

55024

GAZİ ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**İNCE VE KALIN KOMPOZİT PLAKLARIN NONLİNEER
ANALİZİ İÇİN KAYMA-KİLİTLENMESİZ
BİR SONLU ELEMAN MODELİ**

Ezgi GÜNAY

55024

DOKTORA TEZİ

MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**1996
ANKARA**

Bu tezin Doktora tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.



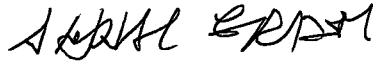
Prof.Dr. Ali Ünal ERDEM

Bu çalışma, jürimiz tarafından Makina Mühendisliği Anabilim Dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof.Dr. Süha ORAL



Üye : Prof.Dr. Ali Ünal ERDEM



Üye : Prof.Dr. Mehmet UTKU



Bu tez Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.



**İNCE VE KALIN KOMPOZİT PLAKLARIN NONLİNEER
ANALİZİ İÇİN KAYMA-KİLİTLENMESİZ BİR
SONLU ELEMAN MODELİ
(Doktora Tezi)**

**Ezgi GÜNEY
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Ekim 1996**

ÖZET

Bu çalışmada ince/kalın plakların enine kayma deformasyonu ile lineer olmayan statik analizi, bu amaç için geliştirilmiş bir *COMPAN* kodu ile sonlu elemanlar metodu kullanılarak hazırlanmıştır. Diğer taraftan kalın plaktan ince plak analizine adaptasyon gerçekleştirilirken, kayma-kitlenmesi olayından kaçınmak için 9, 8, ve 12 noktalı ağ elemanları kullanılarak yeni melez eleman geliştirilmiştir. Plak düzgün yayılı yük altında iken iki farklı sınır şartı kullanılmıştır: basit mesnetli ve ankastre. Maksimum gerilme dağılımları yukarıda belirttiğimiz *COMPAN* kodu ile elde edildikten sonra, gene bu amaçla geliştirdiğimiz diğer koda (*LAMİNATE*) yüklenerek genleme/gerilme dağılımı ve kırılma modları her tabakada tayin edilmiştir.

Bilim kodu : 625.03.01
Anahtar kelimeler : Sonlu Elemanlar, Kompozit Plaklar, Genleme, Enine
Kayma Gerilmesi, Kayma Kitlenmesi
Sayfa adedi : 310
Tez Yöneticisi : Prof.Dr.Ali Ünal Erdem

***A NONLOCKING FINITE ELEMENT MODEL FOR
NONLINEAR ANALYSIS OF THIN AND THICK
COMPOSITE PLATES
(Ph.D. Thesis)***

***Ezgi GÜNEY
GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
Ekim 1996***

ABSTRACT

In this study, a nonlinear static analysis of thin/thick plates with transverse shear deformation are studied by use of finite element method working with a new code *COMPAN* we have introduced for this purpose. On the other hand we have also developed a new modified mesh element with 9, 8 and 12 nodes for avoiding shear-locking phenomenon when adapting from thick to thin plate analysis. The plate subjected to a uniformly distributed load is considered under two different boundary conditions: simply supported and clamped. After the maximum stress distributions have been determined by *COMPAN* code mentioned above the results are loaded into another code we have developed (*LAMINATE*) which is prepared for yielding strain / stress analysis and failure modes for each layer seperately.

Science code : 625.03.01
Keywords : Finite Element, Composite Plates, Strain, Transverse
Shear Stress, Shear Locking
Page number : 310
Advisor : Prof.Dr.Ali Ünal Erdem

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam esnasında değerli bilgi ve tavsiyelerinden, yapıcı eleştiri ve desteğinden faydalandığım tez danışmanım Prof. Dr. Ali Ünal ERDEM' e sonsuz şükranlarımı sunarım.

Tez çalışmalarımı gerçekleştirdiğim Gazi Üniversitesi Makina Mühendisliği Bölümü bünyesinde bulunan tüm değerli öğretim üyesi ve araştırma görevlisi arkadaşlarıma her zamanki destekleri için teşekkürü borç bilirim.

Ayrıca bölüme girmeden önce çalıştığım Emekli Sandığı Genel Müdürlüğü Bilgi İşlem Dairesi'nde doktora derslerime devam edebilmem için bana destek olan Bilgi İşlem Dairesi Başkanı, sayın Hüseyin YILMAZ'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
NOTASYON	ix
TABLoların LİSTESİ	xiii
GRAFİKLERİN LİSTESİ	xx
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	xxvi
 GİRİŞ	 1
 1. KAYNAK ARAŞTIRMASI	 8
 2. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİNİN PLAK	
ANALİZİNDE KULLANIMI	16
2.1 SEY İçin Plak Denklemleri	16
2.2 SEY İçin Plak Bünye Denklemleri	18
2.2.1 Geliştirilmiş melez eleman için şekil	
matrisinin oluşumu	22
 3. KOMPOZİT PLAKLARIN LİNEER OLMAYAN	
DAVRANIŞLARININ SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ	
İLE ANALİZİ	27
3.1 Lineer Olmayan Şekil Matrisinin Oluşturulması	29
3.2 Lineer Olmayan Katılık Matrislerinin Oluşumu	35
3.3 Lineer Olmayan Denklem Takımlarının Yineleme	
Yöntemi İle Çözümü	40

	<i>Sayfa</i>
4. ENİNE KAYMA GERİLME VE GENLEMELERİ	
İÇİN MELEZ(Heterosis) ELEMAN TANIMLAMALARI ..	43
4.1 Penaltı Faktör Teknikleri	44
4.2 Melez Eleman Tanımlamaları	48
4.3 Melez Eleman Formülasyonu	54
5. BİRLEŞTİRİLMİŞ İNCE-KALIN PLAK ANALİZİ	
AŞAMALARI VE UYGULAMALAR.....	73
5.1 Fiber Takviyeli Kompozit Malzeme Analiz	
Kodu LAMINATE	73
5.1.1 LAMINATE kodu analiz sonuçları	75
5.1.2 LAMINATE kodu veri giriş	
dosyasının içeriği	77
5.2 İzotropik/Kompozit Plakların COMPAN Kodu	
İle Sonlu Elemanlar Analiz Basamakları	79
5.2.1 COMPAN sonlu elemanlar kodunun	
analiz sonuçları	80
5.3 COMPAN Kodu İle Melez Eleman Uygulamalarının	
Lineer SEY Sonuçları	85
5.4 COMPAN Kodu İle Melez Eleman Uygulamalarının	
Lineer Olmayan SEY Sonuçları	89
5.5 COMPAN Sonlu Eleman Yazılımı Hakkında	
Genel Bilgi	91
6. SONUÇLAR VE TARTIŞMA	163
7. İLERİYE BAKIŞ	169

	<i>Sayfa</i>
KAYNAKLAR	171
EKLER	179
EK-I	
I. PLAK BÜNYE DENKLEMLERİ	180
I.1 Klasik Plak Teorisi	180
I.2 Gerilme Transformasyonu	181
I.3 Genleme Transformasyonu	182
I.4 Bünye Denklemlerinin Çıkarılışı	187
I.5 Kayma Gerilmelerinin Plak Üzerindeki Etkisi	190
I.6 Klasik Plak Teorisi Ve Bünye Denklemleri	196
I.7 Tabakalı Plaklar İçin Mindlin Teorisinin Bünye Denklemlerine Dahil Edilişi	197
EK-II	
KOMPOZİT LEVHALARIN DÜZLEMSEL GERİLME-GENLEME ANALİZİ VERİ GİRİŞ DOSYASI	199
SONLU ELEMENLAR KODU: COMPAN VERİ GİRİŞ DOSYASI	200
EK-III	
MUKAVEMET ANALİZİ	202
III.1 Kompozit Plaklarda Kırılma Teorileri	203
III.1.1 Maksimum gerilme teorisi	204
III.1.2 Maksimum genleme teorisi	205
III.1.3 Tsai-Hill teorisi	207
III.1.4 Hoffmann teorisi	207
III.1.5 Tsai-Wu gerilme teorisi	208
III.1.6 Tsai-Wu genleme teorisi	208

Sayfa

III.2 Kırılma Krüterinin Seçilmesi	209
---	------------

EK-IV

GENEL AKIŞ ŞEMALARI	210
----------------------------------	------------

EK-V**V. ANALİTİK YÖNTEM İLE KOMPOZİT PLAKLARIN****LİNEER VE LİNEER OLMAYAN**

DAVRANIŞLARININ ANALİZİ	225
--------------------------------------	------------

V.1 Navier Çözüm Metodunda Kullanılmakta Olan

Sınır Şartları	225
-----------------------------	------------

V.1.1 SS-1 sınır şartları	225
--	------------

V.1.2 SS-2 sınır şartları	227
--	------------

V.2 Klasik Plak Teorisi	228
--------------------------------------	------------

V.2.1 Plak denge ve bünve denklemleri	228
--	------------

V.3 Simetrik Olmayan Çaprazlama-Katlı**Kompozit Plakların Klasik Plak Teorisi İle**

Lineer Çözümü	235
----------------------------	------------

V.4 Lineer Olmayan Birinci Mertebeden Kayma**Deformasyon Teorisi ile KPT'nin**

karşılaştırılması	242
--------------------------------	------------

V.4.1 Klasik Plak Teorisinde yerdeğiştirme

vektörünün tanımlaması	244
-------------------------------------	------------

V.4.2 Lineer olmayan davranış için

KPT ve Mindlin Teorisi denklemleri	247
---	------------

V.4.3 Mindlin Teorisi için lineer olmayan**davranış için gerinme ve denge**

denklemleri	249
--------------------------	------------

	<i>Sayfa</i>
<i>EK-VI</i>	
<i>LAMINATE KODU ÖRNEK VERİ-ÇIKIŞ DOSYASI</i>	<i>256</i>
<i>ÖZGEÇMİŞ</i>	<i>281</i>



NOTASYON LİSTESİ

Sembol	Anlam
$\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}, \underline{\underline{D}}, \underline{\underline{G}}$	: Kompozit plağın sırasıyla düzlemsel, etkileşimli, eğilme ve kayma katılık matrisleri
$\underline{\underline{\bar{B}}}$	: Büyük deformasyon toplam şekil matrisi
$\underline{\underline{B}}_{=L}$	: Büyük deformasyon şekil matrisi
$\underline{\underline{B}}_{=0}$	: Küçük deformasyon şekil matrisi
$\underline{\underline{D}}$	: İzotropik malzeme için elastik sabitler genel matrisi
E_x, E_y	: Kompozit plağın x ve y yönlerindeki denk elastik modülleri
E_1, E_2	: Fiber ve matris yönlerindeki Young Modülü
e_1, e_2	: Fiber ve matris yönlerindeki doğrusal genlemeler
e_{12}	: Fiber yönlerindeki düzlemsel kayma genlemesi
e_s	: Düzlemsel Kırılma(ultimate) kayma genlemesi
e_{x_t}, e_{x_c}	: Fiber yönündeki ultimate çekme, basma genlemeleri
f_1, f_2	: Fiber ve matris yönlerindeki doğrusal gerilmeler
f_{12}	: Düzlemsel kayma gerilmesi
G_{12}	: Kompozit plağın fiberler yönündeki düzlemsel kayma modülü

Sembol	Anlam
G_{xy}	: Kompozit plağın denk kayma modülü
$[H^*]$	: Melez eleman için modifike edilmiş şekil matrisi
$\underline{\underline{K}}_L$	: Büyük deformasyon katılık matrisi
$\underline{\underline{K}}_0$	: Küçük deformasyon katılık matrisi
$\underline{\underline{K}}_\sigma$	: İlk anlı başlangıç gerilme katılık matrisi
M_x, M_y, M_{xy}	: Kompozit plağın birim genişliğine etki eden net burulma kuvvet değerleri
m_x, m_y	: Kayma etkileşimli elastik sabitleri
N_x, N_y, N_{xy} (T_x, T_y, T_{xy})	: Kompozit plağın birim genişliğine etki eden, net düzlemsel toplam kuvvet değerleri
$\underline{\underline{N}}$	: Şekil matrisi
Q_{ij}	: Azaltılmış katılık matris terimlerinin fiber yönlerindeki (1-2) bileşenleri
$\bar{Q}_{ij}$	: Azaltılmış katılık matris terimlerinin x ve y eksenlerindeki bileşenleri
$\underline{q}(x,y)$	: Plağa etkiyen düzgün yayılı yük vektörü
S	: Düzlemsel kopma (ultimate) kayma gerilme değeri
t_p	: Herhangibir tabakanın kalınlığı
$u, v, w, \theta_x, \theta_y$	: Her elemanın ağ noktasında, Kirchhoff Teorisi için tanımlı yerdeğiştirme vektör bileşenleri

Sembol	Anlam
u, v, w, ϕ_x, ϕ_y :	Her elemanın ağ noktasında, Mindlin Teorisi için tanımlı yerdeğiştirme vektör bileşenleri
w^* :	12 ağ noktasına sahip elemanın modifike edilmiş sehim polinomu
w^{**} :	8 ağ noktasına sahip elemanın geliştirilmiş sehim polinomu
X_t, X_c :	Fiber yönündeki kopma (ultimate) çekme, basma gerilme değerleri
Y_t, Y_c :	Matris yönündeki kopma (ultimate) çekme basma gerilme değerleri
z_p :	Herhangibir tabakanın alt veya üst yüzeylerinin z-koordinatı
α_1, α_2 :	Fiber ve matris yönlerindeki ısı genleşme sabitleri
$\alpha_x, \alpha_y, \alpha_{xy}$:	Kompozit plağın x ve y yönlerindeki ısı genleşme sabitleri
β :	Penaltı faktörü
β_1, β_2 :	Fiber ve matris yönlerindeki nem genleşme sabitleri
$\beta_x, \beta_y, \beta_{xy}$:	Kompozit plağın x ve y koordinatlarındaki nem genleşme sabitleri
$\underline{\delta}, \underline{a}$:	Yerdeğiştirme vektörleri
$\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$:	Kartezyen koordinatlarda genleşme değerleri
$\underline{\epsilon}^b_o$:	Büyük deformasyon tanımlaması için, eğilmeden dolayı orta plakta oluşan genleşme vektörü

Sembol	Anlam
$\underline{\varepsilon}^p_o$	: Büyük deformasyon tanımlaması için, orta plakta oluşan düzlemsel genleme vektörü
$\underline{\psi}(a)$	: Dengelenmemiş kalıcı yük değeri
$\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$	: Eğilme genleme değerleri
ν_{xy}	: Kompozit plağın x ve y koordinat sistemindeki denk Poisson oranı



TABLolarIN LİSTESİ

<u>Tablo</u>	<u>Sayfa</u>
Tablo 5.1 LAMINATE kodu genel elastik sabitler matrisi sonuçlarının karşılaştırılması	94
Tablo 5.2 LAMINATE kodunun gerilme ve kırılma analiz sonuçları	95
Tablo 5.3 Düzgün yayılı yük altındaki izotropik plağın orta yüzeyindeki maksimum sehım değerlerinin kayma düzeltici faktör ile kullanımı	97
Tablo 5.4 $[0 / 90]_s$ 9 katlı simetrik kompozit plağın düzlemsel gerilme hali için kırılma analizi ($h_n = 1.78$, $h/L = 16/400 = 0.04$, $W_R / W_C = 1.0049$)	98
Tablo 5.5 3 serbestlik derecesine sahip izotropik plağın, α sabit sayısına göre, sehım değerlerinin değişimi	100
Tablo 5.6 Düzgün dizilmiş yük altındaki $0/90/0$ 3 katlı simetrik kompozit plağın ortasında ($x=y=L/2, z=0$) oluşan sehım dağılımlarının, h/L oranına göre değişimi.....	101
Tablo 5.7 $[0 / 90]_s$ 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plağın, 9-ağ noktalı melez eleman ile elde edilen ve orta noktasında ($x=y=L/2, z=0$) oluşan sehım değerleri	103

<u>Tablo</u>		<u>Sayfa</u>
Tablo 5.8	$[+\theta / -\theta]_s$ dizilmiş 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plağın, 8-ağ noktalı melez eleman ile elde edilen ve orta noktasında $(x=y=L/2, z=0)$ oluşan sehîm dağılımları	109
Tablo 5.9	$[0 / 90]_s$ 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plağın, 8-ağ noktalı melez eleman ile elde edilen ve plağın orta noktasında $(x=y=L/2, z=0)$ oluşan sehîm dağılımlarının h/L oranına göre değışimi	110
Tablo 5.10	$[0 / 90]_s$ dizilmiş 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plağın, 8-ağ noktalı melez eleman ile elde edilen ve plağın orta noktasında $(x=y=L/2, z=0)$ oluşan gerilme dağılımları	111
Tablo 5.11	$[0 / 90]_s$ dizilmiş 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plağın, 8-ağ noktalı melez eleman ile elde edilen ve plağın orta noktasında $(x=y=L/2, z=0)$ oluşan enine kayma gerilme dağılımları $(h_n=33.33, h_T=300, h/L=300/400=0.75)$	112
Tablo 5.12	$[0 / 90]_s$ dizilmiş 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plağın, 8-ağ noktalı melez eleman ile elde edilen ve plağın orta noktasında $(x=y=L/2, z=0)$ oluşan enine kayma gerilme dağılımları $(h_n=2.67, h_T=24, h/L=24/400=0.06)$	113

<u>Tablo</u>		<u>Sayfa</u>
Tablo 5.13	$[0 / 90]_s$ 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plağın, 8-ağ noktalı melez eleman ile elde edilen ve plağın orta noktasında ($x=y=L/2, z=0$) oluşan, M_x , M_y , M_{xy} gerilme dağılımları	114
Tablo 5.14	$[+\theta / -\theta]_s$ 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plağın, 8-ağ noktalı melez eleman ile elde edilen ve plağın orta noktasında ($x=y=L/2, z=0$) oluşan, M_x , M_y , M_{xy} gerilme dağılımları	115
Tablo 5.15	$[0 / 90]_s$ 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plağın, 9-ağ noktalı melez eleman kullanılarak, plağın orta noktasında ($x=y=L/2, z=0$) elde edilen sehim ve gerilme değerlerinin yük değerine göre değişimi ($h_n=0.02$, $h_T=8$, $h/L=8/400=0.89$)	123
Tablo 5.16	$[0 / 90]_s$ 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plağın, 8-ağ noktalı melez eleman ile ve plağın orta noktasında, z-koordinat eksenini boyunca elde edilen gerilme dağılımları ($h_n=2.67$, $h_T=24$, $L=400$, $h_T/L=0.06$)	124
Tablo 5.17	$[0 / 90]_s$ 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plağın değişik ağ noktalarında, z-koordinat eksenini boyunca oluşan enine kayma gerilme dağılımları ($h_n=33.33$, $h_T=300$, $L=400$, $h_T/L=0.75$)	125

TabloSayfa

Tablo 5.18	$[0 / 90]_s$ 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plağın değişik ağ noktalarında, z-koordinat eksenine boyunca oluşan enine kayma gerilme dağılımları ($h_n=2.67$, $h_T=24$, $L=400$, $h_T/L=0.06$)	126
Tablo 5.19	$[0 / 90]_s$ 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plağın değişik ağ noktalarında, z-koordinat eksenine boyunca oluşan enine kayma gerilme dağılımları ($h_n=33.33$, $h_T=300$, $h/L=300/400=0.75$)	127
Tablo 5.20	$[0 / 90]_s$ 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plağın, 9-ağ noktalı melez eleman kullanarak ($x=y=L/2, z=0$) ve z-koordinatı boyunca oluşan, enine kayma gerilme değerlerinin h/L oranına göre değişimi	128
Tablo 5.21	$[0 / 90]_s$ 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plağın, 9-ağ noktalı melez eleman ile elde edilen plağın orta noktasında ($x=y=L/2, z=0$) oluşan, M_x , M_y , M_{xy} gerilme dağılımlarının teorik ve SEY sonuçlarının karşılaştırılması ..	129
Tablo 5.22	Ankastre bağlanmış düzgün yayılı yük altındaki $[0 / 90]_s$ 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plağın, 9-ağ noktalı melez eleman kullanılarak, plağın orta noktasında ($x=y=L/2, z=0$) elde edilen sehim değerlerinin yük artışına göre değişimi ($h/L=40/400=0.1$) ..	130

TabloSayfa

Tablo 5.23	Ankastre bağlanmış düzgün yayılı yük altındaki $[0 / 90]_s$ 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plâgın, 9-ağ noktalı melez eleman kullanılarak, plâgın orta noktasında ($x=y=L/2, z=0$) elde edilen sehîm değêrlerinin yük artışına göre değışimi ($h/L=16/400=0.04$)	133
Tablo 5.24	Basit mesnetle bağlanmış düzgün yayılı yük altındaki $[0 / 90]_s$ 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plâgın, 9-ağ noktalı melez eleman kullanılarak, plâgın orta noktasında ($x=y=L/2, z=0$) lineer ve lineer olmayan analiz sonucunda elde edilen sehîm değêrlerinin yük artışına göre değışimi ($h_n=11.11, h/L=100/400=0.25, W_R / W_C=3.044$)	135
Tablo 5.25	$[0 / 90]_s$ 9-katlı kompozit plâgın, 8-ağ noktalı melez eleman kullanılarak, plâgın orta noktasında ($x=y=L/2, z=0$) lineer ve lineer olmayan analiz sonucunda elde edilen sehîm değêrlerinin yük artışına göre değışimi ($h_n=11.11, h/L=100/400=0.25$)	138
Tablo 5.26	Basit mesnetle bağlanmış düzgün yayılı yük altındaki $[0 / 90]_s$ 9-ağ noktalı melez eleman kullanılarak, plâgın orta noktasında ($x=y=L/2, z=0$) lineer ve lineer olmayan analiz sonucunda elde edilen sehîm değêrlerinin yük artışına göre değışimi ($h_n=0.088, h/L=0.8/400=0.002$)	140

TabloSayfa

Tablo 5.27	[0 / 90] _s 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plağın, 9-ağ noktalı melez eleman kullanılarak, plağın orta noktasında ($x=y=L/2, z=0$) lineer ve lineer olmayan analiz sonucunda elde edilen sehim değerlerinin yük artışına göre değişimi ($h_n=4.45, h/L=40/400=0.1, W_R / W_C=0.7063$)	142
Tablo 5.28	[0 / 90] _s 9-katlı simetrik kompozit plağın, 8 ve 9 ağ noktalı melez elemanlarını lineer ve lineer olmayan analizde kullanarak elde edilen sehim değerlerinin yük artışına göre değişimi ($h_n=0.088, h/L=0.8/400=0.002, W_R / W_C=0.5225$)	146
Tablo 5.29	[0 / 90] _s 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plağın, 9-ağ noktalı melez eleman kullanılarak, plağın orta noktasında ($x=y=L/2, z=0$) lineer ve lineer olmayan analiz sonucunda elde edilen sehim değerlerinin yük artışına göre değişimi ($h_n=1.78, h/L=16/400=0.04, W_R / W_C=1.0049$)	147
Tablo 5.30	[0 / 90] _s 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plağın, 8-ağ noktalı melez eleman kullanılarak, plağın orta noktasında ($x=y=L/2, z=0$) lineer ve lineer olmayan analiz sonucunda elde edilen sehim değerlerinin yük artışına göre değişimi ($h_n=4.45, h/L=40/400=0.1$)	150

TabloSayfa

Tablo 5.31	[0 / 90] _s 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plağın, 9-ağ noktalı melez eleman kullanılarak, plağın orta noktasında ($x=y=L/2, z=0$) değişik yüklemeler için lineer ve lineer olmayan analiz sonucunda elde edilen sehim değerleri	152
Tablo 5.32	[0 / 90] _s 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plağın, 9-ağ noktalı melez eleman kullanılarak, plağın orta noktasında ($x=y=L/2, z=0$) $P=-800 \text{ lb/in}^2$ değeri için elde edilen lineer ve lineer olmayan analizin h/L oranına göre değişimi	153
Tablo 5.33	[0 / 90] _s 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plağın, 9-ağ noktalı melez eleman kullanılarak, plağın orta noktasında ($x=y=L/2, z=0$) lineer ve lineer olmayan analiz sonuçlarının karşılaştırılması ile elde edilen M_x, M_y gerilme dağılımları ($h_n=4.45, h_T=40, h/L=40 / 400=0.1,)$	155
Tablo 5.34	[0 / 90] _s 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plağın, 8-ağ noktalı melez eleman kullanılarak, plağın orta noktasında ($x=y=L/2, z=0$) lineer ve lineer olmayan çözüm sonucunda elde edilen σ_{xz}, σ_{yz} enine gerilme dağılımları ($h_n=4.45, h_T=40, h/L=40/400=0.1)$	156

GRAFİKLERİN LİSTESİ

<u>Grafik</u>	<u>Sayfa</u>
Grafik 5.1 $M_x = -0.814661E5$, $M_y = -0.414671E5$ için kompozit plakta oluşan σ_x ve ϵ_x dağılımı - 9 katlı kompozit plak, $[0^\circ/90^\circ]_s$ (9 ağ noktalı)	96
Grafik 5.2 Düzgün yayılı yük altındaki 3 serbestlik derecesine sahip izotropik plağın sehim değerlerinin değişimi	99
Grafik 5.3 0/90/0 dizili kompozit plağın iki değişik kayma düzeltici faktör için grafiği	102
Grafik 5.4 0/90/0/90/0/90/0/90/0 düzgün yayılı yük altındaki 9 katlı plağın merkezinde 8-ağ noktalı eleman ile melez elemanın ortak kullanımı sonucunda bulunan sehim değerlerinin h/L oranına göre dağılımı	104
Grafik 5.5 0/90/0/90/0/90/0/90/0 çaprazlama dizilmiş plağın düzgün yayılı yük altında, üç çözüm için sehim dağılımları	105
Grafik 5.6 8 ve 9 ağ-noktası tanımlı melez eleman kullanılarak 0/90/0/90/0/90/0/90/0 çaprazlama dizilmiş plağın merkezinde ($x=y=L/2$), z eksenini boyunca elde edilmiş Sigma-xz ve Sigma-yz dağılımları ($h_n=33.33$, $h_T=300$, $h/L=300/400=0.75$)	106

<u>Grafik</u>	<u>Sayfa</u>
Grafik 5.7 8 ve 9 ağ noktaları ile tanımlanmış melez eleman kullanılarak 0/90/0/90/0/90/0/90/0 çaprazlama dizilmiş plağın merkezinde ($x=y=L/2$), z eksenini boyunca elde edilmiş Sigma-xz ve Sigma-yz dağılımları ($h_n=2.67$, $h_T=24$, $h/L=24/400=0.06$)	107
Grafik 5.8 0/90/0/90/0/90/0/90/0 çaprazlama dizilmiş plağın merkezinde ($x=y=L/2$), z eksenini boyunca düzgün yayılı yük altında, 8 ve 9 ağ noktası tanımlı melez eleman kullanılarak elde edilmiş Sigma-xz ve Sigma-yz dağılımları	108
Grafik 5.9 0/90/0/90/0/90/0/90/0 düzgün yayılı yük altındaki 9 katlı plağın merkezinde oluşan sehim değerlerinin θ açısına göre dağılımı	116
Grafik 5.10 0/90/0/90/0/90/0/90/0 çaprazlama plağın, düzgün yayılı yük altında, değişik üç ağ noktasında z eksenini boyunca σ_{xz}, σ_{yz} dağılımları, $h_n=2.67$, $h_T=24$, $h/L=24/400=0.06$...	117
Grafik 5.11 0/90/0/90/0/90/0/90/0 9 katlı çaprazlama plağın (0 ile 90 dereceleri arası) düzgün yayılı yük altında, merkezde ($x=L/2$, $y=L/2$, $z=0$) oluşan, M_x, M_y, M_{xy} dağılımlarının θ açısına göre değişimi ($h/L=0.1$ ve 8 ağ noktalı eleman)	118

GrafikSayfa

- Grafik 5.12 -45/45/-45 dizili kompozit plağın, düzgün yayılı yük altında, z eksenı boyunca gerilme ve genleme dağılımları
($h_n = 13.33$, $h/L = 40/400 = 0.1$, $P = -2 \text{ lb/in}^2$) 119
- Grafik 5.13 0/90/0/90/0/90/0/90/0 düzgün yayılı yük altındaki 9 katlı plağın, c-ağ noktasında (merkezde) 8-ağ noktalı melez eleman kullanılarak bulunan σ_{xz} , σ_{yz} dağılımları
a) $h/L = 40/400 = 0.1$, $h_n = 4.45$
b) $h/L = 16/400 = 0.04$, $h_n = 1.78$ 120
- Grafik 5.14 0/90/0/90/0/90/0/90/0 düzgün yayılı yük altındaki 9 katlı plağın, c-ağ noktasında (merkezde) 8-ağ noktalı melez eleman kullanılarak bulunan σ_x , σ_y dağılımı 121
- Grafik 5.15 0/90/0/90/0/90/0/90/0 düzgün yayılı yük altındaki 9 katlı plağın, c-ağ noktasında (merkezde) 8-ağ noktalı melez eleman kullanılarak bulunan σ_{xz} , σ_{yz} dağılımları
a) $h/L = 24/400 = 0.06$, $h_n = 2.67$
b) $h/L = 300/400 = 0.75$, $h_n = 33.33$ 122
- Grafik 5.16 0/90/0/90/0/90/0/90/0 ankastre bağlanmış plağın lineer ve lineer olmayan çözüm sonuçlarının karşılaştırılması
($h/L = 0.1$) (9 ağ noktalı) 131

<u>Grafik</u>	<u>Sayfa</u>
Grafik 5.17 0/90/0/90/0/90/0/90/0 kompozit plağın ankastre ve basit mesnetli sınır şartları kullanılarak elde edilmiş lineer ve lineer olmayan çözüm sonuçlarının karşılaştırılması (9 ağ noktalı)	132
Grafik 5.18 0/90/0/90/0/90/0/90/0 ankastre bağlanmış plağın düzgün yayılı büyük-yüklemeye altındaki lineer ve lineer olmayan çözüm sonuçlarının karşılaştırılması ($h/L = 0.04$) (9 ağ noktalı)	134
Grafik 5.19 0/90/0/90/0/90/0/90/0 dizilmiş plağın, düzgün yayılı yük altındaki lineer ve lineer olmayan çözüm sonuçlarının karşılaştırılması ($h/L = 0.25$) (9 ağ noktalı)	137
Grafik 5.20 0/90/0/90/0/90/0/90/0 dizilmiş plağın, düzgün yayılı yük altındaki lineer ve lineer olmayan çözüm sonuçlarının karşılaştırılması ($h/L = 0.25$) (8 ağ noktalı)	139
Grafik 5.21 0/90/0/90/0/90/0/90/0 dizilmiş plağın, büyük-düzgün yayılı yük altındaki lineer ve lineer olmayan çözüm sonuçlarının karşılaştırılması ($h/L = 0.002$) (8 ağ noktalı) ..	141
Grafik 5.22 0/90/0/90/0/90/0/90/0 dizilmiş plağın, düzgün yayılı yük altındaki lineer ve lineer olmayan çözüm sonuçlarının karşılaştırılması ($h/L = 0.1$) (9 ağ noktalı)	143

GrafikSayfa

Grafik 5.23	0/90/0/90/0/90/0/90/0 dizilmiş plağın, düzgün yayılı yük altındaki lineer ve lineer olmayan çözüm sonuçlarının karşılaştırılması ($h/L = 0.002$) (9 ağ noktalı) ..	144
Grafik 5.24	0/90/0/90/0/90/0/90/0 dizilmiş plağın, küçük-düzgün yayılı yük altındaki lineer ve lineer olmayan çözüm sonuçlarının karşılaştırılması ($h/L = 0.002$) (8 ağ noktalı) ..	145
Grafik 5.25	0/90/0/90/0/90/0/90/0 dizilmiş plağın, düzgün yayılı yük altındaki lineer ve lineer olmayan çözüm sonuçlarının karşılaştırılması ($h/L = 0.04$) (9 ağ noktalı) ...	149
Grafik 5.26	0/90/0/90/0/90/0/90/0 basit mesnetli plağın, lineer ve lineer olmayan çözüm sonuçlarının karşılaştırılması ($h/L = 0.1$) (8 ağ noktalı)	151
Grafik 5.27	Lineer ve lineer olmayan çözümlerdeki sehim değerlerinin düzgün yayılı yük değerine göre değişimi	154
Grafik 5.28	$P = -1 \text{ lb/in}^2$ ve $P = -100 \text{ lb/in}^2$ için $[0/90]_s$ dizili, basit mesnetle bağlanmış plağın sehim dağılımlarının karşılaştırılması ($h_s = 1.78$, 9 katlı)	157
Grafik 5.29	$P = -1 \text{ lb/in}^2$ ve $P = -95 \text{ lb/in}^2$ için $[0/90]_s$ dizili, basit mesnetle bağlanmış plağın sehim dağılımlarının karşılaştırılması ($h_s = 11.11$, 9 katlı)	158

GrafikSayfa

- Grafik 5.30 $P = -140 \text{ lb/in}^2$ ve $P = -155 \text{ lb/in}^2$ için $[0/90]_s$ dizili, basit mesnetle bağlanmış plağın sehim dağılımlarının karşılaştırılması ($h_a=11.11$, 9 katlı) 159
- Grafik 5.31 $P = -170 \text{ lb/in}^2$ ve $P = -200 \text{ lb/in}^2$ için $[0/90]_s$ dizili, basit mesnetle bağlanmış plağın sehim dağılımlarının karşılaştırılması ($h_a=11.11$, 9 katlı) 160
- Grafik 5.32 $P = -1500 \text{ lb/in}^2$ yük altındaki $[0/45]_s$ 3 katlı ve $[0/45]_s$ 9 katlı, basit mesnetle bağlanmış plağın sehim dağılımlarının karşılaştırılması ($h_a=11.11$) 161
- Grafik 5.33 $P = -1500 \text{ lb/in}^2$ yük altındaki $[-45/45]_s$ ve $[-60/60]_s$ dizili, 9 katlı, basit mesnetle bağlanmış plağın sehim dağılımlarının karşılaştırılması ($h_a=11.11$) 162

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1	Kompozit plağın koordinat sistemine yerleştirilmesi 16
Şekil 3.1	Bir boyutlu deformasyon tanımlaması 29
Şekil 4.1	Yeni melez eleman tanımlamaları 55
Şekil 4.2	En genel durum için eleman ağı numaralandırılışı 58
Şekil 4.3	w^* transformasyonu için melez eleman notasyonu 68
Şekil 5.1	SEY analizinde kullanılmakta olan net gerilme ve moment kuvvetlerinin pozitif yönleri 84
Şekil 5.2	SEY kodunda kullanılan sınır şartları 84
Şekil 5.3	Navier seri çözümü için, plak yüzeyinin numaralandırılışı 87
Şekil I.1	Gerilme transformasyonu 181
Şekil I.2	Genleme transformasyonu 183
Şekil I.3	x-yönünde elastik sabitlerin çıkarılışı 187
Şekil I.4	y-yönünde elastik sabitlerin çıkarılışı 188

<u>Şekil</u>		<u>Sayfa</u>
Şekil I.5	Kayma gerilmesinin etkisi	190
Şekil V.1	Kirchhoff Teorisine göre yerdeğiştirme vektör alanının belirlenmesi	245



GİRİŞ

Geçmişten günümüze kadar, bir plağın mekanik davranışını ve buna bağlı olarak bazı sınır-değer problemlerinin çözümüne ilişkin sorunları inceleyebilmek amacı ile birçok çalışma yapılmıştır ve halen de yapılmaktadır. Bu çalışmalarda genel olarak iki teori kullanılmaktadır; Kirchhoff Klasik Plak Teorisi (KPT) ve Mindlin-Reissner Teorileri (Reissner,1945), (Mindlin,1951).

Kirchhoff teorisi kabulleri çerçevesinde yapılan çalışmalar, plak denklemlerini üç boyutlu elastisite analizinden iki boyuta indirgeyerek çözülmesini kolaylaştırmak amacına yönelik olup ince plaklar için tatminkar neticeler vermektedir (Vinson,1989). Kirchhoff kabüllerine göre deformasyondan önce plak orta düzlemine dik olan yüzey normal vektörleri, deformasyondan sonra yine dikliğini korumaktadır. Mindlin teorisindeki fark ise, orta yüzey normallerinin deformasyondan önceki dikliğini koruyamaması, ve bu nedenle ek bir açı değişimi ile kendini göstermesi (Tessler and Hughes 1985), (Somashekar, Prathap, Ramesh and Babu, 1987), bunun sonucu olarak da, plağın kalınlığı arttıkça, enine kayma genlemeleri ince plaklarınkinden farklı olarak ihmal edilemez duruma gelmektedir (Yuan and Miller, 1989). Kalınlık arttıkça, plağın, yüklemeye karşı oluşturduğu mukavemetlerin sonucunda oluşan genlemeler (strains) arasında, enine kayma genlemelerinin önemi artmaktadır. Çünkü, artık, enine kayma gerilmelerinin etkili olduğu birim yanal yüzey büyümüştür. Ancak gerçekte, plağın kalınlığı incelse de, enine kayma gerilme ve genlemelerinin yok olmadığı bilinmektedir (Reddy, 1996). Böylece Kirchhoff Teorisinde kullanılmakta olan deformasyondan önce ve sonra yüzey normallerinin dikliğini koruması ile ilgili olarak ifade edilen sınırlama; genel plak probleminin çözümünde büyük bir eksiklik olarak ortaya çıkmaktadır.

İzotropik yapıya sahip plakların yanısıra, kompozit plakların da mühendislik alanlarında kullanılıyor olması, bu eksikliğin önemini arttırmaktadır. Kompozit plakların, elastik sabitlerinden, fiber yönlerindeki elastik modülü oranının, kayma modülüne oranı büyüdüğü takdirde, Klasik Plak Teorisinin, kompozit plaklar için kullanımını özellikle yetersiz kılmaktadır (Putchu and Reddy, 1986). Bu nedenle, kompozit plak yapılarının analizinde, ince veya kalın plak durumu göz önüne alınması zorunluluğu vardır. Bunun dışında plak kalınlığına duyarlı birleştirici bir teorisin gerekli olduğu da araştırmacılar tarafından görülmüş ve buna yönelik çalışmalar yapılmıştır (Mindlin, 1951), (Pagano, 1969), (Whitney, 1973). Bu çalışmalar hakkında kısa bir bilgi olarak şunları aktarabiliriz :

Whitney (1969) anizotropik plaklar için ince plak teorisi kabüllerini kullanarak lineer olmayan elastisite denklemleri ile analitik çözüme ulaşmaya çalışmış, fakat bunu yaparken, eğilme-genleşme etkileşiminin sıfır olduğunu kabul etmiştir. Daha sonraki bir çalışmasında ise, Whitney (1973), Mindlin-Reissner teorisini, silindirik eğilme şartlarını yine eğilme-genleşme etkileşimini göz önüne alarak hesaplamıştır. Pagano (1969) kompozit plakları önce silindirik eğilme şartları için daha sonra yine kompozit plakların (Pagano, 1970) üç boyutta elastisite çözümlerini bulmuştur.

Daha sonraki çalışmalarda kompozit ince ve kalın plakların gerilme-genleşme analizi için Mindlin Teorisi esas alınmıştır. Bu amaçla yapılan çalışmalardan Reddy (1984)'nin yaptığı çalışmada, enine kayma gerilmelerinin dağılımı, parabolik bir dağılım olarak (Mindlin ,1951), kabul edilmek suretiyle, simetrik, çaprazlama-dizilmiş (cross-ply) özel şartları için gerçek çözümler analitik olarak elde edilmiştir. Fakat bu çözümler, kalın plak çözümleridir ve sınırlı şartlar dahilinde elde edilmektedirler.

Bu aşamadan sonra, Mindlin-Reissner teorisine dayanan bir çözüm metodu kullanarak, ince ve kalın plakların aynı teori ile analiz edilebilmesi için değişik

çalışmalar yapılmıştır. Bu değişikliklerin esası, Mindlin Teorisinde, elastik sabitler matrisinin yeniden düzenlenmesine dayanmaktadır. Plâğın kalınlığı azaldıkça Mindlin Teorisi sonuçlarının KPT sonuçlarına yaklaştığı görülmektedir. Örneğin Mindlin Teorilerinden olan birinci mertebeden kayma deformasyon teorisi (FSDT: First Order Shear Deformation Theory) kullanılarak bulunan yerdeğiştirme değerleri, KPT ile bulunan değerlerden çok düşük bulunmaktadır. Bu durum kayma kilitlenmesi olarak adlandırılmaktadır (Whitney, 1969). Kayma kilitlenmesini önleyebilmek için farklı teknikler uygulanarak, en doğru çözüme yaklaşılmaya çalışılmıştır. Bu çalışmalarda yapılmak istenen, Mindlin teorisinin, ince plaklar için de kullanılabilir olabilmesini sağlayarak, ince plak çözümleri için iki teoriyi kaynaştırmaktır. Sonuç olarak, Mindlin teorisi kullanılarak, ince plaklar için, enine kayma gerilmelerinin azaldığı, sehîm değerlerinin ise, kayma kilitlenmesi olmadan Klasik Plak Teorisi paralelinde olması sağlanılmaya çalışılan yeni bir yöntem oluşturulmuştur (Vinson and Chou , 1989). Bu yöntem, enine kayma gerilmelerini veren bûnye denkleminin oluşturulması sırasında, enine kayma gerilmelerine karşılık gelen elastisite matrisinin parabolik bir $f(z)$ ayar fonksiyonu ile çarpılmasını gözönüne alan bir yöntemle dayanmaktadır. Bu ayar faktörleri kullanılarak, plak analizinin h/L oranından etkilenmemesi sağlanılmaya çalışılmıştır. Bu bölümün giriş kısmında açıklandığı gibi plâğın ince olması, enine kayma gerilmesinin mevcut olmadığını kanıtlamaz fakat bu etkinin, kalın plaklarda kendini gösterdiği kabul edilmektedir.

Yukarıda anlatılanlardan ayrı olarak, kompozit plaklarda daha da önem kazanan sonlu eleman ağları arasındaki süreklilik şartlarının sağlanabilmesi ve ek olarak da, sehîm değerlerinin plâğın kalınlığı boyunca sürekliliğini koruyabilmesidir.

Açıklanan bütün bu özellikleri sağladığı gibi, lineer olmayan çözümü de gerçekleştiren çalışmalar çok sınırlı kalmıştır. Kullanım alanları ise çok geniştir.

Elemanlar arası sürekliliği, Kirchhoff Teorisi ile sağlayarak, ayrıca Kirchhoff sınırlamasındaki, enine kayma gerilmelerinin sıfır olma şartını kullanarak, yeni uygulamalar yapılmıştır. Bu uygulamalarda, (Tessler, 1982) izotropik kabuk elemanları için, üç serbestlik dereceli yerdeğiştirme vektörü için çözüm elde etmiştir. Touratier ve Lory (1994)'nin yaptıkları çalışma da, 8-ağ noktalı elemanları, Mindlin teorisinden başlayarak ve yukarıda açıklanan koşulları da kullanarak, izotropik plakların lineer çözümünü elde etmişlerdir. Benzer formülasyonları, üçgen ağ-elemanlarını kullanarak, kompozit plakların lineer çözümünü, (Hughes, 1978), yalnızca 9 ağ-noktalı Lagrange elemanın özelliklerini kullanarak, izotropik plakların lineer çözümünü; (Tessler and Hughes, 1985), 3 ağ-noktalı üçgen eleman ağı kullanarak, izotropik malzemeler için lineer çözümü; (Kosmatka, 1994), 6 ağ-noktalı eleman ağı kullanarak kompozit plakların lineer analizini; (Tessler and Hughes, 1983) de 4 ağ-noktalı eleman ağını kullanarak izotropik yapıların lineer analizi için çalışmalarda bulunmuşlardır.

Bu çalışmamızda biz, yukarıda açıklanan çalışmaları kapsayacak şekilde, kompozit plakların statik analizini ince ve kalın ayrımı yapmadan yürütebilmek için iki ayrı bilgisayar kodu geliştirmiş bulunmaktayız : LAMINATE ve COMPAN. Bu iki yazılımdan ilki ile kompozit plakların düzlemsel gerilme hali için, düzlemsel net iç kuvvet bileşenlerinin etkisi altındaki plağın gerilme-genleme analizini gerçekleştirmektedir. LAMINATE kodundan aldığımız neticeleri CoALA yazılım sonuçları ile karşılaştırarak doğru sonuca ulaşılmıştır.

Çalışmamızın ikinci kısmında, sonlu elemanlar yöntemini kullanarak oluşturduğumuz bilgisayar kodu, düzgün yayılı yük altında, basit mesnetli ve

ankastre sınır şartlarına sahip plakların düzlemsel gerilme halinde gerilme-genleme analizini gerçekleştirmekte olup, 'COMPOSITE ANALYSIS' kelimelerinin kısaltmalarının birleştirilmesi ile oluşturulan COMPAN ismiyle tanımlanmıştır. Bu kodla elde ettiğimiz sonuçları, Navier seri çözüm sonuçları ile karşılaştırarak doğru sonuca ulaştık.

Diğer taraftan, ortotropik kalın ve ince plak analizini aynı kapsam içinde veren makalelerde (Yang, Norris and Stavsky, 1966), (Whitney, 1969) , (Pagano, 1969), (Whitney and Pagano, 1970), (Chow,1971), (Whitney, 1973), (Chatterjee and Kulkarni, 1978), enine kayma gerilmelerini elde edebilmek için kayma kilitlenmesini önleyici faktörlerin oluşturulmasına dayanan bu modeller yerine, biz bu çalışmamızda, yalnız ortotropik değil genel anizotropik plaklar için de geçerli olmak üzere, yeni heterosis eleman modeli geliştirerek, kullanmış, ve elde edilen analiz neticelerimiz, yukarıda adı geçen makalelerdeki, kayma kitleyici faktörlere gerek olmadığını ortaya koymuştur.

FSDT kapsamında kullanılmakta olan teoriler içinde eşdeğer ayrık (discrete) Kirchhoff Teorisi (DKT) kompozit plaklar için en uygunu olarak gözükmekle beraber, dezavantajları da vardır. Bunlar, her katın ara yüzeyinin gerilme-genleme değerlerinin tam olarak bulunamaması ve kırılma-ayrılma analizinin yapılamaması şeklinde açıklanabilmektedir (Reddy,1994). HSDT (High Order Shear Deformation Theory) kapsamında ise enine kayma gerilme değerleri beklendiği gibi plağın alt ve üst yüzeylerinde sıfırlanmasına rağmen, lineer olmayan çalışma yapmak oldukça zordur. Yukarıda açıklanan bu olumsuzlukları ortadan kaldırabilmek, COMPAN ile elde edilen sonuçların LAMINATE içinde analizi vasıtasıyla ortadan kaldırılmıştır.

İlk kısımda oluşturulan çalışmalar LAMINATE programı çerçevesi içinde olup aşağıdaki yeteneklere sahiptir ;

I) Kod LAMINATE :

- 1) Simetrik / simetrik olmayan plakların yüklemeler sonucunda plakta oluşan etkileşimli deformasyonlar nedeniyle (düzlemsel kayma, eğilme, eğilme-dönme) tabakalarda oluşan gerilme-genleme dağılımının bulunması,
- 2) Kompozit plağın, elastik katılık matrisi bileşenlerinin (A_{ij} , B_{ij} , D_{ij}) tayin edilişi. (sırasıyla, genleşme, genleşme-eğilme etkileşimli ve eğilme katılık matrisleri)
- 3) Kompozit plağın, eşdeğer elastik sabitlerinin düzlemsel ve eğilme modlarındaki değerlerinin bulunması. Bunlar E_x , E_y , ν_{xy} , ν_{yx} , G_{xy} , m_x , m_y dır ve sırasıyla Young's modülleri, Poisson oranları, kayma modülü, dönme-etkileşimli kayma modülleri olarak bilinmektedirler.
- 4) Kompozit plağın her katında, malzeme eksenleri boyunca, plağın alt ve üst yüzeylerinde oluşan genleme ve gerilme değerlerinin tayini.
- 5) Kompozit plağın her katı boyunca sabit sıcaklık ve nem dağılımı olduğu kabul edilerek, her katın alt ve üst yüzeylerinde oluşan gerilme-genleme dağılımlarının bulunması.
- 6) Bilinmekte olan 6 kırılma kriteri için (Hoffman, Tsai-Hill, Tsai-Wu gerilme, Maksimum gerilme, Maksimum genleme, Tsai-Wu genleme), plağın her katmanının kırılma mod'larının bulunması.

COMPAN birbirine bağımlı çalışmalar halinde devam ederek tamamlanmış olup, aşağıdaki yeteklere sahiptir :

II) Kod COMPAN :

1) İzotropik / kompozit plakların lineer analizi,

2) İnce / kalın plakların analizi,

- Burada, Kirchhoff teorisi ve sınırlamalarını, Mindlin teorisi ile beraber, birinci mertebeden kayma-deformasyon teorisi için kullanarak, kalın ve ince plak analizini aynı analiz kapsamında gerçekleştirebilecek olan çözümü elde edebilmek için enine kayma genlemelerini göz önüne alırken, 'kayma kilitlenmesi' ni önleyebilecek çözüm ortamını, melez (heterosis) eleman modelimizi kullanarak sağlayabilmesi.

3) Plâğın lineer / lineer olmayan analizinin yapılması

Plakların statik analizi için kullandığımız COMPAN kodu ile ilgili lineer ve lineer olmayan analize ait genel açıklamalar 2'inci ve 3'üncü bölümlerde verilmiştir. Yeni melez eleman tanımlamaları 4'üncü bölümde, sonlu elemanlar için uygulamaya konulması sırasında izlenen işlem sırası, bulunan sonuçların incelenmesi, analiz ile ilgili grafik ve tablolar ise 5'inci bölümde anlatılmıştır. Bu çalışmalar sonucunda elde edilen sonuçların değerlendirilmesi ve tartışılması 6'ıncı bölümde; konu ile ilgili olarak geleceğe yönelik yapılabilecek çalışmalar ve öneriler ise 7'inci bölümde yer almaktadır.

1. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu çalışma, daha önce plaklar üzerinde yapılmış olan çalışmalarla kategorik olarak iki açıdan ilişkilidir. İlk kategori izotropik plaklar için Kirchhoff ve Mindlin Teorileri ile bunlara dayanan yan çalışmalardır (Reissner,1945), (Mindlin,1951), (Hinton and Owen,1977), (Hughes, Taylor and Kanoknukulchai,1977), (Hughes and Cohen,1978), (Garnet, Pascal and Pifko,1980), (Batoz, Bathe and Ho ,1980), (Batoz,1982), (Tessler,1982), (Tessler and Hughes,1985), (Dhatt, Marcotte and Matte,1986), (Yuan and Miller,1989), (Polit, Touratier and Lorry, 1994). İkinci kategori ise Kirchhoff ve Mindlin Teorilerine dayanan kompozit malzemeler için üretilmiş olan modellerdir (Yang, Norris and Stavsky,1966), (Sun, Achenbach and Herrmann,1968), (Whitney,1969), (Pagano,1969), (Whitney and Leissa,1969), (Pagano,1970), (Whitney and Pagano,1970), (Chow,1971), (Whitney,1973), (Chatterjee and Kulkarni,1978), (Bhashyam and Gallagher, 1983), (Tessler and Hughes,1983), (Lakshminarayana and Murthy, 1984), (Reddy,1984), (Putcha and Reddy,1986), (Someshekar, Prathap and Babu, 1987), (Oral and Kaftanoğlu, 1988), (Dong and Chun,1992), (Romeo and Frulla,1994), (Reddy and Robbins,1994), (Kosmatka,1994).

Daha önce yapılan çalışmalarda sonlu elemanlar yöntemi ile genellikle Mindlin Teorisi kullanılarak, plaklar için enine kayma gerilmeleri hesaplanırken, elastik modülü belli sabitlerle çarpılarak çözümler elde edilmiştir. Bu konu ile ilgili olan çalışmaların büyük çoğunluğu üçgensel alanları kullanmış olmakla beraber dörtgensel alanları kapsayan çalışmalar da vardır.

Whitney ve Leissa (1969), “Analysis of Heterogeneous Anisotropic Plates” isimli makalelerinde, ince plak teorisinin kabüllerini ve lineer olmayan terimleri de kullanarak Kirchhoff Teorisine göre anizotropik plaklar için formülasyonu

gerçekleştirmişlerdir. Her kompozit plağın, n ayrı kattan, ve her tabakanın farklı malzeme özelliklerine sahip ve farklı kalınlıklardan oluştuğu kabul edilmişti. Whitney ve Leissa (1969), bu özelliklere sahip plakların lineer olamayan davranışı için bünye denklemlerini çıkarmışlardır. Bunlara ek olarak, atalet terimleri ve ısı gerilmeler de göz önüne alınmıştır. Bu çalışma, bu konu ile ilgili önemli çalışmalardan biridir. Elde edilen denklemlere göre, eğilme ve genleme arasındaki etkileşimin lineer davranış içinde bile, kompozit yapılarda görüldüğü belirlenmiştir.

Whitney ve Leissa (1969), katlı plakların davranışını analiz etmek için, problemin sınır-değer (boundary-value) problem haline dönüştürülmesi gerektiğini düşünerek, simetrik olmayan çaprazlama veya açılı dizilmiş plak problemlerinin lineer denklem çözümlerini, basit mesnetli sınır şartı için bulmuşlardır. Çaprazlama veya açılı dizilmiş plakların simetrik dizilişi için $A_{16} = A_{26} = D_{16} = A_{26} = 0$, simetrik olmayan dizilişi için ise, $A_{22} = A_{11}$, $B_{22} = -B_{11}$, $D_{22} = D_{11}$ değerlerini kullanarak sonuca ulaşmışlardır.

Whitney (1969), kompozit katlı plaklardaki kayma deformasyonunu araştırmıştır. Bu çalışma sonucunda, anizotropik plaklarda enine kayma gerilmelerinin etkili olduğu gösterilmiştir. Elde edilen sonuçlar dinamik analiz için, titreşim frekanslarının hesaplanmasında kullanılmıştır.

Chow (1971), Timoshenko'nun kiriş teorisini kullanarak, ortotropik katlı plakların dinamik davranışını incelemiştir. Bu arada, enine kayma gerilmelerinin tanımlamalarını kullanarak kayma föktörlerinin değerlerinin kompozit plaklar için $k_1^2 = 5/6$ olduğunu göstermiştir.

Srinivas, Rao (1973), h/L oranının $5/6$ olduğu durumlarda moment ve sehim değerlerinin arttığını, 3-boyutlu elastisite çözümleri ile karşılaştırarak göstermişlerdir.

Whitney (1973), ortotropik plakların, statik yük altındaki kayma deformasyonunu simetrik olmayan plaklar için araştırmış ve kayma düzeltici faktörlerin, nümerik sonuçları teorik sonuçlara yaklaştırdığını göstermiştir. Bu çalışma sonucunda, kompozit plağı oluşturan katların sayısı arttıkça, nümerik sonuçların KPT sonuçlarından uzaklaştığı görülmüştür. Chow (1971) makalesinde simetrik kompozit plakalar için kayma düzeltici faktörlerin denklemlerini çıkarmış ve homojen plaklarda, k_1^2 değerinin yine 5/6 olarak bulunduğunu göstermiştir.

Hughes ve Cohen (1978), yaptıkları çalışmada, 8 ağ noktalı quadratik ve 9 ağ noktalı Langrange elemanlarını birleştirerek heterosis eleman geliştirmişler ve ince plaklar için oldukça doğru sonuçlar elde etmişlerdir. Katılık matrisleri ve yük vektörleri bu elemana göre modifiye edilerek iki çeşit basit mesnetli, izotropik malzeme için lineer sonuçlar karşılaştırılmıştır. Sonuçların karşılaştırılması sırasında yapılan hesaplamalarda, kayma düzeltici faktörü sabit olarak 5/6 alınmıştır.

Batoz, Bathe ve Ho (1980), ince izotropik plakların lineer ve lineer olmayan çözümü için üç ağ noktalı elemanlar ve her ağ-noktasında 3-serbestlik mertebesi (w, θ_x, θ_y) tanımlamışlardır. Bu çalışmada ayrık Kirchhoff Plak Teorisi DKT (Discrete Kirchhoff Theory) için süperpozisyon ile yeni plak elemanları oluşturulmuş ve w için kübik polinomlar, θ_x , θ_y için ise bir mertebe düşük seviyeli quadratik polinomlar seçmişlerdir.

Tessler ve Hughes (1983) makalelerinde, enine kayma gerilmelerini tanımlamak için 4 ağ noktalı eleman kullanmışlardır. Her ağ noktası için 3 serbestlik mertebesi almışlar (w, θ_x, θ_y) ve böylece sonlu elemanları 12 serbestlik mertebeli olarak kullanmışlardır. Yeni geliştirdikleri eleman, 8 ağ noktalı olup, köşe elemanları 3 serbestlik mertebeli (w, θ_x, θ_y) , kenar orta noktalarında ise yalnızca bir serbest mertebeli w olarak tanımlanmıştır. 16 serbestlik mertebeli olarak geliştirilen

eleman, Mindlin Teorisi için, plağın kalınlığına bağlı olarak doğru sonuçlar vermiştir.

Mindlin'in Birinci Mertebeli Kayma Deformasyon Teorisi (FSDT) için kayma düzeltici faktörleri olarak genellikle 5/6 değeri kullanılmaktadır (Reddy, 1984). Yüksek mertebeli teorilerde (Reddy, 1984) ise enine kayma gerilme dağılımı parabolik dağılım olarak alınarak kayma düzeltme faktörlerinin kullanımı ortadan kaldırılmaya çalışılmıştır. Bunun yanında anizotropik veya genellikle ortotropik malzemelerde oluşan eğilme-germe ortak etkileşimi veya enine kayma esnekliği açısından güvenli bir sonuca ulaşmak zor olmakla birlikte belli sınır şartları ve malzeme için genel çözümler elde edilebilmektedir (Lakshminarayana and Murthy, 1984).

Tessler ve Hughes (1985), makalelerinde izotropik malzemeleri kullanarak Mindlin Teorisi için üç ağ noktalı eleman ve her ağ noktasında üç serbestlik mertebeli w, θ_x, θ_y , deformasyon alan vektörü tanımlayarak, yeni bir ağ-elemanı tanımlamışlardır. Bu yeni elemanların her birinin kenarları boyunca süreklilik şartını ($\gamma_{sz,s} = 0$) sağlayan yeni üçgensel elemanlar kullanmışlardır. Burada, şekil fonksiyonları w yerdeğiştirmeleri için quadratik, θ_x, θ_y terdeğiştirmeleri için lineer olarak tanımlanmıştır. Böylece, üçgensel bölgenin üç kenarı boyunca $\gamma_{sz,s} = (w,s + \theta_n)_s \equiv 0$ eşitliği, w fonksiyonu, θ değerlerine göre bir mertebe üstten alındığı için sağlanmış olmaktadır. Tessler ve Hughes (1985)'e göre bu yaklaşımın kompozit ve kalın plaklarda birinci mertebeden kayma deformasyon teorisi için doğru çözümler verdiği açıklanmıştır.

Dhatt, Marcotte ve Matte (1986), 6 ağ noktalı üçgensel ağ elemanlarını Kirchhoff DKPT (Discrete Kirchhoff Plate Theory), modelinde kullanarak yeni bir eleman tanımlamışlardır. Bu yeni elemanlar köşelerde 6 serbestlik mertebesine

($u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z$) orta noktalarda ise 3 serbestlik mertebesine (u, v, w) sahiptirler. Böylece her ağ elemanı 27 serbestlik mertebesine sahip olmaktadır. Bu elemanı izoparametrik, lineer çözümler için çeşitli sınır şartları altında plak kabuk problemleri için test etmişlerdi. Yine, bu tip elemanların büyük deformasyonlar için, lineer olmayan çözümler için geliştirilerek kullanılabileceğini söylemişlerdir.

Somashekar, Prathap ve Babu (1987), makalelerinde, ince plaklar için Kirchhoff Teorisi ancak dikdörtgensel şeklindeki ağ elemanları için geçerlidir. Çünkü, i- Lineer üçgen alanlarının açıları 90° ve x, y koordinat sistemlerine paralel şekilde olmadıkça, ayrıca kayma gerinme enerjileri için γ_{xz}, γ_{yz} ayrı ayrı farklı integrasyon noktaları kullanılmadıkça, çözüm ulaşmak zorlaşmaktadır. (Prathap, 1985), ve ii- Kenarları ve x ve y koordinat sistemine paralel formda lineer olmayan quadratik elemanlar, dörtgensel formda en kolay şekilde kullanılabilirler (Prathap, 1984) şeklinde açıklanan bu iki özellik, Mindlin Teorisi için geçerli olmayıp, Kirchhoff Teorisi için geçerlidir. Ayrıca, bu iki şart; Kirchhoff Teorisinin sınırlamalarını sağlamak için kullanılmış olup, Mindlin Teorisi için gerekli değildir. Bu şekilde, Kirchhoff teorisinin ince plaklar için uygulanabilmesi için üçgensel değil dörtgensel ağ elemanlarının kullanılması gerektiği ortaya çıkmaktadır.

Yuan, Miller (1989) yılında yaptıkları çalışmada, üçgensel ağ elemanlarında daha önceye kadar ince plaklar için kullanılan 6' dan başlayarak 21'e kadar artan serbestlik mertebelerini bir arttırarak 22 olarak kullanmışlardır. İzotropik malzemeler için h/L (aspect) oranının $k=1$ değeri kullanılarak buldukları lineer çözümlerle daha önce elde edilen sonuçlar karşılaştırıldığında, oldukça yakın değerler elde edilmiştir.

Bhashyam ve Gallagher (1983), simetrik kalın katlı kompozit plakların lineer çözümünde 6 ağ noktası için 18 serbestlik mertebeli üçgensel elemanlar kullanmışlardır. Kayma kitlenmesini önlemek için penaltı faktörü yerine w için kübik, θ_x ve θ_y için ise quadratik polinomlar kullanılmıştır. Elemanın kenarları boyunca $\theta_s + w_{,s} = 0$ eşitliği sağlanmıştır. Bunun yanında her kenar boyunca oluşan lineer rotasyon deformasyonu, her ağ noktasında birleşen kenarlar boyunca oluşan rotasyonların ortalamaları alınarak kullanılmıştır $\phi_n^m = \frac{1}{2}(\phi_n^i + \phi_n^j)$. Sonuçlar Klasik Plak Teorisi kullanılarak elde edilen seri çözümler ile karşılaştırılmış ve çok yakın değerler elde edilmiştir.

Lakshminarayana ve Murthy (1984), çok katlı kompozit plaklar için yine üçgensel elemanlar kullanarak kayma deformasyonunu göz önüne alarak çalışmalar yapmışlardır. Yalnızca üç ağ noktası için yerdeğiştirme alan vektörleri ve onların birinci mertebeden türevleri serbestlik mertebesi parametreleri olarak kullanılmıştır. Bunlar kısaca x yönündeki yerdeğiştirme u için, $u_i, (\partial u / \partial x)_i, (\partial u / \partial y)_i$ dir. Diğerleri de bunun gibi yazılacak olursa her bir eleman için 15 serbestlik mertebesi elde edilmiştir. Lineer çözümlerin elde edilen sonuçlar, analitik sonuçlarla karşılaştırılmış ve yakın değerler elde edilmiştir.

Touratior ve Lory (1994) yaptıkları çalışmada yeni 8-ağ noktalı quadratik eleman kullanmışlardır. Enine kayma deformasyonunu, kayma kitlenmesini önleyerek, ince ve kalın plaklar için, çeşitli sınır şartları altında incelemişlerdir. Diğer çalışmalardan farklı olarak, ilk olarak z yönündeki sehim için farklı interpolasyon; ikinci olarak da enine kayma genlemeleri için ayrı interpolasyon kullanılmıştır. Böylece ince-plak probleminde z -ekseni yönünde oluşan enine kayma gerilmelerini sıfır olarak alınmıştır. Kayma deformasyonunu düzeltme faktörü olarak da daima $k=5/6$ kullanılmıştır.

Putchu ve Reddy (1986), lineer olmayan çözüm için, tabakalı kompozit plaklarda, Karışık sonlu eleman yöntemini kullanmışlar ve enine kayma gerilmelerinde ortaya çıkan kayma düzeltici katsayıyı ortadan kaldırarak onun yerine sınır şartlarında aynı anda hem yerdeğiştirme, hem de kuvvet sınır şartları kullanılarak çözüm elde etmişlerdir. Her ağ noktası için 11 serbestlik mertebesi kullanılmıştır. Bunlar, 3 yerdeğiştirme, 2 rotasyon, 6 adet moment değeridir. Yerdeğiştirme vektör alanı parabolik alınarak çözüm bulunmuştur. Karışık sonlu eleman yöntemi (SEY) ile bulunan sonuçlarda, plağın elemanları arasındaki yerdeğiştirme ve türevlerindeki sürekliliğin sağlandığı gözlenmiştir. Yerdeğiştirme vektörü için yüksek mertebeli polinomlar kullandıkları için, enine kayma gerilmelerinde parabolik dağılım zaten sağlanmaktadır. Plağın alt ve üst yüzeylerinde bu değerlerin sıfırlanması olağandır. Farklı olarak, karışık çözümle, yerdeğiştirme vektör alanı değerleri ile eğilme moment değerleri arasında bağımsız çözüm elde edilerek enine kayma yerdeğiştirmeleri ve onların türevlerinde süreklilik sağlanmıştır.

Yapılan en son çalışmalardan olan 'An Accurate Shear-Deformable Six-Node Triangular Plate Element for Laminated Composite Structures', Kosmatka (1994) tarafından hazırlanmıştır. Bu çalışmada Kosmatka (1994), Tessler ve Hughes (1983) ayrıca Lakshminarayana ve Murthy (1984)'nin çalışmalarını taban olarak kullanarak, melez üçgensel eleman ağını kayma kitlenmesini önleyebilmek için gerekli denklemleri tanımlamış ve bunları kompozit plakların lineer çözümü için kullanmıştır.

Hazırlanan bu sonlu elemanlar çalışmamızın, kayma kitlenmesini önleyici etkiyi elde edebilmek için hazırlanan bölümü, Tessler ve Hughes (1983), Lakshminarayana ve Murthy (1984), Kosmatka (1994)'nin çalışmaları incelenerek ortaya çıkarılmıştır. Bu konu ile ilgili olarak daha önce yapılan çalışmalara ek olarak 8 ve 12 ağ noktalı eleman ağlarının ortak çözümü ile tarafımızdan geliştirilen yeni melez eleman modeli ile lineer ve lineer olmayan çözümde elde edilen

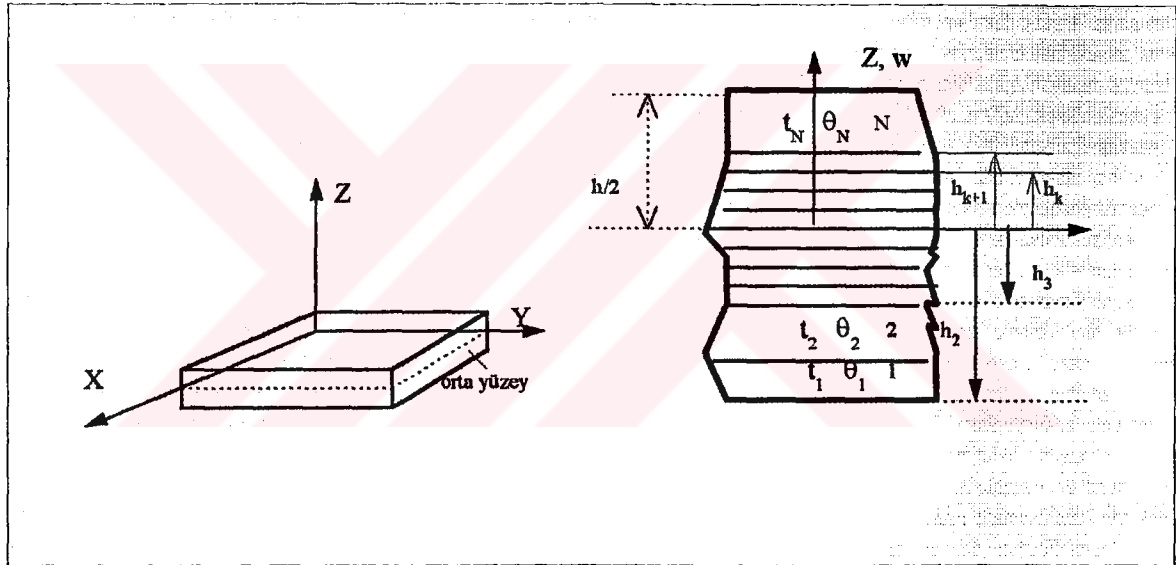
sonuçların son derece tutarlı olduğu görülmüştür. Kompozit plakların mukavemet testleri ise düzlemsel gerilme-genleme analiz kodu, son-işlemci (post-processor) olarak kullanılarak elde edilmiştir.



2. SONLU ELEMENLAR YÖNTEMİNİN PLAK ANALİZİNDE KULLANIMI

2.1 SEY İçin Plak Denklemleri

Plağın davranışını analiz edebilmek için her eleman ağ noktası için, beş serbestlik mertebesine sahip yerdeğiştirme vektörü kullanılmıştır. Bunlardan ilk üçü, düzlemsel yerdeğiştirme için kullanılan u , v , sehim için w ve rotasyonu tanımlayabilmek için ise ϕ_x , ϕ_y değişkenleridir. Ayrıca kompozit plak, koordinat sistemine Şekil 2.1 deki gibi yerleştirilip kullanılmıştır.



Şekil 2.1 Kompozit plağın koordinat sistemine yerleştirilmesi

Plağın deformasyonunu tanımlamak için kabul edilen yerdeğiştirme vektörü, orta plak üzerinde herhangi bir x , y , z noktasında aşağıdaki gibi kabul edilmiştir;

$$\begin{aligned} \underline{u}(x, y, z) &= \underline{u}_0(x, y) - z \underline{\phi}_x(x, y) \\ \underline{v}(x, y, z) &= \underline{v}_0(x, y) - z \underline{\phi}_y(x, y) \\ \underline{w}(x, y, z) &= \underline{w}_0(x, y) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Bu yerdeğiştirme vektör alanına karşılık gelen genlemeler, eğilme ve dönme yerdeğiştirmelerinin tanımlamaları cinsinden, orta plak düzlemine olan uzaklıklarına göre Denklem (2.2) - Denklem (2.5) ile aşağıdaki şekilde ifade edilirler;

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{xx}^{(0)} - z \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} u^i_0 - z \frac{\partial N_i}{\partial x} \phi^i_x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{yy}^{(0)} - z \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial N_i}{\partial y} v^i_0 - z \frac{\partial N_i}{\partial y} \phi^i_y \\ \varepsilon_{zz} &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{yz} &= \gamma_{yz}^{(0)} - \underbrace{z \gamma_{yz}}_{=0} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w_0}{\partial y} - \phi_y \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial N_i}{\partial y} w^i_0 - N_i \phi^i_y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{zx} &= \gamma_{zx}^{(0)} - \underbrace{z \gamma_{zx}}_{=0} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w_0}{\partial x} - \phi_x \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} w^i_0 - N_i \phi^i_x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^{(0)} - z \gamma_{xy} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - z \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial N_i}{\partial y} u^i_0 + \frac{\partial N_i}{\partial x} v^i_0 - z \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \phi^i_x + \frac{\partial N_i}{\partial x} \phi^i_y \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{xx} &= -\frac{\partial}{\partial x} \phi_x \\
\kappa_{xx} &= -\frac{\partial N_i}{\partial x} \phi^i_x \\
\kappa_{yy} &= -\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\
\kappa_{yy} &= -\frac{\partial N_i}{\partial y} \phi^i_y \\
\kappa_{xy} &= -\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \\
\kappa_{xy} &= -\left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \phi^i_x + \frac{\partial N_i}{\partial x} \phi^i_y \right)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Burada $\underline{\varepsilon}$, $\underline{\kappa}$, $\underline{\gamma}$ karşılıklı olarak düzlemsel genleme, eğilme, enine kayma genlemeleri ve N_i , $\underline{\phi}$ şekil fonksiyonu ve Ek-V'de anlatıldığı gibi dönme serbestlik derecesini tanımlamak için kullanılan yerdeğiştirme vektör bileşenidir.

