en küçük kapalı kümeye A nın kapanışı denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.5 (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A kümesini kapsayan kapalı kümelerin sınıfı $\mathcal{K}_A$ olmak üzere

$$\overline{A} = \bigcap_{K \in \mathcal{K}_A} K \tag{2.2}$$

dır.

Teorem 2.1.6 (X,τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subseteq X$ olsun. Eğer $A \subseteq B$ ise $\overline{A} \subseteq \overline{B}$ dır.

Teorem 2.1.7 (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(1) $A \subseteq \overline{A}$ dır.

(2) $\overline{A}$ kapalıdır.

(3) A kapalıdır ancak ve ancak $A = \overline{A}$ dır.

(4) $\overline{(\overline{A})} = A$ dır.

Teorem 2.1.8 (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda $x \in \overline{A}$ dır ancak ve ancak x in her U açık komşuluğu için $A \cap U \neq \emptyset$ dır.

Tanım 2.1.7 (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer $\overline{A} = X$ ise A ya X de bir yoğun küme denir.

Teorem 2.1.9 Bir (X,τ) topolojik uzayında bir $A \subseteq X$ alt kümesi yoğundur ancak ve ancak X deki boştan farklı her U açık kümesi için $A \cap U \neq \emptyset$ dir.

Tanım 2.1.8 (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Bu taktirde $\tau_A = \{A \cap U | U \in \tau\}$ sınıfı A üzerinde bir topoloji olup bu topoloji A üzerindeki alt topoloji ve (A, τ_A) ikilisi alt uzay olarak adlandırılır.

Teorem 2.1.10 (X,τ) bir topolojik uzay ve $U \in \tau$ olsun. Herhangi bir $A \subseteq U$ alt kümesi U da açıktır ancak ve ancak X de açıktır.

Teorem 2.1.11 (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Bir $F \subseteq A$ alt kümesi A da kapalıdır ancak ve ancak K kümesi X de kapalı bir küme olmak üzere $F = K \cap A$ dır.

Teorem 2.1.12 (X,τ) bir topolojik uzay ve $K \subseteq X$ kapalı bir küme olsun. Herhangi bir $F \subseteq K$ alt kümesi K da kapalıdır ancak ve ancak X de kapalıdır.

Tanım 2.1.9 (X,τ) bir topolojik uzay ve β da X in açık alt kümelerinin bir sınıfı olsun. Eğer τ daki her bir U açık kümesi β nın bir alt sınıfı üzerinden birleşim olarak yazılabiliyorsa, yani β sınıfının bir β^* alt sınıfı için

$$U = \bigcup_{B \in \beta^*} B \tag{2.3}$$

ise β sınıfına τ topolojisi için bir baz denir.

Örnek 2.1.5 $\beta = \{(a,b) \,| a, b \in \mathbb{R} \text{ ve } a < b\}$ sınıfı $\mathbb{R}$ nin alışılmış topolojisi için bir bazdır. Çünkü U, $\mathbb{R}$ nin alışılmış topolojisinde açık bir küme ise her bir $x \in U$ için $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq U$ olacak şekilde bir $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ pozitif reel sayısı vardır.

Örnek 2.1.6 Benzer şekilde $\beta_L = \{[a,b) \,| a, b \in \mathbb{R} \text{ ve } a < b\}$ sınıfı $\mathbb{R}$ nin alt limit topolojisi için ve $\beta^L = \{(a,b]: a, b \in \mathbb{R} \text{ ve } a < b\}$ sınıfı $\mathbb{R}$ nin üst limit topolojisi için bir bazdır.

Teorem 2.1.13 X boştan farklı bir küme ve β da X in bazı alt kümelerinin bir sınıfı olsun. Bu durumda β sınıfı baz olacak şekilde X üzerinde bir tek topoloji vardır ancak ve ancak aşağıdaki şartlar sağlanır:

[B1] $X = \bigcup_{B \in \beta} B$ ve

[B2] Eğer $B_1, B_2 \in \beta$ ise $B_1 \cap B_2$ kümesi β daki kümelerin bir birleşimi olarak yazılabilir, yani her bir $x \in B_1 \cap B_2$ için $x \in B_x \subseteq B_1 \cap B_2$ olacak şekilde bir $B_x \in \beta$ vardır.

Tanım 2.1.10 (X, τ) bir topolojik uzay, (a_n), X de bir dizi ve $a \in X$ olsun. Eğer $a \in U_a$ olacak şekildeki her $U_a \in \tau$ için $n > n_0$ iken $a_n \in U_a$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı varsa (a_n) dizisi $a \in X$ noktasına yakınsaktır denir ve bu $(a_n) \to a$ şeklinde gösterilir.

2.2 Sürekli Fonksiyonlar

Tanım 2.2.1 (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere bir $f: (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ fonksiyonu ve bir $x \in X$ noktası verilsin. Eğer $f(x)$ ın her bir V açık komşuluğu için $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde x_0 ın bir U açık komşuluğu varsa f fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu X in her noktasında sürekli ise f fonksiyonuna bir sürekli fonksiyon denir.

Teorem 2.2.1 (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere bir $f: (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ fonksiyonu süreklidir ancak ve ancak Y deki her açık kümenin ters görüntüsü X de açıktır.

Teorem 2.2.2 $f: (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ topolojik uzaylar arasında bir fonksiyon ve $\beta \subseteq \sigma$ sınıfı da σ topolojisi için bir baz olsun. Bu durumda f süreklidir ancak ve ancak her bir $B \in \beta$ için $f^{-1}(B) \in \tau$ dır.

Teorem 2.2.3 (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere bir $f: (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ fonksiyonu süreklidir ancak ve ancak Y deki her kapalı kümenin ters görüntüsü X de kapalıdır.

Teorem 2.2.4 $f: (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ sürekli bir fonksiyon ve $A \subseteq X$ ise

$$f_A: (A, \tau_A) \to (Y, \sigma), f_A(a) = f(a) \tag{2.4}$$

ile tanımlanan f_A kısıtlanmış fonksiyonu da süreklidir.

Teorem 2.2.5 Bir $f: (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ fonksiyonu süreklidir ancak ve ancak her $B \subseteq Y$ için $f^{-1}(B^o) \subseteq \left(f^{-1}(B)\right)^o$ dır.

Teorem 2.2.6 Bir $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ fonksiyonu süreklidir ancak ve ancak her $A\subseteq X$ için $f(\overline{A})\subseteq\overline{(f(A))}$ dır.

Teorem 2.2.7 Bir $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ fonksiyonu süreklidir ancak ve ancak her $B\subseteq Y$ için $\overline{f^{-1}(B)}\subseteq f^{-1}(\overline{B})$ dır.

Tanım 2.2.2 (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar olmak üzere bir $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ fonksiyonu ve bir $a\in X$ noktası verilsin. Eğer a noktasına yakınsayan her (a_n) dizisi için $(f(a_n))\to f(a)$ ise f fonksiyonu a noktasında dizisel süreklidir denir. Her noktada dizisel sürekli olan bir fonksiyona dizisel süreklidir denir.

Teorem 2.2.8 Sürekli bir fonksiyon dizisel süreklidir.

Tanım 2.2.3 (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar olmak üzere bir $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ fonksiyonu verilsin. Eğer X deki her U açık kümesi için $f(U)$ görüntü kümesi Y de açık ise f ye bir açık fonksiyon denir.

Benzer tanım kapalılık için de aşağıdaki şekilde yapılabilir.

Tanım 2.2.4 (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar olmak üzere bir $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ fonksiyonu verilsin. Eğer X deki her K kapalı kümesi için $f(K)$ görüntü kümesi Y de kapalı ise f ye bir kapalı fonksiyon denir.

Teorem 2.2.9 (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar ve $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ bire-bir ve örten bir fonksiyon olmak üzere f açıktır ancak ve ancak kapalıdır.

Teorem 2.2.10 (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar olmak üzere bir $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ fonksiyonu açıktır ancak ve ancak her $A\subseteq X$ için $f(A^o)\subseteq(f(A))^o$ dır.

Sonuç 2.2.1 $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ bire-bir ve örten bir fonksiyon olmak üzere f sürekli ve açıktır ancak ve ancak her $A\subseteq X$ için $f(A^o)=(f(A))^o$ dır.

Teorem 2.2.11 Bir $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ fonksiyonu kapalıdır ancak ve ancak her $A\subseteq X$ için $\overline{(f(A))}\subseteq f(\overline{A})$ dır.

Sonuç 2.2.2 Bir $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ fonksiyonu sürekli ve kapalıdır ancak ve ancak her $A \subseteq X$ için $\overline{(f(A))} = f(\overline{A})$ dır.

