

Lineer Olmayan Schrödinger Denkleminin Sayısal Çözümleri İçin
Trigonometrik B-Spline Galerkin Yöntemleri

Mehmet Ali Mersin

DOKTORA TEZİ

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Nisan 2019



Trigonometric B-Spline Galerkin Methods for Numerical Solutions
of the Nonlinear Schrodinger Equation

Mehmet Ali Mersin

DOCTORAL DISSERTATION

Department of Mathematics-Computer

April 2019

Lineer Olmayan Schrödinger Denkleminin Sayısal Çözümleri İçin
Trigonometrik B-Spline Galerkin Yöntemleri

Mehmet Ali Mersin

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. Dursun Irk

Bu Tez Eskişehir Osmangazi Üniversitesi tarafından “2017-1529“ no’lu BAP projesi
çerçevesinde desteklenmiştir

Nisan 2019

ONAY

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı Doktora öğrencisi Mehmet Ali Mersin'in DOKTORA tezi olarak hazırladığı "Lineer Olmayan Schrödinger Denkleminin Sayısal Çözümleri İçin Trigonometrik B-Spline Galerkin Yöntemleri" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oy birliği ile kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Dursun IRK

İkinci Danışman : -

Doktora Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Bülent SAKA

Üye : Doç. Dr. Dursun IRK

Üye : Doç. Dr. Ahmet BOZ

Üye : Doç. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

Üye : Doç. Dr. Sait SAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hürriyet ERŞAHAN
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Doç. Dr. Dursun Irk danışmanlığında hazırlamış olduğum “Lineer Olmayan Schrödinger Denkleminin Sayısal Çözümleri İçin Trigonometrik B-Spline Galerkin Yöntemleri” başlıklı DOKTORA tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 10/04/2019

Mehmet Ali Mersin

İmza

ÖZET

Bu Doktora tezi dokuz bölümden oluşmaktadır. Bu tez çalışmasında, doğrusal olmayan Schrödinger (NLS) denkleminin sayısal çözümleri, zaman ayrıştırması için Crank Nicolson yöntemine ve konum ayrıştırması için kuadratik, kübik, kuartik ve kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonlarına dayanan Galerkin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilmiştir.

Birinci bölümde, tez hakkında genel bilgi verilmiştir. Tezin kapsamı ve amacı da açıklanmıştır. İkinci bölümde, NLS denkleminin sayısal çözümü ve trigonometrik B-spline fonksiyonlarına yönelik bazı eski çalışmalar incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, NLS denkleminin sayısal çözümü için kullanılacak bazı temel terimler, Crank Nicolson ve Galerkin yöntemleri anlatılmıştır. Daha sonra trigonometrik B-spline fonksiyonlarının genel özellikleri verilmiştir. Sonrasında başlangıç ve sınır koşulları ile birlikte NLS denklemi verilerek soliton dalgasının hareketi ve iki soliton dalgasının çarpışması test problemleri tanıtılmıştır.

Dördüncü bölümde NLS denklemi, iç lineerleştirme ve Rubin-Graves lineerleştirmesi olmak üzere iki farklı lineerleştirme tekniğiyle kuadratik trigonometrik B-spline Galerkin yöntemi kullanılarak sayısal olarak çözülmüştür. Beşinci, altıncı ve yedinci bölümlerde ise sırasıyla kübik, kuartik ve kuintik fonksiyonlar kullanılmıştır. Her bölümde test problemleri kullanılarak önerilen yöntemlerin doğruluğu incelenmiştir.

Son iki bölümde, sunulan yöntemler ile elde edilen sonuçlar tartışılmıştır. Ek olarak, gelecekteki çalışmalar için bazı önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler : Soliton dalgaları, Sonlu elemanlar, Galerkin yöntemi, NLS denklemi, Trigonometrik B-Spline

SUMMARY

This Ph.D. thesis consists of nine chapters. In this thesis, numerical solutions of Nonlinear Schrödinger (NLS) equation are obtained using Galerkin finite element method, based on Crank Nicolson method for time discretization and quadratic, cubic, quartic and quintic trigonometric B-spline functions for the space discretization.

In the first chapter, general information of the thesis is given. The scope and purpose of the thesis are also explained. In the second chapter, some earlier studies for numerical solution of the NLS equation and trigonometric B-spline functions are investigated.

In the third chapter, some basis terms and Crank Nicolson and Galerkin methods which will be used for numerical solution of the NLS equation are mentioned. Then general properties of the trigonometric B-spline functions are given. Afterwards NLS equation together with initial and boundary conditions is investigated and test problems including propagation of soliton and interaction of two solitons are given.

In the fourth chapter NLS equation is solved numerically by using quadratic trigonometric B-spline Galerkin method for two different linearisation techniques which are inner iteration and Rubin Graves iteration. Same methods implemented in fifth, sixth and seventh chapters by using cubic, quartic, and quintic functions respectively. In each chapter, the accuracy of the present method is investigated by using the test problems.

In the last two chapters, the results of the presented methods are given and discussed. Additionally, some suggestions are given for future studies.

Keywords : Soliton waves, Finite elements, Galerkin method, NLS equation, Trigonometric B-Spline

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmalarım süresince ilgi ve yardımlarını esirgemeyen, bilgi ve deneyimlerinden her zaman istifade ettiğim danışman hocam Sayın Doç. Dr. Dursun İrk'a ve "2014-1529" no'lu BAP projesi kapsamında çalışmamı destekleyen Eskişehir Osmangazi Üniversitesi'ne teşekkürlerimi sunarım.

Bu tezi, ders çalışmam için her türlü fedakarlığı gösteren sevgili eşim Efruz Özlem'e, zamanlarından ödünç aldığım biricik yavrularım Çınar Dora ve Ecem Derin'e, beni her zaman destekleyen ve her adımda yanımda duran Annem, Babam ve Kardeşlerime ithaf ediyorum.

Mehmet Ali Mersin

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	vi
SUMMARY	vii
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
ÇİZELGELER DİZİNİ	xii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xiii
1. GİRİŞ VE AMAÇ	1
2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI	4
3. TEMEL KAVRAMLAR	7
3.1 Crank Nicolson Yöntemi	7
3.2 Trigonometrik B-Spline Fonksiyonlar.....	8
3.2.1 Lineer trigonometrik B-Spline	8
3.2.2 Kuadratik trigonometrik B-Spline	10
3.2.3 Kübik trigonometrik B-Spline	12
3.2.4 Kuartik trigonometrik B-Spline.....	14
3.2.5 Kuintik trigonometrik B-Spline.....	18
3.3 Galerkin Yöntemi	23
3.4 Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi.....	25
3.5 Test Problemleri	26
3.5.1 Soliton dalgasının hareketi	27
3.5.2 İki soliton dalgasının çarpışması	28
4. NLS DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ İÇİN TRİGONOMETRİK KUADRATİK B-SPLİNE GALERKİN METODU	29
4.1 Crank Nicolson Yöntemi	29
4.2 İç İterasyonlu Lineerleştirme (Metot 1).....	30
4.3 Rubin Graves Lineerlestirmesi (Metot 2).....	37

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

4.4 Soliton Dalgasının Hareketi Test Problemi	43
4.5 İki Soliton Dalgasının Çarpışması Test Problemi	48
5. NLS DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ İÇİN TRİGONOMETRİK KÜBİK B-SPLİNE GALERKİN METODU	52
5.1 İç İterasyonlu Lineerleştirme (Metot 3).....	52
5.2 Rubin Graves Lineerleştirmesi (Metot 4).....	56
5.3 Soliton Dalgasının Hareketi Test Problemi	61
5.4 İki Soliton Dalgasının Çarpışması Test Problemi	64
6. NLS DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ İÇİN TRİGONOMETRİK KUARTİK B-SPLİNE GALERKİN METODU	66
6.1 İç İterasyonlu Lineerleştirme (Metot 5).....	66
6.2 Rubin Graves Lineerleştirmesi (Metot 6).....	70
6.3 Soliton Dalgasının Hareketi Test Problemi	74
6.4 İki Soliton Dalgasının Çarpışması Test Problemi	78
7. NLS DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ İÇİN TRİGONOMETRİK KUİNTİK B-SPLİNE GALERKİN METODU	80
7.1 İç İterasyonlu Lineerleştirme (Metot 7).....	80
7.2 Rubin Graves Lineerleştirmesi (Metot 8).....	84
7.3 Soliton Dalgasının Hareketi Test Problemi	88
7.4 İki Soliton Dalgasının Çarpışması Test Problemi	91
8. BULGULAR VE TARTIŞMA	93
9. SONUÇ VE ÖNERİLER	96
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	97
ÖZGEÇMİŞ	103

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
4.1 $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $t = 0$ ve $t = 1$ zamanındaki U_r	43
4.2 $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $t = 0$ ve $t = 1$ zamanındaki U_s	44
4.3 $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $t = 0$ ve $t = 1$ zamanındaki $ U $	44
4.4 $h = 0.005$ ve $\Delta t = 0.001$ için $t = 1$ zamanındaki mutlak hatalar	46
4.5 $h = 0.05$ ve $\Delta t = 0.00001$ için $t = 1$ zamanındaki mutlak hatalar	47
4.6 $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için soliton dalgasının çarpışması	49
5.1 $h = 0.005$ ve $\Delta t = 0.001$ için $t = 1$ zamanındaki mutlak hatalar	62
5.2 $h = 0.05$ ve $\Delta t = 0.00001$ için $t = 1$ zamanındaki mutlak hatalar	64
6.1 $h = 0.005$ ve $\Delta t = 0.001$ için $t = 1$ zamanındaki mutlak hatalar	76
6.2 $h = 0.05$ ve $\Delta t = 0.00001$ için $t = 1$ zamanındaki mutlak hatalar	77
7.1 $h = 0.005$ ve $\Delta t = 0.001$ için $t = 1$ zamanındaki mutlak hatalar	90
7.2 $h = 0.05$ ve $\Delta t = 0.00001$ için $t = 1$ zamanındaki mutlak hatalar	91

ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>Cizelge</u>	<u>Sayfa</u>
4.1 $h = 0.005$ ve farklı zaman artımları için hata normları, korunum sabitleri ve yakınsaklık oranları	45
4.2 $\Delta t = 0.00001$ ve farklı konum artımları için hata normları, korunum sabitleri ve yakınsaklık oranları	47
4.3 $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için bazı zamanlardaki korunum sabitleri.....	50
4.4 $h = 0.01$ ve $\Delta t = 0.01$ için bazı zamanlardaki korunum sabitleri.....	51
5.1 $h = 0.005$ ve farklı zaman artımları için hata normları, korunum sabitleri ve yakınsaklık oranları	61
5.2 $\Delta t = 0.00001$ ve farklı konum artımları için hata normları, korunum sabitleri ve yakınsaklık oranları	63
5.3 $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için bazı zamanlardaki korunum sabitleri.....	65
5.4 $h = 0.01$ ve $\Delta t = 0.01$ için bazı zamanlardaki korunum sabitleri.....	65
6.1 $h = 0.005$ ve farklı zaman artımları için hata normları, korunum sabitleri ve yakınsaklık oranları	75
6.2 $\Delta t = 0.00001$ ve farklı konum artımları için hata normları, korunum sabitleri ve yakınsaklık oranları	77
6.3 $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için bazı zamanlardaki korunum sabitleri.....	78
6.4 $h = 0.01$ ve $\Delta t = 0.01$ için bazı zamanlardaki korunum sabitleri.....	79
7.1 $h = 0.005$ ve farklı zaman artımları için hata normları, korunum sabitleri ve yakınsaklık oranları	89
7.2 $\Delta t = 0.00001$ ve farklı konum artımları için hata normları, korunum sabitleri ve yakınsaklık oranları	90
7.3 $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için bazı zamanlardaki korunum sabitleri.....	92
7.4 $h = 0.01$ ve $\Delta t = 0.01$ için bazı zamanlardaki korunum sabitleri.....	92
8.1 $h = 0.005$ ve $\Delta t = 0.001$ için korunum sabitleri ve hata normları	94
8.2 $h = 0.05$ ve $\Delta t = 0.00001$ için korunum sabitleri ve hata normları.....	94
8.3 $\Delta t = 0.01$ için $t = 5$ zamanındaki korunum sabitleri.....	95

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
Δt	Zaman adım uzunluğu
h	Konum adım uzunluğu
u_m^n	$x = x_m$ noktasında ve $t = t_n$ zamanındaki tam çözüm
U_m^n	$x = x_m$ noktasında ve $t = t_n$ zamanındaki yaklaşık çözüm

Kısaltmalar

<u>Kısaltmalar</u>	<u>Açıklama</u>
Metot 1	İç İterasyon Lineerleştirilmesi Yapılan Kuadratik Trigonometrik B-Spline Metodu
Metot 2	Rubin Graves Lineerleştirilmesi Yapılan Kuadratik Trigonometrik B-Spline Metodu
Metot 3	İç İterasyon Lineerleştirilmesi Yapılan Kübik Trigonometrik B-Spline Metodu
Metot 4	Rubin Graves Lineerleştirilmesi Yapılan Kübik Trigonometrik B-Spline Metodu
Metot 5	İç İterasyon Lineerleştirilmesi Yapılan Kuartik Trigonometrik B-Spline Metodu
Metot 6	Rubin Graves Lineerleştirilmesi Yapılan Kuartik Trigonometrik B-Spline Metodu
Metot 7	İç İterasyon Lineerleştirilmesi Yapılan Kuintik Trigonometrik B-Spline Metodu
Metot 8	Rubin Graves Lineerleştirilmesi Yapılan Kuintik Trigonometrik B-Spline Metodu
NLS	Lineer olmayan Schrödinger

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Doğada gerçekleşen olayların tamamına yakını fizik kanunları kullanılarak matematik diliyle ifade edilmeye çalışılır. Bu olaylar genellikle adi diferensiyel denklemler, kısmi diferensiyel denklemler veya bunların denklem sistemleri ile ifade edilebilir. Elde edilen bu diferensiyel denklemlerin veya denklem sistemlerinin karışık geometriye sahip olduğu, başlangıç-sınır şartlarından dolayı analitik çözümlerinin bulunmasının mümkün olmadığı veya oldukça karmaşık olduğu durumlarda, tam çözümü veren analitik yöntemler yerine yaklaşık çözümü veren sayısal yöntemler tercih edilmektedir. Gelişen teknoloji ile yüksek hızda ve kapasitede işlem yapan bilgisayarların kullanımının artması birçok sayısal yöntemin gelişmesine ışık tutmuştur. Bu sayısal yöntemler arasında yaygın olarak kullanılan iki yöntem sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemleridir. Sonlu farklar yönteminde diferensiyel denklemin tanım aralığı sonlu sayıda bölünme noktalarına ayrılır. Bu bölünme noktalarındaki türev değerleri yerine sonlu fark yaklaşımları yazılır. Sonlu elemanlar yönteminde ise tanım bölgesi alt tanım bölgelerine bölünmekte ve denklemin yaklaşık çözümü her bir alt tanım bölgesinde basit fonksiyonların lineer birleşimi olarak aranmaktadır. Bu yöntemde basit fonksiyonlar yerine B-spline olarak adlandırılan parçalı polinom yaklaşımının yapılması oldukça yaygındır. Sonlu elemanlar yöntemi 1950'lerde havacılık endüstrisinde geliştirilmiştir. Bu alandaki öncü büyük kuruluşlar Amerika Birleşik Devletlerinde Boeing, Bell Aerospace ve İngiltere de Rolls Royce olmuştur (Fish ve Belytschko, 2007). Sonlu elemanlar yöntemindeki önemli fikirler (Turner vd., 1956) çalışmasında yayınlanmışlardır. Bununla birlikte Turner ve arkadaşları çalışmalarında eleman matris birleştirmesi ile eleman formülasyonunu inşa etmişler fakat sonlu elemanlar terimini kullanmamışlardır (Fish ve Belytschko, 2007). Teknolojik ivmelenmenin hızlanmasıyla gelişimini sürdüren bu yöntem günümüzde makine, havacılık, inşaat ve otomotiv mühendislik uygulamaları, termal ve akış hesapları, elektromanyetik hesaplamalar ve medikal uygulamalar gibi birçok alanda kullanılmaktadır.

Ağırlıklı rezidüler yöntemi kullanılarak sonlu elemanlar yönteminin integral formları elde edilmektedir. Bu formların bazıları Galerkin, Petrov Galerkin, Subdomain ve Kolokasyon yöntemleridir. Bu çalışmada, sonlu elemanlar yöntemlerinden birisi

olan Galerkin yöntemi kullanılacaktır. Galerkin yöntemi işlem maliyeti yüksek ve uygulaması nispeten zor bir yöntem olmasına karşın genellikle daha iyi sonuçlar vermektedir. Bu çalışmada trigonometrik B-spline fonksiyonlar taban fonksiyonlar olarak seçildiğinde Galerkin yönteminin lineer olmayan Schrödinger denkleminin yaklaşık çözümleri üzerinde bir iyileşme sağlayıp sağlamadığı araştırılacaktır.

Adi ve kısmi diferensiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinde spline fonksiyonlar ve B-spline fonksiyonlar sıkça kullanılırlar. Spline fonksiyonların yaklaşık yöntemlerde veya interpolasyon teorisindeki önemi, bilgisayarlardaki gelişmeler ile daha da hızlanmıştır. Belirli derece ve düzgünlüğe sahip her spline fonksiyon, aynı derece ve düzgünlükteki B-spline fonksiyonların bir lineer birleşimi ile gösterilebilir (De Boor, 1978). Bu nedenle B-spline fonksiyonlar, spline fonksiyonlar için birer taban oluştururlar. Diferensiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinin bulunması konusunda B-spline fonksiyonlar uzun zamandır kullanılırken trigonometrik B-spline fonksiyon tabanlı sayısal yöntemler son zamanlarda kullanılmaya başlamıştır. Kuadratik ve kübik trigonometrik B-spline fonksiyonların kullanımı daha yaygın olmasına rağmen daha yüksek derecelerden trigonometrik B-spline fonksiyonlar kullanılarak yapılan çalışmalar literatürde nadiren bulunmaktadır.

Kompleks lineer olmayan oluşum denklemlerinin analitik çözümlerini elde etmek için geçerli bir metot olmadığından, yaklaşık çözüm teknikleri bu tip denklemlerin çözümlerini bulmak için son zamanlarda yoğun olarak kullanılmaktadır. Kompleks lineer olmayan oluşum denklemlerinden en popüler olanlarından biri derin sulardaki su dalgasını ve optik fiberlerdeki elektronik dalgaları modellemekte kullanılan mühendislik, fizik ve matematikte çok önemli bir yeri olan lineer olmayan kübik Schrödinger denklemdir. Bu çalışmada kübik Schrödinger denkleminin sayısal çözümü trigonometrik B-spline Galerkin metodu ile araştırılacaktır. B-spline fonksiyonların kullanıldığı sonlu elemanlar metotları bu zamana kadar adi diferensiyel denklem, kısmi diferensiyel denklem, adi diferensiyel denklem sistemleri, kısmi diferensiyel denklem sistemleri ve kompleks lineer olmayan oluşum denklemlerini çözmek için önerilmiştir. Lineer olmayan kübik Schrödinger denkleminin sayısal çözümü için B-spline sonlu elemanlar metotlarının kullanıldığı sadece bir kaç çalışma mevcuttur. Fakat kompleks lineer olmayan oluşum denklemlerinin sayısal çözümleri için trigonometrik B-spline

fonksiyonların kullanıldığı çalışmalar B-spline fonksiyonların kullanıldığı çalışmalar kadar çok değildir. Özellikle zaman parçalanması için Crank Nicolson metodu ile birlikte konum parçalanması için trigonometrik B-spline Galerkin metodunun kullanıldığı metotlar bu zamana kadar kompleks lineer olmayan oluşum denklemlerinin sayısal çözümleri için kullanılmamıştır. Bu çalışmada lineer olmayan Schrödinger denkleminin yaklaşık çözümü aranırken öncelikle zaman ayrıştırması için doğruluğu iki olan Crank Nicolson yöntemi ile birlikte iki lineerleştirme kullanılacaktır. Konum parçalanması için ise indirgeme bağıntısı yardımıyla elde edilen kuadratik, kübik, kuartik ve kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonların taban fonksiyon alındığı Galerkin yöntemi uygulanacaktır (Walz, 1997; Keskin, 2016). Dolayısıyla her bir trigonometrik B-spline fonksiyon için iki farklı lineerleştirme olmak üzere lineer olmayan Schrödinger denkleminin yaklaşık çözümü için sekiz farklı yöntem önerilecektir. Böylece zaman parçalanması sabit olmak üzere konum parçalanması için kullanılan farklı dereceden spline fonksiyonların sonuçlar üzerinde etkisi araştırılacaktır.

Önerilen yöntemlerin doğruluğunun kontrolü için öncelikle analitik çözümü bilinen soliton dalga yayılımı ilk test problemi olarak alınacak ve lineer olmayan Schrödinger denkleminin korunum sabitlerinin yaklaşık çözümleri ile maksimum hatalar hesaplanarak önerilen sekiz yöntem kıyaslanacaktır. İkinci test probleminde analitik çözümü bilinmeyen, sadece başlangıç koşulu bilinen iki soliton dalgasının çarpışması problemi üzerinde çalışılacak ve korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri önerilen her bir metot için hesaplanacaktır. Elde edilen sonuçlar çizelgeler ve şekiller yardımıyla incelenecek ve metotların birbirlerine karşı üstünlükleri tartışılacaktır.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Bu bölümde, öncelikle trigonometrik B-spline fonksiyonlar ve sayısal çözümünü araştırılan lineer olmayan Schrödinger (NLS) denklemi ile ilgili literatürdeki bazı çalışmalar irdelenecektir.

Trigonometrik spline fonksiyonlar ilk olarak Schoenberg (1946) tarafından parçalı trigonometrik polinom interpolasyonu için tanımlanmıştır. Lyche ve Winther (1979), trigonometrik B-spline fonksiyonlarını tanımlamak için trigonometrik bölünmüş farkları kullanmış ve trigonometrik B-spline fonksiyonları elde etmek için bir indirgeme bağıntısı önermişlerdir. Walz (1997), trigonometrik B-spline fonksiyonların bazı özelliklerini ayrıntılı olarak inceleyerek kompleks integral formlarını elde etmiştir. (Nikolis, 2004) çalışmasında birinci mertebeden adi diferensiyel denklem içeren bir başlangıç değer probleminin sayısal çözümü kuadratik trigonometrik spline kullanılarak araştırılmıştır. Nikolis ve Seimenis (2005), lineer olmayan bir dinamik sistemin sayısal çözümünü kübik trigonometrik spline fonksiyon kullanarak elde etmişlerdir. Hamid vd. (2010), kübik trigonometrik B-spline fonksiyonları kullanarak ikinci mertebeden lineer sınır değer problemini sayısal olarak çözmüşlerdir. Abbas vd. (2014 a) çalışmalarında zaman parçalaması için Crank Nicolson yöntemini ve konum parçalanması için kübik trigonometrik B-spline fonksiyonları kullanarak kolokasyon metoduyla difüzyon probleminin sayısal çözümünü araştırmışlardır. Tek boyutlu homojen olmayan dalga denkleminin sayısal çözümü için kübik trigonometrik B-spline kolokasyon metodu Abbas ve arkadaşları tarafından önerilmiştir (Abbas vd., 2014 b). Ay vd. (2015), Burgers denkleminin yaklaşık çözümünü kuadratik trigonometrik B-spline subdomain Galerkin yöntemiyle araştırmışlardır. Bu çalışmada zaman parçalanması için Crank Nicolson yöntemi kullanılmıştır. Burgers denkleminin sayısal çözümü için bir diğer çalışmada Dağ ve arkadaşları (2017) zaman parçalanması yaparken Crank Nicolson metodunu ve konum parçalanması yaparken ise kübik trigonometrik B-spline kolokasyon metodunu kullanmışlardır. RLW denkleminin sayısal çözümü için kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlar (Irk ve Keskin, 2016), kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonlar (Irk ve Keskin, 2017) ve kuartik trigonometrik B-spline fonksiyonlar (Irk vd., 2019) kullanılmıştır. Irk ve arkadaşları bu üç çalışmada Galerkin sonlu elemanlar yöntemini

kullanmışlardır.

Optik darbelerin yayılımı, sudaki ve plazmadaki dalgalar, akışkanlar dinamiği ve lazer darbelerinde kendiliğinden odaklanma gibi birçok fiziksel olayı temsil ettiğinden NLS denklemi bir çok bilimsel çalışmaya konu olmuştur. Bu denklemin analitik çözümleri (Karpman ve Krushkal, 1969; Scott vd., 1973; Zakharov ve Shabat, 1972) referanslarında verilmiştir. Daha genel başlangıç koşulları için NLS denkleminin analitik çözümleri bilinmediğinden bu zamana kadar NLS denkleminin yaklaşık çözümlerinin elde edilmesi için birçok çalışma yapılmıştır. Gardner ve arkadaşları NLS denkleminin sayısal çözümünü için kübik B-spline sonlu elemanlar yöntemini kullanılmıştır (Gardner vd. 1993 a; 1993 b). Robinson ve Fairweather (1994) ve Robinson (1997) NLS denkleminin sayısal çözümleri için ortogonal spline kolokasyon metodunu kullanmışlardır. Twizell vd. (1997) sonlu farklar yöntemi ile NLS denkleminin yaklaşık çözümünü araştırmışlardır. 1999 yılında Dağ, kuadratik B-spline Galerkin metodunu kullanarak NLS denkleminin sayısal çözümünü araştırmıştır (Dağ, 1999). Zaman parçalanması için dördüncü mertebeden Runge Kutta metodu ve konum parçalanması için kosinüs diferensiyel quadrature metodunun kullanıldığı yöntemi öneren Korkmaz ve Dağ, NLS denklemini tamamıyla parçalamış ve elde edilen denklem sistemini çözerek NLS denkleminin sayısal çözümü bulmuştur (Korkmaz ve Dağ, 2008). De la Hoz ve Vadillo (2008), üstel zaman farklı dördüncü mertebeden Runge Kutta metodunu kullanarak NLS denkleminin sayısal çözümünü araştırmışlardır. Korkmaz ve Dağ 2009 yılında konum parçalanması için polinom fonksiyonların kullanıldığı diferensiyel quadrature metodunu ve zaman parçalanması için ise dördüncü mertebeden Runge Kutta metodunu kullanarak NLS denkleminin sayısal çözümünü araştırmışlardır (Korkmaz ve Dağ, 2009). Dereli vd. (2009), radyal taban fonksiyonların kullanıldığı kolokasyon tabanlı ağırsız metot ile NLS denkleminin sayısal çözümü için alternatif bir yöntem sunmuşlardır. Hosseini vd. (2009), NLS denkleminin sayısal çözümü için sonlu farklar yöntemini kullanmışlardır. Polinom olmayan kübik spline fonksiyonları kullanarak NLS denkleminin sayısal çözümünü El-Danaf ve arkadaşları araştırmıştır (El-Danaf vd., 2012) araştırmıştır. Saka 2012 yılında yaptığı çalışmada NLS denkleminin sayısal çözümü için kuintik B-spline kolokasyon yöntemini konum ayırıştırması ve Crank Nicolson yöntemini ise zaman parçalanması için önermiştir

(Saka, 2012). Aksoy vd. (Aksoy vd, 2012; 2013), zaman parçalanması için Taylor seri açılımını ve konum parçalanması için ise sırasıyla kuintik ile kübik B-spline kolokasyon metodunu önermişler ve ulaştıkları denklem sistemini Gauss eliminasyon metoduyla çözerek NLS denkleminin sayısal çözümünü elde etmişlerdir. Mokhtari vd. (2013), Dirac-delta fonksiyonlarının Fourier serilerinden türetilen delta şekilli taban fonksiyonlarını kullanarak NLS denkleminin sayısal çözümü üzerine çalışmalar yapmışlardır. Sephrian ve Radpoor (2014), aynı denklemin çözümünü kübik spline fonksiyonlar ile birlikte kompakt sonlu farklar metodunu kullanarak çözmüşlerdir. Septik spline fonksiyonların kullanıldığı kolokasyon metoduyla NLS denkleminin sayısal çözümünü Lin (2015) araştırmıştır. Kaplan ve Dereli (2017), NLS denkleminin sayısal çözümü için hareketli en küçük kareler yöntemine dayanan ağsız metot kullanarak bir algoritma geliştirmişlerdir. Başhan vd. (2018), NLS denkleminin sayısal çözümü için modifiye kuintik B-spline diferensiyel quadrature metodunu önermişlerdir.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmada kullanılacak olan bazı temel kavramlardan bahsedilecektir. İlk olarak denklemin zaman parçalanmasında kullanılacak olan Crank Nicolson sonlu fark metodu kısaca açıklanacaktır. Daha sonra yöntemin konum ayrıştırması için kullanılacak olan trigonometrik B-spline fonksiyonlarının tanımları ve genel özellikleri verilecektir. Sonrasında NLS denkleminin sayısal çözümünü araştırırken kullanılacak olan Galerkin yöntemi açıklanacaktır. Ardından sayısal çözümü araştırılan NLS denkleminin başlangıç, sınır şartları ve test problemleri ile birlikte tanımlanacak ve soliton teorisi hakkında kısa bilgi verilecektir.

3.1. Crank Nicolson Yöntemi

Crank ve Nicolson (1947) tarafından önerilen Crank Nicolson yöntemi, kapalı ve ikinci mertebeden doğruluğa sahip bir sonlu farklar yöntemidir. Crank Nicolson metodu kısmi diferensiyel denklemin zaman parçalanması yapılırken kullanılır. Crank Nicolson metodu, kısmi diferensiyel denklemin sayısal çözümü araştırılırken zamana göre türev için ileri sonlu fark yaklaşımı, geri kalan tüm türevler için ise şimdiki zaman ve bir sonraki zamana ait değerlerinin ortalamalarının kullanılmasına dayalıdır. Bu durumda Crank Nicolson metodunda Δt zaman adımı olmak üzere

$$\begin{aligned}
 u_t &\approx \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}, \\
 u &= \frac{u^{n+1} + u^n}{2}, \\
 u_x &= \frac{(u_x)^{n+1} + (u_x)^n}{2}, \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

eşitlikleri kullanılır. Burada u^n , bilinmeyen u fonksiyonunun $t = t_n$ anındaki değerini göstermektedir.

3.2. Trigonometrik B-Spline Fonksiyonlar

Sıfıncı dereceden B-spline fonksiyonu

$$T_i^0(x) = \begin{cases} 1 & , x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.2)$$

olmak üzere

$$T_i^k(x) = \frac{\sin\left(\frac{x-x_i}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_{i+k}-x_i}{2}\right)} T_i^{k-1}(x) + \frac{\sin\left(\frac{x_{i+k+1}-x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_{i+k+1}-x_{i+1}}{2}\right)} T_{i+1}^{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

bağıntısı ile trigonometrik B-spline fonksiyonlar elde edilebilir (Walz, 1997). Eğer $[a, b]$ çözüm aralığının bir düzgün parçalanması h alt aralık uzunluğu olmak üzere

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b, \quad x_i = x_{i-1} + h, \quad i = 0, 1, \dots, N-1$$

ise indirgeme formülü

$$T_i^k(x) = \frac{\sin\left(\frac{x-x_i}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kh}{2}\right)} T_i^{k-1}(x) + \frac{\sin\left(\frac{x_{i+k+1}-x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kh}{2}\right)} T_{i+1}^{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

şeklinde bulunur.

3.2.1. Lineer trigonometrik B-spline

(3.4) indirgeme bağıntısında sıfıncı dereceden B-spline fonksiyonunun kullanılmasıyla $T_m^1(x)$ lineer trigonometrik B-spline taban fonksiyonları

$$\begin{aligned} g(x_m) &= \sin\left(\frac{x-x_m}{2}\right), \quad m = 0, \dots, N \\ \theta &= \sin\left(\frac{h}{2}\right), \end{aligned}$$

olmak üzere

$$T_m^1(x) = \frac{1}{\theta} \begin{cases} g(x_{m-1}) & , x_{m-1} \leq x < x_m \\ -g(x_{m+1}) & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.5)$$

şeklinde tanımlanır.