2.2 SEY İçin Plak Bünye Denklemleri

Kompozit plak analizinde, levha üzerindeki birim genişlik ve plak toplam kalınlığı (t) üzerine düşen toplam gerilme değerleri N_{xx} , N_{yy} , N_{xy} ; eğilme-gerilme toplam değerleri M_{xx} , M_{yy} , M_{xy} ve enine kayma kuvvet toplamaları Q_{xz} , Q_{yz} ile gösterilmiştir. Bu gerilmelerle ilgili genleme, eğilme ve dönme genlemeleri daha önce açıklanmıştı. Yerdeğiştirme fonksiyonları, kompozit ince plak denklemlerinin çözüm metodu (Navier'in seri çözümü) EK-V'de, yeni tanımlanan melez eleman şekil fonksiyonları ise Bölüm 4'de geniş olarak açıklanmıştır. Kayma deformasyonunu da göz önüne alarak, bünye denklemleri üç ayrı denklem halinde aşağıdaki gibi ifade edilir ;

$$\begin{aligned}
\underline{N} &= [A] \underline{\varepsilon} + [B] \underline{\kappa} \\
\underline{M} &= [B] \underline{\varepsilon} + [D] \underline{\kappa} \\
\underline{Q} &= [G] \underline{\gamma}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

olur. Burada $[A]$, $[B]$, $[D]$, $[G]$ karşılıklı olarak, kompozit plağın düzlemsel, etkileşimli, eğilme ve kayma katılık matrisleridir. Bu denklemleri kullanarak potansiyel enerji fonksiyonu yazılacak olursa (Lakshminarayana and Murthy, 1984) ;

$$\pi(u, v, w, \phi_x, \phi_y) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}^T [A] \underline{\varepsilon} + \underline{\varepsilon}^T [B] \underline{\kappa} + \\ \underline{\kappa}^T [B] \underline{\varepsilon} + \underline{\kappa}^T [D] \underline{\kappa} + \\ \underline{\kappa}^T [G] \underline{\gamma} \end{bmatrix} d\Omega - \int_{\Omega} q w d\Omega \tag{2.7}$$

veya;

$$\begin{aligned}
\pi(u, v, w, \phi_x, \phi_y) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\underline{\varepsilon}^T [A] \underline{\varepsilon} + \underline{\varepsilon}^T [B] \underline{\kappa} + \underline{\kappa}^T [B] \underline{\varepsilon} + \underline{\kappa}^T [D] \underline{\kappa} + \underline{\gamma}^T [G] \underline{\gamma} \right] \\
&\quad d\Omega - \int_{\Omega} q w d\Omega
\end{aligned} \tag{2.8}$$

olur ve burada Ω plak alanı, q ise z -koordinatı boyunca w sehim değeri için dış yükleme yoğunluk değeridir. Potansiyel enerji fonksiyonunda Denklem (2.8) genleme vektörlerini eleman genleme enerji fonksiyonunda $U^{(e)}$, nin yerinde kullanarak aşağıdaki ifadeler bulunur:

$$U^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{\Omega^{(e)}} \left[\underline{\varepsilon}^T [A] \underline{\varepsilon} + \underline{\varepsilon}^T [B] \underline{\kappa} + \underline{\kappa}^T [B] \underline{\varepsilon} + \underline{\kappa}^T [D] \underline{\kappa} + \underline{\gamma}^T [G] \underline{\gamma} \right] d\Omega. \tag{2.9}$$

diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\underline{\varepsilon} &= \underline{B}_1 \underline{\psi}_1 \\
\underline{\kappa} &= \underline{B}_2 \underline{\psi}_2 \\
\underline{\gamma} &= \underline{B}_3 \underline{\psi}_3
\end{aligned} \tag{2.10}$$

şeklinde tanımlanarak yerdeğiştirme vektörleri aşağıdaki gibi yeniden ifade edilebilir;

$$\begin{aligned}\underline{\psi} &= \{\underline{\psi}_1 \quad \underline{\psi}_2 \quad \underline{\psi}_3\} \\ \underline{\psi}_1 &= \{u_i \quad v_i\} \\ \underline{\psi}_2 &= \{\phi_{xi} \quad \phi_{yi}\} \\ \underline{\psi}_3 &= \{w_i \quad \phi_{xi} \quad \phi_{yi}\}\end{aligned}\tag{2.11}$$

olur. Burada $\underline{B}_1$, $\underline{B}_2$, $\underline{B}_3$ Denklem (2.11) ile tanımlanmış olan yerdeğiştirme vektörlerine karşılık gelen şekil fonksiyonlarının türev matrislerini ifade etmektedir.

$$U^{(e)} = \frac{1}{2} \underline{\psi}^T \int_{\Omega^{(e)}} \left[\underline{B}_1^T [A] \underline{B}_1 + \underline{B}_1^T [B] \underline{\kappa} + \underline{\kappa}^T [B] \underline{\varepsilon} + \underline{\kappa}^T [D] \underline{\kappa} + \underline{\gamma}^T [G] \underline{\gamma} \right] d\Omega \underline{\psi}\tag{2.12}$$

Katılık matrisi Denklem (2.12) kullanılarak aşağıdaki gibi yazılır;

$$\underline{K} = \int_{\Omega^{(e)}} \left[\underline{B}_1^T [A] \underline{B}_1 + \underline{B}_1^T [B] \underline{\kappa} + \underline{\kappa}^T [B] \underline{\varepsilon} + \underline{\kappa}^T [D] \underline{\kappa} + \underline{\gamma}^T [E] \underline{\gamma} \right] d\Omega\tag{2.13}$$

Plak alanı Ω izoparametrik dörtgensel alanlara bölünerek $\Omega^{(e)}$, belli sayıda sonlu elemanlar elde edilmiştir. Ağ noktaları, elemanın kenarları boyunca, saat yönü ile aynı yönde olmak üzere numaralanmıştır. Analizde eleman ağı tanımlamaları, dört değişik şekilde kullanılmıştır. Bunlar: 8 noktalı kuadratik, 9 noktalı kübik, 8 ve 12 noktalı kuadratik ve kübik elemandan oluşturulan 8 ağ noktalı yeni melez elemanın, 8 ve 9 noktalı kuadratik ve kübik eleman tanımlamaları ile kullanılması olarak özetlenebilir. 8 ağ noktalı elemanlar 40 serbestlik mertebesine, 9 ağ noktalı elemanlar ise, 45 serbestlik mertebesine sahiptirler. Kayma deformasyonu için yeni olarak kullanılan 8 ve 12 ağ noktalı elemanlardan oluşturulan melez eleman, 36 serbestlik mertebesine sahip olmakla beraber, 40

serbestlik mertebesine sahip eleman gibi analiz sonuçları elde edilmektedir. Melez eleman, enine kayma deformasyonunun dışında kalan deformasyonların 8 ve daha sonra ise 9 ağ noktalı elemanlar ile tanımlanarak ortak kullanılması ile daha karmaşık bir yapıya sahip şekil matrisleri elde edilmiş ve böylece deformasyon vektörü farklı mertebeden polinomların ortak çözümü ile ortaya çıkmıştır. Bu nedenle eleman şekil matrisleri, her değişik tanımlama için yeniden oluşturularak ve ilgili sınır şartları değiştirilerek uygulanmış ve test edilmiştir.

Katılık matrislerinin değerleri, 8 noktalı eleman için 9 Gauss-Quadrature noktasında, 9 noktalı eleman için ise, 4 Gauss-Quadrature noktasında nümerik integrasyon ile bulunmuştur. Kullanılan eleman koordinat değerleri 8 ve 9 ağ noktasına sahip elemanlar için genel olarak aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{(8;9)} N_i \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Eleman ağının her noktasında tanımlanan 5 serbestlik mertebesine sahip yerdeğiştirme vektör uzayı, yine N_i şekil fonksiyonları kullanarak tanımlanmaktadır.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \phi_x \\ \phi_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{8;9} N_i u_i \\ \sum_{i=1}^{8;9} N_i v_i \\ \sum_{i=1}^{8;9} N_i w_i \\ \sum_{i=1}^{8;9} N_i \phi_{xi} \\ \sum_{i=1}^{8;9} N_i \phi_{yi} \end{bmatrix} ; \quad N_i = N_i(\xi, \eta) \quad (2.15)$$

2.2.1 Geliştirilmiş melez eleman için şekil matrisinin oluşumu

Şekil matrisinin oluşturulması sırasında x, y koordinat sistemi ile ξ, η birim koordinat sistemi arasındaki geçiş, Jacobian matrisin tersi $[J]^{-1}$ ile tanımlanmıştır. Eleman alan hesaplamaları sırasında da $[J]$ matrisinin değerleri analiz sırasında kontrol edilmekte olup, tekil (singular) değere sahip olmadığından emin olunarak analiz yapılmıştır. Koordinatların tanımlanması sırasında veya melez eleman tanımlamaları sırasında da, $[J]$ 'nin determinantının sıfır olması halinde, eleman tanımlamalarında belli bir hatanın var olduğu gözlenmiş ve ilgili düzeltmeler yapılmıştır. Bu nedenle melez elemanın geliştirilmesi sırasında $[J]$ matrisinin değeri, kontrol edilerek doğru sonuca ulaşılmıştır. Hazırlanan SEY kodunda, şekil fonksiyonları, w yerdeğiştirmeleri için, N_i ve ϕ_x, ϕ_y yerdeğiştirmeleri için ise (N_i 'den farklı şekil fonksiyonu kullanıldığı için) P_i ile göstererek aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır ;

$$\begin{aligned} \underline{w} &= \sum_{i=1}^{8,9} N_i(w_i)^{Orjinal} = \sum_{i=1}^{12} N_i(w_i)^{Melez} \\ \sum_{i=1}^{12} N_i(\xi, \eta) &= 1 \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \underline{\phi}_x^{Melez} &\neq \sum_{i=1}^{8,9} P_i(\phi_x^i)^{Orjinal} \\ \underline{\phi}_x^{Melez} &= \sum_{i=1}^{12} P_i(\phi_x^i)^{Melez} \\ \sum_{i=1}^{12} (P_i(\xi, \eta))^{Melez} &= 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned}
\phi_y^{Melez} &\neq \sum_{i=1}^{8,9} P_i(\phi_y^i)^{Orjinal} \\
\phi_y^{Melez} &= \sum_{i=1}^{12} P_i(\phi_y^i)^{Melez} \\
\sum_{i=1}^{12} (P_i(\xi, \eta))^{Melez} &= 0
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Şekil matrisinin x, y koordinat sistemi ile ξ, η koordinat sistemi arasındaki transformasyonu aşağıdaki denklemlerle sağlanmaktadır:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\
\frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\
\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
dA &= dx dy = \underline{t} \det \underline{J} d\xi d\eta \\
\underline{t} &= \sum \underline{N}_i \underline{t}_i
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Burada $\underline{t}$, eleman ağı kalınlığı $\underline{J}$ ise Jacobian matrisidir. Bu aşamadan sonra genleme ve gerilme vektörleri aşağıdaki denklemler kullanılarak bulunmaktadır ;

$$\underline{\varepsilon}^e = \sum_{i=1}^{8,9} \underline{B}_i^e \underline{\delta}^e_i \tag{2.21}$$

$$\underline{\varepsilon}^e = \left[B_1, \dots, B_{8,9} \right]^e \underline{\delta}^e$$

$$\underline{\sigma}^e = \underline{D}^e \underline{B}^e \underline{\delta}^e \tag{2.22}$$

burada, $\underline{B}^e$ eleman şekil matrisinin türevidir.

$\underline{\sigma}$ vektör değerleri COMPAN kodunda, hem eleman ağının noktalarında, hem de Gauss-Quadrature noktalarında olmak üzere iki kere hesaplanmıştır. Denklem (2.8)'de görülen, elemana etkiyen yük vektörleri $\underline{q}$ ise aşağıdaki gibi tanımlanarak en genel halde formülasyon tanımlanmış olur.

$$\underline{F}^{(e)} = \int_v \underline{N}^e \underline{P}^e d v^e$$

$$\underline{F}^e = \begin{bmatrix} \tau_x^e \\ \tau_y^e \\ \tau_z^e \\ M_x^e \\ M_y^e \end{bmatrix}_{M \times 1} = \int_{A^{(e)}} \underline{N}^e_{i(SxM)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_i^e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{M \times 1} dA^e \quad (2.23)$$

Denklem (2.23)'de M , plaktaki maksimum ağ noktası; x , serbestlik mertebesi; P_i ise z eksenini yönünde $+z$ yönündeki uygulanan kuvvet değeridir. En genel halde plak bünye vektörü, yukarıdaki tanımlamalar kullanılarak şu şekilde yazılır;

$$\begin{bmatrix} \underline{N} \\ \underline{M} \\ \underline{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] & [0] \\ [B] & [D] & [0] \\ [0] & [0] & [G] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon} \\ \underline{\kappa} \\ \underline{\gamma} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \underline{N} &= \{N_x \quad N_y \quad N_{xy}\} \\ \underline{M} &= \{M_x \quad M_y \quad M_{xy}\} \\ \underline{Q} &= \{Q_{xz} \quad Q_{yz}\} \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon} &= \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{xy}\} \\ \underline{\kappa} &= \{\kappa_{xx} \quad \kappa_{yy} \quad \kappa_{xy}\} \\ \underline{\gamma} &= \{\gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}\} \end{aligned}$$

burada; [A] ,[B] ,[D] ,[G] elastik malzeme sabit matrisleridir. Katılık matrisinin elde edilışinde oluşturulmakta olan şekil matrisi, Denklem (2.5)'de bulunan denklemler ile her eleman için, $z=0$ yüzeyi üzerinde (orta plak) oluşturulan sonlu eleman ağı kullanılarak aşağıdaki matris tanımlamaları ile ifade edilirler. Bu matrisler yeni oluşturulan melez eleman tanımlamalarını kapsamamaktadır.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^e \\ \varepsilon_{yy}^e \\ \gamma_{xy}^e \\ \kappa_{xx}^e \\ \kappa_{yy}^e \\ \kappa_{xy}^e \\ \gamma_{xz}^e \\ \gamma_{yz}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & -N_i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & -N_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^e \\ v^e \\ w^e \\ \theta_x^e \\ \theta_y^e \end{bmatrix}$$

(2.26)

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^e \\ \varepsilon_{yy}^e \\ \gamma_{xy}^e \\ \kappa_{xx}^e \\ \kappa_{yy}^e \\ \kappa_{xy}^e \\ \gamma_{xz}^e \\ \gamma_{yz}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & -z \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & -z \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & -z \frac{\partial N_i}{\partial y} & -z \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & -N_i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & -N_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^e_0 \\ v^e_0 \\ w^e_0 \\ \phi^e_x \\ \phi^e_y \end{bmatrix}$$

(2.27)

Orta levha üzerinden herhangi bir z-uzaklıktaki, gerilmeleri ve genlemeleri bulabilmek için Denklem (2.27) kullanılmaktadır. Lineer olmayan davranışın formülasyonu sırasında Denklem (2.26), şekil matrisinin lineer kısmı olarak kullanılmaktadır.

3. KOMPOZİT PLAKLARIN LİNEER OLMAYAN DAVRANIŞININ SONLU ELEMENLAR YÖNTEMİ İLE ANALİZİ

Geometrik olarak lineer olmayan problemler, iki metod kullanılarak çözülmektedir. Bunlar ;

- a) sabit referans koordinat sistemi kullanarak (Euler) çözüm,
- b) hareketli referans koordinat sistemi kullanarak (Lagrange) çözüm,

methodlarıdır. Euler metodunda, yerdeğiştirme vektörünün bileşenleri u, v, w, ϕ_x, ϕ_y , sabit referans sistemine göre bulunmaktadır. Lagrange metodunda ise, deformasyonun belli basamaklar sonunda gerçekleştiği düşünülerek , belli bir basamak için deformasyon hesaplanırken, yukarıda belirtilen yerdeğiştirme vektörünün bileşenlerinin, bir önceki adımda bulunan deformasyon değerleri göz önüne alınarak bulunmaktadır. Başka bir deyişle, bir önceki adımdaki değerler her zaman önemli olmaktadır (Mohr, 1992). Her iki metod ile de adım-adım çözüme yaklaşılmaktadır. Bu çeşit çözüm tarzlarında, bulunması istenen değişkenlere, çok küçük değerler eklenerek arttırılır, bu değerlere karşılık gelen yük veya yerdeğiştirme vektör değerleri bulunur. Bulunan sonuç, istenen sonuç değilse, adım artışlarına devam edilir. İstenen sonuca yeteri kadar yaklaşılmışsa, hesaplamalar sona erdirilir. Lagrange çözüm metoduna göre, her yüklemedeki artış için (ilk anlı katılık matris metodu), bulunacak bileşen değerleri, son koordinat sistemine göre yenilenirler. Veya, her yeni adımdaki yükleme için, sistem dengeye ulaştığında, yenilenir (teğet katılık matris metodu). Yenilenmiş her koordinat sistemine göre yapılan işlem aslında, Euler çözümünü de içermektedir. Çözülmek istenen problemin niteliğine uygun metod seçilerek, yükleme veya yerdeğiştirme değerleri, lineer olmayan çözümler için bulunabilmektedir. Burada esas olan, sistem herhangi bir anda dengeye ulaştığı zaman, koordinat sisteminin yenilenmesidir (teğet katılık matris metodu) (Zienkiewicz, 1983), (Polat, 1994).

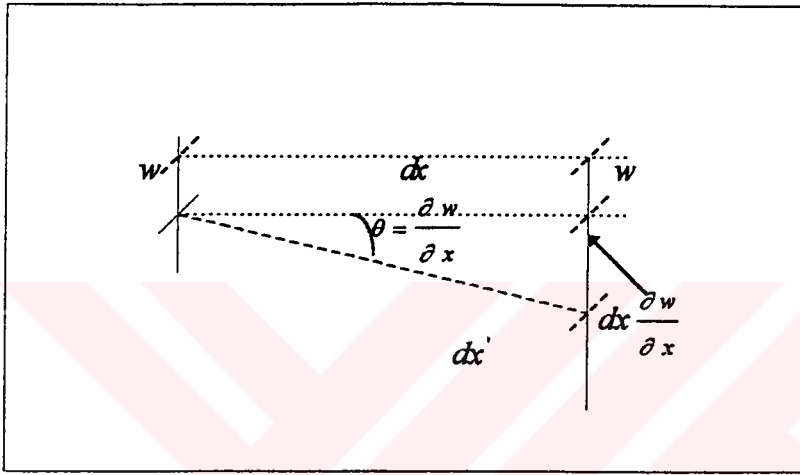
Büyük deformasyona maruz kalmış plağın, lineer olmayan davranışını incelemek için Lagrange yaklaşımı kullanılmaktadır. Bu yaklaşımla, yukarıda açıklandığı gibi, plağın ilk andaki durumu referans olarak alınarak, bundan sonraki deformasyonlar, bu referans sistemine bakarak değerlendirilmektedir. Euler yaklaşımında ise, deformasyona maruz plağın belli zaman aralıkları ile ölçülen deformasyon değerleri, bir önceki deformasyona göre değerlendirilmektedir. Bu durumda plağın sondan bir önceki deformasyon değeri önemini korumaktadır.

Problemin analizine denge denklemlerinden başlanır. Diğer bir deyişle, ilk olarak denge denklemleri sağlanmalıdır. Bu denklemler daha önceki kısımlarda açıklanmıştır. Böylece, dıştan etkiyen toplam kuvvet değerleri ile, plağın içinde gerilmeden dolayı oluşan iç kuvvet toplamalarının, sifıra eşit olması gerekmektedir. Lineer olmayan denklem çözümlerinde, bu toplamın sifıra eşitlenebilmesi için, genellikle Newton-Raphson metodlarından biri kullanılmaktadır. Newton-Raphson metodları aşağıda kısaca özetlenmektedir.

Büyük deformasyon teorisini kullanarak, bulunan yerdeğiştirme vektör bileşenlerinin değerleri, küçük deformasyon teorisine göre elde edilen sonuçlardan, daha küçük değerlere sahiptirler. Lineer olmayan çözümde, z-yönünde oluşan sehim değerleri (w), plağın x-y düzleminde oluşan yerdeğiştirme değerlerinin etkisi altında olduğu için, w değerleri azalacaktır. Diğer bir deyişle w -yerdeğiştirme değerinin bir miktarı u ve v yerdeğiştirmelerine aktarılacaktır. Böylece w ve u , v yerdeğiştirmeleri arasında etkileşimli değer aktarımı (strain-coupling) görülecektir. Bu durumu göz önüne alarak, plağın deformasyonu iki kısımda formüle ediliyormuş gibi düşünülmektedir. Bunlardan birincisi x-y düzlemindeki düzlemsel deformasyon, diğeri de z düzleminde oluşan sehimdir. Takip eden alt bölümlerde lineer olmayan SEY (sonlu elemanlar yöntemi) ile ilgili gerekli bütün denklemler

verilmiştir. Bölüm 2' de ve bu bölümde verilen bütün formülasyonlar, kod COMPAN'ın hazırlanmasında kullanılmıştır.

3.1. Lineer Olmayan Şekil Matrisinin Oluşturulması



Şekil 3.1 Bir boyutlu deformasyon tanımlaması

Şekilden de görüleceği gibi, deformasyondan önceki uzunluk dx , deformasyondan sonraki uzunluk dx' ile gösterilecek olursa, deformasyondan sonra ulaşılacak dx' değeri aşağıdaki şekilde elde edilecektir.

$$\begin{aligned} dx'^2 &= dx^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx \right)^2 \\ dx' &= dx \left(1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Taylor seri açılımı kullanılarak (Zienkiewicz, 1983),

$$dx' = dx \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \dots \right\} \quad (3.2)$$

şeklinde elde edilmektedir. x-yönündeki genleme değeri, lineer olmayan davranış için Denklem (3.1) ve Denklem (3.2) kullanılarak, basit olarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (3.3)$$

Plağın, en genel halde lineer olmayan davranış için, genleme denklemleri Bölüm 2'de açıklanmıştır. Bu denklemler matris formunda da aşağıdaki gibi ifade edilebilirler.

$$\underline{\underline{\bar{B}}} = \underline{\underline{B}}_0 + \underline{\underline{B}}_L \quad (3.4)$$

$$\underline{\underline{B}}_0 = \begin{bmatrix} \underline{\underline{B}}_0^p & 0 \\ 0 & \underline{\underline{B}}_0^b \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{B}}_L = \begin{bmatrix} 0 & \underline{\underline{B}}_L^b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Burada sırasıyla $\underline{\underline{\bar{B}}}$, toplam büyük deformasyon ; $\underline{\underline{B}}_0$, küçük deformasyon ; $\underline{\underline{B}}_L$, büyük deformasyon şekil matrisinin türevlerini göstermektedir. Üst indekslerde kullanılan p düzlemsel, b ise eğilmeden dolayı oluşan deformasyon kısımlarını tanımlamak amacı ile kullanılmaktadır. Böylece lineer olmayan genleme vektörü Denklem (3.6) da görüldüğü gibidir.

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}_0^p \\ \underline{\varepsilon}_0^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}_L^p \\ \underline{0} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Burada ε_0^p , düzlemsel orta plak genlemelerini, ε_L^p ise düzlemsel büyük genlemeleri, ε_0^b eğilmeden dolayı orta plakta oluşan genlemeleri göstermektedir. Büyük deformasyondan dolayı oluşan genlemelerin varyasyonları, $\underline{B}_L^b$ değerlerinin büyük deformasyon genelleştirilmiş eğilme parametrelerine $\underline{a}^b$ göre türevinin alınması ile bulunmaktadır. Eğilmeden dolayı oluşan genlemelerin lineer olmayan kısmı $\underline{\varepsilon}_L^p$, w yerdeğiştirme genelleştirilmiş parametrelerinin x veya y koordinatlarına göre alınmış türevlerinin çarpımlarından oluşmaktadır. Bu ifadeler Denklem(3.8) ile ifade edilmektedir.

$$\varepsilon_L^P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Aynı zamanda, elastik sabitler matrisi, düzlemsel ve eğilme olmak üzere iki kısımdan oluşmaktadır.

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{D}}^P & 0 \\ 0 & \underline{\underline{D}}^b \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Plakların genleme ve gerilme vektörleri 5 serbestlik mertebeli tanımlamalar için aşağıdaki gibi uygulanmaktadır;

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon^P \\ \varepsilon^b \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\underline{\sigma} = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma^p \\ \sigma^b \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

Burada $T_x = \bar{\sigma}_x t$ dir. $\bar{\sigma}_x$ ise belli bir yüzey üzerindeki eleman ağından, ilgili eleman ağ noktası üzerindeki ortalama plak gerilmesidir. Form veya şekil matrisi de aynı yolla, eğilme (b) ve düzlemsel (p) davranış olmak üzere, iki kısımla ifade edilirler.

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} \underline{N}^p & 0 \\ 0 & \underline{N}^b \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Sonlu elemanlar yönteminde, lineer olmayan, denklem takımı çözümlerinde, katılık matrislerini tanımlamak için, aşağıdaki işlemler takip edilir;

i) Denklem (3.8) , diğer bir şekilde aşağıdaki gibi yazılır ;

$$\varepsilon_i^p = \underline{A} \underline{Q} \quad (3.13)$$

ii) yerdeğiştirme vektöründe sehim değişkeninin (w) türevleri aşağıdaki gibi tanımlanarak ;

$$\underline{Q} = \underline{G} \underline{a}^b = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^b}{\partial x}, \frac{\partial N_2^b}{\partial x}, \dots, \frac{\partial N_9^b}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^b}{\partial y}, \frac{\partial N_2^b}{\partial y}, \dots, \frac{\partial N_9^b}{\partial y} \end{bmatrix} \underline{a}^b \quad (3.14)$$

$\underline{Q}$ 'nın açık formu elde edilir.

iii) Denklem (3.8) 'nun varyasyonu alındığı zaman aşağıdaki denklemler bulunur;

$$\begin{aligned}
 d\varepsilon_L^p &= \frac{1}{2} c \left(d\underline{\underline{A}} \right) Q + \frac{1}{2} \underline{\underline{A}} \left(d\underline{Q} \right) \\
 &= \underline{\underline{A}} \left(d\underline{Q} \right) \\
 d\varepsilon_L^p &= \underline{\underline{A}} \underline{\underline{G}} \left(d\underline{a}^b \right)
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\text{iv)} \quad d\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\bar{B}}} d\underline{a} \tag{3.16}$$

denkleminde $\underline{\underline{\bar{B}}}$ büyük deformasyon şekil matrisidir. Denklemler (3.15) ve (3.16) eşitlenerek;

$$\underline{\underline{B}}_L^b = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{G}} \tag{3.17}$$

şeklinde ifade edilir.

Örnek olarak verilecek olursa, 8 noktalı ağ elemanı için büyük deformasyon şekil matrisi aşağıdaki gibi kullanılmaktadır:

$$\underline{\underline{\bar{B}}} = \underline{\underline{B}}_0 + \underline{\underline{B}}_L; \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\bar{B}}} \underline{\underline{a}} \tag{3.18}$$

$$\underline{\varepsilon} = \left[\begin{array}{ccccc} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & -\frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & -N_i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & -N_i \end{array} \right]_{(8 \times 40)} + \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & \left(\frac{\partial w_i}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{\partial w_i}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{\partial w_i}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial w_i}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_{(8 \times 40)} \left\{ \begin{array}{c} u \\ v \\ w \\ \phi_y \\ \phi_x \end{array} \right\}_{(5 \times 1)}$$

$i = 1, \dots, 8$

(3.19)

3.2 Lineer Olmayan Katılık Matrislerinin Oluşumu

Denge denklemlerinin sağlanması için cisme etkiyen dış kuvvet değerleri ile iç kuvvetler toplamalarının sıfıra eşitlenmesi gerekmektedir. Sıfıra eşitlenmediği takdirde ortaya çıkacak olan fark değerleri dengelenmemiş kalıcı yük değerleri olarak tanımlanmaktadır. Dengelenememiş kalıcı yük değeri $\Psi(\underline{a})$ ile gösterilerek aşağıdaki şekilde yazılır ;

$$\underline{\Psi}(\underline{a}) = \int \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{\sigma}} \, dv - \underline{\underline{f}} = 0 \quad (3.20)$$

Burada $\underline{a}$, ağ noktalarındaki genelleştirilmiş koordinatları göstermektedir. Büyük deformasyonda genleme değerleri, lineer olamayan bir davranış içindeki

yerdeğiştirmelere bağımlıdırlar. Bunu Denklem (3.20) de $\underline{\underline{B}}_0$ yerine $\underline{\underline{B}}$ 'yi kullanarak şu şekilde gösterebiliriz;

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{a}} \quad (3.21)$$

Denklem(3.4) de görüldüğü üzere, $\underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{B}}_0$ ve $\underline{\underline{B}}_L(\underline{\underline{a}})$ nın, ayrı ayrı şekil matrislerinin türev değerlerinin toplamına eşittir. Genleme değerleri küçükse, gerilme-genleme arasındaki ilişki aşağıdaki gibi yazılmaktadır;

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}}(\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}_0) + \underline{\underline{\sigma}}_0 \quad (3.22)$$

Burada $\underline{\underline{D}}$ elastik sabitler matrisi, $\underline{\underline{\sigma}}_0$, $\underline{\underline{\varepsilon}}_0$ değerleri ise, karşılıklı olarak gerilmenin ve genlemenin sıcaklığa bağlı ilk değerleridir. Denklem (3.20)'nin varyasyonu alınacak olursa;

$$\begin{aligned} d\underline{\underline{\psi}} &= \int_V d\underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{\sigma}} dv + \int_V \underline{\underline{B}}^T d\underline{\underline{\sigma}} dv \\ d\underline{\underline{\psi}} &= \underline{\underline{K}}_T d\underline{\underline{a}} \end{aligned} \quad (3.23)$$

denklemleri elde edilir. Aşağıdaki denklemleri kullanarak (3.23) yeniden yazılabilir;

$$\begin{aligned} d\underline{\underline{\sigma}} &= \underline{\underline{D}} d\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} d\underline{\underline{a}} \\ d\underline{\underline{B}} &= d\underline{\underline{B}}_L(\underline{\underline{a}}) \\ d\underline{\underline{\psi}} &= \int_V d\underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{\sigma}} dv + \int_V \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}} d\underline{\underline{B}} d\underline{\underline{a}} \\ \underline{\underline{K}} &= \int_V \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} dv = \underline{\underline{K}}_0 + \underline{\underline{K}}_L \end{aligned} \quad (3.24)$$

Yukarıda görülen $\underline{\underline{K}}_L$ büyük deformasyon katılık matrisinin çıkarılışı, aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} &= (\underline{\underline{B}}_o + \underline{\underline{B}}_L)^T \underline{\underline{D}} (\underline{\underline{B}}_o + \underline{\underline{B}}_L) \\
 &= (\underline{\underline{B}}_o^T \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{B}}_L^T \underline{\underline{D}}) (\underline{\underline{B}}_o + \underline{\underline{B}}_L) \\
 &= \underline{\underline{B}}_o^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}}_o + \underline{\underline{B}}_o^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}}_L + \underline{\underline{B}}_L^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}}_o + \underline{\underline{B}}_L^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}}_L
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Bu aşamada (3.4) ve (3.5) numaralı denklemleri kullanarak;

$$\underline{\underline{K}}_L = \int_V (\underline{\underline{B}}_o^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}}_o + \underline{\underline{B}}_o^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}}_L + \underline{\underline{B}}_L^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}}_o) dV \tag{3.26}$$

şeklini alır.

Büyük deformasyon katılık matrisini oluşturan ayrı, ayrı üç katılık matrislerini daha açık olarak yazmak gerekirse;

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{B}}_o^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}}_L &= \begin{bmatrix} \underline{\underline{B}}_o^p & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{B}}_o^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{D}}^p & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{D}}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{B}}_L^b \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \underline{\underline{B}}_o^{Tp} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{B}}_o^{Tb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{D}}^p \underline{\underline{B}}_L^b \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{B}}_o^{Tp} \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}}_L^b \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.27-a}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{B}}_L^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}}_L &= \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{B}}_L^{Tp} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{D}}^p & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{D}}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{B}}_L^b \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{B}}_L^{Tp} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{D}}^p \underline{\underline{B}}_L^b \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{B}}_L^{Tp} \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}}_L^b \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.27-b}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{B}}_L^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}}_0 &= \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{B}}_L^T & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{D}}^p & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{D}}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{B}}_0^p & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{B}}_0^b \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{B}}_L^T & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{D}}^p \underline{\underline{B}}_0^p & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{D}}^b \underline{\underline{B}}_0^b \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{B}}_L^T \underline{\underline{D}}^p \underline{\underline{B}}_0^p & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.27-c}$$

olacaktır. Üç denklemin veya matrisin toplamaları, (3.27-a), (3.27-b), (3.27-c) aşağıda gösterildiği gibi büyük deformasyon katılık matrisini oluşturmaktadır.

$$\underline{\underline{K}}_L = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{B}}_0^T \underline{\underline{D}}^p \underline{\underline{B}}_0^b \\ \underline{\underline{B}}_L^T \underline{\underline{D}}^p \underline{\underline{B}}_0^p & \underline{\underline{B}}_L^T \underline{\underline{D}}^b \underline{\underline{B}}_0^b \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

$$\underline{\underline{K}}_0 = \int_V \underline{\underline{B}}_0^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}}_0 dv \tag{3.29}$$

(3.27) ve (3.28) denklemlerindeki $\underline{\underline{K}}_L$, büyük deformasyon katılık matrisi, $\underline{\underline{K}}_0$ ise küçük deformasyon katılık matrisidir. İlk andaki gerilme matrisi veya diğer bir isimle geometrik katılık matrisi, simetrik bir matristir ve tanımı şu şekildedir ;

$$\underline{\underline{K}}_\sigma = \int \underline{\underline{d}} \underline{\underline{B}}_L^T \underline{\underline{\sigma}} dv \tag{3.30}$$

$\underline{\underline{B}}_L$ ve $\underline{\underline{\sigma}}$ nın tanımlarını; Denklem(3.11) ve (3.17)'den alarak Denklem (3.30)'da kullanılacak olursa ;

$$\underline{\underline{d}} \underline{\underline{B}}_L^T = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{d}} \underline{\underline{B}}_L^T & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} ; \quad \underline{\underline{B}}_L = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{G}} \tag{3.31}$$

$$\underline{\underline{K}}_{\sigma} d\underline{a} = \int_V \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{G}^T d\underline{A}^T \\ \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_{XY} \\ M_X \\ M_Y \\ M_{XX} \end{bmatrix} dv \quad (3.32)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} d\underline{A}^T \begin{bmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_{XY} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} T_X & T_{XY} \\ T_{XY} & T_Y \end{bmatrix} d\theta \\ &= \begin{bmatrix} T_X & T_{XY} \\ T_{XY} & T_Y \end{bmatrix} \underline{G} d\underline{a}^b \end{aligned} \quad (3.33)$$

Denklem (3.33) ile açıklanan matrix transformasyonu (Zienkiewicz, 1983), Denklem (3.32)'de kullanılarak ;

$$\underline{\underline{K}}_{\sigma} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\underline{K}}_{\sigma}^b \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

ve

$$\underline{\underline{K}}_{\sigma}^b = \int_V \underline{G}^T \begin{bmatrix} T_X & T_{XY} \\ T_{XY} & T_Y \end{bmatrix} \underline{G} dv \quad (3.35)$$

denklemleri elde edilir. Burada $\underline{G}$ matrisi 8 ağ noktalı eleman ve 5 serbestlik mertebeli problemler için, (40x2)'lik ; 9 noktalı eleman kullanıldığı zaman ise (45x2)'lik satır ve kolon sayısına sahip olacaktır. Sonuç olarak; katılık matrisi $\underline{\underline{K}}_o$, $\underline{\underline{K}}_{\sigma}$, $\underline{\underline{K}}_L$ olmak üzere üç ayrı kısımdan oluşmaktadır.

Böylece, dengelenmemiş kalıcı yük değerinin varyasyonu $d\psi$, Denklem (3.20) göz önüne alınarak , aşağıdaki şekle dönüşür;

$$\begin{aligned} d\psi &= \left(\underline{\underline{K}}_0 + \underline{\underline{K}}_\sigma + \underline{\underline{K}}_L \right) d\mathbf{a} \\ d\psi &= \underline{\underline{K}}_T d\mathbf{a} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Denklem (3.36) deki $\underline{\underline{K}}_T$ katılık matrisi, "toplam teğet katılık matrisi" olarak bilinmektedir. Büyük deformasyon katılık matrisi ise üç kısımdan oluşmuştur. Bunlar $\underline{\underline{B}}_0^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}}_L$, $\underline{\underline{B}}_L^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}}_L$, $\underline{\underline{B}}_L^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}}_0$ şeklinde tanımlanırken lineer küçük deformasyon katılık matrisi ise $\underline{\underline{B}}_0^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}}_0$ şeklinde ifade edilmektedir.

3.3 Lineer Olmayan Denklem Takımlarının Yineleme Yöntemi İle Çözümü

Malzemeye bağlı veya geometrik olarak lineer olmayan problemlerin çözümünde en çok kullanılan yöntem Newton-Raphson yineleme yöntemidir. SEY kodlarında, denge denklemleri aşağıdaki formdadır;

$$\underline{\underline{K}}(\mathbf{u})\mathbf{U} = \mathbf{R} \quad (3.37)$$

Genel yapısal katılık matrisi, bilinmeyen yerdeğiştirme vektörü değerlerinin $\mathbf{u}$ fonksiyonu halindedir. Bu nedenle (3.37) numaralı denklemde, yineleme çözüm metodları kullanılarak, lineer olmayan denklem takımları çözülmektedir. Newton-Raphson yineleme metodunun da kullanım alanlarına göre değişik formları vardır. Bunlardan en çok kullanılanları şunlardır;

- a) Doğrudan Yineleme Metodu
- b) Newton Raphson Metodu (Teğet katılık matrisi metodu)
- c) Modifikasyonu yapılmış Newton Raphson Metodu (Teğet Katılık Matris Metodu).

Doğrudan Yineleme Metodunda, katılık matrisinin tersi $[\underline{K}(u)]^{-1}$ her iterasyonda yenilenmektedir. Bu da iterasyon sayısını çoğaltmakta ve kodun çalışma süresini uzatmaktadır. Newton-Raphson (teğet katılık matrisi) metodunda ise ilk olarak katılık matrisi ve tersi bulunur ve bu matris her yerdeğiştirme artışından sonra bu yeni değerlerle tekrar çözülmektedir. Böylece yükün önceki değerleri ve yerdeğiştirmenin toplam değeri üzerinden yineleme ile adım adım sonuca yaklaşılr (Zienkiewicz, 1983). Geliştirilen SEY kodu COMPAN'nın lineer olmayan analizi sırasında bu metod kullanılmıştır. Adımlar halinde bu metodun kullanılışı aşağıdaki gibi kısaca açıklanabilir (Zienkiewicz, 1983), (Polat, 1994);

$$1) \quad \Delta \underline{U}^{(i-1)} = -[\underline{K}(\underline{u}^{i-1})]^{-1} \underline{\psi}^{i-1} \quad (3.38)$$

$$2) \quad \underline{\psi}^{(i)} = \underline{R} - \int_V \underline{B}^T \Delta \underline{\sigma}^{(i)} dV \quad (3.39)$$

$$3) \quad \Delta \underline{U}^{(i)} = -[\underline{K}(\underline{u}^{i-1})]^{-1} \underline{\psi}^{(i)} \quad (3.40)$$

$$4) \quad \underline{U}^{(i)} = \underline{U}^{(i-1)} + \Delta \underline{U}^{(i)} \quad (3.41)$$

Sıfır yerdeğiştirme vektörü ile iterasyona başlanacak olursa, Denklem (3.39), ilk basamak olarak , aşağıdaki şekilde kullanılır ;

$$\underline{\psi}^{(i)} = \underline{R} \quad (3.42)$$

Geliştirilen COMPAN kodunda, lineer olmayan çözüme başlanırken, ilk değer olarak, lineer çözümde elde edilen sonuçlar alınmıştır. Bundan başka kod içinde, Newton-Raphson nümerik çözümünde, çözümün gerçek çözüme ne kadar yaklaştığını kontrol edebilmek amacı ile Euclidean normu aşağıdaki şekilde kullanılmaktadır (Gerald and Wheatley, 1984).

Yer değişimi vektörü için i' inci iterasyon için ,

$$\|\underline{U}\|_2^{(i+1)} = \left(\sum_{j=1}^{\max \text{ nok.}} (\underline{U}^{(i)}_j)^2 \right)^{1/2} \quad (3.43)$$

$$\|\Delta \underline{U}^{(i)}\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{\max \text{ nok.}} (\Delta \underline{U}^{(i)}_j)^2 \right)^{1/2} \quad (3.44)$$

olur. Denklem (3.43) ve Denklem (3.44) kullanılarak, aşağıdaki denklem elde edilir .

$$\frac{\|\Delta \underline{U}^{(i)}\|_2}{\|\underline{U}^{(i+1)}\|_2} < \varepsilon^{(i)} \quad (3.45)$$

Denklem(3.45) içinde yer alan $\varepsilon^{(i)}$ değeri küçük bir sayı olarak seçilmiştir.

4. ENİNE KAYMA GERİLME VE GENLEMELERİ İÇİN MELEZ (Heterosis) ELEMAN TANIMLAMALARI

Fiber-takviyeli katlı kompozit yapılar, değişik modellemeler ile çözülmeye çalışılmıştır. Çözüm metodları, plağın yapısına bağlı olarak da değişmektedir. Ayrıca, kompozit yapılar ortotropik, genellikle-ortotropik, özellikle-ortotropik veya anizotropik kompozit plaklar gibi içlerinde sınıflandırılmaktadırlar. Plağın yapı özelliğinden başka, kalınlığının genişliğine oranı da, plağın analizi sırasında önemli bir faktör olarak önümüze çıkmaktadır. Çünkü, kalın plaklar için geçerli olan teoriler, ince plaklar için geçerli değildir çünkü kullanılan teorilerin kabülleri birbirinden farklıdır. Kirchhoff teorisine göre plağa etki eden enine kayma genlemeleri ve buna bağlı olarak da gerilmeleri sifıra eşit alınmaktadır. Bu teori, ince plaklar için geçerli olan bir teoridir ve kabülleri arasında orta plak normal vektörünün, deformasyondan önce ve sonraki durumları için, bu yüzeye dik kaldıkları kabul edilmektedir. Kalın plaklar için geçerli olan Mindlin teorisinde ise, plağa etki eden enine kayma gerilmelerinin var olduğu, ve enine kayma genlemelerinin oluşumu da deformasyondan önce, orta plak yüzeyine dik olan normal vektörün, deformasyondan sonra dik kalmayarak, ek bir deformasyon göstermesi ile açıklanmaktadır. Bu aşamada, yukarıda açıklanan teorileri aynı çözüm metodunda birleştirebilmek veya diğerbir deyişle, plağın kalınlığına bağlı olmayan bir çözüm metodu geliştirmenin gerekliliği ortaya çıkmıştır. Mindlin Teorisi sonuçlarının, plağın kalınlığı azaldıkça, belli bir incelikten sonra, Klasik Plak Teorisi sonuçlarından uzaklaşmakta olduğu ve deformasyon değerlerinin büyüemediği bilinmektedir (Putcha and Reddy, 1986). Bu durum, plağın katılığının artması veya diğer bir deyişle deformasyon kitlenmesi olarak açıklanmaktadır. Bu konu ile ilgili olarak

yapılan çalışmalarda, deformasyonun kitlenmesini önleyebilmek, Mindlin Teorisi kabüllerine göre, elde edilen denklemleri kalın plakların yanısıra, ince plaklarda da kullanabilmek için, elastik kayma sabitleri matrisi, belirli sabitlerle çarpılmaktadır. Bu sabitler “kaymayı düzeltici faktörler” olarak isimlendirilerek kullanılmaktadırlar. Bu faktörleri bulabilmek için değişik çözüm metodları uygulanmaktadır. Bu metodlar kısaca, Bölüm 4.1'de açıklanmıştır.

4.1 Penaltı Faktör Teknikleri

Penaltı faktörü kullanarak, kalın plak elemanları, ince plaklar için de bir ölçüye kadar kullanılabilir. Bu faktör ince plaklarda, kayma deformasyonunun etkisini yokmuş gibi göstermeye çalışmaktadır. Mindlin Teorisi kabülleri ve penaltı faktörü kullanılmadan alınan sonuçlar ile Klasik Plak Teorisi kabülleri çerçevesinde bulunan sonuçlar karşılaştırılacak olursa, h/L oranının 0.1 değerinden küçük değerleri için plağın esnemesinin yüklerle orantılı olarak artmadığı, daha az oranlarda deformasyon gösterdiği gözlenecektir. Plağın direncinin artması veya deformasyonun azalması, plağın katılığının artması olarak açıklanmaktadır. Bu etkiyi azaltmak için kullanılan metodlardan biri, penaltı faktörü tekniğidir. Penaltı faktörü, birçok nümerik testin sonucunda bulunmuştur ve Denklem (4.1) ile aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır (Mohr,1992) ;

$$\beta = \frac{(sabit) G t^2}{1.2 E h^2} \quad (4.1)$$

Burada β , penaltı faktörü, G, kayma modülü, t, plağın kalınlığı, E, elastik modülü, h plağın genişliği ve sabit ise α ile tanımlanan sabit bir sayıdır. Katılık matrisinde, penaltı faktörü aşağıdaki gibi

$$[k] = [k_b] + \beta [k_s] \quad (4.2)$$

çarpan halinde kullanılmaktadır. Burada $[k_b]$, eğilme katılık matrisi, $[k_s]$, kayma katılık matrisidir. Eğilme genlemeleri $\partial \phi / \partial x$ ile, kayma genlemeleri $\partial w / \partial x$ veya ϕ ile ifade edildiği ve ilgili türevlerin, plağın h - uzunluğu boyunca alındığı için, yukardaki formülasyonda h^2 paydada görülmektedir. β değeri, ağ elemanına bağımlı olduğu için, gerçek sonuca yaklaşım aşağıdaki kabüller göz önüne alınarak bulunmuştur.

a) Kayma ve eğilme genlemeleri, kullanılan ağ elemanlarından çok aşağıdaki orana bağımlıdır ;

$$\frac{G t^2}{1.2 E L^2} \quad (4.3)$$

b) Hatalar, aşağıdaki orana bağımlıdır :

$$\left(\frac{h}{L} \right)^N \quad (4.4)$$

Burada N, elemanlarda kullanılan polinomun mertebesidir. Böylece, bu iki faktörün birbiri ile çarpımı sonucunda, hem kaymayı düzelten, hem de h/L oranından dolayı oluşan hataları azaltıcı, değer bulunmuş olur (Mohr, 1992). β değeri , N=2 için aşağıdaki formdadır ;

$$\beta = (\text{sabit}) \frac{G t^2}{1.2 E L^2} \left(\frac{L}{h} \right)^2 \quad (4.5)$$

Penaltı faktörleri, genellikle, lineer olmayan problem çözümlerinde kullanılmakta olup, problemin çözümünü zorlaştıran, Kirchhoff şartlarında olduğu gibi şartların $\frac{\partial w}{\partial s} - \phi_s = 0$ etkisini bir ölçüde yok edici özelliğe sahiptir.

İzotropik malzeme özelliklerine sahip plaklar için, yukarıda belirtilen faktör kayma düzeltici faktör olarak kullanılmış ve teorik sonuçlara çok yakın değerler elde edilmiştir. (Hughes, Taylor ve Kanoknukulchai, 1977) yaptıkları çalışmada çok ince plaklarda, örneğin L/h oranının 10^5 ve daha büyük olduğu değerleri için, elde edilen çözümün gerçek çözümden uzaklaşmaması için, kayma katılık matrisini, (L/t) değerinin çözüm alınabilinen en ince değerinin karesi ile çarparak kullanmışlar ve bunun doğruluğunu göstermişlerdir.

Kullanılan diğer bir metod da (Whitney, 1973) tarafından statik yük altındaki ortotropik plaklar için geliştirilmiştir. (Chow, 1971) benzer formülasyonu simetrik olarak dizilmiş plaklar için yapmış ve enine kayma gerilmeleri için aşağıdaki parabolik dağılımı kullanmıştır.

$$k_1^2 = D_{11}^2 \left\{ h d_{55} \int_{-h/2}^{+h/2} [g^2(z) / G_{13}(z)] dz \right\}^{-1}$$

$$g(z) = \frac{Q_{11}}{2} \left(\frac{h}{2} \right)^2 \left[1 - (z / (h / 2))^2 \right] \quad (4.6)$$

Burada D_{11} , d_{55} , $\bar{Q}_{11}$, elastik sabitler ve G_{13} kayma modülüdür. Homojen ve anizotropik malzemeler için k_1^2 'in değeri, 5/6 olarak bulunmuştur. Whitney (1973) yaptığı çalışma ile simetrik olmayan plaklarda her kat için, kayma düzeltici faktörün

$$k_1^2 = \left[A_{55} \int_{-h/2}^{+h/2} g^m(z) dz \right]^{-1}$$

$$g^m(z) = S_{55}^m \left[\frac{a^m}{2D} + \frac{Q_{11}^m}{2D} z (2B_{11} - A_{11}z) \right]^2 \quad (4.7)$$

$$D = (D_{11}A_{11} - B_{11}^2)$$

şeklinde bulunacağını göstermiştir. Simetrik kompozit plaklar için, B_{11} değeri sıfır olduğu için, bu eşitlik (Chow,1971)'un elde ettiği denkleme eşitlenmektedir. Vinson ve Chou (1975) kullandıkları metod ile ise, her kat için Denklem(4.9)'da belirtildiği gibi, kayma düzeltici faktörler parabolik dağılım fonksiyonu olarak tanımlanmışlardır.

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \sum_{m=1}^n \int_{h_m}^{h_{m+1}} (1, z, z^2) \bar{Q}_{ij} dz ; \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (4.8)$$

$$G_{ij} = k_{ij}^2 \sum_{m=1}^n \int_{h_m}^{h_{m+1}} \bar{Q}_{ij} dz ; \quad i, j = 4, 5$$

$$G_{ij} = \sum_{m=1}^n \int_{h_m}^{h_{m+1}} \bar{Q}_{ij} \left(1 - \left(\frac{z}{h/2} \right)^2 \right) dz ; \quad i, j = 4, 5 \quad (4.9)$$

Yukarıda anlatılan şekillerde penaltı faktörleri kullanılarak, ince plaklarda enine kayma deformasyonunu düzenleyici etkiler yaratılmıştır. Bu faktörler, COMPAN kodunda aşamalar halinde denenmiş ve sonuçlar Bölüm 5'de sayısal değerlerle karşılaştırmalı olarak açıklanmıştır.

4.2 Melez Eleman Tanımlamaları

Enine kayma gerilmesi ile oluşan deformasyonun, Kirchhoff Teorisine göre sıfır olduğu kabul edilmektedir.

$$\begin{aligned}\gamma_{zs} &= w_{,s} + \theta_n = 0 \\ w_{,s} &= -\theta_n\end{aligned}\tag{4.10}$$

Enine kayma gerilmesi sıfır değilse, bir sabite eşit ise veya değişimi lineer olarak kabul edilecek olursa Mindlin Teorisine göre

$$\gamma_{zs} = w_{,s} + \theta_n = \text{sabit} = c\tag{4.11}$$

şeklinde yazılacaktır. Başka bir deyişle

$$w_{,s} = -\theta_n + c\tag{4.12}$$

olacaktır. Örneğin, x yönündeki yerdeğişimi için u_1 , y yönündeki yerdeğişimi için u_2 tanımlamalarını kullanarak ;

$$\begin{aligned}
\gamma_{13} &= \frac{1}{2} [u_{1,3} + u_{3,1}] = c \\
u_{1,3} &= -(c_1 + u_{3,1}) \\
u_1 &= u_{1_0} + z u_{1,3} \\
u_1 &= u_{1_0} + z (-(c_1 + u_{3,1})) \\
u_1 &= u_{1_0} - z (c_1 + u_{3,1})
\end{aligned} \tag{4.13}$$

ve

$$u_1 = u_{1_0} - z(\theta + c) = -z\phi_n$$

olacaktır. Aynı şekilde yazılacak olursa ;

$$\begin{aligned}
u_2 &= u_{2_0} - z(c_1 + u_{3,2}) \\
u_2 &= u_{2_0} - z\phi_n
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s} \gamma_{sz} &= \frac{\partial}{\partial s} (w_{,s} - \phi_n) = 0 \\
\frac{\partial^2}{\partial s^2} \gamma_{sz} &= \frac{\partial^2}{\partial s^2} (w_{,s} - \phi_n) = 0
\end{aligned} \tag{4.15}$$

olacaktır. Burada θ , orta düzlem normalinin Kirchoff Teorisine göre deformasyonunu, ϕ_n ise θ artı kayma deformasyonundan dolayı ek dönme açılarının toplam değeridir. Denklem (4.12) 'den de görüleceği gibi sehim tanımlayan polinomun türevi alındığı zaman elde edilecek polinomun mertebesi, rotasyonlar için kullanılan mertebeye eşit olmaktadır. Buradan hareket edilerek, Mindlin Teorisi kabülllerini de kullanarak her ağ elemanının sınırları boyunca Denklem (4.15) deki şartlar kullanılmıştır. Ayrıca sehim için, rotasyonlara göre bir mertebe üstten polinomlar kullanılmıştır. Böylece, ağ elemanları sınırları boyunca (4.13) numaralı denklem tam olarak sağlanmış olmaktadır.

İkinci aşama olarak eleman yerdeğiştirme tanımlamaları aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır..

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u^e_o \\ v^e_o \\ w^e_o \\ \phi_x^e \\ \phi_y^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [H_q] & & & & \\ & [H_q] & & & \\ & & [H_c] & & \\ & & & [H_q] & \\ & & & & [H_q] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^I \\ v^I \\ w^I \\ \phi_x^I \\ \phi_{yx}^I \\ \dots\dots\dots \\ u^n \\ v^n \\ w^n \\ \phi_x^n \\ \phi_{yx}^n \end{Bmatrix}$$

(4.16)

Burada $[H_q], [H_c]$ karşılıklı olarak kuadratik ve kübik polinomları tanımlamakta, n ise kullanılan elemanın ağ noktalarının maksimum değeridir.

Üçüncü aşama olarak, enine kayma genlemelerini tanımlarken 12 ağ noktalı kübik eleman z yönündeki sehimi tanımlamak için kullanılırken, 8 ağ noktalı Serendipy eleman u, v, ϕ_x, ϕ_y yerdeğiştirme vektör alanlarını tanımlamak için kullanılmıştır. Burada amaç 12 ağ noktalı kübik elemanın her kenar ortasında bulunan bir çift ağ noktasını yok etmektir. Sonuçta 12 ağ

noktalı eleman, 4 köşe noktalı w^* tanımlı elemana dönüşmektedir. Bu işlem sonucunda, orta noktalarda tanımlı w^* değerleri, 8 ağ noktalı elemanın köşe noktaları üzerine dağılmış olarak işlem göreceklidir.

$$\frac{\partial \gamma}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left((w^*)_{12 \text{ ağ nok el}} - (\phi_n)_{8 \text{ ağ nok el}} \right) = 0 \quad (4.17)$$

Kısaca açıklamak gerekirse 8 ağ noktalı eleman u, v, ϕ_x, ϕ_y serbestlik mertebelerine, 12 ağ noktalı eleman ise yalnızca w serbestlik mertebesine sahiptir. Sonuçta elde edilen ağ elemanın köşe noktaları, $u, v, w^*, \phi_x, \phi_y$, kenar orta noktaları ise u, v, ϕ_x, ϕ_y serbestlik mertebelerine sahiptir. Böylece ağ elemanı toplam 36 serbestlik mertebesine sahip olmaktadır. Bu eleman tanımlaması SEY formülasyonunda, enine kayma gerilmelerini tanımlamak için COMPAN içinde kullanılmıştır. Bu işlem, matris formunda Denklem (4.18), Denklem (4.19) ve Denklem (4.20) ile açıklanmaktadır.

Denklem (4.17) deki $[H_q]$ hem serendipity, hemde 9 ağ noktasına sahip Lagrangian noktalı eleman ağı için geçerlidir. $[H_1], [H_2], [H_3]$, 8 ve 12 noktalı eleman ağlarının birleşiminden oluşturulmuş yeni melez elemanın şekil matrisi komponentlerini ifade etmektedir. Yeni elemanın formülasyon basamakları Bölüm 4.3 içinde özetlenmiştir.

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_o^e \\ v_o^e \\ w_o^e \\ \phi_{x_o}^e \\ \phi_{y_o}^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [H_q] & & & & \\ & [H_q] & & & \\ & & [H_c] & & \\ & & & [H_q] & \\ & & & & [H_q] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{matrix} u^1 \\ v^1 \\ w^1 \\ \phi_x^1 \\ \phi_y^1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u^2 \\ v^2 \\ w^2 \\ \phi_x^2 \\ \phi_y^2 \end{matrix} \} \zeta \text{ Öz} \\ \begin{matrix} u^3 \\ v^3 \\ w^3 \\ \phi_x^3 \\ \phi_y^3 \end{matrix} \} \zeta \text{ Öz} \\ \dots \\ \begin{matrix} u^{11} \\ v^{11} \\ w^{11} \\ \phi_x^{11} \\ \phi_y^{11} \end{matrix} \} \zeta \text{ Öz} \\ \dots \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

Denklem (4.18), beş serbestlik mertebeli, 12 ağ noktasına sahip eleman ağı kullanıldığı takdirde, Şekil 3.2'den de görüleceği gibi çözülmesi gereken 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12 numaralı ağ noktalarının belirtildiği bir ifadedir. Bu çalışmada 12 ağ noktalı eleman yalnızca bir serbestlik derecesi (w) için tanımlanmıştır. İlgili noktalarda tanımlı sehim polinomları kayma gerilmesi sınırlamaları (Şekil.4.1) denklemlerinde eleman ağının kenarları boyunca kullanılarak ortak çözülmüşlerdir. 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12 numaralı ağ noktaları için elde edilen $w_2, w_3, w_5, w_6, w_8, w_9, w_{11}, w_{12}$ sehim denklemleri 8 ağ noktalı eleman ağı içinde tanımlı ϕ_x, ϕ_y serbestlik mertebeleri cinsinden ifade edilmişlerdir. Bu değerler Denklem (4.16) da yerinde kullanıldığı zaman 8 ağ noktalı eleman ağı tanımlamalarında ϕ_x, ϕ_y tanımlamaları 8 ve 12 ağ noktalarına sahip elemanların karşılıklı değerlerinin toplamı şekline dönüşürken yeni sehim tanımlaması w^* ortaya çıkmaktadır. Denklem (4.19) eleman yerdeğiştirme vektörünün düzenlenmiş şeklini ifade etmektedir.

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_o^e \\ v_o^e \\ w_o^e \\ \phi_x^e \\ \phi_y^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [H_q] & & & & \\ & [H_q] & & & \\ & & [H_c^*] & & \\ & & & [H_q] & \\ & & & & [H_q] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^I \\ v^I \\ w^{*I} \\ \phi_x^I \\ \phi_y^I \\ \dots \\ u^n \\ v^n \\ w^{*n} \\ \phi_x^n \\ \phi_y^n \end{Bmatrix}$$

(4.19)

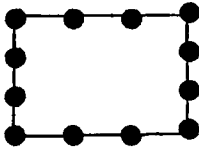
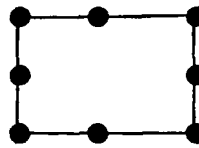
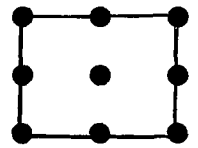
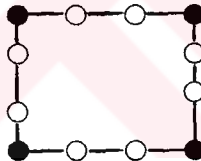
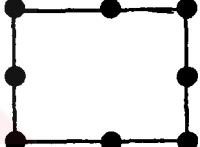
$$[H^*] = \begin{bmatrix} & [H_q] & & & \\ & & [H_q] & & \\ & & & [H_c^*] & \\ & & & & [H_q] \\ & & & & & [H_q] \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$[H^*] = \begin{bmatrix} & [H_q] & & & & \\ & & [H_q] & & & \\ & & & [H_3] & [H_1] & [H_2] \\ & & & & [H_q] & \\ & & & & & [H_q] \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

4.3 Melez Eleman Formülasyonu

Plağın z-yönündeki sehim, 12 ağ noktasına sahip kübik eleman ile tanımlayarak yeni melez (heterosis) eleman tanımlanmaya başlanmıştır.

$$\begin{aligned} w &= \underline{\underline{N}} \underline{w} \\ w &= N_1 w_1 + N_2 w_2 + N_3 w_3 + N_4 w_4 + N_5 w_5 + N_6 w_6 + N_7 w_7 + N_8 w_8 \\ &+ N_9 w_9 + N_{10} w_{10} + N_{11} w_{11} + N_{12} w_{12} \end{aligned} \quad (4.22)$$

	MELEZ ELEMEN	Elemanın Her Kenarındaki Enine Kayma Gerilmesi Sınırlaması $\frac{\partial}{\partial s} \gamma_{xz} = \frac{\partial}{\partial s} (w_{,s} - \phi_x) = 0$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} \gamma_{xz} = \frac{\partial^2}{\partial s^2} (w_{,s} - \phi_x) = 0$	Şekil matrisinde kullanımı
Eleman Tanımlamaları Enine kayma deformasyonu için - 8 Noktalı serendipity eleman + 12 Noktalı Kübik eleman (melez eleman) A) 9 Noktalı Lagrangian eleman + melez eleman 3) 8 Noktalı Lagrangian eleman + melez eleman	 12 Noktalı Kübik Eleman	 8 Noktalı Kuadratik Serendipity Eleman (1)	 9 Noktalı Lagrangian Eleman (3)
Düzensel ve Enine Kayma Deformasyonu İçin Şekil Fonksiyonlarında Kullanılan Ağ Noktalarında Tanımlanmış Yerdeğiştirme Vektörleri	 Sınırlandırılmış eleman (Melez)	 8 ağ noktalı kuadratik eleman (2)	
TANIMLAMALAR	 noktalarında tanımlı yerdeğiştirmeleri $\{u_i, v_i, w_i, \phi_{x_i}, \phi_{y_i}\}$	 noktalarında tanımlı yerdeğiştirmeleri $\{u_i, v_i, \phi_{x_i}, \phi_{y_i}\}$	

Şekil 4.1 Yeni melez eleman tanımlamaları

$$\begin{aligned}
w = & \frac{1}{32}(1-\xi)(1-\eta)[-10+9(\xi^2+\eta^2)]w_1 + \\
& \frac{1}{32}(1+\xi)(1-\eta)[-10+9(\xi^2+\eta^2)]w_4 + \\
& \frac{1}{32}(1+\xi)(1+\eta)[-10+9(\xi^2+\eta^2)]w_7 + \\
& \frac{1}{32}(1-\xi)(1+\eta)[-10+9(\xi^2+\eta^2)]w_{10} + \\
& \frac{9}{32}(1-\xi^2)(1-\eta)(1-3\eta)w_2 + \\
& \frac{9}{32}(1-\xi^2)(1-\eta)(1+3\eta)w_3 + \\
& \frac{9}{32}(1-\xi^2)(1+\eta)(1+3\eta)w_8 + \\
& \frac{9}{32}(1-\xi^2)(1+\eta)(1-3\eta)w_9 + \\
& \frac{9}{32}(1+\xi)(1-\eta^2)(1+3\eta)w_6 + \\
& \frac{9}{32}(1-\xi)(1-\eta^2)(1-3\eta)w_{12} + \\
& \frac{9}{32}(1-\xi)(1-\eta^2)(1+3\eta)w_{11} +
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Eleman ağının 2 numaralı yüzeyi boyunca η =değişken, $\xi = 1$,
aşağıdaki eşitlikler sağlanmaktadır.

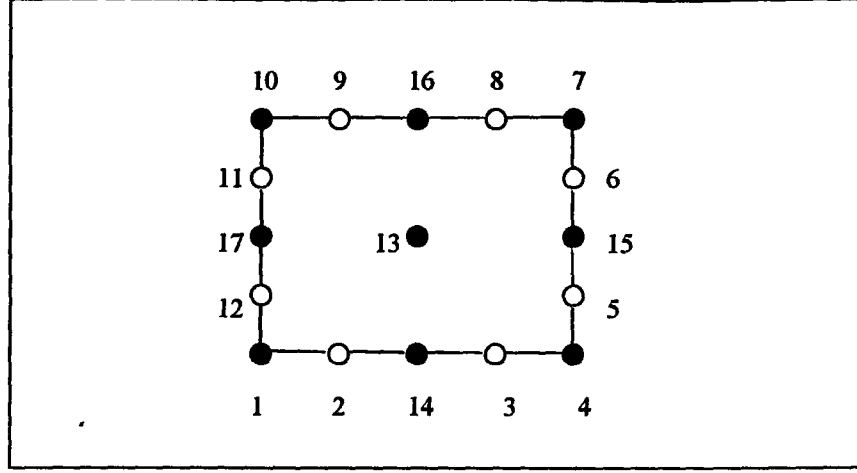
$$\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \frac{\partial(\phi_x + \phi_y)}{\partial \eta} = 0 \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \phi}{\partial \eta} &= 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} &= \frac{\partial^2 w_4}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 w_5}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 w_6}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 w_7}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} &= \frac{\partial \phi_4}{\partial \eta} + \frac{\partial \phi_{15}}{\partial \eta} + \frac{\partial \phi_7}{\partial \eta}\end{aligned}\tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \phi}{\partial \eta} &= 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \phi_y}{\partial \eta} &= \frac{1}{32}(\xi + 1)(-54\eta + 18)w_4 + \frac{9}{32}(\xi + 1)(18\eta - 2)w_5 \\ &+ \frac{9}{32}(\xi + 1)(-18\eta - 2)w_6 + \frac{1}{32}(\xi + 1)(54\eta + 18)w_7 \\ &- \frac{1}{4}(1 + \xi)(2\eta - \xi)(\phi_{y4} + \phi_{x4}) + \eta(1 + \xi)(\phi_{y15} + \phi_{x15}) \\ &- \frac{1}{4}(1 + \xi)(2\eta + \xi)(\phi_{y7} + \phi_{x7}) = 0\end{aligned}\tag{4.26}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \phi_y}{\partial \eta} \right) = 0\tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{32}(-54 - 54\xi)w_4 + \frac{9}{32}(18 + 18\xi)w_5 + \frac{9}{32}(-18 - 18\xi)w_6 \\ &+ \frac{1}{32}(54 + 54\xi)w_7 - \frac{1}{4}(2\xi + 2)(\phi_{y4} + \phi_{x4}) - \frac{1}{2}(-2 - 2\xi)(\phi_{y15} + \phi_{x15}) \\ &- \frac{1}{4}(2\xi + 2)(\phi_{y7} + \phi_{x7}) = 0\end{aligned}\tag{4.28}$$



Şekil 4.2 En genel durum için eleman ağı numaralandırılışı

elde edilir. Denklem (4.28)'den w_6 çekilerek Denklem (4.24) de yerine konulacak olursa ;

$$w_6 = \frac{108}{324} w_4 + \frac{2}{3} w_7 + \left(\frac{8}{36} \xi - \frac{8}{162} \right) (\phi_{y4} + \phi_{x4}) + \frac{16}{162} (\phi_{y15} + \phi_{x15}) - \left(\frac{8}{36} \xi + \frac{8}{162} \right) (\phi_{y7} + \phi_{x7}) \quad (4.29)$$

$$w_5 = \frac{216}{324} w_4 + \frac{96}{288} w_7 + \frac{8}{9} \left(\frac{1}{4} \xi + \frac{1}{18} \right) (\phi_{y4} + \phi_{x4}) - \frac{8}{81} (\phi_{y15} + \phi_{x15}) + \frac{8}{9} \left(\frac{1}{18} - \frac{\xi}{4} \right) (\phi_{y7} + \phi_{x7}) \quad (4.30)$$

Eleman ağının 1 numaralı yüzeyi boyunca $\eta = -1$, ξ =değişken, aşağıdaki eşitlikler sağlanmaktadır.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{\partial(\phi_x + \phi_y)}{\partial \xi} = 0 \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \phi}{\partial \xi} &= 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w_3}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w_4}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \xi} &= \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi_{14}}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi_4}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \phi}{\partial \xi} &= 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \phi}{\partial \xi} &= \frac{1}{32}(18 - 18\eta - 54\xi + 54\xi\eta)w_1 + \frac{9}{32}(-2 + 2\eta + 18\xi - 18\xi\eta)w_2 \\ &+ \frac{9}{32}(-2 + 2\eta - 18\xi + 18\xi\eta)w_3 + \frac{1}{32}(18 - 18\eta + 54\xi - 54\xi\eta)w_4 \\ &- \frac{1}{4}(\eta + 2\xi - 2\xi\eta - \eta^2)(\phi_{x1} + \phi_{y1}) - \frac{1}{2}(-2\xi + 2\xi\eta)(\phi_{x14} + \phi_{y14}) \\ &- \frac{1}{4}(\eta^2 - 2\xi\eta + 2\xi - \eta)(\phi_{x4} + \phi_{y4}) = 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) = 0 \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} &\frac{54}{32}(\eta - 1)w_1 - \frac{162}{32}(\eta - 1)w_2 + \frac{162}{32}(\eta - 1)w_3 \\ &- \frac{54}{32}(\eta - 1)w_4 + \frac{1}{2}(\eta - 1)(\phi_{y1} + \phi_{x1}) - (\eta - 1)(\phi_{y14} + \phi_{x14}) \\ &+ \frac{1}{4}(\eta - 1)(\phi_{y4} + \phi_{x4}) = 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

Buradan w_2 çözülür.

$$w_2 = \frac{52}{162}w_1 + w_3 - \frac{54}{162}w_4 + \frac{16}{162}(\phi_{x1} + \phi_{yx1} + \phi_{x4} + \phi_4) - \frac{32}{162}(\phi_{x14} + \phi_{y14}) \quad (4.36)$$

Denklem(4.33) kullanılarak

$$w_3 = -\frac{24}{36}w_1 + \frac{24}{36}w_4 - \frac{32}{36}\left(\frac{1}{18} + \frac{1}{4}\eta\right)(\phi_{x1} + \phi_{y1}) + \frac{32}{324}(\phi_{x14} + \phi_{y14}) - \frac{32}{36}\left(\frac{1}{18} - \frac{1}{4}\eta\right)(\phi_{x4} + \phi_{y4}) \quad (4.37)$$

bulunur. Denklem (4.37) , Denklem(4.35) de yerine konursa

$$w_2 = -\frac{1}{3}w_1 + \frac{1}{3}w_4 + \left(\frac{32}{648} - \frac{32}{144}\eta\right)(\phi_{x1} + \phi_{y1}) - \frac{16}{162}(\phi_{x14} + \phi_{y14}) - \left(\frac{32}{648} + \frac{32}{144}\eta\right)(\phi_{x4} + \phi_{y4}) \quad (4.38)$$

bulunur.