Tanım 2.2.5 (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar olmak üzere bir $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu bire-bir, örten, sürekli ve f fonksiyonunun tersi $f^{-1}:(Y,\sigma) \to (X,\tau)$ de sürekli ise f fonksiyonuna bir homeomorfizm denir. Eğer (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzayları arasında bir homeomorfizm varsa homeomorf uzaylar denir.

Teorem 2.2.12 Topolojik uzayların homeomorf olma bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 2.2.6 Homeomorfizm altında korunan bir özelliğe topolojik özellik denir.

2.3 Çarpım ve Bölüm Uzayları

Tanım 2.3.1 $(X_1,\tau_1),(X_2,\tau_2),\dots,(X_n,\tau_n)$ topolojik uzaylar ve $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ olsun. $\beta = \{\prod_{i=1}^{n} U_i \mid U_i \in \tau_i, 1 \le i \le n\}$ sınıfını baz kabul eden X üzerindeki topolojiye sonlu çarpım topolojisi denir.

Teorem 2.3.1 (X,τ), (Y,σ) ve (Z,ρ) birer topolojik uzay olmak üzere $f:Z \to X$ ve $g:Z \to Y$ fonksiyonları süreklidir ancak ve ancak

$$(f,g):Z \to X \times Y, (f,g)(z) = \big(f(z), g(z)\big) \tag{2.5}$$

fonksiyonu süreklidir.

Teorem 2.3.2 (X,τ), (X',τ'), (Y,σ) ve (Y',σ') birer topolojik uzay olmak üzere $f:X \to X'$ ve $g:Y \to Y'$ fonksiyonları süreklidir ancak ve ancak

$$(f,g):X \times Y \to X' \times Y', (f,g)(x,y) = \big(f(x), g(y)\big) \tag{2.6}$$

fonksiyonu süreklidir.

Teorem 2.3.2 $(X_1,\tau_1),(X_2,\tau_2),\dots,(X_n,\tau_n)$ topolojik uzaylar ve $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ üzerindeki topoloji çarpım topolojisi olsun. Her bir $1 \le i \le n$ için $A_i \subseteq X_i$ olmak üzere

(1) $(\prod_{i=1}^{n} X_i)^o = \prod_{i=1}^{n}(A_i)^o$

(2) $\overline{(\prod_{i=1}^{n} X_i)} = \prod_{i=1}^{n}\overline{(A_i)}$

dır.

Tanım 2.3.3 $\{(X_i, \tau_i) | i \in I\}$ topolojik uzayların keyfi bir sınıfı ve $X = \prod_{i\in I} X_i$ olmak üzere $\pi_i: X \to X_i$ izdüşüm fonksiyonlarına göre X üzerindeki başlangıç topolojisine keyfi çarpım topolojisi denir.

$\mathcal{A} = \{\pi_i^{-1}(U_i) \big| U_i \in \tau_i\}$ sınıfı X kümesi üzerindeki keyfi çarpım topolojisi için bir alt bazdır.

Tanım 2.3.4 (X, τ) bir topolojik uzay, Y boştan farklı bir küme ve $f: X \to Y$ örten bir fonksiyon olsun. f fonksiyonuna göre Y üzerindeki bitiş topolojisi σ olmak üzere (Y, σ) topolojik uzayına bir bölüm uzayı ve $f: (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ fonksiyonuna da bölüm fonksiyonu denir.

Burada dikkat edelim ki $\sigma = \{V \subseteq Y | f^{-1}(V) \in \tau\}$ dır.

Teorem 2.3.3 Örten olan sürekli bir $f: X \to Y$ fonksiyonu açık ise bir bölüm fonksiyonudur.

Teorem 2.3.4 Örten olan sürekli bir $f: X \to Y$ fonksiyonu kapalı ise bir bölüm fonksiyonudur.

2.4 Ayırma Aksiyomları

Bu bölümde bazı ayırma aksiyomlarının tanımları ve bunların çeşitli özellikleri hatırlatılmıştır.

Tanım 2.4.1 Bir (X, τ) topolojik uzayında farklı $x, y \in X$ noktaları için x ve y noktalarından birini içerip diğerini içermeyen bir $U \subseteq X$ açık kümesi varsa bu (X, τ) topolojik uzayına bir T_0-uzayı denir.

Teorem 2.4.1 Bir (X, τ) topolojik uzayı bir T_0-uzayıdır ancak ve ancak her farklı $x, y \in X$ eleman çifti için $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ dır.

Tanım 2.4.2 Bir (X, τ) topolojik uzayında farklı $x, y \in X$ noktaları için $x \in U$, $y \notin U$ ve $y \in V$, $x \notin V$ olacak şekilde $U, V \subseteq X$ açık kümeleri varsa bu (X, τ) topolojik uzayına bir T_1-uzayı denir.

Teorem 2.4.2 Bir (X, τ) topolojik uzayı bir T_1-uzayıdır ancak ve ancak her $x \in X$ elemanı için $\{x\}$ tek nokta kümesi kapalıdır.

Tanım 2.4.3 Bir (X, τ) topolojik uzayında farklı $x, y \in X$ noktaları için $x \in U$, $y \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \subseteq X$ açık kümeleri varsa bu (X, τ) topolojik uzayına bir T_2-uzayı veya bir Hausdorff uzayı denir.

Tanım 2.4.5 Bir (X, τ) topolojik uzayındaki her $K \subseteq X$ kapalı alt kümesi ve $x \notin K$ olacak şekildeki her $x \in X$ elemanı için $x \in U$, $K \subseteq V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \subseteq X$ açık kümeleri varsa bu (X, τ) topolojik uzayına bir regüler uzay denir.

Tanım 2.4.6 Bir (X, τ) topolojik uzayı hem regüler uzay ve hem de T_1-uzayı ise bu (X, τ) topolojik uzayına bir T_3-uzayı denir.

Tanım 2.4.7 Bir (X, τ) topolojik uzayındaki her ayrık $H, K \subseteq X$ kapalı alt kümeleri için $H \subseteq U$, $K \subseteq V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \subseteq X$ açık kümeleri varsa bu (X, τ) topolojik uzayına bir normal uzay denir.

Tanım 2.4.8 Bir (X, τ) topolojik uzayı hem normal uzay ve hem de T_1-uzayı ise bu (X, τ) topolojik uzayına bir T_4-uzayı denir.

3. YARI TOPOLOJİK KAVRAMLAR

Bu bölümde öncelikle topolojik uzaylarda yarı-açık küme, yarı-kapalı küme, yarı-süreklilik, yarı-homeomorfizm gibi kavramlar ve bu kavramlarla ilgili bazı özellikler verilmiştir. Daha sonra yarı-topolojik özellik kavramı hatırlatılıp bazı yarı-topolojik özelliklerden bahsedilmiştir. Son olarak hangi topolojik özelliklerin yarı-topolojik özellik olabilecekleri ile ilgili Nayar ve Arya tarafından elde edilmiş bir kriter verilmiştir [6].

3.1 Yarı-Açık Kümeler

$\mathbb{R}$ reel sayılar üzerindeki standart topoloji τ olmak üzere $a < b$ olacak şekildeki $a, b \in \mathbb{R}$ reel sayıları için $(a, b]$ ve $[a, b)$ aralıkları yarı-açık aralık olarak adlandırılır. Levine bu motivasyonla genel olarak yarı-açık kümeleri herhangi bir topolojik uzay için aşağıdaki şekilde tanımlamıştır [1].

Tanım 3.1.1 (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer $U \subseteq A \subseteq \overline{U}$ olacak şekilde bir $U \in \tau$ varsa $A \subseteq X$ alt kümesine bir yarı-açık denir [1].

Teorem 3.1.1 Bir (X, τ) topolojik uzayında bir $A \subseteq X$ alt kümesi yarı-açıktır ancak ve ancak $A \subseteq \overline{(A^o)}$ dır [1].

Bir (X, τ) topolojik uzayındaki bütün yarı-açık kümelerin sınıfı $S.O.(X, \tau)$ ile gösterilecektir.

Teorem 3.1.2 Bir (X, τ) topolojik uzayında bir $A \subseteq X$ alt kümesi yarı-açıktır ancak ve ancak her $x \in A$ için $x \in B_x \subseteq A$ olacak şekilde bir $B_x \subseteq X$ yarı-açık kümesi vardır [14].

Tanım 3.1.2 (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere $A \subseteq X$ ve $x \in A$ olsun. Eğer $x \in B_x \subseteq A$ olacak şekilde bir $B_x \subseteq X$ yarı-açık kümesi varsa bu x elemanına A kümesinin bir yarı-iç noktası, A kümesinin tüm yarı-iç noktalarının kümesine A nın yarı-içi denir ve ${}_oA$ ile gösterilir.