Problemin analitik çözümü için $U(x, t)$ genel yaklaşımı lineer trigonometrik B-spline fonksiyonlar kullanılarak

$$u(x, t) \approx U(x, t) = \sum_{i=0}^N T_i^1(x) \delta_i(t) \quad (3.6)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada $T_i^1(x)$ fonksiyonları lineer trigonometrik B-spline taban fonksiyonlarını gösterir. Eşitlikteki δ_i katsayıları zamana bağlı değişkenlerdir. $T_m^1(x)$ lineer trigonometrik B-spline fonksiyonları $[x_{m-1}, x_{m+1}]$ aralığının dışında sıfırdır ve $[x_{m-1}, x_{m+1}]$ aralığındaki ardışık iki elemanı örtmektedir. $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanlarının her biri $T_m^1(x)$ ve $T_{m+1}^1(x)$ olacak şekilde iki lineer trigonometrik B-spline fonksiyonu tarafından örtüldüğünden bu eleman üzerindeki yaklaşım

$$u(x, t) \approx U(x, t) = \sum_{i=m}^{m+1} T_i^1(x) \delta_i = T_m^1(x) \delta_m + T_{m+1}^1(x) \delta_{m+1} \quad (3.7)$$

olacaktır. x_m noktasındaki $u(x_m, t)$ için yaklaşım ise (3.5) lineer trigonometrik B-spline eşitliklerinin (3.7) eşitliğinde kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} U(x_m, t) &= U_m = T_m^1(x_m) \delta_m + T_{m+1}^1(x_m) \delta_{m+1} \\ &= \frac{1}{\theta} \left(-\sin \left(\frac{x_m - x_{m+1}}{2} \right) \delta_m + \sin \left(\frac{x_m - x_m}{2} \right) \delta_{m+1} \right) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Sadeleştirme yapılırsa bölünme noktalarındaki yaklaşımlar için

$$U_m = \delta_m \quad (3.8)$$

eşitliği bulunur.

$[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı

$$\xi = x - x_m$$

dönüşümü kullanılarak $[0, h]$ aralığına dönüştürüldüğünde lineer trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları

$$T_m^1(\xi) = \frac{\sin \left(\frac{h - \xi}{2} \right)}{\theta}, \quad (3.9)$$

$$T_{m+1}^1(\xi) = \frac{\sin \left(\frac{\xi}{2} \right)}{\theta} \quad (3.10)$$

şeklinde elde edilir.

3.2.2. Kuadratik trigonometrik B-spline

(3.4) indirgeme bağıntısında lineer trigonometrik B-spline fonksiyonunun kullanılmasıyla $T_m^2(x)$ kuadratik trigonometrik B-spline taban fonksiyonları

$$\begin{aligned} g(x_m) &= \sin\left(\frac{x - x_m}{2}\right), \quad m = 0, \dots, N \\ \theta &= \sin\left(\frac{h}{2}\right) \sin(h) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= g^2(x_{m-1}) \\ \gamma_2 &= -g(x_{m-1})g(x_{m+1}) - g(x_{m+2})g(x_m) \\ \gamma_3 &= g^2(x_{m+2}) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$T_m^2(x) = \frac{1}{\theta} \begin{cases} \gamma_1 & , x_{m-1} \leq x < x_m \\ \gamma_2 & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ \gamma_3 & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.11)$$

eşitliği ile elde edilir.

Kuadratik trigonometrik B-spline taban fonksiyonları kullanılarak problemin analitik çözümü için genel yaklaşım

$$u(x, t) \approx U(x, t) = \sum_{i=-1}^N T_i^2(x) \delta_i(t) \quad (3.12)$$

olacak şekilde tanımlanabilir. Burada δ_i katsayıları zamana bağlı değişkenler olmak üzere $T_i^2(x)$ fonksiyonları kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonlarını gösterir. $T_m^2(x)$ kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonları $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığının dışında sıfırdır ve $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığındaki ardışık üç elemanı örtmektedir. Bu nedenle $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanlarının her biri $T_{m-1}^2(x)$, $T_m^2(x)$ ve $T_{m+1}^2(x)$ olacak şekilde üç kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyon tarafından örtülmektedir. Dolayısıyla (3.12) yaklaşımı

$$u(x, t) \approx U(x, t) = \sum_{i=m-1}^{m+1} T_i^2(x) \delta_i = T_{m-1}^2(x) \delta_{m-1} + T_m^2(x) \delta_m + T_{m+1}^2(x) \delta_{m+1} \quad (3.13)$$

şeklinde olacaktır. (3.11) kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonlarının (3.12) yaklaşımında kullanılmasıyla x_m noktasındaki $u(x_m, t)$ ve x 'e göre birinci türevi için yaklaşımlar

$$U(x_m, t) = U_m = \sum_{i=m-1}^{m+1} T_i^2(x_m) \delta_i$$

$$\frac{dU(x_m, t)}{dx} = U'_m = \sum_{i=m-1}^{m+1} \frac{dT_i^2(x_m)}{dx} \delta_i$$

şeklinde yazılarak düzenlemeler yapıldığında bölünme noktalarındaki yaklaşımlar

$$a_1 = \frac{\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{\theta}, \quad b_1 = \frac{\sin(h)}{\theta},$$

olmak üzere

$$U_m = a_1 \delta_{m-1} + a_1 \delta_m, \quad (3.14)$$

$$U'_m = -b_1 \delta_{m-1} + b_1 \delta_m \quad (3.15)$$

eşitlikleriyle bulunur.

$[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı

$$\xi = x - x_m$$

dönüşümü kullanılarak $[0, h]$ aralığına dönüştürülürse kuadratik trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları

$$T_{m-1}^2(\xi) = \frac{\sin^2\left(\frac{h-\xi}{2}\right)}{\theta}, \quad (3.16)$$

$$T_m^2(\xi) = \frac{\sin\left(\frac{h+\xi}{2}\right) \sin\left(\frac{h-\xi}{2}\right) + \sin\left(\frac{2h-\xi}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi}{2}\right)}{\theta}, \quad (3.17)$$

$$T_{m+1}^2(\xi) = \frac{\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)}{\theta} \quad (3.18)$$

olarak elde edilir.

3.2.3. Kübik trigonometrik B-spline

(3.4) indirgeme bağıntısında kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonu kullanıldığında $T_m^3(x)$ kübik trigonometrik B-spline fonksiyonları

$$g(x_m) = \sin\left(\frac{x - x_m}{2}\right), \quad m = 0, \dots, N$$

$$\theta = \sin\left(\frac{h}{2}\right) \sin(h) \sin\left(\frac{3h}{2}\right)$$

ve

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= g^3(x_{m-2}) \\ \gamma_2 &= -g^2(x_{m-2})g(x_m) - g(x_{m-2})g(x_{m+1})g(x_{m-1}) - g(x_{m+2})g^2(x_{m-1}) \\ \gamma_3 &= g(x_{m-2})g^2(x_{m+1}) + g(x_{m+2})g(x_{m-1})g(x_{m+1}) + g^2(x_{m+2})g(x_m) \\ \gamma_4 &= -g^3(x_{m+2}) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$T_m^3(x) = \frac{1}{\theta} \begin{cases} \gamma_1 & , x_{m-2} \leq x < x_{m-1} \\ \gamma_2 & , x_{m-1} \leq x < x_m \\ \gamma_3 & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ \gamma_4 & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.19)$$

formunda bulunur.

Kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlar kullanılarak problemin analitik çözümü için genel yaklaşım

$$u(x, t) \approx U(x, t) = \sum_{i=-1}^{N+1} T_i^3(x) \delta_i(t) \quad (3.20)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada δ_i katsayıları zamana bağlı değişkenler olmak üzere $T_i^3(x)$ fonksiyonları kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlarını gösterir. $T_m^3(x)$ kübik trigonometrik B-spline fonksiyonları $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığının dışında sıfır olup $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığındaki ardışık dört elemanı örtmektedir. Dolayısıyla $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanlarının her biri $T_{m-1}^3(x)$, $T_m^3(x)$, $T_{m+1}^3(x)$ ve $T_{m+2}^3(x)$ olarak dört kübik trigonometrik B-spline fonksiyonu tarafından örtüleceğinden (3.20) yaklaşımı

$$u(x, t) \approx U(x, t) = \sum_{i=m-1}^{m+2} T_i^3(x) \delta_i \quad (3.21)$$

olacaktır. Elde edilen bu yaklaşım için (3.19) kübik trigonometrik B-spline eşitliklerinin kullanılmasıyla x_m noktasındaki $u(x_m, t)$ ile birinci ve ikinci türevleri için yaklaşımlar

$$\begin{aligned} U(x_m, t) &= U_m = \sum_{i=m-1}^{m+2} T_i^3(x_m) \delta_i \\ \frac{dU(x_m, t)}{dx} &= U'_m = \sum_{i=m-1}^{m+2} \frac{dT_i^3(x_m)}{dx} \delta_i \\ \frac{d^2U(x_m, t)}{dx^2} &= U''_m = \sum_{i=m-1}^{m+2} \frac{d^2T_i^3(x_m)}{dx^2} \delta_i \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Bu durumda $T_{m-1}^3(x_m)$, $T_m^3(x_m)$, $T_{m+1}^3(x_m)$ ve $T_{m+2}^3(x_m)$ değerleri (3.19) parçalı fonksiyonuyla verilen kübik trigonometrik B-spline fonksiyonundan hesaplanırsa bölünme noktalarındaki U_m , U'_m ve U''_m yaklaşımları

$$\begin{aligned} a_1 &= \sin^2\left(\frac{h}{2}\right) \csc(h) \csc\left(\frac{3h}{2}\right), & a_2 &= \frac{2}{(1 + 2 \cos(h))}, \\ b_1 &= \frac{3 \csc\left(\frac{3h}{2}\right)}{4}, \\ c_1 &= \frac{3 \left(3 \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) - 1\right)}{4 \left(\sin(h) \sin\left(\frac{3h}{2}\right)\right)}, & c_2 &= -\frac{3 \cot^2\left(\frac{h}{2}\right)}{(2 + 4 \cos(h))} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$U_m = a_1 \delta_{m-1} + a_2 \delta_m + a_1 \delta_{m+1} \quad (3.22)$$

$$U'_m = -b_1 \delta_{m-1} + b_1 \delta_{m+1} \quad (3.23)$$

$$U''_m = c_1 \delta_{m-1} + c_2 \delta_m + c_1 \delta_{m+1} \quad (3.24)$$

eşitlikleri ile bulunur.

$[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı

$$\xi = x - x_m$$

dönüşümü ile $[0, h]$ aralığına dönüştürülürse kübik trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları

$$T_{m-1}^3(\xi) = \frac{\sin^3\left(\frac{h-\xi}{2}\right)}{\theta} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned}
T_m^3(\xi) &= \frac{1}{\theta} \left[\sin\left(\frac{\xi+2h}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\xi-h}{2}\right) \right. \\
&\quad + \sin\left(\frac{\xi-2h}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi+h}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi-h}{2}\right) \\
&\quad \left. + \sin^2\left(\frac{\xi-2h}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) \right] \tag{3.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{m+1}^3(\xi) &= \frac{1}{\theta} \left[\sin^2\left(\frac{\xi+h}{2}\right) \sin\left(\frac{h-\xi}{2}\right) \right. \\
&\quad + \sin\left(\frac{\xi+h}{2}\right) \sin\left(\frac{2h-\xi}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) \\
&\quad \left. + \sin\left(\frac{3h-\xi}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right) \right] \tag{3.27}
\end{aligned}$$

$$T_{m+2}^3(\xi) = \frac{\sin^3\left(\frac{\xi}{2}\right)}{\theta} \tag{3.28}$$

olarak elde edilir.

3.2.4. Kuartik trigonometrik B-spline

(3.4) indirgeme bağıntısında kübik trigonometrik B-spline fonksiyonu kullanıldığında $T_m^4(x)$ kuartik trigonometrik B-spline fonksiyonları

$$\begin{aligned}
g(x_m) &= \sin\left(\frac{x-x_m}{2}\right), \quad m = 0, \dots, N \\
\theta &= \sin\left(\frac{h}{2}\right) \sin(h) \sin\left(\frac{3h}{2}\right) \sin(2h)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= g^4(x_{m-2}) \\
\gamma_2 &= -g^3(x_{m-2})g(x_m) - g^2(x_{m-2})g(x_{m+1})g(x_{m-1}) \\
&\quad -g(x_{m-2})g(x_{m+2})g^2(x_{m-1}) - g(x_{m+3})g^3(x_{m-1}) \\
\gamma_3 &= g^2(x_{m-2})g^2(x_{m+1}) + g(x_{m-2})g(x_{m+2})g(x_{m-1})g(x_{m+1}) \\
&\quad +g(x_{m-2})g^2(x_{m+2})g(x_m) + g(x_{m+3})g^2(x_{m-1})g(x_{m+1}) \\
&\quad +g(x_{m+3})g(x_{m-1})g(x_{m+2})g(x_m) + g^2(x_{m+3})g^2(x_m) \\
\gamma_4 &= -g(x_{m-2})g^3(x_{m+2}) - g(x_{m+3})g(x_{m-1})g^2(x_{m+2}) \\
&\quad -g^2(x_{m+3})g(x_m)g(x_{m+2}) - g^3(x_{m+3})g(x_{m+1}) \\
\gamma_5 &= g^4(x_{m+3})
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$T_m^4(x) = \frac{1}{\theta} \begin{cases} \gamma_1 & , x_{m-2} \leq x < x_{m-1} \\ \gamma_2 & , x_{m-1} \leq x < x_m \\ \gamma_3 & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ \gamma_4 & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ \gamma_5 & , x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.29)$$

formunda elde edilir.

Problemin analitik çözümü için yaklaşım kuartik trigonometrik B-spline fonksiyonlar kullanılarak

$$u(x, t) \approx U(x, t) = \sum_{i=-2}^{N+1} T_i^4(x) \delta_i(t) \quad (3.30)$$

şeklinde tanımlanır. $T_m^4(x)$ kuartik trigonometrik B-spline fonksiyonları $[x_{m-2}, x_{m+3}]$ aralığının dışında sıfırdır ve ayrıca $[x_{m-2}, x_{m+3}]$ aralığındaki ardışık beş elemanı örtmektedir. Dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı $T_{m-2}^4(x)$, $T_{m-1}^4(x)$, $T_m^4(x)$, $T_{m+1}^4(x)$ ve $T_{m+2}^4(x)$ olarak beş kuartik trigonometrik B-spline tarafından örtüldüğünden (3.30) yaklaşımı

$$u(x, t) \approx U(x, t) = \sum_{i=m-2}^{m+2} T_i^4(x) \delta_i \quad (3.31)$$

olacaktır. (3.31) yaklaşımında (3.29) kuartik trigonometrik B-spline fonksiyonlarının kullanılmasıyla x_m noktasındaki $u(x_m, t)$ ile birinci, ikinci, üçüncü türevi için yaklaşımlar

$$\begin{aligned} U(x_m, t) &= U_m = \sum_{i=m-2}^{m+2} T_i^4(x_m) \delta_i \\ \frac{dU(x_m, t)}{dx} &= U'_m = \sum_{i=m-2}^{m+2} \frac{dT_i^4(x_m)}{dx} \delta_i \\ \frac{d^2U(x_m, t)}{dx^2} &= U''_m = \sum_{i=m-2}^{m+2} \frac{d^2T_i^4(x_m)}{dx^2} \delta_i \\ \frac{d^3U(x_m, t)}{dx^3} &= U'''_m = \sum_{i=m-2}^{m+2} \frac{d^3T_i^4(x_m)}{dx^3} \delta_i \end{aligned}$$

olacaktır. Böylece bölünme noktalarındaki yaklaşımlar

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{\sin^4\left(\frac{h}{2}\right)}{\theta}, \\
 a_2 &= \frac{\sin^4\left(\frac{h}{2}\right)\left(12\cos^2\left(\frac{h}{2}\right)-1\right)}{\theta}, \\
 b_1 &= -\frac{2\sin^3\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{h}{2}\right)}{\theta}, \\
 b_2 &= -\frac{2\sin^3\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{h}{2}\right)\left(4\cos^2\left(\frac{h}{2}\right)-1\right)}{\theta},
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \frac{\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)\left(4\cos^2\left(\frac{h}{2}\right)-1\right)}{\theta}, \\
 d_1 &= -\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{h}{2}\right)\left(8\cos^2\left(\frac{h}{2}\right)-5\right)}{\theta}, \\
 d_2 &= \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{h}{2}\right)\left(4\cos^2\left(\frac{h}{2}\right)-1\right)^2}{\theta}
 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$U_m = a_1\delta_{m-2} + a_2\delta_{m-1} + a_2\delta_m + a_1\delta_{m+1}, \quad (3.32)$$

$$U'_m = b_1\delta_{m-2} + b_2\delta_{m-1} - b_2\delta_m - b_1\delta_{m+1}, \quad (3.33)$$

$$U''_m = c_1\delta_{m-2} - c_1\delta_{m-1} - c_1\delta_m + c_1\delta_{m+1}, \quad (3.34)$$

$$U'''_m = d_1\delta_{m-2} + d_2\delta_{m-1} - d_2\delta_m - d_1\delta_{m+1}, \quad (3.35)$$

eşitlikleri ile bulunur.

$[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı

$$\xi = x - x_m$$

uygulanarak $[0, h]$ aralığına dönüştürülürse kuartik trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları

$$T_{m-2}^4(\xi) = \frac{\sin^4\left(\frac{\xi-h}{2}\right)}{\theta} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} T_{m-1}^4(\xi) = & \frac{1}{\theta} \left[\sin\left(\frac{\xi+3h}{2}\right) \sin^3\left(\frac{h-\xi}{2}\right) \right. \\ & + \sin\left(\frac{2h-\xi}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi+2h}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\xi-h}{2}\right) \\ & + \sin^2\left(\frac{\xi-2h}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi+h}{2}\right) \sin\left(\frac{h-\xi}{2}\right) \\ & \left. + \sin^3\left(\frac{2h-\xi}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) \right] \quad (3.37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_m^4(\xi) = & \frac{1}{\theta} \left[\sin^2\left(\frac{\xi+2h}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\xi-h}{2}\right) \right. \\ & + \sin\left(\frac{\xi+2h}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi-2h}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi+h}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi-h}{2}\right) \\ & + \sin\left(\frac{\xi+2h}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\xi-2h}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) \\ & + \sin\left(\frac{\xi-3h}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\xi+h}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi-h}{2}\right) \\ & + \sin\left(\frac{\xi-3h}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi+h}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi-2h}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) \\ & \left. + \sin^2\left(\frac{\xi-3h}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right) \right] \quad (3.38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{m+1}^4(\xi) = & \frac{1}{\theta} \left[\sin^3\left(\frac{\xi+h}{2}\right) \sin\left(\frac{h-\xi}{2}\right) \right. \\ & + \sin^2\left(\frac{\xi+h}{2}\right) \sin\left(\frac{2h-\xi}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) \\ & + \sin\left(\frac{\xi+h}{2}\right) \sin\left(\frac{3h-\xi}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right) \\ & \left. + \sin\left(\frac{4h-\xi}{2}\right) \sin^3\left(\frac{\xi}{2}\right) \right] \quad (3.39) \end{aligned}$$

$$T_{m+2}^4(\xi) = \frac{\sin^4\left(\frac{\xi}{2}\right)}{\theta} \quad (3.40)$$

olarak bulunur.

3.2.5. Kuintik trigonometrik B-spline

(3.4) indirgeme bağıntısında kuartik trigonometrik B-spline fonksiyonunun kullanılmasıyla $T_m^5(x)$ kuintik trigonometrik B-spline taban fonksiyonları

$$g(x_m) = \sin\left(\frac{x - x_m}{2}\right), \quad m = 0, \dots, N$$

$$\theta = \sin\left(\frac{h}{2}\right) \sin(h) \sin\left(\frac{3h}{2}\right) \sin(2h) \sin\left(\frac{5h}{2}\right)$$

ve

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= g^5(x_{m-3}) \\ \gamma_2 &= -g^4(x_{m-3})g(x_{m-1}) - g^3(x_{m-3})g(x_m)g(x_{m-2}) \\ &\quad -g^2(x_{m-3})g(x_{m+1})g^2(x_{m-2}) - g(x_{m-3})g(x_{m+2})g^3(x_{m-2}) \\ &\quad -g(x_{m+3})g^4(x_{m-2}) \\ \gamma_3 &= g^3(x_{m-3})g^2(x_m) + g^2(x_{m-3})g(x_{m+1})g(x_{m-2})g(x_m) \\ &\quad +g^2(x_{m-3})g^2(x_{m+1})g(x_{m-1}) + g(x_{m-3})g(x_{m+2})g^2(x_{m-2})g(x_m) \\ &\quad +g(x_{m-3})g(x_{m+2})g(x_{m-2})g(x_{m+1})g(x_{m-1}) + g(x_{m-3})g^2(x_{m+2})g^2(x_{m-1}) \\ &\quad +g(x_{m+3})g^3(x_{m-2})g(x_m) + g(x_{m+3})g^2(x_{m-2})g(x_{m+1})g(x_{m-1}) \\ &\quad +g(x_{m+3})g(x_{m-2})g(x_{m+2})g^2(x_{m-1}) + g^2(x_{m+3})g^3(x_{m-1}) \\ \gamma_4 &= -g^2(x_{m-3})g^3(x_{m+1}) - g(x_{m-3})g(x_{m+2})g(x_{m-2})g^2(x_{m+1}) \\ &\quad -g(x_{m-3})g^2(x_{m+2})g(x_{m-1})g(x_{m+1}) \\ &\quad -g(x_{m-3})g^3(x_{m+2})g(x_m) - g(x_{m+3})g^2(x_{m-2})g^2(x_{m+1}) \\ &\quad -g(x_{m+3})g(x_{m-2})g(x_{m+2})g(x_{m-1})g(x_{m+1}) \\ &\quad -g(x_{m+3})g(x_{m-2})g^2(x_{m+2})g(x_m) - g^2(x_{m+3})g^2(x_{m-1})g(x_{m+1}) \\ &\quad -g^2(x_{m+3})g(x_{m-1})g(x_{m+2})g(x_m) - g^3(x_{m+3})g^2(x_m) \\ \gamma_5 &= g(x_{m-3})g^4(x_{m+2}) + g(x_{m+3})g(x_{m-2})g^3(x_{m+2}) \\ &\quad +g^2(x_{m+3})g(x_{m-1})g^2(x_{m+2}) + g^3(x_{m+3})g(x_m)g(x_{m+2}) \\ &\quad +g^4(x_{m+3})g(x_{m+1}) \\ \gamma_6 &= -g^5(x_{m+3}) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$T_m^5(x) = \frac{1}{\theta} \begin{cases} \gamma_1 & , x_{m-3} \leq x < x_{m-2} \\ \gamma_2 & , x_{m-2} \leq x < x_{m-1} \\ \gamma_3 & , x_{m-1} \leq x < x_m \\ \gamma_4 & , x_m \leq x < x_{m+1} \\ \gamma_5 & , x_{m+1} \leq x < x_{m+2} \\ \gamma_6 & , x_{m+2} \leq x < x_{m+3} \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.41)$$

şeklindedir.

Kuintik trigonometrik B-spline taban fonksiyonları kullanılarak problemin analitik çözümü için genel yaklaşım

$$u(x, t) \approx U(x, t) = \sum_{i=-2}^{N+2} T_i^5(x) \delta_i(t) \quad (3.42)$$

olacak şekilde ifade edilebilir. Burada δ_i katsayıları zamana bağlı değişkenler olmak üzere $T_i^5(x)$ fonksiyonları kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonlarını gösterir. $T_m^5(x)$ kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonları $[x_{m-3}, x_{m+3}]$ aralığının dışında sıfırdır ve ayrıca $[x_{m-3}, x_{m+3}]$ aralığındaki ardışık altı elemanı örtmektedir. Dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı $T_{m-2}^5(x)$, $T_{m-1}^5(x)$, $T_m^5(x)$, $T_{m+1}^5(x)$, $T_{m+2}^5(x)$ ve $T_{m+3}^5(x)$, olarak altı kuintik trigonometrik B-spline tarafından örtüleceğinden (3.42) yaklaşımı

$$u(x, t) \approx U(x, t) = \sum_{i=m-2}^{m+3} T_i^5(x) \delta_i \quad (3.43)$$

olacaktır. Elde edilen bu yaklaşım için, (3.41) kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonlarının kullanılmasıyla x_m noktasındaki $u(x_m, t)$ fonksiyonu ile birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü türevleri için yaklaşımlar

$$\begin{aligned} U(x_m, t) &= U_m = \sum_{i=m-2}^{m+3} T_i^5(x_m) \delta_i \\ \frac{dU(x_m, t)}{dx} &= U'_m = \sum_{i=m-2}^{m+3} \frac{dT_i^5(x_m)}{dx} \delta_i \\ \frac{d^2U(x_m, t)}{dx^2} &= U''_m = \sum_{i=m-2}^{m+3} \frac{d^2T_i^5(x_m)}{dx^2} \delta_i \\ \frac{d^3U(x_m, t)}{dx^3} &= U'''_m = \sum_{i=m-2}^{m+3} \frac{d^3T_i^5(x_m)}{dx^3} \delta_i \end{aligned}$$

$$\frac{d^4 U(x_m, t)}{dx^4} = U_m'''' = \sum_{i=m-2}^{m+3} \frac{d^4 T_i^5(x_m)}{dx^4} \delta_i$$

olarak yazılır ve hesaplamalar yapılarak düzenlenirse bölünme noktalarındaki yaklaşımlar

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{\sin^5\left(\frac{h}{2}\right)}{\theta}, \\
a_2 &= \frac{2 \sin^5\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(\frac{h}{2}\right) \left(16 \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) - 3\right)}{\theta}, \\
a_3 &= \frac{2 \left(1 + 48 \cos^4\left(\frac{h}{2}\right) - 16 \cos^2\left(\frac{h}{2}\right)\right) \sin^5\left(\frac{h}{2}\right)}{\theta}, \\
b_1 &= -\frac{5 \sin^4\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(\frac{h}{2}\right)}{2\theta}, \\
b_2 &= -\frac{5 \sin^4\left(\frac{h}{2}\right) \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) \left(8 \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) - 3\right)}{\theta}, \\
c_1 &= \frac{5 \sin^3\left(\frac{h}{2}\right) \left(5 \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) - 1\right)}{4\theta}, \\
c_2 &= \frac{5 \sin^3\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(\frac{h}{2}\right) \left(-15 \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) + 3 + 16 \cos^4\left(\frac{h}{2}\right)\right)}{2\theta}, \\
c_3 &= -\frac{5 \sin^3\left(\frac{h}{2}\right) \left(16 \cos^6\left(\frac{h}{2}\right) - 5 \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) + 1\right)}{2\theta}, \\
d_1 &= -\frac{5 \sin^2\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(\frac{h}{2}\right) \left(25 \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) - 13\right)}{8\theta}, \\
d_2 &= -\frac{5 \sin^2\left(\frac{h}{2}\right) \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) \left(8 \cos^4\left(\frac{h}{2}\right) - 35 \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) + 15\right)}{4\theta}, \\
e_1 &= \frac{5 \left(125 \cos^4\left(\frac{h}{2}\right) - 114 \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) + 13\right) \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{16\theta}, \\
e_2 &= -\frac{5 \sin\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(\frac{h}{2}\right) \left(176 \cos^6\left(\frac{h}{2}\right) - 137 \cos^4\left(\frac{h}{2}\right) - 6 \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) + 15\right)}{8\theta}, \\
e_3 &= \frac{5 \left(92 \cos^6\left(\frac{h}{2}\right) - 117 \cos^4\left(\frac{h}{2}\right) + 62 \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) - 13\right) \left(-1 + 4 \cos^2\left(\frac{h}{2}\right)\right)}{8\theta \sin\left(\frac{h}{2}\right)^{-1}}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$U_m = a_1\delta_{m-2} + a_2\delta_{m-1} + a_3\delta_m + a_2\delta_{m+1} + a_1\delta_{m+2} \quad (3.44)$$

$$U'_m = b_1\delta_{m-2} + b_2\delta_{m-1} - b_2\delta_{m+1} - b_1\delta_{m+2} \quad (3.45)$$

$$U''_m = c_1\delta_{m-2} + c_2\delta_{m-1} + c_3\delta_m + c_2\delta_{m+1} + c_1\delta_{m+2} \quad (3.46)$$

$$U'''_m = d_1\delta_{m-2} + d_2\delta_{m-1} - d_2\delta_{m+1} - d_1\delta_{m+2} \quad (3.47)$$

$$U_m^{(4)} = e_1\delta_{m-2} + e_2\delta_{m-1} + e_3\delta_m + e_2\delta_{m+1} + e_1\delta_{m+2} \quad (3.48)$$

ifadeleri ile bulunur.

$[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı

$$\xi = x - x_m$$

dönüşümü yapılarak $[0, h]$ aralığına dönüştürülürse kuintik trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları

$$T_{m-2}^5(\xi) = \frac{1}{\theta} \sin^5\left(\frac{h-\xi}{2}\right) \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} T_{m-1}^5(\xi) = & \frac{1}{\theta} \left[\sin\left(\frac{\xi+4h}{2}\right) \sin^4\left(\frac{\xi-h}{2}\right) \right. \\ & + \sin\left(\frac{\xi-2h}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi+3h}{2}\right) \sin^3\left(\frac{\xi-h}{2}\right) \\ & + \sin^2\left(\frac{\xi-2h}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi+2h}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\xi-h}{2}\right) \\ & + \sin^3\left(\frac{\xi-2h}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi+h}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi-h}{2}\right) \\ & \left. + \sin^4\left(\frac{\xi-2h}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) \right] \quad (3.50) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_m^5(\xi) = & \frac{1}{\theta} \left[\sin^2 \left(\frac{\xi + 3h}{2} \right) \sin^3 \left(\frac{h - \xi}{2} \right) \right. \\
& + \sin \left(\frac{\xi + 3h}{2} \right) \sin \left(\frac{2h - \xi}{2} \right) \sin \left(\frac{\xi + 2h}{2} \right) \sin^2 \left(\frac{\xi - h}{2} \right) \\
& + \sin \left(\frac{\xi + 3h}{2} \right) \sin^2 \left(\frac{\xi - 2h}{2} \right) \sin \left(\frac{\xi + h}{2} \right) \sin \left(\frac{h - \xi}{2} \right) \\
& + \sin \left(\frac{\xi + 3h}{2} \right) \sin^3 \left(\frac{2h - \xi}{2} \right) \sin \left(\frac{\xi}{2} \right) \\
& + \sin \left(\frac{3h - \xi}{2} \right) \sin^2 \left(\frac{\xi + 2h}{2} \right) \sin^2 \left(\frac{\xi - h}{2} \right) \\
& + \sin \left(\frac{3h - \xi}{2} \right) \sin \left(\frac{\xi + 2h}{2} \right) \sin \left(\frac{2h - \xi}{2} \right) \sin \left(\frac{\xi + h}{2} \right) \sin \left(\frac{h - \xi}{2} \right) \\
& + \sin \left(\frac{3h - \xi}{2} \right) \sin \left(\frac{\xi + 2h}{2} \right) \sin^2 \left(\frac{\xi - 2h}{2} \right) \sin \left(\frac{\xi}{2} \right) \\
& + \sin^2 \left(\frac{\xi - 3h}{2} \right) \sin^2 \left(\frac{\xi + h}{2} \right) \sin \left(\frac{h - \xi}{2} \right) \\
& + \sin^2 \left(\frac{\xi - 3h}{2} \right) \sin \left(\frac{\xi + h}{2} \right) \sin \left(\frac{2h - \xi}{2} \right) \sin \left(\frac{\xi}{2} \right) \\
& \left. + \sin^3 \left(\frac{3h - \xi}{2} \right) \sin^2 \left(\frac{\xi}{2} \right) \right] \tag{3.51}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{m+1}^5(\xi) = & \frac{1}{\theta} \left[\sin^3 \left(\frac{\xi + 2h}{2} \right) \sin^2 \left(\frac{\xi - h}{2} \right) \right. \\
& + \sin^2 \left(\frac{\xi + 2h}{2} \right) \sin \left(\frac{2h - \xi}{2} \right) \sin \left(\frac{\xi + h}{2} \right) \sin \left(\frac{h - \xi}{2} \right) \\
& + \sin^2 \left(\frac{\xi + 2h}{2} \right) \sin^2 \left(\frac{\xi - 2h}{2} \right) \sin \left(\frac{\xi}{2} \right) \\
& + \sin \left(\frac{\xi + 2h}{2} \right) \sin \left(\frac{3h - \xi}{2} \right) \sin^2 \left(\frac{\xi + h}{2} \right) \sin \left(\frac{h - \xi}{2} \right) \\
& + \sin \left(\frac{\xi + 2h}{2} \right) \sin \left(\frac{3h - \xi}{2} \right) \sin \left(\frac{\xi + h}{2} \right) \sin \left(\frac{2h - \xi}{2} \right) \sin \left(\frac{\xi}{2} \right) \\
& + \sin \left(\frac{\xi + 2h}{2} \right) \sin^2 \left(\frac{\xi - 3h}{2} \right) \sin^2 \left(\frac{\xi}{2} \right) \\
& + \sin \left(\frac{4h - \xi}{2} \right) \sin^3 \left(\frac{\xi + h}{2} \right) \sin \left(\frac{h - \xi}{2} \right) \\
& + \sin \left(\frac{4h - \xi}{2} \right) \sin^2 \left(\frac{\xi + h}{2} \right) \sin \left(\frac{2h - \xi}{2} \right) \sin \left(\frac{\xi}{2} \right) \\
& + \sin \left(\frac{4h - \xi}{2} \right) \sin \left(\frac{\xi + h}{2} \right) \sin \left(\frac{3h - \xi}{2} \right) \sin^2 \left(\frac{\xi}{2} \right) \\
& \left. + \sin^2 \left(\frac{\xi - 4h}{2} \right) \sin^3 \left(\frac{\xi}{2} \right) \right] \tag{3.52}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{m+2}^5(\xi) &= \frac{1}{\theta} \left[\sin^4\left(\frac{\xi+h}{2}\right) \sin\left(\frac{h-\xi}{2}\right) \right. \\
&\quad + \sin^3\left(\frac{\xi+h}{2}\right) \sin\left(\frac{2h-\xi}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) \\
&\quad + \sin^2\left(\frac{\xi+h}{2}\right) \sin\left(\frac{3h-\xi}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right) \\
&\quad + \sin\left(\frac{\xi+h}{2}\right) \sin\left(\frac{4h-\xi}{2}\right) \sin^3\left(\frac{\xi}{2}\right) \\
&\quad \left. + \sin\left(\frac{5h-\xi}{2}\right) \sin^4\left(\frac{\xi}{2}\right) \right] \tag{3.53}
\end{aligned}$$

$$T_{m+3}^5(\xi) = \frac{1}{\theta} \sin^5\left(\frac{\xi}{2}\right) \tag{3.54}$$

olarak elde edilir.