Eleman ağının 3 numaralı yüzeyi boyunca, $\eta = 1$ ξ =değişken, aşağıdaki eşitlikler sağlanmaktadır.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{\partial(\phi_x + \phi_y)}{\partial \xi} = 0 \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \phi}{\partial \xi} &= 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial^2 w_7}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w_8}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w_9}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w_{10}}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \xi} &= \frac{\partial \phi_7}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi_{16}}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi_{10}}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \phi}{\partial \xi} &= 0 \\
\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \phi}{\partial \xi} &= \frac{1}{32}(18 + 18\eta + 54\xi + 54\xi\eta)w_7 \\
&+ \frac{9}{32}(-2 - 2\eta - 18\xi - 18\xi\eta)w_8 \\
&+ \frac{9}{32}(-2 - 2\eta + 18\xi + 18\xi\eta)w_9 + \frac{1}{32}(18 + 18\eta - 54\xi - 54\xi\eta)w_{10} \\
&- \frac{1}{4}(\eta^2 + 2\xi\eta + \eta + 2\eta)(\phi_{x7} + \phi_{y7}) - \frac{1}{2}(-2\xi - 2\xi\eta)(\phi_{x16} + \phi_{y16}) \\
&- \frac{1}{4}(2\xi\eta - \eta^2 - \eta + 2\xi)(\phi_{x10} + \phi_{y10}) = 0
\end{aligned} \tag{4.41}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) = 0 \tag{4.42}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{54}{32}(\eta + 1)w_7 - \frac{162}{32}(\eta + 1)w_8 + \frac{162}{32}(\eta + 1)w_9 \\
&- \frac{54}{32}(\eta + 1)w_{10} - \frac{1}{2}(\eta + 1)(\phi_{y7} + \phi_{x7}) + (\eta + 1)(\phi_{y16} + \phi_{x16}) \\
&- \frac{1}{4}(\eta + 1)(\phi_{y10} + \phi_{x10}) = 0
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Buradan w_8 çözülür.

$$\begin{aligned}
w_8 &= \frac{54}{162}w_7 + w_9 - \frac{54}{162}w_{10} - \frac{16}{162}(\phi_{x7} + \phi_{y7}) \\
&+ \frac{32}{162}(\phi_{x16} + \phi_{y16}) - \frac{16}{162}(\phi_{x10} + \phi_{y10})
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Denklem(4.44), Denklem(4.41) da yerinde kullanılarak ;

$$\begin{aligned}
w_9 &= \frac{96}{288}w_7 + \frac{24}{36}w_{10} + \frac{8}{9}\left(\frac{1}{18} - \frac{1}{4}\eta\right)(\phi_{x7} + \phi_{y7}) \\
&- \frac{8}{81}(\phi_{x16} + \phi_{y16}) + \frac{8}{9}\left(\frac{1}{18} + \frac{1}{4}\eta\right)(\phi_{x10} + \phi_{y10})
\end{aligned} \tag{4.45}$$

bulunur. Son olarak Denklem (4.45) , Denklem(4.43) yerinde kullanılarak Denklem (4.46) elde edilir.

$$w_8 = \frac{2}{3}w_7 + \frac{1}{3}w_{10} + \left(-\frac{8}{162} - \frac{8}{36}\eta\right)(\phi_{x7} + \phi_{y7}) + \frac{16}{162}(\phi_{x16} + \phi_{y16}) + \left(-\frac{8}{162} + \frac{8}{36}\eta\right)(\phi_{x10} + \phi_{y10}) \quad (4.46)$$

Eleman ağının 4 numaralı yüzeyi boyunca, $\xi = -1$, η =değişken, aşağıdaki eşitlikler sağlanmaktadır.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \frac{\partial(\phi_x + \phi_y)}{\partial \eta} = 0 \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 w_{12}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 w_{11}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 w_{10}}{\partial \eta^2} \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta} = \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} + \frac{\partial \phi_{17}}{\partial \eta} + \frac{\partial \phi_{10}}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \phi}{\partial \eta} &= \frac{1}{32}(\xi - 1)(54\eta - 18)w_1 + \frac{9}{32}(\xi - 1)(-18\eta + 2)w_{12} \\ &+ \frac{9}{32}(\xi - 1)(18\eta + 2)w_{11} + \frac{1}{32}(\xi - 1)(-54\eta - 18)w_{10} \\ &- \frac{1}{4}(\xi - 1)(-2\eta - \xi)(\phi_{y1} + \phi_{x1}) - \eta(\xi - 1)(\phi_{y17} + \phi_{x17}) \\ &- \frac{1}{4}(\xi - 1)(\xi - 2\eta)(\phi_{y10} + \phi_{x10}) = 0 \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \phi_y}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{32}(-54 + 54\xi)w_1 + \frac{9}{32}(18 - 18\xi)w_{12} + \frac{9}{32}(-18 + 18\xi)w_{11} \\ & + \frac{1}{32}(54 - 54\xi)w_{10} - \frac{1}{4}(-2\xi + 2)(\phi_{y1} + \phi_{x1}) - \frac{1}{2}(-1 + \xi)(\phi_{y17} + \phi_{x17}) \\ & - \frac{1}{4}(-2\xi + 2)(\phi_{y10} + \phi_{x10}) = 0 \end{aligned} \quad (4.51)$$

elde edilir. Denklem (4.51)'den w_{12} çekilirse ve bu denklem Denklem(4.49) da yerine konulacak olursa ;

$$\begin{aligned} w_{12} = & \frac{54}{162}w_1 + w_{11} - \frac{54}{162}w_{10} + \frac{16}{162}(\phi_{y1} + \phi_{x1}) \\ & - \frac{32}{162}(\phi_{y17} + \phi_{x17}) + \frac{16}{162}(\phi_{y10} + \phi_{x10}) \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} w_{11} = & \frac{12}{36}w_1 + \frac{24}{36}w_{10} - \left(\frac{32}{648} - \frac{32}{144}\xi \right)(\phi_{y1} + \phi_{x1}) \\ & + \frac{32}{324}(\phi_{y17} + \phi_{x17}) + \left(-\frac{32}{648} + \frac{32}{144}\xi \right)(\phi_{y10} + \phi_{x10}) \end{aligned} \quad (4.53)$$

bulunur. Denklem(4.53), tekrar Denklem(4.52) de yerine konulacak olursa w_{12} , w_{11} den bağımsız olarak elde edilmiş olur.

$$\begin{aligned} w_{12} = & \frac{108}{162}w_1 + \frac{1}{3}w_{10} + \left(\frac{8}{162} - \frac{8}{36}\xi \right)(\phi_{y1} + \phi_{x1}) \\ & - \frac{32}{324}(\phi_{y17} + \phi_{x17}) + \left(\frac{8}{162} + \frac{8}{36}\xi \right)(\phi_{y10} + \phi_{x10}) \end{aligned} \quad (4.54)$$

Bundan sonraki aşamalar aşağıdaki gibidir ;

1) $(\phi_{x1} + \phi_{y1})$, $(\phi_{x4} + \phi_{y4})$, $(\phi_{x7} + \phi_{y7})$, $(\phi_{x10} + \phi_{y10})$,
 $(\phi_{x14} + \phi_{y14})$, $(\phi_{x15} + \phi_{y15})$, $(\phi_{x16} + \phi_{y16})$, $(\phi_{x17} + \phi_{y17})$ ve
 $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8, w_9, w_{10}, w_{11}, w_{12}$ katsayılarına, ayrı ayrı karşılık
 gelen denklemler ayrılır.

2) Şekil fonksiyonlarını bulabilmek için, bu katsayıların türevleri ξ , η kordinatlarına göre bulunur.

3) Bulunan $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6$ ve $w_7, w_8, w_9, w_{10}, w_{11}, w_{12}$ denklemleri, 12 noktalı eleman ağı denkleminde Denklem (4.22) de yerine konularak w^* bulunmuş olur;

$$w^*_3 = -\frac{24}{36}w_1 + \frac{24}{36}w_4 - \frac{32}{36}\left(\frac{1}{18} + \frac{1}{4}\eta\right)(\phi_{x1} + \phi_{y1}) + \frac{32}{324}(\phi_{x14} + \phi_{y14}) - \frac{32}{36}\left(\frac{1}{18} - \frac{1}{4}\eta\right)(\phi_{x4} + \phi_{y4}) \quad (4.55)$$

$$w^*_2 = -\frac{1}{3}w_1 + \frac{1}{3}w_4 + \left(\frac{32}{648} - \frac{32}{144}\eta\right)(\phi_{x1} + \phi_{y1}) - \frac{16}{162}(\phi_{x14} + \phi_{y14}) + \left(\frac{32}{648} + \frac{32}{144}\eta\right)(\phi_{x4} + \phi_{y4}) \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned}
w_{\star 5}^* &= \frac{216}{324} w_4 + \frac{96}{288} w_7 + \frac{8}{9} \left(\frac{1}{4} \xi + \frac{1}{18} \right) (\phi_{x4} + \phi_{y4}) - \frac{8}{81} (\phi_{x15} + \phi_{y15}) \\
&+ \frac{8}{9} \left(\frac{1}{18} - \frac{1}{4} \xi \right) (\phi_{x7} + \phi_{y7})
\end{aligned} \tag{4.57}$$

$$\begin{aligned}
w_{\star 6}^* &= \frac{108}{324} w_4 + \frac{2}{3} w_7 - \left(\frac{8}{36} \xi - \frac{8}{162} \eta \right) (\phi_{x4} + \phi_{y4}) + \frac{16}{162} (\phi_{x15} + \phi_{y15}) \\
&- \left(\frac{8}{36} \xi + \frac{8}{162} \right) (\phi_{x7} + \phi_{y7})
\end{aligned} \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned}
w_{\star 8}^* &= \frac{2}{3} w_7 + \frac{1}{3} w_{10} + \left(-\frac{8}{162} - \frac{8}{36} \eta \right) (\phi_{x7} + \phi_{y7}) + \frac{16}{162} (\phi_{x16} + \phi_{y16}) \\
&+ \left(-\frac{8}{162} + \frac{8}{36} \eta \right) (\phi_{x10} + \phi_{y10})
\end{aligned} \tag{4.59}$$

$$\begin{aligned}
w_{\star 9}^* &= \frac{9}{288} w_7 + \frac{24}{36} w_{10} + \frac{8}{9} \left(\frac{1}{18} - \frac{1}{4} \eta \right) (\phi_{x7} + \phi_{y7}) - \frac{8}{81} (\phi_{x16} + \phi_{y16}) \\
&+ \frac{8}{9} \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{4} \eta \right) (\phi_{x10} + \phi_{y10})
\end{aligned} \tag{4.60}$$

$$\begin{aligned}
w_{\star 12}^* &= \frac{108}{162} w_1 + \frac{54}{162} w_{10} + \left(\frac{8}{162} - \frac{32}{144} \eta \right) (\phi_{x1} + \phi_{y1}) - \frac{32}{324} (\phi_{x17} + \phi_{y17}) \\
&+ \left(\frac{8}{162} + \frac{8}{36} \eta \right) (\phi_{x10} + \phi_{y10})
\end{aligned} \tag{4.61}$$

$$\begin{aligned}
w_{11}^* = & \frac{12}{36}w_1 + \frac{24}{36}w_{10} - \left(\frac{32}{648} + \frac{32}{144}\xi\right)(\phi_{x1} + \phi_{y1}) + \frac{32}{324}(\phi_{x17} + \phi_{y17}) \\
& + \left(-\frac{32}{648} + \frac{32}{144}\eta\right)(\phi_{x10} + \phi_{y10})
\end{aligned}
\tag{4.62}$$

4) Enine kayma deformasyonu için, yeni düzenlenmiş yerdeğiştirme fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$w^{**} = [H_1]\{\phi_x\} + [H_2]\{\phi_y\} + [H_3]\{w^*\}
\tag{4.63}$$

$$\begin{aligned}
[B_S^*] &= \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x}[H_3] & \left(\frac{\partial}{\partial x}[H_1] - [H_q]\right) & \frac{\partial}{\partial x}[H_2] \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y}[H_3] & \frac{\partial}{\partial y}[H_1] & \left(\frac{\partial}{\partial y}[H_2] - [H_q]\right) \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{4.64}$$

Denklem (4.64)' ün SEY kodu içerisinde kullanımı ise aşağıdaki şekildedir.

$$[B_S^*] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & DDX(I) & D1(I) - N(I) & D6(I) \\ 0 & 0 & DDY(I) & D3(I) & D4(I) - N(I) \end{bmatrix}$$

Burada

$$\begin{aligned} D1(I) &= \frac{\partial}{\partial \eta} [H_3] = \frac{\partial N}{\partial \eta} [w] \\ D4(I) &= \frac{\partial}{\partial \xi} [H_3] = \frac{\partial N}{\partial \xi} [w] \end{aligned} \quad (4.66)$$

12 ağ noktasına sahip eleman için,

$$\begin{aligned} D2(I) &= \frac{\partial}{\partial \eta} [H_1] = \frac{\partial N}{\partial \eta} [\phi_x] \\ D5(I) &= \frac{\partial}{\partial \xi} [H_1] = \frac{\partial N}{\partial \xi} [\phi_x] \end{aligned} \quad (4.67)$$

8 ağ noktaya sahip eleman için,

$$\begin{aligned} D3(I) &= \frac{\partial}{\partial \eta} [H_2] = \frac{\partial N}{\partial \eta} [\phi_y] \\ D6(I) &= \frac{\partial}{\partial \xi} [H_2] = \frac{\partial N}{\partial \xi} [\phi_y] \end{aligned} \quad (4.68)$$

8 ağ noktaya sahip eleman için tanımlanmıştır. Buna göre şekil matrisi aşağıdaki formdadır.

1 numaralı yüzey için ;

$$\begin{aligned} B12 &= \cos \theta_1^i \\ A21 &= \sin \theta_1^i \end{aligned} \quad (4.70)$$

2 numaralı yüzey için ;

$$\begin{aligned} B23 &= \cos \theta_2^i \\ A23 &= \sin \theta_2^i \end{aligned} \quad (4.71)$$

3 numaralı yüzey için ;

$$\begin{aligned} B34 &= \cos \theta_3^i \\ A34 &= \sin \theta_3^i \end{aligned} \quad (4.72)$$

4 numaralı yüzey için ;

$$\begin{aligned} B14 &= \cos \theta_4^i \\ A14 &= \sin \theta_4^i \end{aligned} \quad (4.73)$$

Böylece $(\phi_{x1} + \phi_{y1})$ 'in katsayısı ;

$$\begin{aligned} &\left[-\frac{32}{36} \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{4} \eta \right) N_3 + \left(\frac{32}{648} - \frac{32}{144} \eta \right) N_2 \right] (-B12) \quad : x - \text{koordinat} \\ &\left[-\frac{32}{36} \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{4} \eta \right) N_3 + \left(\frac{32}{648} - \frac{32}{144} \eta \right) N_2 \right] (A12) \quad : y - \text{koordinat} \\ &\left[-\left(\frac{32}{648} + \frac{32}{144} \xi \right) N_{11} + \left(\frac{8}{162} - \frac{32}{144} \xi \right) N_{12} \right] (-B14) \quad : x - \text{koordinat} \\ &\left[-\left(\frac{32}{648} + \frac{32}{144} \xi \right) N_{11} + \left(\frac{8}{162} - \frac{32}{144} \xi \right) N_{12} \right] (A14) \quad : y - \text{koordinat} \end{aligned} \quad (4.74)$$

$(\phi_{x4} + \phi_{y4})$ 'in katsayısı ;

$$\begin{aligned}
 & \left[-\frac{32}{36} \left(\frac{1}{18} - \frac{1}{4} \eta \right) N_3 + \left(\frac{32}{648} + \frac{32}{144} \eta \right) N_2 \right] (-B12) \quad : x - koordinat \\
 & \left[-\frac{32}{36} \left(\frac{1}{18} - \frac{1}{4} \eta \right) N_3 + \left(\frac{32}{648} + \frac{32}{144} \eta \right) N_2 \right] (A12) \quad : y - koordinat \\
 & \left[\frac{8}{9} \left(\frac{1}{4} \xi + \frac{1}{18} \right) N_5 + \left(\frac{8}{36} \xi - \frac{8}{162} \right) N_6 \right] (A12) \quad : y - koordinat \\
 & \left[\frac{8}{9} \left(\frac{1}{4} \xi + \frac{1}{18} \right) N_5 + \left(\frac{8}{36} \xi - \frac{8}{162} \right) N_6 \right] (-A23) \quad : y - koordinat
 \end{aligned} \tag{4.75}$$

$(\phi_{x14} + \phi_{y14})$ 'in katsayısı ;

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{32}{324} N_3 - \frac{16}{162} N_2 \right] (-B12) \quad : x - koordinat \\
 & \left[\frac{32}{324} N_3 - \frac{16}{162} N_2 \right] (A12) \quad : y - koordinat
 \end{aligned} \tag{4.76}$$

$(\phi_{x15} + \phi_{y15})$ 'in katsayısı ;

$$\begin{aligned}
 & \left[-\frac{8}{81} N_5 + \frac{16}{162} N_6 \right] (-B23) \quad : x - koordinat \\
 & \left[-\frac{8}{81} N_5 + \frac{16}{162} N_6 \right] (-A23) \quad : y - koordinat
 \end{aligned} \tag{4.77}$$

$(\phi_{x7} + \phi_{y7})$ 'in katsayısı ;

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{8}{9} \left(\frac{1}{18} - \frac{1}{4} \xi \right) N_5 - \left(\frac{8}{36} \xi + \frac{8}{162} \right) N_6 \right] (-B23) \quad : x - \text{koordinat} \\
 & \left[\frac{8}{9} \left(\frac{1}{18} - \frac{1}{4} \xi \right) N_5 - \left(\frac{8}{36} \xi + \frac{8}{162} \right) N_6 \right] (-A23) \quad : y - \text{koordinat} \\
 & \left[\left(-\frac{8}{162} - \frac{8}{36} \eta \right) N_8 + \frac{8}{9} \left(\frac{1}{18} - \frac{1}{4} \eta \right) N_9 \right] (-B34) \quad : x - \text{koordinat} \\
 & \left[\left(-\frac{8}{162} - \frac{8}{36} \eta \right) N_8 + \frac{8}{9} \left(\frac{1}{18} - \frac{1}{4} \eta \right) N_9 \right] (A34) \quad : y - \text{koordinat}
 \end{aligned}$$

(4.78)

$(\phi_{x10} + \phi_{y10})$ 'in katsayısı ;

$$\begin{aligned}
 & \left[\left(-\frac{8}{162} + \frac{8}{36} \eta \right) N_8 + \frac{8}{9} \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{4} \eta \right) N_9 \right] (-B34) \quad : x - \text{koordinat} \\
 & \left[\left(-\frac{8}{162} + \frac{8}{36} \eta \right) N_8 + \frac{8}{9} \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{4} \eta \right) N_9 \right] (A34) \quad : y - \text{koordinat} \\
 & \left[\left(-\frac{32}{648} + \frac{32}{144} \xi \right) N_{11} + \left(\frac{8}{162} + \frac{8}{36} \xi \right) N_{12} \right] (-B14) \quad : x - \text{koordinat} \\
 & \left[\left(-\frac{32}{648} + \frac{32}{144} \xi \right) N_{11} + \left(\frac{8}{162} + \frac{8}{36} \xi \right) N_{12} \right] (A14) \quad : y - \text{koordinat}
 \end{aligned}$$

(4.79)

$(\phi_{x17} + \phi_{y17})$ 'in katsayısı ;

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{32}{324} N_{11} - \frac{32}{324} N_{12} \right] (-B14) \quad : x - \text{koordinat} \\
 & \left[\frac{32}{324} N_{11} - \frac{32}{324} N_{12} \right] (A14) \quad : y - \text{koordinat}
 \end{aligned}$$

(4.80)

$(\phi_{x16} + \phi_{y16})$ 'in katsayısı ;

$$\begin{aligned} \left[\frac{16}{162} N_8 - \frac{8}{81} N_9 \right] (-B34) & : x - koordinat \\ \left[\frac{16}{162} N_8 - \frac{8}{81} N_9 \right] (A34) & : y - koordinat \end{aligned} \quad (4.81)$$

olmaktadır. Bu bölümde elde edilen denklemler, genel amaçlı hazırlanmış olup, SEY kodu COMPAN içerisinde, yeni elemanı tanımlamak için kullanılmıştır.



5. BİRLEŞTİRİLMİŞ İNCE-KALIN PLAK ANALİZ AŞAMALARI VE UYGULAMALAR

Bu bölümün içeriğini kapsayan, kompozit plakların analizi aşağıdaki basamaklar dahilinde hazırlanmıştır. Bu çalışmalar sırasında FORTRAN 77 bilgisayar dili ve derleyici program olarak da FTN77 kullanılmıştır. Hazırlanan bilgisayar kodları ;

I) Kompozit plakların düzlemsel gerilme-genleme analizini gerçekleştiren *LAMINATE* ,

II) Kompozit plakların eğilme, eğilme-genleme etkileşimli düzgün yayılı yüklemeye altındaki davranışlarının analizini gerçekleştiren *COMPAN* olarak isimlendirilmişlerdir. İki ana başlık altında toplanan bu çalışmanın anahatları aşağıdaki bölümlerde açıklanmıştır.

5.1 Fiber Takviyeli Kompozit Malzeme Analiz Kodu *LAMINATE*

Bu bölümde anlatılan çalışmalar kompozit plakların statik analizinin ilk aşamalarını oluşturmaktadır. Kompozit plakların düzlemsel gerilme analizi yapıp, fiberlerin malzeme içinde değişik oriyantasyonu ile hazırlanmış değişik kompozit yapılar, düzlemsel gerilmeye maruz bırakılarak kompozit plakların gerilme, genleme ve kopma dayanıklılığı testleri altı kopma kriteri ile test edilmiştir. Bu konu ile ilgili bütün analizleri gerçekleştirebilmek için FORTRAN 77 bilgisayar dili kullanılmıştır. Kodun genel amaçlı hazırlanabilmesi için kod modüler formda yazılmış, kullanılan bütün değişkenler kodun başında bir defa tanımlanmıştır. FTN77, bilgisayarın hafızasını bütünüyle kullandığı için, kodu çalışır hale getiren tek derleyici olmuştur. İlk aşamada hazırlanan kodun (*LAMINATE*) özellikleri aşağıda basamaklar dahilinde özetlenmiştir ;

- 1) Simetrik / simetrik olmayan plakların analizi,
- 2) Altı mekanik $(N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy})$, altı da sabit ısı ve nem emme $(T_1, T_2, T_3, c_1, c_2, c_3)$ yüklemelerinin aynı anda uygulanabilmesi,
- 3) Kompozit plağın katılık matris terimleri $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}, \underline{\underline{D}}$ ve terslerinin $\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{b}}, \underline{\underline{d}}$ elde edilmesi,
- 4) Kompozit plağın denk elastik mühendislik sabitlerinin $E_x, E_y, G_{xy}, \nu_{xy}, \nu_{yx}, m_x, m_y$ hesaplanması,
- 5) x ve y koordinat eksenleri boyunca oluşan gerilme ve genlemelerin fiber yönlerindeki bileşenlerinin elde edilmesi,
- 6) Gerilme, genleme analizinin kompozit plağın her katı için hesaplanması,
- 7) Kompozit plağın her katı için kopma analizinin aşağıda belirtilen altı kopma kriteri için hesaplanması (EK-I),
 - (1) Hoffman,
 - (2) Tsai-Hill,
 - (3) Tsai-Wu Gerilme,
 - (4) Maksimum Gerilme,
 - (5) Maksimum Genleme,
 - (6) Tsai-Wu Genleme.
- 7) Kırılma analizi sırasında belli bir kopma kriteri kullanarak, kopma yük değerinin bulunabilmesi.

Bu bölümde yapılan çalışmanın amaçları ise şunlardır ;

- 1) Değişik malzeme özelliklerine ve fiber dizilişine sahip plakları bir araya getirerek, kırılmaya daha dayanıklı yeni malzeme yaratmak,
- 2) Daha sonraki aşamada plakların düzgün yayılı yük altındaki eğilme, genleşme analizini gerçekleştirecek olan SEY kodu *COMPAN*'nın kullanacağı katılık matrislerinin ve gerekli alt bilginin hazırlanması,

- 3) *COMPAN*'nın gerilme-genleme analiz sonuçlarını plağın her katında analiz edebilmek, uygulanan yükleme sonucunda kopmanın oluşup oluşmayacağına karar verebilmek şeklinde açıklanabilir.

Hazırlanan kodun kullanıcıya sağladığı kolaylıklar ve veri giriş dosyasının hazırlanması sırasında kullanılan önemli özellikler aşağıdaki şekilde açıklanabilir ;

1) Verilen malzeme özellikleri sınırlandırılmamıştır (EK-II). İstenilen sayıda malzeme özellikleri tanımlanabilir.

2) Plağın her katında fiber diziliş açıları, tabakanın kalınlığı ve malzeme özelliği numarası, konfigürasyon numarası ile tanımlanmaktadır (EK-II).

3) Plağı oluşturan toplam tabaka sayısı sınırsızdır. Simetrik dizilişe sahip plaklar için '1' , simetrik olmayan plaklar için ise '3' belirleyici sayı olarak kullanılmaktadır.

4) Her tabaka en alttan başlanarak numaralanmakta ve bu numaraların karşılığında konfigürasyon numaraları belirtilmektedir.

5) Plağa uygulanan yükleme sayısı sınırlandırılmamıştır.

6) Belirtilen her yükleme değeri için, plağın birim genişliğine uygulanan net $(N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy})$ değerleri ve sıcaklık, nem yüklemeleri $(T_1, T_2, T_3, c_1, c_2, c_3)$ verilerek veri giriş dosyası tanımlanmaktadır.

Formülasyon, en genel halde EK-I bölümünde, kodun örnek veri giriş dosyası da EK-II ile verilmiştir.

5.1.1 LAMINATE Kodu Analiz Sonuçları

Hazırlanan kodun sonuçları *CoALA* (1991), (açık yazılışı : *College of Aeronautics Laminat Analysis*) yazılım sonuçları ile karşılaştırılarak test edilmiş ve aynı sonuçlar bulunmuştur. Tablo 5.1 ve Tablo 5.2'den görüleceği gibi bulunan ısıll kuvvet-moment sonuçları, *CoALA*'nın yazılım sistemi sonuçları ile aynıdır.

Tablo 5.1 de görülen genel katılık matris değerlerinden A_{31} , A_{32} 'deki farklılıklar ise 90^0 açı ile dizilmiş fiberlerde, bu açının cosinüs değerinin, tam olarak sıfır olarak alınmamasından kaynaklanmaktadır. Bu da *CoALA* kodundaki bir hatadır. Tablo 5.2 de gösterildiği gibi, elastik sabit değerleri iki kod için eşit bulunmuştur.

Grafik 5.1 iki grafikten oluşmaktadır. İlk grafik her plak katı için elde edilmiş $\sigma_x - z$ koordinat dağılımını, ikincisi ise $\varepsilon_x - z$ koordinat dağılımını vermektedir. Bu dağılımlar SEY kodu *COMPAN* ile elde edilen plağın birim genişliğine etki eden net $M_x = -0.814E+5$ ve $M_y = -0.415E+5$ değerleri kullanılarak elde edilmiştir. Bu değerler düzgün yayılı yük altında, plağın ortasında ve orta yüzeyinde oluşan maksimum gerilme ve genleme değerlerinin plağın birim genişliği ve kalınlığı boyunca çarpılması ile elde edilmiştir.

Düzgün yayılı yüklemeye maruz kalmış basit mesnetli kompozit plak ile eşdeğer malzeme ve boyutlara sahip plak bu sefer yukarıda belirtilen yüklemeye maruz bırakılarak her katında oluşan gerilme-genleme değerleri hesaplanarak, kopmanın oluşup oluşmadığı test edilmiştir. Test sonucunda değişik kırılma kriterleri için sonuçlar tablo halinde Tablo 5.3 de özetlenmiştir. Sonuçlar üç değişik yükleme için verilmiş olup $P(\text{lb/in}^2)$ nin, -5.0 olduğu değerlerde plakta kırılma olduğu gözlenmiştir. Ayrıca Kompozit plağın genel elastik sabitleri de tablo halinde verilmiştir.

CoALA'nın test değerleri kullanılarak, mekanik veya ısı etki sonucunda plakta oluşan, gerilme-genleme, kalıcı gerilme-genleme değerleri ve kırılmayı tanımlayan ilgili mod değerleri karşılaştırılmış ve doğru sonuçlar bulunduğu görülmüştür.

SEY kodu *COMPAN* 'dan elde edilen sonuçlar 9 ağ noktalı melez eleman kullanılarak elde edilmiştir. SEY kodu ile ilgili sonuçların tartışması ilerki bölümlerde yapılmaktadır.

5.1.2 *LAMINATE Kodu Veri Çıkış Dosyasının İçeriği*

Kod *LAMINATE* ile elde edilen örnek çıkış dosyası örneği EK-VI'da verilmiştir. EK-II ile veri girişi sağlandıktan sonra kodun çalışması sonrası elde edilen sonuçlar veri çıkış dosyasında toplanmaktadır. Bu dosyaya bakıldığı zaman görülen bilgiler aşağıda sınıflandırılmıştır. Bu sınıflandırma, ayrıca kodun içeriğini de özetlemektedir. *LAMINATE* kodu ile ilgili akış şemaları EK-IV ile verilmiştir.

Veri çıkış dosyasında görülmekte olan bilgiler şunlardır ;

- 1) Veri giriş dosyasından okunan değerler,
- 2) Kompozit plağın en alt tabakadan başlanılarak numaralandırılarak belirlenen her katını oluşturmakta olan fiber diziliş açıları ve malzeme özelliğini belirten kod numarası,
- 3) Orta plaktan başlanılarak hesaplanan her katın z-koordinatının değeri ilgili kat numarası ile belirtilmesi,
- 4) Her kat için fiber yönlerine göre elde edilmiş, azaltılmış katılık matris terimlerinin Q_{ij} , $i, j = 1, 2, 6$ değerleri,
- 5) Genel elastik katılık matrisi ve tersi,
- 6) Denk elastik sabitlerin değerleri,
- 7) Kompozit plağın her katının alt ve üst yüzeylerinde oluşan;
 - a) Gerilme, genleme vektörlerinin hem fiber hem de x ve y koordinat sistemlerine göre değerleri ,
 - b) Gerilme analizine bağlı olarak altı kırılma kriterine göre kırılma mod değerleri,

- c) Nem dağılımına göre gerilme ve genleme vektör bileşenlerinin değerleri,
- d) Nem dağılımına göre kırılma analizi sonucunda elde edilen kırılma mod değerleri,
- e) Nem etkisinden dolayı kompozit plağın katlarında oluşan kalıcı gerilme (residual stress) değerleri,
- f) Isı dağılımına göre gerilme ve genleme vektör bileşenlerinin değerleri,
- g) Isı dağılımına göre kırılma analizi sonucunda elde edilen kırılma mod değerleri,
- h) Isı etkisinden dolayı kompozit plağın katlarında oluşan kalıcı gerilme (residual stress) değerleri,

8) Kompozit plağa uygulanan yüklemeler sonucunda plakta oluşan gerilme genlemeler sonucunda kırılma olmamış ise ve bazı kriterlere göre kırılma olmuş ve diğerlerine göre oluşmamış ise, altı kırılma kriterlerinden biri seçilerek, plakta kırılma oluncaya kadar analize devam edilmiştir. Bunu sağlayabilmek için, plağa etkiyen yüklerden herhangi biri seçilerek, belirlenen küçük yük artışları ile yükleme değeri arttırılmış, seçilen kırılma kriterine göre de kompozit plağın bütün katlarında kırılma tamamlanuncaya kadar bu işleme devam edilmiştir. Sonuçta ise, veri çıkış dosyasına, kompozit plağın katlarında hangi sıraya göre kırılmanın gerçekleştiği kat numarası ile belirtilmektedir. Bu sayede plağın hangi yükleme sonucunda hangi katının önce kırılacağı belirlenmiş olmaktadır. Bu analiz, kompozit plağın tamamen kırılabilmesi için bütün katlarının kırılması gerektiği göz önünde tutularak yükleme yapılmıştır.

Yukarıda açıklanan sonuçlar yükleme çeşitlerine göre değişik şekillerde elde edilebilir. Isı ve nem etkileri plağa ayrıca uygulanmaktadır. Mekanik yüklemeler ile ısı ve nem etkilerinin plakta aynı anda oluşturduğu gerilme ve genleme analizini bulabilmek için süperpozisyon metodu kullanılabilir.

5.2 İzotropik / Kompozit Plakların COMPAN Kodu İle Sonlu Elemanlar Analiz Basamakları

Çalışmanın ikinci aşamasında, plakların sonlu elemanlar analizi belli adımlar içinde tamamlanmıştır. Çalışmanın belli basamaklar içinde tamamlanmasının amacı hem doğruluğunu kontrol edebilmek hem de bir sonra yapılacak çalışmanın doğru sonuca oturtulmasını sağlamaktır. Bu basamaklar şunlardır;

- 1) İzotropik yapıya ve üç serbestlik mertebesine (w , ϕ_x , ϕ_y) sahip kalın plakların SEY ile analizi,
- 2) İzotropik yapıya sahip kalın ve ince plakların SEY ile analizi,
- 3) Kullanılan penaltı faktör tekniklerinin uygulaması,
- 4) İzotropik yapıya ve beş serbestlik mertebesine sahip (u , v , w , ϕ_x , ϕ_y) plakların SEY ile analizi,
- 5) Kompozit yapıya sahip plakların SEY ile analizi,
- 6) Kompozit yapıya sahip ince ve kalın plakların SEY ile analizi,
- 7) Klasik Plak Teorisi (KPT) kabüllerine göre sonuçların karşılaştırılabilmesi amacı ile Navier'in ince plak seri çözümünün SEY kodu COMPAN içine adapte edilmesi,
- 8) SEY ile elde edilen sonuçların 8-ağ noktalı serendipity ve 9-ağ noktalı Lagrange elemanların kullanılması ile karşılaştırılması,
- 9) Kalın ve ince plak teorilerini aynı ortamda çözüme kavuşturabilmek amacı ile yeni melez (heterosis) ağ-elemanının geliştirilmesi,
- 10) Geliştirilen melez elemanın 8 ve daha sonra 9 ağ-noktalı ağ elemanları ile ortak çözümün SEY analizleri, (9 ağ-noktalı elemanın KPT sonuçlarına en yakın sonucu vermesi üzerine, geliştirilen bu eleman ağının modifiye edilmiş ağ noktaları için, bundan sonraki aşamalarda kullanılmasına karar verilmiştir),

- 11) Sadece orta tabaka için elde edilen lineer SEY analizinin, diğer tabakalar için de elde edilmesi,
- 12) Kompozit plakların lineer olmayan analizinin SEY kodu COMPAN'a adapte edilmesi,
- 13) COMPAN kodunun lineer analiz sonuçları, LAMINATE kodunda ikinci bir analize tabi tutularak, plakta oluşan maksimum gerilmelere göre kompozit plak katlarında kırılma analizinin elde edilmesi sağlanmıştır.

Onüç basamak halinde gerçekleştirilen çalışmalar sonucunda COMPAN kodu bu şekilde tamamlanmıştır. Takip edilen çalışma basamakları ile ilgili sonuçlar 5.2.1 kısmında açıklanmıştır.

5.2.1 COMPAN sonlu elemanlar kodunun analiz sonuçları

Bir önceki bölümün birinci basamağında anlatılan izotropik yapıya sahip plakların analizi Mindlin-Reissner Teorisi kabüllerine dayandırılarak SEY analizi ile yapılmıştır. Sonuçların doğruluğu Hinton ve Owen (1977)'nin sonuçları ile karşılaştırılarak test edilmiştir.

İkinci basamakta belirtilen çalışmaları yapabilmek amacı ile kalın ve ince plak analizini aynı ortamda geliştirebilmek için daha önceden kullanılmakta olan penaltı faktör teknikleri denenmiştir. İzotropik plaklar için bu faktörler kalın plaktan ince plağa geçiş değerleri olan h/L oranının 0.01-0.3 değerleri arasında doğru sonuçlar vermektedirler, Tablo 5.4. Bunun dışındaki değerlerde veya diğer bir deyişle h/L oranının 0.3-1.0 kalın plak değerleri ile aynı oranın 0.01-0.001 ince

plak değerleri arasında alınan SEY kalın plak sonuçları, KPT kabülleri çerçevesinde bulunan Navier'in ince plak çözümlerinden uzaklaştığı görülmüştür. Üç serbestlik mertebesi içeren (w, ϕ_x, ϕ_y) SEY çözüm sonuçları, penaltı faktör içinde kullanılan sabit sayısının (α) 1, 6/5 ve 3/2 değerleri için sonuçların karşılaştırılması Tablo 5.5 ile verilmiştir. Karşılaştırmalar sonucunda en doğru sonuca, $\alpha=1$ değeri ile ulaşılmıştır. Bunun nedeni plağın, izotropik yapıya sahip olması ile açıklanmaktadır. Kompozit plaklar için $\bar{Q}_{11}/\bar{Q}_{44}$ değerini 1 sayısına yaklaştıran değer α için uygun sayı olarak belirlenmekte, böylece penaltı faktörünün değeri de bulunmuş olmaktadır.

Üçüncü basamakta daha önceden kullanılan penaltı faktör teknikleri SEY kodunda uygulanmıştır. Bu çalışmalar esas olarak iki SUBROUTINE ile toplanmıştır. SUBROUTINE CORE içinde, 4 numaralı bölüm içinde belirtilen penaltı faktör tekniklerinden Whitney ve Leissa (1969), Chow (1971) ve Whitney (1973)'in çalışmalarında özellikle-ortotropik malzemeler için elde ettiği kayma düzeltici faktörler kullanılmıştır. SUBROUTINE SHSTI içinde ise Reissner (1950), Vinson ve Chou (1975)'nin kullandığı kayma gerilmelerinin parabolik bir dağılım gösterdiği kabülü ile elde edilen kaymayı düzeltici faktörler kullanılmıştır. Bulunan sonuçlar Grafik 5.2 de ve Tablo 5.4' de karşılaştırmalı olarak verilmiştir. İnce plak çözümlerinde, Mindlin teorisi kabülleri çerçevesinde SUBROUTINE SHSTI içinde verilen parabolik dağılım ilk metoda göre daha doğru sonuçlar vermiştir.

Dördüncü basamakta belirtilen çalışma ile ağ-noktaları başına düşen serbestlik mertebeleri beşe çıkarılmıştır. Böylece w, ϕ_x, ϕ_y serbestlik mertebelerine u ve v yerdeğiştirmeleri de eklenerek plağın davranışına iki yeni boyut kazandırılmış olmaktadır.

Beşinci basamakta açıklanan çalışma ile o ana kadar yapılan çalışmalar ile COMPAN'nın izotropik yapıdan kompozit yapıya geçmesi sağlanmıştır. Bunu

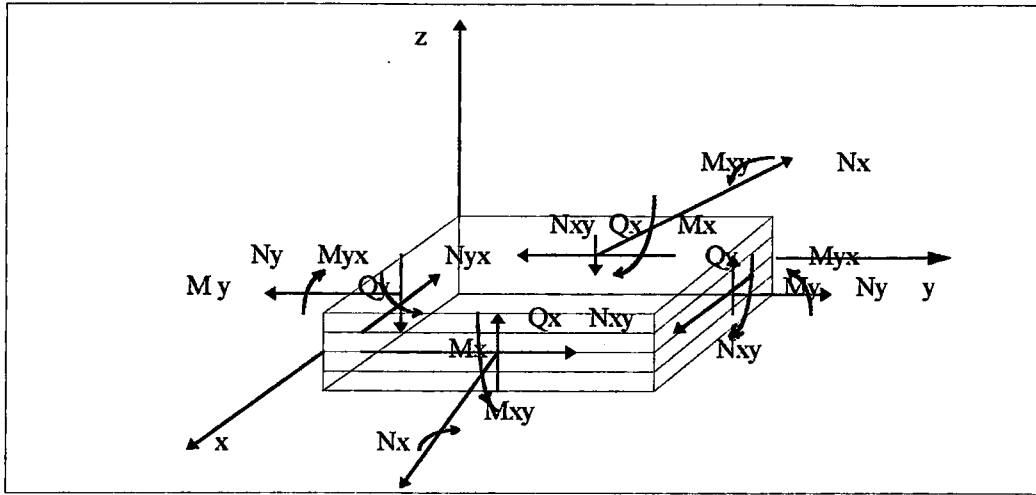
yapabilmek için LAMINATE kodunun hazırlanmış katılık matrislerinin yaratılmasını sağlayan alt programları (SUBROUTINE STIFF) COMPAN içinde kullanılabilir hale getirilmiştir. Böylece izotropik elastik sabitler matrisi yerine, kompozit yapıya sahip plağın genel katılık matrisleri kullanılmaya başlanmıştır.

Altıncı basamakta yapılan çalışmalar, ikinci şıkta yapılanların benzeri şeklindedir. Burada değişik olan plağın izotropik yapıya değilde kompozit yapıya sahip olmasıdır. Bulunan çalışmalar Tablo 5.6 ve Grafik 5.3 de açıklanmıştır. İnce plak çözümlerinde, altprogram (SUBROUTINE) SHSTI içinde, plağın z eksenini boyunca gerilme dağılımının parabolik dağılıma sahip varsayımı ile bulunan sonuçlar, altprogram (SUBROUTINE) CORE ile silindirik eğilme şartları altında ortotropik yapıya sahip kompozit plak (Whitney, 1973) için elde edilen kayma kitlenmesini önleyici faktörlerin kullanılması ile bulunan sonuçlar karşılaştırılmıştır. 9 ağ noktalı Lagrange elemanın CORE ile kullanılması ile elde edilen sonuçların daha doğru olduğu görülmüştür. Fakat bu çözüm sınırlı şartlar altında geçerlidir.

Yedinci basamakla ilgili olarak yapılan çalışma ile sonuçların Klasik Plak Teorisi (KPT) kabüllerine göre karşılaştırılabilmesi amacı ile Navier'in ince plak seri çözümünün SEY kodu COMPAN içine adapte edilmesi sağlanmıştır. Seri çözüm denklemleri içinde kullanılmakta olan kompozit plağın genel elastik sabitleri COMPAN içinde elde edilen sabitlerdir. Seri çözüm ile bulunan değerler, plağın merkezinde ve köşelerinde oluşan sehim ve moment değerleridir.

Sekizinci basamakta yapılan çalışmalar ağ elemanının nokta sayısının artırılması ile elde edilen sonuçları iyileştirme amacını taşımaktadır. Önce 8 ağ-noktalı serendipity ağ elemanları ile 9 Gauss Quadrature noktası, daha sonra ise 9 ağ noktalı Lagrange elemanlar, 4 Gauss Quadrature noktası ile kullanılarak bulunan çözümler karşılaştırılmıştır. Bu sonuçlara göre 9 ağ noktalı eleman kullanılarak bulunan sonuçlar, teorik sonuçlara çok daha yakın çıkmışlardır.

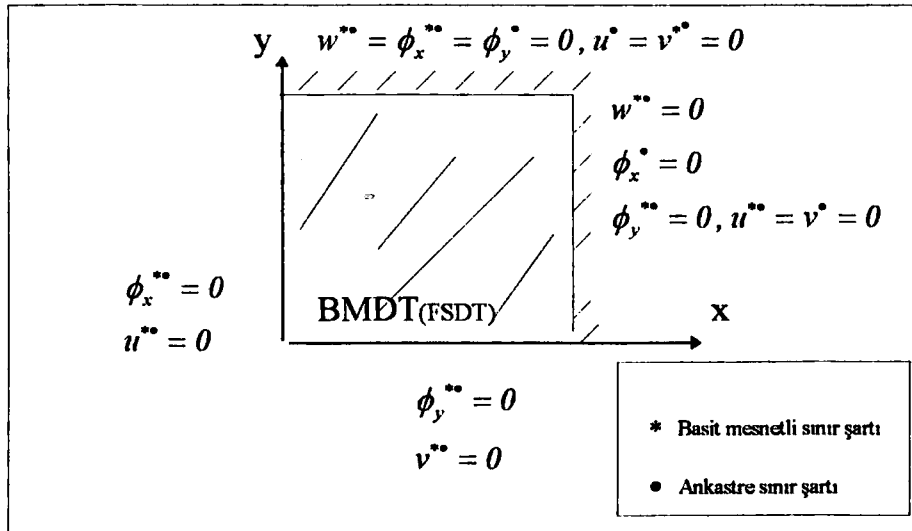
Dokuzuncu ve onuncu basamakta penaltı faktörü yerine yeni melez eleman tanımlamaları yapılmıştır. Bu çalışmalar da birkaç aşamadan oluşmaktadır. İlk aşamada 12 ağ noktalı kübik eleman ile 8 ağ noktalı kuadratik elemanın ortak çözümü sayesinde Kirchhoff sınırlayıcı denklemleri sağlanmıştır. Böylece elemanların sınırları boyunca süreklilik denklemleri sağlanmış olmakta ve ayrıca kullanılan yeni elemanlar melez olma özelliklerinden dolayı çok daha doğru çözüm sonuçları vermektedirler. Kirchhoff sınırlayıcı denklemlerinin modifikasyonu sayesinde ise enine kayma genlemeleri sıfır olarak kabul edilmemektedir. Bunun sonucu olarak da ince plak çözümünde enine kayma genlemelerini sıfır olarak kabul edilme zorunluluğu da ortadan kalkmış olmaktadır. İkinci aşamada ise olarak enine kayma genlemelerinin dışında kalan genleme değerleri için kullanılacak olan eleman ağının seçimi yapılmıştır. Önce 8 daha sonra ise 9-ağ noktalı elemanlar kullanılmış, sonuç olarak da 9 ağ-noktasına sahip elemanların geliştirilmiş ağ noktaları için daha doğru sonuçlar elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlara göre kayma kitlenmesi olarak isimlendirilen deformasyonun olması gereken değerinden küçük çıkması, engellenmektedir. Bu sağlanırken, enine kayma gerilmeleri olması gereken miktarlarda varlığını korumaktadır. Hiçbir zaman sıfır olmamaktadırlar. Penaltı faktörü kullanılırken, çözümün, h/L oranından bağımsız hale getirilmesi sağlanılmaya çalışılmıştır. Yeni geliştirilmiş 9-ağ noktalı melez eleman kullanımı ile h/L oranını etkisiz kılma işlemine gerek kalmamıştır. Elde edilen grafik ve tablolara bakıldığı zaman her h/L oran değeri için 1 değerine yakın değişik bir W_R/W_C oranı bulunduğu görülmektedir. Her h/L oranı için ayrı W_R/W_C oranı bulunması, h/L oranından bağımsız bir çözüm elde edilemeyeceğini göstermektedir. COMPAN kodunun kullanımı sırasında Şekil 5.1 de görülen koordinat sistemi kullanılmıştır. COMPAN kodu, ankastre ve basit mesnetli sınır şartları için test edilmiştir. SEY kodunda kullanılmakta olan sınır şartları Şekil 5.2 ile gösterilmiştir (Putcha and Reddy, 1986), (Reddy, 1993).



Şekil 5.1 SEY analizinde kullanılmakta olan net gerilme ve moment kuvvetlerinin pozitif yönleri

Onbirinci basamakta yapılan çalışmalar sonucunda, kompozit plağın her katında oluşan gerilme ve genlemelere bakıldığı zaman, orta plaktan olan uzaklıklarına göre simetrik olduğu görülür Grafik 5.6, Grafik 5.7, Grafik 5.8.

Onikinci basamak olarak, bu aşamaya kadar geliştirilmiş olan kod lineer olmayan analizi yapabilecek şekilde yeniden düzenlenmiştir. Elde edilen sonuçlar hem 8, hem de 9-ağ noktasına sahip elemanlar için bulunarak tablo ve grafikler yardımı ile gösterilmiştir.



Şekil 5.2 SEY kodunda kullanılan sınır şartları

Lineer olmayan analiz yalnızca orta plak için yapılmaktadır. Her kat için yapılması çok zaman alacağından gerek görülmemiştir. Lineer sonuçlar ile lineer olmayan sonuçlar arasında çok küçük fark bulunmuştur. Lineer olmayan sonuçlar, lineer sonuçlardan daha küçük değerlere sahiptirler.

Onüçüncü basamakta SEY ile kompozit plaklar için elde edilen sonuçlar, LAMINATE kodu yardımı ile kırılma analizine tabi tutularak, kompozit plağın her katının alt ve üst yüzeylerindeki gerilme ve genlemeler kullanılarak kırılma analizi yapılmaktadır. Plağa ek yükleme olarak sabit ısı ve nem değerleri de verilebilmektedir.

5.3 COMPAN Kodu İle Melez Eleman Uygulamalarının Lineer SEY Sonuçları

Enine kayma gerilmelerinin neden olduğu, kayma kitlenmesini önlemek veya diğer bir deyişle, plağın deformasyonunu serbest bırakabilmek amacı ile kullanılan metodlar daha çok üçgensel elemanlara aittir. Yapılan çalışmalarda, dörtgensel elemanlar, üçgensel elemanlara göre daha seyrek olarak kullanılmaktadır. Bunun nedenlerinden biri olarak, üçgenin köşelerinin belli bir bölgeyi taramak amacı ile daha kullanışlı olmasıdır. Üçgensel alanlar kullanıldığı zaman incelenen bölge, dörtgensel alanlara göre daha fazla alana bölünebilecek, bu da eleman sayısının artması nedeni ile daha çabuk sonuca ulaşılmasına olanak sağlayacaktır. Plaklarda ise, çalışma alanına ve Kirchhoff Teorisine en uygun olarak, dörtgensel alan kullanmak daha uygun görünmektedir. Bu nedenle Hughes ve Cohen (1978), Owen ve Hinton (1980) plakların gerilme-genleme analizi için 8-ağ noktalı quadratik, 9-ağ noktalı Lagrange kübik ve 12-ağ noktalı kübik elemanlar kullanmışlardır. Bu elemanların özellikleri kısaca aşağıda anlatılmıştır (Kardestuncer and Norrie, 1987) ;

- 1) 8-ağ noktalı kuadratik eleman : eğri yüzeyleri tanımlamaya uygun, çatlak incelemeleri gibi özel durumlara kolaylıkla adapte olabilen, lineer olmayan çözümlere uygundur. Elemanın şekli, deformasyondan dolayı, fazla bozulursa, doğru çözümünden uzaklaşmaktadır.
- 2) 9-ağ noktalı Lagrange eleman : eğri yüzeyleri tanımlamaya uygun, lineer olmayan, elastik-plastik deformasyon çözümlemelerine uygundur.
- 3) 12-ağ noktalı kübik eleman, eğri yüzeyleri tanımlamaya uygun, kırılma mekaniği çözümlemeleri için, kolaylık sağlayan özelliğe sahiptir ve lineer olmayan çözümlere uygundur.

Yukarıda tanımlanan elemanların ortak kullanımı ile bu çalışmada heterosis eleman tanımlanarak kullanılmaktadır. Ayrı, ayrı düşünüldüğü zaman 8-ağ noktalı eleman, kayma kitlenmesi için uygun görülmemektedir (Hughes and Cohen 1978). Aynı zamanda, 9-ağ noktalı Lagrange eleman rank hesaplamalarında eksiklik yaratmakta ve 9 nokta Gauss-Quadrature sayısal integral hesaplamalarında da ortada tanımlı olan dokuzuncu nokta, singular çözümler vermektedir. 8 ve 9 noktalı elemanlardan oluşturulan heterosis eleman, yapılan araştırmalarda, gerçek çözüme yakın değerler vermiştir. Heterosis'in kelime olarak anlamı, genetik biliminden seçilerek alınmıştır (Hughes, 1978). Tek başlarına, ayrı ayrı zayıf karakterleri olan genleri birleştirerek, daha güçlü melez bir yapı elde etmektir. Böylece, heterosis eleman kompozit bir yapıya sahiptir.

Melez eleman tanımlamaları bu başlangıç noktasından hareketle, bölüm 4'de anlatıldığı gibi hazırlanmıştır. Bulunan sonuçların, karşılaştırılması, Tablo 5.7, Grafik 5.5 ve Grafik 5.6, Grafik 5.7, Grafik 5.8'de görülmektedir. 9-ağ noktalı melez eleman kullanılarak alınan sonuçlar, Navier ince plak çözümü sonuçlarına en yakın sonuçları vermektedir. Genel olarak, lineer çözüm sonuçları özetlenecek olursa, bulunan sonuçlar şunlardır ;

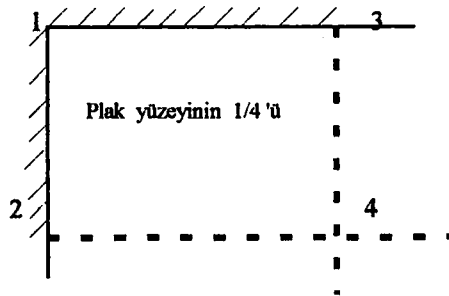
1) 8-ağ noktalı melez eleman tanımlamalarına göre, 9-ağ noktalı melez eleman, bulunan yerdeğiştirme ve gerilme vektör değerleri, KPT kabüllerine göre elde edilen sonuçlara en yakın değerleri vermektedir.

2) Plağın kalınlığı arttıkça, kayma deformasyonları etkili olmakta, inceldikçe kayma kuvvetlerinin birim yüzeye düşen değerleri azalmaktadır. Plağın merkezinde z-koordinat eksenini boyunca elde edilen enine kayma gerilmeleri ile ilgili olarak aşağıdakiler belirlenmiştir ;

a) Kalın plaklarda, enine kayma gerilmelerini lineer dağılım göstermektedir,

b) İnce plaklarda, enine kayma gerilmelerinin dağılımı parabolik olarak belirlenmiştir,

c) Plakların orta düzleminin ($z=0$), orta noktasına karşılık gelen ağ noktalarında belirlenen maksimum gerilmeler, birim genişlik ve t-plağın kalınlığı ile çarpılarak elde edilen enine kayma iç kuvvetleri Q_{xz} , Q_{yz} ince ve kalın plaklar için karşılaştırıldığı zaman, plağın kalınlığı ile orantılı olarak bu değerlerin beklendiği gibi azaldığı belirlenmiştir, Grafik 5.6, Grafik 5.7, Grafik 5.8.



Şekil 5.3 Navier seri çözümü için, plak yüzeyinin numaralandırılışı

Navier çözümünü ifade eden (ince plaklar için geçerli) Denklem (5.1) deki moment seri açılımları kullanılarak SEY sonuçları karşılaştırılmıştır.

$$\begin{aligned}
M_{xx} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (D_{11}\alpha^2 + D_{12}\beta^2) W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\
M_{yy} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (D_{12}\alpha^2 + D_{22}\beta^2) W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\
M_{xy} &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha\beta D_{66} W_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Burada kullanılan değişkenler ve ilgili çözüm metodu EK-V'de açık olarak verilmiştir. Genel olarak, 2x2 ağ-elemanı kullanarak elde edilen sonuçlar şunlardır:

3) i- M_x , M_y değerlerinin 1'deki değeri, Navier çözümündeki sıfır değerine çok yakın bir değerdedir, (Neville, 1986). ii- M_x , M_{xy} değerinin 2'deki değeri Navier çözümündeki sıfır değerine çok yakın bir değere sahiptir. iii- M_y , M_{xy} değerinin 3'deki değeri Navier çözümündeki sıfır değerine çok yakın bir değere sahiptir. iv- M_{xy} değerinin 4'deki değeri Navier çözümündeki sıfır değerine çok yakın bir değere sahiptir.

4) $-\theta^\circ / \theta^\circ$ şeklinde aynı çeşit malzemeye sahip, 2 katlı simetrik olmayan kompozit plak bütün kenarlarından basit mesnetle tutturulmuş ve düzgün yayılı yüke ($P = -100 \text{ lb/in}^2$) maruz bırakılmıştır. Eğilme-genleme etkileşimi olduğu için plak bütünüyle çözülmüştür. COMPAN çözümünde $h/L=0.02$ için $W_{Reissner}/W_{KPT}$ oranının 0.63 olduğu bilinmektedir ve $Q_{44} = G_{22}$, $Q_{55} = Q_{33} = G_{12}$ olarak tanımlanmıştır. $-45/45$ için u_3 , v_2 , w_4 yerdeğiştirmeleri (0.004, 0.004, 0.699) (2x2) eleman ağı ve (0.0149, 0.0149, 0.916) (8x8) eleman ağı (Oral and Kaftanoğlu, 1988) ile elde edilmiştir.

5) SEY M_x , M_y , M_{xy} değerlerinin, $\theta^\circ / -\theta^\circ$ göre değişimi, Navier çözümü değerleri ile paralel sonuçlar vermektedir Grafik 5.11. $45^\circ / -45^\circ$ açılarla dizilmiş 9 katlı kompozit plakta oluşan M_x , M_y değerleri beklendiği gibi birbirine eşit çıkmaktadır.

6) σ_{yz} değerinin x eksenini boyunca değişimi, Navier çözümü ile aynıdır.

7) σ_x , σ_y değerlerinin z eksenı boyunca değışimi paraboliktir, Grafik 5.10.

8) Kayma kitlenmesi ortadan kalkmış görünmektedir. İlgili tablolara bakıldığı zaman (Tablo 5.7, Tablo 5.9) plağın kalınlığı azaldıkça $\frac{W_{Reissner}}{W_{KPT}}$ oranı belli bir değere kadar düşmekte, daha sonra sabit kalmaktadır. Bunun anlamı, iki teorisinin kabülleriine göre alınan sonuçların oranının artık sabit bir değerde kalması veya kayma kitlenmesinin oluşmaması şeklinde ifade edilir.

9) Birinci mertebeden kayma deformasyon teorisi kullanıldığı için, σ_{xz} , σ_{yz} değerlerinin, plağın alt ve üst yüzeylerinde sıfır olması beklenmemektedir.

5.4 COMPAN Kodu İle Melez Eleman Uygulamalarının Lineer Olmayan Çözüm Sonuçları

8 ve 12 noktalardan oluşturulmuş yeni melez eleman ile elde edilen lineer ve lineer olmayan sonuçlar, tablolar ve grafikler halinde Tablo 5.21-Tablo 5.34 ve Grafik 5.16- Grafik 5.27 karşılaştırmalı olarak açıklanmıştır. Bu sonuçlar özetlenecek olursa ;

1) Lineer olmayan sehim değerleri, lineer çözüm sonuçlarından daha küçüktür. Bu durumun ortaya çıkması, ikinci mertebeli lineer olmayan yerdeğiştirme vektörü, türev çarpanlarının hesaplamalara girmesi ve w sehim değerinin bir kısmının bu terimlere aktarılması şeklinde açıklanmaktadır.

2) Yük miktarının artması ile birlikte, lineer ve lineer olmayan çözümler arasındaki farkın büyüdüğü gözlenmektedir Tablo 5.22, Grafik 5.16, Grafik 5.17, Grafik 5.18.

3) 9 ağ noktalı Lagrange eleman kullanılarak geliştirilmiş ağ noktalarında alınan sonuçlar, 8 noktalı serendipity eleman sonuçlarına göre çok iyi sonuçlar vermektedir (Grafik 5.35).

4) Yük miktarı küçük değerlere sahipken, Navier ve 9 ağ noktalı geliştirilmiş melez eleman çözüm sonuçları eşit çıkmaktadır, Grafik 5.24, Tablo 5.25.

5) Ankastre plak için elde edilen sonuçlar, basit mesnetli plak için elde edilenlere göre daha düşük değerlere sahiptir, Grafik 5.17.

6) Kompozit plağın aspekt oranı azaldıkça, lineer olmayan çözüme ulaşmak zorlaşmaktadır. Kalın plaklarda, sonuca az iterasyon sayısı veya 10^{-3} gibi bir norm değeri ile ulaşılmaktadır. İnce plaklarda doğru sonuca ulaşılabilmek için gerekli olan iterasyon sayısı, kalın plakların iterasyon sayısının 2 veya 3 katı olarak görülmüştür. 9 ağ noktalı net eleman için iterasyon sayısı 8 noktalı melez elemana göre daha fazladır.

7) İnce plaklar için, lineer olmayan analiz sonuçlarına göre elde edilen grafiklere bakılacak olursa, plak oldukça ince kalınlığa sahipse ve uygulanan yük miktarı da olması gereken değerden fazla ise 'yapısal kararsızlıklar' (structural instability) olarak adlandırılan bölgelerin oluştuğu görülmüştür Bu davranışın izlendiği yükleme bölgeleri dallanma (bifurcation) bölgesi olarak tanımlanmaktadır.

Bifurcation, yük miktarı (Kardestuncer and Norrie, 1987), (NASA, 1993), belli bir değere ulaştığı zaman, sehim değerinin aniden düşüşü, daha sonra yük miktarının arttırılması ile tekrar artması şeklinde kendini belli eder (Grafik 5.16, Grafik 5.18). SEY lineer çözümü sonucunda elde edilen değerlere göre bölüm

5.3'e de ek olacak şekilde, malzemenin davranışını açıklayabilmek için, aşağıda açıklanan değerlendirmeler ortaya çıkmaktadır;

1) 9 katlı çaprazlama plağın, θ açısına göre M_x , M_y , M_{xy} değerlerinin değişimleri, Grafik 5.11 de gösterildiği gibidir. Grafikten de görüldüğü gibi, M_x ve M_y değerleri, $\theta = 45^\circ$ için eşitlenmektedir. θ 'nın değeri arttıkça, M_x değerleri, M_y 'ın değerleri ile ters orantılı olarak azalmaktadır.

2) $0^\circ / 90^\circ / 0^\circ$ ile $[0^\circ / 90^\circ]_s$ 9 katlı plak sonuçları karşılaştırıldığında, aynı kalınlıktaki bu iki değişik yapıdaki plakta, $0^\circ / 90^\circ / 0^\circ$ sehimsel dağılımı, $[0^\circ / 90^\circ]_s$ değerlerine göre daha büyük çıktığı görülmektedir Tablo 5.6, Tablo 5.9. Buna ek olarak Grafik 5.32'yi de örnek gösterebiliriz. Bu grafikte $P = -1500 \text{ lb/in}^2$ altında $[0^\circ / 45^\circ]_s$ şeklinde dizilmiş 3 ve 9 katlı plakların sehimsel dağılımları gösterilmiştir. Plağın değişik yapıya sahip katlarının sayısı arttıkça, SEY sonuçlarının Klasik Plak Teorisi kabülleri çerçevesinde bulunan seri çözüm sonuçlarından uzaklaştığı bilinmektedir (Whitney, 1973).

3) Grafikler 5.28-Grafik 5.33 kompozit plağın yüzeyi boyunca sehimsel dağılımlarının, yük, h/L ve liflerin diziliş açılarına göre nasıl değiştiğini açık olarak ifade etmektedir. Plağın orta yüzeyinin $1/4$ 'ü üzerindeki sehimsel dağılım çizgileriyle gösterilmiştir. Yüzey üzerinde, simetri eksenleri üzerinde kalan ağ noktalarına karşılık gelen sehimsel değerlerinde 0.001 oranında farklılıklar görülmektedir. COMPAN'ın genel elastik sabitler matrisini oluşturan katılık terimlerinin hesaplanması sırasında kullanılan tanımlamalar, bu farkı azaltmakta veya çoğaltmaktadır. İzotropik yapıya sahip plakların sonuçlarında simetrisinin tam olarak sağlandığı görülmüştür.

5.5 COMPAN Sonlu Eleman Yazılımı Hakkında Genel Bilgi

Kompozit plakaların, 3 boyutlu koordinat sisteminde, gerilme-genleme analizini gerçekleştirmek için sonlu elemanlar yöntemi kullanılmıştır. Kod,

FORTTRAN 77 programlama dili kullanılarak hazırlanmıştır. COMPAN (açık yazılışı : COMPOSITE ANALYSIS) kodu, 8 ağ noktalı melez eleman çözer şekli 101631 byte, 9 ağ noktalı melez eleman çözer şekli, 98343 byte, LAMINATE kodu ise 18660 byte büyüklüğündedir. Kodların yanısıra kullanılan ek dosyaların büyüklükleri ise yaklaşık olarak, 5000 byte büyüklüğündedir. COMPAN kodu bir 'INCLUDE' dosyası, bir veri giriş ve üç veri çıkış dosyası ile birlikte çalışmaktadır. Kompozit plaklar için düzlemsel gerilme ve kırılma analizini gerçekleştirmekte olan LAMINATE kodu ise bir veri giriş, bir veri çıkış, bir 'INCLUDE' dosyasından oluşmaktadır. COMPAN sonlu elemanlar kodunun özelliklerini, aşağıdaki şekilde, kısaca özetleyebiliriz ;

1) COMPAN, FTN77 FORTRAN derleyicisi kullanılarak, gerekli .EXE dosyaları hazırlanmıştır. FTN77, bilgisayar hafızasını tümüyle kullanmaktadır. Bu nedenle, matris ve dizilerin boyutlarını büyültmek herhangi bir sorun yaratmamakta ve kullanıcıya oldukça büyük kolaylık sağlamaktadır. Kullanılan eleman ağının sayısı minimum değerde alınarak (2x2), sonuçların Klasik Plak Teorisi kabüllerine göre bulunan Navier ince plak çözüm sonuçlarına yaklaştırılmasına çalışılmıştır. Sonlu elemanlar yönteminde, plağı tanımlamak için kullanılan eleman sayısı arttıkça sonuca daha da yaklaşıldığı bilindiğine göre, ağ elemanlarının sayısını arttırarak, çok daha iyi sonuçlar elde edilecektir (Kosmatka, 1994), (Hughes and Cohen 1978).

2) 9-ağ noktalı elemanın tanımlanması sırasında, heterosis eleman 8 ve 12 ağ noktalarında tanımlandığı için, Lagrange elemanın orta noktası dışındaki noktalar modifiye olmaktadır. Lagrange elemanın aktif olarak heterosis içinde kullanabilmek için çalışmalar yapılmış (Kosmatka, 1994) ve bu nokta Guyan (1965)'nın analitik metodu ile yok edilmeye çalışılmıştır. Bu çalışmada, heterosis eleman Lagrange eleman ile ortak kullanılmış, sonuçlar modifiye edilmiş eleman üzerinden değerlendirilmiştir. 8 ağ noktalı elemanın Lagrange eleman ile kullanımında ise böyle bir kullanıma gerek kalmamaktadır.

3) Veri giriş dosyası, minimum sayıda giriş değerini içermemektedir. Bu nedenle de kullanımı kolaydır. Karmaşık bir yapıya sahip değildir.

4) COMPAN ve LAMINATE programlarında kullanılan bütün değişken isimleri karşılıklı olarak iki ayrı (INCLUDE) dosyada toplanmış olup, FININC ve LAMI isimleri altında kodlara dışardan dahil edilmiştir.

5) Çıkış dosyaları olarak tanımlanan dosyalardan ilki SOL.FOR, içinde, okunan veri giriş değerleri, plak ve kompozit malzeme ile ilgili elde edilen, genel-eşit elastik sabitleri, ağ elemanları ve koordinatları, SEY ile elde edilen lineer veya lineer olmayan kuvvet ve yerdeğiştirme vektör değerleri bulunmaktadır. İkinci olarak açılan dosya, STR.FOR ise, lineer çözümden elde edilen gerilme vektör değerlerini, STRN.FOR dosyası ise lineer olmayan çözümle elde edilmekte olan, gerilme vektör değerlerini içermektedir.

6) Kompozit plağı oluşturmak için, veri giriş dosyasına, kullanılacak olan malzeme özellikleri, fiber diziliş açıları, kaç kattan oluştuğu ve her katın kalınlığı, plağın çift veya tek sayılı katlardan oluşup oluşmadığına ilişkin bilgiler girilmektedir. Bu giriş değerlerini kullanarak, kod, plağı oluşturmakta, koordinat sistemine yerleştirmekte ve genel elastik sabitlerini hazırlayarak sonlu elemanlar çözümünü başlatmaktadır. Sonlu elemanlar analizi için kullanılmakta olan eleman ağı, plağın x-koordinat eksenini ile çakışan orta katına yerleştirilmekte ve önce bu yüzey üzerindeki çözüm bulunmaktadır. Daha sonraki basamaklarda, kompozit plağın diğer katlarının z eksenini boyunca koordinatları, kullanılarak buralarda oluşan gerilme dağılımları hesaplanmaktadır.

7) Matris ve dizilerin boyutları, yeteri kadar büyük açıldığı zaman, kompozit plağın katlarının sayısı da istenildiği kadar arttırılabilecektir. Bunda herhangi bir sınırlama yoktur. ANSYS yazılım sisteminde (ANSYS, 1992) kompozit plağı veya kabuğu tanımlamak için, 3 boyutlu uzayda kullanılabilecek maksimum katman sayısı 100 olarak sınırlanmıştır. Plağın toplam kat sayısı 100'den fazla olduğu zaman, kullanıcı, elastik sabitler matrisini dışarda hesaplayıp, sonuç değerlerini dışardan girmektedir. COMPAN bu matrisi kendi içerisinde hesaplamaktadır.