Teorem 3.1.3 (X, τ) bir topolojik uzay $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda A kümesinin yarı-içi A kümesinin içerdiği yarı-açık kümelerin birleşimidir.

İspat : $x \in {}_oA$ olsun. Yani $x \in B_x \subseteq A$ olacak şekilde bir $B_x \subseteq X$ yarı-açık kümesi vardır. Buradan

$$K = \bigcup_{\substack{B \subseteq A \\ B \in S.O.(X,\tau)}} B \tag{3.1}$$

dersek $x \in K$ dır. O halde $A \subseteq K$ bulunur. Tersine olarak $x \in K$ ise $x \in B_x \subseteq A$ olacak şekilde bir $B \in S.O.(X,\tau)$ vardır. Buradan $x \in {}_oA$ dir. Böylece $K \subseteq A$ bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Sonuç 3.1.1 (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. ${}_oA$ kümesi yarı-açıktır.

Teorem 3.1.4 (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A kümesi yarı-açıktır ancak ve ancak $A = {}_oA$ dır [2].

Teorem 3.1.5 (X,τ) bir topolojik uzay olmak üzere $A \subseteq X$ yarı-açık bir küme ve $U \in \tau$ ise $A \cap U \subseteq X$ alt kümesi de yarı-açık bir kümedir [1].

Teorem 3.1.6 (X,τ) bir topolojik uzay ve $\{A_i | i \in I\}$ sınıfı X deki yarı-açıkların bir koleksiyonu olsun. Bu durumda $\bigcup_{i \in I} A_i$ birleşimi de X de bir yarı-açıktır [1].

Sonuç 3.1.2 (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda ${}_oA \subseteq A$ dır.

Sonuç 3.1.3 (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A kümesi yarı-açıktır ancak ve ancak $A \subseteq {}_oA$ dır.

Teorem 3.1.7 (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ yarı-açık olsun. Eğer $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ olacak şekildeki her $B \subseteq X$ alt kümesi de yarı-açıktır [1].

Not Dikkat edelim ki, yarı-açık küme tanımından açıkça görüldüğü gibi her açık küme aynı zamanda bir yarı-açık kümedir. Fakat bu ifadenin tersi genelde doğru değildir.

Sonuç 3.1.4 (X,τ) bir topolojik uzay olmak üzere

(1) $\tau \subseteq S.O.(X,\tau)$ dır ve
(2) $A \in S.O.(X,\tau)$ ve $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ ise $B \in S.O.(X,\tau)$ dır [1].

Teorem 3.1.8 (X,τ) bir topolojik uzay ve $\beta = \{B_i | i \in I\}$ sınıfı ise

(1) $\tau \subseteq \beta$ ve
(2) $A \in \beta$ ve $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ ise $B \in \beta$

şartlarını sağlayan X in alt kümelerinin bir koleksiyonu olsun. Bu durumda $S.O.(X,\tau) \subseteq \beta$ dır. Yani X in alt kümelerinden oluşan ve (i)-(ii) özellikleri sağlayan en küçük sınıf X in yarı-açık kümelerinin sınıfıdır [1].

Teorem 3.1.9 (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq Y \subseteq X$ olsun. Bu durumda $A \in S.O.(X,\tau)$ ise $A \in S.O.(Y,\tau_Y)$ dir [1].

Not Yukarıda verilen teoremin tersi genelde doğru değildir. Yani alt uzayda yarı-açık olan bir küme üst uzayda yarı-açık olmayabilir.

Teorem 3.1.10 (X,τ) bir topolojik uzay ve $U \subseteq X$ açık bir küme olsun. Bu durumda bir $S \subseteq U$ alt kümesi (U,τ_U) alt uzayında yarı-açıktır ancak ve ancak $A \cap U = S$ olacak şekilde bir $A \in S.O.(X,\tau)$ vardır [16].

Aşağıda verilen teorem genel topolojide iyi bilinen bir sonuçtur.

Teorem 3.1.11 (X,τ) bir topolojik uzay ve $U \in \tau$ olsun. Bu durumda $\overline{U} - U$ kümesi X içerisinde hiçbir yerde yoğun değildir.

Teorem 3.1.12 (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \in S.O.(X,\tau)$ olsun. Bu durumda $U \cup B = A$ ve $U \cap B = \emptyset$ olacak şekilde bir $U \in \tau$ ve hiçbir yerde yoğun olmayan bir $B \subseteq X$ vardır [1].

Bu teoremin tersi genelde doğru olmayabilir. Örneğin $\mathbb{R}$ üzerindeki standart topolojiye göre $U = (0,1)$ açık ve $B = \{2\}$ hiçbir yerde yoğun olmayan bir küme olmasına rağmen $A = U \cup B$ kümesi bu uzayda bir yarı-açık değildir.

Teorem 3.1.13 (X,τ) bir topolojik uzay, $\emptyset \neq U \in \tau$, $B \subseteq X$, $B' \neq \emptyset$ ve $A = U \cup B$ irtibatlı ise $A \in S.O.(X,\tau)$ dır [1].

Teorem 3.1.14 $f: (X,\tau) \to (X^*,\tau^*)$ sürekli ve açık bir fonksiyon olmak üzere $A \in S.O.(X,\tau)$ ise $f(A) \in S.O.(X^*,\tau^*)$ dır [1].

(X,τ) bir topolojik uzay ve $\beta = \{B_i | i \in I\}$ sınıfı X in alt kümelerinin bir koleksiyonu olmak üzere her $i \in I$ için ${B_i}^o$ kümelerinin sınıfı β^o ile gösterilecektir.

Teorem 3.1.15 (X,τ) bir topolojik uzay olmak üzere $\big(S.O.(X,\tau)\big)^o = \tau$ dır [1].

Teorem 3.1.16 (X_1,τ_1) ve (X_2,τ_2) birer topolojik uzay ve $X = X_1 \times X_2$ olmak üzere τ ise X üzerindeki çarpım topolojisi olsun. Bu durumda $S.O.(X_1,\tau_1) \times S.O.(X_2,\tau_2) \subseteq S.O.(X,\tau)$ dir [1].

Teorem 3.1.17 Her $i \in I$ için (X_i,τ_i) birer topolojik uzay ve $X = \prod_{i\in I} X_i$ olmak üzere X üzerindeki topoloji çarpım topolojisi olsun. Bu durumda sonlu sayıda $i \in I$ için $A_i \neq X_i$ olacak şekildeki $\emptyset \neq A_i \subseteq X_i$ için $\prod_{i\in I} A_i \in S.O.(X,\tau)$ dır ancak ve ancak her $i \in I$ için $A_i \in S.O.(X_i,\tau_i)$ dır [15].

3.2 Yarı-Kapalı Kümeler

Genel topolojidekine benzer olarak yarı-kapalı kümeler Crossley [3] tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 3.2.1 Bir (X,τ) topolojik uzayında bir $B \subseteq X$ alt kümesinin tümleyeni $(B^c = X - B)$ yarı-açık ise bu B kümesine yarı-kapalı küme denir [3].

Teorem 3.2.1 (X,τ) bir topolojik uzay ve $B \subseteq X$ bir yarı-kapalı olsun. Bu durumda $K^o \subseteq B \subseteq K$ olacak şekilde bir $K \subseteq X$ kapalı kümesi vardır.

İspat: $B \subseteq X$ yarı-kapalı ise $B^c = X - B \subseteq X$ yarı açıktır. O halde $U \subseteq X - B \subseteq \overline{U}$ olacak şekilde bir $U \in \tau$ vardır. Buradan $X - \overline{U} \subseteq B \subseteq X - U$ bulunur. $X - U$ kapalı bir küme ve $(X - U)^o = X - \overline{U}$ olduğundan $K = X - U$ dersek $K^o \subseteq B \subseteq K$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.2 (X,τ) bir topolojik uzay ve $\{B_i | i \in I\}$ sınıfı X deki yarı-kapalı kümelerin bir koleksiyonu olsun. Bu durumda $\bigcap_{i\in I} B_i$ kesişimi de X de bir yarı-kapalı kümedir [5].

Teorem 3.2.3 (X,τ) bir topolojik uzay olmak üzere bir $B \subseteq X$ alt kümesi hiçbir yerde yoğun değil ise B, X de bir yarı-kapalı kümedir [5].

Teorem 3.2.4 Bir (X,τ) topolojik uzayında bir $B \subseteq X$ alt kümesi yarı-kapalıdır ancak ve ancak $\left(\overline{A}\right)^{o} \subseteq A$ dır [5].