Trigonometrik B-spline fonksiyonlarının çıkartılması ile ilgili ayrıntılı bilgiler (Keskin, 2016) çalışmasında ve verdiği referanslarda bulunabilir.

3.3. Galerkin Yöntemi

Bir diferensiyel denklemin tam çözümü ile yaklaşık çözümü arasındaki farkın ağırlık fonksiyonu ile çarpılıp toplamlarının minimum yapılmasına **ağırlıklı rezidü yaklaşımı**, bu yaklaşıma dayanan yöntemlere ise **ağırlıklı rezidü yöntemleri** denir. Yöntemi ifade etmek için Ω tanım bölgesinde L bir diferensiyel operatör ve $f(x)$ bilinen bir fonksiyon olmak üzere

$$Lu(x) = f(x) \tag{3.55}$$

diferensiyel denklemini tanımlansın ve aranan çözüm $u(x)$ olsun. (3.55) diferensiyel denkleminin sayısal çözümü için ağırlıklı rezidü yöntemi kullanıldığında $u(x)$ aranan çözüm fonksiyonu yerine

$$u(x) \approx U(x) = \sum_{j=1}^N a_j \phi_j(x) \tag{3.56}$$

olacak şekilde bir $U(x)$ yaklaşım serisi kullanılır. Burada $\phi_j(x)$ diferensiyel denklemin Ω tanım bölgesinde tanımlı taban fonksiyonlar ve a_j bilinmeyen katsayılarıdır. Sonlu elemanlar yönteminde, $\phi_j(x)$ fonksiyonları problemin tüm sınır şartlarını sağlayacak şekilde seçilirler ancak genelde diferensiyel denklemini sağlamazlar. (3.56) yaklaşımı

(3.55) diferensiyel denkleminde kullanılıp düzenlenirse,

$$LU(x) - f(x) = R(x) \quad (3.57)$$

olarak tanımlanan ve $R(x)$ ile ifade edilen **rezidü fonksiyonu** elde edilir. Ağırlıklı rezidü yönteminde W_i ağırlık fonksiyonu ile $R(x)$ rezidü ifadesinin çarpımlarının, Ω tanım bölgesi üzerinde integralinin sıfır olması istenir. O halde

$$\int_{\Omega} W_i(x)R(x)dx = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.58)$$

olacak şekilde N bilinmeyen N denklemden oluşan bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözümlenip a_j bilinmeyenleri bulunarak, (3.56) yaklaşım serisinde yerine yazılırsa $U(x)$ yaklaşık çözümüne ulaşılmış olur. Ağırlıklı rezidüler yönteminde, ağırlık fonksiyonunun seçimine göre yöntem farklı isimler alır. Bunlardan bazıları Galerkin, Subdomain, Petrov-Galerkin, Kolokasyon ve En Küçük Kareler yöntemleridir.

Diferensiyel denklemlerin sayısal çözümlerinde kullanılan ve ağırlıklı rezidüler yöntemlerinden biri olan Galerkin yöntemi işlem maliyeti yüksek bir yöntem olmasına rağmen, diferensiyel denklemlerin çözümlerinde diğer sonlu elemanlar yöntemlerine göre genelde daha iyi sonuçlar vermektedir. Galerkin yönteminde

$$\int_{\Omega} W_i(x)R(x)dx = 0, \quad i = 1, \dots, N$$

eşitliğindeki W_i ağırlık fonksiyonu, ϕ_i taban fonksiyonları olarak seçilir. $[a, b]$ konum aralığı olmak üzere

$$u(x) \approx U(x) = \sum_{j=1}^N a_j \phi_j(x)$$

çözümü

$$Lu(x) = f(x)$$

denkleminde yerine yazılıp denklemin her iki tarafı $\phi_i(x)$ ile çarpılarak integrali alınırsa

$$\int_a^b \phi_i \left(\sum_{j=1}^N L(a_j \phi_j(x)) - f(x) \right) dx = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.59)$$

elde edilir.

$$R_j = L(a_j \phi_j(x)) - f(x)$$

olmak üzere (3.59) eşitliği açık olarak

$$\begin{aligned}
 a_1 \int_a^b \phi_1 R_1 dx + a_2 \int_a^b \phi_1 R_2 dx + \dots + a_N \int_a^b \phi_1 R_N dx &= 0, \\
 a_1 \int_a^b \phi_2 R_1 dx + a_2 \int_a^b \phi_2 R_2 dx + \dots + a_N \int_a^b \phi_2 R_N dx &= 0, \\
 &\vdots \\
 a_1 \int_a^b \phi_N R_1 dx + a_2 \int_a^b \phi_N R_2 dx + \dots + a_N \int_a^b \phi_N R_N dx &= 0
 \end{aligned}$$

formunda yazılabilir. Elde edilen sistem N tane denklem ve a_1, a_2, \dots, a_n olmak üzere N tane bilinmeyenden oluşan bir sistemdir. Bu sistem çözülerek a_1, a_2, \dots, a_n bilinmeyen katsayıları bulunabilir. Böylece yaklaşık çözüm,

$$u(x) \approx U(x) = \sum_{j=1}^N a_j \phi_j(x)$$

eşitliği kullanılarak bulunabilir.

3.4. Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi

q reel parametre, $i = \sqrt{-1}$, x ve t alt indisleri sırasıyla konum ve zamana göre kısmi türevler ve u karmaşık bir fonksiyon olmak üzere, NLS denklemi

$$iu_t + u_{xx} + q|u|^2 u = 0 \quad (3.60)$$

formunda ifade edilir. NLS denklemi

$$u(a, t) = u(b, t) = 0, \quad t > 0 \quad (3.61)$$

$$u_x(a, t) = u_x(b, t) = 0, \quad t > 0 \quad (3.62)$$

sınır şartlarına ve $f(x)$ sonradan belirlenmek üzere

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [a, b] \quad (3.63)$$

başlangıç şartına sahiptir.

3.5. Test Problemleri

Önerilen yöntemlerin doğruluğunun kontrolü için soliton dalga hareketi ve iki soliton dalgasının çarpışması test problemleri incelenecektir. Solitonlar aşağıdaki iki temel özelliği sağlayan lineer olmayan dalgalar olarak tanımlanabilir (Wadati, 2001):

1. Şekil, hız gibi özellikleri değişmeksizin yayılan yerleşik (lokalize) dalgalardır.
2. Karşılıklı çarpışmaya karşı kararlıdır ve kendi özelliklerini çarpışma sonrasında koruyabilirler.

İlk özellik, solitary dalga şartıdır ve ilk kez İskoçyalı mühendis olan John Scott Russel (1808-1882) tarafından tanımlanmıştır (Russel, 1844). İkinci şart ise parçacık özelliğine sahip bir dalga anlamına gelmektedir. Solitary dalgaları, soliton dalgalarına benzeyen yani çarpışma sonrası özelliklerini korumaya çalışan dalgalar olarakta tanımlanmaktadır. Bu sebeple solitonumsu dalgalar olarak da adlandırılabilirler. Büyük genlikli bir soliton dalgasının hareket hızı, küçük genlikli bir soliton dalgasına göre daha fazladır. Ayrıntılı bilgi (Irk, 2007) çalışmasında ve verdiği referanslarda bulunabilir.

Soliton dalga hareketi test probleminde analitik çözüm mevcut olduğundan çalışmada önerilen sayısal yöntemlerin doğruluğu

$$L_\infty = |||u| - |U|||_\infty = \max_{0 \leq j \leq N} ||u_j| - |U_j|| \quad (3.64)$$

hata normu ile

$$YO = \frac{\log \left| \frac{(L_\infty)_{h_i}}{(L_\infty)_{h_{i+1}}} \right|}{\log |h_i/h_{i+1}|}, \quad (3.65)$$

$$YO = \frac{\log \left| \frac{(L_\infty)_{\Delta t_i}}{(L_\infty)_{\Delta t_{i+1}}} \right|}{\log |\Delta t_i/\Delta t_{i+1}|} \quad (3.66)$$

yakınsaklık oranları hesaplanarak incelenecektir. İlk yakınsaklık oranında zaman artım uzunluğu olan Δt sabit tutularak konuma göre parçalanma için önerilen yöntemin yakınsama oranı hesaplanırken, ikinci yakınsama oranında konum artım uzunluğu olan h sabit tutularak zamana göre parçalanma için önerilen yöntemin yakınsama oranı hesaplanır.

NLS denkleminin korunum sabitleri

$$C_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dx, \quad (3.67)$$

$$C_2 = \int_{-\infty}^{\infty} |u_x|^2 - \frac{1}{2}q|u|^4 dx, \quad (3.68)$$

formundadır. Korunum sabitlerinin programın çalışma süresi boyunca sabit kalmaları beklenmektedir. Korunum sabitleri her iki test problemi için de istenilen zamanlarda

$$C_1 \approx \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (|U_i|^2 + |U_{i+1}|^2), \quad (3.69)$$

$$C_2 \approx \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left(|(U_x)_i|^2 + |(U_x)_{i+1}|^2 - \frac{1}{2}q|U_i|^4 - \frac{1}{2}q|U_{i+1}|^4 \right), \quad (3.70)$$

olarak yamuklar kuralı kullanılarak yaklaşık hesaplanacaktır.

3.5.1. Soliton dalgasının hareketi

NLS denkleminin sayısal çözümünün kontrolünde kullanılacak olan soliton dalgasının hareketi test problemi için analitik çözüm

$$u(x, t) = \alpha \sqrt{\frac{2}{q}} \exp \left(i \left(\frac{S}{2}x - \frac{1}{4}(S^2 - \alpha^2)t \right) \right) \operatorname{sech} [\alpha(x - St)] \quad (3.71)$$

formundadır. (3.71) eşitliğinde $t = 0$ alındığında

$$u(x, 0) = \alpha \sqrt{\frac{2}{q}} \exp \left(i \left(\frac{S}{2}x \right) \right) \operatorname{sech} [\alpha x] \quad (3.72)$$

başlangıç şartı elde edilir.

Kompleks değerli olan (3.71) fonksiyonun modülü alındığında elde edilen

$$|u(x, t)| = \alpha \sqrt{\frac{2}{q}} \operatorname{sech} [\alpha(x - St)] \quad (3.73)$$

çözümü, $\alpha \sqrt{\frac{2}{q}}$ genlikli ve $v = S$ hızıyla ilerleyen bir soliton dalgasına karşılık gelmektedir. (3.71) eşitliği ile tepe noktası $\tilde{x}_0 = 0$ noktasına karşılık gelecek şekilde yerleştirilmiş bir soliton dalgasının zaman içinde $S > 0$ seçimi yapıldığında v hızıyla soldan sağa doğru hareketi modellenir. NLS denkleminin için soliton dalga hareketi test probleminde sınır şartları $x \rightarrow \pm\infty$ iken $u, u_x, u_{xx} \rightarrow 0$ şeklindedir. Sayısal yöntemi uygulayabilmek için $[a, b]$ konum aralığı sınır şartlarını sağlayacak şekilde mümkün olduğu kadar geniş seçilecektir.

3.5.2. İki soliton dalgasının çarpışması

$t = 0$ başlangıç anında, tepe noktaları sırasıyla \tilde{x}_1 ve \tilde{x}_2 noktalarına karşılık gelecek şekilde $[a, b]$ konum aralığında yerleştirilen $\alpha_1\sqrt{\frac{2}{q}}$ ve $\alpha_2\sqrt{\frac{2}{q}}$ genliklerine sahip iki soliton dalgasının çarpışması test probleminde

$$u(x, 0) = \alpha_1\sqrt{\frac{2}{q}} \exp\left(i\left(\frac{S_1}{2}(x - \tilde{x}_1)\right)\right) \operatorname{sech}[\alpha_1(x - \tilde{x}_1)] \quad (3.74)$$

$$+ \alpha_2\sqrt{\frac{2}{q}} \exp\left(i\left(\frac{S_2}{2}(x - \tilde{x}_2)\right)\right) \operatorname{sech}[\alpha_2(x - \tilde{x}_2)]$$

başlangıç şartı kullanılacaktır. (3.74) eşitliğinin modülü alınarak $S_1 > 0$, $S_2 < 0$ ve $\tilde{x}_2 > \tilde{x}_1$ seçimleri yapıldığında tepe noktaları \tilde{x}_1 ve \tilde{x}_2 noktalarına karşılık gelecek şekilde yerleştirilen iki soliton dalgasının birbirlerine doğru zıt yöndeki hareketleri modellenmektedir. Burada soldaki dalganın tepe noktası \tilde{x}_1 noktasına karşılık gelmekte olup dalga S_1 hızıyla soldan sağa doğru hareket etmektedir. Konum aralığının sağ tarafına, tepe noktası \tilde{x}_2 noktasına karşılık gelecek şekilde yerleştirilen ikinci dalga ise S_2 hızıyla sağdan sola doğru hareket etmektedir. Soliton dalgaları zıt yönde hareket ettiklerinden bir müddet sonra bir çarpışma gerçekleşecektir. Çarpışma bir süre sonra sonlanacak ve dalgalar birbirlerinden uzaklaşarak zıt yönlerde hareketlerine devam edecektir.

4. NLS DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ İÇİN KUADRATİK TRİGONOMETRİK B-SPLİNE GALERKİN METODU

Bu bölümde NLS denkleminin sayısal çözümü için zaman parçalanması yapılırken Crank Nicolson yöntemi, konuma göre parçalanma yapılırken kuadratik trigonometrik B-spline Galerkin metodu kullanılmıştır.

4.1. Crank Nicolson Yöntemi

$$iu_t + u_{xx} + q|u|^2 u = 0 \quad (3.60)$$

NLS denkleminin $U(x, t)$ yaklaşık çözümü $r(x, t)$ ve $s(x, t)$ reel değerli birer fonksiyon olmak üzere

$$U(x, t) = r(x, t) + is(x, t)$$

şeklinde ifade edilsin. Bu ifadeler (3.60) denkleminde yerine yazılırsa

$$i(r_t + is_t) + r_{xx} + is_{xx} + q(r^2 + s^2)(r + is) = 0 \quad (4.1)$$

denklemini bulunur. (4.1) denklemini sanal ve reel kısımlara ayırılırsa

$$r_t + s_{xx} + q(r^2 + s^2)s = 0 \quad (4.2)$$

$$s_t - r_{xx} - q(r^2 + s^2)r = 0 \quad (4.3)$$

elde edilir. (4.2) ve (4.3) denklemlerine Crank Nicolson metodu uygulanırsa

$$\frac{s^{n+1} - s^n}{\Delta t} - \frac{(r_{xx})^{n+1} + (r_{xx})^n}{2} - q \frac{((r^2 + s^2)r)^{n+1} + ((r^2 + s^2)r)^n}{2} = 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{r^{n+1} - r^n}{\Delta t} + \frac{(s_{xx})^{n+1} + (s_{xx})^n}{2} + q \frac{((r^2 + s^2)s)^{n+1} + ((r^2 + s^2)s)^n}{2} = 0 \quad (4.5)$$

denklemlerine ulaşılır. (4.4) ve (4.5) denklemleri düzenlenirse NLS denkleminin zaman parçalanması yapılmış hali olan

$$s^{n+1} - \frac{\Delta t}{2}(r_{xx})^{n+1} - q \frac{\Delta t}{2} ((r^2 + s^2)r)^{n+1} = s^n + \frac{\Delta t}{2}(r_{xx})^n + q \frac{\Delta t}{2} ((r^2 + s^2)r)^n, \quad (4.6)$$

$$r^{n+1} + \frac{\Delta t}{2}(s_{xx})^{n+1} + q \frac{\Delta t}{2} ((r^2 + s^2)s)^{n+1} = r^n - \frac{\Delta t}{2}(s_{xx})^n - q \frac{\Delta t}{2} ((r^2 + s^2)s)^n \quad (4.7)$$

denklemleri elde edilir.

4.2. İç İterasyonlu Lineerleştirme (Metot 1)

$W(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere (4.6) ve (4.7) denklemlerine Galerkin metodu uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \int_a^b W(x) \left[s^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} (r_{xx})^{n+1} - q \frac{\Delta t}{2} ((r^2 + s^2) r)^{n+1} \right] dx \\ &= \int_a^b W(x) \left[s^n + \frac{\Delta t}{2} (r_{xx})^n + q \frac{\Delta t}{2} ((r^2 + s^2) r)^n \right] dx, \end{aligned} \quad (4.8)$$

ve

$$\begin{aligned} & \int_a^b W(x) \left[r^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} (s_{xx})^{n+1} + q \frac{\Delta t}{2} ((r^2 + s^2) s)^{n+1} \right] dx \\ &= \int_a^b W(x) \left[r^n - \frac{\Delta t}{2} (s_{xx})^n - q \frac{\Delta t}{2} ((r^2 + s^2) s)^n \right] dx \end{aligned} \quad (4.9)$$

denklemlerine ulaşılır. Kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonların kendisi ve birinci türevleri bölünme noktalarında sürekli olup kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonların ikinci türevleri bölünme noktalarında sürekli değildir. (4.8) ve (4.9) denklemlerinde ikinci mertebeden türevler bulunduğundan kısmi integrasyon ile denklemlerdeki ikinci mertebeden türevlerin mertebesi bir düşürülerek süreklilik garanti altına alınabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \int_a^b W(x) (r_{xx})^{n+1} dx &= W(x) (r_x)^{n+1} \Big|_a^b - \int_a^b W_x(x) (r_x)^{n+1} dx \\ \int_a^b W(x) (r_{xx})^n dx &= W(x) (r_x)^n \Big|_a^b - \int_a^b W_x(x) (r_x)^n dx \\ \int_a^b W(x) (s_{xx})^{n+1} dx &= W(x) (s_x)^{n+1} \Big|_a^b - \int_a^b W_x(x) (s_x)^{n+1} dx \\ \int_a^b W(x) (s_{xx})^n dx &= W(x) (s_x)^n \Big|_a^b - \int_a^b W_x(x) (s_x)^n dx \end{aligned}$$

elde edilir. (3.62) sınır şartlarından

$$W(x) (r_x)^{n+1} \Big|_a^b = W(x) (r_x)^n \Big|_a^b = W(x) (s_x)^{n+1} \Big|_a^b = W(x) (s_x)^n \Big|_a^b = 0$$

olacağından

$$\int_a^b W(x) (r_{xx})^{n+1} dx = - \int_a^b W_x(x) (r_x)^{n+1} dx \quad (4.10)$$

$$\int_a^b W(x) (r_{xx})^n dx = - \int_a^b W_x(x) (r_x)^n dx \quad (4.11)$$

$$\int_a^b W(x) (s_{xx})^{n+1} dx = - \int_a^b W_x(x) (s_x)^{n+1} dx \quad (4.12)$$

$$\int_a^b W(x) (s_{xx})^n dx = - \int_a^b W_x(x) (s_x)^n dx \quad (4.13)$$

eşitlikleri elde edilir. (4.10-4.13) eşitlikleri (4.8) ve (4.9) denklemlerinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left[W(x) \left(s^{n+1} - q \frac{\Delta t}{2} ((r^2 + s^2) r)^{n+1} \right) + \frac{\Delta t}{2} W_x(x) (r_x)^{n+1} \right] dx \\ &= \int_a^b \left[W(x) \left(s^n + q \frac{\Delta t}{2} ((r^2 + s^2) r)^n \right) - \frac{\Delta t}{2} W_x(x) (r_x)^n \right] dx \end{aligned} \quad (4.14)$$

ve

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left[W(x) \left(r^{n+1} + q \frac{\Delta t}{2} ((r^2 + s^2) s)^{n+1} \right) - \frac{\Delta t}{2} W_x(x) (s_x)^{n+1} \right] dx \\ &= \int_a^b \left[W(x) \left(r^n - q \frac{\Delta t}{2} ((r^2 + s^2) s)^n \right) + \frac{\Delta t}{2} W_x(x) (s_x)^n \right] dx \end{aligned} \quad (4.15)$$

denklemlerine ulaşılır.

$m = 0, 1, \dots, N-1$ olmak üzere $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde kuadratik trigonometrik B-spline taban fonksiyonlarının kullanıldığı

$$U(x, t) = r(x, t) + is(x, t) = \sum_{i=m-1}^{m+1} T_i^2(x) \delta_i$$

yaklaşımı için

$$\delta = \sigma + i\rho$$

alınırsa

$$r = \sum_{j=m-1}^{m+1} T_j^2 \sigma_j \quad (4.16)$$

$$s = \sum_{j=m-1}^{m+1} T_j^2 \rho_j \quad (4.17)$$

elde edilir. (4.14) ve (4.15) denklemlerindeki $W(x)$ ağırlık fonksiyonu yerine kuadratik trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları, r ve s bilinmeyenleri yerine ise (4.16) ve (4.17) eşitlikleri kullanıldığında

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j dx \right) \rho_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i' T_j' dx \right) \sigma_j^{n+1} \right. \\
& - \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+1} \sum_{l=m-1}^{m+1} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i [T_k \rho_k^{n+1} T_l \rho_l^{n+1} + T_k \sigma_k^{n+1} T_l \sigma_l^{n+1}] T_j dx \right) \sigma_j^{n+1} \left. \right\} \\
& - \sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j dx \right) \rho_j^n - \frac{\Delta t}{2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i' T_j' dx \right) \sigma_j^n \right. \\
& \left. + \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+1} \sum_{l=m-1}^{m+1} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i [T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n + T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n] T_j dx \right) \sigma_j^n \right\}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j dx \right) \sigma_j^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i' T_j' dx \right) \rho_j^{n+1} \right. \\
& \left. + \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+1} \sum_{l=m-1}^{m+1} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i [T_k \rho_k^{n+1} T_l \rho_l^{n+1} + T_k \sigma_k^{n+1} T_l \sigma_l^{n+1}] T_j dx \right) \rho_j^{n+1} \right\} \\
& - \sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j dx \right) \sigma_j^n + \frac{\Delta t}{2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i' T_j' dx \right) \rho_j^n \right. \\
& \left. - \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+1} \sum_{l=m-1}^{m+1} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i [T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n + T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n] T_j dx \right) \rho_j^n \right\}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

bulunur. Bu ve bundan sonraki bölümlerde karışıklık olmaması için trigonometrik B-spline fonksiyonun derecesini gösteren sayılar kullanılmayacaktır. Bu yaklaşım $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde olup $m = 0, 1, \dots, N - 1$ değerleri için her bir aralıktaki yaklaşımlar birleştirildiğinde (4.14) ve (4.15) eşitlikleri bulunacaktır. (4.18) ve (4.19) yaklaşımlarında hesaplanması gereken integrallerin alt bölünme aralıklarından bağımsız olarak hesaplanabilmesi için

$$\xi = x - x_m$$

dönüşümü yapılırsa $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[0, h]$ aralığına döndürür. Bu durumda (4.18) ve (4.19) yaklaşımları

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ \left(\int_0^h T_i T_j d\xi \right) \rho_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \left(\int_0^h T_i' T_j' d\xi \right) \sigma_j^{n+1} \right. \\
& \left. - \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+1} \sum_{l=m-1}^{m+1} \left(\int_0^h T_i [T_k \rho_k^{n+1} T_l \rho_l^{n+1} + T_k \sigma_k^{n+1} T_l \sigma_l^{n+1}] T_j d\xi \right) \sigma_j^{n+1} \right\} \\
& - \sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ \left(\int_0^h T_i T_j d\xi \right) \rho_j^n - \frac{\Delta t}{2} \left(\int_0^h T_i' T_j' d\xi \right) \sigma_j^n \right. \\
& \left. + \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+1} \sum_{l=m-1}^{m+1} \left(\int_0^h T_i [T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n + T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n] T_j d\xi \right) \sigma_j^n \right\}
\end{aligned} \tag{4.20}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ \left(\int_0^h T_i T_j d\xi \right) \sigma_j^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} \left(\int_0^h T_i' T_j' d\xi \right) \rho_j^{n+1} \right. \\
& \left. + \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+1} \sum_{l=m-1}^{m+1} \left(\int_0^h T_i [T_k \rho_k^{n+1} T_l \rho_l^{n+1} + T_k \sigma_k^{n+1} T_l \sigma_l^{n+1}] T_j d\xi \right) \rho_j^{n+1} \right\} \\
& - \sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ \left(\int_0^h T_i T_j d\xi \right) \sigma_j^n + \frac{\Delta t}{2} \left(\int_0^h T_i' T_j' d\xi \right) \rho_j^n \right. \\
& \left. - \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+1} \sum_{l=m-1}^{m+1} \left(\int_0^h T_i [T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n + T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n] T_j d\xi \right) \rho_j^n \right\}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

olarak yazılabilir. (4.20) ve (4.21) ifadelerindeki integrallerin hesaplanması için (3.16-3.18) eşitliklerinde verilen

$$\begin{aligned}
T_{m-1}(\xi) &= \frac{\sin^2\left(\frac{h-\xi}{2}\right)}{\theta}, \\
T_m(\xi) &= \frac{\sin\left(\frac{h+\xi}{2}\right) \sin\left(\frac{h-\xi}{2}\right) + \sin\left(\frac{2h-\xi}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi}{2}\right)}{\theta}, \\
T_{m+1}(\xi) &= \frac{\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)}{\theta}
\end{aligned}$$

kuadratik trigonometrik şekil fonksiyonları kullanılacaktır. Bu durumda her bir alt aralıktaki eleman matrislerinin her bir elemanı $i, j : m-1, m, m+1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
A_{ij}^e &= \int_0^h T_i T_j d\xi, \\
B_{ij}^e &= \int_0^h T_i' T_j' d\xi, \\
C_{ij}^e &= \int_0^h T_i \sum_{k=m-1}^{m+1} \sum_{l=m-1}^{m+1} [T_k \rho_k^{n+1} T_l \rho_l^{n+1} + T_k \sigma_k^{n+1} T_l \sigma_l^{n+1}] T_j d\xi \\
D_{ij}^e &= \int_0^h T_i \sum_{k=m-1}^{m+1} \sum_{l=m-1}^{m+1} [T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n + T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n] T_j d\xi
\end{aligned} \tag{4.22}$$

olarak alınırsa, (4.20) ve (4.21) yaklaşımları

$$\begin{aligned}
\sigma^e &= (\sigma_{m-1}, \sigma_m, \sigma_{m+1})^T \\
\rho^e &= (\rho_{m-1}, \rho_m, \rho_{m+1})^T
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
&A^e (\rho^e)^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} B^e (\sigma^e)^{n+1} - \frac{\Delta t q}{2} C^e (\sigma^e)^{n+1} \\
&- \left(A^e (\rho^e)^n - \frac{\Delta t}{2} B^e (\sigma^e)^n + \frac{\Delta t q}{2} D^e (\sigma^e)^n \right),
\end{aligned} \tag{4.23}$$

ve

$$\begin{aligned}
&A^e (\sigma^e)^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} B^e (\rho^e)^{n+1} + \frac{\Delta t q}{2} C^e (\rho^e)^{n+1} \\
&- \left(A^e (\sigma^e)^n + \frac{\Delta t}{2} B^e (\rho^e)^n - \frac{\Delta t q}{2} D^e (\rho^e)^n \right)
\end{aligned} \tag{4.24}$$

olarak eleman matrisleriyle yazılabilir. (4.23) ve (4.24) yaklaşımlarında bulunan eleman matrislerinin $m = 0, 1, \dots, N - 1$ için birbirlerine eklenmesi sonucunda

$$\begin{aligned}
\sigma &= (\sigma_{-1}, \sigma_0, \dots, \sigma_{N-1}, \sigma_N)^T \\
\rho &= (\rho_{-1}, \rho_0, \dots, \rho_{N-1}, \rho_N)^T
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$A\rho^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} B\sigma^{n+1} - \frac{\Delta t q}{2} C\sigma^{n+1} = A\rho^n - \frac{\Delta t}{2} B\sigma^n + \frac{\Delta t q}{2} D\sigma^n, \tag{4.25}$$

$$A\sigma^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} B\rho^{n+1} + \frac{\Delta t q}{2} C\rho^{n+1} = A\sigma^n + \frac{\Delta t}{2} B\rho^n - \frac{\Delta t q}{2} D\rho^n \tag{4.26}$$

elde edilir. (4.25) ve (4.26) denklemlerinden oluşan denklem sistemi $2N + 4$ denklem ve $2N + 4$ bilinmeyenden oluşan ve her bir satırında en fazla 10 elemanı sıfırdan farklı

olan bir sistemdir. Sınır şartlarını sisteme adapte etmek için sistemdeki ilk iki ve son iki denklem silinip konum aralığının uç noktalarındaki

$$U(a, t) = r(a, t) + is(a, t) = 0,$$

$$U(b, t) = r(b, t) + is(b, t) = 0$$

sınır şartları kullanılarak σ_{-1}, ρ_{-1} ve σ_N, ρ_N yok edilirse denklem sistemi $2N$ denklem ve $2N$ bilinmeyenden oluşan denklem sistemine indirgenmiş olur. Sınır şartları kullanılırken

$$\theta = \sin\left(\frac{h}{2}\right), \quad a_1 = \frac{\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{\theta}, \quad b_1 = \frac{\sin(h)}{\theta},$$

olmak üzere aralığın baş kısmında

$$r(a, t) = a_1\sigma_{-1} + a_1\sigma_0 = 0,$$

$$s(a, t) = a_1\rho_{-1} + a_1\rho_1 = 0,$$

eşitlikleri ve uç kısmında ise

$$r(b, t) = a_1\sigma_{N-1} + a_1\sigma_N = 0,$$

$$s(b, t) = a_1\rho_{N-1} + a_1\rho_N = 0,$$

eşitlikleri kullanılacaktır. NLS denkleminin kuadratik trigonometrik B-spline Galerkin metodu ile sayısal çözümü araştırılırken elde edilen sınır şartları uygulanmış denklem sisteminin çözülebilmesi için öncelikle

$$(\sigma_{-1}^0, \rho_{-1}^0, \sigma_0^0, \rho_0^0, \dots, \sigma_{N-1}^0, \rho_{N-1}^0, \sigma_N^0, \rho_N^0)$$

olarak $2N + 4$ bilinmeyenden oluşan başlangıç bilinmeyenler vektörünün bulunması gerekir. Bunun için NLS denkleminin başlangıç şartı olan

$$U(x_j, 0) = r(x_j, 0) + is(x_j, 0) = f(x_j), \quad j = 0, 1, 2, \dots, N$$

ve

$$U_x(a, t) = r_x(a, 0) + is_x(a, 0) = f'(a)$$

sınır şartları kullanılabilir. Dolayısıyla

$$\theta = \sin\left(\frac{h}{2}\right), \quad a_1 = \frac{\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{\theta}, \quad b_1 = \frac{\sin(h)}{\theta},$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} r(x_j, 0) &= a_1 \sigma_{j-1}^0 + a_1 \sigma_j^0 = \operatorname{Re}(f(x_j)), j = 0, 1, 2, \dots, N \\ s(x_j, 0) &= a_1 \rho_{j-1}^0 + a_1 \rho_j^0 = \operatorname{Im}(f(x_j)), j = 0, 1, 2, \dots, N \\ r_x(a, 0) &= -b_1 \sigma_{-1}^0 + b_1 \sigma_0^0 = \operatorname{Re}(f'(a)), \\ s_x(a, 0) &= -b_1 \rho_{-1}^0 + b_1 \rho_0^0 = \operatorname{Im}(f'(a)), \end{aligned}$$

denklem sistemi çözülmürse

$$(\sigma_{-1}^0, \rho_{-1}^0, \sigma_0^0, \rho_0^0, \dots, \sigma_{N-1}^0, \rho_{N-1}^0, \sigma_N^0, \rho_N^0)$$

bilinmeyen vektörü bulunur.