Tablo 5.1 LAMINATE kodu genel elastik sabitler matrisi sonuçlarının karşılaştırılması

a) Bünye denklemi

	e_x^0	e_y^0	e_{xy}^0	k_x	k_y	k_{xy}
N_{xx}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	B_{11}	B_{12}	B_{13}
N_{yy}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	B_{21}	B_{22}	B_{23}
N_{xy}	A_{31}	A_{32}	A_{33}	B_{31}	B_{32}	B_{33}
M_{xx}	B_{11}	B_{12}	B_{13}	D_{11}	D_{22}	D_{33}
M_{yy}	B_{21}	B_{22}	B_{23}	D_{21}	D_{22}	D_{23}
M_{xy}	B_{31}	B_{32}	B_{33}	D_{31}	D_{32}	D_{33}

b) Program : CoALA

	e_x^0	e_y^0	e_{xy}^0	k_x	k_y	k_{xy}
N_{xx}	0,4632E+2	0,6092E+4	-0,6104E-4	0,4883E-3	0,0	0,0
N_{yy}	0,6092E+4	0,4632E+5	-0,1404E-2	0,0	0,6104E-4	0,0
N_{xy}	-0,6104E-4	-0,1404E-2	0,8070E+4	0,0	0,0	0,0
M_{xx}	0,4883E-3	0,0	0,0	0,7383E+4	0,4597E+3	0,1266E+3
M_{yy}	0,0	0,6104E-4	0,0	0,4597E+3	0,1249E+4	0,1266E+3
M_{xy}	0,0	0,0	0,0	0,1266E+3	0,1266E+3	0,6245E+5

c) Program : LAMINATE

	e_x^0	e_y^0	e_{xy}^0	k_x	k_y	k_{xy}
N_{xx}	0,4632E+2	0,60919E+4	0,0	0,0	0,2842E-13	-0,2842E-13
N_{yy}	0,60919E+4	0,46324E+5	0,0	0,2842E-13	0,6104E-4	-0,1137E-12
N_{xy}	0,0	0,0	0,8069E+4	-0,2842E-13	-0,1137E-12	-0,1421E-13
M_{xx}	0,4883E-3	0,0	0,0	0,7383E+4	0,45965E+3	0,12658E+3
M_{yy}	0,0	0,6104E-4	0,0	0,45965E+3	0,1249E+4	0,12658E+3
M_{xy}	0,0	0,0	0,0	0,12658E+3	0,12658E+3	0,62451E+5

Tablo 5.2 LAMINATE kodunun gerilme ve kırılma analiz sonuçları

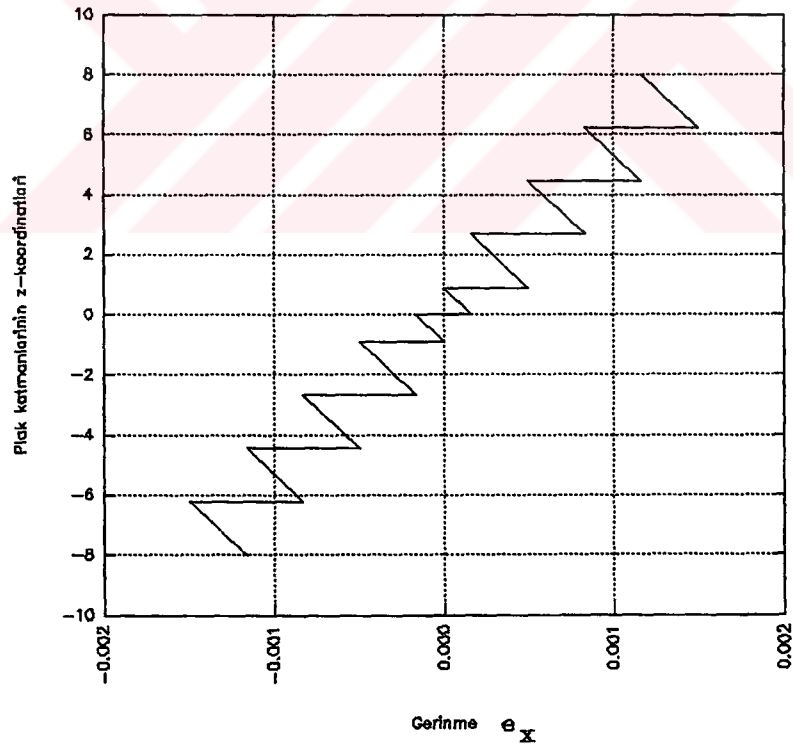
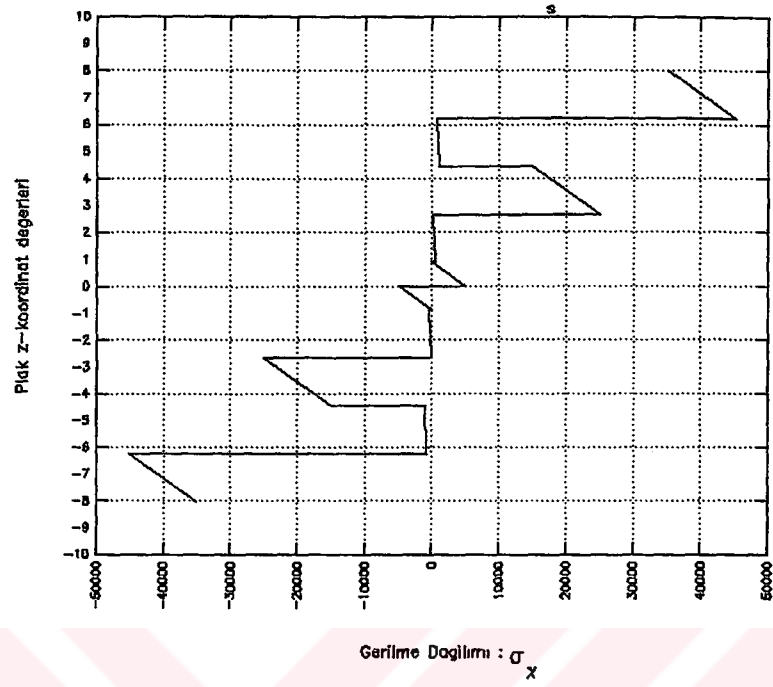
Kod LAMINATE'e Verilen Yük Giriş Değerleri :

Nx	Ny	Nxy	Mx	My	Mxy
100.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Gerilme Değerleri				Kullanılan Kırılma Teorileri		
KOD İSMİ	f1	f2	f12	HOFFMANN	TSAL-WU	TSAL-HILL
COALA	0.28629E+3	0.1007E+1	-0.3195E-6	0.1386E-1	0.12099E-1	0.3670E-1
LAMINATE	0.30864E+3	0.3725E+1	-0.2061E-6	0.6155E-1	0.54531E-1	0.4737E-1

Plakta Oluşan Isıl Kuvvet ve Moment Değerleri

KOD	COALA	LAMINATE
<i>NxT</i>	-0.2332E+2	-0.23319E+2
<i>NyT</i>	-0.2332E+2	-0.233199E+2
<i>NxyT</i>	-0.26077E-6	0.0
<i>MxT</i>	-0.13411E-6	-0.69388E-17
<i>MyT</i>	0.0	-0.27755E-16
<i>MxyT</i>	0.0	-0.86736E-18



Grafik 5.1 $M_x = -0.814661E5$, $M_y = -0.414671E5$ için kompozit plakta oluşan σ_x ve ϵ_x dağılımı - 9 katlı kompozit plak, $[0^\circ/90^\circ]_s$ (9 ağ noktalı)

Tablo 5.3 $[0/90]_s$ 9 katlı simetrik kompozit plağın düzlemsel gerilme hali için kırılma analizi ($h_n = 1.78$, $h/L=16/400=0.04$, $W_R/W_C = 1.0049$)

$P(lb/m^2)$	-0,01	-0,35	-5,0
SEY W_{max} Lineer Çözüm	-3,72749E-4	-1,30462E-2	-0.18637
N_x	0	0	0
N_y	0	0	0
N_{xy}	0	0	0
M_x	-2,6064E3	-9,1248E4	-1,3034E6
M_y	-8,2935E1	-4,6448E4	-6,6347E5
M_{xy}	0	0	0
Max. Gerilme Teorisi	Kırılma Yok	Kırılma Yok	Kırılma
Max. Genleme Teorisi	Kırılma Yok	Kırılma Yok	Kırılma
Hoffman Teorisi	Kırılma Yok	Kırılma Yok	Kırılma
Tsai-Wu Gerilme Teorisi	Kırılma Yok	Kırılma Yok	Kırılma
Tsai-Hill Teorisi	Kırılma Yok	Kırılma Yok	Kırılma
Tsai-Wu Gerilme Teorisi	Kırılma Yok	Kırılma Yok	Kırılma

Plak KatNumarası	Z-Koordinat	Elastik Sabitler	Kompozit Plağın Elastik Değerleri
1	-0.801E1	E_x	0,170240E8
2	-0.623E1	E_y	0,137694E8
3	-0.445E1	E_{xy}	0,450000E6
4	-0.267E1	ν_{xy}	0,136364E-1
5	-0.890E0	ν_{yx}	0,110294E-1
Orta Plak	0	m_x	0,0E0
6	0.890E0	m_y	0,0E0
7	0.267E1		
8	0.445E1		
9	0.623E1		
10	0.801E1		

Tablo 5.4 Düzgün yayılı yük altındaki izotropik plağın orta yüzeyindeki maksimum sehîm değêrlerinin kayma düzeltici faktör ile kullanımı

h/L	W_{max} $\alpha = 1.0$ SEY	$W_{max}(D/PL^4E + 3)$ $\alpha = 1.0$ SEY	W_{max} $\alpha = 0.8$ SEY	$W_{max}(D/PL^4E + 3)$ $\alpha = 0.8$ SEY	$W_{max}(D/PL^4E + 3)$ KPT
0,001	431,176	4,3117	524,871	0,52487	4,0600
0,002	163,017	1,3041	188,444	0,15076	4,0600
0,003	77,246	2,0856	85,429	2,3066	4,0600
0,004	41,221	2,6381	44,228	2,8305	4,0600
0,005	24,046	3,0056	25,295	3,1619	4,0600
0,006	15,050	3,2508	15,628	3,3755	4,0600
0,007	9,9659	3,4183	10,257	3,5183	4,0600
0,008	6,9064	3,5361	7,0649	3,6173	4,0600
0,009	4,9676	3,6214	5,0593	3,6882	4,0600
0,010	3,6848	3,6848	3,7407	3,7407	4,0600
0,020	0,4885	3,9083	0,4908	3,9265	4,0600
0,030	0,1469	3,9663	0,1474	3,9799	4,0600
0,040	6,2532E-2	4,0020	6,2766E-2	4,0170	4,0600
0,050	3,2267E-2	4,0334	3,2412E-2	4,0515	4,0600
0,060	1,8816E-2	4,0643	1,8920E-2	4,0868	4,0600
0,070	1,1942E-2	4,0963	1,2023E-2	4,1239	4,0600
0,080	8,0662E-3	4,1299	8,1319E-3	4,1636	4,0600
0,090	5,7142E-3	4,1656	5,7699E-3	4,2062	4,0600
0,100	4,2037E-3	4,2038	4,2115E-3	4,2037	4,0600
0,200	5,9369E-4	4,7496	6,1579E-4	4,9264	4,0600
0,225	4,3425E-4	4,9374	4,5304E-4	5,1604	4,0600
0,300	2,0851E-4	5,6299	2,2313E-4	6,0246	4,0600
0,400	1,0714E-4	6,8572	1,1809E-4	7,5579	4,0600
0,500	6,7469E-5	8,4336	7,6224E-5	9,5280	4,0600
0,600	4,7962E-5	10,359	5,5256E-5	11,935	4,0600
0,700	3,6839E-5	12,636	4,3091E-5	14,780	4,0600
0,800	2,9808E-5	15,262	3,5279E-5	18,062	4,0600
0,900	2,5017E-5	18,237	2,9880E-5	21,782	4,0600

* 4 quadratik ağ elemanı ve 9 Gauss-Quadrature noktası kullanılmıştır.

Veri girişinde kullanılan bazı değêrler :

$E= 10.92 \text{ psi}$

$\nu=0.3$

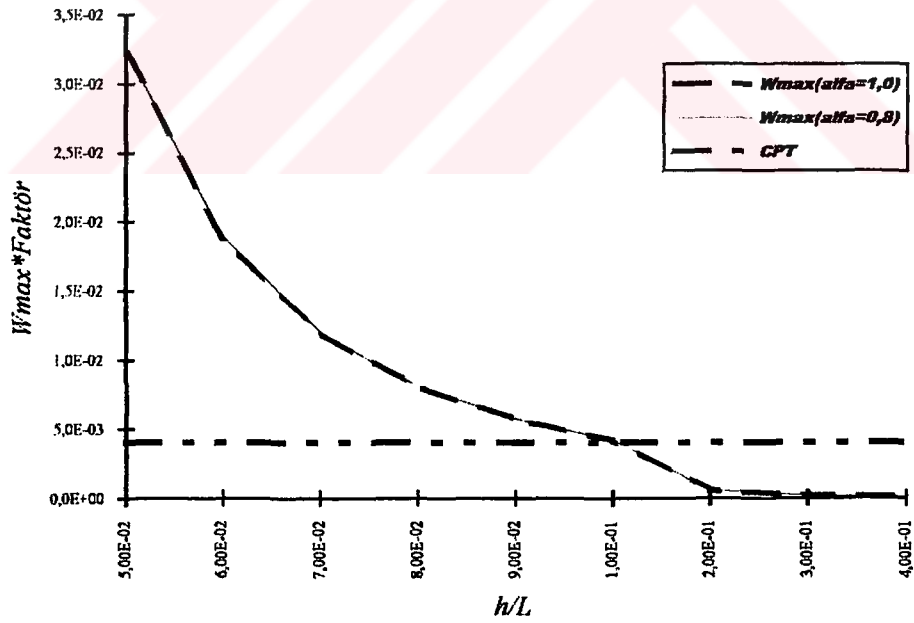
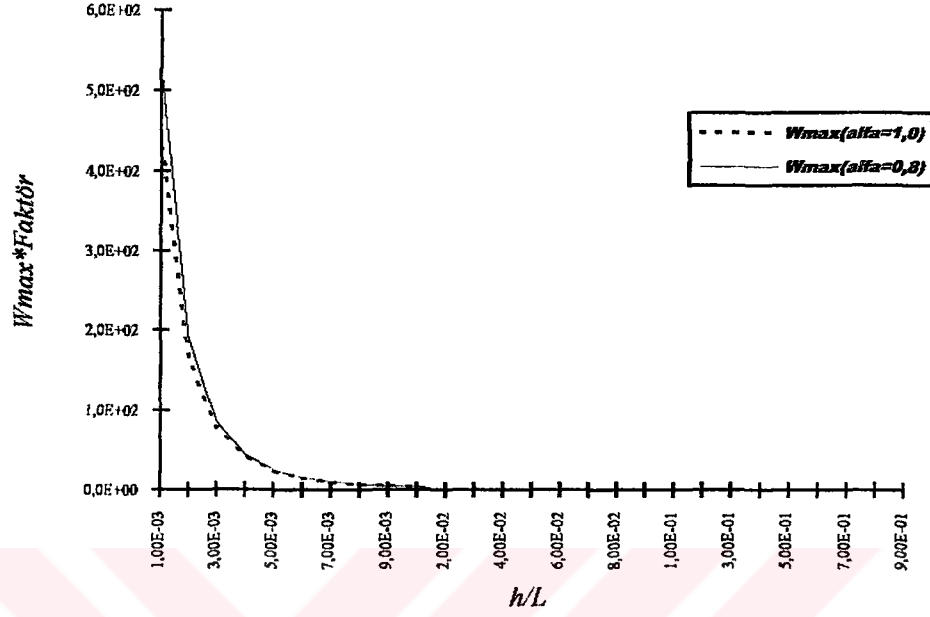
$h_T=0.1 \text{ in}$

$L=1 \text{ in}$

$q=0.001 \text{ lb/in}^2$

$$\text{Faktör} = (D/PL^4)10^3$$

$$D = Eh^3/12(1-\nu^2) \quad : (\text{Plâğin Eğilme Rijitliği})$$



Grafik 5.2 Düzgün yayılı yük altındaki 3 serbestlik derecesine sahip izotropik plâğin sehim değerlerinin değişimi

Tablo 5.5 3 serbestlik derecesine sahip izotropik plağın, α sabit sayılarına göre, W_{MAX} değerlerinin değişimi

W_{MAX} (SEY)						
Ağ Noktası (Serbestlik Derecesine Göre)	$W_{ANKASTRE}$			$W_{BASİT MESNETLİ}$		
	$\alpha=1$	$\alpha=6/5$	$\alpha=3/2$	$\alpha=1$	$\alpha=6/5$	$\alpha=3/2$
5 (13)	0.1089	0.11299	0.118467	0.3388	0.3417	0.3460
8 (22)	0.0988	0.1025	0.10775	0.31617	0.3189	0.32298
13 (37)	0.0667	0.06989	0.07423	0.24526	0.2476	0.25099
16 (46)	0.0251	0.02699	0.02962	0.13644	0.1378	0.13982
21 (61)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

$\alpha=1$						
a: Levha Uzunluğu t: Kalınlık a/t	CPT BASİT MESNETLİ	CPT ANKASTRE	SEY ANKASTRE	SEY BASİT MESNETLİ	SEY ANKASTRE* FAKTÖR	SEY BASİT MESNETLİ* FAKTÖR
400/1.2-333.33 (İnce)	328.4088	101.92113	108.934	338.80	9.75 E-4	9.75 E-4
400/12-3333.33 (İnce)	328408.8	101920	108934.18	338803.36	9.74 E-6	9.74 E-6
400/120-3.33 (Kalın)	3.1648 E-4	1.0192 E-4	1.089 E-4	3.388 E-4	9.745	9.745
400/12=33 (İnce)	0.3284	0.10192	0.108934	0.3388	9.749 E-2	9.749 E-2

Kullanılan Değerler ;

$$q=1 \text{ kN/cm}^2$$

$$\nu=0.3$$

$$E=2 \times 10^6 \text{ kN/cm}^2$$

$$t=12 \text{ cm}$$

$$a=400 \text{ cm}$$

Kullanılan Yerdeğişimi Vektör Değişkenleri :

$$W, \phi_x, \phi_y$$

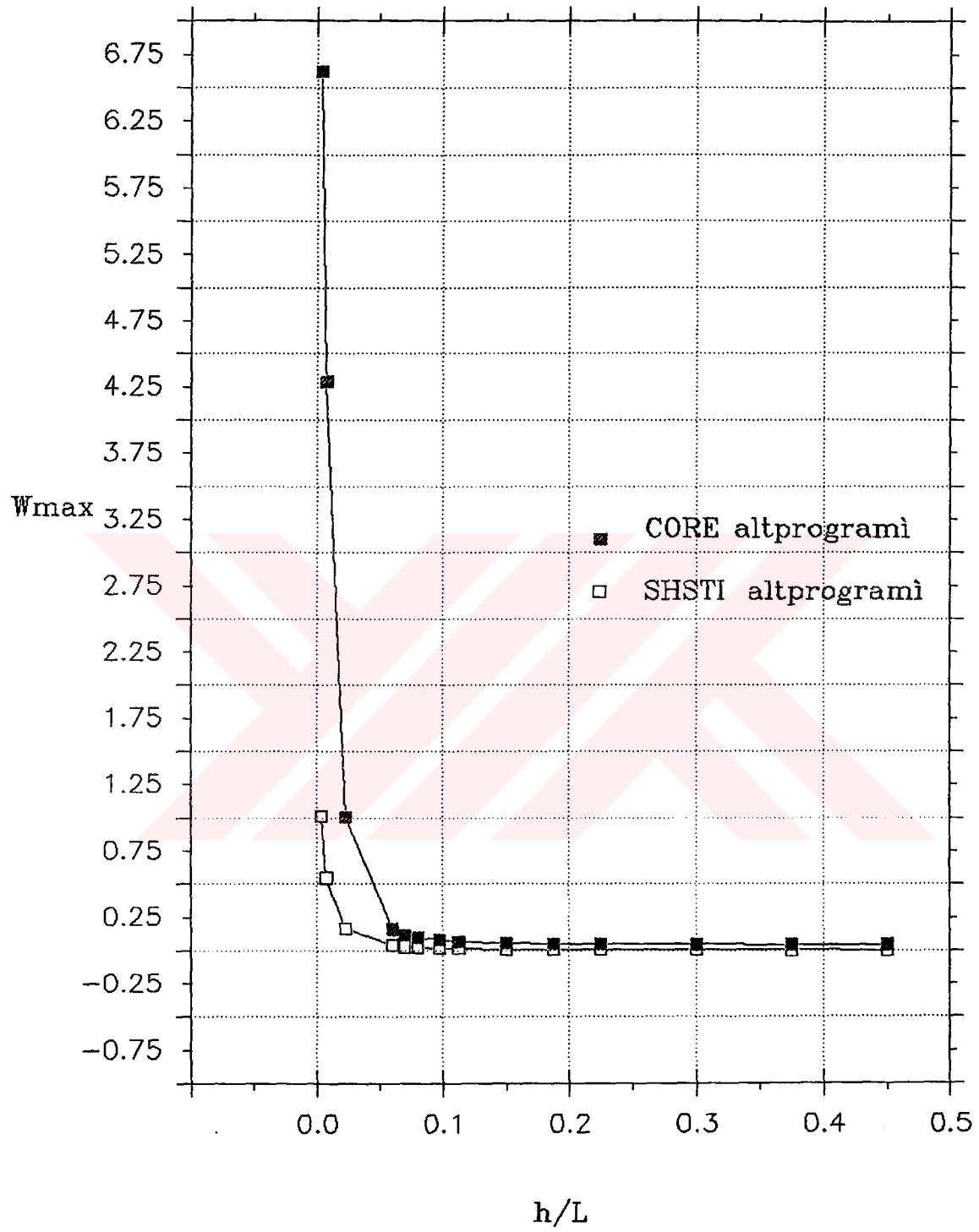
Tablo 5.6 Düzgün dizilmiş yük altındaki 0/90/0 3 katlı simetrik kompozit plâgın ortasında ($x=y=L/2$, $z=0$) oluşan sehim dağılımlarının, h/L oranına göre değişimi

h_n	h_T	h_T / L ($L=400$ in)	SEY W_{max} (in) Lineer Çözüm CORE	SEY W_{max} (in) Lineer Çözüm SHSTI	KPT W_{max} (in)	W_R / W_{KPT} Altprogram - CORE	W_R / W_{KPT} Altprogram - SHSTI
60	180	0.4500	4.5000E-2	2.4536E-3	2.9235E-4	153.926	8.393
50	150	0.3750	4.5465E-2	3.0591E-3	5.0518E-4	89.996	6.055
40	120	0.3000	4.6462E-2	4.0597E-3	9.8373E-4	47.089	4.115
30	90	0.2250	4.9063E-2	5.9804E-3	2.3388E-3	20.977	2.557
25	75	0.1875	5.2078E-2	7.7422E-3	4.0415E-3	12.885	1.916
20	60	0.1500	5.8215E-2	1.0747E-2	7.8935E-3	7.375	1.362
15	45	0.1125	7.2504E-2	1.6671E-2	1.8711E-2	3.8750	0.891
13	39	0.0975	8.3460E-2	2.0848E-2	2.8743E-2	2.904	0.725
11	33	0.0825	0.1004E-2	2.2951E-2	4.7444E-2	2.117	0.572
10	30	0.0750	0.1124E-2	3.1566E-2	6.3148E-2	1.780	0.499
8	24	0.0600	0.1475E-2	4.4873E-2	0.1233	1.196	0.364
3	9	0.0225	0.3881	0.1765	2.3388	0.166	7.548E-2
1	3	0.0075	0.9542	0.5436	63.148	1.512E-2	8.608E-3
0.5	1.50	0.00375	2.1219	1.0198	505.184	4.200E-3	2.019E-3
0.1	0.30	0.00075	20.497	4.8415	63148	3.246E-4	7.667E-5
0.08	0.24	0.00060	27.543	6.0455	123335	2.233E-4	4.902E-5
0.01	0.03	0.000075	-179.35(Serendipity el.) 173046.38(Lagrange el.)	48.2738(S) 29.0380(L)	63148005	2.840E-6(S) 2.503E-2(L)	7.645E-7(S) 4.200E-6(L)

* 8 noktalı eleman ağı kullanılmıştır.

$E_{11} = 2.5E+6$ psi, $E_{22} = 1.0E+5$ psi, $G_{12} = 5.0E+4$ psi, $v_{12} = 0.25$, $v_{22} = 0.40$, $Q_{44} = G_{22}$, $P = 1.0$ lb/in²

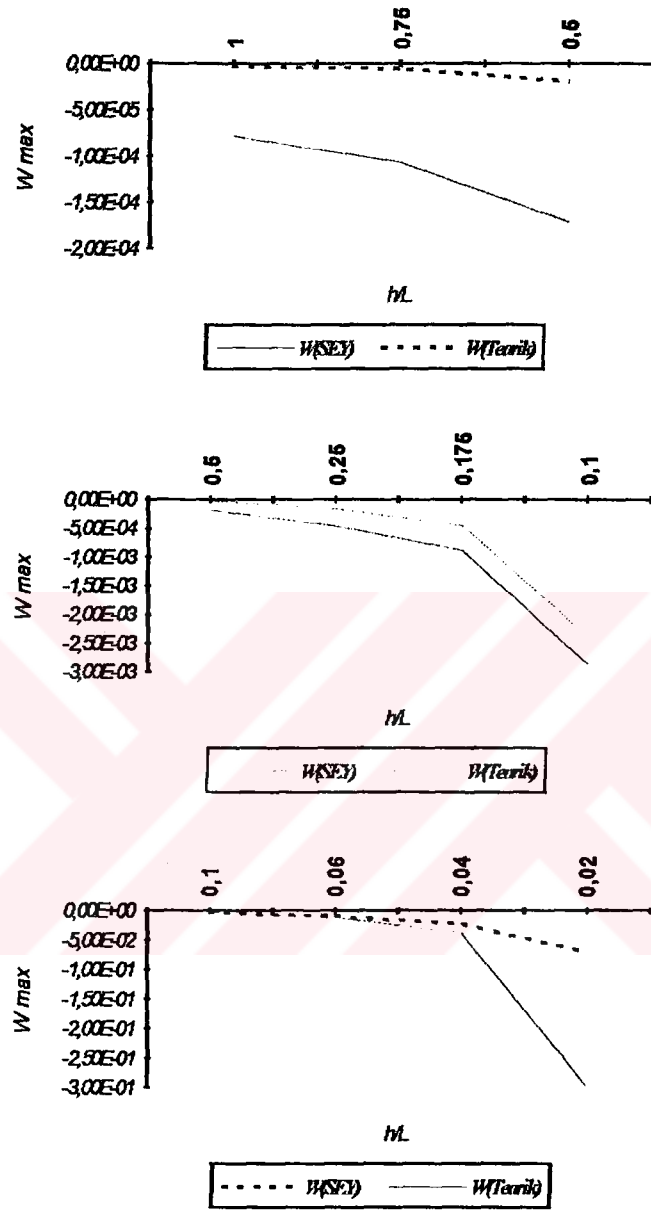
Y.C. YÜKSEKÖĞRETİM
BİLİMİ



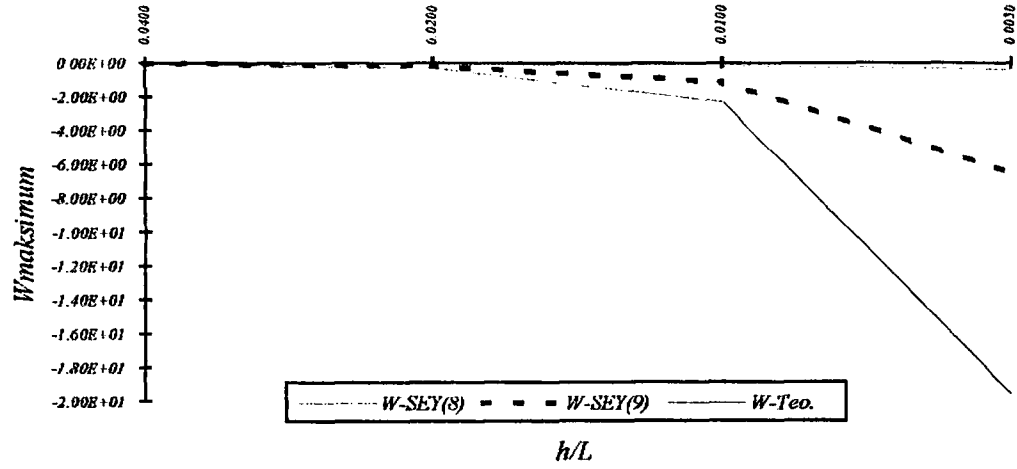
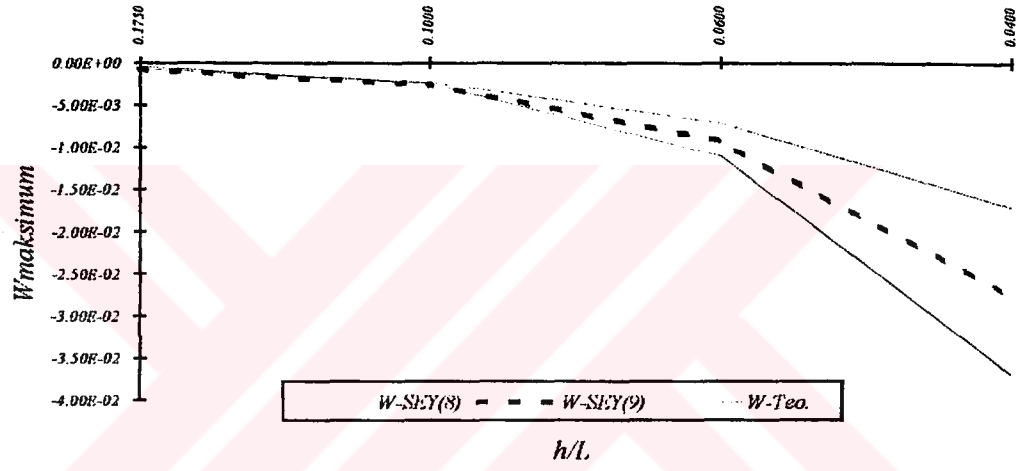
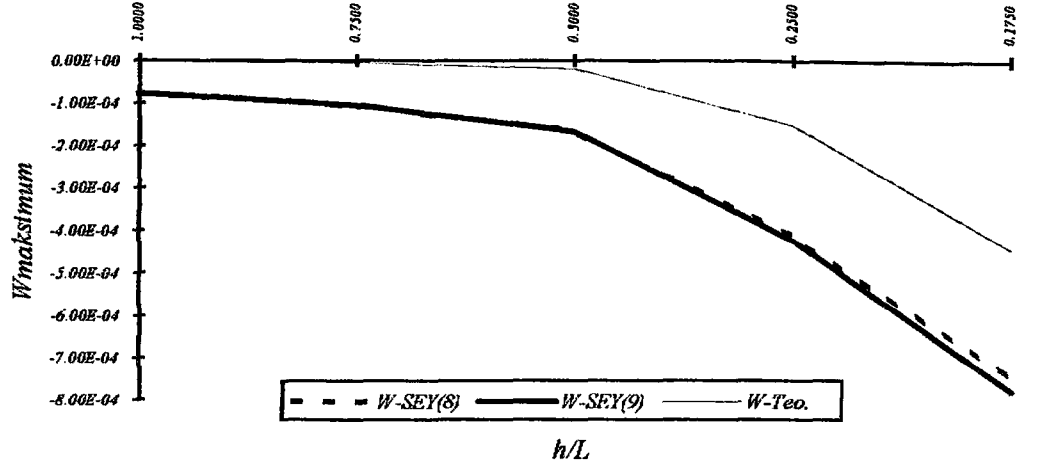
Grafik 5.3 0/90/0 dizili kompozit plağın iki değişik kayma düzeltici faktör için grafiği

Tablo 5.7 $[0^\circ / 90^\circ]_9$ 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plağın, 9-ağ noktalı melez eleman ile elde edilen ve orta noktasında ($x=y=L/2, z=0$) oluşan sehim değerleri

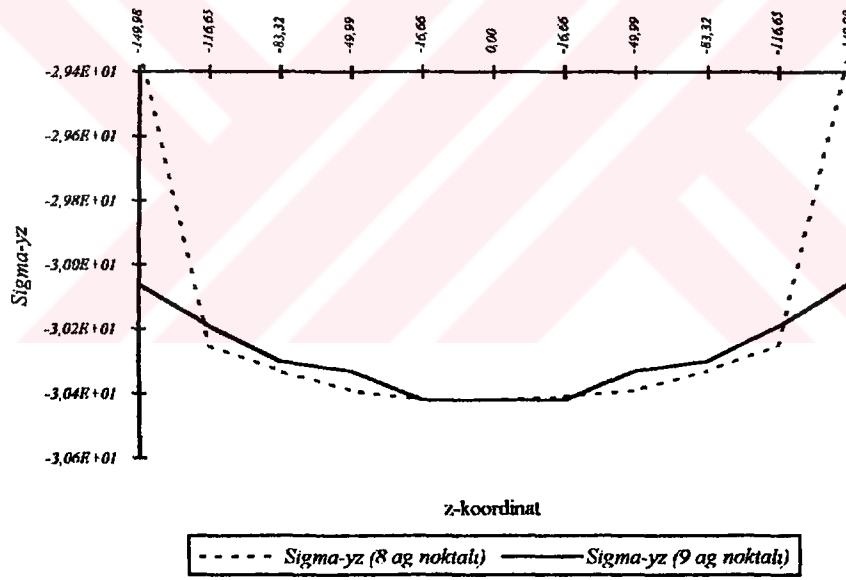
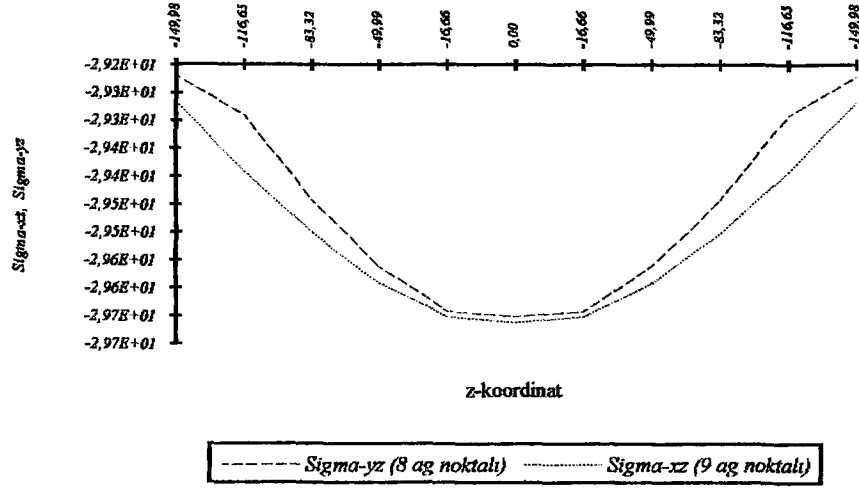
h/L	H ve (h_T / L)	W(SEY)	W(Teo.)	W(SEY)*Fak.	W(Teo.)*Fak.	W_R / W_{KPT}
1.0	44.44 400/400	-7,7305E-5	-2,3833E-6	0,1449E0	4,4675E-3	32,43
0.75	33.33 300/400	-1,0511E-4	-5,6490E-6	8,3119E-2	4,4675E-3	18,61
0.5	22.22 200/400	-1,6631E-4	-1,9067E-5	3,8969E-2	4,4675E-3	8,72
0.25	11.11 100/400	-4,2336E-4	-1,5253E-4	1,2399E-2	4,4675E-3	2,77
0.175	7.78 70/400	-7,7806E-4	-4,4419E-4	7,8253E-3	4,4675E-3	1,75
0.1	4.45 40/400	-2,5406E-3	-2,3737E-3	4,7815E-3	4,4675E-3	1,07
0.06	2.67 24/400	-9,2321E-3	-1,0989E-2	3,7530E-3	4,4675E-3	0,84
0.04	1.78 16/400	-2,777E-2	-3,7089E-2	3,3460E-3	4,4675E-3	0,74
0.02	0.89 8/400	-0,18725	-0,29672	2,8194E-3	4,4675E-3	0,63
0.01	0.45 4/400	-1,11967	-2,2955	2,1791E-3	4,4675E-3	0,48
0.005	0.22 2/400	-6,5520	-19,644	1,4900E-3	4,4675E-3	0,33
0.001	0.044 0.4/400	-529,5025	-2455,6	9,6332E-4	4,4675E-3	0,21
0.0001	0.004 0.04/400	-512065	-2455604	9,3160E-4	4,4675E-3	0,20



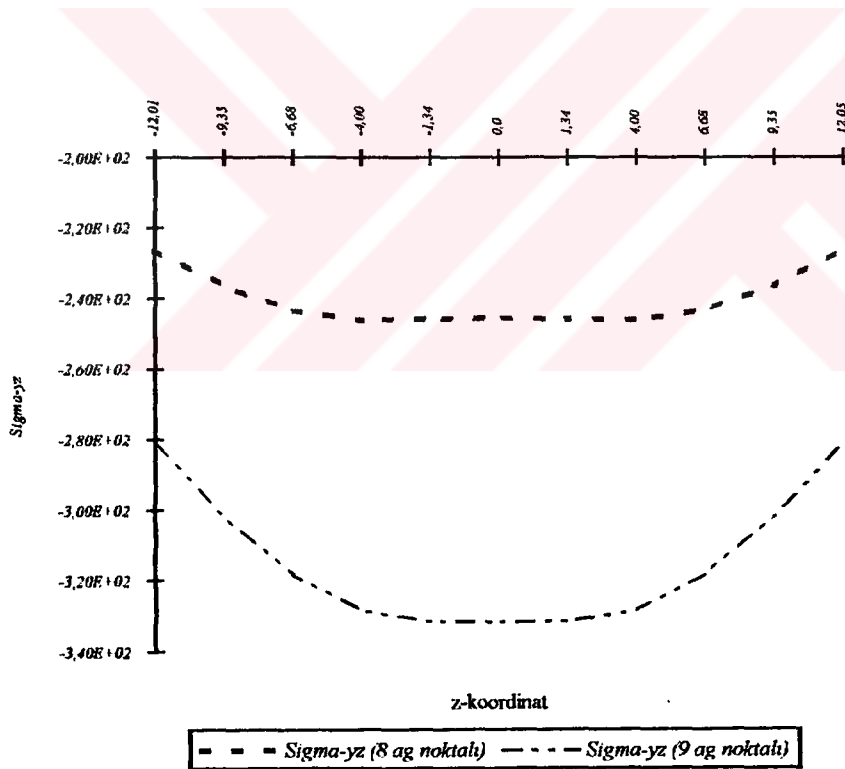
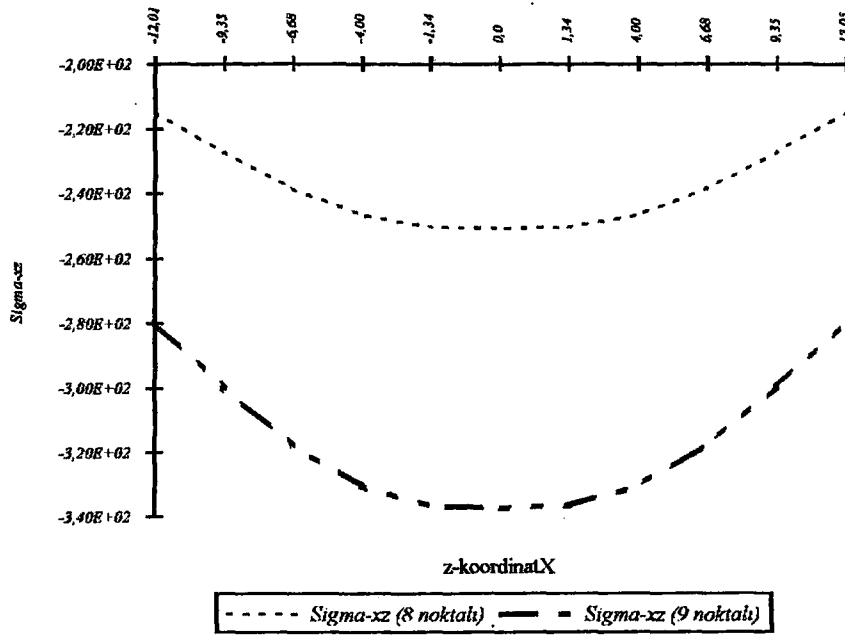
Grafik 5.4 0/90/0/90/0/90/0/90/0 düzgün yayılı yük altındaki 9 katlı plağın merkezinde 8-ağ noktalı eleman ile melez elemanın ortak kullanımı sonucunda bulunan sehim değerlerinin h/L oranına göre dağılımı



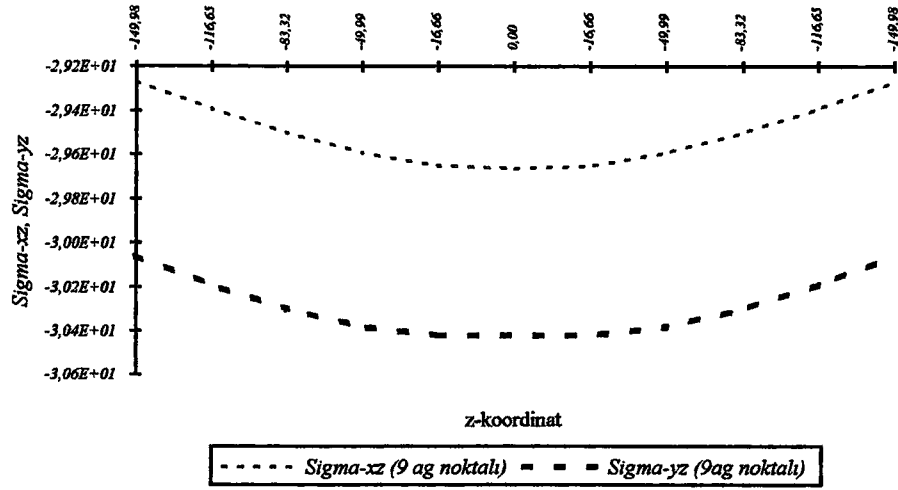
Grafik 5.5 0/90/0/90/0/90/0/90/0 çaprazlama dizilmiş plağın, düzgün yayılı yük altında, üç çözüm için sehim dağılımları



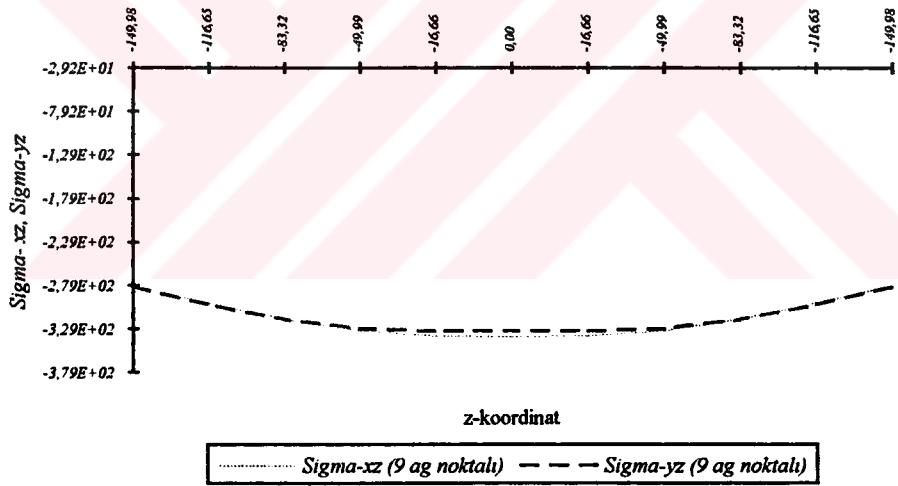
Grafik 5.6 8 ve 9 ağ-noktası tanımlı melez eleman kullanılarak $0/90/0/90/0/90/0/90/0$ çaprazlama dizilmiş plağın merkezinde ($x=y=L/2$), z eksenı boyunca elde edilmiş, σ_{xz} ve σ_{yz} dağılımları ($h_n=33.33$, $h/L=300/400=0.75$)



Grafik 5.7 8 ve 9 ağ noktaları ile tanımlanmış melez eleman kullanılarak, 0/90/0/90/0/90/0/90/0 çaprazlama dizilmiş plağın merkezinde ($x=y=L/2$), z-ekseni boyunca elde edilmiş, Sigma-xz ve Sigma-yz dağılımları ($h_n=2.67$, $h/L=24/400=0.06$)



a) $h_n=33.33$, $h/L=300/400=0.75$



b) $h_n=2.67$, $h/L=24/400=0.06$

Grafik 5.8. 0/90/0/90/0/90/0/90/0 çaprazlama dizilmiş plağın merkezinde ($x=y=L/2$), z-ekseni boyunca düzgün yayılı yük altında, 8 ve 9 ağ noktası tanımlı melez eleman kullanılarak elde edilmiş σ_{xz} ve σ_{yz} dağılımları

Tablo 5.8 $[+\theta/-\theta]_s$ dizilmiş 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plâgın, 8-ağ noktalı melez eleman ile elde edilen ve plâgın orta noktasında ($x=y=L/2, z=0$) oluşan sehîm dağılımları

$h_a=4.45$ $h_r=40$ $h/L=40/400=0.1$ TETA θ	W(SEY)	W(Teo.)	W(SEY)*Fak.	W(Teo.)*Fak.	W _r /W _c
0°	-2,6905E-3	-2,1896E-3	5,0636E-3	4,1209E-3	1,2280
5°	-2,5874E-3	-2,1494E-3	4,8696E-3	4,0454E-3	1,2038
10°	-2,2950E-3	-2,0330E-3	4,3198E-3	3,8263E-3	1,1289
15°	-1,9966E-3	-1,8662E-3	3,7576E-3	3,5122E-3	1,0699
20°	-1,7628E-3	-1,6887E-3	3,3177E-3	3,1782E-3	1,0439
25°	-1,5972E-3	-1,5305E-3	3,006E-3	2,8805E-3	1,0435
30°	-1,4856E-3	-1,4055E-3	2,7959E-3	2,6453E-3	1,0569
35°	-1,4142E-3	-1,3175E-3	2,6617E-3	2,4796E-3	1,0734
40°	-1,3744E-3	-1,2656E-3	2,5867E-3	2,3820E-3	1,0859
45°	-1,3618E-3	-1,2485E-3	2,5631E-3	2,3498E-3	1,0907

Tablo 5.9 $[0/90]_9$ 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plağın, 8-ağ noktalı melez eleman ile elde edilen ve plağın orta noktasında ($x=y=L/2, z=0$) oluşan sehim dağılımlarının h/L oranlarına göre değişimi

h/L	H	W(SEY)	W(Teo.)	W(SEY)*Fak.	W(Teo.)*Fak.	W_r/W_c
1.0	44.44 400/400	-7,7190E-5	-2,3834E-6	0,1446	4,4675E-3	32,38
0.75	33.33 300/400	-1,0483E-4	-5,6495E-6	8,2900E-2	4,4675E-3	18,55
0.5	22.22 200/400	-1,6535E-4	-1,9067E-5	3,8742E-2	4,4675E-3	8,67
0.25	11.11 100/400	-4,1422E-4	-1,5253E-4	1,2131E-2	4,4675E-3	2,72
0.175	7.78 70/400	-7,4581E-4	-4,4419E-4	7,5009E-3	4,4675E-3	1,68
0.1	4.45 40/400	-2,2642E-3	-2,3737E-3	4,2614E-3	4,4675E-3	0,95
0.06	2.67 24/400	-7,0737E-3	-1,0989E-2	2,8756E-3	4,4675E-3	0,64
0.04	1.78 16/400	-1,7139E-2	-3,7089E-2	2,0644E-3	4,4675E-3	0,46
0.02	0.89 8/400	-6,1854E-2	-0,2967	9,3129E-4	4,4675E-3	0,21
0.01	0.45 4/400	-0,1611	-2,2955	3,1356E-4	4,4675E-3	7,02E-2
0.005	0.22 2/400	-0,3663	-19,6448	8,3319E-5	4,4675E-3	1,87E-2
0.001	0.044 0.4/400	-1,9070	-2455,6	3,4694E-6	4,4675E-3	7,77E-4
0.0001	0.004 0.04/40 0	-19,1047	-2455604	-3,4757E-8	4,4675E-3	7,78E-6

Tablo 5.10 $[0/90]_s$ dizilmiş 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plâgın,
8-ağ noktalı melez eleman ile elde edilen ve plâgın orta noktasında
($x=y=L/2, z=0$) oluşan gerilme dağılımları

h/L = 0.75 h _n = 33.33 h _r = 300 z-kordinatı	σ_x	σ_y	σ_{xy}	ϵ_x	ϵ_y	γ_{xy}
-149,98	-0,7553E2	0,1746E1	-0,1726E2	-0,1479E-7	0,6245E-9	-0,1270E-6
-116,85	-0,7671E2	-0,2983E0	-0,1756E2	-0,1502E-7	0,1326E-9	-0,1300E-6
-83,33	-0,7109E2	-0,2446E1	-0,1626E2	-0,1391E-7	-0,4076E-9	-0,1205E-6
-49,99	-0,5383E2	-0,3592E1	-0,1222E2	-0,1053E-7	-0,7261E-9	-0,9050E-7
-16,66	-0,2087E2	-0,1880E1	-0,4683E1	-0,4083E-8	-0,3990E-9	-0,3469E-7
0,0	-0,3896E-15	0,2635E-15	0,1296E-15	0,0	-0,4100E-24	-0,9600E-24
16,66	0,2087E2	-0,1880E1	-0,4683E1	-0,4083E-8	-0,3990E-9	-0,3469E-7
49,99	0,5383E2	-0,3592E1	-0,1222E2	-0,1053E-7	-0,7261E-9	-0,9050E-7
83,33	-0,7109E2	-0,2446E1	-0,1626E2	-0,1391E-7	-0,4076E-9	-0,1205E-6
116,65	-0,7671E2	-0,2983E0	-0,1756E2	-0,1502E-7	0,1326E-9	-0,1300E-6
149,98	-0,7553E2	0,1746E1	-0,1726E2	-0,1479E-7	0,6245E-9	-0,1270E-6

* 8 düğüm noktalı heterosis eleman ağı kullanılmıştır

HM graphite/epoxy P(X,Y)=1.0

E₁₁ E+6 psi 30.0
E₂₂ E+6 psi 0.75
G₁₂ E+6 psi 0.45
G₂₂ E+6 psi 0.375

v₁₂ = 0.25

v₂₂ = 0.25

Tablo 5.11 $[0/90]_9$ dizilmiş 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plağın, 8-ağ noktalı melez eleman ile elde edilen ve plağın orta noktasında ($x=y=L/2, z=0$) oluşan enine kayma gerilme dağılımları ($h_n=33.33$, $h_T=300$, $h/L=300/400=0.75$)

z koordinat	σ_{xz} El:3, Nok:5	σ_{yz} El:3, Nok:5	σ_{xz} El:1, Nok:5	σ_{yz} El:1, Nok:5	σ_{xz} El:1, Nok:3	σ_{yz} El:1, Nok:3
-149,98	-0,2922E2	-0,2933E2	-0,9815E2	-0,2069E2	-0,7762E2	-0,1759E2
-116,65	-0,2129E2	-0,3025E2	-0,9825E2	-0,2078E2	-0,7804E2	-0,1745E2
-83,32	-0,2944E2	-0,3033E2	-0,9831E2	-0,2088E2	-0,7830E2	-0,1732E2
-49,99	-0,2956E2	-0,3039E2	-0,9830E2	-0,2098E2	-0,7850E2	-0,1723E2
-16,66	-0,2964E2	-0,3042E2	-0,9825E2	-0,2105E2	-0,7853E2	-0,1720E2
0,0	-0,2965E2	-0,3042E2	-0,9824E2	-0,2107E2	-0,7850E2	-0,1720E2
16,66	-0,2964E2	-0,3041E2	-0,9825E2	-0,2105E2	-0,7853E2	-0,1720E2
49,99	-0,2956E2	-0,3039E2	-0,9830E2	-0,2098E2	-0,7850E2	-0,1723E2
83,32	-0,2944E2	-0,3033E2	-0,9831E2	-0,2088E2	-0,7830E2	-0,1732E2
116,65	-0,2129E2	-0,3025E2	-0,9825E2	-0,2078E2	-0,7804E2	-0,1745E2
149,98	-0,2922E2	-0,2933E2	-0,9815E2	-0,2069E2	-0,7762E2	-0,1759E2

Tablo 5.12 $[0/90]_s$ dizilmiş 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plağın,
8-ağ noktalı melez eleman ile elde edilen ve plağın orta
noktasında $(x=y=L/2, z=0)$ oluşan enine kayma gerilme
dağılımları ($h_n=2.67$, $h_T=24$, $h/L=24/400=0.06$)

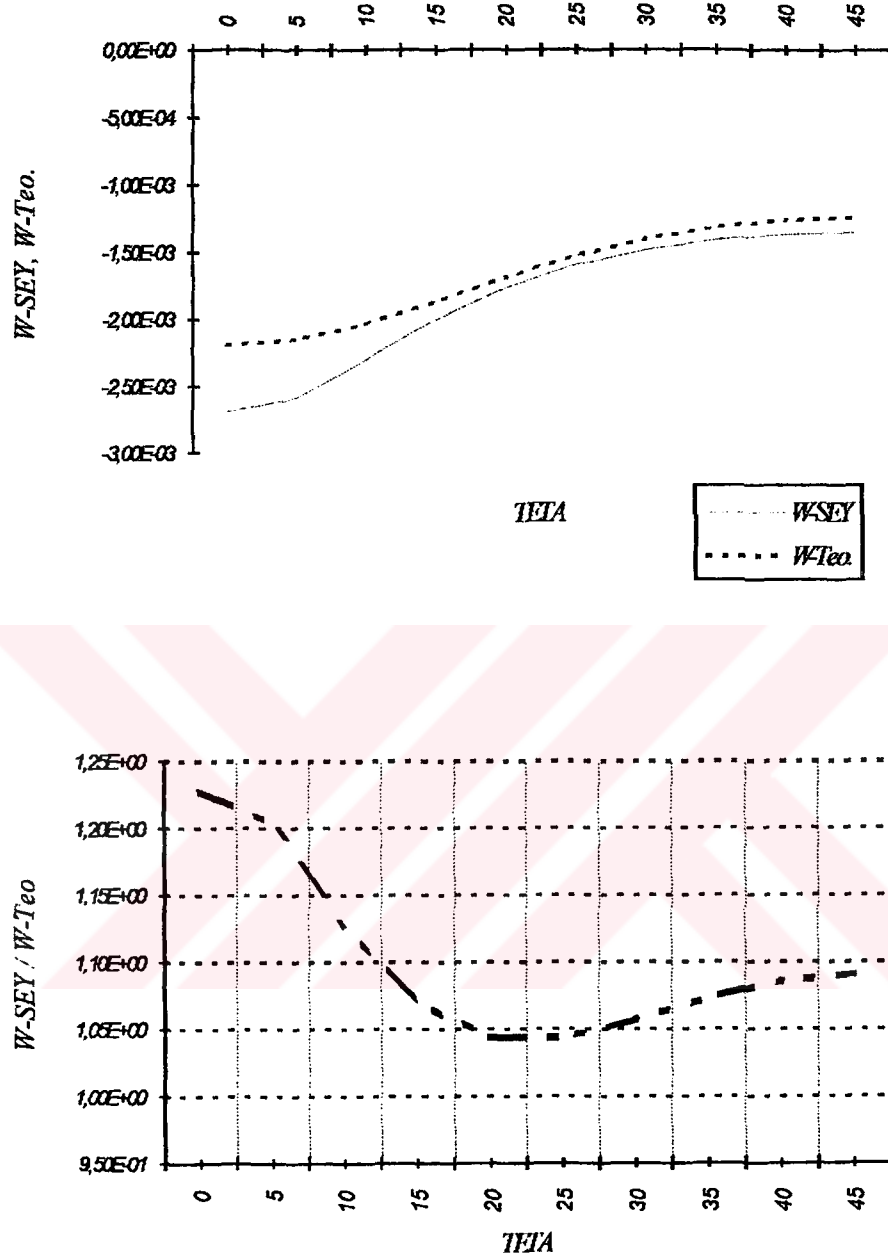
z koordinat	σ_{xz} El:3, Nok:5	σ_{yz} El:3, Nok:5	σ_{xz} El:1, Nok:5	σ_{yz} El:1, Nok:5	σ_{xz} El:1, Nok:3	σ_{yz} El:1, Nok:3
-12,015	-0,2147E3	-0,2263E3	-0,2366E3	-0,1255E3	-0,1753E3	0,9062E2
-9,345	-0,2272E3	-0,2365E3	-0,2378E3	-0,1354E3	-0,1834E3	0,9821E2
-6,675	-0,2384E3	-0,2434E3	-0,2412E3	-0,1465E3	-0,1912E3	0,1058E3
-4,005	-0,2464E3	-0,2462E3	-0,2478E3	-0,1573E3	-0,1979E3	0,1128E3
-1,335	-0,2502E3	-0,2459E3	-0,2546E3	-0,1646E3	-0,2019E3	0,1174E3
0,0	-0,2506E3	-0,2457E3	-0,2557E3	-0,1657E3	-0,2024E3	0,1181E3
-1,335	-0,2502E3	-0,2459E3	-0,2546E3	-0,1646E3	-0,2019E3	0,1174E3
-4,005	-0,2464E3	-0,2462E3	-0,2478E3	-0,1573E3	-0,1979E3	0,1128E3
-6,675	-0,2384E3	-0,2434E3	-0,2412E3	-0,1465E3	-0,1912E3	0,1058E3
-9,345	-0,2272E3	-0,2365E3	-0,2378E3	-0,1354E3	-0,1834E3	0,9821E2
-12,015	-0,2147E3	-0,2263E3	-0,2366E3	-0,1255E3	-0,1753E3	0,9062E2

Tablo 5.13 [0/90]_s 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plağın, 8-ağ noktalı melez eleman ile elde edilen ve plağın orta noktasında ($x=y=L/2, z=0$) oluşan, M_x, M_y, M_{xy} gerilme dağılımları

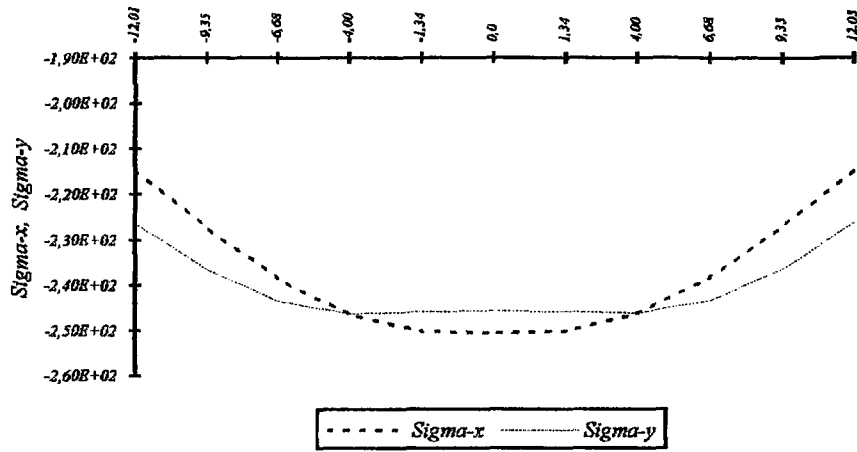
h/L	H	$M_x(SEQ)$	$M_y(SEQ)$	$M_{xy}(SEQ)$	$M_x(Teo.)$	$M_y(Teo.)$	$M_{xy}(Teo.)$
1.0	44.44 400/400	-0,1150E5	-0,1147E5	0,1509E-30	-0,1481E5	-0,8107E4	1,2607E-12
0.75	33.33 300/400	-0,1159E5	-0,1138E5	-0,1594E-30	-0,1481E5	-0,8107E4	1,2607E-12
0.5	22.22 200/400	-0,1183E5	-0,1113E5	-0,1618E-30	-0,1481E5	-0,8107E4	1,2607E-12
0.25	11.11 100/400	-0,1260E5	-0,1018E5	0,1885E-30	-0,1481E5	-0,8107E4	1,2607E-12
0.175	7.78 70/400	-0,1302E5	-0,9412E4	-0,4067E-30	-0,1481E5	-0,8107E4	1,2607E-12
0.1	4.45 40/400	-0,1287E5	-0,7925E4	-0,2428E-28	-0,1481E5	-0,8107E4	1,2607E-12
0.06	2.67 24/400	-0,1111E5	-0,6136E4	-0,2426E-28	-0,1481E5	-0,8107E4	1,2607E-12
0.04	1.78 16/400	-0,8613E4	-0,4418E4	0,4499E-30	-0,1481E5	-0,8107E4	1,2607E-12
0.02	0.89 8/400	-0,4059E4	-0,1873E4	0,1642E-30	-0,1481E5	-0,8107E4	1,2607E-12
0.01	0.45 4/400	-0,1414E4	-0,6146E3	0,1125E-32	-0,1481E5	-0,8107E4	1,2607E-12
0.005	0.22 2/400	-0,3813E3	-0,1617E3	-0,1328E-31	-0,1481E5	-0,8107E4	1,2607E-12
0.001	0.044 0.4/400	-0,1592E2	-0,6695E1	-0,9915E-32	-0,1481E5	-0,8107E4	1,2607E-12
0.0001	0.004 0.04/400	-0,1595E0	-0,67005E-1	-0,3897E-35	-0,1481E5	-0,8107E4	1,2607E-12

Tablo 5.14 $[+\theta / -\theta]_s$ 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plağın,
8-ağ noktalı melez eleman ile elde edilen ve plağın orta
noktasında ($x=y=L/2, z=0$) oluşan, M_x, M_y, M_{xy} gerilme
dağılımları

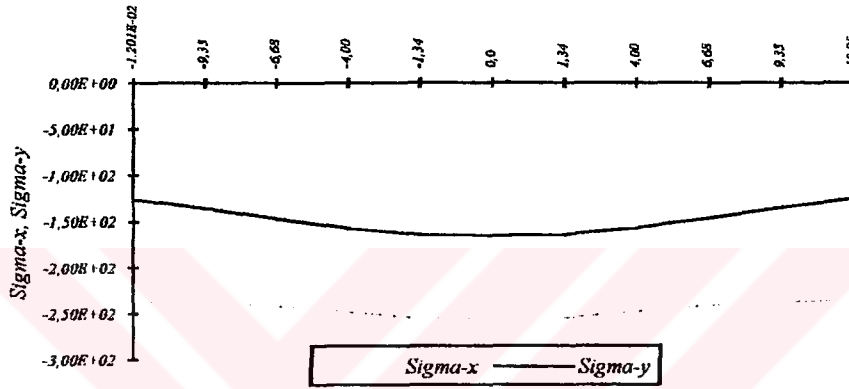
$h_n=4.45$ $h_r=40$ $h/L=40/400=0.1$ TETA: θ	$M_{xx}(SEY)$	$M_{yy}(SEY)$	$M_{xy}(SEY)$	$M_{xx}(Teo.)$	$M_{yy}(Teo.)$	$M_{xy}(Teo.)$
0°	-0,1912E5	-0,6955E3	-0,1672E-28	-0,7815E4	-0,5770E3	4,39E-13
5°	-0,2109E5	-0,1094E4	-0,5927E3	-0,8934E4	-0,6410E3	7,40E-13
10°	-0,2099E5	-0,1650E4	-0,1189E4	-0,1074E5	-0,8830E3	1,70E-12
15°	-0,1932E5	-0,2298E4	-0,1662E4	-0,1146E5	-0,1323E4	3,33E-12
20°	-0,1692E5	-0,2996E4	-0,1973E4	-0,1105E5	-0,1898E4	5,11E-12
25°	-0,1442E5	-0,3727E4	-0,2149E4	-0,1006E5	-0,2548E4	6,73E-12
30°	-0,1216E5	-0,4496E4	-0,2235E4	-0,8885E4	-0,3248E4	8,03E-12
35°	-0,1025E5	-0,5337E4	-0,2272E4	-0,7727E4	-0,3995E4	8,95E-12
40°	-0,8693E4	-0,6303E4	-0,2292E4	-0,6655E4	-0,4801E4	9,49E-12
45°	-0,7432E4	-0,7459E4	-0,2313E4	-0,5683E4	-0,5683E4	9,67E-12
50°	-0,6383E4	-0,8863E4	-0,2331E4	-0,4801E4	-0,6655E4	9,49E-12
55°	-0,5468E4	-0,1055E5	-0,2336E4	-0,3995E4	-0,7727E4	8,95E-12
60°	-0,4628E4	-0,1254E5	-0,2304E4	-0,3248E4	-0,8885E4	8,03E-12
65°	-0,3835E4	-0,1481E5	-0,2207E4	-0,2548E4	-0,1006E5	6,73E-12
70°	-0,3076E4	-0,1722E5	-0,2009E4	-0,1898E4	-0,1105E5	5,11E-12
75°	-0,2358E4	-0,1947E5	-0,1676E4	-0,1323E4	-0,1146E5	3,33E-12
80°	-0,1704E4	-0,2093E5	-0,1188E4	-0,8830E3	-0,1074E5	1,75E-12
85°	-0,1152E4	-0,2088E5	-0,5872E3	-0,6410E3	-0,8934E4	7,44E-13
90°	-0,7614E3	-0,1890E5	-0,2680E-3	-0,5770E3	-0,7815E4	4,39E-13



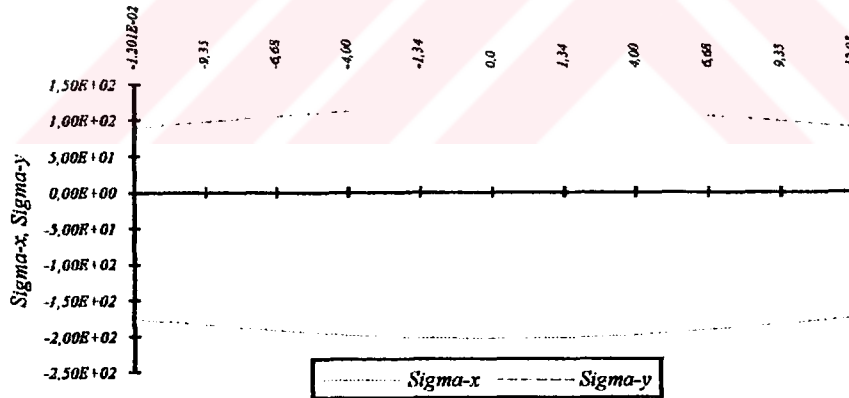
Grafik 5.9 0/90/0/90/0/90/0/90/0 düzgün yayılı yük altındaki 9 katlı plağın merkezinde oluşan sehım değerlerinin θ açısına göre dağılımı



a) 3. elemanın 5. ağ noktası boyunca σ_{xz} , σ_{yz} dağılımı



b) 1. elemanın 5. ağ noktası boyunca σ_{xz} , σ_{yz} dağılımı

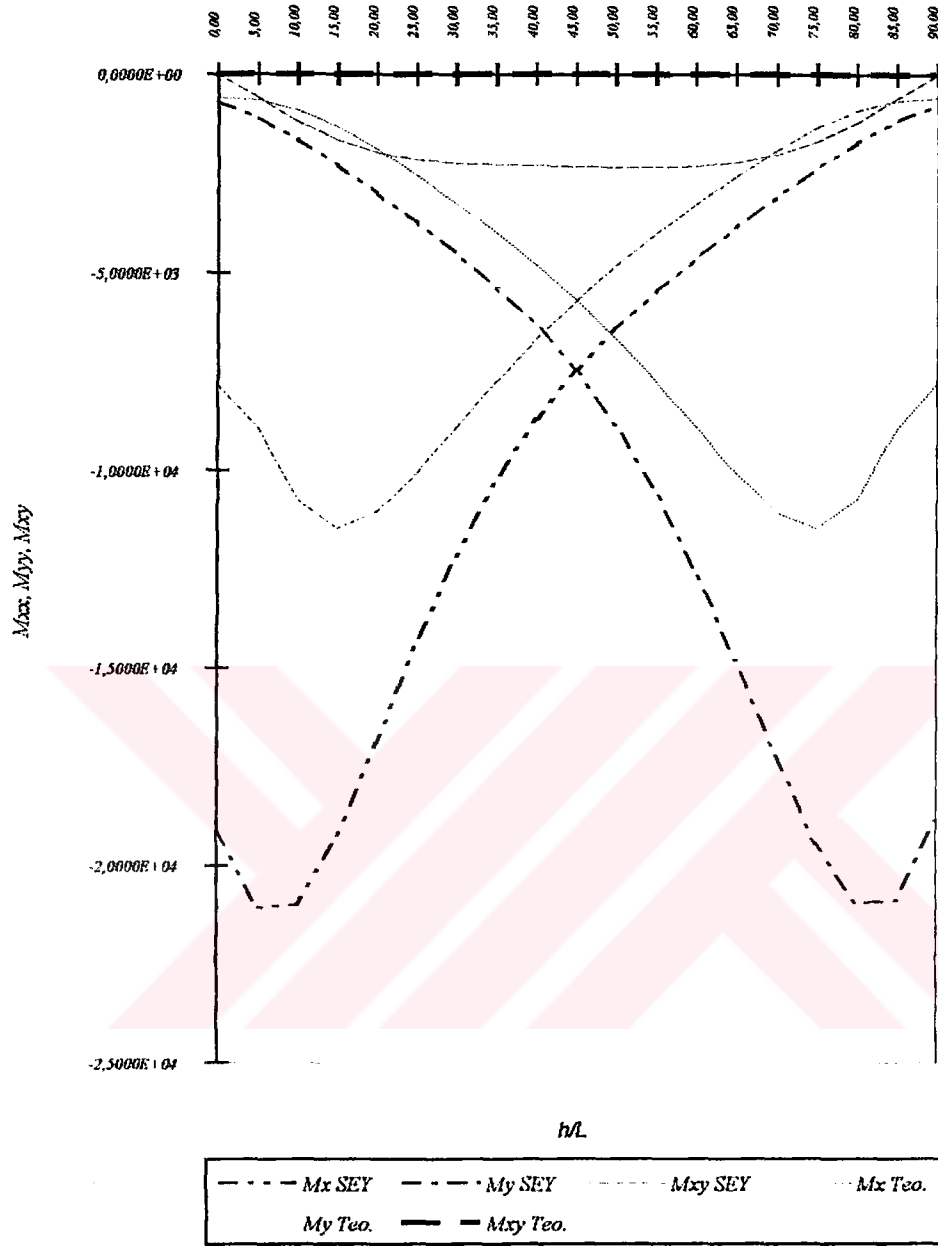


c) 1. elemanın 3. ağ noktası boyunca σ_{xz} , σ_{yz} dağılımı

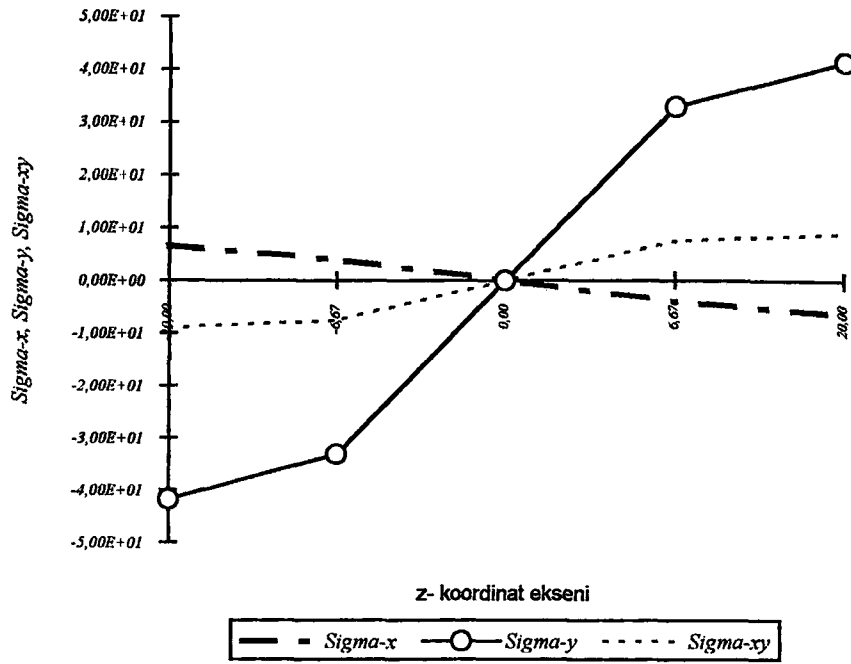
Grafik 5.10 0/90/0/90/0/90/0/90/0 çaprazlama plağın, düzgün yayılı yük

altında, değişik üç ağ noktasında z eksenı boyunca σ_{xz} , σ_{yz}

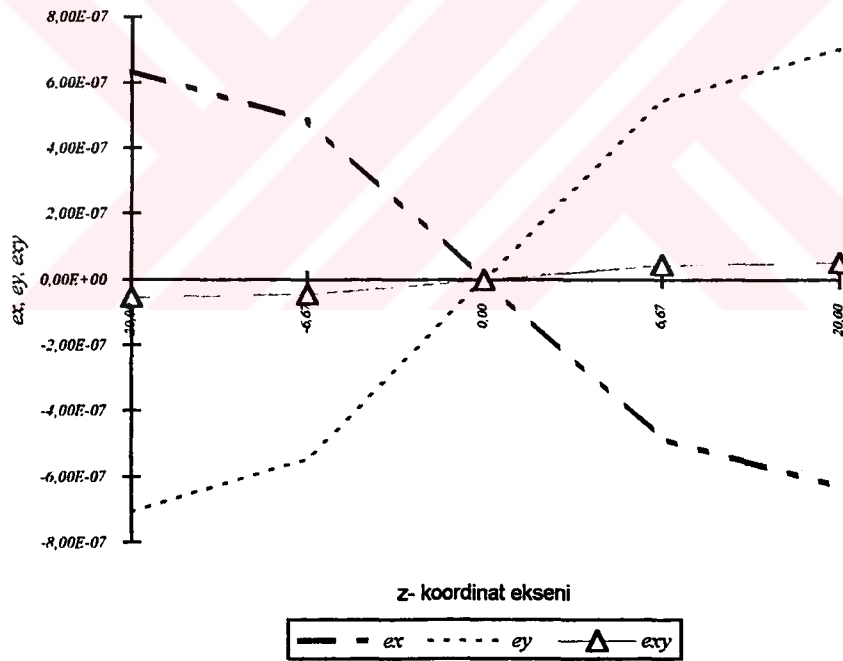
dağılımları, $h_0=2.67$, $h/L=24/400=0.06$



Grafik 5.11 $\theta/\theta/\theta/\theta/\theta/\theta/\theta/\theta/\theta$ 9-katlı çaprazlama plağın (0 ile 90 dereceler arası) düzgün yayılı yük altında, merkezde ($x=L/2$, $y=L/2$, $z=0$) oluşan M_x , M_y , M_{xy} dağılımlarının θ açısına göre değişimi ($h/L=0.1$ ve 8 ağ noktalı eleman)

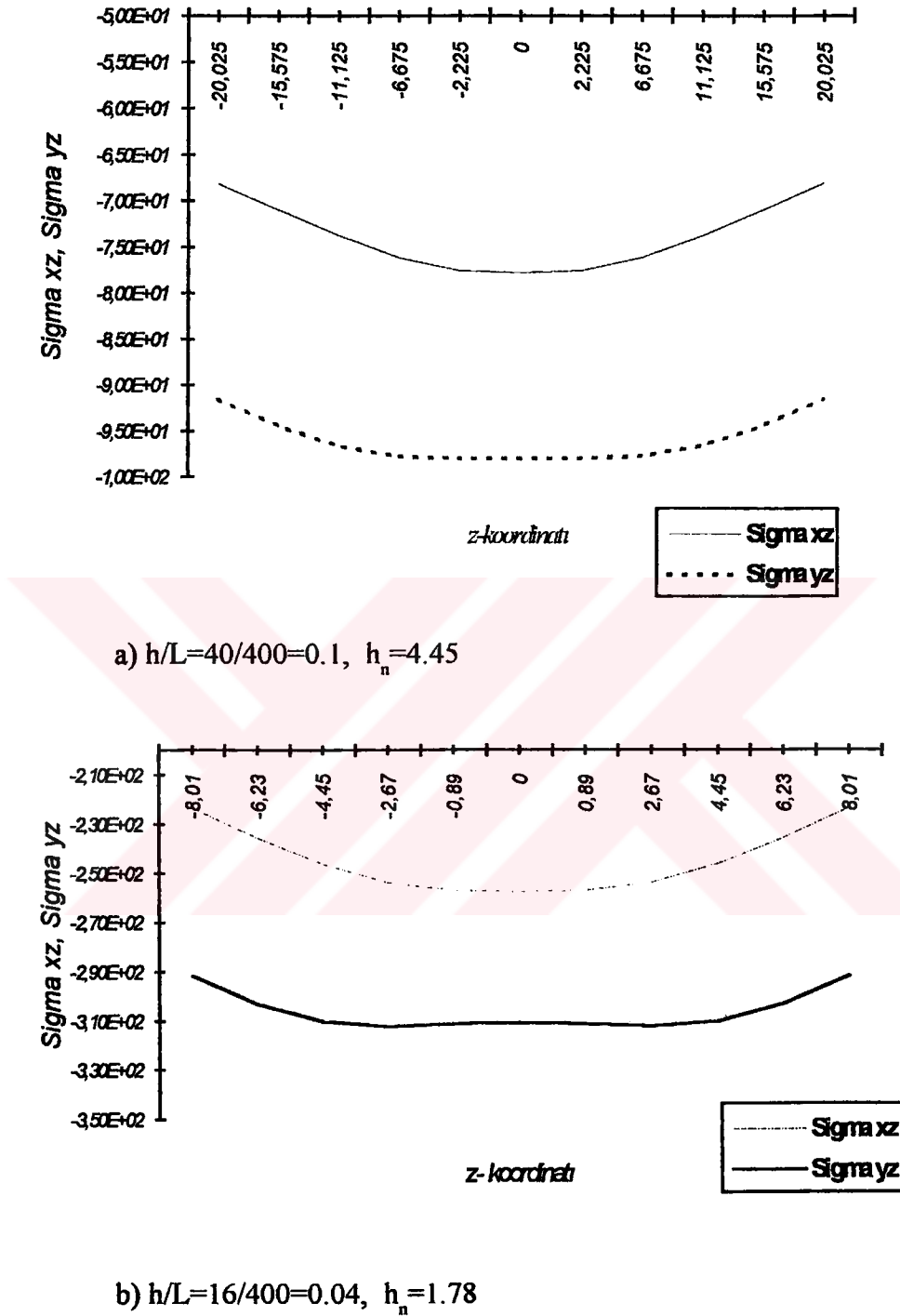


a) Plâğın orta noktasında, z- eksenı boyunca σ_x , σ_y , σ_{xy} dağılımları.