Tanım 3.2.2 (X,τ) bir topolojik uzay olmak üzere $B \subseteq X$ ve $x \in X$ olsun. Eğer $x \in A$ olacak şekildeki her $A \in S.O.(X,\tau)$ yarı-açık kümesi için $A \cap B \neq \emptyset$ ise bu x elemanına A kümesinin bir yarı-kapanış noktası, B kümesinin tüm yarı-kapanış noktalarının kümesine B nin yarı-kapanışı denir ve $\underline{B}$ ile gösteilir.

Teorem 3.2.5 (X,τ) bir topolojik uzay ve $B \subseteq X$ olsun. Bu durumda B kümesinin yarı-kapanışı B kümesini içeren yarı-kapalı kümelerin kesişimidir.

İspat : $x \in \underline{B}$ olsun. Bu durumda $x \in A$ olacak şekildeki her $A \in S.O.(X,\tau)$ için $A \cap B \neq \emptyset$ dir. Buradan

$$M = \bigcap_{\substack{B \subseteq K \\ K^c \in S.O.(X,\tau)}} K \tag{3.2}$$

dersek $x \in M$ dir. Aksi halde $x \in M^c$ olsaydı $M^c \in S.O.(X,\tau)$ olduğundan $A \cap M^c \neq \emptyset$ olması gerekirdi. Fakat $A \subseteq M$ olduğundan bu bir çelişkidir. Böylece $\underline{B} \subseteq M$ olduğu elde edilir. Tersine olarak $x \in M$ olsun. O halde $B \subseteq K$ olacak şekildeki her $K \subseteq X$ yarı-kapalı kümesi için $x \in K$ dır. Buradan $x \in \underline{B}$ dir. Aksi halde $x \notin \underline{B}$ olsaydı $x \in B_x$ olacak şekildeki bir $B_x \in S.O.(X,\tau)$ yarı-açık kümesi için $B_x \cap B = \emptyset$ olurdu. Fakat bu durumda $x \notin B_x^c$ ve $B \subseteq B_x^c$ olurdu ki bu ise $x \in M$ olması ile çelişir. Böylece $M \subseteq \underline{B}$ olduğu elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.2.6 (X,τ) bir topolojik uzay ve $\{B_i | i \in I\}$ sınıfı X deki yarı-kapalıların bir koleksiyonu olsun. Bu durumda $\bigcap_{i\in I} B_i$ kesişimi de X de bir yarı-kapalıdır [5].

Sonuç 3.2.1 (X,τ) bir topolojik uzay ve $B \subseteq X$ olsun. Bu durumda $\underline{B}$ kümesi yarı-kapalıdır.

Teorem 3.2.7 (X,τ) bir topolojik uzay ve $B \subseteq X$ olsun. B kümesi yarı-kapalıdır ancak ve ancak $B = \underline{B}$ dır [5].

Sonuç 3.2.2 (X,τ) bir topolojik uzay ve $B \subseteq X$ olsun. Bu durumda $B \subseteq \underline{B}$ dir.

Sonuç 3.2.3 (X, τ) bir topolojik uzay ve $B \subseteq X$ olsun. B kümesi yarı-kapalıdır ancak ve ancak $\underline{B} \subseteq B$ dır.

Teorem 3.2.8 (X, τ) bir topolojik uzay ve $B \subseteq X$ olsun. Bu durumda B kümesinin yarı-kapanışı $\underline{B} = B \cup \left(\overline{B}\right)^o$ dir [5].

Teorem 3.2.9 (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda $\underline{X - \left(\overline{A} - A\right)} = X$ dır [2].

Teorem 3.2.10 (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda $\left(\overline{A}\right)^o \subseteq {}_0\left(\underline{A}\right)$ dır [3].

3.3 Yarı-Süreklilik

Topolojik uzaylarda yarı-açıklar kullanılarak elde edilen üç farklı genelleştirilmiş süreklilik çeşidi vardır. Bu alt bölümde bu üç süreklilik çeşidinden ve bunların çeşitli özelliklerinden bahsedilecektir.

Tanım 3.3.1 (X, τ) ve (Y, σ) birer topolojik uzay, $f: X \to Y$ bir fonksiyon ve $x \in X$ olsun. Bu durumda,

(1) eğer $f(x) \in V$ olacak şekildeki her $V \in \sigma$ için $x \in A$ ve $f(A) \subseteq V$ olacak şekilde bir $A \in S.O.(X, \tau)$ varsa f fonksiyonuna $x \in X$ noktasında so-1-süreklidir,

(2) eğer $f(x) \in B$ olacak şekildeki her $B \in S.O.(Y, \sigma)$ için $x \in A$ ve $f(A) \subseteq B$ olacak şekilde bir $A \in S.O.(X, \tau)$ varsa f fonksiyonuna $x \in X$ noktasında so-2-süreklidir,

(3) eğer $f(x) \in B$ olacak şekildeki her $B \in S.O.(Y, \sigma)$ için $x \in U$ ve $f(U) \subseteq B$ olacak şekilde bir $U \in \tau$ varsa f fonksiyonuna $x \in X$ noktasında so-3-süreklidir

denir [4].

Tanım 3.3.2 (X, τ) ve (Y, σ) birer topolojik uzay ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu $n = 1,2,3$ için her $x \in X$ noktasında so-n-sürekli ise f fonksiyonu so-n-süreklidir denir [4].

Aşağıdaki önerme Erciyes vd. [14] tarafından verilmiştir.

Teorem 3.3.1 (X,τ) ve (Y,σ) birer topolojik uzay ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

(1) eğer her $V \in \sigma$ için $f^{-1}(V) \subseteq S.O.(X,\tau)$ ise f fonksiyonu so-1-süreklidir,
(2) eğer her $B \in S.O.(Y,\sigma)$ için $f^{-1}(B) \in S.O.(X,\tau)$ ise f fonksiyonu so-2-süreklidir,
(3) eğer her $B \in S.O.(Y,\sigma)$ için $f^{-1}(B) \in \tau$ ise f fonksiyonu so-3-süreklidir [14].

Levine [1] so-1-sürekli fonksiyonları yarı-sürekli (semi-continuous) fonksiyonlar olarak, Crossley ve Hildebrand [5] ise so-2-sürekli fonksiyonları kararsız (irresolute) fonksiyonlar olarak adlandırmıştır.

Açıkça görülüyor ki her so-3-sürekli fonksiyon hem sürekli hem de so-2-sürekli, her sürekli fonksiyon so-1-sürekli ve her so-2-sürekli fonksiyon ise so-1-süreklidir. Ayrıca her sabit fonksiyonda so-3 süreklidir. Bunları bir diyagramla aşağıdaki şekilde gösterebiliriz.

$$\begin{tikzcd} & & \text{so-2-sürekli} \arrow[dr, Rightarrow] & \\ \text{sabit} \arrow[r, Rightarrow] & \text{so-3-sürekli} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{so-1-sürekli} \\ & & \text{sürekli} \arrow[ur, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

Şekil 3.1. Sürekli, sabit ve $n = 1,2,3$ için so-n-sürekli fonksiyonlar arasındaki ilişkiler diyagramı

Şekil 3.1 de gösterilen ilişkilerin tersleri genelde doğru değildir. Örneğin bir so-1-sürekli fonksiyonun sürekli veya so-2-sürekli olması gerekmez. Ayrıca sürekli bir fonksiyonun veya so-2-sürekli bir fonksiyonun so-3-sürekli olması gerekmez.

Teorem 3.3.2 (X_1,τ_1), (X_2,τ_2), (Y_1,σ_1) ve (Y_2,σ_2) birer topolojik uzay, $X = X_1 \times X_2$, $Y = Y_1 \times Y_2$ ve $i = 1,2$ için $f_i: X_i \to Y_i$ birer fonksiyon olmak üzere τ ise X üzerindeki çarpım topolojisi olsun. Bu durumda $S.O.(X_1,\tau_1) \times S.O.(X_2,\tau_2) \subseteq S.O.(X,\tau)$ dir [1].

Teorem 3.3.3 (X,τ), (X_1,τ_1) ve (X_2,τ_2) birer topolojik uzay ve $h: X \to X_1 \times X_2$ bir so-1-sürekli fonksiyon olsun. Bu durumda $f_1 = \pi_1 h: X \to X_1$ ve $f_2 = \pi_2 h: X \to X_2$ fonksiyonları da so-1-süreklidir [1].

Not Genelde so-1-sürekli fonksiyonların bileşkesi yine so-1-sürekli değildir. Fakat so-2sürekli ve so-3-sürekli fonksiyonların bileşkesi sırasıyla yine so-2-sürekli ve so-3-süreklidir.