Son olarak NLS denkleminin kuadratik trigonometrik B-spline Galerkin metodu ile sayısal çözümü araştırılırken denklem sistemine sınır şartları uygulanarak başlangıç bilinmeyenler vektörü hesaplanmıştır. Bundan sonra iteratif olarak denklem sisteminin çözülebilmesi adına denklem sistemi lineer olmadığı için öncelikle her adımda iç iterasyon ile lineerleştirme yapılması gerekir. Lineerleştirme için aşağıdaki adımlar takip edilmiştir.

Adım 1: C matrisinde lineerliği bozan

$$\sigma_m^{n+1} \text{ ve } \rho_m^{n+1} \text{ bilinmeyenleri yerine } \sigma_m^n \text{ ve } \rho_m^n \text{ al.}$$

Adım 2: σ_m^{n+1} ve ρ_m^{n+1} değerlerini bul.

Adım 3: Hata = $\max_m \{|\sigma_m^{n+1} - \sigma_m^n|, |\rho_m^{n+1} - \rho_m^n|\}$ hesapla.

Adım 4: Hata $> 10^{-12}$ ise sadece lineerliği bozan terimleri güncelle ve Adım 2'ye git.

Adım 5: Bir sonraki zaman adımına geç.

Denklem sisteminin çözülmesiyle bulunan

$$(\sigma_{-1}^{n+1}, \rho_{-1}^{n+1}, \sigma_0^{n+1}, \rho_0^{n+1}, \dots, \sigma_{N-1}^{n+1}, \rho_{N-1}^{n+1}, \sigma_N^{n+1}, \rho_N^{n+1})$$

bilinmeyenler vektörü kullanılarak istenilen zamanlardaki $x = x_m$ noktasındaki bilinmeyen fonksiyon

$$U_m^{n+1} = a_1 \sigma_{m-1}^{n+1} + a_1 \sigma_m^{n+1} + i (a_1 \rho_{m-1}^{n+1} + a_1 \rho_m^{n+1})$$

olarak bulunur.

4.3. Rubin Graves Lineerleştirmesi (Metot 2)

Bu kısımda NLS denkleminin sayısal çözümü için kuadratik trigonometrik B-spline Galerkin yöntemi ile birlikte Crank Nicolson zaman parçalanmasının yanı sıra iç iterasyon yerine Rubin Graves lineerleştirmesi önerilmiştir. Bir önceki alt bölümde elde edilen

$$s^{n+1} - \frac{\Delta t}{2}(r_{xx})^{n+1} - q \frac{\Delta t}{2} ((r^2 + s^2) r)^{n+1} = s^n + \frac{\Delta t}{2}(r_{xx})^n + q \frac{\Delta t}{2} ((r^2 + s^2) r)^n \quad (4.6)$$

ve

$$r^{n+1} + \frac{\Delta t}{2}(s_{xx})^{n+1} + q \frac{\Delta t}{2} ((r^2 + s^2) s)^{n+1} = r^n - \frac{\Delta t}{2}(s_{xx})^n - q \frac{\Delta t}{2} ((r^2 + s^2) s)^n \quad (4.7)$$

denklemlerinde lineerliği bozan

$$(r^3)^{n+1}, (s^2)^{n+1} r^{n+1}, (r^2)^{n+1} s^{n+1}, (s^3)^{n+1}$$

terimleri yerine Rubin ve Graves (1978) tarafından önerilen lineerleştirmeden yola çıkılarak bulunan ve doğruluğu 2 olan

$$\begin{aligned} (r^3)^{n+1} &\approx 3r^n r^n r^{n+1} - 2r^n r^n r^n \\ (s^2)^{n+1} r^{n+1} &\approx 2r^n s^n s^{n+1} + s^n s^n r^{n+1} - 2s^n s^n r^n \\ (r^2)^{n+1} s^{n+1} &\approx 2s^n r^n r^{n+1} + r^n r^n s^{n+1} - 2r^n r^n s^n \\ (s^3)^{n+1} &\approx 3s^n s^n s^{n+1} - 2s^n s^n s^n \end{aligned}$$

eşitlikleri kullanılır ve ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned} s^{n+1} - \frac{\Delta t}{2}(r_{xx})^{n+1} - q \frac{\Delta t}{2} ((3r^n r^n + s^n s^n) r^{n+1} + 2r^n s^n s^{n+1}) \\ = s^n + \frac{\Delta t}{2}(r_{xx})^n - q \frac{\Delta t}{2} (r^n r^n + s^n s^n) r^n \end{aligned} \quad (4.27)$$

ve

$$\begin{aligned} r^{n+1} + \frac{\Delta t}{2}(s_{xx})^{n+1} + q \frac{\Delta t}{2} ((3s^n s^n + r^n r^n) s^{n+1} + 2s^n r^n r^{n+1}) \\ = r^n - \frac{\Delta t}{2}(s_{xx})^n + q \frac{\Delta t}{2} (r^n r^n + s^n s^n) s^n \end{aligned} \quad (4.28)$$

denklemleri bulunur. $W(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere (4.27) ve (4.28) ifadeleri ağırlık fonksiyonu ile çarpılır ve konum aralığı üzerinde integrali almırsa

$$\begin{aligned} \int_a^b W(x) \left[s^{n+1} - \frac{\Delta t}{2}(r_{xx})^{n+1} - \frac{q\Delta t}{2} ((3r^n r^n + s^n s^n) r^{n+1} + 2r^n s^n s^{n+1}) \right] dx \\ = \int_a^b W(x) \left[s^n + \frac{\Delta t}{2}(r_{xx})^n - \frac{q\Delta t}{2} (r^n r^n + s^n s^n) r^n \right] dx \end{aligned} \quad (4.29)$$

ve

$$\begin{aligned} & \int_a^b W(x) \left[r^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} (s_{xx})^{n+1} + \frac{q\Delta t}{2} ((3s^n s^n + r^n r^n) s^{n+1} + 2s^n r^n r^{n+1}) \right] dx \\ &= \int_a^b W(x) \left[r^n - \frac{\Delta t}{2} (s_{xx})^n + \frac{q\Delta t}{2} (r^n r^n + s^n s^n) s^n \right] dx \end{aligned} \quad (4.30)$$

eşitliklerine ulaşılır. Bir önceki alt bölümde elde edilen

$$\begin{aligned} \int_a^b W(x) (r_{xx})^{n+1} dx &= - \int_a^b W_x(x) (r_x)^{n+1} dx \\ \int_a^b W(x) (r_{xx})^n dx &= - \int_a^b W_x(x) (r_x)^n dx \\ \int_a^b W(x) (s_{xx})^{n+1} dx &= - \int_a^b W_x(x) (s_x)^{n+1} dx \\ \int_a^b W(x) (s_{xx})^n dx &= - \int_a^b W_x(x) (s_x)^n dx \end{aligned}$$

eşitlikleri (4.29) ve (4.30) denklemlerinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left[W(x) \left(s^{n+1} - \frac{q\Delta t}{2} ((3r^n r^n + s^n s^n) r^{n+1} + 2r^n s^n s^{n+1}) \right) \right. \\ & \left. + \frac{\Delta t}{2} W_x(x) (r_x)^{n+1} \right] dx \\ &= \int_a^b \left(W(x) \left(s^n - q \frac{\Delta t}{2} (r^n r^n + s^n s^n) r^n \right) - \frac{\Delta t}{2} W_x(x) (r_x)^n \right) dx \end{aligned} \quad (4.31)$$

ve

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left[W(x) \left(r^{n+1} + \frac{q\Delta t}{2} ((3s^n s^n + r^n r^n) s^{n+1} + 2s^n r^n r^{n+1}) \right) \right. \\ & \left. - \frac{\Delta t}{2} W_x(x) (s_x)^{n+1} \right] dx \\ &= \int_a^b \left(W(x) \left(r^n + \frac{q\Delta t}{2} (r^n r^n + s^n s^n) s^n \right) + \frac{\Delta t}{2} W_x(x) (s_x)^n \right) dx \end{aligned} \quad (4.32)$$

denklemleri bulunur.

Bir önceki alt bölümde elde edilen

$$r = \sum_{j=m-1}^{m+1} T_j^2 \sigma_j$$

$$s = \sum_{j=m-1}^{m+1} T_j^2 \rho_j$$

eşitlikleri ile birlikte $W(x)$ ağırlık fonksiyonu için kuadratik trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları kullanıldığında, (4.31) ve (4.32) denklemleri için $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerindeki yaklaşımlar

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j dx \right) \rho_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i' T_j' dx \right) \sigma_j^{n+1} \right. \\ & - \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+1} \sum_{l=m-1}^{m+1} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i [3T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n + T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n] T_j dx \right) \sigma_j^{n+1} \\ & \left. - \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+1} \sum_{l=m-1}^{m+1} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i [2T_k \sigma_k^n T_l \rho_l^n] T_j dx \right) \rho_j^{n+1} \right\} \\ & - \sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j dx \right) \rho_j^n - \frac{\Delta t}{2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i' T_j' dx \right) \sigma_j^n \right. \\ & \left. - \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+1} \sum_{l=m-1}^{m+1} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i [T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n + T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n] T_j dx \right) \sigma_j^n \right\} \end{aligned} \quad (4.33)$$

ve

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j dx \right) \sigma_j^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i' T_j' dx \right) \rho_j^{n+1} \right. \\ & + \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+1} \sum_{l=m-1}^{m+1} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i [T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n + 3T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n] T_j dx \right) \rho_j^{n+1} \\ & \left. + \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+1} \sum_{l=m-1}^{m+1} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i [2T_k \sigma_k^n T_l \rho_l^n] T_j dx \right) \sigma_j^{n+1} \right\} \\ & - \sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j dx \right) \sigma_j^n + \frac{\Delta t}{2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i' T_j' dx \right) \rho_j^n \right. \\ & \left. + \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+1} \sum_{l=m-1}^{m+1} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i [T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n + T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n] T_j dx \right) \rho_j^n \right\} \end{aligned} \quad (4.34)$$

olarak elde edilir. Yaklaşımlar $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde olup $m = 0, 1, \dots, N - 1$ değerleri için her bir aralıktaki yaklaşımlar birleştirildiğinde (4.31) ve (4.32) eşitliklerine

dönecektir. Bir önceki alt bölümde Metot 1 için yapıldığı gibi

$$\xi = x - x_m$$

dönüşümü yapılırsa $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[0, h]$ aralığına dönüştürerek yaklaşımlardaki integraller alt bölünme aralıklarından bağımsız olarak hesaplanabilecektir. Bu durumda (4.33) ve (4.34) yaklaşımları

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ \left(\int_0^h T_i T_j d\xi \right) \rho_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \left(\int_0^h T_i' T_j' d\xi \right) \sigma_j^{n+1} \right. \\
& - \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+1} \sum_{l=m-1}^{m+1} \left(\int_0^h T_i [3T_k \sigma_k^n T_l \rho_l^n + T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi \right) \sigma_j^{n+1} \\
& \left. - \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+1} \sum_{l=m-1}^{m+1} \left(\int_0^h T_i [2T_k \sigma_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi \right) \rho_j^{n+1} \right\} \\
& - \sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ \left(\int_0^h T_i T_j d\xi \right) \rho_j^n - \frac{\Delta t}{2} \left(\int_0^h T_i' T_j' d\xi \right) \sigma_j^n \right. \\
& \left. - \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+1} \sum_{l=m-1}^{m+1} \left(\int_0^h T_i [T_k \sigma_k^n T_l \rho_l^n + T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi \right) \sigma_j^n \right\}
\end{aligned} \tag{4.35}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ \left(\int_0^h T_i T_j d\xi \right) \sigma_j^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} \left(\int_0^h T_i' T_j' d\xi \right) \rho_j^{n+1} \right. \\
& + \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+1} \sum_{l=m-1}^{m+1} \left(\int_0^h T_i [T_k \sigma_k^n T_l \rho_l^n + 3T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi \right) \rho_j^{n+1} \\
& \left. + \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+1} \sum_{l=m-1}^{m+1} \left(\int_0^h T_i [2T_k \sigma_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi \right) \sigma_j^{n+1} \right\} \\
& - \sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ \left(\int_0^h T_i T_j d\xi \right) \sigma_j^n + \frac{\Delta t}{2} \left(\int_0^h T_i' T_j' d\xi \right) \rho_j^n \right. \\
& \left. + \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+1} \sum_{l=m-1}^{m+1} \left(\int_0^h T_i [T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n + T_k \sigma_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi \right) \rho_j^n \right\}
\end{aligned} \tag{4.36}$$

olarak yazılabilir. (4.35) ve (4.36) ifadelerindeki integrallerin hesaplanması için

(3.16-3.18) eşitliklerinde verilen

$$\begin{aligned}
T_{m-1}(\xi) &= \frac{\sin^2\left(\frac{h-\xi}{2}\right)}{\theta}, \\
T_m(\xi) &= \frac{\sin\left(\frac{h+\xi}{2}\right)\sin\left(\frac{h-\xi}{2}\right) + \sin\left(\frac{2h-\xi}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)}{\theta}, \\
T_{m+1}(\xi) &= \frac{\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)}{\theta}
\end{aligned}$$

kuadratik trigonometrik şekil fonksiyonları kullanılacaktır. Bu durumda her bir alt aralıktaki eleman matrislerinin her bir elemanı $i, j : m-1, m, m+1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
A_{ij}^e &= \int_0^h T_i T_j d\xi, \\
B_{ij}^e &= \int_0^h T_i' T_j' d\xi, \\
C_{ij}^e &= \int_0^h T_i \sum_{k=m-1}^{m+1} \sum_{l=m-1}^{m+1} [3T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n + T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi, \\
D_{ij}^e &= \int_0^h T_i \sum_{k=m-1}^{m+1} \sum_{l=m-1}^{m+1} [2T_k \sigma_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi, \\
E_{ij}^e &= \int_0^h T_i \sum_{k=m-1}^{m+1} \sum_{l=m-1}^{m+1} [T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n + T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi, \\
F_{ij}^e &= \int_0^h T_i \sum_{k=m-1}^{m+1} \sum_{l=m-1}^{m+1} [T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n + 3T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi
\end{aligned}$$

olarak alınırsa (4.35) ve (4.36) ifadeleri

$$\begin{aligned}
\sigma^e &= (\sigma_{m-1}, \sigma_m, \sigma_{m+1})^T \\
\rho^e &= (\rho_{m-1}, \rho_m, \rho_{m+1})^T
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
&A^e (\rho^e)^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} B^e (\sigma^e)^{n+1} - \frac{\Delta t q}{2} C^e (\sigma^e)^{n+1} - \frac{\Delta t q}{2} D^e (\sigma^e)^{n+1} \\
&- \left(A^e (\rho^e)^n - \frac{\Delta t}{2} B^e (\sigma^e)^n - \frac{\Delta t q}{2} E^e (\sigma^e)^n \right), \tag{4.37}
\end{aligned}$$

ve

$$A^e (\sigma^e)^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} B^e (\rho^e)^{n+1} + \frac{\Delta t q}{2} F^e (\rho^e)^{n+1} + \frac{\Delta t q}{2} D^e (\rho^e)^{n+1} - \left(A^e (\sigma^e)^n + \frac{\Delta t}{2} B^e (\rho^e)^n + \frac{\Delta t q}{2} E^e (\rho^e)^n \right) \quad (4.38)$$

olarak eleman matrisleriyle yazılabilir. (4.37) ve (4.38) yaklaşımlarının $m = 0, 1, \dots, N - 1$ için uygun şekilde birbirlerine eklenmesi sonucunda,

$$\begin{aligned} \sigma &= (\sigma_{-1}, \sigma_0, \dots, \sigma_{N-1}, \sigma_N)^T \\ \rho &= (\rho_{-1}, \rho_0, \dots, \rho_{N-1}, \rho_N)^T \end{aligned}$$

olmak üzere

$$A\rho^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} B\sigma^{n+1} - \frac{\Delta t q}{2} C\sigma^{n+1} - \frac{\Delta t q}{2} D\sigma^{n+1} = A\rho^n - \frac{\Delta t}{2} B\sigma^n - \frac{\Delta t q}{2} E\sigma^n \quad (4.39)$$

ve

$$A\sigma^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} B\rho^{n+1} + \frac{\Delta t q}{2} F\rho^{n+1} + \frac{\Delta t q}{2} D\rho^{n+1} = A\sigma^n + \frac{\Delta t}{2} B\rho^n + \frac{\Delta t q}{2} E\rho^n \quad (4.40)$$

elde edilir. (4.39) ve (4.40) denklemlerinden oluşan denklem sistemi $2N + 4$ denklem ve $2N + 4$ bilinmeyenden oluşan ve her bir satırında en fazla 10 elemanı sıfırdan farklı olan bir sistemdir. Metot 1'in anlatıldığı bölümde olduğu gibi sistemdeki ilk iki ve son iki denklem silinip bölgenin uç noktalarındaki

$$\begin{aligned} U(a, t) &= 0, \\ U(b, t) &= 0 \end{aligned}$$

sınır şartları kullanılarak σ_{-1}, ρ_{-1} ve σ_N, ρ_N yok edilirse, denklem sistemi $2N$ denklem $2N$ bilinmeyenden oluşan matris sistemine indirgenmiş olur. Metot 1'de olduğu gibi denklem sisteminin çözülebilmesi gereken

$$(\sigma_{-1}^0, \rho_{-1}^0, \sigma_0^0, \rho_0^0, \dots, \sigma_{N-1}^0, \rho_{N-1}^0, \sigma_N^0, \rho_N^0)$$

başlangıç bilinmeyenler vektörünün benzer şekilde bulunabilir.

Metot 1'de olduğu gibi denklem sisteminin çözülmesiyle bulunan

$$(\sigma_{-1}^{n+1}, \rho_{-1}^{n+1}, \sigma_0^{n+1}, \rho_0^{n+1}, \dots, \sigma_{N-1}^{n+1}, \rho_{N-1}^{n+1}, \sigma_N^{n+1}, \rho_N^{n+1})$$

bilinmeyenler vektörü kullanılarak istenilen zamanlardaki ve $x = x_m$ noktasındaki bilinmeyen fonksiyon

$$U_m^{n+1} = a_1 \sigma_{m-1}^{n+1} + a_1 \sigma_m^{n+1} + i (a_1 \rho_{m-1}^{n+1} + a_1 \rho_m^{n+1})$$

olarak bulunur.

4.4. Soliton Dalgasının Hareketi Test Problemi

Soliton dalgasının hareketi test probleminde $q = 2$, $S = 4$, $\alpha = 1$ seçimleri yapılarak $-30 \leq x \leq 30$ konum aralığı üzerinde programlar $t = 1$ zamanına kadar çalıştırılacaktır. Bu durumda soliton dalgasının hareketi test problemi için analitik çözüm (3.71) eşitliğinden

$$u(x, t) = \exp\left(i\left(2x - \frac{15}{4}t\right)\right) \operatorname{sech}[(x - 4t)]$$

olacaktır. $t = 0$ alındığında başlangıç şartı ise

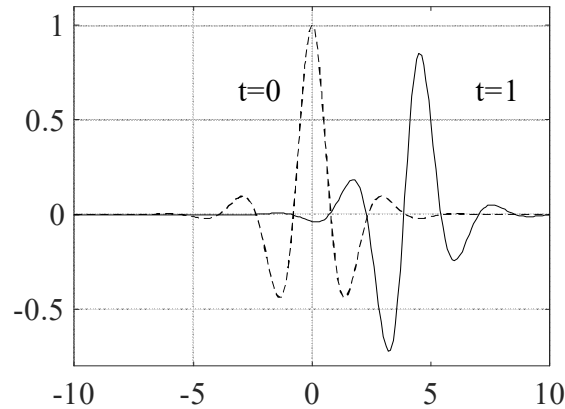
$$u(x, 0) = \exp(i(2x)) \operatorname{sech}(x)$$

olacaktır. NLS denkleminin korunum sabitlerinin analitik değerleri başlangıç şartı kullanılarak Maple paket programı yardımı ile

$$C_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dx = 2,$$

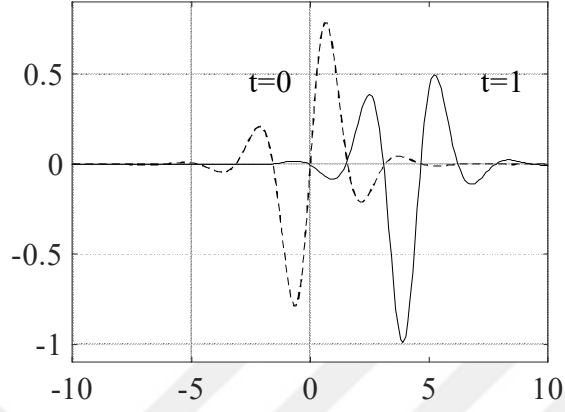
$$C_2 = \int_{-\infty}^{\infty} |u_x|^2 - \frac{1}{2}q|u|^4 dx = \frac{22}{3} \approx 7.333333333$$

olarak bulunur. Şekil 4.1'de $t = 0$ ve $t = 1$ zamanlarında $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ seçimleri yapılarak $-30 \leq x \leq 30$ aralığında Metot 1 için bilinmeyen U fonksiyonunun reel kısmı çizilmiştir.



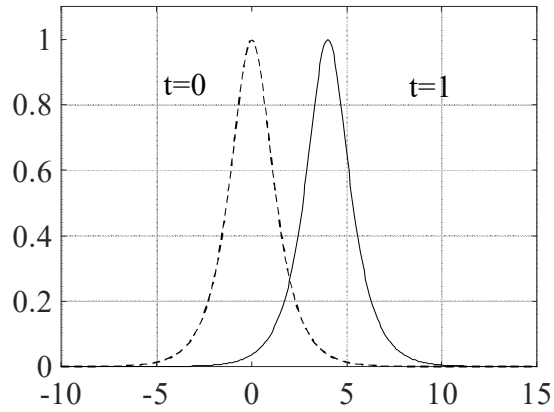
Şekil 4.1 : $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $t = 0$ ve $t = 1$ zamanındaki U_r

Şekil 4.2’de $t = 0$ ve $t = 1$ zamanlarında $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ seçimleri yapılarak $-30 \leq x \leq 30$ aralığında Metot 1 için bilinmeyen U fonksiyonunun sanal kısmı çizilmiştir.



Şekil 4.2 : $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $t = 0$ ve $t = 1$ zamanındaki U_s

Şekil 4.3’de $t = 0$ ve $t = 1$ zamanlarında $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ seçimleri yapılarak $-30 \leq x \leq 30$ aralığında Metot 1 için bilinmeyen U fonksiyonunun modülü çizilmiştir. Şekil 4.3 aynı zamanda bir soliton dalgasına karşılık gelmektedir. Şekilden de görüldüğü gibi dalganın hızı $S = 4$ olduğundan soliton dalgası $t = 0$ dan $t = 1$ ’e 4 birim yol almıştır.



Şekil 4.3 : $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $t = 0$ ve $t = 1$ zamanındaki $|U|$

Metot 2 ve sonraki bölümlerde önerilecek diğer metotlar için bilinmeyen U fonksiyonunun reel, sanal ve modülünün şekli görsel olarak bir farklılık oluşmadığından tekrar çizilmeyecektir.

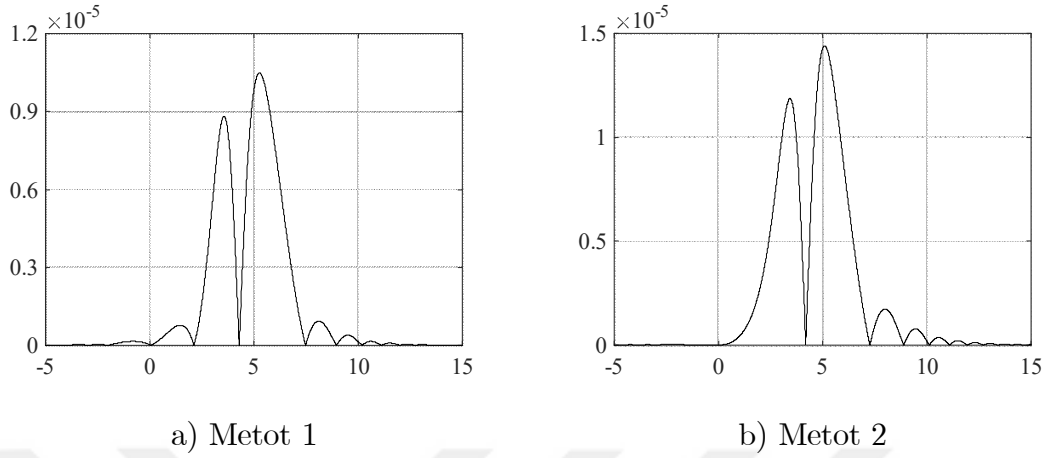
İlk olarak $-30 \leq x \leq 30$ tanım aralığında sabit $h = 0.005$ ve farklı Δt değerleri için programlar çalıştırılmış ve elde edilen L_∞ hata normu, korunum sabitleri ve yakınsaklık oranları Çizelge 4.1’de verilmiştir. Çizelge 4.1 incelendiğinde zaman artım uzunluğu azaldıkça hataların her iki metot için de azaldığı, korunum sabitlerinin analitik değere yaklaştığı ve yakınsaklık oranının ise Crank Nicolson zaman parçalanmasının doğruluğu olan 2 civarında olduğu görülebilir.

Çizelge 4.1 : $h = 0.005$ ve farklı zaman artımları için hata normları, korunum sabitleri ve yakınsaklık oranları

Metot 1				
Δt	C_1	C_2	L_∞	Y.O
0.1	1.9958141853	7.2816352215	1.12×10^{-1}	-
0.05	1.9997574728	7.3309224119	2.72×10^{-2}	2.04
0.02	1.9999939800	7.3334398113	4.22×10^{-3}	2.03
0.01	1.9999996255	7.3334974744	1.05×10^{-3}	2.01
0.005	1.9999999766	7.3335009208	2.62×10^{-4}	2.00
0.002	1.9999999994	7.3335011160	4.20×10^{-5}	2.00
0.001	2.0000000000	7.3335011167	1.05×10^{-5}	2.00
Tam	2	7.3333333333	0	
Metot 2				
Δt	C_1	C_2	L_∞	Y.O
0.1	2.0559950916	7.6977809720	1.65×10^{-1}	-
0.05	2.0063580970	7.3655344969	3.60×10^{-2}	2.19
0.02	2.0003960347	7.3353395466	5.72×10^{-3}	2.01
0.01	2.0000491443	7.3337231380	1.43×10^{-3}	2.00
0.005	2.0000061214	7.3335284007	3.59×10^{-4}	2.00
0.002	2.0000003909	7.3335028467	5.76×10^{-5}	2.00
0.001	2.0000000488	7.3335013318	1.44×10^{-5}	2.00
Tam	2	7.3333333333	0	

Şekil 4.4’de $h = 0.005$ ve $\Delta t = 0.001$ için $t = 1$ zamanındaki mutlak hatalar çizilmiştir. Şekil incelendiğinde hataların her iki metot için de orta kısımlarda geldiği

görülmektedir. Bu sebeple sınır şartlarından kaynaklı bir hata oluşmadığı söylenebilir.



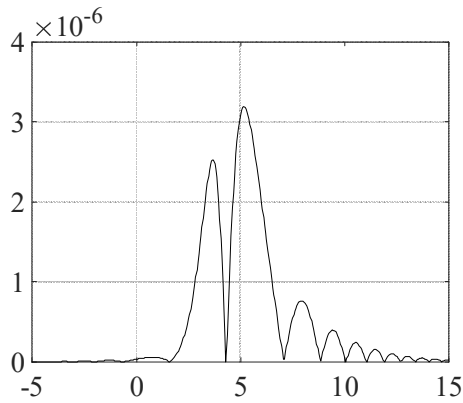
Şekil 4.4 : $h = 0.005$ ve $\Delta t = 0.001$ için $t = 1$ zamanındaki mutlak hatalar

Programlar $-30 \leq x \leq 30$ tanım aralığında sabit $\Delta t = 0.00001$ ve farklı h değerleri için çalıştırılmış ve L_∞ hata normu, korunum sabitleri ve yakınsaklık oranları Çizelge 4.2'de verilmiştir. Çizelge 4.2 incelendiğinde konum artım uzunluğu azaldıkça hataların her iki metot için de azaldığı görülebilir. Korunum sabitlerinin $h = 1$ için iyi sonuçlar vermediği ancak konum artım uzunluğu azaldıkça daha iyi sonuçlar verdiği görülebilir. Yaklaşık olarak hesaplanan integrallerde konum artım $h = 1$ olarak alındığında sadece 60 alt aralık üzerinden hesaplama yapıldığından korunum sabitleri iyi sonuçlar vermemektedir. Konum artımı olan h değeri küçüldükçe yaklaşık integral hesabındaki hata da küçülmektedir. Her iki metot için bulunan yakınsama oranları incelendiğinde oranların 4 civarında olduğu görülmektedir.

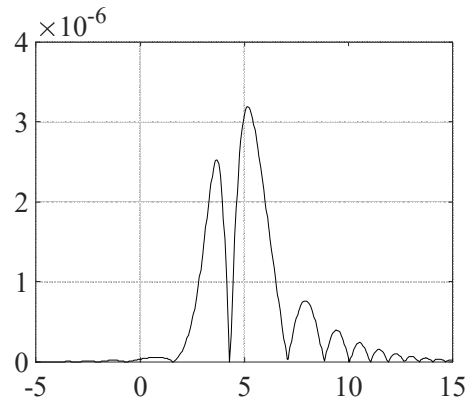
Şekil 4.5'de $\Delta t = 0.00001$ ve $h = 0.05$ için $t = 1$ zamanındaki mutlak hatalar çizilmiştir. Şekilden, hataların her iki metot için de orta kısımlarda geldiği görüldüğünden sınır şartlarından kaynaklı bir hata oluşmamaktadır.