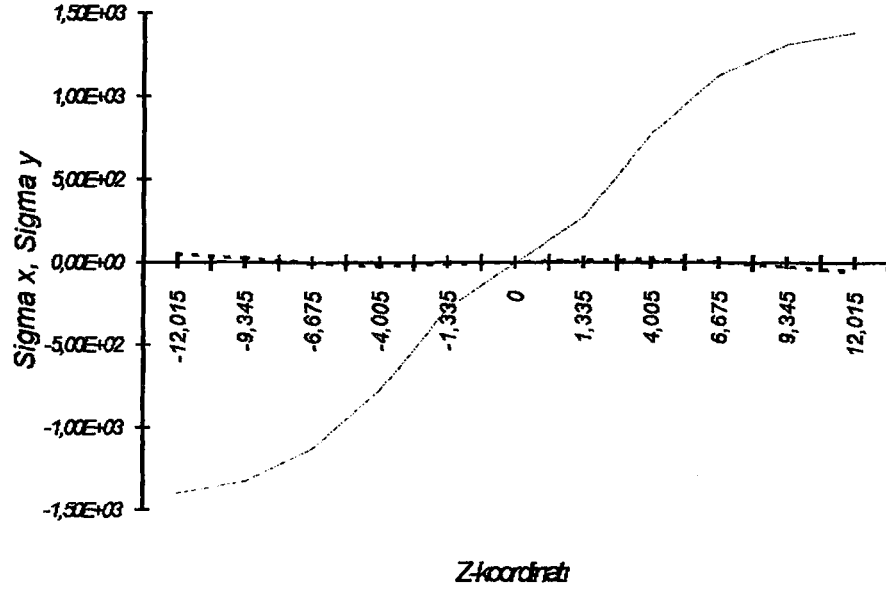


b) Plâğın orta noktasında, z- eksenı boyunca e_x , e_y , e_{xy} dağılımları.

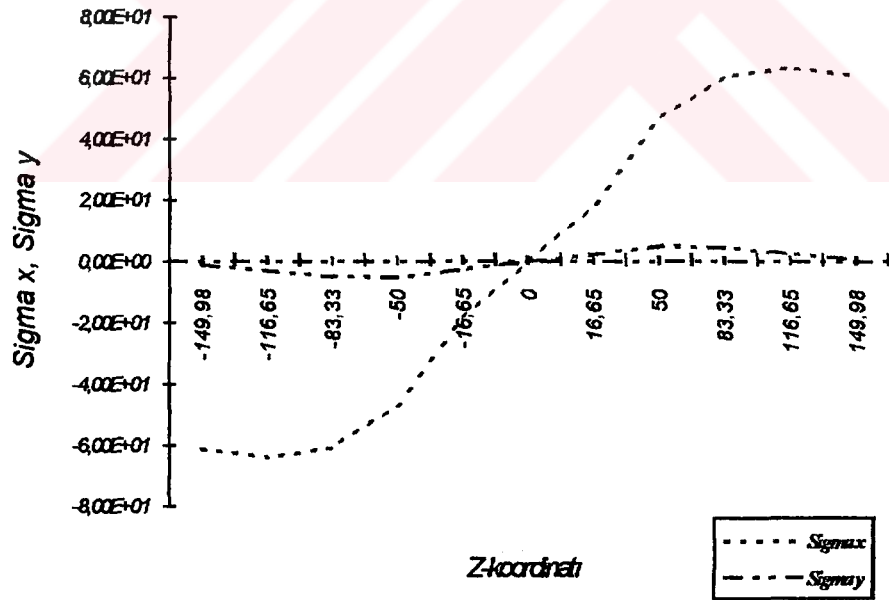
Grafik 5.12 -45/45/-45 dizili kompozit plâğın, düzgün yayılı yük altında, z eksenı boyunca oluşan gerilme ve genleme dağılımları ($h_n=13.33$, $h/L=40/400=0.1$, $P= -2 \text{ lb/in}^2$)



Grafik 5.13 0/90/0/90/0/90/0/90/0 düzgün yayılı yük altındaki 9 katlı plağın, c-ağ noktasında (merkezde) 8-ağ noktalı melez eleman kullanılarak bulunan σ_{xz} , σ_{yz} dağılımları

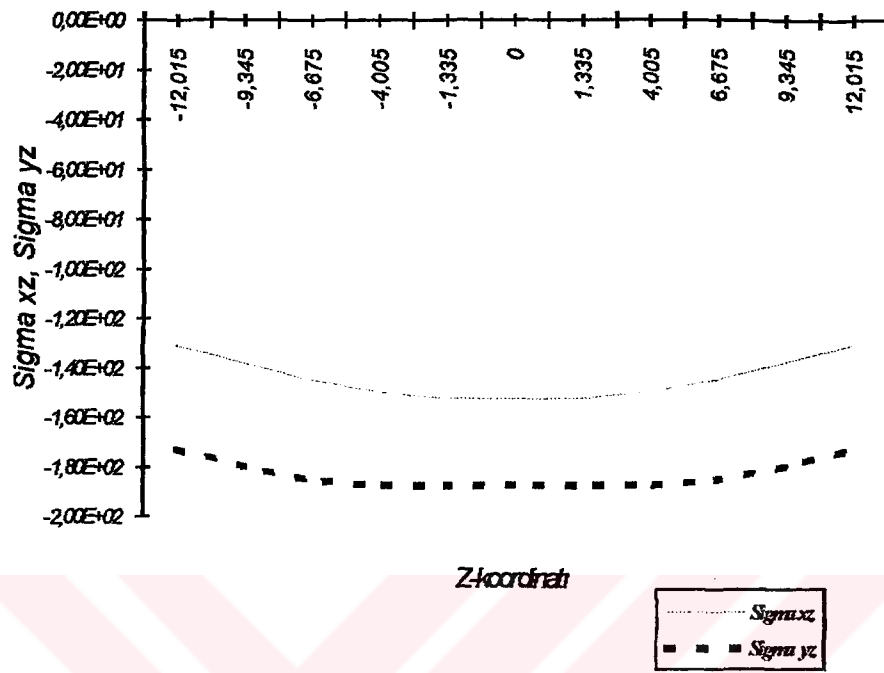


a) $h/L=24/400=0.06$, $h_n=2.67$

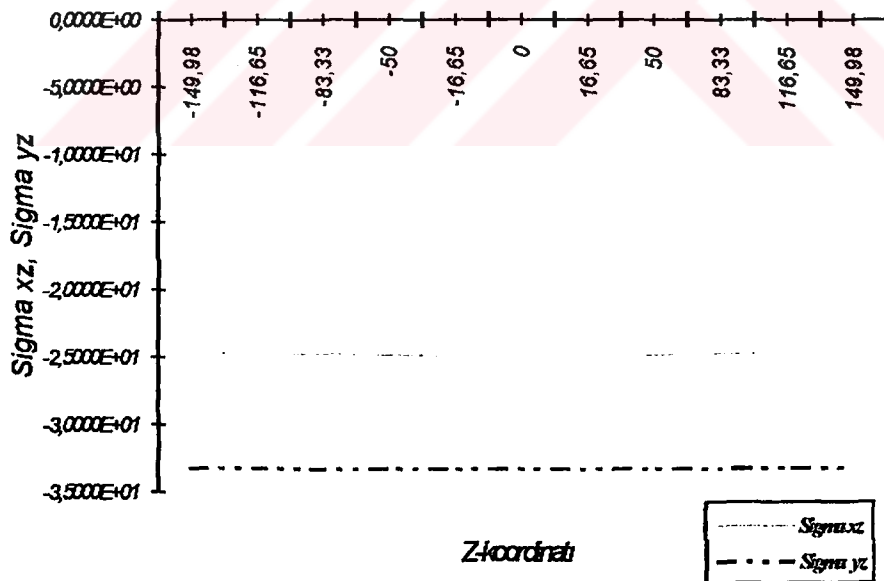


b) $h/L=300/400=0.75$, $h_n=33.33$

Grafik 5.14 0/90/0/90/0/90/0/90/0 düzgün yayılı yük altındaki 9 katlı plağın, c-ağ noktasında (merkezde) 8-ağ noktalı melez eleman kullanılarak bulunan σ_x , σ_y dağılımı



a) $h/L=24/400=0.06$, $h_n=2.67$



b) $h/L=300/400=0.75$, $h_n=33,33$

Grafik 5.15 0/90/0/90/0/90/0/90/0 düzgün yayılı yük altındaki 9 katlı plağın, c-ağ noktasında (merkezde) 8-ağ noktalı melez eleman kullanılarak bulunan σ_{xz} , σ_{yz} dağılımı

Tablo 5.15 $[0^\circ / 90^\circ]_s$ 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plâğın, 9-ağ noktalı melez eleman kullanılarak, plâğın orta noktasında ($x=y=L/2$, $z=0$) elde edilen sehim ve gerilme değerlerinin yük değerine göre değişimi ($h_n=0.02$, $h_T=8$, $h/L=8/400=0.89$)

P	LİNEER ÇÖZÜM							LİNEER OLMAYAN ÇÖZÜM						
	W	M _x	M _y	M _{xy}	σ_x	σ_z	σ_{yz}	W	M _x	M _y	M _{xy}	σ_x	σ_z	σ_{yz}
-5.0	-0,3457	-0,2029E5	-0,9367E4	0,8210E-30	-0,3221E4	-0,3074	-0,3454	-0,3454	-0,2023E5	-0,9345E4	-0,7972E-16	-0,3217E4	-0,3068E4	-0,3068E4
-10.0	-0,6915	-0,4060E5	-0,1874E5	0,1642E-29	-0,6444E4	-0,6148E4	-0,6889	-0,6889	-0,4028E5	-0,1835E5	-0,3018E-15	-0,6403E4	-0,6106E4	-0,6106E4
-15.0	-1,03734	-0,6089E5	-0,2810E5	0,2463E-29	-0,9663E4	-0,9222	-1,0284	-1,0284	-0,5983E5	-0,2749E5	-0,6396E-15	-0,9531E4	-0,9083E4	-0,9083E4
-20.0	-1,3831	-0,8119E5	-0,3747E5	0,3284E-29	-0,1288E5	-0,1229E5	-1,3622	-1,3622	-0,7868E5	-0,3604E5	-0,1065E-14	-0,1257E5	-0,1197E5	-0,1197E5
-30.0	-2,0747	-0,1218E6	-0,5621E5	0,4926E-29	-0,1933E5	-0,1844E5	-2,0053	-2,0053	-0,1135E6	-0,5149E5	-0,2070E-14	-0,1828E5	-0,1736E5	-0,1736E5
-50.0	-3,4578	-0,2029E6	-0,9367E5	0,8210E-29	-0,3222E5	-0,3073E5	-3,1544	-3,1544	-0,1666E6	-0,7307E5	-0,3942E-14	-0,2763E5	-0,2602E5	-0,2602E5
-100.0	-6,9156	-0,4059E6	-0,1873E6	-0,1642E-28	-0,6443E5	-0,6147E5	-4,9946	-4,9946	-0,1759E6	-0,5691E5	-0,6899E-15	-0,3540E5	-0,3160E5	-0,3160E5
-300.0	-20,746	-0,1217E7	-0,5621E6	0,4926E-28	-0,1933E6	-0,1844E6	-4,6580	-4,6580	0,7079E6	0,5291E6	0,1294E-12	0,4982E5	0,6564E5	0,6564E5
-400.0	-27,663	-0,1624E7	-0,7494E6	0,6568E-28	-0,2577E6	-0,2459E6	-3,8794	-3,8794	0,1222E7	0,8619E6	0,2148E-12	0,1015E6	0,1236E6	0,1236E6

Tablo 5.16 [0/90]_s 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plâgın, 8 ağ-noktalı melez eleman ile ve plâgın orta noktasında, z-koordinat ekseni boyunca elde edilen gerilme dağılımları ($h_n=2.67$, $h_T=24$, $L=400$, $h_T/L=0.06$)

$h_n=2.67$ $h_T=24$ $L=400$ $h_T/L=0.06$ Z-koordinat	σ_x	σ_y	σ_{xy}	M_x	M_y	M_{xy}	σ_{xz}	σ_{yz}
-12,015	-0,1398E4	0,5321E2	-0,2035E3	-0,6846E4	-0,1047E5	0,1474E-12	-0,1309E3	-0,1728E3
-9,345	-0,1325E4	0,2459E2	-0,1977E3	-0,8295E4	-0,1017E5	0,1433E-12	-0,1379E3	-0,1799E3
-6,675	-0,11309E4	-0,3870E1	-0,9860E4	-0,9860E4	-0,9458E4	0,1262E-12	-0,1446E3	-0,1852E3
-4,005	-0,7787E3	-0,1929E2	-0,1243E3	-0,1126E5	-0,8442E4	0,900E-13	-0,1497E3	-0,1875E3
-1,335	-0,2797E3	-0,1092E2	-0,4587E2	-0,1212E5	-0,7618E4	0,3323E-13	-0,1523E3	-0,1876E3
0,0	0,2115E-12	0,1494E-12	0,3933E-13	-0,1223E5	-0,7492E4	-0,2850E-28	-0,1527E3	-0,1875E3
1,335	0,2797E3	0,1092E2	0,4587E2	-0,1212E5	-0,7618E4	-0,3323E-13	-0,1523E3	-0,1876E3
4,005	0,7787E3	0,1929E2	0,1243E3	-0,1126E5	-0,8442E4	-0,900E-13	-0,1497E3	-0,1875E3
675	0,11309E4	0,3870E1	0,9860E4	-0,9860E4	-0,9458E4	-0,1262E-12	-0,1446E3	-0,1852E3
9,345	0,1325E4	-0,2459E2	0,1977E3	-0,8295E4	-0,1017E5	-0,1433E-12	-0,1379E3	-0,1799E3
12,015	0,1398E4	-0,5321E2	0,2035E3	-0,6846E4	-0,1047E5	-0,1474E-12	-0,1309E3	-0,1728E3

* 8-düğün noktalı melez eleman ağı kullanılmıştır.

HM graphite/epoxy PXX, V_T=1.0

$E_{11} = 30.0E+6$ psi , $G_{12} = 0.375E+6$ psi , $E_{22} = 0.75 E+6$ psi , $G_{12} = 0.45 E+6$ psi , $V_{22} = 0.25$, $V_{12} = 0.25$

Tablo 5.17 [0/90]_s 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plâgın, 8 ağ-noktalı melez eleman ile plâgın orta

noktasında ,z-koordinat eksenini boyunca elde edilen gerilme dağılımları ($h_n=33,33$, $h_T=300$, $L=400$,

$h_T/L=0.75$)

$h_n=33,33$ $h_T=300$ $L=400$ $h_T/L=0.75$ Z-koordinat	σ_x	σ_y	σ_{xy}	M_x	M_y	M_{xy}	σ_{xz}	σ_{yz}
-149,985	-0,6092E2	-0,9910E0	-0,1694E2	-0,3929E4	-0,1738E5	0,2081E-13	-0,2467E2	-0,3323E2
-116,655	-0,6369E2	-0,2866E1	-0,1744E2	-0,5163E4	-0,1679E5	0,2142E-13	-0,2473E2	-0,3328E2
-83,325	-0,6051E2	-0,4675E1	-0,1832E2	-0,6744E4	-0,1559E5	0,2005E-13	-0,2478E2	-0,3332E2
-49,995	-0,4674E2	-0,5159E1	-0,1236E2	-0,8570E4	-0,1404E5	0,1518E-13	-0,2483E2	-0,3334E2
-16,665	-0,1835E2	-0,2465E1	-0,4761E1	-0,1002E5	-0,1284E5	0,5847E-14	-0,2488E2	-0,3335E2
0,0	-0,3627E-15	0,2862E-15	0,1518E-15	-0,1025E5	-0,1265E5	-0,1865E-30	-0,2488E2	-0,3335E2
16,665	0,1835E2	0,2465E1	0,4761E1	-0,1002E5	-0,1284E5	0,5847E-14	-0,2488E2	-0,3335E2
49,995	0,4674E2	0,5159E1	0,1236E2	-0,8570E4	-0,1404E5	0,1518E-13	-0,2483E2	-0,3334E2
83,325	0,6051E2	0,4675E1	0,1832E2	-0,6744E4	-0,1559E5	0,2005E-13	-0,2478E2	-0,3332E2
116,655	0,6369E2	0,2866E1	0,1744E2	-0,5163E4	-0,1679E5	0,2142E-13	-0,2473E2	-0,3328E2
149,985	0,6092E2	0,9910E0	0,1694E2	-0,3929E4	-0,1738E5	0,2081E-13	-0,2467E2	-0,3323E2

* 8-düğüm noktalı heterosis eleman ağı kullanılmıştır.

HM graphite/epoxy $P(X,Y)=1.0 \text{ lb/in}^2$

$E_{11} = 30.0E+6 \text{ psi}$, $G_{12} = 0.375E+6 \text{ psi}$, $E_{22} = 0.75 E+6 \text{ psi}$, $G_{12} = 0.45 E+6 \text{ psi}$, $V_{22} = 0.25$, $V_{12} = 0.25$

Tablo 5.18 $[0/90]_9$ 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plâgın, değişik ağ noktalarında, z-koordinat eksenini boyunca oluşan enine kayma gerilme dağılımları ($h_n=2.67, h_T=24, L=400, h_T/L=0.06$)

$h_n=2.67$ in. $h_T=24$ in. $L=400$ in. $h_T/L=0.06$	σ_{xz} El:3, Nok:5	σ_{yz} El:3, Nok:5	σ_{xz} El:1, Nok:5	σ_{yz} El:1, Nok:5	σ_{xz} El:1, Nok:3	σ_{yz} El:1, Nok:3
z-koordinat						
-12,015	-0,2147E3	-0,2263E3	-0,2366E3	-0,1255E3	-0,1753E3	0,9062E2
-9,345	-0,2272E3	-0,2365E3	-0,2378E3	-0,1354E3	-0,1834E3	0,9821E2
-6,675	-0,2384E3	-0,2434E3	-0,2412E3	-0,1465E3	-0,1912E3	0,1058E3
-4,005	-0,2464E3	-0,2462E3	-0,2546E3	-0,1573E3	-0,1979E3	0,1128E3
-1,335	-0,2502E3	-0,2459E3	-0,2557E3	-0,1646E3	-0,2019E3	0,1174E3
0,0	-0,2506E3	-0,2457E3	-0,2546E3	-0,1657E3	-0,2024E3	0,1181E3
1,335	-0,2502E3	-0,2459E3	-0,2557E3	-0,1646E3	-0,2019E3	0,1174E3
4,005	-0,2464E3	-0,2462E3	-0,2546E3	-0,1573E3	-0,1979E3	0,1128E3
6,675	-0,2384E3	-0,2434E3	-0,2412E3	-0,1465E3	-0,1912E3	0,1058E3
9,345	-0,2272E3	-0,2365E3	-0,2378E3	0,1354E3	-0,1834E3	0,9821E2
12,015	-0,2147E3	-0,2263E3	-0,2366E3	-0,1255E3	-0,1753E3	0,9062E2

* 8-düğüm noktalı heterosis eleman ağı kullanılmıştır.

HM graphite/epoxy $P(X,Y)=1.0$

E_{11} E+6 psi	30.0	V_{12} =	0.25
G_{22} E+6 psi	0.375	V_{22} =	0.25
E_{22} E+6 psi	0.75		
G_{12} E+6 psi	0.45		

Tablo 5.19 $[0/90]_s$ 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plağın, değişik ağ noktalarında, z-koordinat eksenini boyunca oluşan enine kayma gerilme dağılımları ($h_n=33.33$, $h_T=300$, $L=400$, $h_T/L=0.75$)

$h_n=33.33$ in. $h_T=300$ in. $L=400$ in. $h_T/L=0.75$	σ_{xz} El:3, Nok:5	σ_{yz} El:3, Nok:5	σ_{xz} El:1, Nok:5	σ_{yz} El:1, Nok:5	σ_{xz} El:1, Nok:3	σ_{yz} El:1, Nok:3
z-koordinat						
-149,98	-0,2922E2	-0,2933E2	-0,9850E2	-0,2069E2	-0,7762E2	-0,1759E2
-116,65	-0,6129E2	-0,3025E2	-0,9825E2	-0,2078E2	-0,7781E2	-0,1745E2
-83,32	-0,2944E2	-0,3033E2	-0,9831E2	-0,2088E2	-0,7804E2	-0,1732E2
-49,99	-0,2956E2	-0,3039E2	-0,9830E2	-0,2098E2	-0,7830E2	-0,1723E2
-16,66	-0,2964E2	-0,3042E2	-0,9825E2	-0,2105E2	-0,7850E2	-0,1720E2
0,0	-0,2965E2	-0,3042E2	-0,9824E2	-0,2107E2	-0,7853E2	-0,1720E2
16,66	-0,2964E2	-0,3041E2	-0,9825E2	-0,2105E2	-0,7850E2	-0,1720E2
49,99	-0,2956E2	-0,3039E2	-0,9830E2	-0,2098E2	-0,7830E2	-0,1723E2
83,32	-0,2944E2	-0,3033E2	-0,9831E2	-0,2088E2	-0,7804E2	-0,1732E2
116,65	-0,6129E2	-0,3025E2	-0,9825E2	-0,2078E2	-0,7781E2	-0,1745E2
149,98	-0,2922E2	-0,2933E2	-0,9850E2	-0,2069E2	-0,7762E2	-0,1759E2

* 8-düğüm noktalı heterosis eleman ağı kullanılmıştır.

HM graphite/epoxy $P(X,Y)=1.0$

E_{11} E+6 psi 30.0

$V_{12} = 0.25$

G_{22} E+6 psi 0.375

$V_{22} = 0.25$

E_{22} E+6 psi 0.75

G_{12} E+6 psi 0.45

Tablo 5.20 $[0/90]_9$ 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plâgın, 9 ağ noktalı melez eleman kullanarak ($x=y=L/2$) ve z -koordinatı boyunca oluşan, enine kayma gerilme değerlerinin h/L oranına göre değişimi

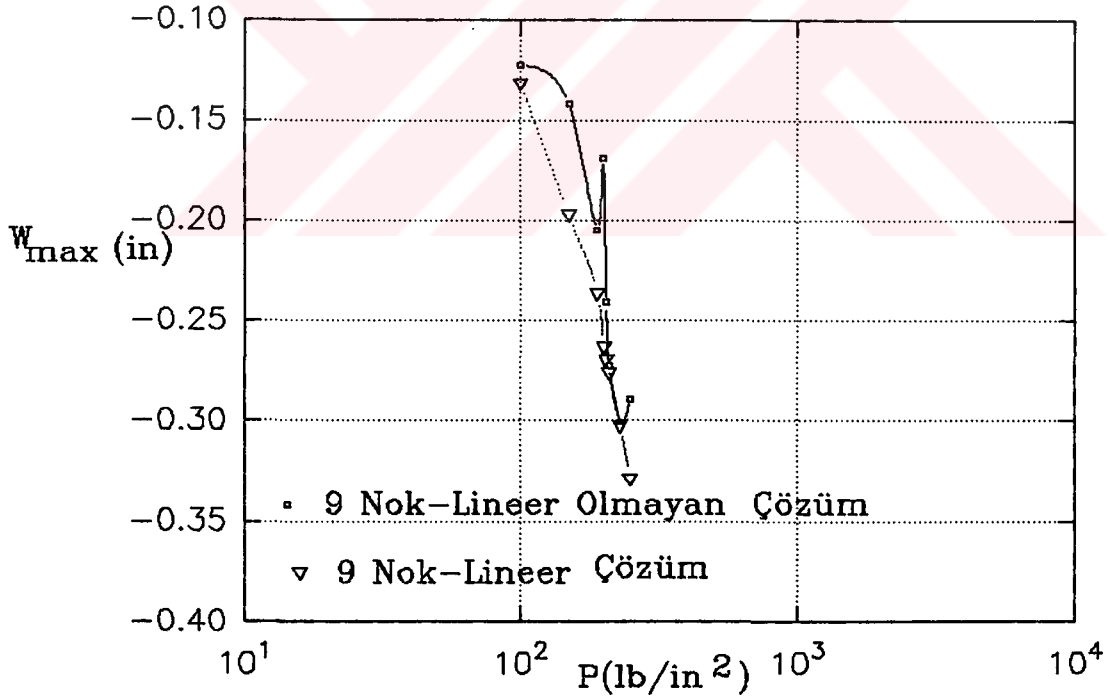
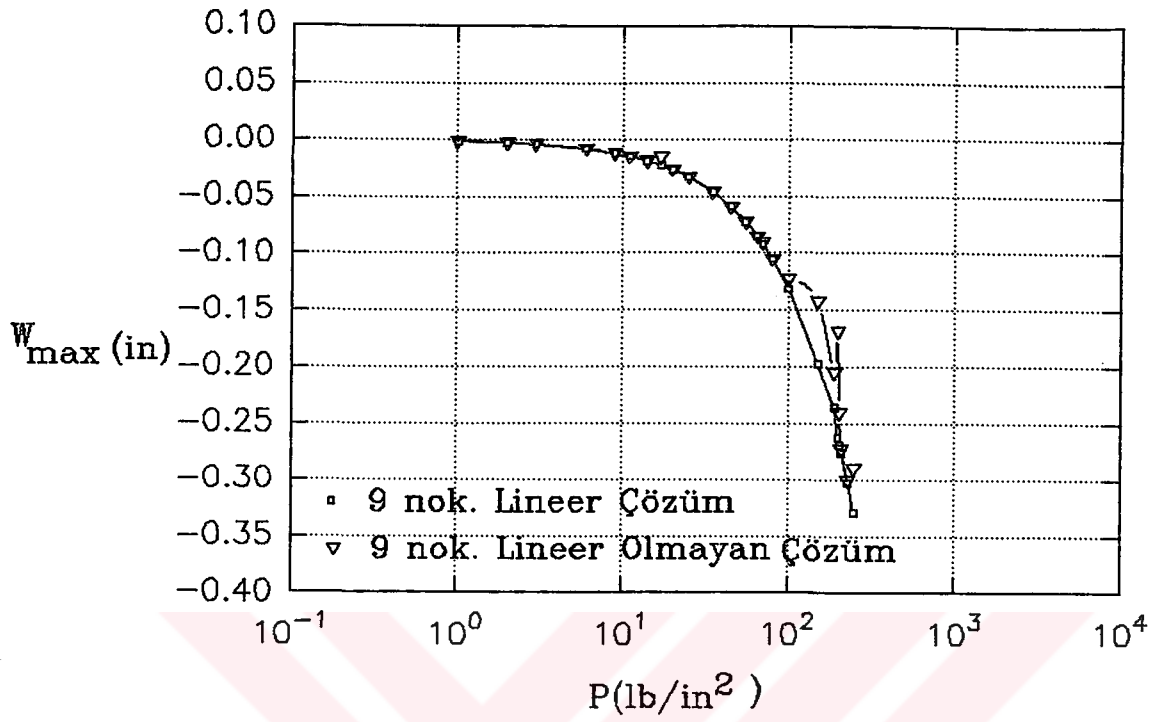
$h_n=33.33$ in $h_T=300$ in $h/L=300/400=0.75$			$h_n=2.67$ in $h_T=24$ in $h/L=24/400=0.06$		
z-koordinat	σ_{xz} 9 ağ noktalı	σ_{yz} 9 ağ noktalı	z-koordinat	σ_{xz} 9 ağ noktalı	σ_{yz} 9 ağ noktalı
-149,98	-0,2926E2	-0,3006E2	-12,015	-0,2796E3	-0,2812E3
-116,65	-0,2939E2	-0,3019E2	-9,345	-0,2998E3	-0,3016E3
-83,32	-0,2950E2	-0,3030E2	-6,675	-0,3177E3	-0,3183E3
-49,99	-0,2959E2	-0,3033E2	-4,005	-0,3305E3	-0,3283E3
-16,66	-0,2965E2	-0,3042E2	-1,335	-0,3366E3	-0,3315E3
0,0	-0,2966E2	-0,3042E2	0,0	-0,3373E3	-0,3317E3
16,66	-0,2965E2	-0,3042E2	1,335	-0,3366E3	-0,3315E3
49,99	-0,2959E2	-0,3033E2	4,005	-0,3305E3	-0,3283E3
83,32	-0,2950E2	-0,3030E2	6,675	-0,3177E3	-0,3183E3
116,65	-0,2939E2	-0,3019E2	9,345	-0,2998E3	-0,3016E3
149,98	-0,2926E2	-0,3006E2	12,015	-0,2796E3	-0,2812E3

Tablo 5.21 [0 / 90]_s 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plâgın, 9-ağ noktalı melez eleman ile elde edilen plâgın orta noktasında ($x=y=L/2$, $z=0$) oluşan, M_x , M_y , M_{xy} gerilme dağılımlarının teorik ve SEY sonuçlarının karşılaştırması

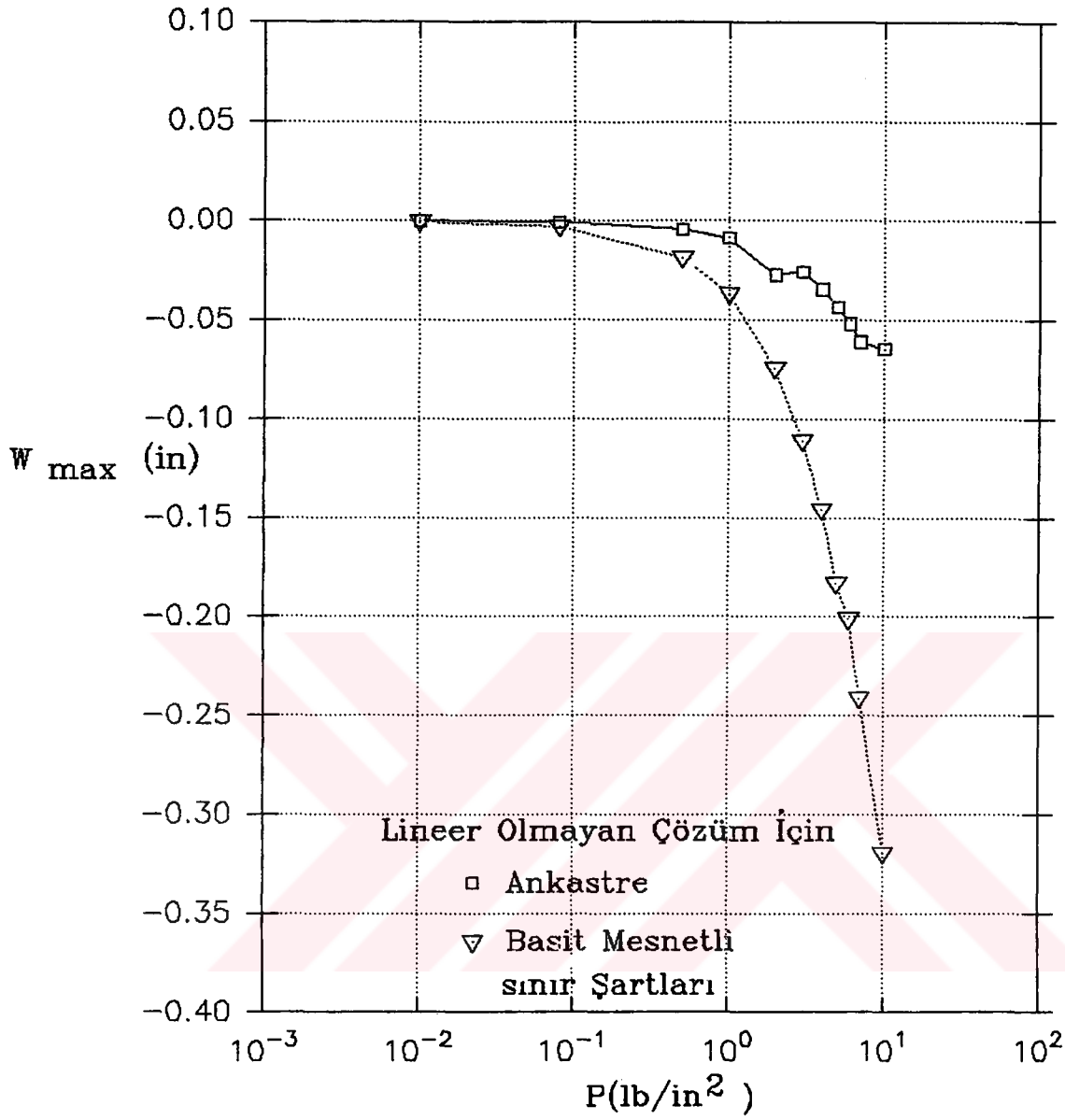
h/L	H ve h_T/L	$M_x(SeY)$	$M_y(SeY)$	$M_{xy}(SeY)$	$M_x(Teo.)$	$M_y(Teo.)$	$M_{xy}(Teo.)$
1.0	44.44 400/400	-0,11348E5	-0,11251E5	0,19776E-30	-0,14810E5	-0,8107E4	1,2607E-12
0.75	33.33 300/400	-0,11455E5	-0,11166E5	-0,8504E-31	-0,14810E5	-0,8107E4	1,2607E-12
0.5	22.22 200/400	-0,11729E5	-0,10944E5	0,20875E-30	-0,14810E5	-0,8107E4	1,2607E-12
0.25	11.11 100/400	-0,12737E5	-0,10139E5	0,23740E-30	-0,14810E5	-0,8107E4	1,2607E-12
0.175	7.78 70/400	-0,13483E5	-0,95505E4	-0,16830E-30	-0,14810E5	-0,8107E4	1,2607E-12
0.1	4.45 40/400	-0,14605E5	-0,87250E4	-0,23630E-30	-0,14810E5	-0,8107E4	1,2607E-12
0.06	2.67 24/400	-0,15486E5	-0,83135E4	-0,28945E-28	-0,14810E5	-0,8107E4	1,2607E-12
0.04	1.78 16/400	-0,16293E5	-0,82935E4	0,21590E-31	-0,14810E5	-0,8107E4	1,2607E-12
0.02	0.89 8/400	-0,18343E5	-0,90306E4	-0,1539E-30	-0,14810E5	-0,8107E4	1,2607E-12
0.01	0.45 4/400	-0,21027E5	-0,10090E5	0,13777E-31	-0,14810E5	-0,8107E4	1,2607E-12
0.005	0.22 2/400	-0,23646E5	-0,10324E5	-0,26412E-30	-0,14810E5	-0,8107E4	1,2607E-12
0.001	0.044	-0,25413E5	-0,10142E5	-0,7499E-29	-0,14810E5	-0,8107E4	1,2607E-12

Tablo 5.22 Ankastre bağlanmış [0 / 90], 9-katlı plağın orta noktasında ($x=y=L/2, z=0$) elde edilen lineer ve lineer olmayan analiz sonuçlarının yük değişimine göre karşılaştırılması ($h/L=40/400=0.1$)

$P(lb/m^2)$	SEY W_{max} <i>Lineer Çözüm</i>	SEY W_{max} <i>Lineer Ol. Çöz.</i>	<i>Norm</i>	<i>Yük Farkı</i>
-1,0	-1,31466E-3	-1,3146E-3	1,0E-2	1,0E-4
-2,0	-2,6293E-3	-2,6293E-3	1,0E-2	1,0E-4
-3,0	-3,9440E-3	-3,9439E-3	1,0E-2	1,0E-3
-6,0	-7,8880E-3	-7,8878E-3	1,0E-2	1,0E-3
-9,0	-1,1832E-2	-1,1831E-2	1,0E-2	1,0E-3
-11,0	-1,4461E-2	-1,4459E-2	1,0E-3	1,0E-2
-14,0	-1,8405E-2	-1,8383E-2	1,0E-3	1,0E-2
-17,0	-2,2349E-2	-1,5146E-2	1,0E-4	1,0E-2
-20,0	-2,6293E-2	-2,6246E-2	1,0E-3	1,0E-2
-25,0	-3,2866E-2	-3,2836E-2	1,0E-2	1,0E-2
-35,0	-4,6013E-2	-4,6000E-2	1,0E-2	1,0E-2
-45,0	-5,9160E-2	-5,9145E-2	1,0E-2	1,0E-2
-55,0	-7,2306E-2	-7,2271E-2	1,0E-2	1,0E-2
-65,0	-8,5453E-2	-8,5417E-2	1,0E-2	1,0E-2
-70,0	-9,2026E-2	-9,0545E-2	1,0E-2	1,0E-2
-80,0	-0,1052	-0,1049	1,0E-2	1,0E-2
-100,0	-0,1315	-0,1224	1,0E-2	1,0E-2
-150,0	-0,1972	-0,1421	1,0E-2	1,0E-2
-190,0	-0,2367	-0,2049	1,0E-2	1,0E-2
-200,0	-0,2629	-0,1688	1,0E-2	1,0E-2
-205,0	-0,2695	-0,2409	1,0E-1	1,0E-1
-210,0	-0,2761	-0,2727	1,0E-2	1,0E-2
-220,0	-0,2892	-0,1619	1,0E-3	1,0E-3
-230,0	-0,3024	-0,3006	1,0E-2	1,0E-2
-250,0	-0,3287	-0,2895	1,0E-1	1,0E-1



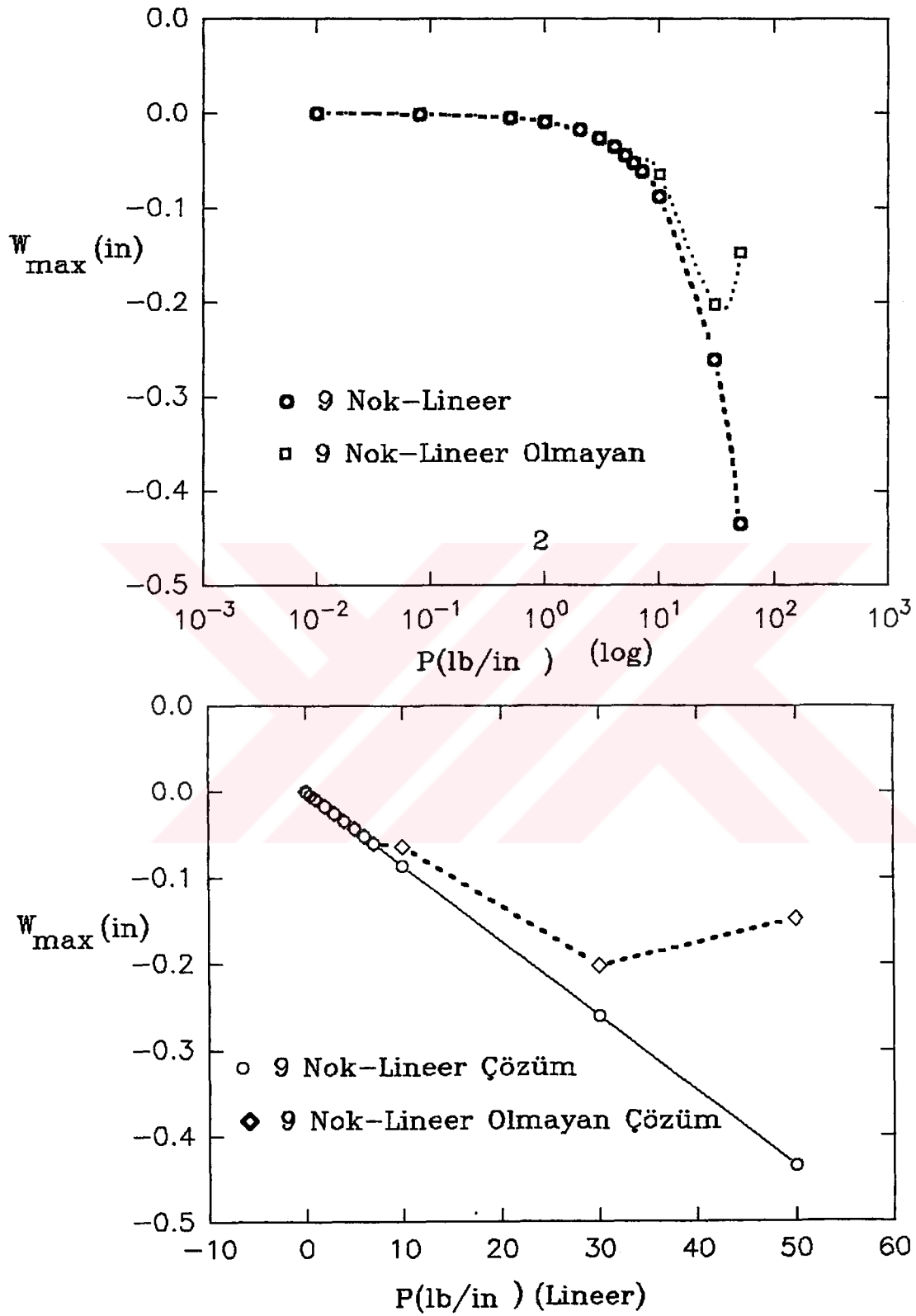
Grafik 5.16 0/90/0/90/0/90/0/90/0 ankastre bağlanmış plağın lineer ve lineer olmayan çözüm sonuçlarının karşılaştırılması ($h/L=0.1$) (9 ağ noktalı)



Grafik 5.17 0/90/0/90/0/90/0/90/0 kompozit plağın ankastre ve basit mesnetli sınır şartları kullanılarak elde edilmiş lineer ve lineer olmayan çözümlerinin karşılaştırılması (9 ağ noktalı)

Tablo 5.23 Ankastre bağlanmış $[0/90]_9$ 9-katlı plâgın orta noktasında ($x=y=L/2, z=0$) 9-ağ noktalı melez eleman kullanarak elde edilen lineer ve lineer olmayan analiz sonuçlarının yük değişimine göre karşılaştırılması ($h/L=16/400=0.04$)

$P(lb/m^2)$	SEY W_{max} Lineer Çöz.	SEY W_{max} Lineer Ol. Çöz.	Norm	Yük Farkı
-0,01	-8,7077E-5	-8,7077E-5	1,0E-2	1,0E-7
-0,08	-6,9661E-4	-6,9662E-4	1,0E-1	1,0E-4
-0,50	-4,3538E-3	-4,3538E-3	1,0E-2	1,0E-3
-1,00	-8,7077E-3	-8,7077E-3	1,0E-2	1,0E-3
-2,00	-1,7415E-2	-1,7412E-2	1,0E-2	1,0E-3
-3,00	-2,6123E-2	-2,5738E-2	1,0E-3	1,0E-3
-4,00	-3,4831E-2	-3,4758E-2	1,0E-2	1,0E-3
-5,00	-4,3538E-2	-4,3440E-2	1,0E-2	1,0E-2
-6,00	-5,2246E-2	-5,1793E-2	1,0E-3	1,0E-3
-7,00	-6,0954E-2	-6,0854E-2	1,0E-2	1,0E-2
-10,0	-8,7077E-2	-6,4386E-2	1,0E-2	1,0E-2
-30,0	-0,2612	-0,2498E-2	1,0E-2	1,0E-2
-50,0	-0,4354	-0,1475	1,0E-2	1,0E-2

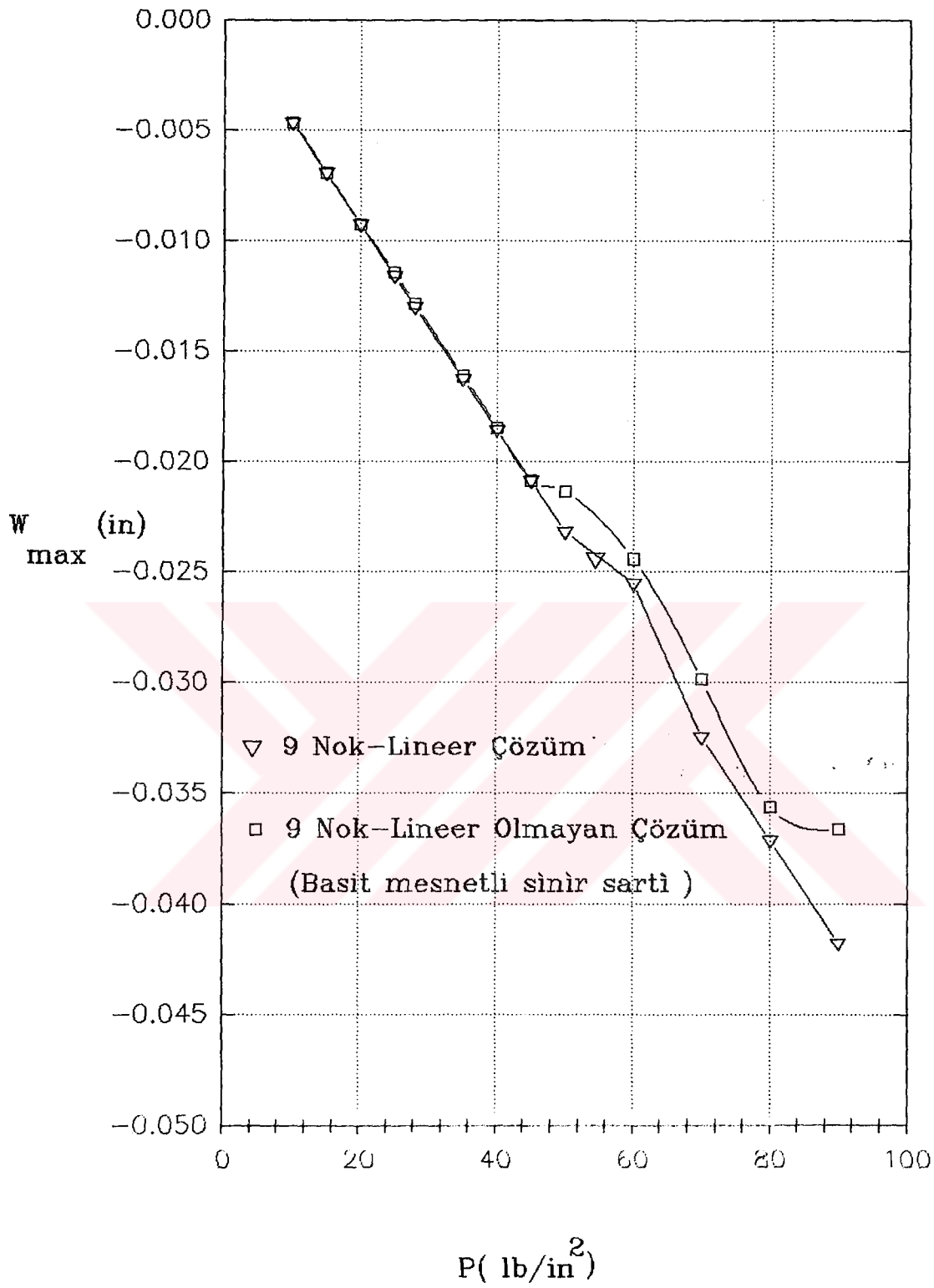


Grafik 5.18 0/90/0/90/0/90/0/90/0 ankastre bağlanmış plağın düzgün yayılı büyük-yüklemeye altındaki lineer ve lineer olmayan çözüm sonuçlarının karşılaştırılması ($h/L=0.04$) (9 ağ noktalı)

Tablo 5.24 Basit mesnetle bağlanmış düzgün yayılı yük altındaki $[0/90]_s$ 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plağın, 9-ağ noktalı melez eleman kullanılarak, plağın orta noktasında ($x=y=L/2, z=0$) lineer ve lineer olmayan analiz sonucunda elde edilen sehim değerlerinin yük artışına göre değişimi
($h_n = 11.11$, $h/L=100/400=0.25$, $W_R / W_C = 3.044$)

$P(lb/m^2)$	SEY W_{max} <i>Lineer Çözüm</i>	SEY W_{max} <i>Lineer Ol. Çöz.</i>	<i>Norm</i>	<i>Yük Farkı</i>
-10,0	-4,64355E-3	-4,64322E-3 (It no:2)	1,0E-3	1,0E-2
-15,0	-6,96533E-3	-6,95954E-3 (It no:2)	1,0E-3	1,0E-3
-20,0	-9,28711E-3	-9,28649E-3 (It no:2)	1,0E-3	1,0E-3
-25,0	-1,16088E-2	-1,14697E-2 (It no:13) -1,14690E-2 (It no:15)	1,0E-3 1,0E-3	1,0E-4 1,0E-6
-28,0	-1,30020E-2	-1,29943E-2 (It no:13) -1,28687E-2 (It no:32)	1,0E-2 1,0E-3	1,0E-3 1,0E-3
-30,0	-1,39306E-2	-8,92590E-3 (It no:26) -9,18987E-3 (It no:40)	1,0E-3 1,0E-3	1,0E-3 1,0E-5
-35,0	-1,62525E-2	-1,62127E-2 (It no:10) -1,61438E-2 (It no:6)	1,0E-3 1,0E-3	1,0E-3 1,0E-4
-40,0	-1,85742E-2	-1,84837E-2 (It no:10) -6,73266E-3 (It no:49)	1,0E-4 1,0E-3	1,0E-2 1,0E-2
-45,0	-2,08960E-2	-2,07652E-2 (It no:13) -2,08823E-2 (It no:24)	1,0E-2 1,0E-2	1,0E-3 1,0E-2
-50,0	-2,32177E-2	-2,32025E-2 (It no:13) -2,13595E-2 (It no:32)	1,0E-2 1,0E-3	1,0E-2 1,0E-3

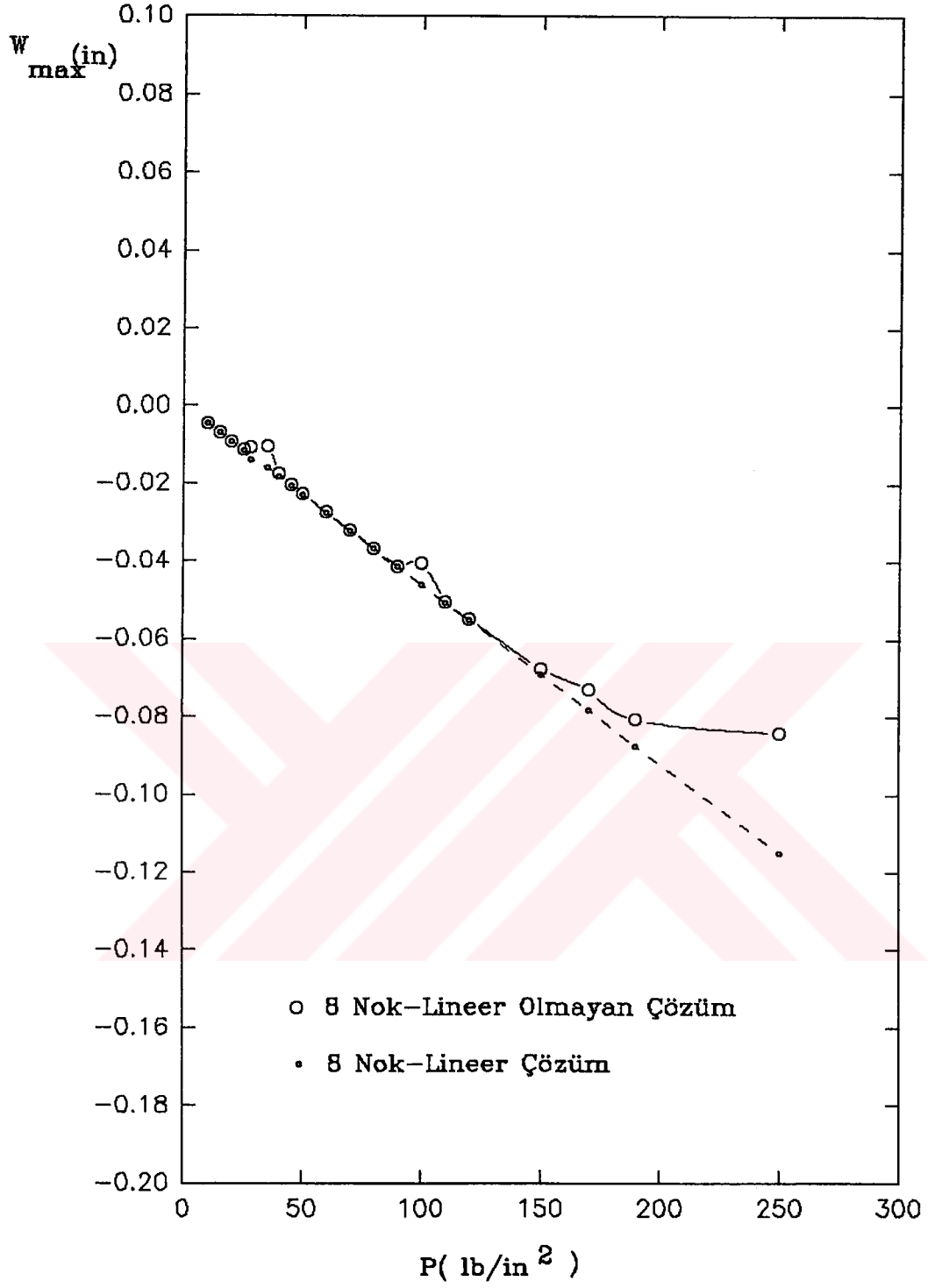
$P(lb/m^2)$	SEY W_{max} <i>Lineer Çözüm</i>	SEY W_{max} <i>Lineer Ol. Çöz.</i>	<i>Norm</i>	<i>Yük Farkı</i>
-60,0	-2,55395E-2	-2,50677E-2 (It no:12) -2,44458E-2 (It no:32)	1,0E-3 1,0E-2	1,0E-3 1,0E-2
-70,0	-3,25049E-2	-2,96674E-2 (It no:13) -2,98780E-2 (It no:32)	1,0E-3 1,0E-2	1,0E-3 1,0E-3
$P(lb/m^2)$	SEY W_{max} <i>Lineer Çözüm</i>	SEY W_{max} <i>Lineer Ol. Çöz.</i>	<i>Norm</i>	<i>Yük Farkı</i>
-80,0	-3,71484E-2	-3,51357E-2 (It no:13) -3,56240E-2 (It no:32)	1,0E-3 1,0E-3	1,0E-3 1,0E-3
-90,0	-4,17920E-2	-3,74855E-2 (It no:13) -3,66750E-2 (It no:21) -3,41470E-2 (It no:35)	1,0E-2 1,0E-2 1,0E-2	1,0E-3 1,0E-4 1,0E-3



Grafik 5.19 0/90/0/90/0/90/0/90/0 dizilmiş plağın, düzgün yayılı yük altındaki lineer ve lineer olmayan çözüm sonuçlarının karşılaştırılması (h/L=0.25) (9 ağ noktalı)

Tablo 5.25 $[0/90]_s$ 9-katlı kompozit plağın, 8-ağ noktalı melez eleman kullanılarak, plağın orta noktasında ($x=y=L/2$, $z=0$) lineer ve lineer olmayan analiz sonucunda elde edilen sehim değerlerinin yük artışına göre değişimi ($h_n = 11.11$, $h/L=100/400=0.25$)

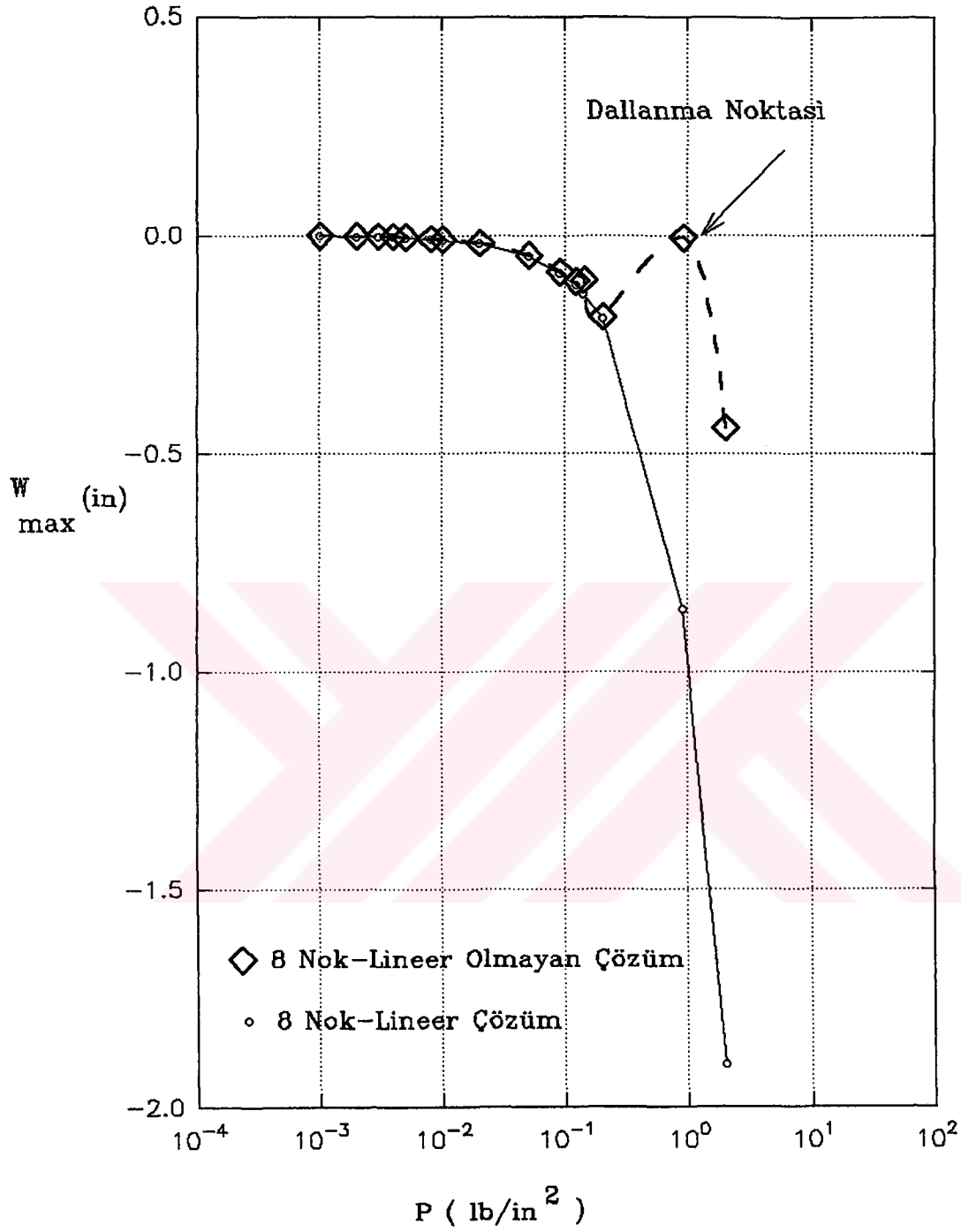
P (lb/in ²)	W_{max} (in) Lineer Çözüm	W_{max} (in) Lineer Olmayan Çözüm	Norm	Yük Farkı
-10,0	-4,60417E-3	-4,60118E-3	1,0E-2	1,0E-3
-15,0	-6,90626E-3	-6,89210E-3	1,0E-2	1,0E-3
-20,0	-9,20830E-3	-9,14750E-3	1,0E-2	1,0E-3
-25,0	-1,15104E-2	-1,12124E-2	1,0E-2	1,0E-3
-30,0	-1,38125E-2	-1,06190E-2	1,0E-2	1,0E-4
-35,0	-1,61146E-2	-1,02899E-2	1,0E-3	1,0E-4
-40,0	-1,84167E-2	-1,73270E-2	1,0E-2	1,0E-3
-45,0	-2,06619E-2	-2,02690E-2	1,0E-2	1,0E-3
-50,0	-2,30208E-2	-2,26945E-2	1,0E-2	1,0E-3
-60,0	-2,76250E-2	-2,74042E-2	1,0E-2	1,0E-3
-70,0	-3,22290E-2	-3,20400E-2	1,0E-2	1,0E-2
-80,0	-3,68330E-2	-3,66340E-2	1,0E-2	1,0E-2
-90,0	-4,14375E-2	-4,12230E-2	1,0E-2	1,0E-2
-100,0	-4,60417E-2	-4,05639E-2	1,0E-2	1,0E-3
-110,0	-5,06459E-2	-5,03439E-2	1,0E-2	1,0E-3
-120,0	-5,525500E-2	-5,47138E-2	1,0E-2	1,0E-2
-150,0	-6,90626E-2	-6,75711E-2	1,0E-2	1,0E-2
-170,0	-7,82709E-2	-7,30206E-2	1,0E-3	1,0E-4
-190,0	-8,74793E-2	-8,06892E-2	1,0E-2	1,0E-3
-250,0	-0,115104	-8,41197E-2	1,0E-2	1,0E-2



Grafik 5.20 0/90/0/90/0/90/0/90/0 dizilmiş plağın düzgün yayılı yük altındaki lineer ve lineer olmayan çözüm sonuçlarının karşılaştırılması ($h/L=0.25$) (8 ağ noktalı)

Tablo 5.26 Basit mesnetle bağlanmış düzgün yaylı yük altındaki $[0/90]_s$ 8-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plağın, 9-ağ noktalı melez eleman kullanılarak, plağın orta noktasında ($x=y=L/2$, $z=0$) lineer ve lineer olmayan analiz sonucunda elde edilen sehim değerlerinin yük artışına göre değişimi
($h_n = 0.088$, $h/L=0.8/400=0.002$)

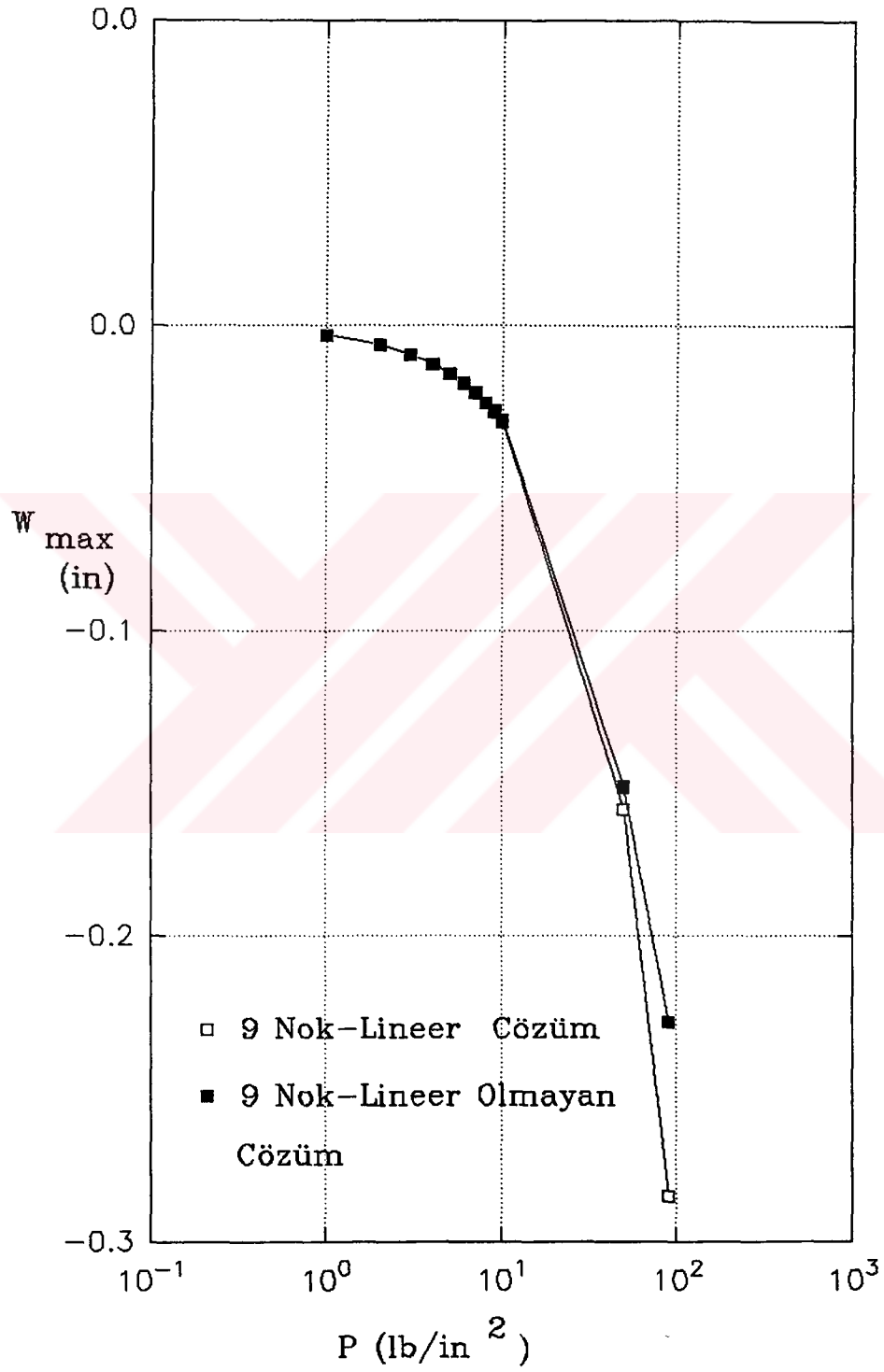
P (lb/in ²)	W_{max} (in) Lineer Çözüm	W_{max} (in) Lineer Olmayan Çözüm	Norm	Yük Farkı
-0,001	-9,51002E-4	-9,50942E-4	1,0E-2	1,0E-4
-0,002	-1,90200E-3	-1,90142E-3	1,0E-2	1,0E-4
-0,003	-2,85290E-3	-2,84243E-3	1,0E-2	1,0E-5
-0,004	-3,80400E-3	-3,11907E-3	1,0E-2	1,0E-4
-0,005	-4,75500E-3	-4,66208E-3	1,0E-2	1,0E-5
-0,008	-7,60775E-3	-7,60044E-3	1,0E-2	1,0E-5
-0,010	-9,50969E-3	-9,46116E-3	1,0E-2	1,0E-4
-0,020	-1,90200E-2	-1,89942E-2	1,0E-2	1,0E-3
-0,050	-4,75500E-2	-4,62651E-2	1,0E-2	1,0E-3
-0,090	-8,55900E-2	-8,52990E-2	1,0E-2	1,0E-3
-0,120	-0,11412	-0,10628	1,0E-2	1,0E-2
-0,140	-0,13314	-0,10229	1,0E-3	1,0E-2
-0,200	-0,19020	-0,18689	1,0E-2	1,0E-2
-0,900	-0,85590	-6,24120E-3 (katılaşma)	1,0E-2	1,0E-3
-2,000	-1,90200	-0,4417 (katılaşma)	1,0E-2	1,0E-2