Teorem 3.3.4 $f: (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ sürekli ve açık bir fonksiyon ise so-2-süreklidir [5].

Burada dikkat edelim ki sürekli ve so-2-sürekli bir fonksiyonun açık olması gerekmez.

Teorem 3.3.5 Bir $f: (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ fonksiyonu so-2-süreklidir ancak ve ancak her $A \subseteq X$ alt kümesi için $f(\underline{A}) \subseteq \underline{f(A)}$ dır [5].

Teorem 3.3.6 Bir $f: (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ fonksiyonu so-2-süreklidir ancak ve ancak her $B \subseteq Y$ alt kümesi için $\underline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\underline{B})$ dır [5].

Tanım 3.3.3 (X,τ) ve (Y,σ) birer topolojik uzay ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $A \subseteq S.O.(X,\tau)$ için $f(A) \subseteq S.O.(Y,\sigma)$ ise f fonksiyonuna ön-yarı-açık fonksiyon denir [5].

Teorem 3.3.7 Bir $f: (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ fonksiyonu sürekli ve açık ise so-2-sürekli ve ön-yarı-açıktır [5].

Tanım 3.3.4 (X,τ) ve (Y,σ) birer topolojik uzay olsun. Eğer birebir, örten, so-2-sürekli ve ön-yarı-açık bir $f: (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ fonksiyonu varsa (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylarına yarı-homeomorf topolojik uzaylar, bu şekilde bir f fonksiyonuna ise bir yarı-homeomorfizm denir [5].

Teorem 3.3.8 Bir $f: (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ fonksiyonu bir homeomorfizm ise yarı-homeomorfizmdir [5].

Bu teoremin tersi genelde doğru değildir.

Teorem 3.3.9 Bir $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ fonksiyonu yarı-homeomrfizm ise her $B \subseteq Y$ alt kümesi için $\underline{f^{-1}(B)} = f^{-1}(\underline{B})$ dır [5].

Sonuç 3.3.1 Bir $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ fonksiyonu yarı-homeomrfizm ise her $A \subseteq X$ alt kümesi için $f(\underline{A}) = \underline{f(A)}$ dır [5].

Sonuç 3.3.2 Bir $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ fonksiyonu yarı-homeomrfizm ise her $A \subseteq X$ alt kümesi için ${}_{o}(f(A)) = f({}_{o}A)$ dır [5].

Sonuç 3.3.3 Bir $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ fonksiyonu yarı-homeomrfizm ise her $B \subseteq Y$ alt kümesi için $f^{-1}({}_{o}B) = {}_{o}(f^{-1}(B))$ dır [5].

Teorem 3.3.10 (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. ${}_{o}(\underline{A}) = \emptyset$ ancak ve ancak A kümesi X içinde hiçbir yerde yoğun değildir [5].

Teorem 3.3.11 $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ fonksiyonu bir yarı-homeomrfizm ve $A \subseteq X$ alt kümesi X içinde hiçbir yerde yoğun olmayan bir küme olsun. Bu durumda $f(A) \subseteq Y$ alt kümesi de Y içinde hiçbir yerde yoğun olmayan bir kümedir [5].

Teorem 3.3.12 Topolojik uzaylar üzerinde tanımlanan yarı-homeomorf olma bağıntısı bir denklik bağıntısıdır [5].

Tanım 3.3.5 Yarı-homeomorfizmler altında korunan bir özelliğe yarı-topolojik özellik denir [5].

Teorem 3.3.13 Her yarı-topolojik özellik bir topolojik özelliktir [5].

Yukarıdaki teoremin tersi genelde doğru değildir. Crossley ve Hildebrand bilinen bazı topolojik özelliklerin (T_0, T_1, regüler, normal, T_3, T_4, kompaktlık, Lindelöf ve metriklenebilir olma özellikleri gibi) yarı-topolojik özellik olmadığını, fakat örneğin T_2, ayrılabilir ve irtibatlı olma özelliklerinin birer yarı-topolojik özellik olduğunu göstermişlerdir [5].

X bir küme olmak üzere X üzerinde tanımlanan bütün topolojik uzayların sınıfını $T(X)$ ile gösterelim.

Tanım 3.3.6 (X,τ) ve (X,τ^*) topolojik uzayları $T(X)$ in birer elemanı olsun. Eğer $S.O.(X,\tau) = S.O.(X,\tau^*)$ ise (X,τ) topolojik uzayına (X,τ^*) topolojik uzayının yarı-karşılığı denir [5].

Teorem 3.3.14 $T(X)$ sınıfı üzerinde yarı-karşılık olma bağıntısı bir denklik bağıntısıdır [5].

Bu denklik bağıntısına göre (X,τ) topolojik uzayı ile aynı yarı-açık kümelere sahip X üzerinde tanımlı topolojik uzayların sınıfı, yani (X,τ) topolojik uzayının denklik sınıfı, $[X, S.O.(X,\tau)]$ ile gösterilecektir. $[X, S.O.(X,\tau)]$ sınıfı içinde kapsama bağıntısına göre her zaman bir maksimal eleman vardır fakat her zaman bir minimal eleman olmak zorunda değildir. $[X, S.O.(X,\tau)]$ sınıfının bu maksimal elemanı, yani (X,τ) ile aynı yarı-açık kümelere sahip en ince topolojik uzay, $(X, F(\tau))$ ile gösterilecektir. $T(X)$ sınıfı üzerinde tanımlanan yarı-karşılık olma bağıntısına göre $[X, S.O.(X,\tau)]$ denklik sınıflarına yarı-topolojik sınıflar denir [5].

Teorem 3.3.15 Bir $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ fonksiyonu so-1-sürekli ve $(X,\tau_1) \in [X, S.O.(X,\tau)]$ ise $f:(X,\tau_1) \to (Y,\sigma)$ fonksiyonu da so-1-süreklidir [5].

Teorem 3.3.16 Bir $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ fonksiyonu so-2-sürekli ve $(X,\tau_1) \in [X, S.O.(X,\tau)]$ ise $f:(X,\tau_1) \to (Y,\sigma)$ fonksiyonu da so-2-süreklidir [5].

Teorem 3.3.17 (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer (X,τ) bir T_2-uzayı ve $(X,\tau_1) \in [X, S.O.(X,\tau)]$ ise (X,τ_1) topolojik uzayı da bir T_2-uzayıdır [5].

Teorem 3.3.18 Bir $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ fonksiyonu bir yarı-homeomorfizm ise $f:(X, F(\tau)) \to (Y, F(\sigma))$ fonksiyonu homeomorfizmdir [5].

Yukarıda verilen iki teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.19 T_2-uzayı olma özelliği bir yarı-topolojik özelliktir [5].

Teorem 3.3.20 (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer A kümesi (X,τ) uzayında yoğun ise $(X, F(\tau))$ uzayında da yoğundur [5].

Teorem 3.3.21 Bir $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ fonksiyonu bir yarı-homeomorfizm ve bir $A \subseteq X$ alt kümesi (X,τ) uzayında yoğun ise $f(A) \subseteq Y$ alt kümeside (Y,σ) uzayında yoğundur [5].

Bu teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki teoremi verilebilir.

Teorem 3.3.22 Ayrılabilir uzayı olma özelliği bir yarı-topolojik özelliktir [5].

Teorem 3.3.23 (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer $\big(X,F(\tau)\big)$ uzayı irtibatsız ise (X,τ) uzayı da irtibatsızdır [5].

Teorem 3.3.24 Bir $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ fonksiyonu bir yarı-homeomorfizm ve bir $U \subseteq X$ alt kümesi (X,τ) uzayında açık ve irtibatlı ise $f(U) \subseteq Y$ alt kümeside (Y,σ) uzayında irtibatlıdır [5].

Teorem 3.3.25 İrtibatlı uzay olma özelliği bir yarı-topolojik özelliktir [5].

Nayar ve Arya, 1992 yılında hangi topolojik özelliklerin bir yarı-topolojik özellik olduğunu kontrol etmek için aşağıda verilen kriteri geliştirmişlerdir [6].

Teorem 3.3.26 Bir P topolojik özelliği bir yarı-topolojik özelliktir ancak ve ancak bir (X,τ) topolojik uzayı için "(X,τ) uzayı P özelliğine sahiptir ancak ve ancak $\big(X,F(\tau)\big)$ uzayı P özelliğine sahiptir" önermesi doğrudur [6].