Çizelge 4.2 : $\Delta t = 0.00001$ ve farklı konum artımları için
hata normları, korunum sabitleri ve yakınsaklık oranları

Metot 1				
h	C_1	C_2	L_∞	Y.O
1	2.1855865077	364.2792712398	5.93×10^{-1}	-
0.5	2.0018291487	9.8531298554	4.90×10^{-2}	3.60
0.2	2.0000005284	7.6130591367	8.96×10^{-4}	4.37
0.1	2.0000000018	7.4011361116	5.19×10^{-5}	4.11
0.05	2.0000000000	7.3501541167	3.19×10^{-6}	4.03
Tam	2	7.3333333333	0	
Metot 2				
h	C_1	C_2	L_∞	Y.O
1	2.1699778547	363.4024841472	5.93×10^{-1}	-
0.5	2.0018291485	9.8531298347	4.90×10^{-2}	3.60
0.2	2.0000005284	7.6130591366	8.96×10^{-4}	4.37
0.1	2.0000000018	7.4011361116	5.19×10^{-5}	4.11
0.05	2.0000000000	7.3501541167	3.19×10^{-6}	4.03
Tam	2	7.3333333333	0	



a) Metot 1



b) Metot 2

Şekil 4.5 : $\Delta t = 0.00001$ ve $h = 0.05$ için $t = 1$ zamanındaki mutlak hatalar

4.5. İki Soliton Dalgasının Çarpışması Test Problemi

İki soliton dalgasının çarpışması test probleminde

$$q = 2, \alpha_1 = \alpha_2 = 1, S_1 = 4, \tilde{x}_1 = -10, S_2 = -4, \tilde{x}_2 = 10$$

parametreleri seçilerek $-30 \leq x \leq 30$ konum aralığı üzerinde programlar $t = 5$ zamanına kadar çalıştırılacaktır. Bu durumda iki soliton dalgasının çarpışması test problemi için başlangıç şartı

$$u(x, 0) = \exp(2i(x + 10)) \operatorname{sech}(x + 10) + \exp(-2i(x - 10)) \operatorname{sech}(x - 10)$$

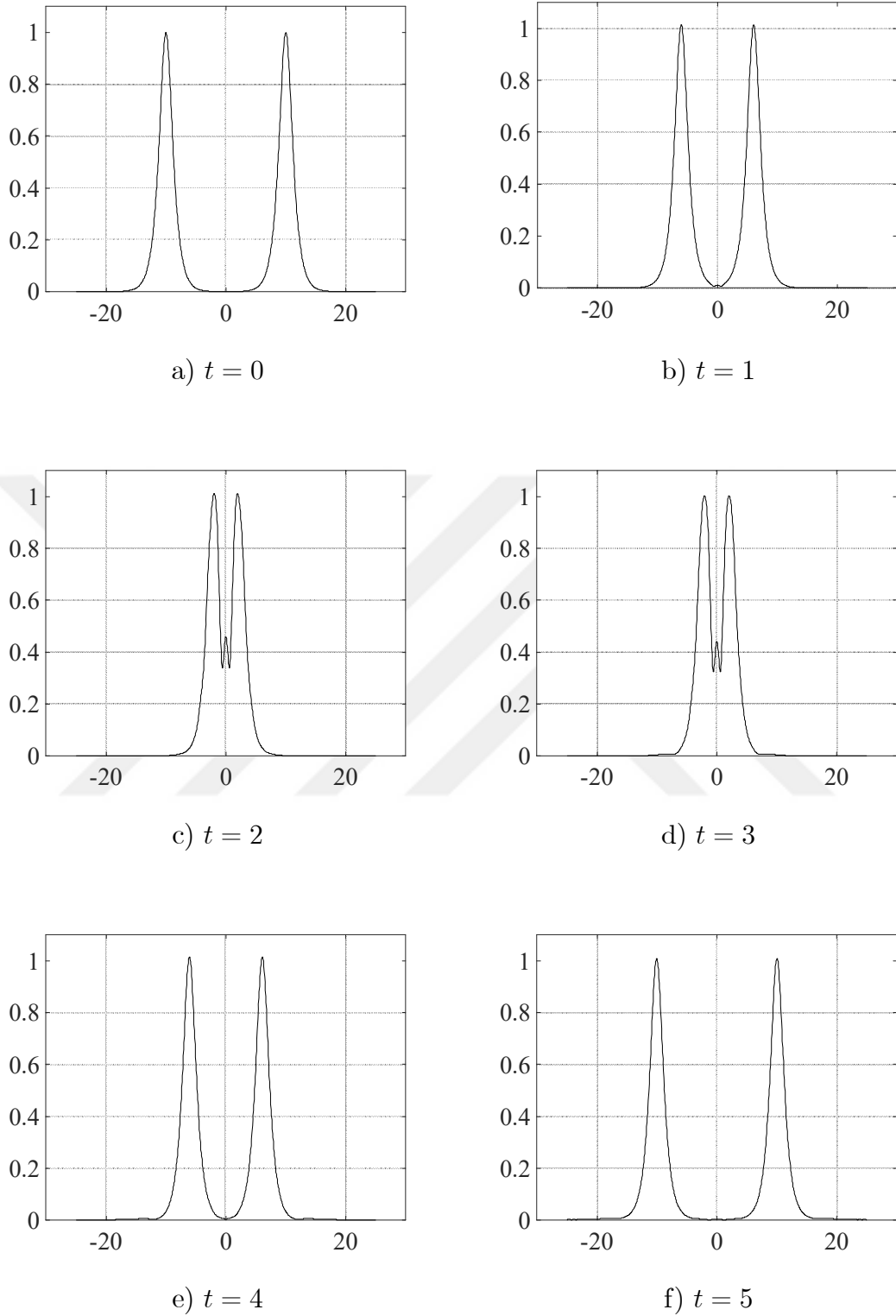
olacaktır. $u(x, 0)$ fonksiyonun modülü genlik değerleri 1 ve tepe noktaları $x = -10$ ile $x = 10$ noktalarına karşılık gelen iki soliton dalgasının zıt yönlerde birbirlerine doğru hareketini modellemektedir. İki soliton dalgasının çarpışması test probleminde korunum sabitlerinin analitik değerleri başlangıç şartının kullanılmasıyla Maple paket programı yardımıyla

$$C_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dx = 4,$$

$$C_2 = \int_{-\infty}^{\infty} |u_x|^2 - \frac{1}{2}q|u|^4 dx \approx 14.6666666667$$

olarak bulunur.

$t = 0, t = 1, t = 2, t = 3, t = 4, t = 5$ zamanlarında $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ seçimleri yapılarak $-30 \leq x \leq 30$ aralığında Metot 1 için bilinmeyen U fonksiyonunun modülünün grafiği Şekil 4.6'da çizilmiştir. Şekil 4.6 incelendiğinde $t = 0$ anında tepe noktaları $x = -10$ ve $x = 10$ noktasına karşılık gelen 1 genlikli iki soliton dalgasının hareketi görülmektedir. Soliton dalgalar zamanla birbirlerine doğru hareket etmekte ve sonrasında bir çarpışma gerçekleşmektedir. Çarpışma sonrasında ise soliton dalgalar hareketlerine zıt yönde ve şekillerinde bir bozulma olmadan devam etmektedirler. Metot 2 ve sonraki bölümlerde diğer metotlar kullanıldığında görsel olarak herhangi bir fark oluşmadığından bu bölümde Metot 1 için elde edilen iki soliton dalgasının çarpışmasının şekli tekrar çizilmeyecektir.



Şekil 4.6 : $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için soliton dalgasının çarpışması

Çizelge 4.3'te $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için bazı zamanlardaki korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri Metot 1 ve Metot 2 için verilmiştir. Korunum sabitlerinin zaman içerisinde sabit kalması gerekmektedir. Her iki metot için korunum sabitlerinin sayısal

değerlerinin iki soliton dalgasının hareketi, çarpışması ve sonrasında birbirlerinden ayrılarak hareketlerine devam ettikleri süre boyunca hemen hemen sabit kaldıkları söylenebilir. Bununla birlikte sayısal sonuçların C_1 için tam sonuca yakın ve C_2 için yakın olmadığı görülebilir.

Çizelge 4.3 : $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için bazı zamanlardaki korunum sabitleri

Metot 1			Metot 2	
t	C_1	C_2	C_1	C_2
0	4.0000000001	14.8022792924	4.0000000001	14.8022792924
1	3.9999992258	14.8023997916	4.0000981926	14.8028488168
2	4.0000060158	14.8034459285	4.0001882603	14.8040797868
3	4.0000020017	14.8027373274	4.0003047203	14.8040482585
4	3.9999990563	14.8024182809	4.0004060021	14.8042974844
5	3.9999994111	14.8023658179	4.0005035158	14.8046980732
Tam	4	14.6666666667	4	14.6666666667

Çizelge 4.4'te ise aynı $\Delta t = 0.01$ değeri ile bu kez $h = 0.01$ konum artımı için bazı zamanlardaki korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri Metot 1 ve Metot 2 için verilmiştir. h daha küçük seçildiğinden daha fazla alt aralık üzerinden hesaplama yapılacaktır. Daha küçük konum artımı seçildiğinde korunum sabitlerinin yaklaşık değerlerinin analitik değerlere daha çok yaklaştığı Çizelge 4.3 ile Çizelge 4.4'ün karşılaştırmasından görülebilmektedir.

Çizelgelerden de görülebileceği gibi zaman artım uzunluğu aynı iken konum artımının daha küçük seçildiği durumda, korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri analitik değerlere daha fazla yaklaşmaktadır.

Çizelge 4.4 : $h = 0.01$ ve $\Delta t = 0.01$ için bazı zamanlardaki korunum sabitleri

Metot 1			Metot 2	
t	C_1	C_2	C_1	C_2
0	4.0000000001	14.6680090250	4.0000000001	14.6680090250
1	3.9999992515	14.6680027335	4.0000982884	14.6684540631
2	4.0000065049	14.6680817548	4.0001888508	14.6687523590
3	4.0000021478	14.6680358767	4.0003049949	14.6693675803
4	3.9999990804	14.6679971819	4.0004061299	14.6698692122
5	3.9999994314	14.6679992477	4.0005036052	14.6702942054
Tam	4	14.6666666667	4	14.6666666667

5. NLS DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ İÇİN KÜBİK TRİGONOMETRİK B-SPLİNE GALERKİN METODU

Bu bölümde, NLS denkleminin sayısal çözümü için zaman parçalanması yapılırken Crank Nicolson yöntemi, konuma göre parçalanma yapılırken ise bir önceki bölümden farklı olarak kübik trigonometrik B-spline Galerkin metodu kullanılmıştır.

5.1. İç İterasyonlu Lineerleştirme (Metot 3)

Bir önceki bölümde NLS denkleminin zaman parçalanması için Crank Nicolson yöntemi uygulanmış, elde edilen denklem ağırlık fonksiyonu ile çarpılarak konum aralığı üzerinde integrali alınmış ve böylece

$$\begin{aligned} & \int_a^b W(x) \left[s^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} (r_{xx})^{n+1} - q \frac{\Delta t}{2} ((r^2 + s^2) r)^{n+1} \right] dx \\ &= \int_a^b W(x) \left[s^n + \frac{\Delta t}{2} (r_{xx})^n + q \frac{\Delta t}{2} ((r^2 + s^2) r)^n \right] dx, \end{aligned} \quad (4.8)$$

ve

$$\begin{aligned} & \int_a^b W(x) \left[r^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} (s_{xx})^{n+1} + q \frac{\Delta t}{2} ((r^2 + s^2) s)^{n+1} \right] dx \\ &= \int_a^b W(x) \left[r^n - \frac{\Delta t}{2} (s_{xx})^n - q \frac{\Delta t}{2} ((r^2 + s^2) s)^n \right] dx \end{aligned} \quad (4.9)$$

denklemleri elde edilmiştir.

$m = 0, 1, \dots, N - 1$ olmak üzere $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde kübik trigonometrik B-spline taban fonksiyonlarının kullanıldığı

$$U(x, t) = r(x, t) + is(x, t) = \sum_{i=m-1}^{m+2} T_i^3(x) \delta_i$$

yaklaşımı için

$$\delta = \sigma + i\rho$$

alınırsa

$$r = \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j^3 \sigma_j \quad (5.1)$$

$$s = \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j^3 \rho_j \quad (5.2)$$

elde edilir. Bölümün başında verilen (4.8) ve (4.9) denklemlerindeki $W(x)$ ağırlık fonksiyonu yerine kübik trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları, r ve s bilinmeyenleri yerine ise (5.1) ve (5.2) eşitlikleri kullanıldığında $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerindeki yaklaşımlar

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j dx \right) \rho_j^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j'' dx \right) \sigma_j^{n+1} \right. \\ & - \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+2} \sum_{l=m-1}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i [T_k \rho_k^{n+1} T_l \rho_l^{n+1} + T_k \sigma_k^{n+1} T_l \sigma_l^{n+1}] T_j dx \right) \sigma_j^{n+1} \left. \right\} \\ & - \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j dx \right) \rho_j^n + \frac{\Delta t}{2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j'' dx \right) \sigma_j^n \right. \\ & \left. + \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+2} \sum_{l=m-1}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i [T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n + T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n] T_j dx \right) \sigma_j^n \right\} \end{aligned} \quad (5.3)$$

ve

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j dx \right) \sigma_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j'' dx \right) \rho_j^{n+1} \right. \\ & \left. + \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+2} \sum_{l=m-1}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i [T_k \rho_k^{n+1} T_l \rho_l^{n+1} + T_k \sigma_k^{n+1} T_l \sigma_l^{n+1}] T_j dx \right) \rho_j^{n+1} \right\} \\ & - \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j dx \right) \sigma_j^n - \frac{\Delta t}{2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j'' dx \right) \rho_j^n \right. \\ & \left. - \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+2} \sum_{l=m-1}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i [T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n + T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n] T_j dx \right) \rho_j^n \right\} \end{aligned} \quad (5.4)$$

olarak elde edilir. (5.3) ve (5.4) yaklaşımlarında hesaplanması gereken integrallerin alt bölünme aralıklarından bağımsız olarak hesaplanabilmesi için

$$\xi = x - x_m$$

dönüşümü yapılırsa $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[0, h]$ aralığına dönüştür. Bu durumda (5.3) ve (5.4) yaklaşımları

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \left(\int_0^h T_i T_j d\xi \right) \rho_j^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} \left(\int_0^h T_i T_j'' d\xi \right) \sigma_j^{n+1} \right. \\
& - \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+2} \sum_{l=m-1}^{m+2} \left(\int_0^h T_i [T_k \rho_k^{n+1} T_l \rho_l^{n+1} + T_k (\sigma_k^{n+1}) T_l (\sigma_l^{n+1})] T_j d\xi \right) \sigma_j^{n+1} \left. \right\} \\
& - \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \left(\int_0^h T_i T_j d\xi \right) \rho_j^n + \frac{\Delta t}{2} \left(\int_0^h T_i T_j'' d\xi \right) \sigma_j^n \right. \\
& \left. + \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+2} \sum_{l=m-1}^{m+2} \left(\int_0^h T_i [T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n + T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n] T_j d\xi \right) \sigma_j^n \right\}
\end{aligned} \tag{5.5}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \left(\int_0^h T_i T_j d\xi \right) \sigma_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \left(\int_0^h T_i T_j'' d\xi \right) \rho_j^{n+1} \right. \\
& \left. + \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+2} \sum_{l=m-1}^{m+2} \left(\int_0^h T_i [T_k \rho_k^{n+1} T_l \rho_l^{n+1} + T_k \sigma_k^{n+1} T_l \sigma_l^{n+1}] T_j d\xi \right) \rho_j^{n+1} \right\} \\
& - \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \left(\int_0^h T_i T_j d\xi \right) \sigma_j^n - \frac{\Delta t}{2} \left(\int_0^h T_i T_j'' d\xi \right) \rho_j^n \right. \\
& \left. - \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+2} \sum_{l=m-1}^{m+2} \left(\int_0^h T_i [T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n + T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n] T_j d\xi \right) \rho_j^n \right\}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

olarak elde edilir. (5.5) ve (5.6) ifadelerindeki integrallerin hesaplanması için (3.25-3.28) eşitliklerinde verilen $T_{m-1}(\xi)$, $T_m(\xi)$, $T_{m+1}(\xi)$ ve $T_{m+2}(\xi)$ kübik trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları kullanılacaktır. Bu durumda her bir alt aralıktaki eleman matrislerinin her bir elemanı $i, j : m-1, m, m+1, m+2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
A_{ij}^e &= \int_0^h T_i T_j d\xi, \\
B_{ij}^e &= \int_0^h T_i T_j'' d\xi, \\
C_{ij}^e &= \int_0^h T_i \sum_{k=m-1}^{m+2} \sum_{l=m-1}^{m+2} [T_k \rho_k^{n+1} T_l \rho_l^{n+1} + T_k \sigma_k^{n+1} T_l \sigma_l^{n+1}] T_j d\xi \\
D_{ij}^e &= \int_0^h T_i \sum_{k=m-1}^{m+2} \sum_{l=m-1}^{m+2} [T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n + T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n] T_j d\xi
\end{aligned} \tag{5.7}$$

olarak alınırsa, (5.5) ve (5.6) yaklaşımları

$$\begin{aligned}\sigma^e &= (\sigma_{m-1}, \sigma_m, \sigma_{m+1}, \sigma_{m+2})^T \\ \rho^e &= (\rho_{m-1}, \rho_m, \rho_{m+1}, \rho_{m+2})^T\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}A^e (\rho^e)^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} B^e (\sigma^e)^{n+1} - \frac{\Delta tq}{2} C^e (\sigma^e)^{n+1} \\ - \left(A^e (\rho^e)^n + \frac{\Delta t}{2} B^e (\sigma^e)^n + \frac{\Delta tq}{2} D^e (\sigma^e)^n \right),\end{aligned}\quad (5.8)$$

ve

$$\begin{aligned}A^e (\sigma^e)^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} B^e (\rho^e)^{n+1} + \frac{\Delta tq}{2} C^e (\rho^e)^{n+1} \\ - \left(A^e (\sigma^e)^n - \frac{\Delta t}{2} B^e (\rho^e)^n - \frac{\Delta tq}{2} D^e (\rho^e)^n \right)\end{aligned}\quad (5.9)$$

olarak eleman matrisleriyle yazılabilir. (5.8) ve (5.9) yaklaşımlarında bulunan eleman matrislerinin $m = 0, 1, \dots, N - 1$ için birbirlerine eklenmesi sonucunda

$$\begin{aligned}\sigma &= (\sigma_{-1}, \sigma_0, \dots, \sigma_{N-1}, \sigma_N, \sigma_{N+1})^T \\ \rho &= (\rho_{-1}, \rho_0, \dots, \rho_{N-1}, \rho_N, \rho_{N+1})^T\end{aligned}$$

olmak üzere

$$A\rho^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} B\sigma^{n+1} - \frac{\Delta tq}{2} C\sigma^{n+1} = A\rho^n + \frac{\Delta t}{2} B\sigma^n + \frac{\Delta tq}{2} D\sigma^n, \quad (5.10)$$

$$A\sigma^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} B\rho^{n+1} + \frac{\Delta tq}{2} C\rho^{n+1} = A\sigma^n - \frac{\Delta t}{2} B\rho^n - \frac{\Delta tq}{2} D\rho^n \quad (5.11)$$

elde edilir. (5.10) ve (5.11) denklemlerinden oluşan denklem sistemi $2N + 6$ denklem ve $2N + 6$ bilinmeyenden oluşan ve her bir satırında en fazla 14 elemanı sıfırdan farklı olan bir sistemdir. Sınır şartlarını sisteme adapte etmek için sistemdeki ilk iki ve son iki denklem silinip bölgenin uç noktalarındaki

$$U(a, t) = r(a, t) + is(a, t) = 0,$$

$$U(b, t) = r(b, t) + is(b, t) = 0$$

sınır şartları kullanılarak σ_{-1}, ρ_{-1} ve σ_{N+1}, ρ_{N+1} yok edilirse denklem sistemi $2N + 2$ denklem ve $2N + 2$ bilinmeyenden oluşan bir denklem sistemine indirgenmiş olur. Sınır şartları uygulandıktan sonra denklem sisteminin çözülebilmesi öncelikle

$$(\sigma_{-1}^0, \rho_{-1}^0, \sigma_0^0, \rho_0^0, \dots, \sigma_{N-1}^0, \rho_{N-1}^0, \sigma_N^0, \rho_N^0, \sigma_{N+1}^0, \rho_{N+1}^0)$$

olarak $2N + 6$ bilinmeyenden oluşan başlangıç bilinmeyenler vektörü bulunmalıdır. Bunun için NLS denkleminin başlangıç şartı olan

$$U(x_j, 0) = r(x_j, 0) + is(x_j, 0) = f(x_j), \quad j = 0, 1, 2, \dots, N$$

ve

$$U_x(a, t) = r_x(a, 0) + is_x(a, 0) = f'(a),$$

$$U_x(b, t) = r_x(b, 0) + is_x(b, 0) = f'(b)$$

sınır şartları kullanılabilir. Başlangıç vektörü bulunurken

$$r(x_j, 0), s(x_j, 0), r_x(a, 0), s_x(a, 0), r_x(b, 0), s_x(b, 0)$$

bilinmeyenleri yerine kübik trigonometrik B-spline eşitlikleri kullanılacaktır. Başlangıç vektörü bulunduktan sonra (5.10) ve (5.11) denklem sisteminin çözülebilmesi için önerilen lineerleştirme ise Metot 1'de yapılan lineerleştirme ile aynıdır.

Denklem sisteminin çözülmesiyle bulunan

$$(\sigma_{-1}^{n+1}, \rho_{-1}^{n+1}, \sigma_0^{n+1}, \rho_0^{n+1}, \dots, \sigma_{N-1}^{n+1}, \rho_{N-1}^{n+1}, \sigma_N^{n+1}, \rho_N^{n+1}, \sigma_{N+1}^{n+1}, \rho_{N+1}^{n+1})$$

bilinmeyenler vektörü kullanılarak istenilen zamanlardaki $x = x_m$ noktasındaki bilinmeyen U_m^{n+1} fonksiyonu, bölünme noktalarındaki kübik trigonometrik B-spline fonksiyonu kullanılarak bulunur.

5.2. Rubin Graves Lineerlestirmesi (Metot 4)

Bir önceki bölümde NLS denkleminin zaman parçalanması için Crank Nicolson yöntemi uygulanmış ve lineerleştirme için Rubin Graves tarafından önerilen yaklaşım kullanılmış, elde edilen denklem ağırlık fonksiyonu ile çarpılarak konum aralığı üzerinde integrali alınmış ve böylece

$$\begin{aligned} & \int_a^b W(x) \left[s^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} (r_{xx})^{n+1} - \frac{q\Delta t}{2} ((3r^n r^n + s^n s^n) r^{n+1} + 2r^n s^n s^{n+1}) \right] dx \\ &= \int_a^b W(x) \left[s^n + \frac{\Delta t}{2} (r_{xx})^n - \frac{q\Delta t}{2} (r^n r^n + s^n s^n) r^n \right] dx \end{aligned} \quad (4.31)$$

ve

$$\begin{aligned}
& \int_a^b W(x) \left[r^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} (s_{xx})^{n+1} + \frac{q\Delta t}{2} ((3s^n s^n + r^n r^n) s^{n+1} + 2s^n r^n r^{n+1}) \right] dx \\
& = \int_a^b W(x) \left[r^n - \frac{\Delta t}{2} (s_{xx})^n + \frac{q\Delta t}{2} (r^n r^n + s^n s^n) s^n \right] dx
\end{aligned} \tag{4.32}$$

eşitliklerine ulaşılmıştı. Bir önceki alt bölümde elde edilen

$$\begin{aligned}
r &= \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j^3 \sigma_j \\
s &= \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j^3 \rho_j
\end{aligned}$$

eşitlikleri ile birlikte $W(x)$ ağırlık fonksiyonu yerine kübik trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları kullanıldığında, (4.29) ve (4.30) denklemleri için $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerindeki yaklaşımlar

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j d\xi \right) \rho_j^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j'' d\xi \right) \sigma_j^{n+1} \right. \\
& - \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+2} \sum_{l=m-1}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i [3T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n + T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi \right) \sigma_j^{n+1} \\
& \left. - \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+2} \sum_{l=m-1}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i [2T_k \sigma_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi \right) \rho_j^{n+1} \right\} \\
& - \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j d\xi \right) \rho_j^n + \frac{\Delta t}{2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j'' d\xi \right) \sigma_j^n \right. \\
& \left. - \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+2} \sum_{l=m-1}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i [T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n + T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi \right) \sigma_j^n \right\}
\end{aligned} \tag{5.12}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j d\xi \right) \sigma_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j'' d\xi \right) \rho_j^{n+1} \right. \\
& + \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+2} \sum_{l=m-1}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i [T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n + 3T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi \right) \rho_j^{n+1} \\
& + \left. \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+2} \sum_{l=m-1}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i [2T_k \sigma_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi \right) \sigma_j^{n+1} \right\} \\
& - \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j d\xi \right) \sigma_j^n - \frac{\Delta t}{2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j'' d\xi \right) \rho_j^n \right. \\
& + \left. \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+2} \sum_{l=m-1}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i [T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n + T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n] T_j d\xi \right) \rho_j^n \right\}
\end{aligned} \tag{5.13}$$

olarak elde edilir. (5.12) ve (5.13) yaklaşımlarındaki hesaplanması gereken integrallerin alt bölünme aralıklarından bağımsız olarak hesaplanabilmesi için

$$\xi = x - x_m$$

dönüşümü yapılırsa $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[0, h]$ aralığına dönüşür. Bu durumda

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \left(\int_0^h T_i T_j d\xi \right) \rho_j^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} \left(\int_0^h T_i T_j'' d\xi \right) \sigma_j^{n+1} \right. \\
& - \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+2} \sum_{l=m-1}^{m+2} \left(\int_0^h T_i [3T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n + T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi \right) \sigma_j^{n+1} \\
& - \left. \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+2} \sum_{l=m-1}^{m+2} \left(\int_0^h T_i [2T_k \sigma_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi \right) \rho_j^{n+1} \right\} \\
& - \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \left(\int_0^h T_i T_j d\xi \right) \rho_j^n + \frac{\Delta t}{2} \left(\int_0^h T_i T_j'' d\xi \right) \sigma_j^n \right. \\
& - \left. \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+2} \sum_{l=m-1}^{m+2} \left(\int_0^h T_i [T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n + T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi \right) \sigma_j^n \right\}
\end{aligned} \tag{5.14}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \left(\int_0^h T_i T_j d\xi \right) \sigma_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \left(\int_0^h T_i T_j'' d\xi \right) \rho_j^{n+1} \right. \\
& + \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+2} \sum_{l=m-1}^{m+2} \left(\int_0^h T_i [T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n + 3T_k \rho_k^{n+1} T_l \rho_l^{n+1}] T_j d\xi \right) \rho_j^{n+1} \\
& + \left. \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+2} \sum_{l=m-1}^{m+2} \left(\int_0^h T_i [2T_k \sigma_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi \right) \sigma_j^{n+1} \right\} \\
& - \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \left(\int_0^h T_i T_j d\xi \right) \sigma_j^n - \frac{\Delta t}{2} \left(\int_0^h T_i T_j'' d\xi \right) \rho_j^n \right. \\
& + \left. \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+2} \sum_{l=m-1}^{m+2} \left(\int_0^h T_i [T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n + T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n] T_j d\xi \right) \rho_j^n \right\}
\end{aligned} \tag{5.15}$$

ifadeleri elde edilir. (5.14) ve (5.15) ifadelerindeki integrallerin hesaplanması için Metot 3'te olduğu gibi $T_{m-1}(\xi)$, $T_m(\xi)$, $T_{m+1}(\xi)$ ve $T_{m+2}(\xi)$ kübik trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları kullanılacaktır. Bu durumda her bir alt aralıktaki eleman matrislerinin her bir elemanı $i, j : m-1, m, m+1, m+2$ ve

$$\begin{aligned}
A_{ij}^e &= \int_0^h T_i T_j d\xi, \\
B_{ij}^e &= \int_0^h T_i' T_j' d\xi, \\
C_{ij}^e &= \int_0^h T_i \sum_{k=m-1}^{m+2} \sum_{l=m-1}^{m+2} [3T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n + T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi, \\
D_{ij}^e &= \int_0^h T_i \sum_{k=m-1}^{m+2} \sum_{l=m-1}^{m+2} [2T_k \sigma_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi, \\
E_{ij}^e &= \int_0^h T_i \sum_{k=m-1}^{m+2} \sum_{l=m-1}^{m+2} [T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n + T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi, \\
F_{ij}^e &= \int_0^h T_i \sum_{k=m-1}^{m+2} \sum_{l=m-1}^{m+2} [T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n + 3T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi
\end{aligned}$$

olarak alınırsa, (5.14) ve (5.15) yaklaşımları

$$\begin{aligned}
\sigma^e &= (\sigma_{m-1}, \sigma_m, \sigma_{m+1}, \sigma_{m+2})^T \\
\rho^e &= (\rho_{m-1}, \rho_m, \rho_{m+1}, \rho_{m+2})^T
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$A^e (\rho^e)^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} B^e (\sigma^e)^{n+1} - \frac{\Delta t q}{2} C^e (\sigma^e)^{n+1} - \frac{\Delta t q}{2} D^e (\sigma^e)^{n+1} - \left(A^e (\rho^e)^n + \frac{\Delta t}{2} B^e (\sigma^e)^n - \frac{\Delta t q}{2} E^e (\sigma^e)^n \right), \quad (5.16)$$

ve

$$A^e (\sigma^e)^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} B^e (\rho^e)^{n+1} + \frac{\Delta t q}{2} F^e (\rho^e)^{n+1} + \frac{\Delta t q}{2} D^e (\rho^e)^{n+1} - \left(A^e (\sigma^e)^n - \frac{\Delta t}{2} B^e (\rho^e)^n + \frac{\Delta t q}{2} E^e (\rho^e)^n \right) \quad (5.17)$$

şeklinde eleman matrisleriyle yazılabilir. (5.16) ve (5.17) yaklaşımlarında bulunan eleman matrislerinin $m = 0, 1, \dots, N - 1$ için uygun şekilde birbirlerine eklenmesi sonucunda

$$\begin{aligned} \sigma &= (\sigma_{-1}, \sigma_0, \dots, \sigma_{N-1}, \sigma_N, \sigma_{N+1})^T \\ \rho &= (\rho_{-1}, \rho_0, \dots, \rho_{N-1}, \rho_N, \rho_{N+1})^T \end{aligned}$$

olmak üzere

$$A\rho^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} B\sigma^{n+1} - \frac{\Delta t q}{2} C\sigma^{n+1} - \frac{\Delta t q}{2} D\sigma^{n+1} = A\rho^n + \frac{\Delta t}{2} B\sigma^n - \frac{\Delta t q}{2} E\sigma^n \quad (5.18)$$

ve

$$A\sigma^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} B\rho^{n+1} + \frac{\Delta t q}{2} F\rho^{n+1} + \frac{\Delta t q}{2} D\rho^{n+1} = A\sigma^n - \frac{\Delta t}{2} B\rho^n + \frac{\Delta t q}{2} E\rho^n \quad (5.19)$$

elde edilir. (5.18) ve (5.19) denklemlerinden oluşan denklem sistemi Metot 3'te olduğu gibi $2N + 6$ denklem ve $2N + 6$ bilinmeyenden oluşan ve her bir satırında en fazla 14 elemanı sıfırdan farklı olan bir sistemdir. Sınır şartlarının sisteme adapte edilmesi ve denklem sisteminin çözülebilmesi için ilk olarak bulunması gereken

$$(\sigma_{-1}^0, \rho_{-1}^0, \sigma_0^0, \rho_0^0, \dots, \sigma_{N-1}^0, \rho_{N-1}^0, \sigma_N^0, \rho_N^0, \sigma_{N+1}^0, \rho_{N+1}^0)$$

başlangıç bilinmeyenler vektörünün bulunması için yapılacak işlemler Metot 3'te yapılanlar ile aynıdır. Denklem sisteminin çözülmesiyle bulunan

$$(\sigma_{-1}^{n+1}, \rho_{-1}^{n+1}, \sigma_0^{n+1}, \rho_0^{n+1}, \dots, \sigma_{N-1}^{n+1}, \rho_{N-1}^{n+1}, \sigma_N^{n+1}, \rho_N^{n+1}, \sigma_{N+1}^{n+1}, \rho_{N+1}^{n+1})$$

bilinmeyenler vektörü kullanılarak istenilen zamanlardaki $x = x_m$ noktasındaki bilinmeyen U_m^{n+1} fonksiyonu bölünme noktalarındaki kübik trigonometrik B-spline fonksiyonu kullanılarak Metot 3'te olduğu gibi bulunur.

5.3. Soliton Dalgasının Hareketi Test Problemi

Dördüncü bölümde olduğu gibi soliton dalgasının hareketi test probleminde $q = 2$, $S = 4$, $\alpha = 1$ seçimleri yapılarak $-30 \leq x \leq 30$ konum aralığı üzerinde programlar $t = 1$ zamanına kadar çalıştırılacaktır.

Öncelikle programlar $-30 \leq x \leq 30$ tanım aralığında sabit $h = 0.005$ ve farklı Δt değerleri için çalıştırılmış ve Metot 3 ile Metot 4 için L_∞ hata normu, korunum sabitleri ve yakınsaklık oranları Çizelge 5.1'de verilmiştir.