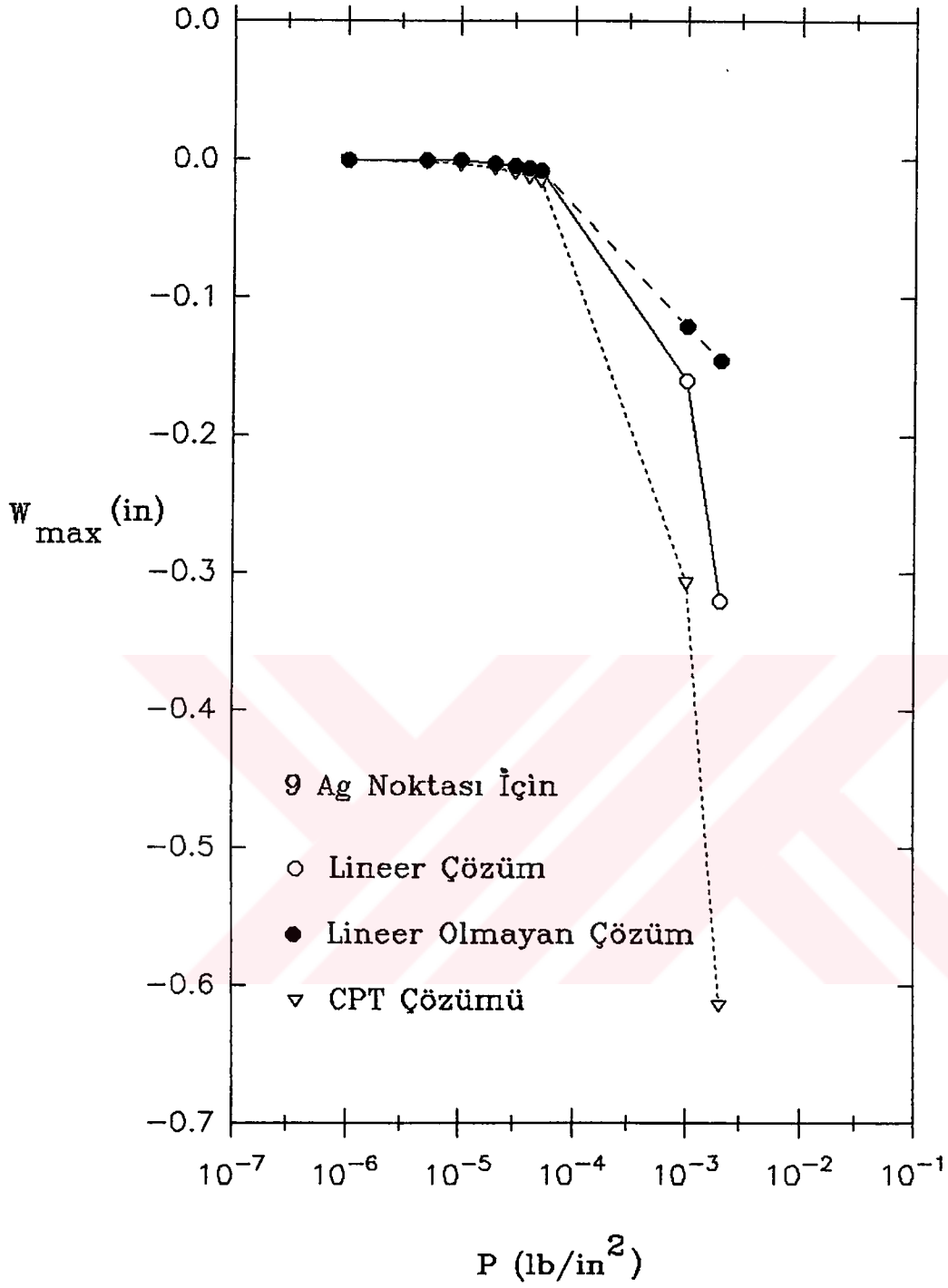
Grafik 5.21 0/90/0/90/0/90/0/90/0 dizilmiş plağın büyük-düzgün yayılı yük altındaki lineer ve lineer olmayan çözüm sonuçlarının karşılaştırılması ($h/L=0.002$) (8 ağ noktalı)

Tablo 5.27 $[0/90]_s$ 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plağın, 9-ağ noktalı melez eleman kullanılarak, plağın orta noktasında ($x=y=L/2$, $z=0$) lineer ve lineer olmayan analiz sonucunda elde edilen sehim değerlerinin yük artışına göre değişimi ($h_a = 4.45$, $h/L=40/400=0.1$, $W_R / W_C = 0.7063$)

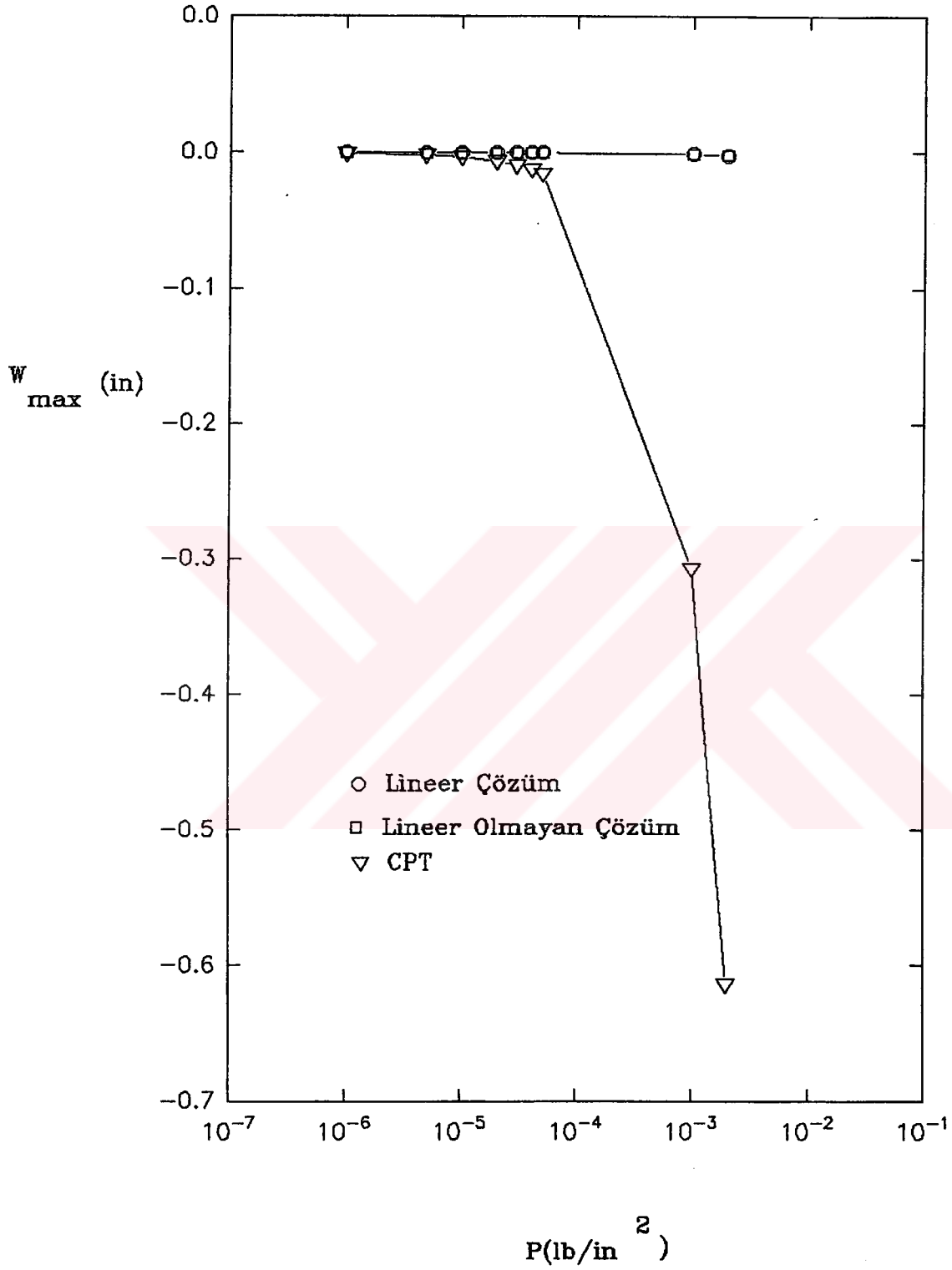
P (lb/in ²)	W_{max} (in) Lineer Çözüm	W_{max} (in) Lineer Olmayan Çözüm	Norm	Yük Farkı
-1,00	-3,16817E-3	-3,16803E-3	1,0E-2	1,0E-4
-2,00	-6,33635E-3	-6,33380E-3	1,0E-2	1,0E-3
-3,00	-9,50453E-3	-9,50035E-3	1,0E-2	1,0E-2
-4,00	-1,26727E-2	-1,26696E-2	1,0E-2	1,0E-3
-5,00	-1,58409E-2	-1,58346E-2	1,0E-2	1,0E-3
-6,00	-1,90090E-2	-1,88101E-2	1,0E-3	1,0E-2
-7,00	-2,21772E-2	-2,20295E-2	1,0E-2	1,0E-2
-8,00	-2,53454E-2	-2,52908E-2	1,0E-2	1,0E-5
-9,00	-2,85135E-2	-2,84959E-2	1,0E-2	1,0E-2
-10,0	-3,16215E-2	-3,10308E-2	1,0E-2	1,0E-2
-50,0	-0,15841	-0,15117	1,0E-2	1,0E-1
-90,0	-0,28513	-0,22824	1,0E-2	1,0E-2



Grafik 5.22 0/90/0/90/0/90/0/90/0 dizilmiş plağın düzgün yayılı yük altındaki lineer ve lineer olmayan çözüm sonuçlarının karşılaştırılması ($h/L=0.1$) (9 ağ noktalı)



Grafik 5.23 0/90/0/90/0/90/0/90/0 dizilmiş plağın düzgün yayılı yük altındaki lineer ve lineer olmayan çözüm sonuçlarının karşılaştırılması (h/L=0.002) (9 ağ noktalı)



Grafik 5.24 0/90/0/90/0/90/0/90/0 dizilmiş plağın küçük-düzgün yayılı yük altındaki lineer ve lineer olmayan çözüm sonuçlarının karşılaştırılması ($h/L=0.002$) (8 ağ noktalı)

Tablo 5.28 [0/90]_s 9-katlı simetrik kompozit plağın , 8 ve 9 ağ noktalı, melez ağ elemanlarını lineer ve lineer olmayan analizde kullanarak elde edilen sehım değerlerinin yük artışına göre değişimi

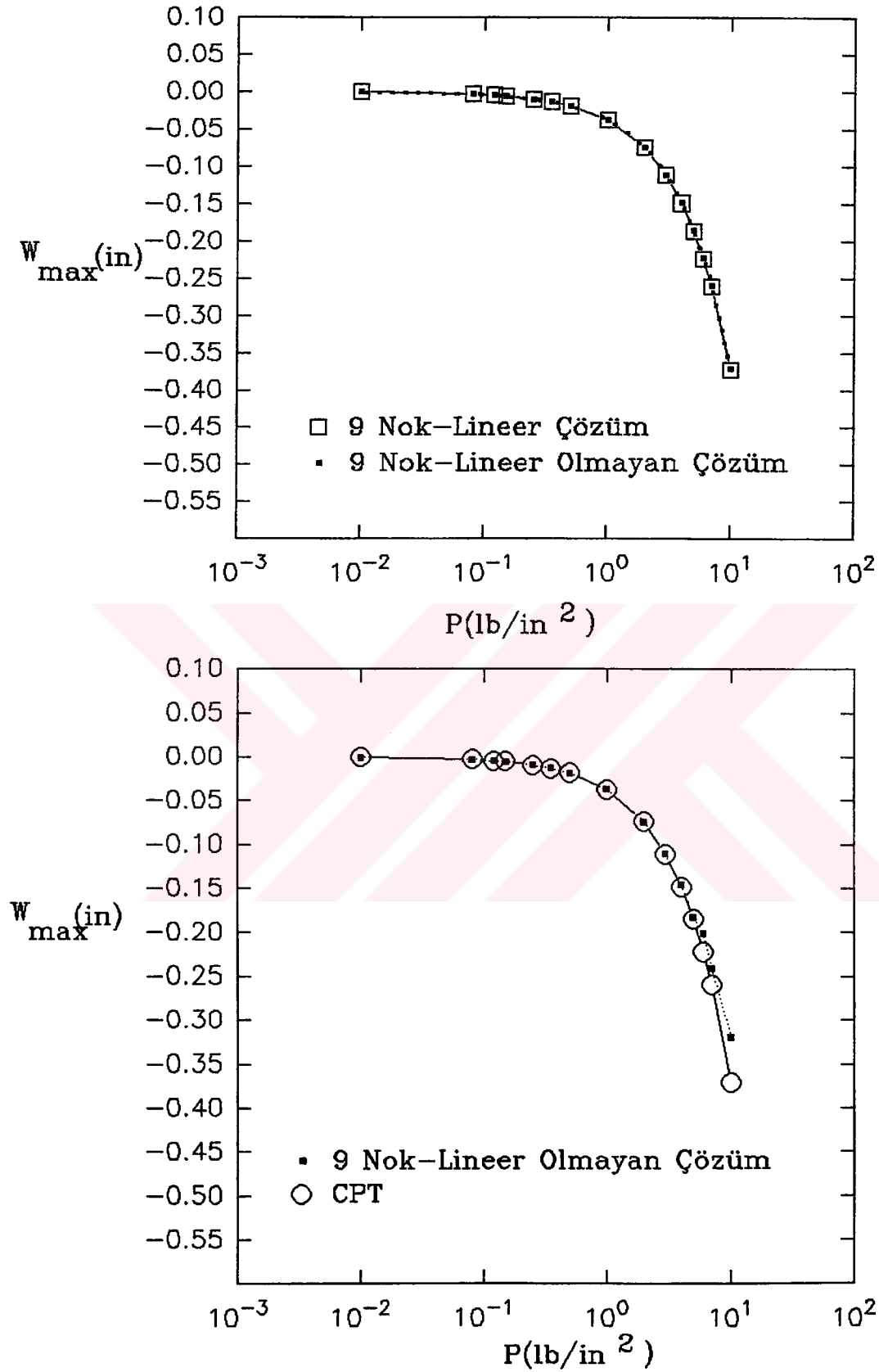
$h_a = 0.088$, $h/L=0.8/400=0.002$, $W_R / W_C = 0.5225$

P (lb/in ²)	$W_{\max}$ (in) Linear Çözüm (9 Ağ nok.)	$W_{\max}$ (in) Linear Olmayan Çözüm (9 Ağ nok.)	$W_{\max}$ (in) CPT	Norm (9 Ağ nok.)	Yük Farkı (9 Ağ nok.)	$W_{\max}$ (in) Linear Çözüm (8 Ağ nok.)	$W_{\max}$ (in) Linear Olmayan Çözüm (8 Ağ nok.)	Norm (8 Ağ nok.)	Yük Farkı (8 Ağ nok.)
-0,000001	-1,60415E-4	-1,60412E-4 (lt no:4)	-3,0695E-4	1,0E-1	1,0E-6	-0,51002E-7 (lt no:2)	-0,51002E-7 (lt no:2)	1,0E-1	1,0E-7
-0,000005	-8,02051E-4	-8,02078E-4 (lt no:8)	-1,53475E-3	1,0E-1	1,0E-3	-4,75500E-6 (lt no:2)	-4,75500E-6 (lt no:2)	1,0E-1	1,0E-6
-0,000010	-0,16041E-3	-0,16095E-3 (lt no:1)	-2,96719E-3	1,0E-3	1,0E-6	-9,51002E-6 (lt no:2)	-9,51002E-6 (lt no:2)	1,0E-1	1,0E-6
-0,000020	-3,20821E-3	-3,20829E-3 (lt no:4) -3,2777E-3 (lt no:20)	-6,13900E-3	1,0E-1 1,0E-3	1,0E-4 1,0E-5	-1,90200E-5 (lt no:2)	-1,90200E-5 (lt no:2)	1,0E-1	1,0E-6
-0,000030	-4,81232E-3	-4,81176E-3 (lt no:5) -2,20240E-3 (lt no:25)	-9,20850E-3	1,0E-1 1,0E-3	1,0E-5 1,0E-3	-2,85305E-5 (lt no:2)	-2,85305E-5 (lt no:2)	1,0E-1	1,0E-6
-0,000040	-6,41642E-3	-6,41518E-3 (lt no:2) -6,41400E-3 (lt no:6)	-1,22780E-2	1,0E-1 1,0E-1	1,0E-4 1,0E-3	-3,80400E-5 (lt no:2)	-3,80400E-5 (lt no:2)	1,0E-1	1,0E-5
-0,000050	-8,02052E-3	-8,01745E-3 (lt no:2) -8,01480E-3 (lt no:6)	-1,53470E-2	1,0E-1 1,0E-1	1,0E-4 1,0E-2	-4,75500E-5 (lt no:2)	-4,75500E-5 (lt no:2)	1,0E-1	1,0E-5
-0,001000	-0,16041	-0,12061 (lt no:2)	-0,30695	1,0E-1	1,0E-2	-9,51002E-4	-9,50940E-4 (lt no:2)	1,0E-2	1,0E-4
-0,002000	-0,32082	-0,14587 (lt no:4)	-0,61390	1,0E-1 1,0E-2	1,0E-3 1,0E-3	-1,90200E-3	-1,90139E-3 (lt no:6)	1,0E-2	1,0E-4

Tablo 5.29 $[0/90]_9$ 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plağın, 9-ağ noktalı melez eleman kullanılarak, plağın orta noktasında ($x=y=L/2, z=0$) lineer ve lineer olmayan analiz sonucunda elde edilen sehim değerlerinin yük artışına göre değişimi
($h_n = 1.78$, $h/L=16/400=0.04$ $W_R / W_C = 1.0049$)

P (lb/in ²)	W_{max} (in) Lineer Çözüm	W_{max} (in) Lineer Olmayan Çözüm	W_{max} (in) CPT	Norm	Yük Farkı
-0,01	-3,72749E-4	-3,72749E-4 (It no:3)	-3,70890E-4	1,0E-1	1,0E-6
-0,08	-2,98199E-3	-2,98199E-3 (It no:1) -2,98199E-3 (It no:5)	-2,96719E-3	1,0E-2 1,0E-2	1,0E-4 1,0E-4
-0,12	-4,47299E-3	-4,47298E-3 (It no:1) -4,47297E-3 (It no:6)	-4,45079E-3	1,0E-1 1,0E-2	1,0E-4 1,0E-3
-0,15	-5,59125E-3	-5,59122E-3 (It no:1) -5,59118E-3 (It no:7)	-5,56349E-3	1,0E-1 1,0E-2	1,0E-3 1,0E-3
-0,25	-9,31874E-3	-9,31850E-3 (It no:2) -9,31771E-3 (It no:10)	-9,27249E-3	1,0E-1 1,0E-3	1,0E-3 1,0E-3
-0,35	-1,30462E-2	-1,30455E-2 (It no:2) -1,30451E-2 (It no:4)	-1,29814E-2	1,0E-1 1,0E-1	1,0E-3 1,0E-6
-0,50	-1,86374E-2	-1,86353E-2 (It no:2) -1,86311E-2 (It no:8)	-1,85449E-2	1,0E-1 1,0E-2	1,0E-3 1,0E-2

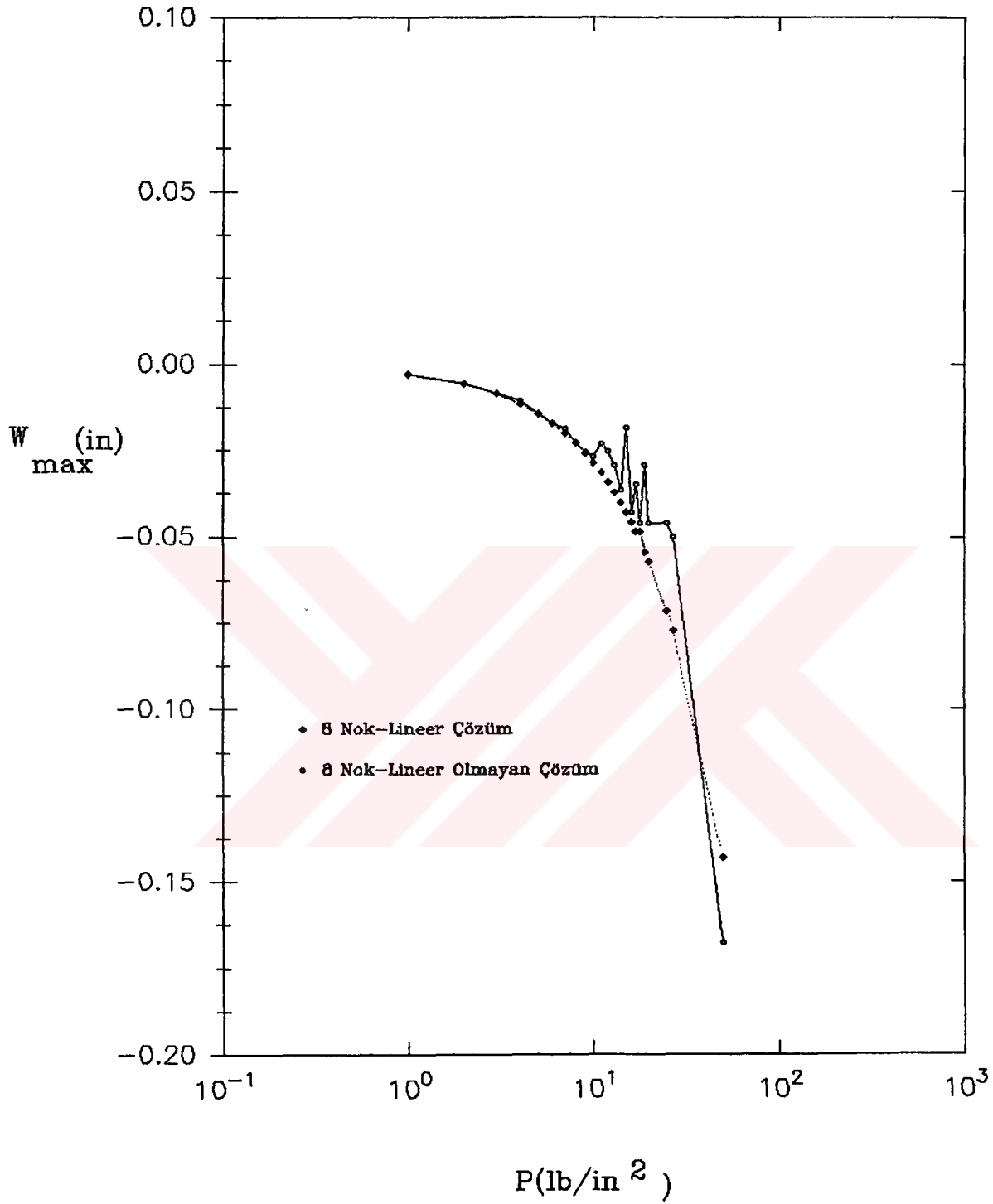
P (lb/in ²)	W _{max} (in) Lineer Çözüm	W _{max} (in) Lineer Olmayan Çözüm	W _{max} (in) CPT	Norm	Yük Farkı
-1,00	-3,72749E-2	-3,72640E-2 (It no:2) -3,70666E-2 (It no:10)	-3,70899E-2	1,0E-1 1,0E-2	1,0E-3 1,0E-2
-2,00	-7,45499E-2	-7,44000E-2 (It no:2) -7,42618E-2 (It no:8)	-7,41799E-2	1,0E-1 1,0E-2	1,0E-2 1,0E-2
-3,00	-0,111824	-0,11132 (It no:2) -0,11096 (It no:10)	-0,11127	1,0E-1 1,0E-2	1,0E-2 1,0E-2
-4,00	-0,14909	-0,14791 (It no:2) -0,14569 (It no:12)	-0,14835	1,0E-1 1,0E-2	1,0E-2 1,0E-1
-5,00	-0,18637	-0,18405 (It no:2) -0,18322 (It no:6)	-0,18544	1,0E-1 1,0E-1	1,0E-2 1,0E-2
-6,00	-0,22365	-0,21966 (It no:2) -0,20116 (It no:9)	-0,22253	1,0E-1 1,0E-2	1,0E-2 1,0E-1
-7,00	-0,26092	-0,25465 (It no:2) -0,24119 (It no:9)	-0,25962	1,0E-1 1,0E-2	1,0E-2 1,0E-2
-10,00	-0,37275	-0,35511 (It no:2) -0,31955 (It no:4)	-0,37089	1,0E-1 1,0E-2	1,0E-1 1,0E-2



Grafik 5.25 0/90/0/90/0/90/0/90/0 dizilmiş plağın düzgün yayılı küçük-yük altındaki linear ve linear olmayan çözüm sonuçlarının karşılaştırılması ($h/L=0.04$) (9 ağ noktalı)

Tablo 5.30 [0/ 90]_s 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plağın, 8-ağ noktalı melez eleman kullanılarak, plağın orta noktasında ($x=y=L/2$, $z=0$) lineer ve lineer olmayan analiz sonucunda elde edilen sehim değerlerinin yük artışına göre değişimi ($h_n = 4.45$, $h/L=40/400=0.1$)

P (lb/in ²)	W _{max} (in) Lineer Çözüm	W _{max} (in) Lineer Olmayan Çözüm	Norm	Yük Farkı
-1,00	-2,86340E-3	-2,86170E-3	1,0E-2	1,0E-4
-2,00	-5,72690E-3	-5,72450E-3	1,0E-2	1,0E-4
-3,00	-8,59038E-3	-8,58280E-3	1,0E-2	1,0E-3
-4,00	-1,14538E-2	-1,07290E-2	1,0E-2	1,0E-2
-5,00	-1,43170E-2	-1,42780E-2	1,0E-2	1,0E-3
-6,00	-1,71807E-2	-1,70440E-2	1,0E-2	1,0E-3
-7,00	-2,00442E-2	-1,87260E-2	1,0E-2	1,0E-3
-8,00	-2,29076E-2	-2,27090E-2	1,0E-2	1,0E-2
-9,00	-2,57711E-2	-2,54380E-2	1,0E-2	1,0E-3
-10,0	-2,86340E-2	-2,67300E-2	1,0E-2	1,0E-3
-11,0	-3,14981E-2	-2,31790E-2	1,0E-2	1,0E-4
-12,0	-3,43615E-2	-2,53750E-2	1,0E-2	1,0E-4
-13,0	-3,72249E-2	-2,93717E-2	1,0E-2	1,0E-3
-14,0	-4,00884E-2	-3,64732E-2	1,0E-2	1,0E-3
-15,0	-4,29519E-2	-1,84200E-2	1,0E-2	1,0E-3
-16,0	-4,58150E-2	-4,28490E-2	1,0E-2	1,0E-2
-17,0	-4,84363E-2	-3,50025E-2	1,0E-2	1,0E-3
-18,0	-4,86788E-2	-4,59530E-2	1,0E-2	1,0E-2
-19,0	-5,44057E-2	-2,93500E-2	1,0E-3	1,0E-3
-20,0	-5,72690E-2	-4,62239E-2	1,0E-2	1,0E-3
-25,0	-7,15865E-2	-4,61458E-2	1,0E-2	1,0E-2
-27,0	-7,73135E-2	-5,02200E-2	1,0E-2	1,0E-2
-50,0	-0,14317	-0,16786E-1 (Katılma)	1,0E-3	1,0E-2



Grafik 5.26 0/90/0/90/0/90/0/90/0 basit mesnetli plağın lineer ve lineer olmayan çözüm sonuçlarının karşılaştırılması ($h/L=0.1$) (8 ağ noktalı)

Tablo 5.31 $[0/90]_9$ 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plağın, 9-ağ noktalı melez eleman kullanılarak, plağın orta noktasında ($x=y=L/2$, $z=0$) değişik yüklemeler için lineer ve lineer olmayan analiz sonucunda elde edilen sehim değerleri

$$P = -600 \text{ lb/in}^2$$

h/L	H ve h_T/L	W (SEY) Lineer Çözüm	W (SEY) Lineer Olmayan Çözüm	W (SEY) İterasyon Sayısı :10	W (SEY) İterasyon Sayısı :15	KPT Teorik Çözüm
1.0	44.44 400/400	-4,677E-2	-4,6774E-2	-4,6766E-2	-4,6755E-2	-1,4300E-3
0.5	22.22 200/400	-0,1028	-0,1028	-0,1027	-0,1026	-1,4400E-2
0.25	11.11 100/400	-0,2763	-0,2762	-0,2744	-0,2717	-9,1520E-2
0.175	7.78 70/400	-0,5247	-0,5245	-0,5103	-0,4914	-0,2665
0.1	4.45 40/400	-1,7181	-1,7083	-1,2235	-0,9247	-1,4243
0.06	2.67 24/400	-5,4520	-4,8737	-1,2053	-0,7466	-6,5937
0.04	1.78 16/400	-12,74	-7,1325	-0,8812	-0,5019	-22,25
0.02	0.89 8/400	-41,49	-2,8130	-0,3943	-0,1485	-178,03

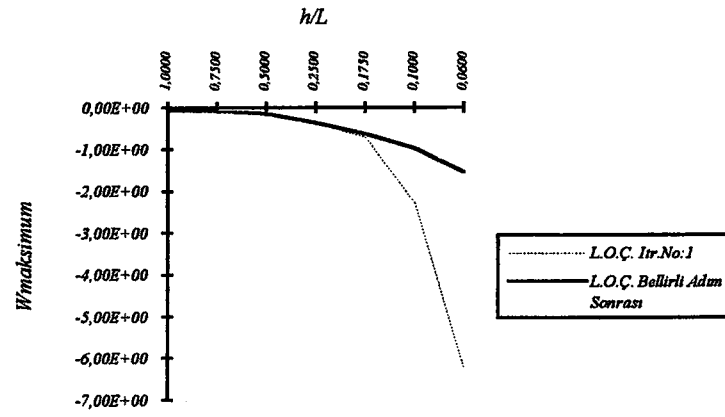
$$P = -800 \text{ lb/in}^2$$

h/L	H	W (SEY) Lineer Çözüm	W (SEY) Lineer Olmayan Çözüm	W (SEY) Belirli Adım Sonrası	Teorik Çözüm
1.0	44.44 400/400	-6,2365E-2	-6,2365E-2	-6,2320E-2	-1,4300E-3
0.75	33.33 300/400	-8,5315E-2	-8,5314E-2	-8,5197E-2	-1,4400E-2
0.50	22.22 200/400	-0,1371	-8,5314E-2	-0,1366	-9,1520E-2
0.25	11.11 100/400	-0,3683	-0,1371	-0,3627	-0,2665
0.175	7.78 70/400	-0,6997	-0,3682	-0,6253	-1,4243
0.1	4.45 40/400	-2,2907	-0,6992	-0,9694	-6,5937
0.06	2.67 24/400	-7,2694	-6,2085	-1,5371	-22,25

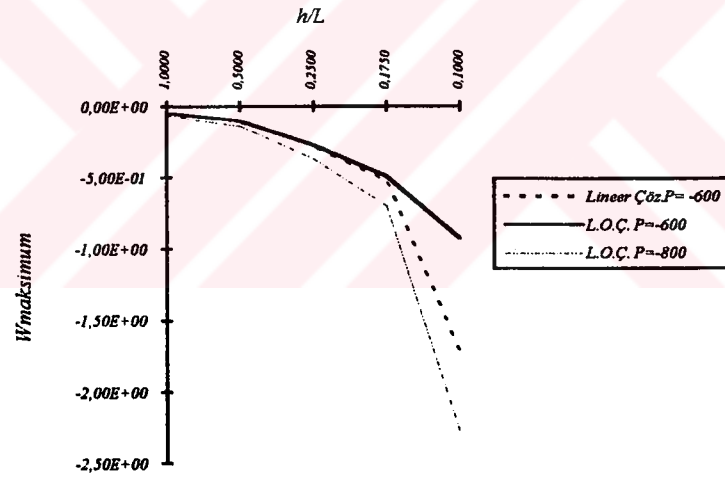
Tablo 5.32 $[0/90]_9$ 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plağın, 9-ağ noktalı melez eleman kullanılarak, plağın orta noktasında ($x=y=L/2, z=0$) $P = -800 \text{ lb/in}^2$ değeri için elde edilen lineer ve lineer olmayan analizin h/L oranına göre değişimi

$P = -800 \text{ lb/in}^2$

h/L	H ve h_T/L	W (SEY) Lineer Çözüm	W (SEY) Lineer Olmayan Çözüm	Lineer Olmayan Çözüm İçin Basamak Sayısı	W (SEY)	KPT Teorik Çözüm
1.0	44.44 400/400	-6,2370E-2	-6,2370E-2	13	-6,2370E-2	-1,9067E-3
0.75	33.33 300/400	-8,5331E-2	-8,5330E-2	13	-8,5322E-2	-4,5196E-3
0.5	22.22 200/400	-0,13722	-0,1372	12	-0,1372	-1,5253E-2
0.25	11.11 100/400	-0,3715	-0,3715	12	-0,3707	-0,1220
0.175	7.78 70/400	-0,7171	-0,7170	12	-0,7106	-0,3554
0.1	4.45 40/400	-2,5345	-2,5307	12	-2,1809	-1,8990
0.06	2.67 24/400	-9,6862	-9,2841	10	-4,100	-8,7917
0.05	2.22 20/400	-16.110	-13.903	9	-4.085	-15.294
0.04	1.78 16/400	-29,819	-17,048	9	-4,3526	-29,67
0.03	1.33 12/400	-67.43	-11.24	9	-4.500	-71.129
0.025	1.11 10/400	-111.58	-8.052	8	-3.90	-122.36
0.02 P= -800	0.89 8/400	-205,365	-6,9056	4	-62,92	-237,37
0.02 P= -300	0.89 8/400	-77.00	-5.9300	9	-2.870	-89.015



a) $P = -800 \text{ lb/in}^2$



b) $P = -600 \text{ lb/in}^2$, $P = -800 \text{ lb/in}^2$

Grafik 5.27 Lineer ve lineer olmayan çözümlerdeki sehım değerlerinin düzgün yayılı yük değerine göre değişimi

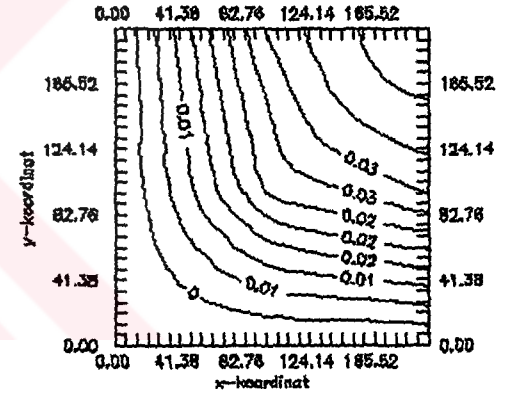
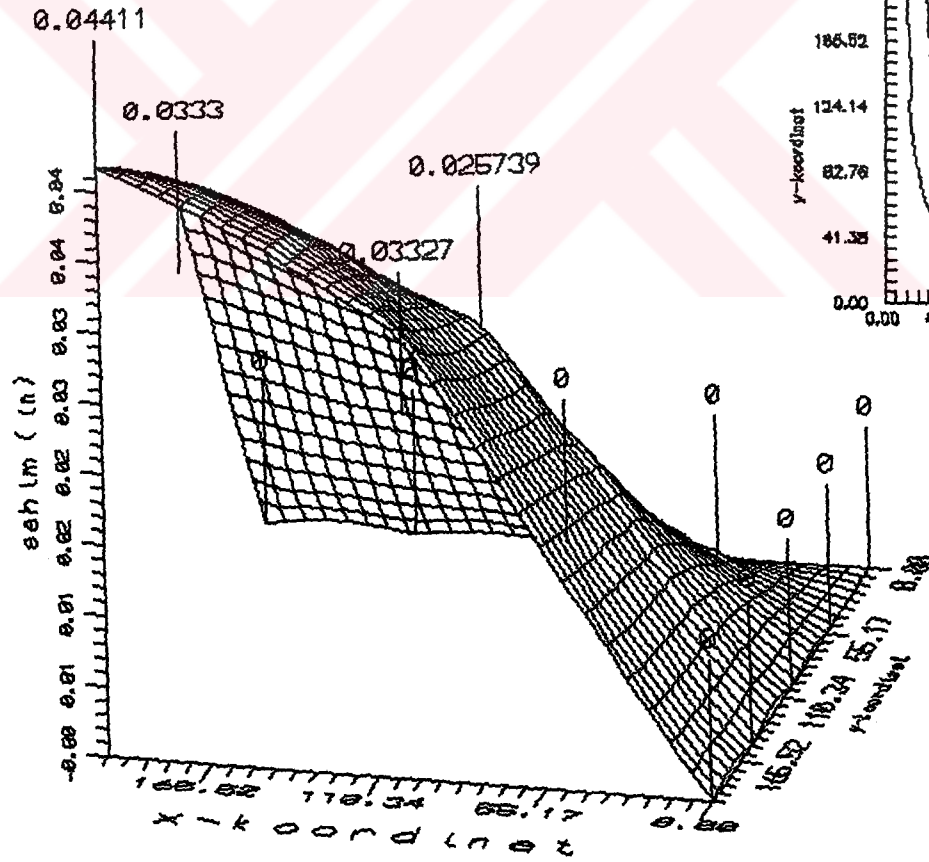
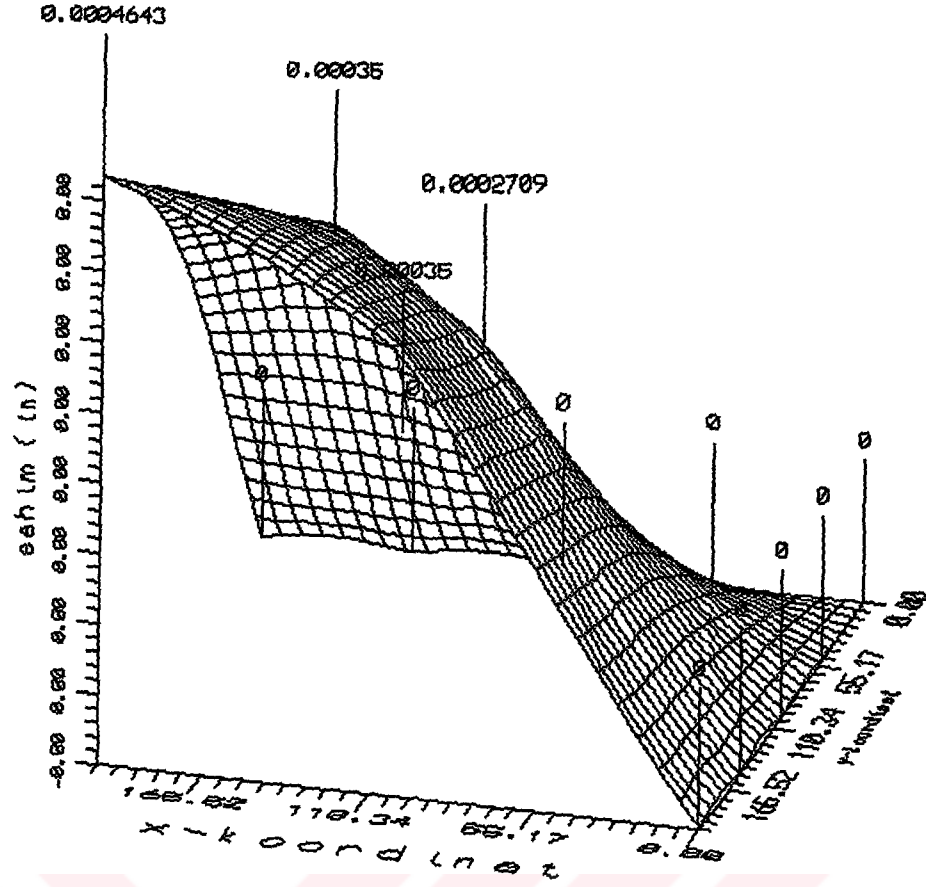
Tablo 5.33 $[0/90]_9$ 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plağın, 8-ağ noktalı melez eleman kullanılarak plağın orta noktasında ($x=y=L/2, z=0$) lineer ve lineer olmayan analiz sonuçlarının karşılaştırılması ile elde edilen M_x , M_y gerilme dağılımları ($h_n=4.45$ $h_T=40$ $h/L=40/400=0.1$)

Lineer SEY Çözümü			Lineer Olmayan SEY Çözümü		
P-Düzenli Dağılmış Yük Miktarı	M_x	M_y	P-Düzenli Dağılmış Yük Miktarı	M_x	M_y
-10	-0,1287E6	-0,7925E5	-10	-0,1287E6	-0,7925E5
-100	-0,1287E7	-0,7925E6	-100	-0,1286E7	-0,7923E6
-300	-0,3862E7	-0,2377E7	-300	-0,3854E7	-0,2372E7
-400	-1,1454E7	-0,3170E7	-400	-0,5131E7	-0,3157E7
-600	-0,7723E7	-0,4754E7	-600	-0,7664E7	-0,4714E7
-900	-0,1158E8	-0,7132E7	-900	-0,1139E8	-0,6994E7
-1000	-0,1287E8	-0,7925E7	-1000	-0,1260E8	-0,7736E7
-2000	-0,2574E8	-0,1585E8	-2000	-0,2365E8	-0,1441E8
-3000	-0,3862E8	-0,2377E8	-3000	-0,3206E8	-0,1924E8
-4000	-0,5148E8	-0,3170E8	-4000	-0,3734E8	-0,2191E8
-5000	-0,6436E8	-0,3962E8	-5000	-0,3957E8	-0,2248E8

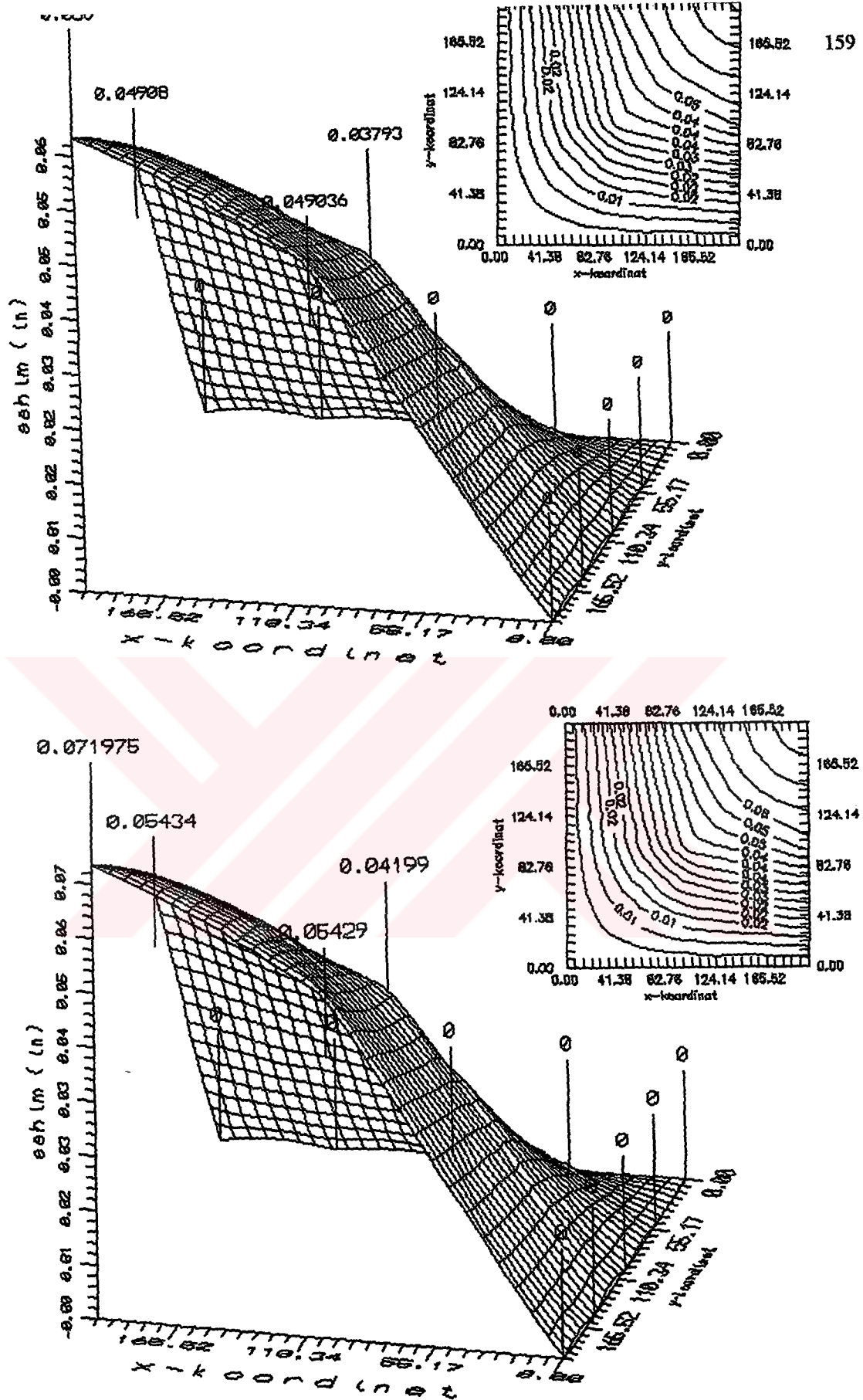
* Her iki çözümde M_{xy} değerleri sıfırdır.

Tablo 5.34 $[0/90]_9$ 9-katlı çaprazlama dizilmiş kompozit plağın, 8-ağ noktalı melez eleman kullanılarak, plağın orta noktasında ($x=y=L/2, z=0$) lineer ve lineer olmayan çözüm sonucunda elde edilen σ_{xz} , σ_{yz} enine gerilme dağılımları ($h_n=4.45$ $h_T=40$, $h/L=40/400=0.1$)

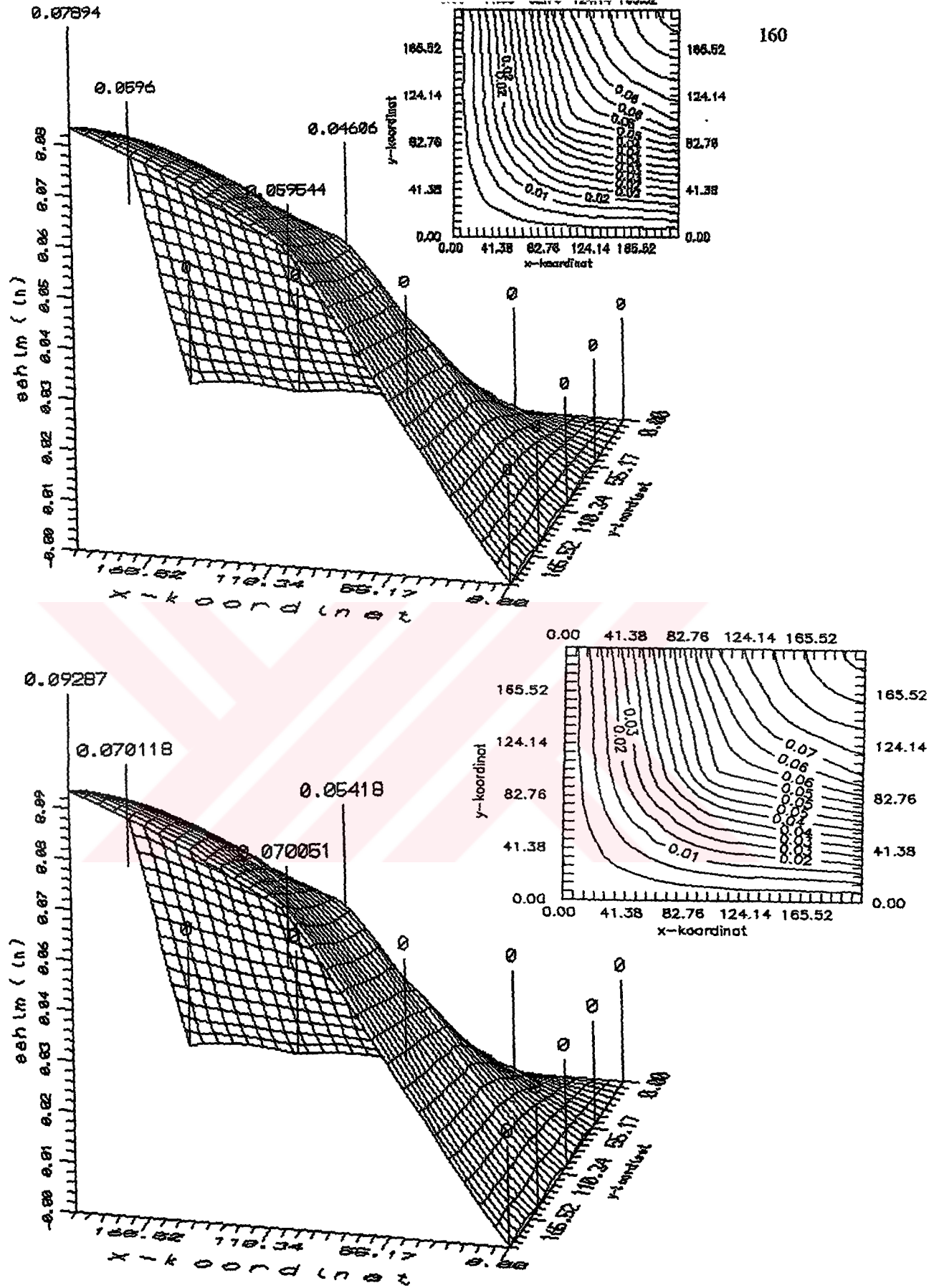
Lineer - SEY Çözümü			Lineer Olmayan - SEY Çözümü		
P: Birim Yüzeye Yayılı Düzenli Dağılmış Yük Miktarı	σ_{xz}	σ_{yz}	P: Birim Yüzeye Yayılı,Düzenli Dağılmış Yük Miktarı	σ_{xz}	σ_{yz}
-10	-0,1274E4	-0,1269E4	-10	-0,1274E4	-0,1269E4
-100	-0,1274E5	-0,1269E5	-100	-0,1274E5	-0,1268E5
-300	-0,3823E5	-0,3807E5	-300	-0,3812E5	-0,3796E5
-400	-0,5097E5	-0,5077E5	-400	-0,5072E5	-0,5050E5
-600	-0,7646E5	-0,7615E5	-600	-0,7561E5	-0,7526E5
-900	-0,1147E6	-0,1142E6	-900	-0,1118E6	-0,1112E6
-1000	-0,1274E6	-0,1269E6	-1000	-0,1235E6	-0,1228E6
-2000	-0,2548E6	-0,2538E6	-2000	-0,2248E6	-0,2227E6
-3000	-0,3823E6	-0,3807E6	-3000	-0,2879E6	-0,2833E6
-4000	-0,5097E6	-0,5076E6	-4000	-0,3061E6	-0,2974E6
-5000	-0,6372E6	-0,6346E6	-5000	-0,2804E6	-0,2661E6



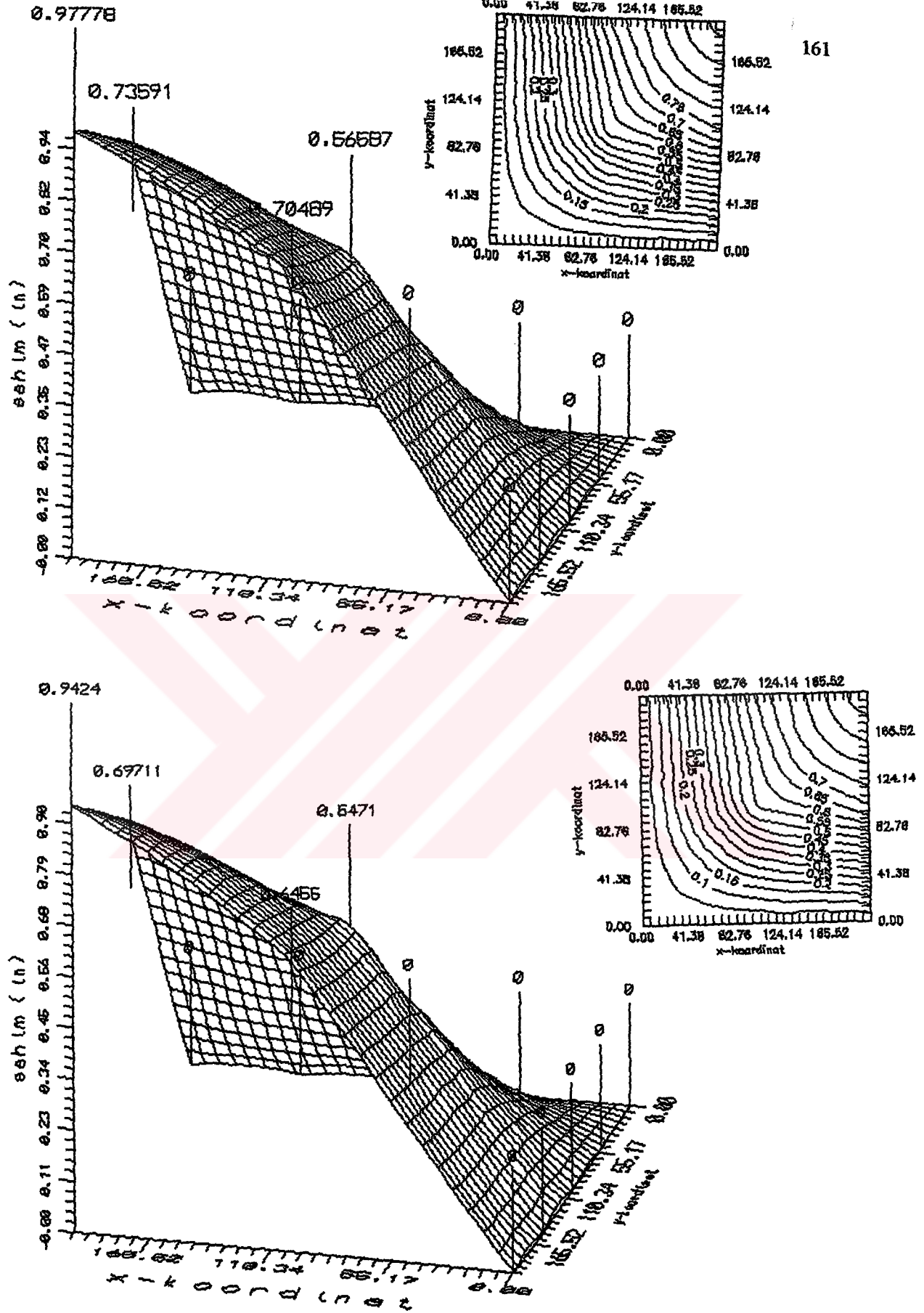
Grafik 5.29 $P = -1 \text{ lb/in}^2$ ve $P = -95 \text{ lb/in}^2$ için $[0/90]_9$ dizili, basit mesnetle bağlanmış plağın sehim dağılımlarının karşılaştırılması ($h_x = 11.11$, 9 katlı)



Grafik 5.30 $P = -140 \text{ lb/in}^2$ ve $P = -155 \text{ lb/in}^2$ için $[0/90]_s$ dizili, basit mesnetle bağlanmış plâğin sehim dağılımlarının karşılaştırılması ($h_s = 11.11$, 9 katlı)



Grafik 5.31 $P = -170 \text{ lb/in}^2$ ve $P = -200 \text{ lb/in}^2$ için $[0/90]_9$ dizili, basit mesnetle bağlanmış plâğin sehim dağılımlarının karşılaştırılması ($h_0 = 11.11$, 9 katlı)



Grafik 5.32 $P = -1500 \text{ lb/in}^2$ yük altındaki $[0/45]_3$ 3 katlı ve $[0/45]_9$ 9 katlı, basit mesnetle bağlanmış plâgın sehim dağılımlarının karşılaştırılması ($h_0 = 11.11$)

6. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, kompozit yapıya sahip genellikle-ortotropik plakların statik analizi sonlu elemanlar yöntemi yardımıyla gerçekleştirilmiştir. Mindlin ve Kirchhoff teorilerinin kabülleri kullanarak hazırlanan yeni melez eleman tanımlamaları ile ince ve kalın plakların analizi aynı SEY kodu içinde gerçekleştirilmiştir. Ayrıca aynı plağın dayanıklılık testlerini de gerçekleştirebilmek amacıyla, düzlemsel gerilme analizini gerçekleştiren, ayrı bir bilgisayar kodu hazırlanarak kullanılmıştır.

İnce ve kalın kompozit plakların lineer ve lineer olmayan analizlerini gerçekleştirebilmek için Kirchhoff sınırlaması olarak bilinen (Kosmatka,1994) (Tessler,1983), γ_{sz} nin çevre sınırı boyunca değişiminin sıfır kabul edildiği şart, ağ elemanının kenarları boyunca sıfır yerine sabit bir değere eşitlenerek, Kirchhoff teorisinden Mindlin Teorisine geçiş yapılmıştır. Dörtgensel ağ elemanının kenarları boyunca Kirchhoff Teorisinin geliştirilmiş kabülleri ve 12 ağ noktalı kübik, 8 ağ noktalı kuadratik elemanları kullanılarak yeni melez eleman hazırlanmıştır. Plağın sehimini 12 ağ noktalı ve rotasyonlarını 8 ağ noktalı elemanlar ile tanımlayarak, her ağ elemanının dört kenarı için $\gamma_{sz,s} = (w_{,s} - \theta_n)_{,s}$ ve $\gamma_{sz,ss} = (w_{,s} - \theta_n)_{,ss}$ Kirchhoff sınırlamalarının sağlanılmasına çalışılmıştır. Böylece, sehim değerleri kübik, rotasyonlar ise kuadratik polinomlarla tanımlanarak polinomların Kirchhoff sınırlamaları denklemlerinde, dereceleri eşitlenmiştir. Daha önce yapılan çalışmalarda, kalın ve ince plakların analizini Mindlin Teorisi kabülleri çerçevesinde yapabilmek amacı ile, kayma gerilmelerinin elastisite matrisi, penaltı faktörü ile çarpılmaktaydı. Bu işlem ancak izotropik ve özellikle-ortotropik plaklar için de sınırlı bir alan içinde gerçekleştirilmektedir. Çünkü, özellikle-ortotropik plaklarda elastisite matrisinde, eğilme-genleme etkileşimine karşılık gelen B_{ij}

değerlerinin ve enine kayma gerilmelerine karşılık gelen sabitlerden G_{45} değerlerinin sıfır olması nedeniyle, denge denklemleri kayma kitlenmesini önleyici faktörün çözülebileceği şekle dönüşmüştür. Kayma kitlenmesini önleyici faktörler, özellikle-ortotropik plaklar için, silindirik eğilme ve simetri şartları içinde, kompozit plakların katları arasında gerilme ve yerdeğiştirme sınır şartları kullanılarak bu şartlar altında hesaplanabilmektedir. Kompozit plakların statik analizini genel bir yapıya oturtabilmek amacı ile her koşulda işlev görececek bir mekanizmanın hazırlanması gerekli olmuştur. Bu çalışma bu amaca yönelik olarak hazırlanmıştır.

Bu çalışmada ince/kalın izotropik ve kompozit plakların lineer ve lineer olmayan analizi ve son olarak da kırılma analizinin aynı koşullar içerisinde gerçekleştirilmesine çalışılmıştır. Genel çözüm amacı ile yeni melez eleman tanımlamaları yapılmış ve bu tanımlamalar 8 ve daha sonra ise 9 ağ noktalı eleman tanımlamaları ile ortak çözümlere sonuçlar karşılaştırılmıştır. Melez ağ elemanının kullanılması ile alınan sonuçlar, ince plak çözümü sırasında ortaya çıkan kayma kitlenmesinin ortadan kalktığını göstermiştir. Melez elemanın önce 8 daha sonra ise 9 ağ noktalı elemanlar ile ortak kullanılarak elde edilen çözümleri karşılaştırıldığında, 9 ağ noktalı tanımlamanın çok daha iyi sonuçlar verdiği görülmüştür. 9 ağ noktalı eleman tanımlamalarında ilk sekiz nokta için Kirchhoff kabülleri elemanın kenarları boyunca uygulanmış, dokuzuncu orta nokta tanımlamasında ise melez elemanın özelliğinden dolayı herhangi bir modifikasyona gidilmemiştir. Yerdeğiştirme vektör bileşenlerinden u, v, ϕ_x, ϕ_y , 8 veya 9 ağ noktalı elemanlar ile tanımlanırken yeni w^* , w ve rotasyonların ϕ_x, ϕ_y yeni ortak tanımlaması ile (melez eleman ağı) tanımlanmıştır. Melez eleman tanımlamaları ile kullanılan 9 ağ noktalı eleman 48 serbestlik derecesine sahiptir ve bu serbestlik derecelerinden 44 tanesi modifiye edilmiş özelliklere sahiptir. Yeni melez eleman 8 ağ noktalı eleman tanımlamaları ile kullanıldığı zaman ise 44 serbestlik derecesine sahiptir ve her ağ noktası kayma kitlenmesi için modifiye edilmiş şekliyle kullanılmaktadır. 9 ağ noktalı elemanın analiz sonuçlarını, 8 ağ noktalı elemana ait

sonuçlar ile karşılaştırdığımızda, 9 ağ noktalı elemanın linear sonuçlarının Navier seri çözüm sonuçlarına çok yaklaştığı ve kayma kitlenmesinin de ortadan kalktığı görülmüştür. Lineer olmayan çözümleri elde ederken, bu metodun kullanılması nedeni ile herhangi bir zorluk çıkmamış, kolaylıkla çözüme ulaşılmıştır. Sunulan çalışmada kullanılan melez eleman ağı, daha ilerki çalışmalarda da kullanılabilecek şekilde en genel hal göz önüne alınarak hazırlanmıştır. Sınır şartları da bu yeni elemana göre kod içinde yeniden düzenlenerek kullanılmıştır. Çalışmada, veri girişinin minimum ve basit düzeyde kalabilmesi ve hata olasılığını azaltabilmek amacıyla yönelik olarak, bu konuya ilişkin veri giriş dosyasında herhangi bir değişiklik yapılmamıştır. Genel olarak hangi sayıda ağ noktası ile çalışılıyorsa, onunla ilgili koordinatları vermek yeterli olmaktadır. Melez eleman ile ilgili hiçbir veri girilmemektedir. Girilen şartlar, kod içinde düzenlenmektedir. Bunun için 8 ve 9 ağ noktalı elemanların melez eleman ile kullanımı iki ayrı kod halinde *COMPAN*'nin modifikasyonu şeklinde hazırlanmıştır.

SEY sonuçları 2x2 eleman ağı kullanılarak, Navier seri çözüm sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Plâğın yalnızca dörtte biri simetri özelliğinden yararlanılarak çözülmüştür. Düzgün yayılı yüklemeye maruz kalmış plak, basit mesnetli ve ankastre sınır şartları ile tanımlanmıştır. Sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen çözümlerde, eleman ağı arttırıldıkça, doğru sonuca daha da yaklaşılmaktadır. Ghali ve Nevielle (1986)'nin plaklar için elde ettiği sonuçlar örnek olarak verilecek olursa, 2x2 eleman ağı için bulunan sehim değeri 0.00401, 6x6 için ise 0.00618 olarak bulunmuştur. Bu değerlerden de görüleceği gibi 2 ve 6 ağ elemanlı çalışma sonuçları arasındaki fark 0.00401 değeri için, 0.00157 gibi büyük bir değerdir. Yapılan bu çalışmada, ulaşılabilecek en iyi sonuca, 2x2 ağ elemanı kullanılarak ulaşılmaya çalışılmıştır. Seri çözüm ile elde edilen sonuçlara göre (Şekil 5.3), $\{M_x, M_y\}_1, \{M_x, M_{xy}\}_2, \{M_y, M_{xy}\}_3, \{M_{xy}\}_4$ değerleri sıfır olarak bulunmuştur. Sonlu elemanlar çözümü ile elde edilen sonuçlara bakıldığı zaman ise, bu değerlerin yakınsamadan dolayı, sıfıra yakın değerler olduğu görülmektedir. Bunun nedeni de,

daha önce açıklandığı gibi, sonlu elemanlar yönteminin, ayrılmış her eleman bölgesi için hesaplama yapabiliyor olması ve analiz sonuçlarının eleman ağ sayısına bağlı olmasıdır.

Plağa, küçük yükten başlanılarak, değişik q düzgün yayılı yük değerleri için yüklemeler yapılmıştır. Düzgün yayılı yüklemeler altında plağın davranışında belirlenmek istenenler, aşağıdaki şekilde özetlenmektedir:

- 1) Lineer ve lineer olmayan çözüm arasındaki farklılıkları ortaya çıkarabilmek,
- 2) Test edilen kompozit plağın, yüklemelere göre, plakta oluşan gerilme-genleme analizini ve plak üzerinde oluşturduğu dağılımını görebilmek,
- 3) Test edilen plağın, istenen özelliklere sahip olup olmadığına karar verebilmek, eğer değilse, yeni malzemeler ile testi yenilemek ve ayrıca ;
- 4) Test edilen kompozit plağın dayanıklılığını ölçebilmektir .

SEY kodunda bulunan sonuçların, kullanılan kırılma teorileri ile ilgili uygulamaları, test amacı ile kullandığımız $[0^\circ/90^\circ]_s$, 9 katlı kompozit plak için yapılmıştır. Plağın orta katının, orta noktasında birim genişlik için elde edilmiş N_x , N_y , N_{xy} , M_x , M_y , M_{xy} değerleri *COMPAN* ile elde edildikten sonra, *LAMINATE* kodu ile kırılma analizi için uygulamaya konmuştur. Bu testde iç yüklemelerin N_x , N_y , N_{xy} , M_x , M_y , M_{xy} değerlerinin lineer çözümle elde edilen değerleri kullanılmıştır. Çizilen, z koordinat- σ_x ve z -koordinat- ε_x grafikleri, kompozit plak kırıldıktan sonra elde edilen değerleri için çizilmiştir.

Lineer ve lineer olmayan çözümle elde edilmiş olan sehim ve moment değerleri Klasik Plak Teorisi kabülleri ile Navier metodunun kompozit plaklar için

geliştirilmiş seri çözümü ile (Reddy,1996) karşılaştırılmış sonuçlar Bölüm 5 içinde tablolar ve grafikler ile gösterilmiştir. Bu sonuçlardan da görüleceği üzere, lineer ve lineer olmayan sonuçlar arasında küçük fark vardır ve bu fark, yük değeri arttıkça büyümektedir. (NASA,1993) alınan sonuçlar bu paralelliktedir. Lineer olmayan sonuçları bulabilmek için, ilk kabul olarak, lineer sonuçlar alınmıştır. Bu nedenle sonuca, az iterasyon sayısı ile ulaşmak mümkün olmuştur.

Lineer olmayan çözüm sonuçlarında yük çok arttığı zaman veya plak çok incelendiği zaman yapısal olarak bazı kararsızlıklar (structural instabilities) görülmüştür. Bu kararsızlıklar yük-yerdeğiştirme grafiklerinde açıkça görülmektedir. Yük-yerdeğiştirme grafiğinde, yük değeri belli bir değere ulaştıktan sonra, ani düşüş kaydetmeye başlamakta veya azalma eğilimi göstermekte, daha sonra tekrar yükselmektedir. Lineer olmayan çözüm, lineer çözüme göre daha hassas bir yapıya sahip olduğu için, bu durum lineer olmayan çözüm sonuçlarında görülmektedir (Kardestuncer and Norrie,1987). Bu olayın, diğer adı burkulma olarak isimlendirilmektedir ve plağın maksimum yük taşıma kapasitesi, bu eğriler yardımı ile de belirlenebilmektedir.

Yapılan çalışmalar sonucunda, gerilme ve genleme değerlerinin z-ekseni boyunca parabolik bir dağılım gösterdiği görülmüştür. Navier sonuçlarına bakılacak olursa, birinci dereceden kayma deformasyon teorisi için lineer gerilme dağılımı bulunmuştur (NASA,1993). Bu çalışmada gerilme ve genleme dağılımları z-ekseni boyunca, her kompozit kat için hesaplanarak grafiklerle 5 numaralı bölümde gösterilmiştir. Bulunan bu değerler plağın z-ekseni boyunca, birim genişliği için hesaplanmıştır. Etki eden yaklaşık toplam net kayma gerilme değerini hesaplayabilmek için, maksimum kayma gerilmesi değeri ile h_T 'nin (:toplam plak kalınlığı) çarpılmaktadır. Plak incelidikçe, h_T değeri de o oranda azalacağından toplam enine kayma gerilme değeri de azalacaktır. Kirchhoff Teorisi kabüllerine göre, ince plaklarda oluşan enine kayma gerilmeleri sıfır kabul edilmektedir.

Gerçekte, enine kayma gerilmeleri sıfıra eşit değildir. Plak çok ince olsa bile, $20 \leq E_{11} / G_{13} \text{ (veya } G_{22}) \leq 50$ oranı sağlanıyorsa (Vinson, 1975), verilen düzlemsel elastik modülü için, plağın enine kayma gerilmelerine karşı direnci küçük olacağından, enine kayma gerilmelerinin etkisi aynı oranda, büyük olacaktır. Test edilen, örnek kompozit malzeme için genel olarak bu oran $Q_{55} = G_{31} = G_{22} = 0.375E + 6$, $E_{11} = 30E + 6$ değerleri kullanılarak, 80 olarak bulunduğu göre, plak için bulunan gerilme dağılımı değerlerinin doğruluğu kesinleşmektedir.

Bundan sonra 7 numaralı bölümde de konuyla ilgili olarak gelecekte yapılacak çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.