4. YARI AYIRMA AKSİYOMLARI

Bu bölümde bazı ayırma aksiyomlarından daha zayıf özellikler olan yarı-ayırma aksiyomları hatırlatılıp bunların kalıtsal ve yarı-topolojik özellik olup olmadığı, çarpım ve bölüm uzaylarında bu özelliklerin korunup korunmadığı gibi çeşitli özellikleri incelenecektir.

4.1 sT_0-Uzayları

Tanım 4.1.1 Bir (X,τ) topolojik uzayında farklı $x,y \in X$ noktaları için x ve y noktalarından birini içerip diğerini içermeyen bir $A \subseteq X$ yarı-açık kümesi varsa bu (X,τ) topolojik uzayına bir sT_0-uzayı denir [8].

Teorem 4.1.1 Bir (X,τ) topolojik uzayı bir sT_0-uzayıdır ancak ve ancak her farklı $x,y \in X$ eleman çifti için $\underline{\{x\}} \neq \underline{\{y\}}$ dır [4].

sT_0-uzayı tanımından açıkça görüldüğü gibi her açık küme bir yarı-açık küme olduğundan her T_0-uzayı bir sT_0-uzayıdır. Bu ifadenin tersi genelde doğru değildir.

Teorem 4.1.2 Bir sT_0-uzayının her açık alt kümesi de bir sT_0-uzayıdır [4].

Bu teorem sT_0-uzayı olma özelliğinin açık alt kümeler üzerinde kalıtsal bir özellik olduğunu göstermektedir. sT_0-uzayı olma özelliği açık olmayan alt kümelerde genellikle kalıtsal değildir.

Teorem 4.1.3 Topolojik uzayların sT_0-uzayı olma özelliği topolojik özelliktir.

İspat : (X,τ) ve (Y,σ) iki topolojik uzay, $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ homoemofizm olsun. Kabul edelim ki (X,τ) sT_0-uzayı ve $a,b \in Y$ faklı iki nokta olsun. f örten olduğundan f (x)=a ve f (y)=b olacak şekilde farklı $x,y \in X$ vardır. f birebir olduğundan, $a \neq b$ dir. X, sT_0-uzayı olduğundan x ve y noktalarından birini içerip diğerini içermeyen $A \subset X$ yarı-açık kümesi vardır. Kabul edelim ki $x \in A$ fakat $y \notin A$ olsun. Dolayısıyla $f\ (x) = a \in f\,(A)$ ve $f\,(y)$=$b \notin f\,(A)$ olur.

Şimdi ise $f\,(A)$ kümesinin Y de yarı-açık olduğunu gösterelim. A kümesi X de yarı-açık olduğundan $U \subseteq A \subseteq \overline{U}$ olacak şekilde $U \subseteq X$ açık kümesi vardır. Böylece,

$f(U) \subseteq f(A) \subseteq f(\overline{U})$ yazabiliriz. f sürekli olduğundan $f(\overline{U}) \subseteq \overline{f(U)}$ dir. f^{-1} sürekli ve U kümesi X de açık olduğundan $f(U)$ kümesi de Y de açık olur. Dolayısıyla, $f(U)$ açık olmak üzere $f(U) \subseteq f(A) \subseteq \overline{f(U)}$ dir. Böylece $f(A)$ kümesi a noktasını içeren y noktasını içermeyen Y de bir yarı-açık cümle olmuş olur. Bu ise (Y, σ) nın sT_0-uzayı olduğunu, dolayısıyla sT_0-uzayı olma özelliğinin topolojik bir özellik olduğu ispatlanır.

Tanım 4.1.2 (X, τ) bir topolojik uzay ve X üzerinde $x, y \in X$ olmak üzere "$x \sim y \Leftrightarrow \underline{\{x\}} = \underline{\{y\}}$" şeklinde tanımlı bir denklik bağıntısı olsun. Bu durumda bu bağıntıya göre denklik sınıflarının kümesi $X_s = X/\sim$ ve $Q(X_s)$ bu küme üzerindeki bölüm topolojisi olmak üzere $(X_s, Q(X_s))$ bölüm uzayı bir sT_0-uzayıdır ve bu uzaya (X, τ) topolojik uzayının sT_0-laştırması denir [12].

Teorem 4.1.4 (X, τ) bir topolojik uzay ve $(X_s, Q(X_s))$ bölüm uzayı (X, τ) topolojik uzayının sT_0-laştırması olmak üzere $p_s\colon (X, \tau) \to (X_s, Q(X_s))$ doğal fonksiyonu sürekli, açık, kapalı ve her $A \in S.O.(X, \tau)$ için $p_s^{-1}(p_s(A)) = A$ dır [12].

Teorem 4.1.5 sT_0-uzaylarının çarpımı yine bir sT_0-uzayıdır [15].

4.2 sT_1-Uzayları

Tanım 4.2.1 Bir (X, τ) topolojik uzayında farklı $x, y \in X$ noktaları için $x \in A$, $y \notin A$ ve $y \in B$, $x \notin B$ olacak şekilde $A, B \subseteq X$ yarı-açık kümeleri varsa bu (X, τ) topolojik uzayına bir sT_1-uzayı denir [8].

Teorem 4.2.1 Bir (X, τ) topolojik uzayı bir sT_1-uzayıdır ancak ve ancak her $x \in X$ elemanı için $\{x\}$ tek nokta kümesi yarı-kapalıdır [4].

sT_1-uzayı tanımından açıkça görüldüğü gibi her açık küme bir yarı-açık küme olduğundan her T_1-uzayı bir sT_1-uzayıdır. Ayrıca her sT_1-uzayı bir sT_0-uzayıdır. Yani her sT_1-uzayı sT_0-uzayının sahip olduğu özelliklere sahiptir. Fakat bu ifadelerin tersi genelde doğru değildir.

Teorem 4.2.2 Bir sT_1-uzayının her açık alt kümesi de bir sT_1-uzayıdır [4].

Bu teorem sT_1-uzayı olma özelliğinin açık alt kümeler üzerinde kalıtsal bir özellik olduğunu göstermektedir. sT_1-uzayı olma özelliği açık olmayan alt kümelerde genellikle kalıtsal değildir.

Teorem 4.2.3 Topolojik uzayların sT_1-uzayı olma özelliği topolojik özelliktir.

İspat. (X,τ) ve (Y,σ) iki topolojik uzay, $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ homoemofizm olsun. Kabul edelim ki (X,τ) sT_1-uzayı ve $a,b\in Y$ faklı iki nokta olsun. f örten olduğundan $f\ (x)$=a ve $f\ (y)$=b olacak şekilde farklı $x,y\in X$ vardır, X, sT_1-uzayı olduğundan buradan $x,y\in X$ noktaları için $x\in A$, $y\notin A$ ve $y\in B$, $x\notin B$ olacak şekilde $A,B\subseteq X$ yarı-açık kümeleri vardır. f homeomorfizm olduğundan $f\ (x)=a\in f(A)$, $f\ (y)=b\notin f(A)$ ve $f\ (y)=b\in f(B)$, $f\ (x)=a\notin f(B)$ olacak şeklide $f(A)$ ve $f(B)$, Y de yarı-açık kümeleri vardır. Bu ise (Y,σ) nın sT_1-uzayı olduğunu, dolayısıyla sT_1-uzayı olma özelliğinin topolojik bir özellik olduğu ispatlanır.

Teorem 4.2.4 sT_1-uzaylarının çarpımı yine bir sT_1-uzayıdır [15].

4.3 sT_2-Uzayları

Tanım 4.3.1 Bir (X,τ) topolojik uzayında farklı $x,y\in X$ noktaları için $x\in A$, $y\in B$ ve $A\cap B=\emptyset$ olacak şekilde $A,B\subseteq X$ yarı-açık kümeleri varsa bu (X,τ) topolojik uzayına bir sT_2-uzayı denir [8].

Teorem 4.3.1 Bir (X,τ) topolojik uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) (X,τ) bir sT_2-uzayıdır.

(2) Her farklı $x,y\in X$ eleman çifti için $x\in A$ ve $y\notin \underline{A}$ olacak şekilde bir $A\subseteq X$ yarı-açık kümesi vardır.

(3) Her $x\in X$ için

$$\{x\}=\bigcap_{\substack{x\in A\\ A\in S.O.(X,\tau)}}\underline{A} \tag{4.1}$$

dır [4].

sT_2-uzayı tanımından açıkça görüldüğü gibi her açık küme bir yarı-açık küme olduğundan her T_2-uzayı bir sT_2-uzayıdır. Ayrıca her sT_2-uzayı bir sT_1-uzayı ve böylece aynı zamanda bir sT_0-uzayıdır. Fakat bu ifadelerin tersi genelde doğru değildir.