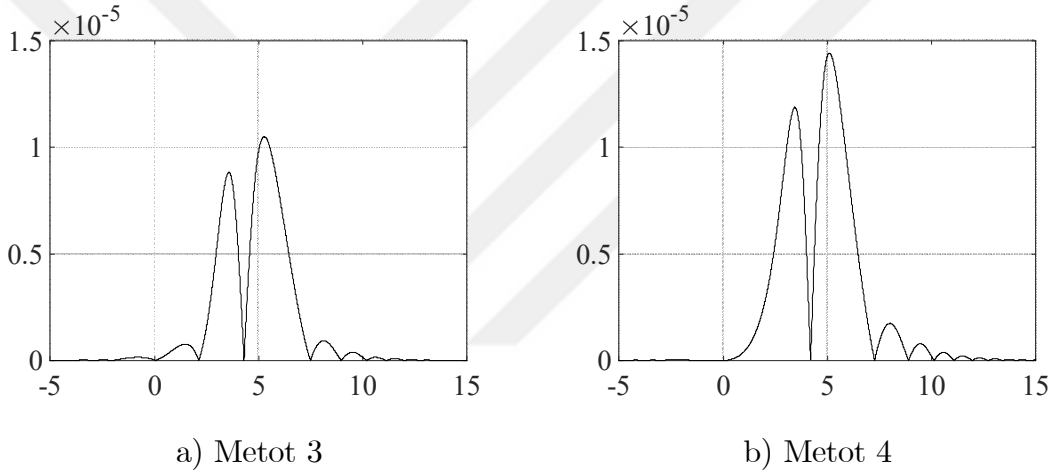
Çizelge 5.1 : $h = 0.005$ ve farklı zaman artımları için

hata normları, korunum sabitleri ve yakınsaklık oranları

Metot 3				
Δt	C_1	C_2	L_∞	Y.O
0.1	1.9958141859	7.2814507464	1.12×10^{-1}	-
0.05	1.9997574728	7.3307503990	2.72×10^{-2}	2.04
0.02	1.9999939804	7.3332713633	4.22×10^{-3}	2.04
0.01	1.9999996255	7.3333295250	1.05×10^{-3}	2.01
0.005	1.9999999766	7.3333330957	2.62×10^{-4}	2.00
0.002	1.9999999994	7.3333333257	4.20×10^{-5}	2.00
0.001	2.0000000000	7.3333333314	1.05×10^{-5}	2.00
Tam	2	7.3333333333	0	
Metot 4				
Δt	C_1	C_2	L_∞	Y.O
0.1	2.0559950917	7.6975721358	1.65×10^{-1}	-
0.05	2.0063580970	7.3653612747	3.60×10^{-2}	2.19
0.02	2.0003960347	7.3351710636	5.72×10^{-3}	2.01
0.01	2.0000491443	7.3335551900	1.43×10^{-3}	2.00
0.005	2.0000061214	7.3333605772	3.59×10^{-4}	2.00
0.002	2.0000003909	7.3333350567	5.76×10^{-5}	2.00
0.001	2.0000000488	7.3333335466	1.44×10^{-5}	2.00
Tam	2	7.3333333333	0	

Çizelge 5.1 incelendiğinde zaman artım uzunluğu azaldıkça hataların da her iki metot için de azaldığı, korunum sabitlerinin analitik değere yaklaştığı görülmektedir. Metot 3 ile Metot 4 kıyaslanacak olursa, Metot 3 kullanıldığında bulunan hata normunun daha düşük olduğu ve korunum sabitlerinin tam değere daha yakın olduğu ayrıca her iki metot için bulunan yakınsaklık oranının Crank Nicolson zaman parçalanmasının doğruluğu olan 2 civarında olduğu görülebilir.

Şekil 5.1'de $h = 0.005$ ve $\Delta t = 0.001$ için $t = 1$ zamanındaki mutlak hatalar çizilmiştir. Şekilden, hataların her iki metot için de orta kısımlarda geldiği ve böylece sınır şartlarından kaynaklı bir hata oluşmadığı söylenebilir.



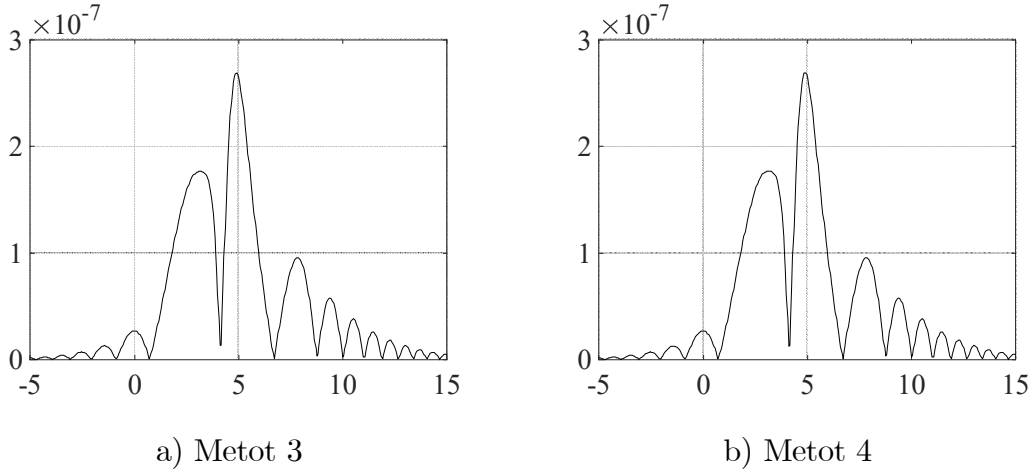
Şekil 5.1 : $h = 0.005$ ve $\Delta t = 0.001$ için $t = 1$ zamanındaki mutlak hatalar

İkinci olarak programlar $-30 \leq x \leq 30$ tanım aralığında sabit $\Delta t = 0.00001$ ve farklı h değerleri için çalıştırılmış ve L_∞ hata normu, korunum sabitleri ve yakınsaklık oranları Çizelge 5.2'de verilmiştir. Çizelge 5.2 incelendiğinde konum artım uzunluğu azaldıkça hataların her iki metot için de azaldığı görülebilir. Korunum sabitlerinin $h = 1$ için iyi sonuçlar vermediği ancak konum artım uzunluğu azaldıkça daha iyi sonuçlar verdiği görülebilir. Her iki metodun sonuçları karşılaştırıldığında sonuçların hemen hemen aynı olduğu görülmektedir.

Çizelge 5.2 : $\Delta t = 0.00001$ ve farklı konum artımları için
hata normları, korunum sabitleri ve yakınsaklık oranları

Metot 3				
h	C_1	C_2	L_∞	Y.O
1	1.9671825244	4.5073620321	1.94×10^{-1}	-
0.5	1.9999203654	7.1234626172	4.95×10^{-3}	5.29
0.2	2.0000000072	7.3290418800	7.16×10^{-5}	4.62
0.1	2.0000000000	7.3330751004	4.33×10^{-6}	4.05
0.05	2.0000000000	7.3333173459	2.69×10^{-7}	4.01
Tam	2	7.3333333333	0	
Metot 4				
h	C_1	C_2	L_∞	Y.O
1	1.9671825244	4.5073620320	1.94×10^{-1}	-
0.5	1.9999203654	7.1234626171	4.94×10^{-3}	5.29
0.2	2.0000000072	7.3290418801	7.16×10^{-5}	4.62
0.1	2.0000000000	7.3330751004	4.33×10^{-6}	4.05
0.05	2.0000000000	7.3333173458	2.69×10^{-7}	4.01
Tam	2	7.3333333333	0	

Şekil 5.2'de $\Delta t = 0.00001$ ve $h = 0.05$ için $t = 1$ zamanındaki mutlak hatalar çizilmiştir. Şekilden en yüksek hataların her iki metot için de $x = 5$ civarında geldiği görülmektedir.



Şekil 5.2 : $\Delta t = 0.00001$ ve $h = 0.05$ için $t = 1$ zamanındaki mutlak hatalar

5.4. İki Soliton Dalgasının Çarpışması Test Problemi

4. bölümde olduğu gibi iki soliton dalgasının çarpışması test probleminde

$$q = 2, \alpha_1 = \alpha_2 = 1, S_1 = 4, \tilde{x}_1 = -10, S_2 = -4, \tilde{x}_2 = 10$$

parametreleri seçilerek $-30 \leq x \leq 30$ konum aralığı üzerinde programlar $t = 5$ zamanında kadar çalıştırılacaktır.

Çizelge 5.3'te $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için bazı zamanlardaki korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri Metot 3 ve Metot 4 için verilmiştir. İki soliton dalgasının hareketi test probleminde korunum sabitlerinin sayısal değerleri; soliton dalgalarının hareketi, çarpışması ve birbirlerinden ayrıldığı süre boyunca sabit kalması gerekmektedir. Korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri incelendiğinde Metot 3'ün Metot 4'e göre daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir.

Çizelge 5.3 : $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için bazı zamanlardaki korunum sabitleri

Metot 3			Metot 4	
t	C_1	C_2	C_1	C_2
0	4.0000000001	14.6661502037	4.0000000001	14.6661502037
1	3.9999992721	14.6661413988	4.0000983095	14.6665927346
2	4.0000066591	14.6662068642	4.0001889965	14.6668780440
3	4.0000022103	14.6661721353	4.0003050464	14.6675041259
4	3.9999991061	14.6661354876	4.0004061493	14.6680073404
5	3.9999994469	14.6661385046	4.0005036186	14.6684328093
Tam	4	14.6666666667	4	14.6666666667

Çizelge 5.4'te ise zaman artım uzunluğu $\Delta t = 0.01$ olarak aynı seçilirken bu kez $h = 0.01$ konum artımı için bazı zamanlardaki korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri Metot 3 ve Metot 4 için verilmiştir. Konum artım uzunluğu küçültüldüğünde de Metot 3 kullanıldığında elde edilen korunum sabitlerinin yaklaşık değerlerinin Metot 4 kullanıldığında elde edilen yaklaşık değerlere göre daha düşük olduğu görülmektedir.

Çizelge 5.4 : $h = 0.01$ ve $\Delta t = 0.01$ için bazı zamanlardaki korunum sabitleri

Metot 3			Metot 4	
t	C_1	C_2	C_1	C_2
0	4.0000000001	14.66666666143	4.0000000001	14.66666666143
1	3.9999992515	14.6666589972	4.0000982884	14.6671103380
2	4.0000065050	14.6667283214	4.0001888508	14.6673992746
3	4.0000021478	14.6666889970	4.0003049949	14.6680208868
4	3.9999990804	14.6666531816	4.0004061300	14.6685251192
5	3.9999994314	14.6666558174	4.0005036052	14.6689503817
Tam	4	14.6666666667	4	14.6666666667

6. NLS DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ İÇİN KUARTİK TRİGONOMETRİK B-SPLİNE GALERKİN METODU

Bu bölümde, NLS denkleminin sayısal çözümü için zaman parçalanması yapılırken Crank Nicolson yöntemi, konuma göre parçalanma yapılırken ise önceki bölümlerden farklı olarak kuartik trigonometrik B-spline Galerkin metodu kullanılmıştır.

6.1. İç İterasyonlu Lineerleştirme (Metot 5)

Bir önceki bölümde NLS denkleminin zaman parçalanması için Crank Nicolson yöntemi uygulanmış, elde edilen denklem ağırlık fonksiyonu ile çarpılarak konum aralığı üzerinde integrali alınmış ve böylece

$$\begin{aligned} & \int_a^b W(x) \left[s^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} (r_{xx})^{n+1} - q \frac{\Delta t}{2} ((r^2 + s^2) r)^{n+1} \right] dx \\ &= \int_a^b W(x) \left[s^n + \frac{\Delta t}{2} (r_{xx})^n + q \frac{\Delta t}{2} ((r^2 + s^2) r)^n \right] dx, \end{aligned} \quad (4.8)$$

ve

$$\begin{aligned} & \int_a^b W(x) \left[r^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} (s_{xx})^{n+1} + q \frac{\Delta t}{2} ((r^2 + s^2) s)^{n+1} \right] dx \\ &= \int_a^b W(x) \left[r^n - \frac{\Delta t}{2} (s_{xx})^n - q \frac{\Delta t}{2} ((r^2 + s^2) s)^n \right] dx \end{aligned} \quad (4.9)$$

denklemleri elde edilmiştir.

$m = 0, 1, \dots, N - 1$ olmak üzere $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde kuartik trigonometrik B-spline taban fonksiyonlarının kullanıldığı

$$U(x, t) = r(x, t) + is(x, t) = \sum_{i=m-2}^{m+2} T_i^4(x) \delta_i$$

yaklaşımı için

$$\delta = \sigma + i\rho$$

alınırsa

$$r = \sum_{j=m-2}^{m+2} T_j^4 \sigma_j \quad (6.1)$$

$$s = \sum_{j=m-2}^{m+2} T_j^4 \rho_j \quad (6.2)$$

elde edilir. Bölümün başında da verilen (4.8) ve (4.9) denklemlerindeki $W(x)$ ağırlık fonksiyonu yerine kübik trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları, r ve s bilinmeyenleri yerine ise (6.1) ve (6.2) eşitlikleri kullanıldığında

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-2}^{m+2} \left\{ \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j dx \right) \rho_j^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j'' dx \right) \sigma_j^{n+1} \right. \\ & \left. - \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-2}^{m+2} \sum_{l=m-2}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i [T_k \rho_k^{n+1} T_l \rho_l^{n+1} + T_k \sigma_k^{n+1} T_l \sigma_l^{n+1}] T_j dx \right) \sigma_j^{n+1} \right\} \\ & - \sum_{j=m-2}^{m+2} \left\{ \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j dx \right) \rho_j^n + \frac{\Delta t}{2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j'' dx \right) \sigma_j^n \right. \\ & \left. + \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-2}^{m+2} \sum_{l=m-2}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i [T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n + T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n] T_j dx \right) \sigma_j^n \right\} \end{aligned} \quad (6.3)$$

ve

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-2}^{m+2} \left\{ \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j dx \right) \sigma_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j'' dx \right) \rho_j^{n+1} \right. \\ & \left. + \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-2}^{m+2} \sum_{l=m-2}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i [T_k \rho_k^{n+1} T_l \rho_l^{n+1} + T_k \sigma_k^{n+1} T_l \sigma_l^{n+1}] T_j dx \right) \rho_j^{n+1} \right\} \\ & - \sum_{j=m-2}^{m+2} \left\{ \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j dx \right) \sigma_j^n + \frac{\Delta t}{2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j'' dx \right) \rho_j^n \right. \\ & \left. - \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-2}^{m+2} \sum_{l=m-2}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i [T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n + T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n] T_j dx \right) \rho_j^n \right\} \end{aligned} \quad (6.4)$$

ifadeleri elde edilir. (6.3) ve (6.4) yaklaşımlarında hesaplanması gereken integrallerin alt bölünme aralıklarından bağımsız olarak hesaplanabilmesi için

$$\xi = x - x_m$$

dönüşümü yapılırsa, $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[0, h]$ aralığına dönüşür. Bu durumda (6.3) ve

(6.4) yaklaşımları

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=m-2}^{m+2} \left\{ \left(\int_0^h T_i T_j d\xi \right) \rho_j^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} \left(\int_0^h T_i T_j'' d\xi \right) \sigma_j^{n+1} \right. \\
& - \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-2}^{m+2} \sum_{l=m-2}^{m+2} \left(\int_0^h T_i [T_k \rho_k^{n+1} T_l \rho_l^{n+1} + T_k \sigma_k^{n+1} T_l \sigma_l^{n+1}] T_j d\xi \right) \sigma_j^{n+1} \left. \right\} \\
& - \sum_{j=m-2}^{m+2} \left\{ \left(\int_0^h T_i T_j d\xi \right) \rho_j^n + \frac{\Delta t}{2} \left(\int_0^h T_i T_j'' d\xi \right) \sigma_j^n \right. \\
& \left. + \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-2}^{m+2} \sum_{l=m-2}^{m+2} \left(\int_0^h T_i [T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n + T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n] T_j d\xi \right) \sigma_j^n \right\}
\end{aligned} \tag{6.5}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=m-2}^{m+2} \left\{ \left(\int_0^h T_i T_j d\xi \right) \sigma_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \left(\int_0^h T_i T_j'' d\xi \right) \rho_j^{n+1} \right. \\
& \left. + \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-2}^{m+2} \sum_{l=m-2}^{m+2} \left(\int_0^h T_i [T_k \rho_k^{n+1} T_l \rho_l^{n+1} + T_k \sigma_k^{n+1} T_l \sigma_l^{n+1}] T_j d\xi \right) \rho_j^{n+1} \right\} \\
& - \sum_{j=m-2}^{m+2} \left\{ \left(\int_0^h T_i T_j d\xi \right) \sigma_j^n - \frac{\Delta t}{2} \left(\int_0^h T_i T_j'' d\xi \right) \rho_j^n \right. \\
& \left. - \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-2}^{m+2} \sum_{l=m-2}^{m+2} \left(\int_0^h T_i [T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n + T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n] T_j d\xi \right) \rho_j^n \right\}
\end{aligned} \tag{6.6}$$

olarak elde edilir. (6.5) ve (6.6) ifadelerindeki integrallerin hesaplanması için (3.25-3.28) eşitliklerinde verilen $T_{m-2}(\xi)$, $T_{m-1}(\xi)$, $T_m(\xi)$, $T_{m+1}(\xi)$ ve $T_{m+2}(\xi)$, kuartik trigonometrik B-spline eşitlikleri kullanılacaktır. Bu durumda her bir alt aralıktaki eleman matrislerinin her bir elemanı $i, j : m-2, m-1, m, m+1, m+2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
A_{ij}^e &= \int_0^h T_i T_j d\xi, \\
B_{ij}^e &= \int_0^h T_i T_j'' d\xi, \\
C_{ij}^e &= \int_0^h T_i \sum_{k=m-2}^{m+2} \sum_{l=m-2}^{m+2} [T_k \rho_k^{n+1} T_l \rho_l^{n+1} + T_k \sigma_k^{n+1} T_l \sigma_l^{n+1}] T_j d\xi \\
D_{ij}^e &= \int_0^h T_i \sum_{k=m-2}^{m+2} \sum_{l=m-2}^{m+2} [T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n + T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n] T_j d\xi
\end{aligned} \tag{6.7}$$

olarak alınırsa, (6.5) ve (6.6) yaklaşımları

$$\begin{aligned}\sigma^e &= (\sigma_{m-2}, \sigma_{m-1}, \sigma_m, \sigma_{m+1}, \sigma_{m+2})^T \\ \rho^e &= (\rho_{m-2}, \rho_{m-1}, \rho_m, \rho_{m+1}, \rho_{m+2})^T\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}A^e (\rho^e)^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} B^e (\sigma^e)^{n+1} - \frac{\Delta t q}{2} C^e (\sigma^e)^{n+1} \\ - \left(A^e (\rho^e)^n + \frac{\Delta t}{2} B^e (\sigma^e)^n + \frac{\Delta t q}{2} D^e (\sigma^e)^n, \right)\end{aligned}\quad (6.8)$$

ve

$$\begin{aligned}A^e (\sigma^e)^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} B^e (\rho^e)^{n+1} + \frac{\Delta t q}{2} C^e (\rho^e)^{n+1} \\ - \left(A^e (\sigma^e)^n - \frac{\Delta t}{2} B^e (\rho^e)^n - \frac{\Delta t q}{2} D^e (\rho^e)^n \right)\end{aligned}\quad (6.9)$$

olarak eleman matrisleriyle yazılabilir. (6.8) ve (6.9) yaklaşımlarında bulunan eleman matrislerinin $m = 0, 1, \dots, N - 1$ için birbirlerine eklenmesi sonucunda

$$\begin{aligned}\sigma &= (\sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \dots, \sigma_{N-1}, \sigma_N, \sigma_{N+1})^T \\ \rho &= (\rho_{-2}, \rho_{-1}, \dots, \rho_{N-1}, \rho_N, \rho_{N+1})^T\end{aligned}$$

olmak üzere

$$A\rho^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} B\sigma^{n+1} - \frac{\Delta t q}{2} C\sigma^{n+1} = A\rho^n + \frac{\Delta t}{2} B\sigma^n + \frac{\Delta t q}{2} D\sigma^n \quad (6.10)$$

ve

$$A\sigma^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} B\rho^{n+1} + \frac{\Delta t q}{2} C\rho^{n+1} = A\sigma^n - \frac{\Delta t}{2} B\rho^n - \frac{\Delta t q}{2} D\rho^n \quad (6.11)$$

elde edilir. (6.10) ve (6.11) denklemlerinden oluşan denklem sistemi $2N + 8$ denklem ve $2N + 8$ bilinmeyenden oluşan ve her bir satırında en fazla 18 elemanı sıfırdan farklı olan bir sistemdir. Sınır şartlarını sisteme adapte etmek için sistemdeki ilk iki ve son iki denklem silinip bölgenin uç noktalarındaki

$$\begin{aligned}U(a, t) &= r(a, t) + is(a, t) = 0, \\ U(b, t) &= r(b, t) + is(b, t) = 0\end{aligned}$$

sınır şartları kullanılarak σ_{-2}, ρ_{-2} ve σ_{N+1}, ρ_{N+1} yok edilirse denklem sistemi $2N + 4$ denklem ve $2N + 4$ bilinmeyenden oluşan denklem sistemine indirgenmiş olur. Sınır

şartları uygulanırken ve denklem sisteminin çözülebilmesi için ilk olarak bulunması gereken

$$(\sigma_{-2}^0, \rho_{-2}^0, \sigma_{-1}^0, \rho_{-1}^0, \dots, \sigma_{N-1}^0, \rho_{N-1}^0, \sigma_N^0, \rho_N^0, \sigma_{N+1}^0, \rho_{N+1}^0)$$

başlangıç bilinmeyenler vektörü aranırken Metot 1’de kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonları, Metot 3’te kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlar kullanılırken Metot 5’te farklı olarak kuartik trigonometrik B-spline fonksiyonlar kullanılacaktır. Lineerleştirme ise Metot 1 ve Metot 3’te yapılan lineerleştirme ile aynıdır.

Denklem sisteminin çözülmesiyle bulunan

$$(\sigma_{-2}^{n+1}, \rho_{-2}^{n+1}, \sigma_{-1}^{n+1}, \rho_{-1}^{n+1}, \dots, \sigma_{N-1}^{n+1}, \rho_{N-1}^{n+1}, \sigma_N^{n+1}, \rho_N^{n+1}, \sigma_{N+1}^{n+1}, \rho_{N+1}^{n+1})$$

bilinmeyenler vektörü kullanılarak istenilen zamanlardaki ve $x = x_m$ noktasındaki bilinmeyen U_m^{n+1} fonksiyonu, bölünme noktalarındaki kuartik trigonometrik B-spline fonksiyonu kullanılarak bulunur.

6.2. Rubin Graves Lineerlestirmesi (Metot 6)

Kuadratik Trigonometrik B-spline bölümünde NLS denkleminin zaman parçalanması için Crank Nicolson yöntemi uygulanmış ve lineerleştirme için Rubin Graves tarafından önerilen yaklaşım kullanılmış, elde edilen denklem ağırlık fonksiyonu ile çarpılarak konum aralığı üzerinde integrali alınmış ve böylece

$$\begin{aligned} & \int_a^b W(x) \left[s^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} (r_{xx})^{n+1} - \frac{q\Delta t}{2} ((3r^n r^n + s^n s^n) r^{n+1} + 2r^n s^n s^{n+1}) \right] dx \\ & = \int_a^b W(x) \left[s^n + \frac{\Delta t}{2} (r_{xx})^n - \frac{q\Delta t}{2} (r^n r^n + s^n s^n) r^n \right] dx \end{aligned} \quad (4.31)$$

ve

$$\begin{aligned} & \int_a^b W(x) \left[r^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} (s_{xx})^{n+1} + \frac{q\Delta t}{2} ((3s^n s^n + r^n r^n) s^{n+1} + 2s^n r^n r^{n+1}) \right] dx \\ & = \int_a^b W(x) \left[r^n - \frac{\Delta t}{2} (s_{xx})^n + \frac{q\Delta t}{2} (r^n r^n + s^n s^n) s^n \right] dx \end{aligned} \quad (4.32)$$

eşitliklerine ulaşılmıştır.

$$r = \sum_{j=m-2}^{m+2} T_j^4 \sigma_j$$

$$s = \sum_{j=m-2}^{m+2} T_j^4 \rho_j$$

eşitlikleri ile birlikte $W(x)$ ağırlık fonksiyonu için kuartik trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları kullanıldığında, (4.29) ve (4.30) denklemleri için $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerindeki yaklaşımlar

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-2}^{m+2} \left\{ \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j dx \right) \rho_j^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j'' dx \right) \sigma_j^{n+1} \right. \\ & - \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-2}^{m+2} \sum_{l=m-2}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i [3T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n + T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n] T_j dx \right) \sigma_j^{n+1} \\ & - \left. \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-2}^{m+2} \sum_{l=m-2}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i [2T_k \sigma_k^n T_l \rho_l^n] T_j dx \right) \rho_j^{n+1} \right\} \\ & - \sum_{j=m-2}^{m+2} \left\{ \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j dx \right) \rho_j^n + \frac{\Delta t}{2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j'' dx \right) \sigma_j^n \right. \\ & - \left. \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-2}^{m+2} \sum_{l=m-2}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i [T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n + T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n] T_j dx \right) \sigma_j^n \right\} \end{aligned} \quad (6.12)$$

ve

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-2}^{m+2} \left\{ \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j dx \right) \sigma_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j'' dx \right) \rho_j^{n+1} \right. \\ & + \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-2}^{m+2} \sum_{l=m-2}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i [T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n + 3T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n] T_j dx \right) \rho_j^{n+1} \\ & + \left. \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-2}^{m+2} \sum_{l=m-2}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i [2T_k \sigma_k^n T_l \rho_l^n] T_j dx \right) \sigma_j^{n+1} \right\} \\ & - \sum_{j=m-2}^{m+2} \left\{ \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j dx \right) \sigma_j^n - \frac{\Delta t}{2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j'' dx \right) \rho_j^n \right. \\ & + \left. \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-2}^{m+2} \sum_{l=m-2}^{m+2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i [T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n + T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n] T_j dx \right) \rho_j^n \right\} \end{aligned} \quad (6.13)$$

olarak elde edilir. (6.12) ve (6.13) yaklaşımlarındaki hesaplanması gereken integrallerin alt bölünme aralıklarından bağımsız olarak hesaplanabilmesi için

$$\xi = x - x_m$$

dönüşümü yapılırsa $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[0, h]$ aralığına dönüştür. Bu durumda

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=m-2}^{m+2} \left\{ \left(\int_0^h T_i T_j d\xi \right) \rho_j^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} \left(\int_0^h T_i T_j'' d\xi \right) \sigma_j^{n+1} \right. \\
& - \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-2}^{m+2} \sum_{l=m-2}^{m+2} \left(\int_0^h T_i [3T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n + T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi \right) \sigma_j^{n+1} \\
& \left. - \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-2}^{m+2} \sum_{l=m-2}^{m+2} \left(\int_0^h T_i [2T_k \sigma_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi \right) \rho_j^{n+1} \right\} \\
& - \sum_{j=m-2}^{m+2} \left\{ \left(\int_0^h T_i T_j d\xi \right) \rho_j^n + \frac{\Delta t}{2} \left(\int_0^h T_i T_j'' d\xi \right) \sigma_j^n \right. \\
& \left. - \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-2}^{m+2} \sum_{l=m-2}^{m+2} \left(\int_0^h T_i [T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n + T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi \right) \sigma_j^n \right\}
\end{aligned} \tag{6.14}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=m-2}^{m+2} \left\{ \left(\int_0^h T_i T_j d\xi \right) \sigma_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \left(\int_0^h T_i T_j'' d\xi \right) \rho_j^{n+1} \right. \\
& + \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-2}^{m+2} \sum_{l=m-2}^{m+2} \left(\int_0^h T_i [T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n + 3T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi \right) \rho_j^{n+1} \\
& \left. + \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-2}^{m+2} \sum_{l=m-2}^{m+2} \left(\int_0^h T_i [2T_k \sigma_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi \right) \sigma_j^{n+1} \right\} \\
& - \sum_{j=m-2}^{m+2} \left\{ \left(\int_0^h T_i T_j d\xi \right) \sigma_j^n - \frac{\Delta t}{2} \left(\int_0^h T_i T_j'' d\xi \right) \rho_j^n \right. \\
& \left. + \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-2}^{m+2} \sum_{l=m-2}^{m+2} \left(\int_0^h T_i [T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n + T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n] T_j d\xi \right) \rho_j^n \right\}
\end{aligned} \tag{6.15}$$

ifadeleri elde edilir. (6.14) ve (6.15) ifadelerindeki integrallerin hesaplanması için Metot 5'te olduğu gibi $T_{m-2}(\xi)$, $T_{m-1}(\xi)$, $T_m(\xi)$, $T_{m+1}(\xi)$ ve $T_{m+2}(\xi)$ kuartik trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları kullanılacaktır. Bu durumda her bir alt aralıktaki eleman

matrislerinin her bir elemanı $i, j : m - 2, m - 1, m, m + 1, m + 2$ ve

$$\begin{aligned}
 A_{ij}^e &= \int_0^h T_i T_j d\xi, \\
 B_{ij}^e &= \int_0^h T_i' T_j' d\xi, \\
 C_{ij}^e &= \int_0^h T_i \sum_{k=m-2}^{m+2} \sum_{l=m-2}^{m+2} [3T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n + T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi, \\
 D_{ij}^e &= \int_0^h T_i \sum_{k=m-2}^{m+2} \sum_{l=m-2}^{m+2} [2T_k \sigma_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi, \\
 E_{ij}^e &= \int_0^h T_i \sum_{k=m-2}^{m+2} \sum_{l=m-2}^{m+2} [T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n + T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi, \\
 F_{ij}^e &= \int_0^h T_i \sum_{k=m-2}^{m+2} \sum_{l=m-2}^{m+2} [T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n + 3T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi
 \end{aligned}$$

olarak alınırsa, (6.14) ve (6.15) yaklaşımları

$$\begin{aligned}
 \sigma^e &= (\sigma_{m-2}, \sigma_{m-1}, \sigma_m, \sigma_{m+1}, \sigma_{m+2})^T \\
 \rho^e &= (\rho_{m-2}, \rho_{m-1}, \rho_m, \rho_{m+1}, \rho_{m+2})^T
 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
 &A^e (\rho^e)^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} B^e (\sigma^e)^{n+1} - \frac{\Delta t q}{2} C^e (\sigma^e)^{n+1} - \frac{\Delta t q}{2} D^e (\sigma^e)^{n+1} \\
 &- \left(A^e (\rho^e)^n + \frac{\Delta t}{2} B^e (\sigma^e)^n - \frac{\Delta t q}{2} E^e (\sigma^e)^n \right)
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

ve

$$\begin{aligned}
 &A^e (\sigma^e)^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} B^e (\rho^e)^{n+1} + \frac{\Delta t q}{2} F^e (\rho^e)^{n+1} + \frac{\Delta t q}{2} D^e (\rho^e)^{n+1} \\
 &- \left(A^e (\sigma^e)^n - \frac{\Delta t}{2} B^e (\rho^e)^n + \frac{\Delta t q}{2} E^e (\rho^e)^n \right)
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

olarak eleman matrisleriyle yazılabilir. (6.16) ve (6.17) yaklaşımlarında bulunan eleman matrislerinin $m = 0, 1, \dots, N - 1$ için uygun şekilde birbirlerine eklenmesi sonucunda

$$\begin{aligned}
 \sigma &= (\sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \dots, \sigma_{N-1}, \sigma_N, \sigma_{N+1})^T \\
 \rho &= (\rho_{-2}, \rho_{-1}, \dots, \rho_{N-1}, \rho_N, \rho_{N+1})^T
 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$A\rho^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} B\sigma^{n+1} - \frac{\Delta t q}{2} C\sigma^{n+1} - \frac{\Delta t q}{2} D\sigma^{n+1} = A\rho^n + \frac{\Delta t}{2} B\sigma^n - \frac{\Delta t q}{2} E\sigma^n \tag{6.18}$$

ve

$$A\sigma^{n+1} + \frac{\Delta t}{2}B\rho^{n+1} + \frac{\Delta tq}{2}F\rho^{n+1} + \frac{\Delta tq}{2}D\rho^{n+1} = A\sigma^n - \frac{\Delta t}{2}B\rho^n + \frac{\Delta tq}{2}E\rho^n \quad (6.19)$$

elde edilir. (6.18) ve (6.19) denklemlerinden oluşan denklem sistemi Metot 5'te olduğu gibi $2N + 8$ denklem ve $2N + 8$ bilinmeyenden oluşan ve her bir satırında en fazla 18 elemanı sıfırdan farklı olan bir sistemdir. Sınır şartlarının sisteme adapte edilmesi ve denklem sisteminin çözülebilmesi için ilk olarak bulunması gereken

$$(\sigma_{-2}^0, \rho_{-2}^0, \sigma_{-1}^0, \rho_{-1}^0, \dots, \sigma_{N-1}^0, \rho_{N-1}^0, \sigma_N^0, \rho_N^0, \sigma_{N+1}^0, \rho_{N+1}^0)$$

başlangıç bilinmeyenler vektörünün bulunması için yapılacak işlemler Metot 5'te yapılanlar ile aynıdır. Denklem sisteminin çözülmesiyle bulunan

$$(\sigma_{-2}^{n+1}, \rho_{-2}^{n+1}, \sigma_{-1}^{n+1}, \rho_{-1}^{n+1}, \dots, \sigma_{N-1}^{n+1}, \rho_{N-1}^{n+1}, \sigma_N^{n+1}, \rho_N^{n+1}, \sigma_{N+1}^{n+1}, \rho_{N+1}^{n+1})$$

bilinmeyenler vektörü kullanılarak istenilen zamanlardaki $x = x_m$ noktasındaki bilinmeyen U_m^{n+1} fonksiyonu bölünme noktalarındaki kuartik trigonometrik B-spline fonksiyonu kullanılarak Metot 5'te olduğu gibi bulunur.