7. İLERİYE BAKIŞ

İzotropik veya çok katlı kompozit plakların lineer ve lineer olmayan davranışının analizinde, enine kayma gerilmelerinin, kayma kitlenmesi olmadan çözülebilmesini sağlayan gelişmiş melez ağ elemanının kullanıldığı sonlu elemanlar kodu hazırlanmıştır. İleriye dönük olarak yapılacak olan çalışmalarda, bu metodun, büyük deformasyonun daha kolay tanımlanabildiği kabuk eleman için kullanılabilmesi sağlanılabilir.

Kompozit plağın, yüklemenin büyüklüğüne ve şekline göre direncini ölçebilmek, katlarının kırılıp kırılmadığını, ayrılmanın başlayıp başlamadığını test edebilmek için kırılma ayrılma analizi sonlu elemanlar yöntemi içinde gelişimi sağlanabilir. Bu şekilde, hazırlanan lineer ve lineer olmayan sonlu elemanlar analiz kodu içinde herhangi bir yükleme anı plağın gerilme-genleme analizi yanında kırılma analizi de gerçekleşmiş olacaktır.

Bu çalışmada, birinci mertebeden kayma deformasyon teorisi kullanılarak enine kayma gerilmeleri hesaplanmıştır. Yüksek mertebeli enine kayma deformasyon teorilerinde, plağın kalınlığı boyunca yüksek mertebeli polinomlar kullanılmaktadır. Yüksek mertebeli teoriler kullanılarak da sonuçlar test edilebilir. Fakat bu teorilerin lineer olmayan analizler için çözümü zorlaştırdığı ve çözüme ulaşma zamanını arttırdığı bilinmektedir.

Hazırlanan çalışmada plak, SEY sonuçlarının doğruluğunu kontrol edebilmek amacı ile yalnızca bir çeşit yükleme tarzına maruz bırakılmıştır. Bulunan sonuçlar KPT çerçevesi içindeki kabüller doğrultusunda Navier seri çözümü ile elde

edilen çözümler ile uyum içindedir. Bu nedenle başka sınır şartları ve yüklemeler için de sonuçlar geçerli olacaktır. Değişik durumları test edebilmek için SEY kodunda kolaylıkla değişiklikler yapılabilir.

Statik davranışın yanısıra, dinamik açıdan da plağın dayanıklılığı belirlenebilir. Bunun yanısıra, deformasyon, yüklemenin zamana bağlı olarak değiştirilmesi ile de test edilebilir.

Test edilen, kompozit malzeme yapılarının deneysel sonuçları da elde edilerek, sunulan çalışmada bulunan sonuçlar ile karşılaştırılarak, dayanıklı malzeme dizaynı için kullanılabilir. Aynı sonuçlar, mühendislik alanlarında kullanılan diğer büyük sonlu elemanlar analiz kodları ile de (ANSYS,1993) karşılaştırılarak, değişik uygulamalar yapılabilir.

Kırılma analizini gerçekleştirirken veya lineer olmayan davranışı izleyebilmek için plağa değişik yük değerleri, kodun her çalıştırılışı için değiştirilerek uygulanmıştır. Bunun yerine yük arttırımı, kodun analizi sırasında, küçük yük artışları ile yapılabilir. Bu değişiklikler yapıldığı zaman, sondan bir önceki deformasyon, her zaman değerini koruyacak ve bir sonraki basamak için de ilk değer olarak yeniden kullanılacaktır. Bunu gerçekleştirirken eleman ağının da modifikasyonu yapılacaktır. Bu şekilde yapılan çalışma ile, kırılmanın başladığı anın değeri tespit edilebilecektir.

Yukarıda açıklanan yenileştirme çalışmalarından farklı olarak, değişik problemlere de geçiş sağlanabilecektir. Örneğin, kompozit plakların burkulma problemi veya serbest veya zorlanmış titreşim problemlerinin analizi için de bu çalışmanın uygun bir zemin hazırladığı inancını taşımaktayız.

KAYNAKLAR

ANSYS, 1992, ANSYS User's Manual for Revision 5.0, Vol.III, Elements, Honston.

Batoz, J. L. , Bathe, K. J. , Ho, L. W. , 1980, A Study of Three-Node Triangular Plate Bending Elements : International Journal for Numerical Methods in Engineering, 15, 1771-1812.

Batoz, J.L., 1982, An Explicit Formulation for an Efficient Triangular Plate-Bending Element : International Journal for Numerical Methods in Engineering, 18, 1077-1089.

Bhashyam, G. R. , Galleger, R. H. , 1983, A Triangular Shear-Flexible Finite Element for Moderately Thick Laminated Composite Plates : Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 40, 309-326.

Chatterjee, S.N., Kulkarni, S.V., 1978, Shear Correction Factors for Laminated Plates : AIAA Journal, 17, No.5, 498-499.

Chow, T. S., 1971, On The Propagation of Flexural Waves in an Orthotropic Laminated Plate and its Response to an Impulsive Load : Journal of Composite Materials, 5, 306-319.

CoALA Manual, 1991, Computer Program for the Design Analysis of Laminates Manufactured from Fibrous Composite Materials : College of Aeronautics Cranfield Institute of Technology, Bedford.

- Dhatt, G. , Marcotte, L. , Matte, Y. , 1986, A New Triangular Discrete Kirchhoff Plate/Shell Element : International Journal for Numerical Methods in Engineering, 23, 453-470.
- Dong, S.B., Chun, C.K., 1992, Shear Constitutive Relations for Laminated Anisotropic Shells and Plates : Part I- Methodology, Journal of Applied Mechanics, 59, 372-379.
- Erdem, A.Ü., 1991, Kompozit Malzemeler Mekaniği Ders Notları : G.Ü.M.M.Fak., Ankara.
- Erdem, A.Ü., 1993, Elastisite Teorisi Ders Notları : G.Ü.M.M.Fak., Ankara.
- Garnet H., Pascal J.C., Pifko, A.B., 1980, Aspects of a Simple Triangular Plate Bending Finite Element : Computers&Structures, 12, 783-789.
- Gerald, C.F., Wheatley, P.O., 1984, Applied Numerical Analysis : Addison - Wesley Publishing Company, California.
- Ghali, A., Neville, A.M., 1986, Structural Analysis, A Unified Classical and Matrix Approach : Ankara University Printing House, Ankara, Turkey.
- Guyan, R.J., 1965, Reduction of Stiffness and Mass Matrices : AIAA Journal, 3, No.2, 380.
- Hinton, E., Owen, D.R.J., 1977, Finite Element Programming : Academic Press, Inc., Orlando.

- Hughes, T.J.R., Cohen, M., 1978, The Heterosis Finite Element for Plate Bending : Computers and Structures, 9, 445-450.
- Hughes, T.J.R., Taylor, R. L., Kanoknukulchai, R. L. T. , 1977, A Simple and Efficient Finite Element for Plate Bending : International Journal for Numerical Methods in Engineering, 11, 1529-1543.
- Jones, R.M., 1975, Mechanics of Composite Materials : Hemisphere Publishing Corporation, New York.
- Kardestuncer, H., Norrie, D.H.N., 1987, Finite Element Handbook, McGraw-Hill, Inc., New York.
- Kosmatka, J.B., 1994, An Accurate Shear-Deformable Six-Node Triangular Plate Element for Laminated Composite Structures : International Journal for Numerical Methods in Engineering, 37, 431-455.
- Lakshminarayana, H. V., Murthy, S. S. , 1984, A Shear-Flexible Triangular Finite Element Model for Laminated Composite Plates : International Journal for Numerical Methods in Engineering, Meth. Eng, 20, 591- 623.
- Mindlin, R.D., 1951, Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates : Journal of Applied Mechanics, 18, No:1, Trans. ASME, 73, March, 31-38.
- Mohr, G. A., 1992, Finite Elements for Solids, Fluids and Optimization : Oxford University Press Inc., New York.

NASA, 1993, Second, U.S., National Congress on Computational Mechanics,
University of Virginia.

Oral, S., Kaftanoğlu, B., 1988, A Three-Node Shear Flexible Hybrid-Stress Finite Element for The Analysis of Laminated Composite Plates : Journal of Thermoplastic Composite Materials, 1, 339-360.

Owen, D.R.J., Hinton, E., 1980, Finite Elements in Plasticity : Theory and Practice: Pineridge Press Limited Swansea, U.K., Swansea.

Pagano, N.J., 1969, Exact Solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending : Journal of Composite Materials, 3, 398-411.

Pagano, N.J., 1970, Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates : J. Composites Materials, 4, 20-34.

Polat, U., 1994, Nonlinear Finite Element Method Lecture Notes : METU, Ankara.

Polit, O., Touratier, M., Lory, P., 1994, A New Eight-Node Quadrilateral Shear-Bending Plate Finite Element : International Journal for Numerical Methods in Engineering, 37, 387-411..

Prathap, G., 1984, An Optimally Constrained 4-Node Quadrilateral Thin Plate Bending Element : Computers and Structures, 18, 789-794.

Prathap, G., 1985, A Simple Plate / Shell Triangle : International Journal for Numerical Methods in Engineering, 21, 1149-1156.

- Putchu, N.S., Reddy, J.N., 1986, A Refined Mixed Shear Flexible Finite Element for the Non-Linear Analysis of Laminated Plates : Computers & Structures, 22, 4, 529-538.
- Reddy, J. N. , 1984, A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates : Journal of Applied Mechanics, 51, 745-752.
- Reddy, J.N., 1993, An Introduction to the Finite Element Method : McGraw-Hill, Inc., New York.
- Reddy, J.N., Robbins, D.H.J., 1994, Theories and Computational Models for Composite Laminates : American Society of Mechanical Engineers, Appl. Mech. Rev., 47, No.6, Part 1, June, 147-169.
- Reddy, J.N. , 1996, Theory and Analysis of Laminated Composite Plates and Shells : John Wiley & Sons, New York.
- Reissner, E., 1945, The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates : Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, 67, June, A69-A77.
- Reissner, E., 1950, On a Variational Teorem in Elasticity : J.Math. and Physics, 29, 90.
- Romeo, G., Frulla, G., 1994, Nonlinear Analysis of Anisotropic Plates With Initial Imperfections and Various Boundary Conditions Subjected to Combined Biaxial Compression and Shear Loads : Int. J. Solids Structures, 31, No:6, 763-783.

- Somashekar, B. R. , Prathap, G., Babu, C.R., 1987, A Field-Consistent, Four - Noded, Laminated, Anisotropic Plate / Shell Element : Computers & Structures, 25, 3, 345-353.
- Srinivas, S. , Rao, A.K. , 1973, Flexure of Thick Triangular Plates : Journal of Applied Mechanics, ASME, 39, 298-299.
- Sun,C.T., Achenbach,J.D., Herrmann, G., 1968, Continuum Theory for a Laminated Medium : Journal of Applied Mechanics, 35, No:3, Trans.ASME, 90, Series E, Sept.,467-475.
- Tessler, A., 1982, An Efficient Conforming Axisymmetric Shell Element Including Transverse Shear and Rotary Inertia : Computers & Structures, 15, No.5, 567-574.
- Tessler, A. , Hughes, T.J.R., 1983, An Improved Treatment of Transverse Shear in the Mindlin-Type Four-Node Quadrilateral Element : Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 39, 311- 335.
- Tessler, A. , Hughes, T.J.R., 1985, A Three-Node Mindlin Plate Element With Improved Transvere Shear : Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 50, 70-101.
- Timoshenko, S.P., Krieger, S.W., 1959, Theory of Plates and Shells : McGraw-Hill International Editions, New York.

- Touratier, O.P., Lory, P., 1994, A New Eight-Node Quadrilateral Shear-Bending Plate Finite Element : International Journal for Numerical Methods in Engineering, 37, 387-411.
- Turhan, D., 1993, Mechanics of Composite Materials Lecture Notes : METU, Ankara.
- Vinson, J.R., Chou, T.W., 1975, Composite Materials and Their Use in Structures : Applied Science Publishers, London.
- Vinson, J.R., 1989, The Behaviour of Thin Walled Structures : Beams, Plates, and Shells, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Whitney, J.M., 1969, The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Laminated Plates : Journal of Composite Materials, 3, 354-547.
- Whitney, J.M., Leissa, A.W., 1969, Analysis of Heterogeneous Anisotropic Plates : Journal of Applied Mechanics, 261-266.
- Whitney, J.M., Pagano, N.J., 1970, Shear Deformation in Heterogeneous Anisotropic Plates : Transactions of ASME, Dec, 1031-1036.
- Whitney, J.M., 1973, Shear Correction Factors for Orthotropic Laminates Under Static Load : Transactions of the ASME, March, 302-304.
- Yang, P.C., Norris, C.H., Stavsky, Y., 1966, Elastic Wave Propagation in Heterogeneous Plates : Int. J. Solids Structures, 2 , 665-684.

Yuan, F.G., Miller, R.E., 1989, A Cubic Triangular Finite Element for Flat Plates with Shear : International Journal for Numerical Methods in Engineering, 28, 109-126.

Zienkiewicz, O.C.F., 1983, The Finite Element Method : McGraw-Hill Book Company (UK) Limited.





EK I

PLAK BÜNYE DENKLEMLERİ

I.1 Klasik *Plak* Teorisi

İnce plakların tam olarak birbirine bağlanması ile oluşan kompozit plak, gelişmiş yapı veya bünye olarak davranış göstermektedir. Bu yeni yapıyı oluşturan her plak, uygulanan yükü asal doğrultularda taşıdığı için, geliştirilmiş yeni kompozit plağın, yük taşıma kapasitesi artmış olacaktır. Gelişmiş yapı için, kompozit malzemenin oluşumunda kullanılan her plağın katılık matrisleri kullanılarak genel bir katılık matrisi elde edilmektedir. Bu matris, yeni oluşturulmuş kompozit malzemenin elastik malzeme özelliklerini içermektedir. Kullanılan her plağın, asal eksenleri farklı yönlerde olduğu için, yeni kompozit plağın asal eksen yönleri belirlenemeyebilir. Klasik Plak Teorisine ve Birinci Mertebeli Kayma Deformasyonu Teorisine göre elde edilen plağın bünye denklemleri, ilerdeki kısımlarda açıklanmıştır.

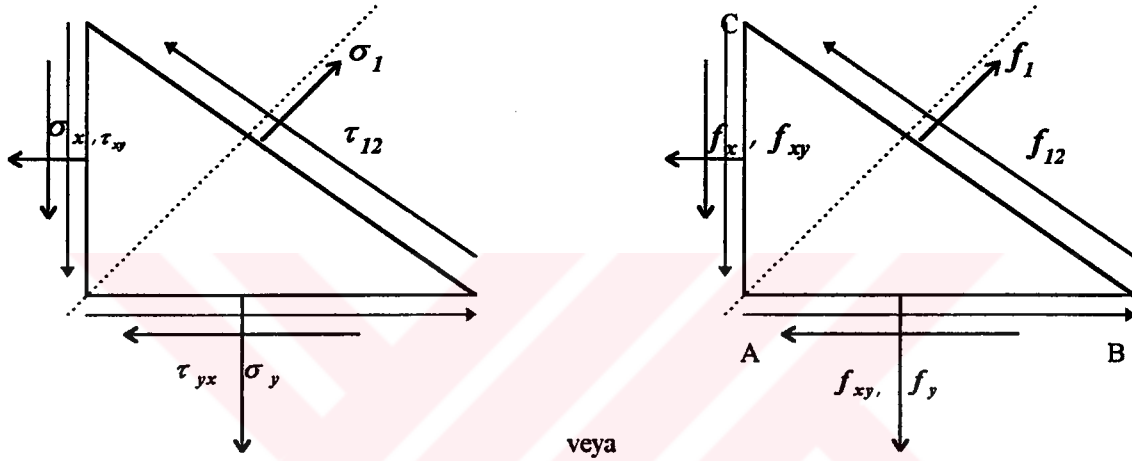
Malzemenin matris fiberleri, alınan referans koordinat sisteminden farklı yönde ise bu durumdaki plak, genel olarak ortotropik tabaka; eğer fiberler referans koordinat sistemi ile aynı yönde iseler, tabaka özellikle-ortotropik tabaka olarak tanımlanmaktadır. Ortotropik malzemenin iki boyuttaki tanımı şu şekilde açıklanabilir. Cisim üzerindeki herhangi bir noktadan geçen, birbirine dik iki koordinat düzlemi boyunca malzeme özellikleri birbirinden farklı ise plak ortotropik malzeme özelliğine sahiptir.

Özellikle-ortotropik özelliklere sahip kompozit plağın, bünye denklemleri aşağıdaki aşamalardan geçilerek bulunur ;

- i) Bir koordinat sisteminden diğerine gerilme transformasyonları,
- ii) Bir koordinat sisteminden diğerine genleme transformasyonları,
- iii) Özellikle-ortotropik plakların gerilme-genleme denklemleri.

I.2 Gerilme Transformasyonu

Burada yapmak istediğimiz t kalınlığındaki elemana x - y koordinat sistemine göre etkiyen gerilme bileşenlerini elemanın elyafı yönünde oturtulan koordinat sistemine (1 ve 2 ile göstererek), transformasyonunu yapmaktır. Elemanın A,B,C; üç genel kesitini kullanarak aşağıdaki denklemler elde edilmiştir. Burada AB, BC, AC kesit uzunluklarını ifade etmektedir.



Şekil I.1 Gerilme transformasyonu

1- yönündeki kuvvet bileşenleri şu şekilde olacaktır ;

$$\begin{aligned}\sigma_1(AC)t &= \sigma_x \cos\theta(AB)t + \sigma_y \sin\theta(BC)t + \sigma_{xy} \sin\theta(AB)t + \sigma_{xy} \cos\theta(BC)t \\ \sigma_1 &= \sigma_x \cos\theta \frac{AB}{AC} + \sigma_y \sin\theta \frac{BC}{AC} + \sigma_{xy} \left(\sin\theta \frac{AB}{AC} + \cos\theta \frac{BC}{AC} \right) \\ \sigma_1 &= \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + \sigma_{xy} 2\sin\theta \cos\theta\end{aligned}\quad (I.1)$$

2- yönündeki kuvvet bileşenleri şu şekilde yazılacaktır ;

$$\sigma_{12}(AC)t = -\sigma_x \sin\theta(AB)t + \sigma_y \sin\theta(BC)t + \sigma_{xy} \cos\theta(AB)t - \sigma_{xy} \sin\theta(BC)t$$

$$\sigma_{12} = -\sigma_x \sin\theta \frac{AB}{AC} + \sigma_y \sin\theta \frac{BC}{AC} + \sigma_{xy} \cos\theta \frac{AB}{AC} - \sigma_{xy} \sin\theta \frac{BC}{AC} \quad (I.2)$$

$$\sigma_{12} = -\sigma_x \sin\theta \cos\theta + \sigma_y \sin\theta \cos\theta + \sigma_{xy} (\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

2- yönündeki kuvvet bileşenlerini bulmak için de Şekil I.1'deki üçgensel kesit kullanılır;

$$\sigma_2 = \sigma_x \sin^2\theta + \sigma_y \cos^2\theta - \sigma_{xy} 2\sin\theta \cos\theta \quad (I.3)$$

Bulunan gerilme transformasyonları, matrix formunda gösterilecek olursa ;

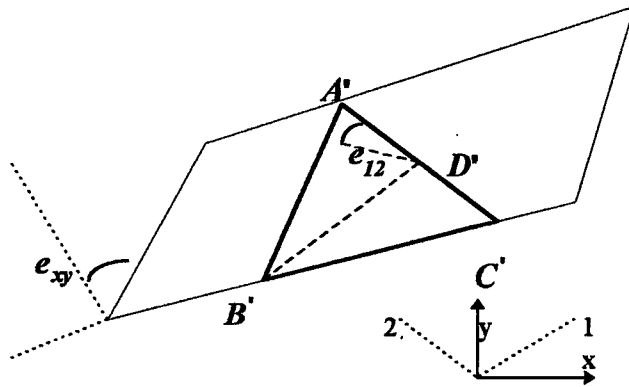
$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad (I.4)$$

burada $m = \cos\theta$, $n = \sin\theta$ dir. m , n değerlerinin bulunduğu matrix $[A]$ ile gösterilecek olursa, $[A]$ matrisinin tersi kullanılarak, x,y koordinat sistemindeki gerilmeler, fiber yönleri olarak kabul edilen 1,2 yönündeki gerilmeler cinsinden bulunmuş olmaktadır.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (I.5)$$

I.3 Genleme Transformasyonu

Bulunan gerilme değerlerine $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy})$ karşılık gelen genleme değerlerini (e_x, e_y, e_{xy}) $x-y$ koordinat sistemi için bulalım. Uygulanan gerilme bileşenleri altında elemanın aşağıdaki gibi bozulduğunu kabul edelim.



Şekil I.2 Genleme transformasyonu

ABC ve A'B'C' üçgenlerini göz önüne alarak ve birinci mertebeden yaklaşımı (first order approximation) kullanarak;

$$\begin{aligned}
 B'C' &= BC + \delta x = BC \left(1 + \frac{\delta x}{BC} \right) = BC(1 + e_x) \\
 A'B' &= AB + \delta y = AB \left(1 + \frac{\delta y}{AB} \right) = AB(1 + e_y) \\
 A'C' &= AC + \delta 2 = AC \left(1 + \frac{\delta 2}{AC} \right) = AC(1 + e_2)
 \end{aligned} \tag{I.6}$$

elde edilir. Burada, $\delta 2$, 2 yönündeki uzunluk değişimini, $\frac{\delta 2}{AC}$ ise 2 yönüne dik genlemeyi göstermektedir. A'B'C' üçgenine cosinüs kuralını uygulayarak aşağıdaki ifade elde edilecektir ;

$$(A'C')^2 = (A'B')^2 + (B'C')^2 - 2(A'B')(B'C')\cos\left(\frac{\pi}{2} - e_{xy}\right) \tag{I.7}$$

A'C', A'B', B'C' değerlerini ve $\cos\left(\frac{\pi}{2} - e_{xy}\right) = \text{Sine}_{xy}$ ifadesi denklemde yerine konulacak olursa ;

$$(AC)^2(1 + e_2)^2 = (AB)^2(1 + e_y)^2 + (BC)^2(1 + e_x)^2 - 2(AB)(BC)(1 + e_x)(1 + e_y)\text{Sine}_{xy}$$

(I.8)

bulunur. Burada küçük deformasyon teorisi uyguladığı için, ikinci mertebedeki çarpanlar iptal edilir ve bunun yanında

$$\begin{aligned} \text{Sine}_{xy} &\cong e_{xy} \\ (AC)^2 &= (AB)^2 + (BC)^2 \end{aligned} \quad (I.9)$$

eşitlikleri kullanılarak Denklem (I.9) 'daki ifadeler elde edilmektedir ;

$$\begin{aligned} (AC)^2(1 + 2e_2) &= (AB)^2(1 + 2e_y) + (BC)^2(1 + 2e_x) - 2(AB)(BC)e_{xy} \\ (AC)^2 + 2e_2(AC)^2 &= (AB)^2 + 2e_y(AB)^2 + (BC)^2 + 2e_x(BC)^2 - 2e_{xy}(AB)(BC) \\ 2e_2(AC)^2 &= 2e_x(BC)^2 + 2e_y(AB)^2 - 2(AB)(BC)e_{xy} \\ e_2 &= e_x\left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + e_y\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 - e_{xy}\left(\frac{AB}{AC}\right)\left(\frac{BC}{AC}\right) \end{aligned} \quad (I.10)$$

$$e_2 = e_x \sin^2 \theta + e_y \cos^2 \theta - e_{xy} \cos \theta \sin \theta$$

Aynı şekilde , üçgen kesitin diğer yarısı kullanılarak aşağıdaki ifade elde edilecektir ;

$$e_1 = e_x \cos^2 \theta + e_y \sin^2 \theta + e_{xy} \cos \theta \sin \theta \quad (I.11)$$

İkinci olarak ABC ve $A'B'C'$ üçgenlerini, ve birinci mertebeden yaklaşım kullanılarak e_{12} ' nin ifadesi elde edilecektir ;

$$\begin{aligned} A'B' &= AB + \delta y = AB\left(1 + \frac{\delta y}{AB}\right) = AB(1 + e_y) \\ A'D' &= AD + \delta 2 = AD\left(1 + \frac{\delta 2}{AD}\right) = AD(1 + e_2) \\ B'D' &= BD + \delta 1 = BD\left(1 + \frac{\delta 1}{BD}\right) = BD(1 + e_1) \\ (A'B')^2 &= (A'D')^2 + (B'D')^2 - 2(A'D')(B'D')\cos\left(\frac{\pi}{2} + e_{12}\right) \end{aligned} \quad (I.12)$$

$A'B', A'D', B'D'$ değerlerini ve $\cos\left(\frac{\pi}{2} + e_{12}\right) = -\sin e_{12}$ değerini yukardaki üç denklemde yerine koyarak aşağıdaki ifade elde edilecektir ;

$$(AB)^2(1+e_y)^2 = (AD)^2(1+e_2)^2 + (BD)^2(1+e_1)^2 + 2(AD)(BD)(1+e_2)(1+e_1)\text{Sine}_{12} \quad (\text{I.13})$$

Genlemelerin küçük olduğu ve ikinci mertebeli çarpımların göz önüne alınmadığı durumda ise yukarıdaki denklemler aşağıdaki forma indirgeneceklerdir ;

$$\begin{aligned} \sin e_{12} &\cong e_{12} \\ (AB)^2(1+2e_y) &= (AD)^2(1+2e_2) + (BD)^2(1+2e_1) + 2e_{12}(AD)(BD) \\ (AB)^2 + 2e_y(AB)^2 &= (AD)^2 + 2e_2(AD)^2 + (BD)^2 + 2e_1(BD)^2 + 2e_{12}(AD)(BD) \\ (AB)^2 &= (AD)^2 + (BD)^2 \\ 2e_y(AB)^2 &= 2e_2(AD)^2 + 2e_1(BD)^2 - 2(AD)(BD)e_{12} \\ e_y &= e_2\left(\frac{AD}{AB}\right)^2 + e_1\left(\frac{BD}{AB}\right)^2 + e_{12}\left(\frac{AD}{AB}\right)\left(\frac{BD}{AB}\right) \\ e_y &= e_2\cos^2\theta + e_1\sin^2\theta + e_{12}\cos\theta\sin\theta \\ e_{12} &= \frac{e_y - e_2\cos^2\theta - e_1\sin^2\theta}{\cos\theta\sin\theta} \end{aligned} \quad (\text{I.14})$$

e_1 ve e_2 değerlerini burada yerine konulduğu zaman aşağıdaki ifadeler bulunmaktadır ;

$$\begin{aligned} e_{12} &= \frac{\left[e_y - \cos^2\theta(e_x\sin^2\theta + e_y\cos^2\theta - e_{xy}\cos\theta\sin\theta) - \sin^2\theta(e_x\cos^2\theta + e_y\sin^2\theta + e_{xy}\cos\theta\sin\theta)\right]}{\cos\theta\sin\theta} \\ e_{12} &= \frac{1}{\cos\theta\sin\theta} \left[-e_x 2\cos^2\theta\sin^2\theta + e_y(1 - \cos^4\theta - \sin^4\theta) + e_{xy}(\cos^3\theta\sin\theta - \cos\theta\sin^3\theta)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1 - \cos^4\theta - \sin^4\theta}{\cos\theta\sin\theta} &= \frac{1 - [\cos^4\theta + \sin^4\theta]}{\cos\theta\sin\theta} = \frac{1 - \{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2 - 2\cos^2\theta\sin^2\theta\}}{\cos\theta\sin\theta} \\
&= \frac{1 - \{1 - 2\cos^2\theta\sin^2\theta\}}{\cos\theta\sin\theta} = 2\cos\theta\sin\theta \\
e_{12} &= -e_x 2\cos\theta\sin\theta + e_y 2\cos\theta\sin\theta + e_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)
\end{aligned} \tag{I.15}$$

Böylece (e_1, e_2, e_{12}) değerlerini (e_x, e_y, e_{xy}) cinsinden matrix formunda yazılacak olursa aşağıdaki denklemler elde edilir ;

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -\cos\theta\sin\theta \\ -2\cos\theta\sin\theta & 2\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{bmatrix} \tag{I.16}$$

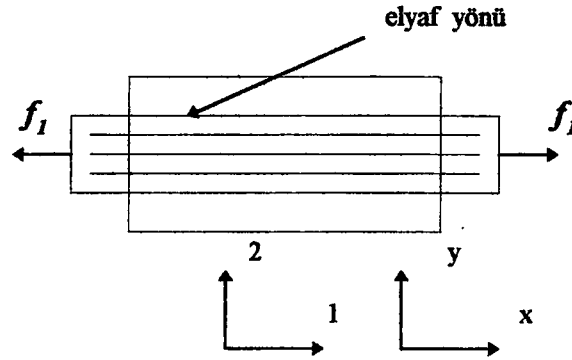
$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & mn \\ n^2 & m^2 & -mn \\ -2mn & 2mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{bmatrix}$$

burada

$$1. \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -mn \\ n^2 & m^2 & mn \\ 2mn & -2mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_{12} \end{bmatrix} \tag{I.17}$$

x-y koordinat sistemine göre genleme vektörünün transformasyonunu bulunmuş olur. Bundan sonraki aşamada gerilme-genleme denklemlerinin 1-2 ve x-y koordinat sistemlerine göre özellikle ortotropik malzeme için yazılması gerekmektedir.

I.4 Bünye Denklemlerinin Çıkarılışı



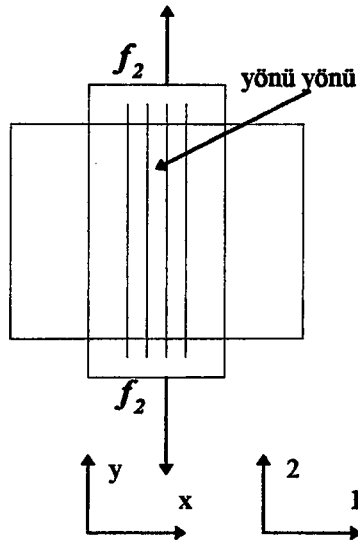
Şekil I.3 x-yönünde elastik sabitlerin çıkarılışı

İlk olarak σ_1 gerilmesinin yüzeye dik olarak etkimesinden dolayı oluşan dikey genlemeler şunlardır (Erdem, 1991),

i) 1- eksen yönündeki genleme $\frac{\sigma_1}{E_1}$ dir, ve burada E_1 , 1-yönündeki Young modulüştür .

ii) 2- eksen yönündeki genleme $-\nu_{12} \frac{\sigma_1}{E_1}$ dir ve burada Poisson oranı $\nu_{12} = \frac{-e_2}{e_1}$ değerine eşittir. ν_{12} ' nin indexlerinin anlamı, 1- koordinat eksen yönünde etkin olan gerilmenin 2- koordinat eksen yönünde yarattığı genlemedir.

İkinci basamak olarak, 2- koordinat eksen yönünde etkiyen gerilmeyi inceleyelim ;



Şekil I.4 y-yönünde elastik sabitlerin çıkarılışı

- i) σ_2 'yi uyguladığımız zaman; 2 - koordinat sistemi yönündeki genleme, $\frac{\sigma_2}{E_2}$ olacaktır. Burada E_2 , 2- eksen yönündeki Young's modülünün değeridir.
- ii) 1 yönündeki genleme, $-\gamma_{21} \frac{\sigma_2}{E_2}$ den ve Poisson oranının değeri $\gamma_{21} = -\frac{e_1}{e_2}$ dir.

σ_1 ve σ_2 normal gerilmeler aynı anda etki ettiği zaman, toplam genlemeler aşağıdaki gibidir ;

$$e_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} - \nu_{21} \frac{\sigma_2}{E_2} \quad \text{ve} \quad e_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} - \nu_{12} \frac{\sigma_1}{E_1} \quad (\text{I.18})$$

Tekrar düzenlenecek olursa ;

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} e_1 + \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} e_2 \\ \sigma_2 &= \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} e_1 + \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} e_2 \end{aligned} \quad (\text{I.19})$$

matris formunda yazılırsa ;

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\ \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \quad (I.20)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{e}}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \quad (I.21)$$

burada Q_{ij} (reduced stiffness term) azaltılmış katılık terimleri, $\underline{\underline{Q}}$ matrisi de azaltılmış katılık matrisi olarak tanımlanmaktadır.

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{12} &= \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{21} &= \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{22} &= \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \end{aligned} \quad (I.22)$$

Maxwell Reciprocal teoremine göre $\underline{\underline{Q}}$ matrisi simetriktir.

$$\begin{aligned} Q_{12} &= Q_{21} \\ \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} &= \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\ \frac{\nu_{12}}{E_1} &= \frac{\nu_{21}}{E_2} \end{aligned} \quad (I.23)$$

Dört elastik sabit değerinden üçü, birbirinden bağımsız, dördüncüsü ise, ν_{21} bağımlıdır. Benzer şekilde, genleme-gerilme denklemleri matris halinde yazılacak olursa ;

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{e}} = \underline{\underline{S}} \underline{\underline{\sigma}} \quad (I.24)$$

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix}$$

burada

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_1}, & S_{12} &= -\frac{\nu_{21}}{E_2}, \\ S_{21} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1}, & S_{22} &= \frac{1}{E_2} \end{aligned} \quad (I.25)$$

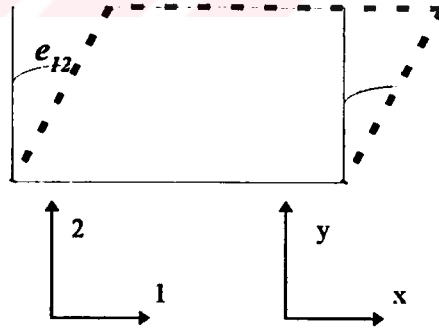
şeklinde ifade edilmektedir. S terimleri, azaltılmış komplians terimleri (reduced compliance terms) olarak isimlendirilmişlerdir. Maxwell Reciprocal teoremine göre $\underline{\underline{S}}$ matrisi simetriktir. Böylece;

$$\begin{aligned} S_{12} &= S_{21} \\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} \end{aligned} \quad (I.26)$$

olacaktır.

I.5 Kayma Gerilmelerinin Plak Üzerindeki Etkisi

Yalnızca kayma gerilmelerinin σ_{12} uygulanmasından dolayı oluşan bozulma $\sigma_{12} = G_{12}e_{12}$ ile tanımlanmaktadır.



Şekil I.5 Kayma gerilmesinin etkisi

G_{12} 1-2 düzlemindeki kayma modülüdür. Kayma modülü diğer elastik sabitlerden Young modülüs ve Poisson oranından bağımsızdır. Böylece tek yönlü ortotropik kompozit malzeme, dört bağımsız elastik sabitle tanımlanmaktadır (E_1, E_2, γ_{12} (veya γ_{21}) G_{12}).

Matrislerin son durumu (özellikle-ortotropik plak) için aşağıdaki formda olacaktır ;

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_{12} \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{e}} \quad (I.27)$$

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{e}} = \underline{\underline{S}} \underline{\underline{\sigma}}$$

veya

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_{12} \end{bmatrix} \quad (I.28)$$

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (I.29)$$

Özellikle-ortotropik malzemeler için gerilme-genleme denklemleri elde edildikten sonra, Genellikle-ortotropik plaklar için de bu denklemlerin elde edilmesi gerekmektedir. Daha önce bulunan gerilme transformasyonlarını ve $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}$ denklemlerini kullanarak ;

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_{12} \end{bmatrix} \quad (I.30)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & mn \\ n^2 & m^2 & -mn \\ -2mn & 2mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m^2 Q_{11} + n^2 Q_{12} & n^2 Q_{11} + m^2 Q_{12} & mn(Q_{11} - Q_{12}) \\ m^2 Q_{12} + n^2 Q_{22} & n^2 Q_{12} + m^2 Q_{22} & mn(Q_{12} - Q_{22}) \\ -2mnQ_{33} & 2mnQ_{33} & (m^2 - n^2)Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{bmatrix}$$

Bu matrislerin çarpımı sonucunda indirgenmiş katılık matrisi $\underline{\underline{Q}}$ elde edilmiş olacaktır .

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^4 Q_{11} + m^2 n^2 Q_{12} & m^2 n^2 Q_{11} + m^4 Q_{12} & m^3 n(Q_{11} - Q_{12}) \\ +m^2 n^2 Q_{12} + n^4 Q_{22} & m^2 n^2 Q_{22} + n^4 Q_{12} & mn^3(Q_{12} - Q_{22}) \\ +4mn^2 n^2 Q_{33} & -4m^2 n^2 Q_{33} & -2m^3 n Q_{33} + 2mn^3 Q_{33} \\ m^2 n^2 Q_{11} + n^4 Q_{12} & n^4 Q_{11} + m^2 n^2 Q_{12} & mn^3(Q_{11} - Q_{12}) \\ +m^2 n^2 Q_{22} + m^4 Q_{12} & +m^2 n^2 Q_{12} + m^4 Q_{22} & m^3 n(Q_{12} - Q_{22}) \\ -4m^2 n^2 Q_{33} & +4m^2 n^2 Q_{33} & -2mn^3 Q_{33} + 2m^3 n Q_{33} \\ m^3 n Q_{11} + mn^3 Q_{12} & mn^3 Q_{11} + m^3 n Q_{12} & m^2 n^2(Q_{11} - Q_{12}) \\ -m^3 n Q_{12} - mn^3 Q_{22} & -mn^3 Q_{12} - m^3 n Q_{22} & -m^2 n^2(Q_{12} - Q_{22}) \\ -2m^3 n Q_{33} + 2mn^3 Q_{33} & -2mn^3 Q_{33} + 2m^3 n Q_{33} & -2m^2 n^2 Q_{33} + m^4 Q_{33} + n^4 Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{bmatrix} \quad (I.31)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{31} & \bar{Q}_{32} & \bar{Q}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{bmatrix}$$

Böylece indirgenmiş katılık matris terimleri (reduced stiffness terms) $\underline{\underline{Q}}$ ve indirgenmiş uyum matris terimleri (reduced compliance terms) $\underline{\underline{S}}$ aşağıdaki formda elde edilir ;

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 Q + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 Q \cos^2 Q + Q_{22} \sin^4 Q \\
\bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 Q \cos^2 Q + Q_{12} (\sin^4 Q + \cos^4 Q) \\
\bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 Q + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 Q \cos^2 Q + Q_{22} \cos^4 Q \\
\bar{Q}_{13} &= \bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{22} - 2Q_{66}) \sin Q \cos^3 Q + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 Q \cos Q \\
\bar{Q}_{23} &= \bar{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 Q \cos Q + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin Q \cos^3 Q \\
\bar{Q}_{33} &= \bar{Q}_{66} = (Q_{11} - Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 Q \cos^2 Q + Q_{66} (\sin^4 Q + \cos^4 Q)
\end{aligned} \tag{I.32}$$

$$\begin{aligned}
\bar{S}_{11} &= S_{11} \cos^4 Q + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 Q \cos^2 Q + S_{22} \sin^4 Q \\
\bar{S}_{12} &= S_{12} (\sin^4 Q + \cos^4 Q) + (S_{11} + S_{22} - S_{66}) \sin^2 Q \cos^2 Q \\
\bar{S}_{22} &= S_{11} \sin^4 Q + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 Q \cos^2 Q + S_{22} \cos^4 Q \\
\bar{S}_{13} &= \bar{S}_{16} = (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66}) \sin Q \cos^3 Q + (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66}) \sin^3 Q \cos Q \\
\bar{S}_{23} &= \bar{S}_{26} = (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66}) \sin^3 Q \cos Q - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66}) \sin Q \cos^3 Q \\
\bar{S}_{33} &= \bar{S}_{66} = 2(2S_{11} - 2S_{22} - 4S_{12} - S_{66}) \sin^2 Q \cos^2 Q + S_{66} (\sin^4 Q + \cos^4 Q)
\end{aligned} \tag{I.33}$$

Burada S_{16} ve S_{26} yeni mühendislik sabitleri olarak kullanılmaktadır. Bu sabitler Lekhnitski etkileşimli sabitler (coefficients of mutual influence) olarak bilinmektedir ve aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır (Jones, 1975), (Turhan, 1993) ;

$$S_{16} = \frac{\eta_{12,1}}{E_1} = \frac{\eta_{1,12}}{G_{12}} \tag{I.34}$$

$$S_{26} = \frac{\eta_{12,2}}{E_2} = \frac{\eta_{2,12}}{G_{12}}$$

$$\eta_{i,j} = \eta_{j,i} = \frac{\epsilon_i}{\nu_{ij}} \quad \tau_{ij} = \tau$$

$$\eta_{ij,i} = \frac{\nu_{ij}}{\epsilon_i}$$

$$\eta_{ij,k} = \eta_{k,ij} = \frac{\nu_{ij}}{\tau_{kl}}$$

$$\tau_{kl} = \tau$$

Yukarıda kullanılan, birinci çeşit, iki taraflı etkileşimli faktör (coefficient of mutual influence of the first kind) olarak isimlendirilmektedir. ij düzlemindeki kaymadan dolayı oluşan deformasyonun i - yönünde oluşturduğu genlemeyi ifade etmektedir.

$\eta_{ij,i}$ faktörü ise, ikinci çeşit, iki taraflı etkileşimli faktör (coefficient of mutual influence of the second kind) olarak isimlendirilmektedir. Bu faktör ij - düzleminde oluşan kayma deformasyonunun, yönündeki gerilmelerden dolayı olduğunu ifade etmektedir. 3 cü boyutta $\eta_{ij,kl}$ kullanılan Chentsov faktörüdür. Bu faktör kl - düzleminde oluşan kayma gerilmesinin, diğer bir düzleminde oluşan kayma gerilmesinden dolayı oluştuğunu ifade etmektedir. Bu faktörler S_{45}, S_{46}, S_{56} indirgenmiş uyum terimlerinin tanımlanmasında kullanılmaktadırlar. Burada σ_{kl} , σ olarak alınır ve aynı zamanda diğer bütün gerilmeler sıfırdır.

$\bar{Q}$ terimleri θ açısına bağlıdır. Eğer $\theta = 0^\circ$ veya 90° ise $\bar{Q}$ terimleri Q terimlerine dönüşür ve plak özellikle-ortotropik özelliklere sahip olur. $\bar{Q}$ matrisinin tersi $\bar{S}$ ile tanımlanmaktadır ve transform edilmiş indirgenmiş uysallık matrisi olarak isimlendirilir.

$$\begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} \\ \bar{Q}_{22} \\ \bar{Q}_{33} \\ \bar{Q}_{12} \\ \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^4 & n^4 & 2m^2n^2 & 4m^2n^2 \\ n^4 & m^4 & 2m^2n^2 & 4m^2n^2 \\ m^2n^2 & m^2n^2 & -2m^2n^2 & (m^2 - n^2)^2 \\ m^2n^2 & m^2n^2 & m^4 + n^4 & -4m^2n^2 \\ m^3n & -mn^3 & mn^3 - m^3n & 2(mn^3 - m^3n) \\ mn^3 & -m^3n & m^3n - mn^3 & 2(m^3n - mn^3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{22} \\ Q_{33} \\ Q_{12} \\ Q_{13} \\ Q_{23} \end{bmatrix} \quad (I.35)$$

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = Q_{11} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \end{aligned} \quad (I.36)$$

$$\begin{aligned}
Q_{33} &= G_{12} \\
S_{11} &= \frac{1}{E_1} \\
S_{12} &= -\frac{\nu_{21}}{E_2} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \\
S_{22} &= \frac{1}{E_2} \\
S_{33} &= \frac{1}{G_{12}}
\end{aligned} \tag{I.37}$$

olarak tanımlanmaktadır. Özellikle-ortotropik plak için elde edilen $\underline{Q}$ matrisinde sıfır olmayan terimler $Q_{11}, Q_{12}, Q_{21}, Q_{22}, Q_{33}$ olarak bilinmektedir. Bunlardan başka dört tane daha sıfır değere sahip terim vardır. Bunlar şunlardır ;

$$Q_{13} = Q_{23} = Q_{31} = Q_{32} = 0 \tag{I.38}$$

Sıfır olmayan beş teriden Q_{12}, Q_{21} 'e eşittir. Böylece bağımsız terim sayısı dörde düşmektedir. Bu dört terim, dört elastik sabit ile $E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}$ tamamiyle elde edilebilmektedirler.

Genellikle-ortotropik plak için katılık matrisin $\underline{\bar{Q}}$, terimlerinin hepsi sıfırdan farklıdır. Genel olarak dokuz adet sıfırdan farklı terim vardır ($\bar{Q}_{11}, \bar{Q}_{12}, \bar{Q}_{13}, \bar{Q}_{21}, \bar{Q}_{22}, \bar{Q}_{23}, \bar{Q}_{31}, \bar{Q}_{32}, \bar{Q}_{33}$). Simetriden dolayı 9 terim, 6'ya düşmektedir. $\bar{Q}_{13}$ ve $\bar{Q}_{23}$ terimleri ise dört elastik sabitin lineer kombinasyonundan oluşmaktadır ($E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}$). Böylece Genellikle-Ortotropik malzemeleri tanımlamak, yalnızca dört elastik sabitle mümkün olmaktadır. Genellikle-ortotropik ve Anizotropik olarak tanımlanan malzeme, referans tanımlanmasındaki fark burada ortaya çıkmaktadır. Genellikle-ortotropik malzeme referans eksenle herhangi bir θ açısı yapan fiberlerin, ortotropik özelliklere sahip olması ve dört elastik sabit ile tanımlanırken, anizotropik malzemeler için ortotropik eksenler tanımlanamadığı ve $\bar{Q}_{11}, \bar{Q}_{12}, \bar{Q}_{13}, \bar{Q}_{22}, \bar{Q}_{23}, \bar{Q}_{33}$ terimleri arasında doğrudan bir denklem çıkarmak

mümkün olmadığı için de dört yerine altı elastik sabit ile tanımlama yapılabilmektedir. Q_{13}, Q_{23} veya S_{13}, S_{23} terimlerinin sıfır olması veya olmamasına bakılarak gerilmelerin genlemelere bağımlılığı (shear coupling effects) incelenebilmektedir.

I.6 Klasik Plak Teorisi Ve Plak Bünye Denklemleri

Genlemeler plakanın kalınlığı boyunca malzeme özelliği nedeni ile sürekliliğini korumaktadır ve lineer davranış içindedirler. Fakat gerilmeler, plak katlarının her birinde ayrı bir malzemenin bulunması nedeniyle, plakanın kalınlığı boyunca sürekli değildirler. Bu nedenle iç kuvvetlerin tayin edilmesi gerilmelerin tabakalar üzerinde integralinin alınmasını gerektirir.

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} + z\varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} + z\varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} + z\gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} dz \\
 &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} \\
 \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} + z\varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} + z\varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} + z\gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} z dz \\
 &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (I.39)
 \end{aligned}$$

Burada A_{ij} uzama katılık matrisi(extensional stiffness matrix), B_{ij} eğilme katılık matrisi(bending stiffness matrix), D_{ij} ise eğilme-genleme katılık matrisi (bending-extension stiffness matrix) olarak adlandırılır ve indirgenmiş katılık terimleri ile $\bar{Q}^{(k)}$ ifade edilir. Yukarıda kullanılan katılık matrisleri aşağıdaki denklemlerle bulunurlar ;

$$\begin{aligned} \left(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} \right) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij}(1, z, z^2) dz \\ &= \sum_{k=1}^N \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)}(1, z, z^2) dz \end{aligned} \quad (I.40)$$

$$\begin{aligned} \text{veya;} \quad A_{ij} &= \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (Z_{k+1} - Z_k) \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (Z_{k+1}^2 - Z_k^2) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (Z_{k+1}^3 - Z_k^3) \end{aligned}$$

Bünye denklemi kapalı formda Denklem (I.40)'ı kullanarak ;

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\epsilon^0\} \\ \{\epsilon^1\} \end{Bmatrix} \quad (I.41)$$

şeklinde ifade edilmektedir.

I.7 Tabakalı Plakalar İçin Mindlin Teorisinin Bünye Denklemine Dahil Edilmesi

Birinci mertebeden kompozit plak teorisinde, Klasik Plak Teorisinden farklı olarak, enine kayma genleme ve gerilmesinin varlığı nedeniyle ilave bünye denklemleri aşağıdaki denklemlerle verilir (Kosmatka,1994), (Reddy,1996);

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} \quad (I.42)$$

$$\bar{Q}_{44} = Q_{44} \cos^2 \theta + Q_{55} \sin^2 \theta$$

$$\bar{Q}_{45} = (Q_{55} - Q_{44}) \cos \theta \sin \theta$$

$$\bar{Q}_{55} = Q_{44} \sin^2 \theta + Q_{55} \cos^2 \theta$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \kappa \sum_{k=1}^N \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} dz = \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix}$$

$$(A_{44}, A_{45}, A_{55}) = \kappa \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (\bar{Q}_{44}, \bar{Q}_{45}, \bar{Q}_{55}) dz$$

$$\kappa \sum_{k=1}^N \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} (\bar{Q}_{44}^{(k)}, \bar{Q}_{45}^{(k)}, \bar{Q}_{55}^{(k)}) dz$$

$$\kappa \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{44}^{(k)}, \bar{Q}_{45}^{(k)}, \bar{Q}_{55}^{(k)}) (Z_{k+1} - Z_k)$$

(I.43)

burada, enine kayma deformasyonu dolayısıyla kalın plaklardan, ince plaklara geçerken oluşan katılaşmayı düzenleyecek katsayı veya faktör olarak ' κ ' ile tanımlanmaktadır.

**İ.C. YÜKSEKÖĞRETİM İNŞAAT
DOKÜMANTASYON ŞİFİ**

EK-II

**KOMPOZİT LEVHALARIN DÜZLEMSEL GERİLME,
GENLEME ANALİZİ VERİ GİRİŞ DOSYASI
(PROGRAM : LAMINATE)**

MATERYAL SAYISI

2

MATERYAL NO.

1

MATERYAL ÇEŞİDİ

HS-CARBON/EPOXY UD

ÖZELLİKLER

E1	E2	G12	NU12	
140E3	10E3	5E3	0.3	
X,t	X,c	Y,t	Y,c	S
1500	1200	50	250	70
ex,t	ex,c	ey,t	ey,c	e,s
1.05	0.85	0.50	2.5	1.40
A1	A2	B1	B2	
-0.3E-6	28E-6	0.1	0.3	

2

E-GLASS/EPOXY UD

E1	E2	G12	NU12	
40E3	8E3	4E3	0.25	
X,t	X,c	Y,t	Y,c	S
1000	600	30	110	40
ex,t	ex,c	ey,t	ey,c	e,s
2.50	1.50	0.35	1.35	1.00
A1	A2	B1	B2	
6E-6	35E-6	0.01	0.3	

UYGULANABİLECEK TABAKA KONFIGÜRASYONLARI

Toplam konfigürasyon sayı

4

Config.no.	Açı	Kalınlık	Malzeme No.
1	0.	0.125	1
2	90.	0.125	1
3	45.	0.125	2
4	-45.	0.125	2

Bu data için laminadaki toplam materyal sayısı

2

Laminadaki toplam tabaka sayısı ve toplam sayı tek ise 3, çift ise 1 index'i

8

1.0

Tabaka no Konfigürasyon No.

1	1
2	3
3	4
4	2
5	2
6	4
7	3
8	1

Yükleme Sayısı

1

Yükleme No.

1

Sıcaklık Değerleri,

Nem sabitleri

T1	T2	T3	C1	C2	C3
-100	-100	-100	1.0	1.0	1.0
NX	NY	NX	MY	MY	MY
100	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

SONLU ELEMENLAR KODU : COMPAN
VERİ GİRİŞ DOSYASI

(9 ağ-noktalı ve heterosis eleman tanımlaması için örnek dosya)

```

2
1
SIMPLY SUPPORTED-THIK 9 NODE
30000000.00  750000.00  450000.0  0.250  0.250
1500.0  1200.00  50.0  250.00  70.00
1.050 0.85  0.50  2.50  1.40
-0.0000003 0.000028  0.01  0.3
2
E-GLASS/EPOXY UD
20000000.00  2000000.00  400000.0  0.300  0.400
1000.0  600.00  30.0  110.00  40.00
2.500 1.50  0.35  1.35  1.00
0.000006  0.000035  0.01  0.3
4
1 45.0      4.000      2
2 90.0      1.78      1
3 00.0      1.78      1
4-45.0     4.000      1
2
2
2
9 3.0
1 3
2 2
3 3
4 2
5 3
6 2
7 3
8 2
9 3
1
1
-100.0
-100.0
-100.0
1.0
1.0
1.0
10.0
0.0
0.0
0.0
0.0
0.0
0.001
9 5 16
2000000.
0.30
16.0
400.0
0.08
2 2 1 1
0.00 0.00
0.00 100.000

```

200.000 200.000
 200.000 100.000
 200.000 0.000
 100.000 0.000
 100.000 100.000
 00.00 0.00
 66.67 0.00
 133.34 0.00
 200.000 0.00
 200.000 66.67
 200.000 133.34
 200.000 200.00
 133.34 200.00
 66.67 200.00
 0.0 200.00
 0.0 133.34
 0.0 66.67

0.0
 0.0
 -10.0000
 0.0
 0.0

5
 1 100.0
 6 100.0
 9 100.0
 14 100.0
 17 100.0

1	1	1	1	0	1
2	0	0	0	0	1
3	0	0	0	0	1
4	0	0	0	0	1
5	0	0	0	1	1
6	1	1	1	0	1
10	0	0	0	1	0
11	1	1	1	0	1
15	0	0	0	1	0
16	1	1	1	0	1
20	0	0	0	1	0
21	1	1	1	1	1
22	1	0	1	1	0
23	1	0	1	1	0
24	1	0	1	1	0
25	1	1	1	1	0

EK - III

MUKAVEMET ANALİZİ

Plakların gerilme-genleme analizinde kullanılan kab  ller, mukavemet (strength) analizinde de geçerlidir. Bu kab  ller kısaca aŐ ağıda a  ıklanmıŐ tır.

I) Küçük deformasyon teorisi geçerlidir,

II) Lineer elastisite teorisi geçerlidir,

a) Hooke kanunu geçerlidir,

b) Elastik modüller geçerlidir,

c) Mukavemet sabitleri aynı kalmamakla beraber , çekme ve basma için bu sabitler aynı kalırlar.

III) Düzlemsel gerilme hali kullanılır,

IV) Homojenlik kabul edilmektedir.

Plak   zerindeki herhangi bir noktadaki mukavemet testi, kırılma kriterine uygun olarak bulunan gerilme değerleri ile izin verilen maksimum gerilmeler karŐ ılaŐ tırılarak yapılmaktadır (allowable values). Maksimum gerilme değerleri, malzemenin kırılma-gerilme değerlerinin oranları olarak bulunarak kullanılmaktadırlar.

Malzemenin kırılma-gerilme değerleri tektir. Bunun yanında, izin verilen maksimum gerilme değeri, uygulanma alanlarına göre de  iŐ ik değerler baz alınarak kullanılabilir. İztropik levhalarda malzeme özellikleri noktadan noktaya göre de  iŐ medi  i için, bir noktadaki maksimum gerilme ve genleme değerleri yeterli ve geçerli olmaktadır. İztropik levhaların mukavemeti, tam olarak baŐ lıca çekme, basma ve kayma mukavemet gerilmelerinin bilinmesiyle tanımlanabilmektedir. Bu ana bilgiler basit, tek yönlü çekme ve basma testleri ile belirlenmektedirler. Yapılan iki boyutlu analizde belli bir α a  ısında elde edilen T_x , T_y , T_{xy} gerilmeleri için

asal gerilmeler, maksimum asal gerilme ve genleme olarak iki ana başlık altında toplanmaktadır. Kullanılan kırılma kriterlerine göre; asal gerilmeler, izin verilen maksimum gerilmeler ile karşılaştırılmaktadır. Ortotropik plaklar için kullanılan kırılma teorileri devam eden kısımlarda açıklanacaktır. İzotropik malzemeler için genellikle kullanılan kırılma kriterleri ise şunlardır ;

- 1) Maksimum asal gerilme teorisi,
- 2) Maksimum asal genleme teorisi,
- 3) Maksimum kayma gerilmesi teorisi (Tresca),
- 4) Kayma genlemesi enerji teorisi (Von Mises).

III.1 Kompozit Plaklarda Kırılma Teorileri

Ortotropik plaklarda, malzeme özellikleri bir noktadan geçen değişik eksenlere göre değişiklik göstermektedir. İzotropik plakların kırılma mukavemetini ölçmek için yalnızca üç gerilme değeri (çekme, basma, kayma) yeterli olmaktadır. Ortotropik plaklar için ise kırılma mukavemetini tamamiyle belirleyebilmek için, üç teoriden elde edilen değerden fazla sonuca göre karşılaştırma yapmaya ihtiyacımız vardır. Bir noktadaki malzeme özelliklerinin değişik yönlerle göre değişik değerlere sahip olması nedeniyle, bu yönlerle göre kırılma güvenilirliklerini saptamak pratik olarak mümkün görülmemektedir. Bu nedenle kırılma güvenilirlikleri; özellikle ortotropik malzemelerde, kuvvetler malzeme özellikleri yönünde basit çekmeye maruz bırakılarak bulunmuştur. Başka bir deyişle, uygulanan yükler, fiberler ve matris yönündedir. Böylece, deneylerde Özellikle-ortotropik (specially orthotropic) plaklar için kayma gerilmesinin (shear coupling effects) etkileri göz önüne alınamamaktadır. Kompozit plakanın güvenirliliği değişik kırılma değerleri ile belirnebilmektedir (Jons,1975), (CoALA,1991). Bunlar şunlardır ;

- i) X_t : fiber yönündeki çekme kırılma güvenirliliği,
- ii) X_c : fiber yönündeki basma kırılma güvenirliliği,
- iii) Y_t : fiber yönüne dik yönde (enine) çekme kırılma güvenirliliği,

- iv) Y_c : fiber yönüne dik yönde (enine) basma kırılma güvenirliliği,
- v) S : düzlemsel (in-plane) kayma kırılma güvenirliliği.

Kompozit plakların kırılma güvenirlilikleri, malzeme özellik yönlerine göre ölçüldüğü için, bu değerlerin başlıca kırılma kriterleri ile de karşılaştırılma olanağı vardır. Bunun için; bir noktadaki gerilme ve genlemelerin malzeme özelliklerinin üzerine çakışık koordinat sistemine transfer edilmesi gerekmektedir. Ortotropik malzemeler için, altı adet kırılma kriteri vardır. Bu kriterlerde kendi içinde ikiye ayrılır: Etkileşimli (interactive) teoriler ve etkileşimsiz (non-interactive) teoriler. Etkileşimsiz teorilerde plak güvenirliliği, başlıca kırılma güvenirliliği (çekme veya gerilme) ile karşılaştırılarak uygulanır. Bu teoride diğer gerilme, genlemeler göz önüne alınmaz.

Etkileşimli kırılma teorilerinde ise, gerilme ve genlemenin diğer bütün bileşenleri göz önüne alınmıştır. Etkileşimli ve etkileşimsiz kırılma kriterleri altı tanedir , bunlar sırasıyla şöyledir ;

- 1) Maksimum gerilme teorisi (etkileşimsiz),
- 2) Maksimum genleme teorisi (etkileşimsiz),
- 3) Tsai-Hill teorisi (etkileşimli),
- 4) Hoffman teorisi (etkileşimli),
- 5) Tsai-Wu gerilme teorisi (etkileşimli),
- 6)- Tsai-Wu genleme teorisi (etkileşimli).

III.1.1 Maksimum Gerilme Teorisi

Malzemenin, özellikle çakışık koordinat sistemi yönündeki gerilme değeri, asıl (basic) kırılma güvenirliliği değerinden büyükse kırılma gerçekleşecektir.

Çekme gerilmeleri için

$$\sigma_1 < X_t$$

$$\sigma_2 < Y_t$$

Basma gerilmeleri için ise aşağıdaki eşitsizlikler kullanılmaktadır.

$$\begin{aligned} |\sigma_1| &< |X_c| \\ |\sigma_2| &< |Y_c| \end{aligned}$$

Kayma gerilmeleri için ise

$$|\sigma_{12}| < S$$

eşitsizliği kullanılmaktadır. Yukarıdaki eşitsizlikler sağlanıyorsa, plağın kırıldığı kabul edilmektedir. Bu eşitsizlikler aşağıdaki şekilde de ifade edilebilirler ;

Çekme gerilmeleri için

$$\frac{\sigma_1}{X_t} < 1$$

$$\frac{\sigma_2}{Y_t} < 1$$

kayma gerilmeleri için

$$\frac{|\sigma_{12}|}{S} < 1$$

basma gerilmeleri için

$$\frac{\sigma_1}{X_c} < 1$$

$$\frac{\sigma_2}{Y_t} < 1$$

olarak tanımlanmaktadır.

III.1.2 Maksimum Genleme Teorisi

Bu teori maksimum gerilme teorisi ifadeleri ile aynı özelliklere sahiptir, yalnızca gerilmenin yerine genlemeler kullanılmaktadır.

Çekme genlemeleri

$$e_1 < e_{xt}$$

$$e_2 < e_{yt}$$

basma genlemeleri

$$\begin{aligned} |e_1| &< |e_{xc}| \\ |e_1| &< e_s \end{aligned}$$

kayma genlemeleri

$$|e_1| < e_s$$

ile ifade edilmektedir. Burada e_{xt} fiber yönündeki çekme kırılma genlemesi, e_{xc} fiber yönündeki basma kırılma genlemesi, e_{yt} fiber yönüne dik yönde basma kırılma genlemesi, e_{yc} fiber yönüne dik yönde basma kırılma genlemesi, e_s düzlemsel kayma kırılma genlemesidir.

Yukarıdaki eşitsizlikler şu şekilde de yazılabilir;

Çekme genlemeleri için

$$\left\{ \frac{e_1}{e_{xt}} < 1, \frac{e_2}{e_{yt}} < 1 \right\}$$

basma genlemeleri için

$$\left\{ \frac{|e_1|}{|e_{xc}|} < 1, \frac{|e_2|}{|e_{yc}|} < 1 \right\}$$

kayma genlemeleri için

$$\left\{ \frac{|e_{12}|}{e_s} < 1 \right\}$$

olarak tanımlanmaktadır.

III.1.3 Tsai - Hill Teorisi

Bu teoride aşağıdaki eşitsizlik sağlanmadığı zaman kırılma olacaktır.

$$\left[\frac{\sigma_1}{x}\right]^2 + \left[\frac{\sigma_2}{y}\right]^2 + \left[\frac{\sigma_{12}}{s}\right]^2 - \left[\frac{\sigma_1}{x}\right]\left[\frac{\sigma_2}{x}\right] < 1 \quad \text{burada;}$$

- i) $X = X_t$ veya X_c ; $Y = Y_t$ veya Y_c olacaktır ve değerler karşılıklı olarak σ_1 ve σ_2 nin işaretlerini alacaklardır.
- ii) X_c ve Y_c nin absolute değerleri kullanılmamaktadır.

III.1.4 Hoffman Teorisi

Bu teoride aşağıdaki eşitsizlik sağlanmadığı zaman kırılma oluşacaktır.

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{33}\sigma_{12}^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 < 1$$

$$F_1 = \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c}$$

$$F_2 = \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c}$$

$$F_{11} = \frac{1}{X_t X_c}$$

$$F_{22} = \frac{1}{Y_t Y_c}$$

$$F_{33} = \frac{1}{s^2}$$

$$F_{12} = \frac{-1}{2X_t X_c}$$

Burada X_c ve Y_c absolute değerlerdir.

III.1.5 Tsai -Wu Gerilme Teorisi

Bu teoriye göre aşağıdaki eşitsizlik sağlanmadığı zaman kırılma oluşacaktır.

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{33}\sigma_{12}^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 < 1$$

$$F_1 = \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c}$$

$$F_2 = \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c}$$

$$F_{11} = \frac{1}{X_t X_c}$$

$$F_{22} = \frac{1}{Y_t Y_c}$$

$$F_{33} = \frac{1}{S^2}$$

$$F_{12} = F_{12}^* \sqrt{F_{11} F_{22}} = \frac{F_{12}^*}{\sqrt{X_t X_c Y_t Y_c}}$$

ve X_c , Y_c absolute değerlerdir. F_{12}^* terimi ise test ile elde edilmiştir (= - 1/2).

III.1.6 Tsai -Wu Genleme Teorisi

Aşağıdaki eşitsizlik sağlanmadığı zaman kırılma olacaktır.

$$G_1 e_1 + G_2 e_2 + G_{11} e_1^2 + G_{22} e_2^2 + G_{33} e_{12}^2 + 2G_{12} e_1 e_2 < 1$$

$$G_1 = F_1 Q_{11} + F_2 Q_{12}$$

$$G_2 = F_1 Q_{12} + F_2 Q_{22}$$

$$G_{11} = F_{11} Q_{11}^2 + 2F_{12} Q_{11} Q_{12} + F_{22} Q_{12}^2$$

$$G_{22} = F_{11} Q_{12}^2 + 2F_{12} Q_{12} Q_{22} + F_{22} Q_{22}^2$$

$$G_{33} = F_{33} Q_{33}^2$$

$$G_{12} = F_{11} Q_{11} Q_{12} + F_{12} (Q_{11} Q_{22} + Q_{12}^2) + F_{22} Q_{12} Q_{22}$$

$$F_1 = \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c}$$

$$F_2 = \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c}$$

$$F_{11} = \frac{1}{X_t X_c}$$

$$F_{22} = \frac{1}{Y_t Y_c}$$

$$F_{33} = \frac{1}{S^2}$$

$$F_{12} = F_{12}^* \sqrt{F_{11} F_{22}}$$

Burada Q_{11} , Q_{12} , Q_{22} , Q_{33} azaltılmış katılık matrisi terimleridir.

III.2 Kırılma Kriterinin Seçilmesi

Deneylere göre, bir malzeme için sağlanan kırılma kriteri diğer bir malzeme için de geçerli olabilmektedir. Deneysel bulgulara göre, kompozit plakların hiçbirinde, çoklu-eksenel (multi-aksial) gerilme için kırılma kriterleri sağlanamamıştır. Böylece kullanılan kompozit malzeme için kullanılacak kırılma kriteri, mühendisin kararına kalmıştır. Ayrıca bunun yanında aynı malzeme için birden fazla kırılma kriterinin kullanılmasının gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Kullanılan bu kriterlerin sonuçları, ortak değerlendirilerek bir sonuca varmak daha kolay olacaktır.