Teorem 4.3.2 Bir sT_2-uzayının her açık alt kümesi de bir sT_2-uzayıdır [17].

Bu teorem sT_2-uzayı olma özelliğinin açık alt kümeler üzerinde kalıtsal bir özellik olduğunu göstermektedir. sT_2-uzayı olma özelliği açık olmayan alt kümelerde genellikle kalıtsal değildir.

Teorem 4.3.3 Topolojik uzayların sT_2-uzayı olma özelliği topolojik özelliktir.

İspat : (X,τ) ve (Y,σ) iki topolojik uzay, $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ homoemofizm olsun. Kabul edelim ki (X,τ) sT_2-uzayı ve $a,b\in Y$ faklı iki nokta olsun. f örten olduğundan f (x)=a ve f (y)=b olacak şekilde farklı $x,y\in X$ vardır. f birebir olduğundan, $a\neq b$ dir ve $x\neq y$ dir. (X,τ) sT_2-uzayı olduğundan farklı $x,y\in X$ noktaları için $x\in A$, $y\in B$ ve $A\cap B=\emptyset$ olacak şekilde $A,B\subseteq X$ yarı-açık kümeleri vardır. Buradan $f\ (x)=a\in f(A)$ ve $f\ (y)=b\in f(B)$ dir.

Şimdi ise $f\,(A)$ ve $f\,(B)$ kümelerinin Y de yarı-açık olduğunu gösterelim. A kümesi X de yarı-açık olduğundan $U\subseteq A\subseteq\overline{U}$ olacak şekilde $U\subseteq X$ açık kümesi vardır. Böylece, $f(U)\subseteq f(A)\subseteq f(\overline{U})$ yazabiliriz. f^{-1} sürekli olduğundan $f(A)$ kümesi Y de açıktır. f sürekli olduğundan $f(\overline{U})\subseteq\overline{f(U)}$ dir. Böylece, $f(U)\subseteq f(A)\subseteq\overline{f(U)}$ olur ki bu ise $f(A)$ kümesinin Y de yarı-açık olduğunu gösterir. Aynı şekilde $f(B)$ nin Y yarı-açık olduğunu gösterilebilir.

Son olarak, $A\cap B=\emptyset$ ve f birebir olduğundan ve $f(A)\cap f(B)=f(A\cap B)=f(\emptyset)=\emptyset$ dir. Dolayısıyla $f\,(A)$ ve $f\,(B)$ kümeleri ayrıktır. Bu ise (Y,σ) nın sT_2-uzayı olduğunu, dolayısıyla sT_2-uzayı olma özelliğinin topolojik bir özellik olduğu ispatlanır.

4.4 sT_3-Uzayları

Tanım 4.4.1 Bir (X,τ) topolojik uzayındaki her $K\subseteq X$ kapalı alt kümesi ve $x\notin K$ olacak şekildeki her $x\in X$ elemanı için $x\in A$, $K\subseteq B$ ve $A\cap B=\emptyset$ olacak şekilde

$A, B \subseteq X$ yarı-açık kümeleri varsa bu (X, τ) topolojik uzayına bir yarı-regüler uzay denir [8].

Tanım 4.4.2 Bir (X, τ) topolojik uzayındaki her $K \subseteq X$ yarı-kapalı alt kümesi ve $x \notin K$ olacak şekildeki her $x \in X$ elemanı için $x \in A$, $K \subseteq B$ ve $A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde $A, B \subseteq X$ yarı-açık kümeleri varsa bu (X, τ) topolojik uzayına bir s-regüler uzay denir [12].

Yukarı tanımlardan açıkça görülebileceği üzere her kapalı küme yarı-kapalı olduğundan her s-regüler uzay yarı-regülerdir. Fakat bu ifadenin tersi her zaman doğru değildir.

Teorem 4.4.1 Bir (X, τ) topolojik uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir [12]:

(i) (X, τ) topolojik uzayı s-regülerdir.

(ii) (X, τ) topolojik uzayının her yarı-homeomorfizm altındaki görüntüsü s-regülerdir.

(iii) Her $x \in X$ ve $x \in A$ olacak şekildeki her $A \in S.O.(X, \tau)$ yarı-açık kümesi için $x \in B \subseteq \underline{B} \subseteq A$ olacak şekilde $B \in S.O.(X, \tau)$ vardır.

(iv) $\left(X_s, Q(X_s)\right)$ s-regülerdir.

Teorem 4.4.2 Bir (X, τ) topolojik uzayı s-regüler uzaydır ancak ve ancak $\left(X_s, Q(X_s)\right)$ bir s-regüler uzay ve bir sT_2-uzayıdır [12].

Teorem 4.4.3 Bir (X, τ) topolojik uzayı s-regüler uzaydır ancak ve ancak her $A \in S.O.(X, \tau)$ için (A, τ_A) bir s-regüler uzaydır [18].

1985 yılında Dorsett yarı-açık kümelerinin yarı-kapanışının da yarı-açık küme olduğunu göstermiş ve bu gerçeği aşağıdaki teoremin elde edilmesinde kullanmıştır [13].

Teorem 4.4.4 Bir (X, τ) topolojik uzayı s-regüler uzaydır ancak ve ancak boştan farklı her $K \subseteq X$ yarı-kapalı alt kümesi ve $x \in X \setminus K$ elemanı için $f(x) = 0$ ve $f(K) = \{1\}$ olacak şekilde yarı-sürekli bir $f: X \to [0,1]$ fonksiyonu vardır [13].

Teorem 4.4.5 Bir (X, τ) topolojik uzayı s-regüler uzaydır ancak ve ancak her $A \in P.O.(X, \tau)$ için (A, τ_A) bir s-regüler uzaydır [13].

Teorem 4.4.6 Topolojik uzayların yarı-regüler uzayı olma özelliği topolojik özelliktir.

İspat : (X, τ) ve (Y, σ) iki topolojik uzay, $f: (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ homoemofizm olsun. Kabul edelim ki (X, τ) yarı-regüler uzay olsun. Ayrıca $a \in Y$ ve $K \subseteq X$ kapalı bir alt kümesi için $a \notin K$ olsun. f birebir olduğundan $f^{-1}(a) \notin f^{-1}(K)$ dir. Ayrıca, f sürekli olduğundan $f^{-1}(K)$, X de kapalıdır. (X, τ) yarı-regüler olduğundan

$f^{-1}(a) \in A$, $f^{-1}(K) \subseteq B$ ve $A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde $A, B \subseteq X$ yarı-açık kümeleri vardır. f örten olduğundan, $f\left(f^{-1}(a)\right) = a \in f(A)$ ve $f\left(f^{-1}(K)\right) = K \subseteq f(B)$ dir.

Şimdi ise f (A) ve f (B) kümelerinin Y de yarı-açık olduğunu gösterelim. A kümesi X de yarı-açık olduğundan $U \subseteq A \subseteq \overline{U}$ olacak şekilde $U \subseteq X$ açık kümesi vardır. Böylece, $f(U) \subseteq f(A) \subseteq f(\overline{U})$ yazabiliriz. f^{-1} sürekli olduğundan $f(A)$ kümesi Y de açıktır. f sürekli olduğundan $f(\overline{U}) \subseteq \overline{f(U)}$ dir. Böylece, $f(U) \subseteq f(A) \subseteq \overline{f(U)}$ olur ki bu ise $f(A)$ kümesinin Y de yarı-açık olduğunu gösterir. Aynı şekilde $f(B)$ nin Y yarı-açık olduğunu gösterilebilir.

Son olarak $A \cap B = \emptyset$ ve f birebir olduğundan ve $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$ dir. Dolayısıyla f (A) ve f (B) kümeleri ayrıktır. Bu ise (Y, σ) nın yarı-regüler uzayı olduğunu, o halde yarı-regüler uzay olma özelliğinin topolojik bir özellik olduğu ispatlanır.

Tanım 4.4.3 Bir (X, τ) topolojik uzayı yarı-regüler uzay ve T_1-uzayı ise bu (X, τ) topolojik uzayına bir sT_3-uzayı denir.

Teorem 4.4.7 Her sT_3-uzayı bir sT_2-uzayıdır.

4.5 sT_4-Uzayları

Tanım 4.5.1 Bir (X, τ) topolojik uzayındaki her ayrık $H, K \subseteq X$ kapalı alt kümeleri için $H \subseteq A$, $K \subseteq B$ ve $A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde $A, B \subseteq X$ yarı-açık kümeleri varsa bu (X, τ) topolojik uzayına bir yarı-normal uzay denir [8].