6.3. Soliton Dalgasının Hareketi Test Problemi

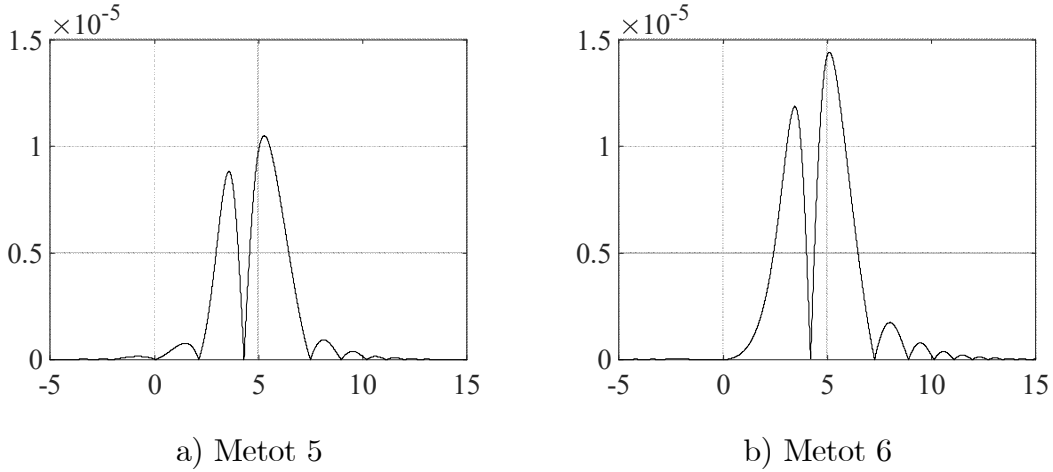
Dördüncü ve beşinci bölümlerde olduğu gibi soliton dalgasının hareketi test probleminde $q = 2$, $S = 4$, $\alpha = 1$ seçimleri yapılarak $-30 \leq x \leq 30$ konum aralığı üzerinde programlar $t = 1$ zamanına kadar çalıştırılacaktır. İlk olarak $-30 \leq x \leq 30$ tanım aralığında sabit $h = 0.005$ ve farklı Δt değerleri için programlar çalıştırılmış ve L_∞ hata normu, korunum sabitleri ve yakınsaklık oranları Çizelge 6.1'de verilmiştir. Çizelge 6.1 incelendiğinde zaman artım uzunluğu azaldıkça hataların her iki metot için de azaldığı, ancak Metot 5'te Metot 6'ya oranla korunum sabitlerinin yaklaşık değerlerinin analitik değere daha çok yaklaştığı ve yakınsaklık oranının her iki metot için Crank Nicolson zaman parçalanmasının doğruluğu olan 2 civarında olduğu görülebilir.

Çizelge 6.1 : $h = 0.005$ ve farklı zaman artımları için

hata normları, korunum sabitleri ve yakınsaklık oranları

Metot 5				
Δt	C_1	C_2	L_∞	Y.O
0.1	1.9958141853	7.2814507488	1.12×10	-
0.05	1.9997574728	7.3307504010	2.72×10^{-2}	2.04
0.02	1.9999939804	7.3332713650	4.22×10^{-3}	2.03
0.01	1.9999996255	7.3333295269	1.05×10^{-3}	2.01
0.005	1.9999999766	7.3333330975	2.62×10^{-4}	2.00
0.002	1.9999999994	7.3333333275	4.19×10^{-5}	2.00
0.001	2.0000000000	7.3333333332	1.05×10^{-5}	2.00
Tam	2	7.3333333333	0	
Metot 6				
Δt	C_1	C_2	L_∞	Y.O
0.1	2.0559950917	7.6975721391	1.65×10^{-1}	-
0.05	2.0063580970	7.3653612767	3.60×10^{-2}	2.19
0.02	2.0003960347	7.3351710654	5.72×10^{-3}	2.01
0.01	2.0000491443	7.3335551919	1.43×10^{-3}	1.99
0.005	2.0000061214	7.3333605790	3.59×10^{-4}	2.00
0.002	2.0000003909	7.3333350585	5.76×10^{-5}	2.00
0.001	2.0000000488	7.3333335484	1.44×10^{-5}	2.00
Tam	2	7.3333333333	0	

Şekil 6.1'de $h = 0.005$ ve $\Delta t = 0.001$ için $t = 1$ zamanındaki mutlak hataların her iki metot için konum aralığının orta noktası olan $x = 5$ civarlarında en yüksek hataya sahip olduğu görülmektedir. Dolayısıyla sınır şartlarının uygulanmasından kaynaklı bir hata artışı olmadığı söylenebilir.



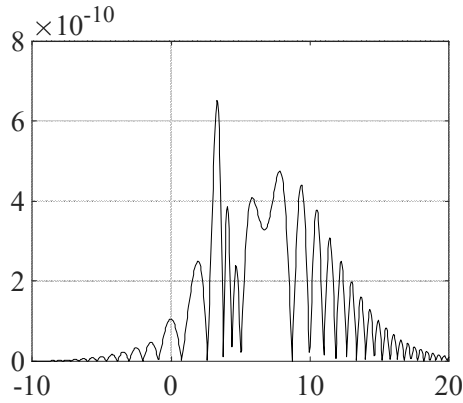
Şekil 6.1 : $h = 0.005$ ve $\Delta t = 0.001$ için $t = 1$ zamanındaki mutlak hatalar

İkinci olarak programlar $-30 \leq x \leq 30$ tanım aralığında sabit $\Delta t = 0.00001$ ve farklı h değerleri için çalıştırılmış ve L_∞ hata normu, korunum sabitleri ve yakınsaklık oranları Çizelge 6.2’de verilmiştir. Çizelge 6.2 incelendiğinde konum artım uzunluğu azaldıkça hataların her iki metot için de azaldığı görülebilir. $h = 1$ konum artım uzunluğu için her iki metotta da korunum sabitlerinin yaklaşık değerlerinin tam çözüm değerine oldukça uzak olduğu görülmektedir. Konum artım uzunluğu küçüldükçe hata normlarının küçüldüğü ve korunum sabitlerinin yaklaşık sonuçlarının tam sonuca yaklaştığı her iki metot için de görülebilir. Konum artımı olan h değeri küçüldükçe yaklaşık integral hesabındaki hata da küçülmektedir. Korunum sabitleri her iki metotta farklı adım artımlarında birbirlerine oldukça yakın olduğu görülmektedir. Ancak hata normları kıyaslandığında Metot 5’in daha iyi sonuçlar verdiği ve her iki metot için bulunan yakınsama oranları incelendiğinde oranların 6 ve üstünde olduğu, diğer bir ifadeyle yakınsama oranının oldukça yüksek olduğu görülmektedir.

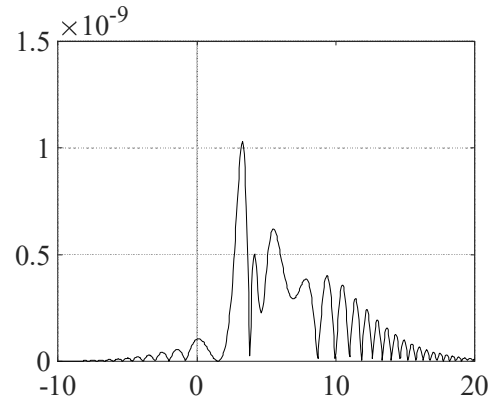
Çizelge 6.2 : $\Delta t = 0.00001$ ve farklı konum artımları için
hata normları, korunum sabitleri ve yakınsaklık oranları

Metot 5				
h	C_1	C_2	L_∞	Y.O
1	3.1570615060	72.1575903962	3.80×10^{-1}	-
0.5	2.0001728648	7.4940916692	5.07×10^{-3}	6.23
0.2	2.0000000001	7.3340517927	5.06×10^{-6}	7.54
0.1	2.0000000000	7.3333729982	6.71×10^{-8}	6.24
0.05	2.0000000000	7.3333357360	6.52×10^{-10}	6.68
Tam	2	7.3333333333	0	
Metot 6				
h	C_1	C_2	L_∞	Y.O
1	3.0035440287	63.8916446943	3.62×10^{-1}	-
0.5	2.0001728661	7.4940917426	5.07×10^{-3}	6.16
0.2	2.0000000002	7.3340517927	5.06×10^{-4}	7.54
0.1	2.0000000000	7.3333729981	6.66×10^{-8}	6.25
0.05	2.0000000000	7.3333357360	1.03×10^{-9}	6.01
Tam	2	7.3333333333	0	

$\Delta t = 0.00001$ ve $h = 0.05$ için $t = 1$ zamanındaki mutlak hatalar çizilmiştir. Şekil 6.2'de incelendiğinde hatanın her iki metot için de orta kısımlarda geldiği görülmektedir.



a) Metot 5



b) Metot 6

Şekil 6.2 : $\Delta t = 0.00001$ ve $h = 0.05$ için $t = 1$ zamanındaki mutlak hatalar

6.4. İki Soliton Dalgasının Çarpışması Test Problemi

4. ve 5. bölümde olduğu gibi iki soliton dalgasının çarpışması test probleminde

$$q = 2, \alpha_1 = \alpha_2 = 1, S_1 = 4, \tilde{x}_1 = -10, S_2 = -4, \tilde{x}_2 = 10$$

parametreleri seçilerek $-30 \leq x \leq 30$ konum aralığı üzerinde programlar $t = 5$ zamanına kadar çalıştırılacaktır.

Çizelge 6.3'te $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için bazı zamanlardaki korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri Metot 5 ve Metot 6 için verilmiştir. Önerilen her iki metot için de korunum sabitlerinin çalışma zamanı boyunca hemen hemen aynı kaldığı ve Metot 5 kullanıldığında elde edilen korunum sabitlerinin yaklaşık değerlerinin tam sonuçlara daha yakın olduğu görülmektedir.

Çizelge 6.3 : $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için bazı zamanlardaki korunum sabitleri

	Metot 5		Metot 6	
t	C_1	C_2	C_1	C_2
0	4.0000000001	14.6667459951	4.0000000001	14.6667459951
1	3.9999992512	14.6667386844	4.0000982879	14.6671900487
2	4.0000065037	14.6668088351	4.0001888495	14.6674797447
3	4.0000021477	14.6667684369	4.0003049948	14.6681002991
4	3.9999990801	14.6667328914	4.0004061295	14.6686048519
5	3.9999994311	14.6667354303	4.0005036047	14.6690300622
Tam	4	14.6666666667	4	14.6666666667

Çizelge 6.4'te zaman artım uzunluğu aynı alınarak konum artım uzunluğu $h = 0.01$ olarak seçilmiş ve korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri Metot 5 ve Metot 6 için verilmiştir. Daha küçük seçilen h ile daha fazla alt aralık üzerinden hesaplama yapılmış ve yine Metot 5'in daha iyi sonuçlar verdiği gözlenmiştir.

Çizelge 6.4 : $h = 0.01$ ve $\Delta t = 0.01$ için bazı zamanlardaki korunum sabitleri

Metot 5			Metot 6	
t	C_1	C_2	C_1	C_2
0	4.0000000001	14.66666666730	4.0000000001	14.66666666730
1	3.9999992515	14.6666590560	4.0000982884	14.6671103969
2	4.0000065050	14.6667283808	4.0001888508	14.6673993339
3	4.0000021478	14.6666890557	4.0003049949	14.6680209456
4	3.9999990804	14.6666532404	4.0004061299	14.6685251781
5	3.9999994314	14.6666558762	4.0005036052	14.6689504406
Tam	4	14.6666666667	4	14.6666666667

7. NLS DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ İÇİN KUİNTİK TRİGONOMETRİK B-SPLİNE GALERKİN METODU

Bu bölümde, NLS denkleminin sayısal çözümü için zaman parçalanması yapılırken Crank Nicolson yöntemi, konuma göre parçalanma yapılırken kuintik trigonometrik B-spline Galerkin metodu kullanılmıştır.

7.1. İç İterasyonlu Lineerleştirme (Metot 7)

NLS denkleminin zaman parçalanması için Crank Nicolson yöntemi uygulanmış, elde edilen denklem ağırlık fonksiyonu ile çarpılarak konum aralığı üzerinde integrali alınmış ve böylece

$$\begin{aligned} & \int_a^b W(x) \left[s^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} (r_{xx})^{n+1} - q \frac{\Delta t}{2} ((r^2 + s^2) r)^{n+1} \right] dx \\ &= \int_a^b W(x) \left[s^n + \frac{\Delta t}{2} (r_{xx})^n + q \frac{\Delta t}{2} ((r^2 + s^2) r)^n \right] dx, \end{aligned} \quad (4.8)$$

ve

$$\begin{aligned} & \int_a^b W(x) \left[r^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} (s_{xx})^{n+1} + q \frac{\Delta t}{2} ((r^2 + s^2) s)^{n+1} \right] dx \\ &= \int_a^b W(x) \left[r^n - \frac{\Delta t}{2} (s_{xx})^n - q \frac{\Delta t}{2} ((r^2 + s^2) s)^n \right] dx \end{aligned} \quad (4.9)$$

denklemleri elde edilmiştir.

$m = 0, 1, \dots, N - 1$ olmak üzere $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde kuintik trigonometrik B-spline taban fonksiyonlarının kullanıldığı

$$U(x, t) = r(x, t) + is(x, t) = \sum_{i=m-2}^{m+3} T_i^5(x) \delta_i$$

yaklaşımı için

$$\delta = \sigma + i\rho$$

alınırsa

$$r = \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j^5 \sigma_j \quad (7.1)$$

$$s = \sum_{j=m-1}^{m+2} T_j^5 \rho_j \quad (7.2)$$

elde edilir. Bölümün başında da verilen (4.8) ve (4.9) denklemlerindeki $W(x)$ ağırlık fonksiyonu yerine kuintik trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları, r ve s bilinmeyenleri yerine ise (7.1) ve (7.2) eşitlikleri kullanıldığında

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-2}^{m+3} \left\{ \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j dx \right) \rho_j^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j'' dx \right) \sigma_j^{n+1} \right. \\ & - \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-2}^{m+3} \sum_{l=m-2}^{m+3} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i [T_k \rho_k^{n+1} T_l \rho_l^{n+1} + T_k \sigma_k^{n+1} T_l \sigma_l^{n+1}] T_j dx \right) \sigma_j^{n+1} \left. \right\} \\ & - \sum_{j=m-2}^{m+3} \left\{ \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j dx \right) \rho_j^n + \frac{\Delta t}{2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j'' dx \right) \sigma_j^n \right. \\ & + \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-2}^{m+3} \sum_{l=m-2}^{m+3} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i [T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n + T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n] T_j dx \right) \sigma_j^n \left. \right\} \end{aligned} \quad (7.3)$$

ve

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-2}^{m+3} \left\{ \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j dx \right) \sigma_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j'' dx \right) \rho_j^{n+1} \right. \\ & + \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-2}^{m+3} \sum_{l=m-2}^{m+3} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i [T_k \rho_k^{n+1} T_l \rho_l^{n+1} + T_k \sigma_k^{n+1} T_l \sigma_l^{n+1}] T_j dx \right) \rho_j^{n+1} \left. \right\} \\ & - \sum_{j=m-2}^{m+3} \left\{ \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j dx \right) \sigma_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j'' dx \right) \rho_j^{n+1} \right. \\ & - \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-2}^{m+3} \sum_{l=m-2}^{m+3} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i [T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n + T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n] T_j dx \right) \rho_j^n \left. \right\} \end{aligned} \quad (7.4)$$

ifadeleri elde edilir. (7.3) ve (7.4) yaklaşımlarında hesaplanması gereken integrallerin alt bölünme aralıklarından bağımsız olarak hesaplanabilmesi için

$$\xi = x - x_m$$

dönüşümü yapılırsa $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[0, h]$ aralığına dönüştür. Bu durumda (7.3) ve

(7.4) yaklaşımları

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=m-2}^{m+3} \left\{ \left(\int_0^h T_i T_j d\xi \right) \rho_j^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} \left(\int_0^h T_i T_j'' d\xi \right) \sigma_j^{n+1} \right. \\
& - \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-2}^{m+3} \sum_{l=m-2}^{m+3} \left(\int_0^h T_i [T_k \rho_k^{n+1} T_l \rho_l^{n+1} + T_k \sigma_k^{n+1} T_l \sigma_l^{n+1}] T_j d\xi \right) \sigma_j^{n+1} \left. \right\} \\
& - \sum_{j=m-2}^{m+3} \left\{ \left(\int_0^h T_i T_j d\xi \right) \rho_j^n + \frac{\Delta t}{2} \left(\int_0^h T_i T_j'' d\xi \right) \sigma_j^n \right. \\
& + \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-2}^{m+3} \sum_{l=m-2}^{m+3} \left(\int_0^h T_i [T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n + T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n] T_j d\xi \right) \sigma_j^n \left. \right\}
\end{aligned} \tag{7.5}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=m-2}^{m+3} \left\{ \left(\int_0^h T_i T_j d\xi \right) \sigma_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \left(\int_0^h T_i T_j'' d\xi \right) \rho_j^{n+1} \right. \\
& + \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-2}^{m+3} \sum_{l=m-2}^{m+3} \left(\int_0^h T_i [T_k \rho_k^{n+1} T_l \rho_l^{n+1} + T_k \sigma_k^{n+1} T_l \sigma_l^{n+1}] T_j d\xi \right) \rho_j^{n+1} \left. \right\} \\
& - \sum_{j=m-2}^{m+3} \left\{ \left(\int_0^h T_i T_j d\xi \right) \sigma_j^n - \frac{\Delta t}{2} \left(\int_0^h T_i T_j'' d\xi \right) \rho_j^n \right. \\
& - \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-2}^{m+3} \sum_{l=m-2}^{m+3} \left(\int_0^h T_i [T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n + T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n] T_j d\xi \right) \rho_j^n \left. \right\}
\end{aligned} \tag{7.6}$$

olarak elde edilir. (7.5) ve (7.6) ifadelerindeki integrallerin hesaplanması için (3.49-3.54) eşitliklerinde verilen $T_{m-2}(\xi)$, $T_{m-1}(\xi)$, $T_m(\xi)$, $T_{m+1}(\xi)$, $T_{m+2}(\xi)$ ve $T_{m+3}(\xi)$ kuintik trigonometrik B-spline eşitlikleri kullanılacaktır. Bu durumda her bir alt aralıktaki eleman matrislerinin her bir elemanı $i, j : m-2, m-1, m, m+1, m+2, m+3$ için

$$\begin{aligned}
A_{ij}^e &= \int_0^h T_i T_j d\xi, \\
B_{ij}^e &= \int_0^h T_i T_j'' d\xi, \\
C_{ij}^e &= \int_0^h T_i \sum_{k=m-2}^{m+3} \sum_{l=m-2}^{m+3} [T_k \rho_k^{n+1} T_l \rho_l^{n+1} + T_k \sigma_k^{n+1} T_l \sigma_l^{n+1}] T_j d\xi \\
D_{ij}^e &= \int_0^h T_i \sum_{k=m-2}^{m+3} \sum_{l=m-2}^{m+3} [T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n + T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n] T_j d\xi
\end{aligned} \tag{7.7}$$

olarak alınırsa, (7.5) ve (7.6) yaklaşımları

$$\begin{aligned}\sigma^e &= (\sigma_{m-2}, \sigma_{m-1}, \sigma_m, \sigma_{m+1}, \sigma_{m+2}, \sigma_{m+3})^T \\ \rho^e &= (\rho_{m-2}, \rho_{m-1}, \rho_m, \rho_{m+1}, \rho_{m+2}, \rho_{m+3})^T\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}A^e (\rho^e)^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} B^e (\sigma^e)^{n+1} - \frac{\Delta t q}{2} C^e (\sigma^e)^{n+1} \\ - \left(A^e (\rho^e)^n + \frac{\Delta t}{2} B^e (\sigma^e)^n + \frac{\Delta t q}{2} D^e (\sigma^e)^n \right),\end{aligned}\quad (7.8)$$

ve

$$\begin{aligned}A^e (\sigma^e)^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} B^e (\rho^e)^{n+1} + \frac{\Delta t q}{2} C^e (\rho^e)^{n+1} \\ - \left(A^e (\sigma^e)^n - \frac{\Delta t}{2} B^e (\rho^e)^n - \frac{\Delta t q}{2} D^e (\rho^e)^n \right)\end{aligned}\quad (7.9)$$

olarak eleman matrisleriyle yazılabilir. (7.8) ve (7.9) yaklaşımlarında bulunan eleman matrislerinin $m = 0, 1, \dots, N - 1$ için uygun şekilde birbirlerine eklenmesi sonucunda

$$\begin{aligned}\sigma &= (\sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \dots, \sigma_N, \sigma_{N+1}, \sigma_{N+2})^T \\ \rho &= (\rho_{-2}, \rho_{-1}, \dots, \rho_N, \rho_{N+1}, \rho_{N+2})^T\end{aligned}$$

olmak üzere

$$A\rho^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} B\sigma^{n+1} - \frac{\Delta t q}{2} C\sigma^{n+1} = A\rho^n + \frac{\Delta t}{2} B\sigma^n + \frac{\Delta t q}{2} D\sigma^n \quad (7.10)$$

ve

$$A\sigma^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} B\rho^{n+1} + \frac{\Delta t q}{2} C\rho^{n+1} = A\sigma^n - \frac{\Delta t}{2} B\rho^n - \frac{\Delta t q}{2} D\rho^n \quad (7.11)$$

elde edilir. (7.10) ve (7.11) denklemlerinden oluşan denklem sistemi $2N + 10$ denklem ve $2N + 10$ bilinmeyenden oluşan ve her bir satırında en fazla 22 elemanı sıfırdan farklı olan bir sistemdir. Sınır şartlarını sisteme adapte etmek için sistemdeki ilk iki ve son iki denklem silinip bölgenin uç noktalarındaki

$$\begin{aligned}U(a, t) &= r(a, t) + is(a, t) = 0, \\ U(b, t) &= r(b, t) + is(b, t) = 0\end{aligned}$$

sınır şartları kullanılarak σ_{-2}, ρ_{-2} ve σ_{N+2}, ρ_{N+2} yok edilirse denklem sistemi $2N + 6$ denklem ve $2N + 6$ bilinmeyenden oluşan denklem sistemine indirgenmiş olur. Sınır

şartları uygulanmış (7.10) ve (7.11) denklem sisteminin çözülebilmesi için ilk olarak bulunması gereken

$$(\sigma_{-2}^0, \rho_{-2}^0, \sigma_{-1}^0, \rho_{-1}^0, \dots, \sigma_N^0, \rho_N^0, \sigma_{N+1}^0, \rho_{N+1}^0, \sigma_{N+2}^0, \rho_{N+2}^0)$$

başlangıç bilinmeyenler vektörü aranırken Metot 7'de farklı olarak kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonlar kullanılacaktır. Lineerleştirme de ise Metot 1, Metot 3, Metot 5'de yapılan lineerleştirme aynen uygulanacaktır.

Denklem sisteminin çözülmesiyle bulunan

$$(\sigma_{-2}^{n+1}, \rho_{-2}^{n+1}, \sigma_{-1}^{n+1}, \rho_{-1}^{n+1}, \dots, \sigma_N^{n+1}, \rho_N^{n+1}, \sigma_{N+1}^{n+1}, \rho_{N+1}^{n+1}, \sigma_{N+2}^{n+1}, \rho_{N+2}^{n+1})$$

bilinmeyenler vektörü kullanılarak istenilen zamanlardaki $x = x_m$ noktasındaki bilinmeyen U_m^{n+1} fonksiyonu, bölünme noktalarındaki kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonu kullanılarak bulunur.

7.2. Rubin Graves Lineerlestirmesi (Metot 8)

NLS denkleminin zaman parçalanması için Crank Nicolson yöntemi uygulandıktan sonra lineerleştirme için Rubin Graves tarafından önerilen yaklaşım kullanılmış, elde edilen denklem ağırlık fonksiyonu ile çarpılarak konum aralığı üzerinde integrali alınmış ve böylece

$$\begin{aligned} & \int_a^b W(x) \left[s^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} (r_{xx})^{n+1} - \frac{q\Delta t}{2} ((3r^n r^n + s^n s^n) r^{n+1} + 2r^n s^n s^{n+1}) \right] dx \\ &= \int_a^b W(x) \left[s^n + \frac{\Delta t}{2} (r_{xx})^n - \frac{q\Delta t}{2} (r^n r^n + s^n s^n) r^n \right] dx \end{aligned} \quad (4.31)$$

ve

$$\begin{aligned} & \int_a^b W(x) \left[r^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} (s_{xx})^{n+1} + \frac{q\Delta t}{2} ((3s^n s^n + r^n r^n) s^{n+1} + 2s^n r^n r^{n+1}) \right] dx \\ &= \int_a^b W(x) \left[r^n - \frac{\Delta t}{2} (s_{xx})^n + \frac{q\Delta t}{2} (r^n r^n + s^n s^n) s^n \right] dx \end{aligned} \quad (4.32)$$

eşitliklerine ulaşılmıştı. Bir önceki alt bölümde elde edilen

$$r = \sum_{j=m-2}^{m+3} T_j^5 \sigma_j$$

$$s = \sum_{j=m-2}^{m+3} T_j^5 \rho_j$$

eşitlikleri ile birlikte $W(x)$ ağırlık fonksiyonu için kuintik trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları kullanıldığında, (4.29) ve (4.30) denklemleri için $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerindeki yaklaşımlar

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-2}^{m+3} \left\{ \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j d\xi \right) \rho_j^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j'' d\xi \right) \sigma_j^{n+1} \right. \\ & - \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-2}^{m+3} \sum_{l=m-2}^{m+3} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i [3T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n + T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi \right) \sigma_j^{n+1} \\ & \left. - \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-2}^{m+3} \sum_{l=m-2}^{m+3} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i [2T_k \sigma_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi \right) \rho_j^{n+1} \right\} \\ & - \sum_{j=m-2}^{m+3} \left\{ \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j d\xi \right) \rho_j^n + \frac{\Delta t}{2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j'' d\xi \right) \sigma_j^n \right. \\ & \left. - \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-2}^{m+3} \sum_{l=m-2}^{m+3} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i [T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n + T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi \right) \sigma_j^n \right\} \end{aligned} \quad (7.12)$$

ve

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-2}^{m+3} \left\{ \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j d\xi \right) \sigma_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j'' d\xi \right) \rho_j^{n+1} \right. \\ & + \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-2}^{m+3} \sum_{l=m-2}^{m+3} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i [T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n + 3T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi \right) \rho_j^{n+1} \\ & \left. + \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-2}^{m+3} \sum_{l=m-2}^{m+3} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i [2T_k \sigma_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi \right) \sigma_j^{n+1} \right\} \\ & - \sum_{j=m-2}^{m+3} \left\{ \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j d\xi \right) \sigma_j^n - \frac{\Delta t}{2} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i T_j'' d\xi \right) \rho_j^n \right. \\ & \left. + \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-2}^{m+3} \sum_{l=m-2}^{m+3} \left(\int_{x_m}^{x_{m+1}} T_i [T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n + T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n] T_j d\xi \right) \rho_j^n \right\} \end{aligned} \quad (7.13)$$

olacak şekilde elde edilir. (7.12) ve (7.13) yaklaşımlarında hesaplanması gereken integrallerin alt bölünme aralıklarından bağımsız olarak hesaplanabilmesi için daha

önceki bölümlerde olduğu gibi

$$\xi = x - x_m$$

dönüşümü yapılırsa $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[0, h]$ aralığına dönüştür. Bu durumda

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=m-2}^{m+3} \left\{ \left(\int_0^h T_i T_j d\xi \right) \rho_j^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} \left(\int_0^h T_i T_j'' d\xi \right) \sigma_j^{n+1} \right. \\
& - \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-2}^{m+3} \sum_{l=m-2}^{m+3} \left(\int_0^h T_i [3T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n + T_k \rho_k^{n+1} T_l \rho_l^{n+1}] T_j d\xi \right) \sigma_j^{n+1} \\
& - \left. \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-2}^{m+3} \sum_{l=m-2}^{m+3} \left(\int_0^h T_i [2T_k \sigma_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi \right) \rho_j^{n+1} \right\} \\
& - \sum_{j=m-2}^{m+3} \left\{ \left(\int_0^h T_i T_j d\xi \right) \rho_j^n + \frac{\Delta t}{2} \left(\int_0^h T_i T_j'' d\xi \right) \sigma_j^n \right. \\
& - \left. \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-2}^{m+3} \sum_{l=m-2}^{m+3} \left(\int_0^h T_i [T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n + T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi \right) \sigma_j^n \right\}
\end{aligned} \tag{7.14}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=m-2}^{m+3} \left\{ \left(\int_0^h T_i T_j d\xi \right) \sigma_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \left(\int_0^h T_i T_j'' d\xi \right) \rho_j^{n+1} \right. \\
& + \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-2}^{m+3} \sum_{l=m-2}^{m+3} \left(\int_0^h T_i [T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n + 3T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi \right) \rho_j^{n+1} \\
& + \left. \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-2}^{m+3} \sum_{l=m-2}^{m+3} \left(\int_0^h T_i [2T_k \sigma_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi \right) \sigma_j^{n+1} \right\} \\
& - \sum_{j=m-2}^{m+3} \left\{ \left(\int_0^h T_i T_j d\xi \right) \sigma_j^n - \frac{\Delta t}{2} \left(\int_0^h T_i T_j'' d\xi \right) \rho_j^n \right. \\
& + \left. \frac{q\Delta t}{2} \sum_{k=m-2}^{m+3} \sum_{l=m-2}^{m+3} \left(\int_0^h T_i [T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n + T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n] T_j d\xi \right) \rho_j^n \right\}
\end{aligned} \tag{7.15}$$

ifadeleri elde edilir. (7.14) ve (7.15) ifadelerindeki integrallerin hesaplanması için Metot 7'de olduğu gibi $T_{m-2}(\xi)$, $T_{m-1}(\xi)$, $T_m(\xi)$, $T_{m+1}(\xi)$, $T_{m+2}(\xi)$ ve $T_{m+3}(\xi)$ kuintik trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları kullanılacaktır. Bu durumda her bir alt aralıktaki eleman matrislerinin her bir elemanı $i, j : m-2, m-1, m, m+1, m+2,$

ve $m + 3$ için

$$\begin{aligned}
A_{ij}^e &= \int_0^h T_i T_j d\xi, \\
B_{ij}^e &= \int_0^h T_i' T_j' d\xi, \\
C_{ij}^e &= \int_0^h T_i \sum_{k=m-2}^{m+3} \sum_{l=m-2}^{m+3} [3T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n + T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi, \\
D_{ij}^e &= \int_0^h T_i \sum_{k=m-2}^{m+3} \sum_{l=m-2}^{m+3} [2T_k \sigma_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi, \\
E_{ij}^e &= \int_0^h T_i \sum_{k=m-2}^{m+3} \sum_{l=m-2}^{m+3} [T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n + T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi, \\
F_{ij}^e &= \int_0^h T_i \sum_{k=m-2}^{m+3} \sum_{l=m-2}^{m+3} [T_k \sigma_k^n T_l \sigma_l^n + 3T_k \rho_k^n T_l \rho_l^n] T_j d\xi
\end{aligned}$$

olarak alınırsa, (7.14) ve (7.15) yaklaşımları

$$\begin{aligned}
\sigma^e &= (\sigma_{m-2}, \sigma_{m-1}, \sigma_m, \sigma_{m+1}, \sigma_{m+2}, \sigma_{m+3})^T \\
\rho^e &= (\rho_{m-2}, \rho_{m-1}, \rho_m, \rho_{m+1}, \rho_{m+2}, \rho_{m+3})^T
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
&A^e (\rho^e)^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} B^e (\sigma^e)^{n+1} - \frac{\Delta t q}{2} C^e (\sigma^e)^{n+1} - \frac{\Delta t q}{2} D^e (\sigma^e)^{n+1} \\
&- \left(A^e (\rho^e)^n + \frac{\Delta t}{2} B^e (\sigma^e)^n - \frac{\Delta t q}{2} E^e (\sigma^e)^n \right), \tag{7.16}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&A^e (\sigma^e)^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} B^e (\rho^e)^{n+1} + \frac{\Delta t q}{2} F^e (\rho^e)^{n+1} + \frac{\Delta t q}{2} D^e (\rho^e)^{n+1} \\
&- \left(A^e (\sigma^e)^n - \frac{\Delta t}{2} B^e (\rho^e)^n + \frac{\Delta t q}{2} E^e (\rho^e)^n \right) \tag{7.17}
\end{aligned}$$

olarak eleman matrisleriyle yazılabilir. (7.16) ve (7.17) yaklaşımlarında bulunan eleman matrislerinin $m = 0, 1, \dots, N - 1$ için uygun şekilde birbirlerine eklenmesi sonucunda

$$\begin{aligned}
\sigma &= (\sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \dots, \sigma_N, \sigma_{N+1}, \sigma_{N+2})^T \\
\rho &= (\rho_{-2}, \rho_{-1}, \dots, \rho_N, \rho_{N+1}, \rho_{N+2})^T
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$A\rho^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} B\sigma^{n+1} - \frac{\Delta t q}{2} C\sigma^{n+1} - \frac{\Delta t q}{2} D\sigma^{n+1} = A\rho^n + \frac{\Delta t}{2} B\sigma^n - \frac{\Delta t q}{2} E\sigma^n, \tag{7.18}$$

ve

$$A\sigma^{n+1} + \frac{\Delta t}{2}B\rho^{n+1} + \frac{\Delta tq}{2}F\rho^{n+1} + \frac{\Delta tq}{2}D\rho^{n+1} = A\sigma^n - \frac{\Delta t}{2}B\rho^n + \frac{\Delta tq}{2}E\rho^n \quad (7.19)$$

elde edilir. (7.18) ve (7.19) denklemlerinden oluşan denklem sistemi Metot 7'de olduğu gibi $2N + 10$ denklem ve $2N + 10$ bilinmeyenden oluşan ve her bir satırında en fazla 22 elemanı sıfırdan farklı olan bir sistemdir. Sınır şartlarının sisteme adapte edilmesi ve denklem sisteminin çözülebilmesi için ilk olarak bulunması gereken

$$(\sigma_{-2}^0, \rho_{-2}^0, \sigma_{-1}^0, \rho_{-1}^0, \dots, \sigma_N^0, \rho_N^0, \sigma_{N+1}^0, \rho_{N+1}^0, \sigma_{N+2}^0, \rho_{N+2}^0)$$

başlangıç bilinmeyenler vektörünün bulunması için yapılacak işlemler Metot 7'de yapılanlar ile aynıdır. Denklem sisteminin çözülmesiyle bulunan

$$(\sigma_{-2}^{n+1}, \rho_{-2}^{n+1}, \sigma_{-1}^{n+1}, \rho_{-1}^{n+1}, \dots, \sigma_N^{n+1}, \rho_N^{n+1}, \sigma_{N+1}^{n+1}, \rho_{N+1}^{n+1}, \sigma_{N+2}^{n+1}, \rho_{N+2}^{n+1})$$

bilinmeyenler vektörü kullanılarak istenilen zamanlardaki $x = x_m$ noktasındaki bilinmeyen U_m^{n+1} fonksiyonu bölünme noktalarındaki kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonu kullanılarak Metot 7'de olduğu gibi bulunur.

7.3. Soliton Dalgasının Hareketi Test Problemi

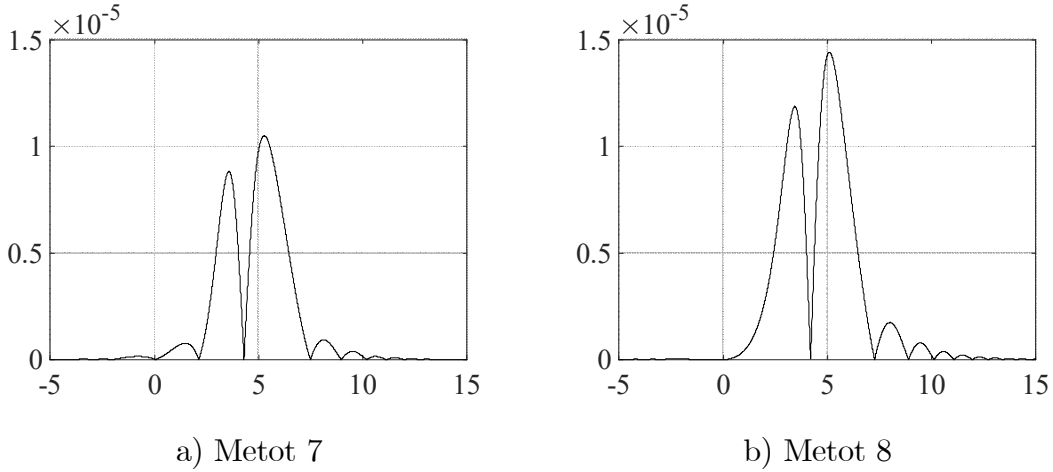
Önceki bölümlerde olduğu gibi soliton dalgasının hareketi test probleminde $q = 2$, $S = 4$, $\alpha = 1$ seçimleri yapılarak $-30 \leq x \leq 30$ konum aralığı üzerinde programlar $t = 1$ zamanına kadar çalıştırılacaktır. Önceki bölümlerde de olduğu gibi ilk olarak $-30 \leq x \leq 30$ tanım aralığında sabit $h = 0.005$ ve farklı Δt değerleri için programlar çalıştırılmış ve L_∞ hata normu, korunum sabitleri ve yakınsaklık oranları Çizelge 7.1'de verilmiştir. Çizelge 7.1 incelendiğinde zaman artım uzunluğu azaldıkça hataların her iki metot için de azaldığı, korunum sabitlerinin birbirlerine yakın olduğu ve Metot 7'nin daha iyi sonuçlar verdiği söylenebilir. Ayrıca her iki metot için de yakınsaklık oranının Crank Nicolson zaman parçalanmasının doğruluğu olan 2 civarında olduğu görülebilir.

Çizelge 7.1 : $h = 0.005$ ve farklı zaman artımları için

hata normları, korunum sabitleri ve yakınsaklık oranları

Metot 7				
Δt	C_1	C_2	L_∞	Y.O
0.1	1.9958141853	7.2814507484	1.12×10^{-1}	-
0.05	1.9997574728	7.3307504007	2.72×10^{-2}	2.04
0.02	1.9999939804	7.3332713649	4.22×10^{-3}	2.03
0.01	1.9999996255	7.3333295266	1.05×10^{-3}	2.01
0.005	1.9999999766	7.3333330973	2.62×10^{-4}	2.00
0.002	1.9999999994	7.3333333273	4.19×10^{-5}	2.00
0.001	2.0000000000	7.3333333329	1.05×10^{-5}	2.00
Tam	2	7.3333333333	0	
Metot 8				
Δt	C_1	C_2	L_∞	Y.O
0.1	2.0559950917	7.6975721385	1.65×10^{-1}	-
0.05	2.0063580970	7.3653612764	3.60×10^{-2}	2.19
0.02	2.0003960347	7.3351710652	5.72×10^{-3}	2.01
0.01	2.0000491443	7.3335551916	1.43×10^{-3}	1.99
0.005	2.0000061214	7.3333605787	3.59×10^{-4}	2.00
0.002	2.0000003909	7.3333350583	5.76×10^{-5}	2.00
0.001	2.0000000488	7.3333335482	1.44×10^{-5}	2.00
Tam	2	7.3333333333	0	

Şekil 7.1'de $h = 0.005$ ve $\Delta t = 0.001$ için $t = 1$ zamanındaki mutlak hatalar çizilmiştir. Daha önceki bölümlerde olduğu gibi her iki metot için de maksimum hatalar konum aralığının orta kısımlarında gelmektedir.



Şekil 7.1 : $h = 0.005$ ve $\Delta t = 0.001$ için $t = 1$ zamanındaki mutlak hatalar

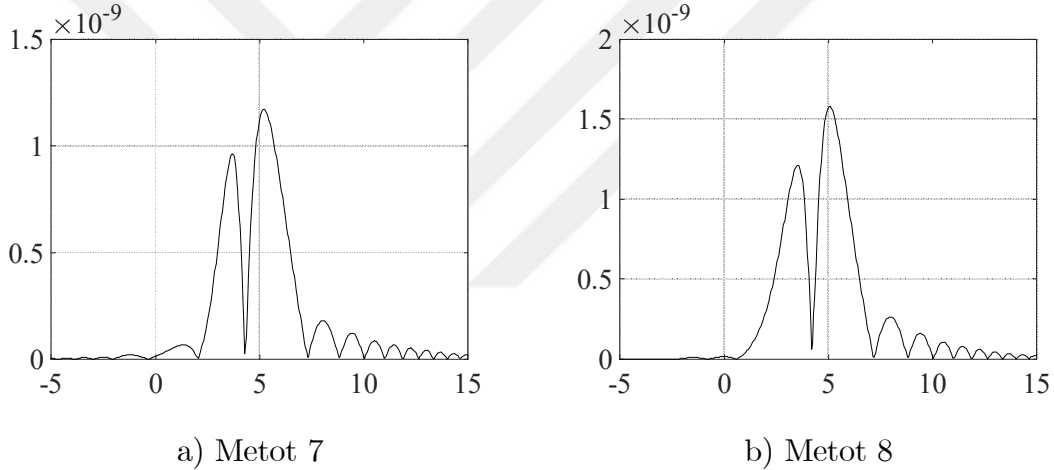
Programlar $-30 \leq x \leq 30$ tanım aralığında sabit $\Delta t = 0.00001$ ve farklı h değerleri için tekrar çalıştırılmış ve Çizelge 7.2’de L_∞ hata normu, korunum sabitleri ve yakınsaklık oranları verilmiştir.

Çizelge 7.2 : $\Delta t = 0.00001$ ve farklı konum artımları için hata normları, korunum sabitleri ve yakınsaklık oranları

Metot 7				
h	C_1	C_2	L_∞	Y.O
1	1.9872139810	6.5604633697	1.54×10^{-1}	-
0.5	2.0000060068	7.3184408395	8.98×10^{-4}	7.42
0.2	2.0000000000	7.3333084969	1.27×10^{-6}	7.16
0.1	2.0000000000	7.3333329918	1.30×10^{-8}	6.61
0.05	2.0000000000	7.3333333281	1.17×10^{-9}	3.47
Tam	2	7.3333333333	0	
Metot 8				
h	C_1	C_2	L_∞	Y.O
1	1.9872141081	6.5604603508	1.54×10^{-1}	-
0.5	2.0000060068	7.3184408395	8.98×10^{-4}	7.42
0.2	2.0000000000	7.3333084969	1.27×10^{-6}	7.16
0.1	2.0000000000	7.3333329918	1.30×10^{-8}	6.61
0.05	2.0000000000	7.3333333281	1.58×10^{-9}	3.04
Tam	2	7.3333333333	0	

Çizelge 7.2 incelendiğinde konum artım uzunluğu h küçüldükçe yaklaşık integral hesabındaki hatanın ve L_∞ mutlak hatalarının küçüldüğü görülmektedir. Her iki metod için bulunan yakınsama oranı incelendiğinde oranın her iki metod için önce 7 civarında olduğu ardından düştüğü görülebilir. Bu durum kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonlar kullanıldığında hesaplanan integrallerin sayısının yüksek olması, yuvarlama hataları gibi sebeplerden dolayı artık daha küçük konum artımları kullanıldığında daha iyi sonuçlar elde edilemeyeceği anlamına gelmektedir.

Şekil 7.2'de $\Delta t = 0.00001$ ve $h = 0.05$ için $t = 1$ zamanındaki mutlak hatalar çizilmiştir. Şekil incelendiğinde mutlak hataların her iki metod için önceki bölümlerde olduğu gibi konum aralığının orta kısımlarında geldiği görülmektedir.



Şekil 7.2 : $\Delta t = 0.00001$ ve $h = 0.05$ için $t = 1$ zamanındaki mutlak hatalar

7.4. İki Soliton Dalgasının Çarpışması Test Problemi

Önceki bölümlerde olduğu gibi iki soliton dalgasının çarpışması test probleminde

$$q = 2, \alpha_1 = \alpha_2 = 1, S_1 = 4, \tilde{x}_1 = -10, S_2 = -4, \tilde{x}_2 = 10$$

parametreleri seçilerek $-30 \leq x \leq 30$ konum aralığı üzerinde programlar yine $t = 5$ zamana kadar çalıştırılacaktır. Bu durumda genlik değerleri 1 ve tepe noktaları $x = -10$ ile $x = 10$ noktalarına karşılık gelen iki soliton dalgasının hareketi modellenmektedir. Çizelge 7.3'te $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için bazı zamanlardaki korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri Metod 7 ve Metod 8 için verilmiştir. Korunum sabitlerinin yaklaşık değerlerinin zaman içerisinde hemen hemen sabit kaldığı görülebilir. Ayrıca

Metot 7 kullanıldığında elde edilen sonuçların Metot 8 kullanıldığında elde edilen sonuçlara göre daha iyi olduğu görülmektedir.

Çizelge 7.3 : $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için bazı zamanlardaki korunum sabitleri

Metot 7			Metot 8	
t	C_1	C_2	C_1	C_2
0	4.0000000001	14.6666659822	4.0000000001	14.6666659822
1	3.9999992516	14.6666583603	4.0000982884	14.6671097007
2	4.0000065051	14.6667276671	4.0001888510	14.6673986208
3	4.0000021477	14.6666883766	4.0003049949	14.6680203166
4	3.9999990805	14.6666525447	4.0004061292	14.6685248278
5	3.9999994314	14.6666551815	4.0005036083	14.6689516660
Tam	4	14.6666666667	4	14.6666666667

Çizelge 7.4'te ise aynı $\Delta t = 0.01$ değeri ile bu kez $h = 0.01$ konum artımı için bazı zamanlardaki korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri Metot 7 ve Metot 8 için verilmiştir. Çizelge 7.3 ve Çizelge 7.4'te elde edilen sonuçlar karşılaştırıldığında Metot 7 kullanıldığında sonuçların değişmediği Metot 8 kullanıldığında ise sonuçların kötüleştiği görülmektedir.

Çizelge 7.4 : $h = 0.01$ ve $\Delta t = 0.01$ için bazı zamanlardaki korunum sabitleri

Metot 7			Metot 8	
t	C_1	C_2	C_1	C_2
0	4.0000000001	14.6666666653	4.0000000001	14.6666666653
1	3.9999992515	14.6666590483	4.0000982884	14.6671103893
2	4.0000065050	14.6667283729	4.0001888508	14.6673993482
3	4.0000021478	14.6666890480	4.0003049953	14.6680269836
4	3.9999990804	14.6666532327	4.0004061906	14.6700953198
5	3.9999994314	14.6666558685	4.0005154030	14.9120031099
Tam	4	14.6666666667	4	14.6666666667

8. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada lineer olmayan Schrödinger (NLS) denkleminin sayısal çözümü, zaman parçalanması için Crank Nicolson yöntemi ve konum parçalanması için ise kuadratik, kübik, kuartik ve kuintik trigonometrik B-spline Galerkin yöntemleri kullanılarak elde edilmiştir. Yöntemler uygulandığında elde edilen denklem sistemlerini çözebilmek için iç iterasyon lineerleştirilmesi ile Rubin ve Graves tarafından önerilen lineerleştirme kullanılmıştır. Böylece iki farklı lineerleştirme ve dört farklı trigonometrik B-spline fonksiyon kullanılarak toplamda sekiz metot, NLS denkleminin sayısal çözümü için önerilmiştir.

Metotların doğruluğunun kontrolü için soliton dalgasının hareketi ve iki soliton dalgasının çarpışması test problemleri kullanılmıştır. Önerilen yöntemlerde zaman parçalanması için Crank Nicolson yöntemi kullanıldığı için yöntemleri birbirinden ayıran farklılık konum parçalanması için kullanılan trigonometrik B-spline fonksiyonlar olmaktadır. Kuadratik, kübik, kuartik ve kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonlar kullanıldığında elde edilen denklem sistemleri sırasıyla 10, 14, 18 ve 22'li bant matrisler olarak gelmektedir. Bu sebeple elde edilen denklem sistemleri çözülmeye maliyeti en düşük olan yöntem kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonlarının kullanıldığı yöntemler iken maliyeti en yüksek olan yöntemler kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonlarının kullanıldığı yöntemlerdir. Lineerleştirme yönünden maliyetler incelendiğinde ise Rubin ve Graves lineerleştirmesinin oldukça avantajlı olduğu görülmektedir. Zaman yönünden iç iterasyonun kullanıldığı yöntemler Rubin ve Graves lineerleştirmesinin kullanıldığı yöntemlere göre yaklaşık 3 kat daha uzun sürmektedir.

Soliton dalgasının hareketi test probleminde öncelikle konum artım uzunluğu sabit tutulup zaman artım uzunluğu küçültülerek sonuçlar bulunmuştur. $h = 0.005$ ve $\Delta t = 0.001$ için elde edilen tüm sonuçlar Çizelge 8.1'de tekrar verilmiştir. Korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri ve hata norm değerleri incelendiğinde en iyi sonucu Metot 5'in yani kuartik trigonometrik B-spline fonksiyonunun kullanıldığı ve iç iterasyonla lineerleştirmenin yapıldığı metodun verdiği görülmektedir.

Çizelge 8.1: $h = 0.005$ ve $\Delta t = 0.001$ için

korunum sabitleri ve hata normları

Metotlar	C_1	C_2	L_∞
Metot 1	2.0000000000	7.3335011167	1.05×10^{-5}
Metot 2	2.0000000488	7.3335013318	1.44×10^{-5}
Metot 3	2.0000000000	7.3333333314	1.05×10^{-5}
Metot 4	2.0000000488	7.3333335466	1.44×10^{-5}
Metot 5	2.0000000000	7.3333333332	1.05×10^{-5}
Metot 6	2.0000000488	7.3333335484	1.44×10^{-5}
Metot 7	2.0000000000	7.3333333329	1.05×10^{-5}
Metot 8	2.0000000488	7.3333335482	1.44×10^{-5}

Soliton dalgasının hareketi test probleminde zaman artım uzunluğu sabit tutulup konum artım uzunluğu küçültülerek sonuçlar bulunmuştur. $h = 0.05$ ve $\Delta t = 0.00001$ için elde edilen tüm sonuçlar Çizelge 8.2'de tekrar verilmiştir. Korunum sabitlerinin yaklaşık değerlerinin tam sonuca yakın olduğu sonuçlar Metot 7 ve Metot 8'in kullanıldığı yöntemlerden yani kuartik trigonometrik B-spline fonksiyonun kullanıldığı yöntemlerde elde edilmiştir. Hata norm değerleri incelendiğinde ise en iyi sonucu Metot 5'in verdiği görülmektedir.

Çizelge 8.2: $h = 0.05$ ve $\Delta t = 0.00001$ için

korunum sabitleri ve hata normları

Metotlar	C_1	C_2	L_∞
Metot 1	2.0000000000	7.3501541167	3.19×10^{-6}
Metot 2	2.0000000000	7.3501541167	3.19×10^{-6}
Metot 3	2.0000000000	7.3333173459	2.69×10^{-7}
Metot 4	2.0000000000	7.3333173458	2.69×10^{-7}
Metot 5	2.0000000000	7.3333357360	6.52×10^{-10}
Metot 6	2.0000000000	7.3333357360	1.03×10^{-9}
Metot 7	2.0000000000	7.3333333281	1.17×10^{-9}
Metot 8	2.0000000000	7.3333333281	1.58×10^{-9}

İki soliton dalgasının çarpışması test probleminde zaman artım uzunluğu $\Delta t = 0.01$ olarak sabit alınmış ve konum artım uzunluğu $h = 0.1$ ile $h = 0.01$ alınarak program $t = 5$ zamana kadar çalıştırılmıştır. Bu test problemi için analitik çözüm olmadığından korunum sabitlerinin çarpışması sonrasında sabit kalıp kalmadıklarına bakılabilir. Diğer bir ifade ile $t = 5$ anında korunum sabitlerinin yaklaşık değerlerine göre bir yorum yapılabilir. Çizelge 8.3 incelendiğinde en iyi sonucu $t = 5$ anında Metot 5 ile Metot 7'nin verdiği görülebilir.

Çizelge 8.3 : $\Delta t = 0.01$ için $t = 5$ zamanındaki korunum sabitleri

	$h = 0.1$		$h = 0.01$	
	C_1	C_2	C_1	C_2
Metot 1	3.9999994111	14.8023658179	3.9999994314	14.6679992477
Metot 2	4.0005035158	14.8046980732	4.0005036052	14.6702942054
Metot 3	3.9999994469	14.6661385046	3.9999994314	14.6666558174
Metot 4	4.0005036186	14.6684328093	4.0005036052	14.6689503817
Metot 5	3.9999994311	14.6667354303	3.9999994314	14.6666558762
Metot 6	4.0005036047	14.6690300622	4.0005036052	14.6689504406
Metot 7	3.9999994314	14.6666551815	3.9999994314	14.6666558685
Metot 8	4.0005036083	14.6689516660	4.0005154030	14.9120031099
Tam	4	14.6666666667	4	14.6666666667

9. SONUÇ VE ÖNERİLER

NLS denkleminin sayısal çözümünün araştırıldığı bu çalışmada soliton dalgasının hareketi test probleminde elde edilen sonuçlar incelendiğinde, zaman artım uzunluğu çok küçük seçilerek zaman parçalanmasından kaynaklanan hatanın minimuma indirildiği ve hesaplamalarda kullanılan spline fonksiyonun derecesi arttığında hataların azaldığı görülmektedir (Çizelge 4.2, Çizelge 5.2, Çizelge 6.2., Çizelge 7.2). Dolayısıyla yüksek dereceden spline fonksiyonlar kullanıldığında işlem maliyeti artarken daha iyi sonuçlar elde edilmektedir.

İkinci test problemi olan iki soliton dalgasının çarpışması test probleminde ise genellikle tüm yöntemler iyi sonuç vermiştir. İkinci test probleminde korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri hesaplanırken yamuklar kuralı ile yaklaşık hesaplama yapılmıştır. Bu sebeple konum aralığı aralık ne kadar çok parçaya bölünürse veya diğer bir ifade ile konum artım uzunluğu ne kadar küçük tutulursa sonuçların o kadar iyi gelmesi beklenmektedir. Özellikle çarpışma sonrası soliton dalgalarının özelliklerini korumaları gerektiğinden çarpışma sonrası korunum sabitlerinin değerlerinin değişmeden kalmış olması istenilen bir durumdur.

Sonuç olarak, sayısal çözümü araştırılan NLS denklemi için yüksek dereceden trigonometrik B-spline fonksiyonların kullanıldığı ve iç iterasyon işleminin yapıldığı Galerkin yönteminde işlem maliyeti artarken daha iyi sonuçlar elde edilmektedir. Daha iyi sonuçların elde edilebilmesi için zaman parçalanması yapılırken kullanılan ve doğruluğu iki olan Crank Nicolson metodu yerine doğruluğu daha yüksek metotlar da kullanılabilir. Ayrıca önerilen yöntemler benzer kısmi türevli diferensiyel denklemlerin sayısal çözümleri için de kullanılabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Abbas, M., Majid, A.A., Ismail, A.I.M., Rashid, A., 2014 a, Numerical method using cubic trigonometric B-spline technique for nonclassical diffusion problems, Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis, Vol.2014, Article ID 849682, 11p.
- Abbas, M., Majid, A.A., Ismail, A.I.M., Rashid, A., 2014 b, The application of cubic trigonometric B-spline to the numerical solution of the hyperbolic problems, Applied Mathematics and Computation, 239, p.74-88.
- Aksoy, A.M., Irk, D., Dağ, İ., 2012, Taylor collocation method for the numerical solution of the nonlinear Schrödinger equation using quintic B-Spline basis, Physics of Wave Phenomena, 20(1), p.67-79.
- Aksoy, A.M., Irk, D., Dağ, İ., 2013, Taylor collocation method for the numerical solution of the NLS equation using cubic B-spline basis, International Journal of Nonlinear Science, 15(4), p.322-333.
- Ay, B., Dağ, İ., Görgülü, M.Z., 2015, Trigonometric quadratic B-spline subdomain Galerkin algorithm for the Burgers' equation, Open Physics, 13(1), p.400-406.
- Başhan, A., Uçar, Y., Yağmurlu, N. M., Esen, A., 2018, A new perspective for quintic B-spline based Crank Nicolson differential quadrature method algorithm for numerical solutions of the NLS equation, The European Physical Journal Plus, 133(1), p.12.
- Crank, J., Nicolson, P., 1947, A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 43, p.50-64.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Dağ, İ., 1999, A quadratic B-spline finite element method for solving the nonlinear Schrödinger equation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 174, p.247-258.
- Dağ, İ., Ersoy, Ö., Kaçmaz, O., 2017, The trigonometric cubic B-spline algorithm for Burgers' equation, *International Journal of Nonlinear Science*, 24(2), p.120-128.
- De Boor, C., 1978, *A practical guide to splines*, Springer-Verlag, p.392.
- De la Hoz, F., Vadillo, F., 2008, An exponential time differencing method for the nonlinear Schrödinger equation, *Computer Physics Communications*, 179, p.449-456.
- Dereli, Y., Irk, D., Dağ, İ., 2009, Soliton solutions for NLS equation using radial basis functions, *Chaos, Solitons and Fractals*, 42, p.1227-1233.
- El-Danaf, T. S., Ramadan, M. A., Alaal, F. E. A., 2012, Numerical studies of the cubic NLS equation, *Nonlinear Dynamics*, 67(1), p.619-627.
- Fish, J., Belytschko, T., 2007, *A First Course in Finite Elements*, John Wiley & Sons, Chichester, England, p.336.
- Gardner, L.R. T., Gardner, G.A., Zaki, S.I., El Sharawi, Z., 1993 a, A leapfrog algorithm and stability studies for the non-linear Schrödinger equation, *The Arabian Journal for Science and Engineering*, 18(1) p.23-32.
- Gardner, L.R. T., Gardner, G.A., Zaki, S.I., El Sharawi, Z., 1993 b, B-spline finite element studies of the non-linear Schrödinger equation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 108(3-4), p.303-318.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Hamid, N.N.A., Majid, A.A., Ismail, A.I.M., 2010, Cubic trigonometric B-spline applied to linear two-point boundary value problems of order two, International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering, 4(10), p.1377-1382.
- Hosseini, F., Pouyafar, V., Sadough, S. A., 2009, Finite-difference solutions of a non-linear Schrödinger, World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS), p.92-97.
- Irk, D., 2007, Bazı kısmi türevli diferensiyel denklem sistemlerinin B-spline sonlu elemanlar çözümleri, Doktora tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, s.148.
- Irk, D., Keskin, P., 2016, Cubic Trigonometric B-spline Galerkin Methods for the Regularized Long Wave Equation, Journal of Physics: Conference Series, 766, 012032.
- Irk, D., Keskin, P., 2017, Quadratic trigonometric B-spline Galerkin methods for the Regularized Long Wave equation, Journal of Applied Analysis and Computation, 7(2), p.617–631.
- Irk, D., Keskin Yıldız P., Zorşahin Görgülü M., 2019, Quartic trigonometric B-spline algorithm for numerical solution of the Regularized Long Wave equation, Turkish Journal of Mathematics, 43, p.112-125.
- Kaplan, A. G., Dereli, Y., 2017, A meshless method and stability analysis for the NLS equation, Waves in Random and Complex Media, 27(4), p.602-614.
- Karpman, V.I., Krushkal, E.M., 1969, Modulated waves in non-linear dispersive media, Soviet Physics JETP, 28, p.277-281.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Keskin, P., 2016, RLW denkleminin trigonometrik B-spline çözümleri, Doktora tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, s.198.
- Korkmaz, A., Dağ, İ., 2008, A differential quadrature algorithm for simulations of the nonlinear Schrödinger equation, *Computers & Mathematics with Applications*, 56(9), p.2222-2234.
- Korkmaz, A., Dağ, İ., 2009, A diferential quadrature algorithm for nonlinear Schrödinger equation, *Nonlinear Dynamics*, 56(1-2), p.69-83.
- Lin, B., 2015, Septic spline function method for nonlinear Schrödinger equations, *Applicable Analysis*, 94(2), p.279-293.
- Lyche, T., Winther, R., 1979, A stable recurrence relation for trigonometric B-splines, *Journal of Approximation Theory*, 25, p.266-279.
- Mokhtari, R., Isvand, D., Chegini, N. G., Salaripannah, A., 2013, Numerical solution of the Schrödinger equations by using Delta-shaped basis functions, *Nonlinear Dynamics*, 74(1-2), p.77-93.
- Nikolis, A., 2004, Numerical solutions of ordinary differential equations with quadratic trigonometric splines, *Applied Mathematics E-Notes*, p.142-149.
- Nikolis, A., Seimenis, I., 2005, Solving dynamical systems with cubic trigonometric splines, *Applied Mathematics E-Notes*, 5, p.116-123.
- Robinson, M.P., Fairweather, G., 1994, Orthogonal spline collocation methods for Schrödinger-type equation in one space variable, *Numerische Mathematik*, 68(3), p.303-318.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Robinson, M.P., 1997, The solution of nonlinear Schrödinger equations using orthogonal spline collocation, *Computers & Mathematics with Applications*, 33(7), p39-57.
- Rubin, S.G., Graves, R.A., 1975, A Cubic spline approximation for problems in fluid mechanics, Nasa TR R-436, Washington, DC.
- Russel, J.S., 1844, Report on waves, Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science (John Murray, London) p.311–390.
- Saka, B., 2012, A quintic B-spline finite-element method for solving the NLS equation, *Physics of Wave Phenomena*, 20(2), p.107-117.
- Sepehrian, B., Radpoor, M. K., 2014, Numerical solution of Schrodinger equation using compact finite differences method and the cubic spline functions, *International Journal of Applied Mathematics Research*, 3(4), p.572.
- Schoenberg, I. J., 1946, Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions, *Quarterly of Applied Mathematics*, 4, p.45-99.
- Scott, A.C., Chu, F.Y.F., Mclaughlin, D.W., 1973, The soliton: A new concept in applied science, *Proceedings of the IEEE* 61(10), p.1443-1483.
- Twizell, E.H., Bratsos, A.G., Newby, J.C., 1997, A finite-difference method for solving the cubic Schrödinger equation, *Mathematics and Computers in Simulation*, 43(1), p.67-75.
- Turner, M.J., Clough, R.W., Martin, H.C., Topp, L.J., 1956, Stiffness and deflection analysis of complex structures, *Journal of the Aeronautical Sciences*, 23(9), p.805-823.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Wadati, M., 2001, Introduction to solitons, *Pramana Journal of Physics* 57(5), p.841-847.

Walz, G., 1997, Identities for trigonometric B-splines with an application to curve design, *BIT Numerical Mathematics*, 37(1), p.189-201.

Zakharov, V.E., Shabat., A.B., 1972, Exact theory of two dimensional self focusing and one dimensional self waves in non-linear media, *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 34(1) p.62-69.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı:	Mehmet Ali Mersin
Uyruğu:	T. C.
Doğum Yeri- Tarihi:	Hatay- 25.04.1982
Adresi:	Bahçeköy Mah. Merkez Kampüs Aksaray Üniversitesi Merkez AKSARAY
E-posta Adresi:	mehmetalimersin@gmail.com
Eğitim Bilgileri:	Doktora: Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Bilim Dalı (2014-2019)
	Yüksek Lisans: Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Bilim Dalı (2011-2014)
	Lisans: Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (2002-2007)
İş Deneyimi:	Aksaray Üniversitesi Rektörlük Dış İlişkiler Öğretim Görevlisi (2018-...) Aksaray Üniversitesi Rektörlük Dış İlişkiler Uzman (2015-2018) Aksaray Üniversitesi Rektörlük Enformatik Bölümü Uzman (2012-2015) Aksaray Üniversitesi Rektörlük Basın Yayın Uzman (2010-2012)