Tanım 4.5.2 Bir (X,τ) topolojik uzayındaki her ayrık $H,K \subseteq X$ yarı-kapalı alt kümeleri için $H \subseteq A$, $K \subseteq B$ ve $A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde $A,B \subseteq X$ yarı-açık kümeleri varsa bu (X,τ) topolojik uzayına bir s-normal uzay denir [18].

Yukarı tanımlardan açıkça görülebileceği üzere her kapalı küme yarı-kapalı olduğundan her s-normal uzay yarı-normaldir. Fakat bu ifadenin tersi her zaman doğru değildir.

Teorem 4.5.1 Bir (X,τ) topolojik uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir [13]:

(1) (X,τ) topolojik uzayı s-normaldir.
(2) (X,τ) topolojik uzayının her yarı-homeomorfizm altındaki görüntüsü s-normaldir.
(3) Her $B \subseteq X$ yarı-kapalı alt kümesi ve $B \subseteq A$ olacak şekildeki her $A \in S.O.(X,\tau)$ yarı-açık kümesi için $B \subseteq V \subseteq \underline{V} \subseteq A$ olacak şekilde bir $V \in S.O.(X,\tau)$ vardır.
(4) $\left(X_s, Q(X_s)\right)$ s-normaldir.

Teorem 4.5.2 Bir (X,τ) topolojik uzayı s-normal uzaydır ancak ve ancak her $A \in P.O.(X,\tau)$ için (A,τ_A) bir s-normal uzaydır [18].

Teorem 4.5.3 Topolojik uzayların yarı-normal uzayı olma özelliği topolojik özelliktir.

İspat : (X,τ) ve (Y,σ) iki topolojik uzay, $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ homoemofizm olsun. Kabul edelim ki (X,τ) yarı-normal uzay olsun. Ayrıca $H,K \subseteq X$ kapalı ayrık alt kümeler olsun. f sürekli olduğundan $f^{-1}(H)$, $f^{-1}(K) \subseteq Y$ kümeleri X de kapalıdır. H ve K kümeleri X de kapalı ayrık alt kümeler olduğundan $H \cap K = \emptyset$ ve buradan $f^{-1}(H \cap K) = f^{-1}(H) \cap f^{-1}(K) = \emptyset$ olur. Dolasıyla $f^{-1}(H)$ ve $f^{-1}(K)$ kümeleri X de ayrık olur. (X,τ) yarı-normal uzay olduğundan, X de yarı-açık ayrık $A,B \subseteq X$ kümeleri vardır, öyle ki $f^{-1}(H) \subseteq A$ ve $f^{-1}(K) \subseteq B$ dir. f örten olduğundan $H = f\left(f^{-1}(H)\right) \subseteq f(A)$ ve $K = f\left(f^{-1}(K)\right) \subseteq f(B)$ dir. f ve f^{-1} sürekliliğinden f (A) ve f (B) kümelerinin Y de yarı-açık olduğunu gösterilebilir. f in birebir olmasından da $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$ olacağından, f (A) ve f (B) kümeleri ayrıktır. O halde yarı-normal uzay olma özelliğinin topolojik bir özellik olduğu ispatlanır.

1985 yılında s-regüler uzaylar için verilen teoreme benzer olarak s-normal uzaylar için aşağıdaki teoremi elde etmiştir [13].

Teorem 4.5.4 Bir (X, τ) topolojik uzayı s-normal uzaydır ancak ve ancak her ayrık $H, K \subseteq X$ yarı-kapalı alt kümeleri için $f(H) = 0$ ve $f(K) = 1$ olacak şekilde yarı-sürekli bir $f: (X, \tau) \to [0,1]$ fonksiyonu vardır [13].

Teorem 4.5.5 Her $i \in I$ için (X_i, τ_i) birer topolojik uzay ve $A_i \subseteq X_i$ olmak üzere $\underline{(\prod_{i\in I} A_i)} \subseteq \prod_{i\in I} \underline{(A_i)}$ dır [15].

X üzerindeki topoloji çarpım topolojisi olsun. Bu durumda sonlu sayıda $i \in I$ için $A_i \neq X_i$ olacak şekildeki $\emptyset \neq A_i \subseteq X_i$ için $\prod_{i\in I} A_i \in S.O.(X, \tau)$ dır ancak ve ancak her $i \in I$ için $A_i \in S.O.(X_i, \tau_i)$ dır [15].

Tanım 4.5.3 Bir (X, τ) topolojik uzayı yarı-normal uzay ve T_1-uzayı ise bu (X, τ) topolojik uzayına bir sT_4-uzayı denir.

Teorem 4.5.6 Her sT_4-uzayı bir sT_3-uzayıdır [16].

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında yarı-açık kümeler ve yarı-kapalı kümeler kullanılarak elde edilmiş çeşitli genelleştirilmiş ayırma aksiyomlarının öncelikle topolojik özellik olduğu ve bazı şartlar altında kalıtsallık özelliğine de sahip olduğu gösterilmiştir. Ayrıca bu ayırma aksiyomlarını sağlayan topolojik uzayların çarpım ve bölüm uzaylarının da aynı aksiyomları sağladığı gösterilmiştir.

Literatürde yarı-açık kümeler kullanılarak elde edilen yeni topolojik kavramlar, dizisel açık kümeler, genelleştirilmiş dizisel açık kümeler (G-açık kümeler) ve bunların yarı-açık kümelerle kombinasyonu sonucunda elde edilebilecek, örneğin dizisel-yarı-açık küme, yarı-dizisel-açık küme, G-yarı-açık veya yarı- G-açık küme, kavramlar kullanılarak çeşitli yeni ayırma aksiyomları elde edilebilir ve bu elde edilen yeni ayırma aksiyomlarının çeşitli özellikleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

1. Levine, N., 1963. Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces, The American Mathematical Monthly, 70(1), 36-41.

2. Crossley, S., and Hildebrand, S., 1971. Semi-closure, Texas Journal of Science 22(2+3), 99-112.

3. Crossley, S., and Hildebrand, S., 1971. Semi-closed sets and semi-continuity in topological spaces, Texas Journal of Science 22(2+3), 123-126.

4. Scheers, J. M., 2011. An exploration of semi-open sets in topological spaces, Master of Science Thesis, Stephen F. Austin State University, Faculty of Graduate School, Austin.

5. Crossley, S., and Hildebrand, S., 1972. Semi-topological properties, Fundamenta Mathematicae 74(3), 233-254.

6. Nayar, Bhamini, M. P., and Arya, S. P., 1992. Semi-topological properties, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 15(2), 267-272.

7. Crossley, S., 1974. A note on semitopological classes, Proceedings of the American Mathematical Society, 43(2), 416–420.

8. Maheshwari, S.N. and Prasad, R., 1975. Some new separation axioms, Ann. Soc. Sci. Bruxelles Sér. I, 89, 395–402.

9. Maheshwari, S.N. and Prasad, R., 1975. On s-regular spaces, Glasnik Mat. Ser. III, 10(30), 347-350.

10. Maheshwari, S.N. and Prasad, R., 1975. On s-normal spaces, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie, T22(70), 27-30.

11. Dorsett, C., 1980. Semi compact R_1 and product space, Bull. Malaysian Math. Soc. 2(3), 15-19.

12. Dorsett, C., 1982. Semi-regular spaces, Soochow Journal of Mathematics, 8, 45-53.

13. Dorsett, C., 1985. Semi-normal spaces, Kyungpook Mathematical Journal, 25(2), 173-180.

14. Erciyes, A., Aytekin, A., Şahan, T., 2016. Semi-homotopy and semi-fundamental groups, Konuralp Journal of Mathematics, 4(1), 155-163.

15. Dorsett, C., 1982. Product spaces and semi-separation axioms, Periodica Mathematica Hungarica, 13(1), 39-45.

16. Dorsett, C., 1982. S-normal and s-regular spaces. Bulletin Mathématique De La Société Des Sciences Mathématiques De La République Socialiste De Roumanie, 26(74)(3), 231-235.

17. Al-Obaidiy, J. M., 2009. Another type of separation axioms, Journal of Research Diyala humanity, 39, 75-85.

18. Dorsett, C., 1989. Semi-regular and semi-normal spaces, Soochow Journal of Mathematics, 15(2), 223-231.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Neriman ŞAHAN

Adres : Nakkaş Mah. 2818. Sok. Yön-Çar Sitesi No:11 C-10 Merkez /AKSARAY

E-posta adresi : nerimansahan42@gmail.com

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Aksaray Üniversitesi, 2010-2015

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, 2016-2019

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Uluslararası Hakemli Dergilerde Yayınlanan Makaleler

1.
2.

Kongrelerde Sunulan Makaleler

1.

2.