EK - IV***GENEL AKIŞ ŞEMALARI***

**KOMPOZİT PLAKLARIN ANALİZİNİN
GENEL AKIŞ ŞEMALARI**

*Kompozit Plakın Elastik
Sabitler Matrisinin
Hesaplanması*
Kod : LAMINATE , COMPAN



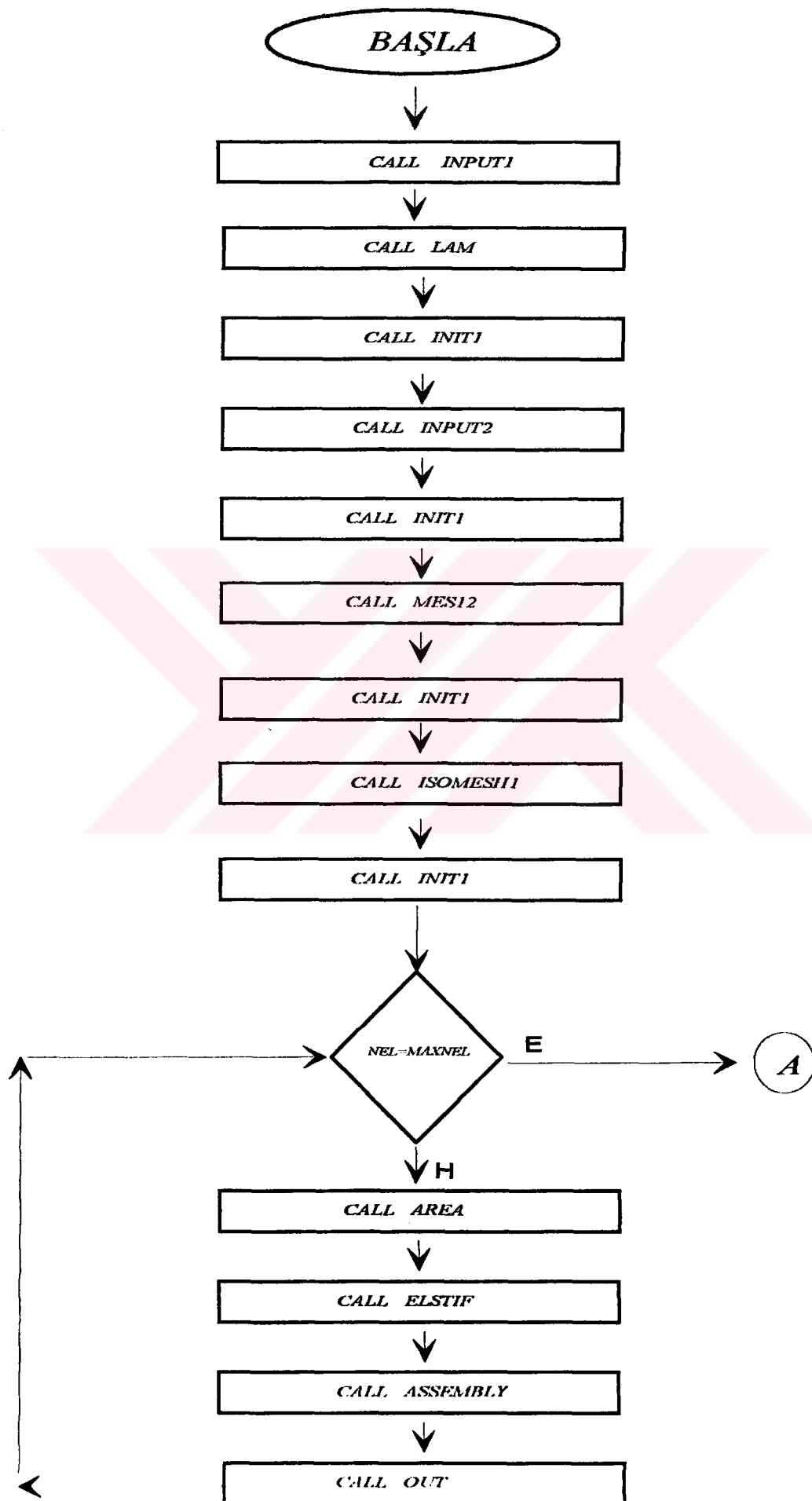
*Her Plak İçin
Lineer Çözüm*
Kod : COMPAN

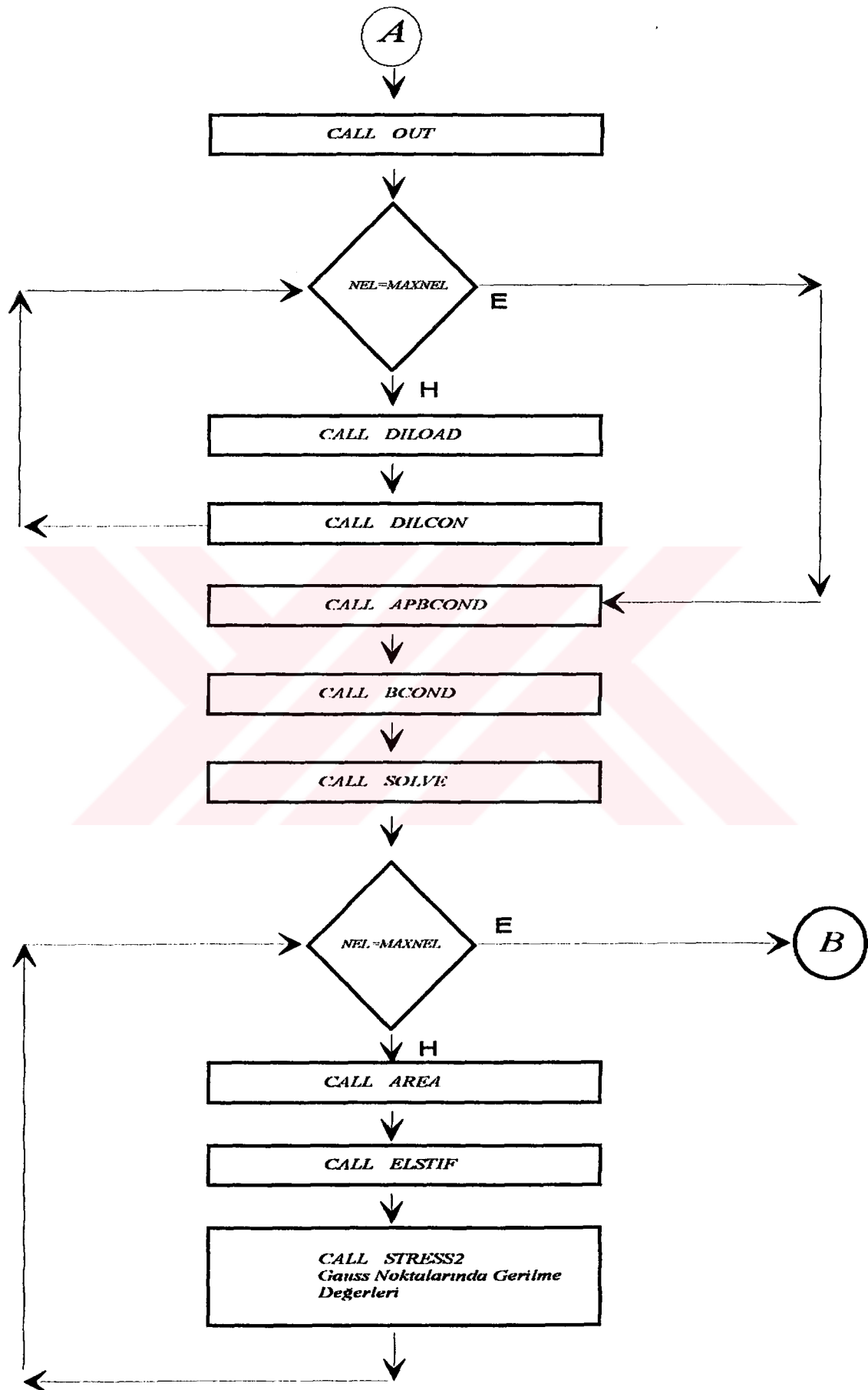


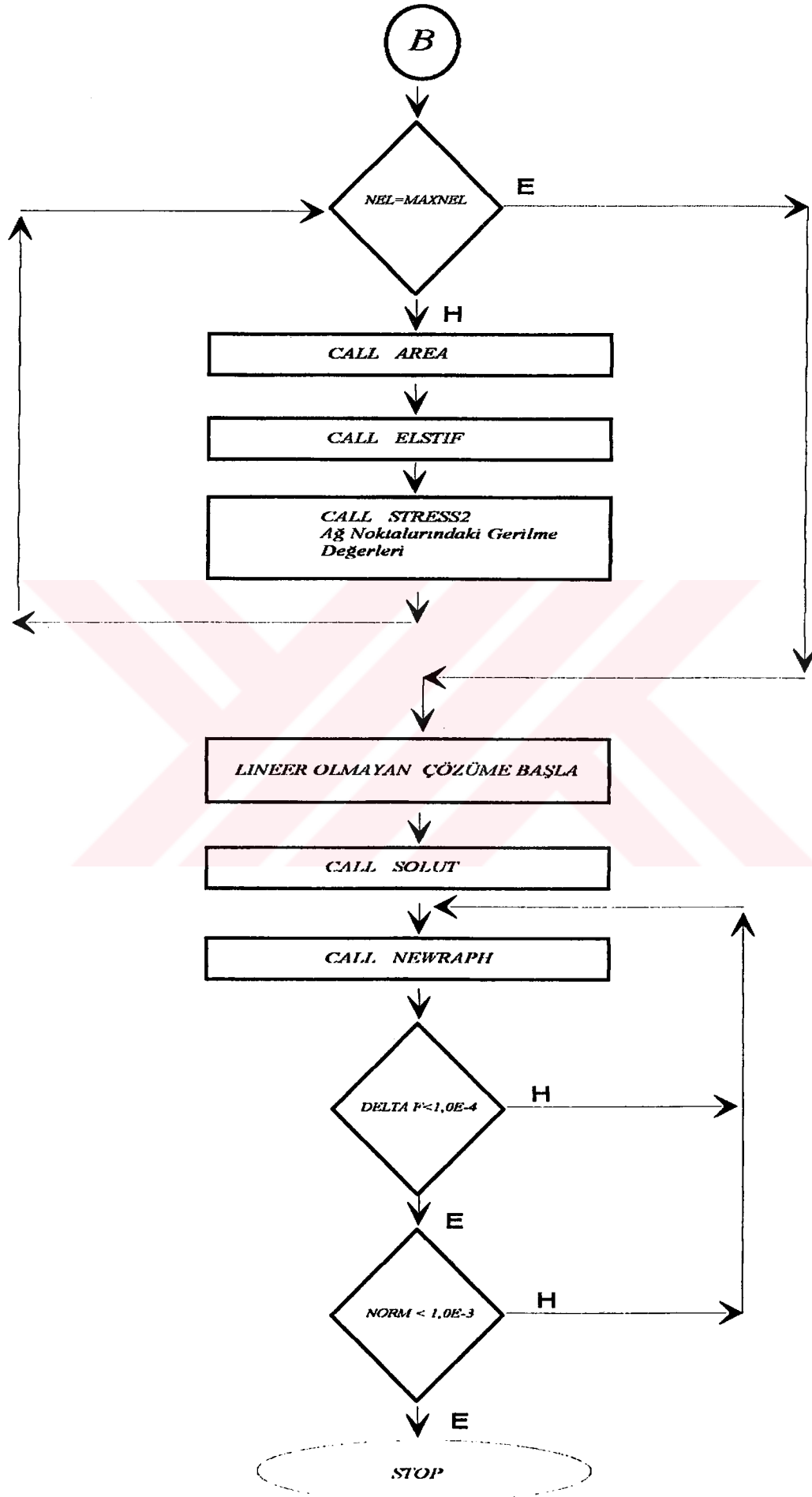
*Orta Plak İçin Lineer
Olmayan Çözüm*
Kod : COMPAN

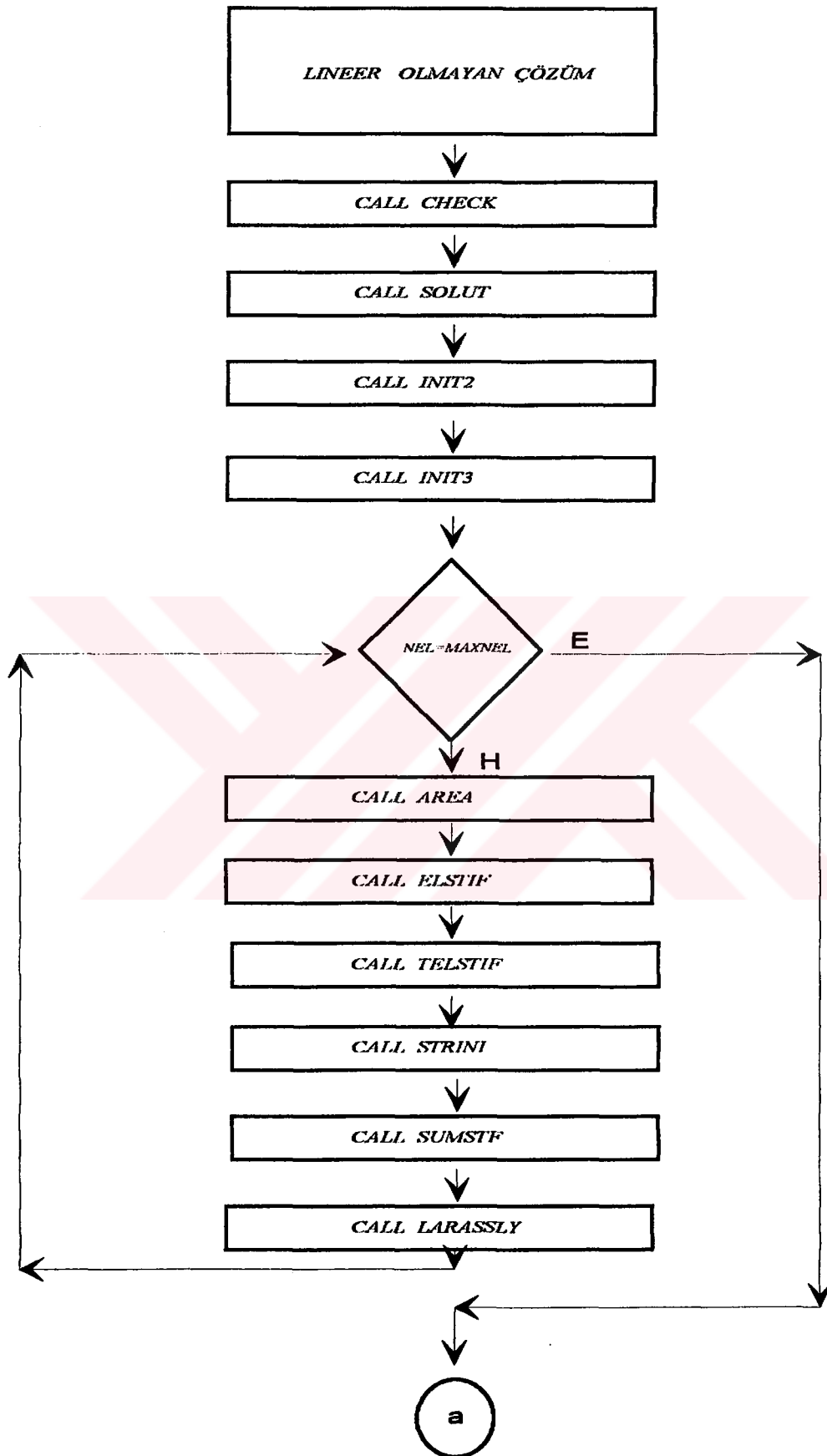


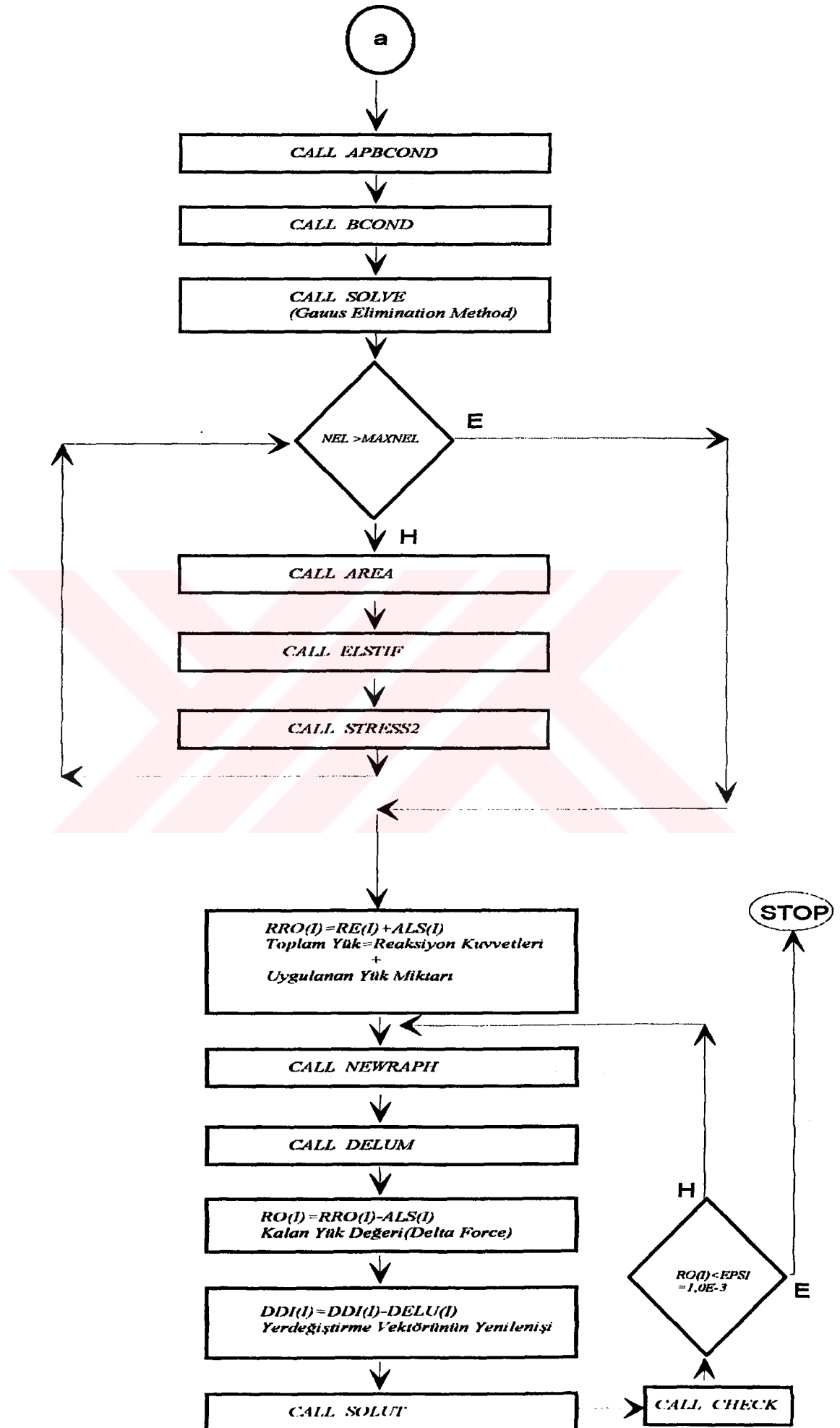
*Kompozit Plak İçin
KIRILMA Analizi*
Kod : LAMINATE



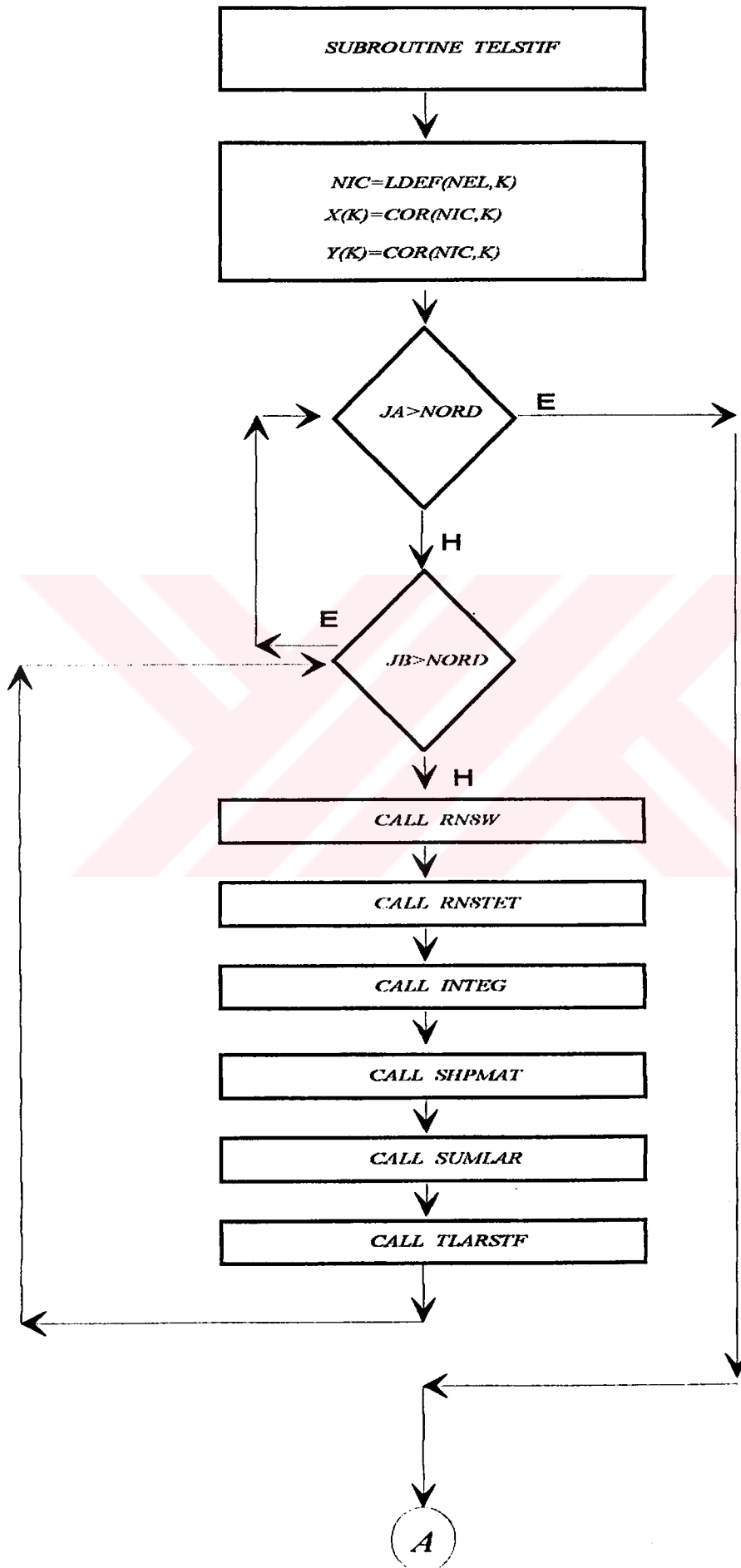


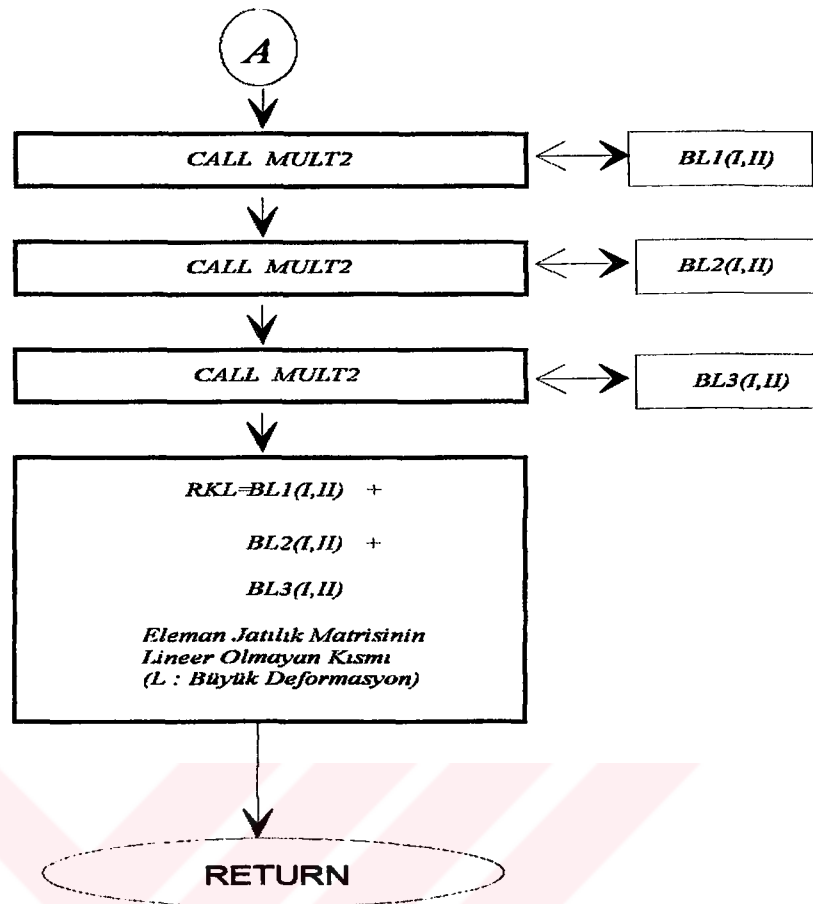


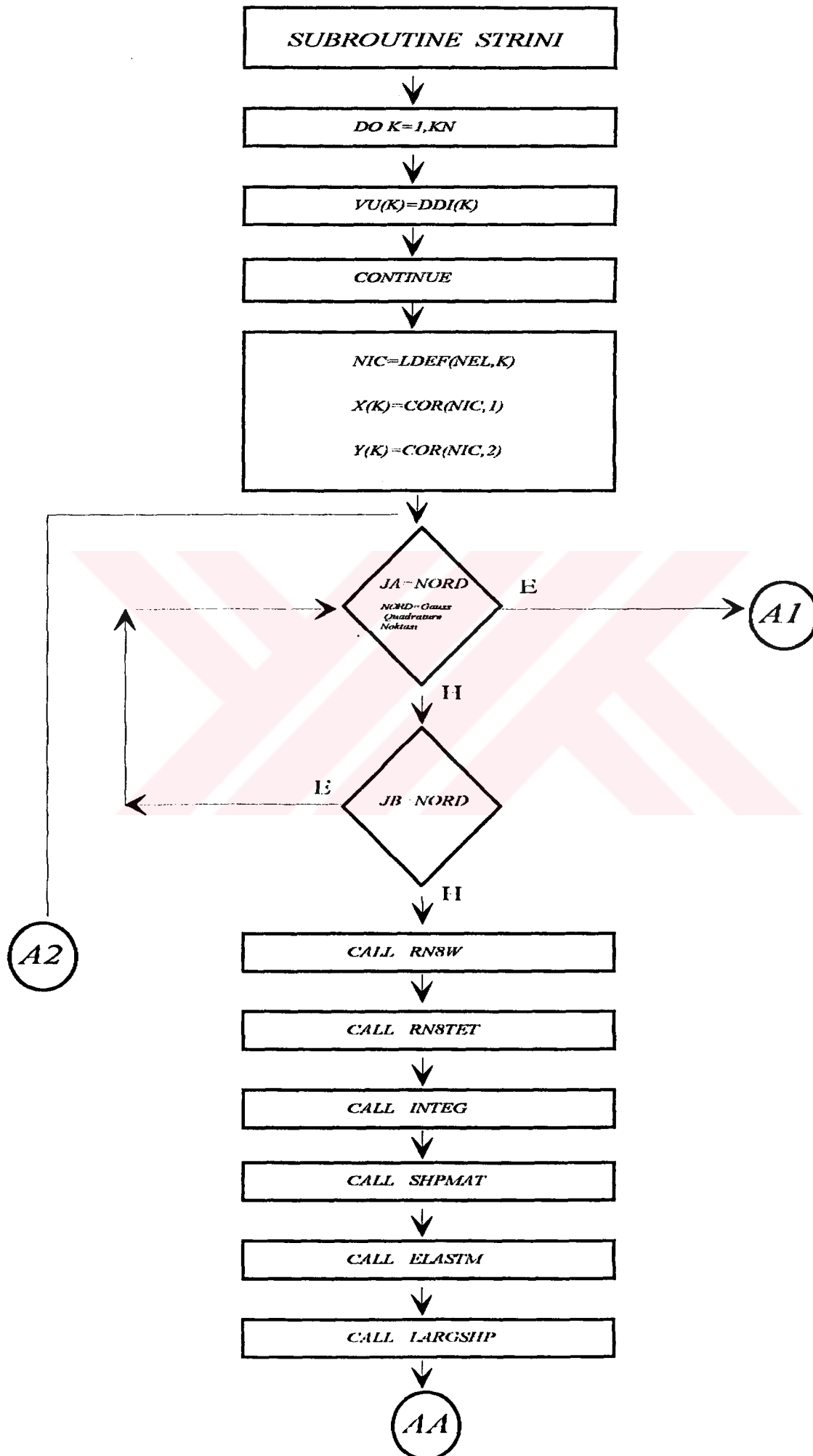


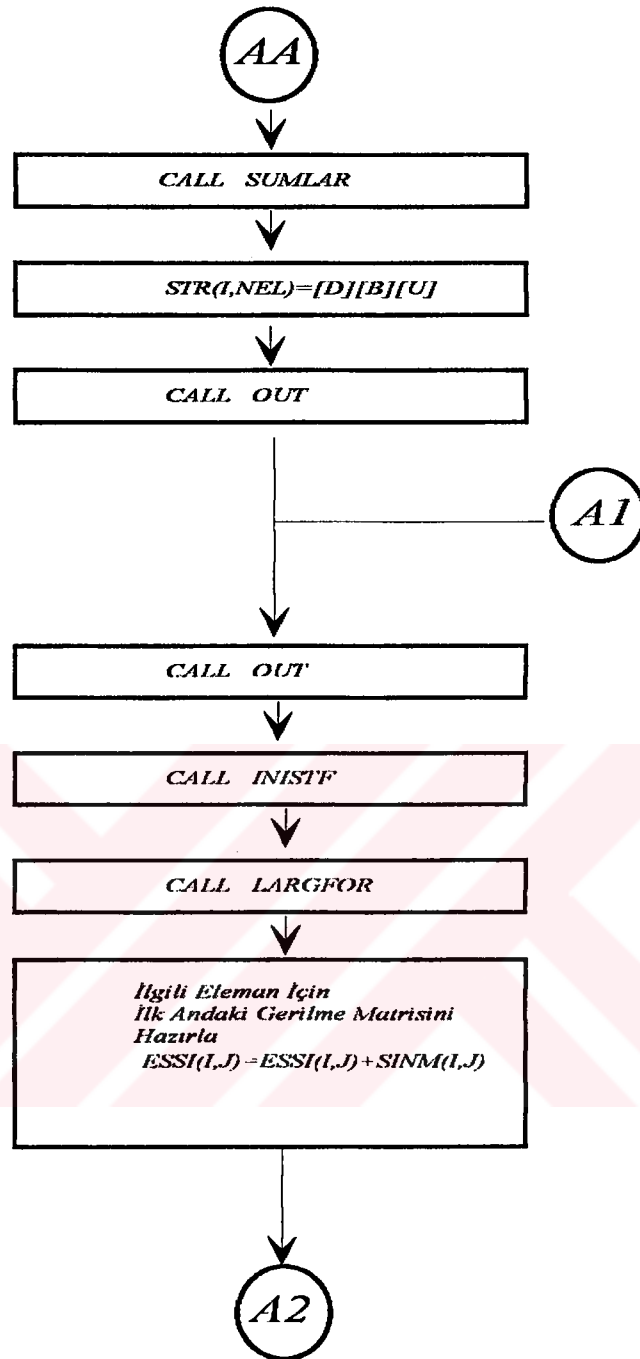


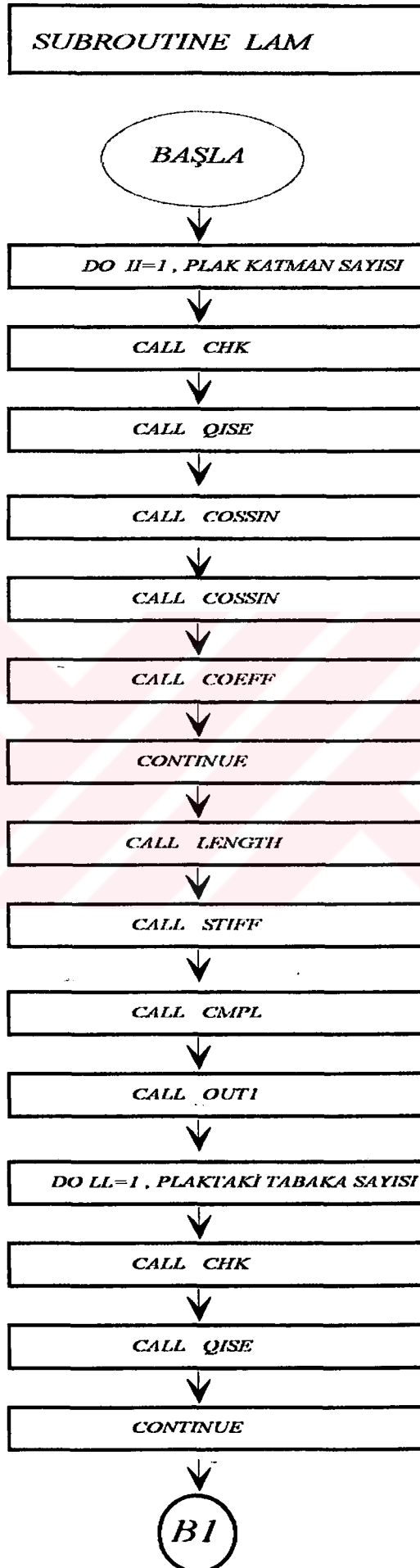
LINEER OLMAYAN ÇÖZÜM İÇİN KULLANILAN
BAŞLICA SUBROUTINE'LER

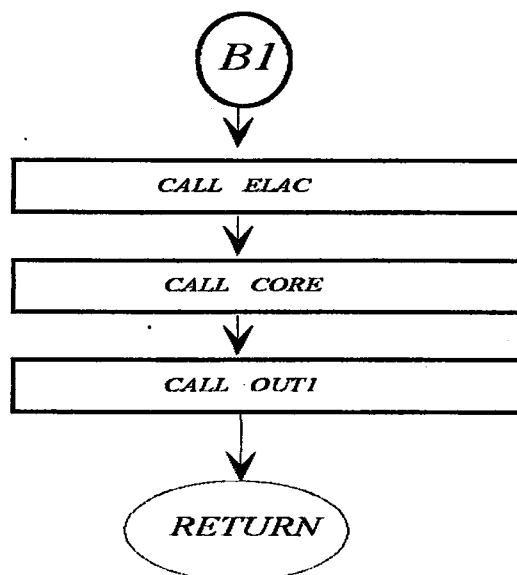


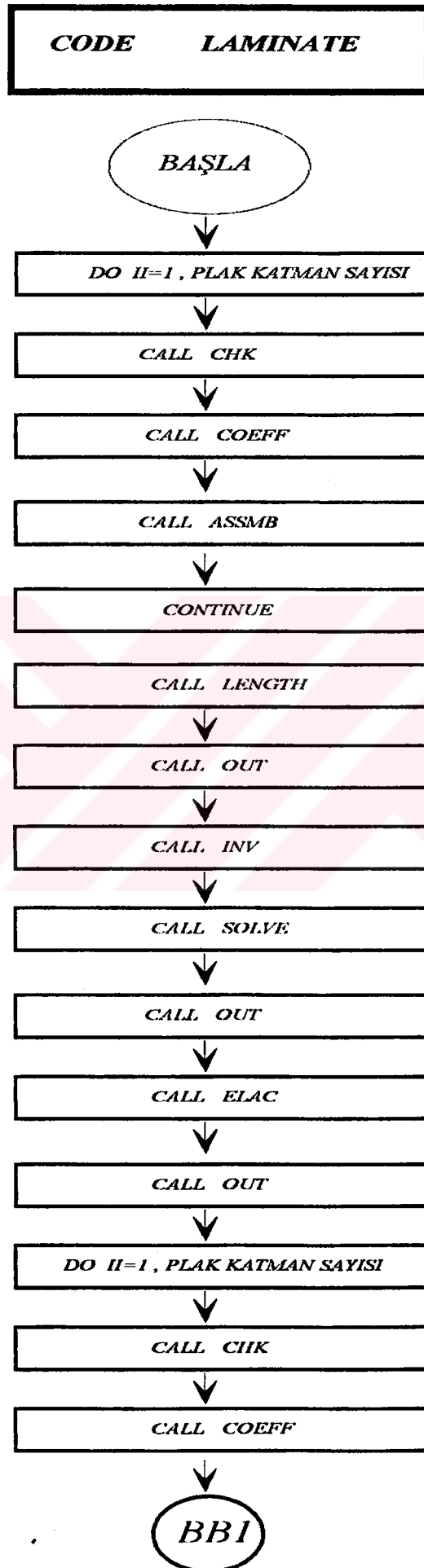


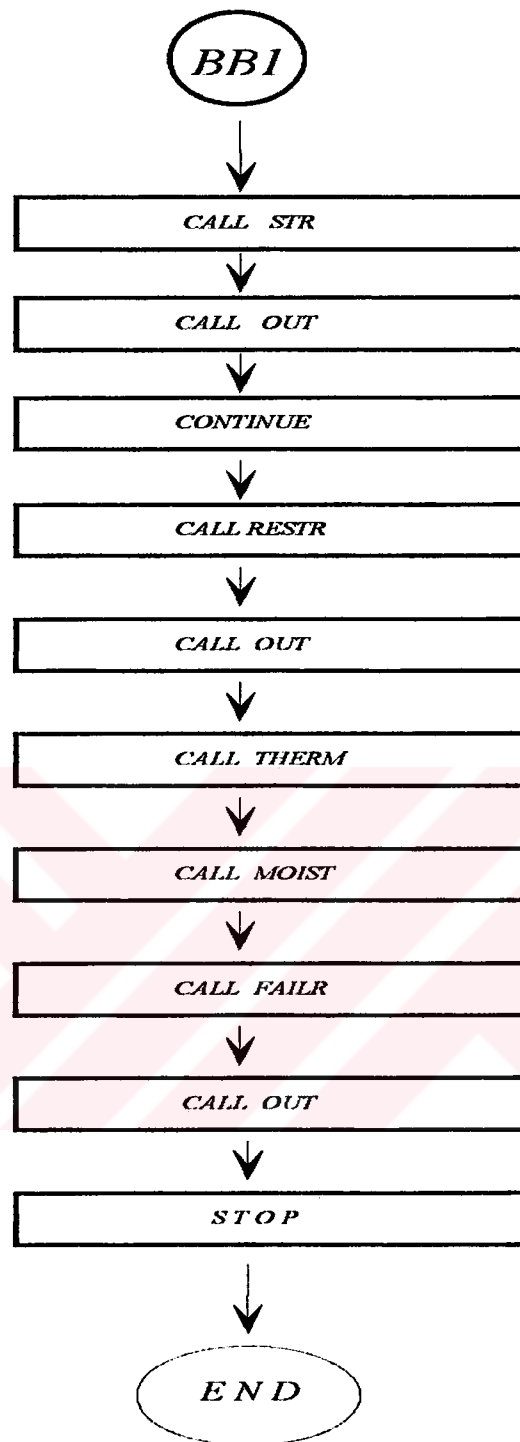












EK-V

ANALİTİK YÖNTEM İLE KOMPOZİT PLAKLARIN LİNEER VE LİNEER OLMAYAN DAVRANIŞLARININ ANALİZİ

Kirchhoff ve Mindlin'in Birinci Mertebeden Kayma Deformasyon Teorisi ile oluşan plaklar için alan denklemlerinin analitik çözüm metodları olarak Navier Metodu, Levy Metodu, Rayleigh-Ritz Metodu gibi yöntemler sayılabilir. Bu bölümde konu bütünlüğünü sağlamak amacıyla, ilk olarak Kirchhoff ve daha sonra da Mindlin Birinci Mertebeden Kayma Deformasyon Teorisi çözüm metodları özetlenecektir.

V.1 Navier Çözüm Metodu ve Sınır Şartları

Çözüm elde edebilmek için plağın geometrisi, plağın koordinat sistemi ve iki çeşit basit mesnetli sınır şartı'nın belirlenmesi gerekmektedir. Kullanılan sınır şartları, SS-1 ve SS-2 olarak tanımlanacak olursa bunlar aşağıdaki gibidir (Reddy, 1996).

V.1.1 SS-1 sınır şartları

SS-1 çeşit sınır şartları yalnızca katılık (stiffness) matrisi'nin A_{16} , A_{26} , B_{16} , B_{26} , D_{16} , D_{26} , A_{45} değerlerinin sıfır olması halinde kullanılabilir. Bu elastik sabitlerin çıkarılışı EK I' de etraflıca açıklanmıştır. Bu sabitlerin sıfır olması malzemenin yapısı ile ilgilidir. Bu çözüm metodunun kullanılabilmesi aşağıdaki şartlar dahilinde gerçekleşmektedir. Bunun haricindeki durumlarda, yeni elastik sabitlerin ortaya çıkması veya sıfırdan farklı bir değere sahip olması nedeni ile mümkün olamamaktadır. Analitik çözüm, aşağıda açıklanan şartlar dahilinde gerçekleşmektedir. Bunlar şunlardır ;

- 1) Plağın, tek tabakalı, özellikle-ortotropik kompozit yapıya sahip olması;

- 2) Plâğın, simetrik, çok tabakalı, çaprazlama dizilmiş (/ 0^0 / 90^0 / 0^0 / ...) yapıya sahip olması;
- 3) Plâğın, simetrisi olmayan, çok tabakalı, çaprazlama dizilmiş, ($1\ 0^0$ / 90^0 / 0^0 / ...) yapıya sahip olması.

SS-1 sınır şartları Denklem (V.1) ve Denklem(V.2) de belirtilmiştir.

$$\begin{aligned}
 u(x,0,0) = 0, \quad u(x,b,0) = 0, \quad v(0,y,0) = 0, \quad v(a,y,0) = 0, \\
 \frac{\partial u}{\partial z}(x,0,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x,b,0) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z}(0,y,0) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z}(a,y,0) = 0, \\
 w(x,0,0) = 0, \quad w(x,b,0) = 0, \quad w(0,y,0) = 0, \quad w(a,y,0) = 0
 \end{aligned} \tag{V.1}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xx}(0,y,z)dz = 0, \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xx}(a,y,z)dz = 0 \\
 \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{yy}(x,0,z)dz = 0, \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{yy}(x,b,z)dz = 0 \\
 \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xx}(0,y,z)zdz = 0, \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xx}(a,y,z)zdz = 0 \\
 \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{yy}(x,0,z)zdz = 0, \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{yy}(x,b,z)zdz = 0
 \end{aligned} \tag{V.2}$$

V.1.2 SS-2 sınır şartları

SS-2 çeşit sınır şartları yalnızca katılık(stiffness) matris'in A_{16} , A_{26} , B_{11} , B_{12} , B_{22} , B_{66} , D_{16} , D_{26} , A_{45} katılık matrisi değerlerinin sıfır olması halinde kullanılabilir. SS-2 sınır şartları, SS-1 sınır şartlarında yukarıda açıklanan aynı problem çözümleri için geçerlidir. Bu iki tip problem için, bünye denklemleri basitleşmekte ve seri çözüm elde edilebilmektedir. Sınır şartları aşağıda özetlenmiştir.

$$\begin{aligned}
 u(0, y, 0) = 0, \quad u(a, y, 0) = 0, \quad v(x, 0, 0) = 0, \quad v(x, b, 0) = 0, \\
 \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x, b, 0) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z}(0, y, 0) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z}(a, y, 0) = 0 \\
 w(x, 0, 0) = 0, \quad w(x, b, 0) = 0, \quad w(0, y, 0) = 0, \quad w(a, y, 0) = 0
 \end{aligned} \tag{V.3}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xy}(0, y, z) dz = 0, \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xx}(a, y, z) dz = 0 \\
 \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xy}(x, 0, z) dz = 0, \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xy}(x, b, z) dz = 0 \\
 \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xx}(0, y, z) z dz = 0, \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xx}(a, y, z) z dz = 0 \\
 \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{yy}(x, 0, z) z dz = 0, \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{yy}(x, b, z) z dz = 0
 \end{aligned} \tag{V.4}$$

V.2 Klasik Plak Teorisi

Bünye denklemlerinde, enine normal gerilme değeri σ_{zz} sıfır değildir. Halbuki, plak problemi, düzlemsel gerilme problemidir ve bunun yanısıra üç gerilme bileşeni σ_{xz} , σ_{yz} , σ_{zz} formülasyon sırasında, kullanılmamaktadır. Çünkü, Klasik Plak Teorisine göre enine genleme değerleri γ_{xz} , ϵ_{zz} sıfıra eşittir ve bunlara karşılık gelen gerilmelerin, genleme enerjileri sıfıra eşittir.

$$\delta\gamma_{xz} = 0, \quad \delta\gamma_{yz} = 0, \quad \delta\epsilon_{zz} = 0 \quad (V.5)$$

Böylece, enine gerilmeler otomatik olarak göz önüne alınmayacaklardır. Fakat sınır şartları ve kuvvet denge denklemleri içinde kullanılacaklardır. Klasik Plak Teorisi kabülleri aşağıdakilerdir;

- 1- Deformasyondan önce, orta plak düzlemine dik olan yüzey normalleri, deformasyondan sonra yine dik kalacaktır,
- 2- Normal vektör yönünde aksenal deformasyon yoktur,
- 3- Orta yanal yüzeyin kenarına dik olan normal vektörleri deformasyondan önce ve sonra bu yüzeye dik kalmaya devam ederler.

V.2.1 Plak denge ve bünye denklemleri

Klasik Plak Teorisinde kullanılan denge denklemleri şunlardır ;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + q &= 0
\end{aligned} \tag{V.6}$$

w yerdeğiştirme vektörünün, z koordinatı boyunca değişimi sıfırdır $\left(\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \right)$ ve bu genlemeler (Von Karman) aşağıdaki gibi tanımlanmıştır ;

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\
\varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\
\varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = 0 \\
\varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = 0 \\
\varepsilon_{zz} &= 0
\end{aligned} \tag{V.7}$$

Plak genlemeleri ve eğilmeleri, u_0 , v_0 , w_0 yerdeğiştirmeleri cinsinden ifade edilecek olursa ;

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx}^{(0)} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_{xx}^{(1)} = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\
\varepsilon_{yy}^{(0)} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2, \quad \varepsilon_{yy}^{(1)} = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\
\gamma_{xy}^{(0)} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y}, \quad \gamma_{xy}^{(1)} = -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}
\end{aligned} \tag{V.8}$$

Matris şeklinde yazıldığı zaman ise, Denklem (V.8) , Denklem (V.9) ve Denklem (V.10) şeklinde tekrar ifade edilebilir.

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^0 + z \underline{\varepsilon}^1$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(o)} \\ \varepsilon_{yy}^{(o)} \\ \gamma_{xy}^{(o)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix}$$

$$\underline{\varepsilon}^0 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(o)} \\ \varepsilon_{yy}^{(o)} \\ \gamma_{xy}^{(o)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_o}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_o}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_o}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_o}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} + \frac{\partial w_o}{\partial x} \frac{\partial w_o}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (V.9)$$

$$\underline{\varepsilon}^1 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \varepsilon_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (V.10)$$

Plak Bünye Denklemleri, birim uzunlukta ve t kalınlığındaki plak yüzeyi için Denklem(V.11) ve Denklem(V.12)'deki toplam gerilme değerlerini ifade etmektedir.

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz = [A] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(o)} \\ \varepsilon_{yy}^{(o)} \\ \gamma_{xy}^{(o)} \end{Bmatrix} + [B] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz = [B] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(o)} \\ \varepsilon_{yy}^{(o)} \\ \gamma_{xy}^{(o)} \end{Bmatrix} + [D] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (V.11)$$

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= [A] \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_o}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_o}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_o}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_o}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} + \frac{\partial w_o}{\partial x} \frac{\partial w_o}{\partial y} \end{Bmatrix} - [B] \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \\
\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= [B] \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_o}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_o}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_o}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_o}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} + \frac{\partial w_o}{\partial x} \frac{\partial w_o}{\partial y} \end{Bmatrix} - [D] \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{V.12}$$

Burada $[A]$, $[B]$, $[D]$ aşağıdaki formdadır. Bu matrisler uzama katılık matrisi, eğilme katılık matrisi ve uzama-eğilme etkili katılık matrisleri olarak adlandırılırlar (Reddy, 1996). Bu matrislerin herbiri kendi içinde simetriktir.

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix} \tag{V.13}$$

Denklem (V.11)'de bulunan gerilme sonuç değerleri, denge denklemlerinde Denklem (V.5) de, karşılık gelen yerlerine konacak olursa, denge denklemleri, lineer olmayan davranış için $[A]$, $[B]$, $[D]$ elastik sabitleri cinsinden, aşağıdaki gibi ifade edilmiş olacaklardır;

$$\begin{aligned}
& A_{11} \left(\frac{\partial^2 u_o}{\partial x^2} + \frac{\partial w_o}{\partial x} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} \right) + A_{12} \left(\frac{\partial^2 v_o}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_o}{\partial y} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \right) + \\
& A_{16} \left(\frac{\partial^2 u_o}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_o}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} \frac{\partial w_o}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \frac{\partial w_o}{\partial x} \right) - B_{11} \frac{\partial^3 w_o}{\partial x^3} \\
& B_{12} \frac{\partial^3 w_o}{\partial x \partial y^2} - 2B_{16} \frac{\partial^3 w_o}{\partial x^2 \partial y} + A_{16} \left(\frac{\partial^2 u_o}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_o}{\partial x} \frac{\partial^2 w_o}{\partial y \partial x} \right) + \\
& A_{26} \left(\frac{\partial^2 v_o}{\partial y^2} + \frac{\partial w_o}{\partial y} \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} \right) + A_{66} \left(\frac{\partial^2 u_o}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_o}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \frac{\partial w_o}{\partial y} + \frac{\partial w_o}{\partial x} \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} \right) - \\
& -B_{16} \frac{\partial^3 w_o}{\partial x^2 \partial y} - B_{26} \frac{\partial^3 w_o}{\partial y^3} - 2B_{66} \frac{\partial^3 w_o}{\partial x \partial y^2} = 0
\end{aligned} \tag{V.14-a}$$

$$\begin{aligned}
& A_{16} \left(\frac{\partial^2 u_o}{\partial x^2} + \frac{\partial w_o}{\partial x} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} \right) + A_{26} \left(\frac{\partial^2 v_o}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_o}{\partial y} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \right) + \\
& A_{66} \left(\frac{\partial^2 u_o}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_o}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} \frac{\partial w_o}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \frac{\partial w_o}{\partial x} \right) - B_{16} \frac{\partial^3 w_o}{\partial x^3} - \\
& B_{26} \frac{\partial^3 w_o}{\partial x \partial y^2} - 2B_{66} \frac{\partial^3 w_o}{\partial x^2 \partial y} + A_{12} \left(\frac{\partial^2 u_o}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_o}{\partial x} \frac{\partial^2 w_o}{\partial y \partial x} \right) + \\
& A_{22} \left(\frac{\partial^2 v_o}{\partial y^2} + \frac{\partial w_o}{\partial y} \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} \right) + A_{26} \left(\frac{\partial^2 u_o}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_o}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \frac{\partial w_o}{\partial y} + \frac{\partial w_o}{\partial x} \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} \right) - \\
& -B_{12} \frac{\partial^3 w_o}{\partial x^2 \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_o}{\partial y^3} - 2B_{26} \frac{\partial^3 w_o}{\partial x \partial y^2} = 0
\end{aligned} \tag{V.14-b}$$

$$\begin{aligned}
& B_{11} \left(\frac{\partial^3 u_o}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} + \frac{\partial w_o}{\partial x} \frac{\partial^3 w_o}{\partial x^3} \right) + \\
& B_{12} \left(\frac{\partial^3 v_o}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_o}{\partial y} \frac{\partial^3 w_o}{\partial x^2 \partial y} \right) - \\
& B_{16} \left(\frac{\partial^3 u_o}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v_o}{\partial x^3} + \frac{\partial w_o}{\partial y} \frac{\partial^3 w_o}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_o}{\partial x} \frac{\partial^3 w_o}{\partial x^2 \partial y} \right) - \\
& D_{11} \frac{\partial^4 w_o}{\partial x^4} - D_{12} \frac{\partial^4 w_o}{\partial x^2 \partial y^2} - 2D_{16} \frac{\partial^4 w_o}{\partial x^3 \partial y} + \\
& 2B_{16} \left(\frac{\partial^3 u_o}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_o}{\partial x} \frac{\partial^3 w_o}{\partial x^2 \partial y} \right) + \\
& 2B_{26} \left(\frac{\partial^3 v_o}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} + \frac{\partial w_o}{\partial y} \frac{\partial^3 w_o}{\partial x \partial y^2} \right) + \\
& 2B_{66} \left(\frac{\partial^3 u_o}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^2 v_o}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w_o}{\partial x^2 \partial y} \frac{\partial w_o}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} + \frac{\partial w_o}{\partial x} \frac{\partial^3 w_o}{\partial x \partial y} \right) \\
& - 2D_{16} \frac{\partial^4 w_o}{\partial x^3 \partial y} - 2D_{26} \frac{\partial^4 w_o}{\partial x \partial y^3} - 4D_{66} \frac{\partial^4 w_o}{\partial x^2 \partial y^2} + \\
& B_{12} \left(\frac{\partial^3 u_o}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 w_o}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial w_o}{\partial x} \right) + \\
& B_{22} \left(\frac{\partial^3 v_o}{\partial y^3} + \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 w_o}{\partial y^3} \frac{\partial w_o}{\partial y} \right) + \\
& B_{26} \left(\frac{\partial^3 u_o}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 v_o}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 w_o}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial w_o}{\partial y} + 2 \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} + \frac{\partial w_o}{\partial x} \frac{\partial^3 w_o}{\partial y^3} \right) - \\
& D_{12} \frac{\partial^4 w_o}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_o}{\partial y^4} - 2D_{26} \frac{\partial^4 w_o}{\partial x \partial y^3} + q = 0
\end{aligned} \tag{V.14-c}$$

Klasik Plak Teorisinin, lineer denge denklemleri, lineer olmayan (V.14-a), (V.14-b), (V.14-c) denklemlerindeki, türev çarpımları veya ikinci mertebeli türevlerin oluşturduğu terimlerin sıfır alınmasıyla elde edilmiştir (Reddy, 1996).

$$\begin{aligned}
& A_{11} \frac{\partial^2 u_o}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_o}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_o}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_o}{\partial x^2} + \\
& (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_o}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_o}{\partial y^2} - \\
& \left[B_{11} \frac{\partial^3 w_o}{\partial x^3} + 3B_{16} \frac{\partial^3 w_o}{\partial x^2 \partial y} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_o}{\partial x \partial y^2} + B_{26} \frac{\partial^3 w_o}{\partial y^3} \right] = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_{16} \frac{\partial^2 u_o}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_o}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_o}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_o}{\partial x^2} + \\
& 2A_{26} \frac{\partial^2 v_o}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_o}{\partial y^2} - \\
& \left[B_{16} \frac{\partial^3 w_o}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_o}{\partial x^2 \partial y} + 3B_{26} \frac{\partial^3 w_o}{\partial x \partial y^2} + B_{22} \frac{\partial^3 w_o}{\partial y^3} \right] = 0
\end{aligned} \tag{V.15}$$

$$\begin{aligned}
& B_{11} \frac{\partial^3 u_o}{\partial x^3} + 3B_{16} \frac{\partial^3 u_o}{\partial x^2 \partial y} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_o}{\partial x \partial y^2} + \\
& B_{26} \frac{\partial^3 u_o}{\partial y^3} + B_{16} \frac{\partial^3 v_o}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_o}{\partial x^2 \partial y} + 3B_{26} \frac{\partial^3 v_o}{\partial x \partial y^2} + B_{22} \frac{\partial^3 v_o}{\partial y^3} - \\
& \left[D_{11} \frac{\partial^4 w_o}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w_o}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_o}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w_o}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w_o}{\partial y^4} \right] + q = 0
\end{aligned}$$

Denklem(V.15), matrix formunda aşağıdaki gibi yazılacaktır.

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_o \\ V_o \\ W_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{mn} \end{bmatrix} \tag{V.16}$$

burada

$$\begin{aligned}
c_{11} &= (A_{11}dx^2 + 2A_{16}dxdy + A_{66}dy^2) \\
c_{12} &= (A_{16}dx^2 + A_{12} + A_{66})dxdy + A_{26}dy^2 \\
c_{13} &= -[B_{11}dx^3 + 3B_{16}dx^2dy + (B_{12} + 2B_{66})dxdy^2 + B_{26}dy^3] \\
c_{22} &= A_{66}dx^2 + 2A_{26}dxdy + A_{22}dy^2 \\
c_{23} &= -[B_{16}dx^3 + (B_{12} + 2B_{66})dx^2dy + 3B_{26}dxdy^2 + B_{22}dy^3] \\
c_{33} &= D_{11}dx^4 + 2D_{16}dx^3dy + 2(D_{12} + 2D_{66})dx^2dy^2 + 4D_{26}dxdy^3 + D_{22}dy^4
\end{aligned}$$

$$d^i x = \frac{\partial^i}{\partial x^i}, \quad d^i y = \frac{\partial^i}{\partial y^i}$$

(V.17)

olmaktadır.

V.3 Simetrik Olmayan Çaprazlama - Katlı Kompozit Plakların Klasik Plak

Teorisi ile Lineer Çözümü

Navier çözümü (çift seri çözüm), SS-1 sınır şartlarını kullanarak, aşağıdaki üç yerdeğiştirme fonksiyonu , u_o, v_o, w_o tarafından sağlanmaktadır. Denklem (V.18) de seçilen yerdeğiştirme fonksiyonları birbirlerine göre, diklik fonksiyonlarını (ortogonal olma şartı) ve böylece de sınır şartlarını sağlamaktadırlar (Vinson,1989).

$$\begin{aligned}
u_o(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{nm} \cos \alpha x \sin \beta y \\
v_o(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_{nm} \sin \alpha x \cos \beta y \\
w_o(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{nm} \sin \alpha x \sin \beta y \\
\alpha &= m\pi / a, \quad \beta = n\pi / b
\end{aligned}
\tag{V.18}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ [-(A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2) - (A_{12} + A_{66})\alpha\beta V_{mn}] + [B_{11}\alpha^3 + (B_{12} + B_{66})\alpha\beta^2] W_{mn} \right\} \cos\alpha x \sin\beta y = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ [-(A_{12} + A_{66})\alpha\beta U_{mn} - (A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2) V_{mn}] + [(B_{12} + 2B_{66})\alpha^2\beta + B_{22}\beta^3] W_{mn} \right\} \sin\alpha x \cos\beta y = 0 \quad (V.19)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ [(B_{11}\alpha^3 + (B_{12} + 2B_{66})\alpha\beta^2) \cdot U_{mn} + [(B_{12} + 2B_{66})\alpha^2\beta + B_{22}\beta^3] V_{mn} - [(D_{11}\alpha^4 + (D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4) W_{mn}] \right\} \sin\alpha x \sin\beta y = -q(x, y) \quad (V.20)$$

$$q(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q_{mn} \sin\alpha x \sin\beta y$$

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin\alpha x \sin\beta y dx dy$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} \cos\alpha x \sin\beta y = 0 \quad (V.21)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{mn} \sin\alpha x \cos\beta y = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{mn} \sin\alpha x \sin\beta y = 0$$

Denklem(V.18), Denklem(V.19) ve Denklem(V.20)'nin katsayıları, Denklem(V.21)'de görüldüğü gibi sıfır olması halinde, ($a_{mn} = b_{mn} = c_{mn} = 0$) ile sağlanmaktadır.

$$-(A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2) - (A_{12} + A_{66})\alpha\beta V_{mn} + [B_{11}\alpha^3 + (B_{12} + B_{66})\alpha\beta^2] W_{mn} = 0 \quad (V.22)$$

$$-(A_{12} + A_{66})\alpha\beta U_{mn} - (A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2)V_{mn} \\ [(B_{12} + 2B_{66})\alpha^2\beta + B_{22}\beta^3]W_{mn} = 0 \quad (V.23)$$

$$[(B_{11}\alpha^3 + (B_{12} + 2B_{66})\alpha\beta^2)U_{mn} + [(B_{12} + 2B_{66})\alpha^2\beta + B_{22}\beta^3]V_{mn} - \\ [(D_{11}\alpha^4 + (D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4)W_{mn} + q_{mn}] = 0 \quad (V.24)$$

veya

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{mn} \end{bmatrix} \quad (V.25)$$

şeklinde yazılabilir (Reddy, 1996). Burada;

$$\begin{aligned} c_{11} &= (A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta) \\ c_{12} &= (A_{12} + A_{66})\alpha\beta \\ c_{13} &= -B_{11}\alpha^3 - (B_{12} + 2B_{66})\alpha\beta^2 \\ c_{22} &= (A_{12}\alpha^2 + A_{66}\beta^2) \\ c_{23} &= -(B_{12} + 2B_{66})\alpha^2\beta - B_{22}\beta^3 \\ c_{33} &= D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4 \end{aligned} \quad (V.26)$$

$$U_{mn} = \frac{a_1}{a_0} W_{mn}$$

$$V_{mn} = \frac{a_2}{a_0} W_{mn}$$

$$W_{mn} = \frac{q_{mn}}{a_{mn}}$$

$$U_{mn} = \frac{a_1}{a_0} \frac{q_{mn}}{a_{mn}}$$

$$V_{mn} = \frac{a_2}{a_0} \frac{q_{mn}}{a_{mn}}$$

(V.27)

şeklinde ifade edilmektedir. Denklem(V.27) deki sabitler, aşağıdaki şekilde ifade edilirler;

$$\begin{aligned} a_{mn} &= c_{33} + c_{13} \frac{a_1}{a_0} + c_{23} \frac{a_2}{a_0}, a_0 = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{12} \\ a_1 &= c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22}, a_2 = c_{13}c_{12} - c_{11}c_{23} \end{aligned} \quad (V.28)$$

$$\begin{aligned} a_0 &= c_{11}c_{22} - c_{12}c_{12} \\ a_0 &= (A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2)(A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2) - (A_{12} + A_{66})\alpha\beta \end{aligned} \quad (V.29)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22} \\ a_1 &= [(A_{12} + A_{66})\alpha\beta][-(B_{12} + 2B_{66})\alpha^2\beta - B_{22}\beta^3] \\ &\quad - [\beta_{11}\alpha^3 - (B_{12} + 2B_{66})\alpha\beta^2](A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2) \end{aligned} \quad (V.30)$$

$$\begin{aligned} a_2 &= c_{13}c_{12} - c_{11}c_{23} \\ a_2 &= [-B_{11}\alpha^3 - (B_{12} + 2B_{66})\alpha\beta^2][(A_{12} + A_{66})\alpha\beta] - [(A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2)] \\ &\quad [(-)(B_{12} + 2B_{66})\alpha^2\beta - B_{22}\beta^3] \end{aligned} \quad (V.31)$$

$$\begin{aligned} a_{mn} &= c_{33} + c_{13} \frac{a_1}{a_0} + c_{23} \frac{a_2}{a_0} \\ a_{mn} &= (D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4) + \\ &\quad [-B_{11}\alpha^3 - (B_{12} + 2B_{66})\alpha\beta^2]x \frac{a_1}{a_0} + [-(B_{12} + 2B_{66})\alpha^2\beta - B_{22}\beta^3]x \frac{a_2}{a_0} \end{aligned} \quad (V.32)$$

burada

$$\begin{aligned} &[(A_{12} + A_{66})\alpha\beta][-(B_{12} + 2B_{66})\alpha^2\beta - B_{22}\beta^3] - \\ \frac{a_1}{a_0} &= \frac{[B_{11}\alpha^3 - (B_{12} + 2B_{66})\alpha\beta^2]x(A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2)}{(A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2)(A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2) - (A_{12} + A_{66})\alpha\beta} \end{aligned} \quad (V.33)$$

ve

$$\begin{aligned} &[-B_{11}\alpha^3 - (B_{12} + 2B_{66})\alpha\beta^2][(A_{12} + A_{66})\alpha\beta] - \\ \frac{a_2}{a_0} &= \frac{[(A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2)][-(B_{12} + 2B_{66})\alpha^2\beta - B_{22}\beta^3]}{(A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2)(A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2) - (A_{12} + A_{66})\alpha\beta} \end{aligned} \quad (V.34)$$

Simetrik olmayan çaprazlama dizilmiş plak düzlemlerinin, bazı özel karakteristikleri şunlardır:

$$\begin{aligned}
 A_{16} &= A_{26} = D_{16} = D_{26} = 0 \\
 A_{22} &= A_{11} \\
 D_{22} &= D_{11} \\
 B_{22} &= -B_{11} \\
 B_{ij} &= 0
 \end{aligned} \tag{V.35}$$

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2 \\
 C_{12} &= (A_{12} + A_{66})\alpha\beta \\
 C_{13} &= -B_{11}\alpha^3 - (B_{12} + 2B_{66})\alpha\beta^2 \\
 C_{13} &= -B_{11}\alpha^3 \\
 C_{22} &= (A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2) \\
 C_{23} &= -(B_{12} + 2B_{66})\alpha^2\beta - B_{22}\beta^3 \\
 C_{23} &= B_{11}\beta^3 \\
 C_{33} &= D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4
 \end{aligned} \tag{V.36}$$

$$\begin{aligned}
 A_{16} &= A_{26} = D_{16} = D_{26} = 0 \\
 B_{ij} &= 0
 \end{aligned} \tag{V.37}$$

Bu nedenle;

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= (A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2) \\
 C_{12} &= (A_{12} + A_{66})\alpha\beta \\
 C_{13} &= -B_{11}\alpha^3 - (B_{12} + 2B_{66})\alpha\beta^2 = 0 \\
 C_{22} &= (A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2) \\
 C_{23} &= -(B_{12} + 2B_{66})\alpha^2\beta - B_{22}\beta^3 = 0
 \end{aligned} \tag{V.38}$$

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 0 = c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22} \\
 a_2 &= 0 = c_{13}c_{12} - c_{11}c_{23} \\
 a_0 &= c_{11}c_{22} - c_{12}c_{12} \\
 a_{nm} &= c_{33} + c_{13} \frac{a_1}{a_0} + c_{23} \frac{a_2}{a_0} \\
 a_{nm} &= c_{33} \\
 a_{nm} &= D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4
 \end{aligned} \tag{V.39}$$

$$W_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (V.40)$$

$$W_{mn} = \frac{1}{c_{33}} q_{mn}$$

eşit olarak dağıtılmış yük için;

$$q_{mn} = \frac{16q_0}{\pi^2 mn} \quad (V.41)$$

olacaktır. Seri çözümde, m ve n'nin tek sayı değerleri için toplam değer bulunmaktadır.

$$W_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (V.42)$$

$$W_{mn} = \frac{q_{mn}}{a_{mn}} = \frac{q_{mn}}{c_{33}} = \frac{q_{mn}}{D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4}$$

$$W_{mn} = \frac{16q_0}{\pi^2 mn} \frac{1}{c_{33}} \quad (V.43)$$

$$W_{mn} = \frac{16q_0}{(\pi^2 mn) [D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4]}$$

$$W_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$W_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{16q_0}{(\pi^2 mn) [D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4]} \cdot \left(\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right) \quad (V.44)$$

Eşit olarak dağıtılmış yük altındaki özellikli - ortotropik plâkın sehim değerleri m ve n tek sayı değerleri için aşağıdaki gibidir (Reddy, 1996) ;

$$q_{mn} = \frac{16q_0}{\pi^2 mn} \quad (V.45)$$

$$W_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$W_{mn} = \frac{q_{mn} \pi^4}{b^4 [D_{11}m^4 s^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})m^2 n^2 s^2 + D_{22}n^4]} \quad (V.46)$$

burada, $s = \frac{a}{b}$ dir. Timoshenko (1959) 1 katlı, anizotropik plak için, sehim denklemini aşağıdaki şekilde vermiştir;

$$\begin{aligned}
 D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= q \\
 D_x \frac{E'_x h^3}{12} D_y &= \frac{E'_y h^3}{12} \\
 D_1 &= \frac{E'' h^3}{12}, D_{xy} = \frac{Gh^3}{12} \\
 H &= D_1 + 2D_{xy}
 \end{aligned} \tag{V.47}$$

$$\begin{aligned}
 W &= \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\
 a_{mn} &= \frac{16q_0}{\pi^6} \frac{1}{\left(\frac{m^4}{a^4} D_x + \frac{2m^2 n^2}{a^2 b^2} H + \frac{n^4}{b^4} D_y \right)}
 \end{aligned} \tag{V.48}$$

$$W = \frac{16q_0}{\pi^6} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^4}{a^4} D_x + \frac{2m^2 n^2}{a^2 b^2} H + \frac{n^4}{b^4} D_y \right)} \tag{V.49}$$

SEY kodundan elde edilen sonuçlar, yukarıda açıklanan Denklem (V.43)-Denklem (V.46) ile elde edilen teorik sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Bu denklemlerin yanısıra, plağın orta noktasında ($x = a/2, y = b/2$) ve orijindeki ($x = 0, y = 0$) M_{xx} , M_{yy} değerleri de hesaplanmaktadır. Burada a , plağın x yönündeki uzunluğu, b ise y yönündeki uzunluğudur. Bu hesaplamalar, hazırlanan bilgisayar kodu içinde yer alan alt program SUBROUTINE CPTASOL içinde hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar ve ilgili karşılaştırmalar ise 5 numaralı bölüm olan **‘BİRLEŞTİRİLMİŞ İNCE-KALIN PLAK ANALİZİ AŞAMALARI VE UYGULAMALAR’** bölümünde açıklanmaktadır.

V.4 Lineer Olmayan Birinci Mertebeden Kayma

Deformasyon Teorisi İle KPT'sinin Karşılaştırılması

Plakların gerilme-gerinme analizinde kullanılan en basit teorilerden biride Klasik Plak Teorisidir (KPT). Klasik Katlı Plak Teori (KKPT) , çok katlı plakların analizinde kullanılmaktadır. Bu teori Kirchhoff Plak Teorisinin bir uzantısı şeklindedir. Aşağıdaki yerdeğiştirme vektörel alanı, KPT için Denklem(V.50)'deki gibi tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned}\underline{u}(x, y, z, t) &= \underline{u}_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \underline{v}(x, y, z, t) &= \underline{v}_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \underline{w}(x, y, z, t) &= \underline{w}_0(x, y, t)\end{aligned}\tag{V.50}$$

Mindlin Teorisine göre, plağın orta yüzeyine deformasyondan önce dik olan yüzey normalleri, deformasyondan sonrada dik kalmakta, Kirchhoff Teorisine göre ise kalmamaktadır. Kirchhoff Teorisinin kabüllerinde plaka üzerinde, hem enine(tranverse) kayma etkileri hem de enine dikey genleme-gerilme etkileri göz önüne alınmamıştır. Böylece plağın deformasyonu, eğilme ve düzlemsel büyüme olarak incelenmektedir. Birinci Dereceden Kayma Deformasyon Teorisi veya Mindlin Teorisine göre kullanılmakta olan yerdeğiştirme vektörel alanı aşağıdaki gibi kabul edilmektedir;

$$\begin{aligned}\underline{u}(x, y, z, t) &= \underline{u}_0(x, y, t) + z \underline{\phi}_x(x, y, t) \\ \underline{v}(x, y, z, t) &= \underline{v}_0(x, y, t) + z \underline{\phi}_y(x, y, t) \\ \underline{w}(x, y, z, t) &= \underline{w}_0(x, y, t)\end{aligned}\tag{V.51}$$

Burada, $\underline{\phi}_x$ ve $\underline{\phi}_y$, x ve y eksenleri boyunca toplam dönme açısını göstermektedir veya diğer bir deyişle aşağıdaki gibi açıklanabilir;

$$\underline{\phi}_x : \frac{\partial w}{\partial x} + \text{normal vektörün ek dönme açısı,}$$

$$\phi_y : \frac{\partial w}{\partial y} + \text{normal vektörün ek dönme açısı.}$$

Mindlin Teorisine göre, oldukça büyük enine kayma genlemelerinin olduğu kabul edilmektedir. Ayrıca enine kayma genlemelerinin plağın kalınlığı boyunca sabit olduğu da göz önüne alınmaktadır. Kalın ve ince plakaların analizinde, plakanın kalınlığı azaltıldıkça, enine kayma gerilmelerinin etkidiği yanal yüzey alanı azalacağı için, yüzeye düşen gerilme miktarı artacaktır. Plaka çok incelendiği zaman, Klasik Plak Teorisinde olduğu gibi artık enine kayma gerilmelerinin göz önüne alınmaması gerektiği görüşü savunulmaktadır. Deformasyon değeri çok büyük olacaktır. Kayma Deformasyon Teorisine göre, plağın kalınlığı çok incelse enine kayma gerilmeleri halen hesaplamalar içinde yer almaktadır. Bu nedenle deformasyon değeri düşmektedir. Bu durum, teoride kayma kitlenmesi (shear locking) olarak açıklanmaktadır. Deformasyonun değerinin, yük arttıkça büyümesine izin vererek, aynı anda da kayma gerilmelerinin var olduğu gerçeğini göz önünde bulundurarak, kayma düzeltici faktör (shear correction factor) kullanılmaktadır. Bu faktörlerin doğru bir şekilde belirlenebilmesi ise oldukça zordur. Çok katlı kompozit yapılarda ise doğru bir sonuç elde etmek daha da zorlaşmaktadır.

Mindlin Teorisinin kullandığı yerdeğiştirme alanında, enine kayma genlemeleri ikinci dereceden denklemlerle tanımlandığı zaman, kayma düzeltici faktörlere ihtiyaç olmadığı, ayrıca enine kayma gerilmelerinin ve genlemelerinin plağın en üst ve en alt yüzeylerinde sıfırlandığı belirtilmektedir (Reddy, 1996). Fakat bu durumun kompozit plaklar için ne kadar geçerli olduğu açık değildir. Ayrıca, lineer olmayan davranışı izlemek, denklemlerin çözümü açısından oldukça karmaşık olacaktır. Bu nedenle, birinci dereceden plak teorisi kullanarak, kayma düzeltici fonksiyonlar ile analiz yolları daha yaygın olarak kullanılmaktadır.

V.4.1 Klasik Plak Teorisinde yerdeğiştirme vektörünün tanımlanması

Mindlin Teorisine göre, çok katlı plaklarda, orta yüzey normalleri deformasyondan önce dik olduğu halde, deformasyondan sonra yüzeye dikliğini koruyamamaktadır. Bu durum enine kayma deformasyonlarının teorisinin içeriğine alınması ile sağlanmıştır. Z koordinatı yönündeki yerdeğiştirmeler w , yine z yönüne bağımlı değildir. w yalnızca x ve y yönlerine bağımlıdır. Bu Denklem (V.50) ve Denklem (V.51) de görölmektedir. Klasik Plak Teorisinde(KPT) kullanılan sınırlamalar ve kaböller, Mindlin Teorisinde de geçerlidir. Mindlin Teorisine göre Birinci Dereceden Kayma Deformasyon Teorisinin yerdeğiştirme alanı Denklem (V.51) de açıklanmıştı. Denklem (V.51) de $(u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y)$ ifadeleri, Sonlu Elemanlar Yönteminde, her ağ noktasındaki genelleştirilmiş yerdeğiştirmeler olarak isimlendirilmektedirler. u_0, v_0, w_0 plağın orta yüzeyindeki yerdeğiştirmelerdir. Denklem (V.52), yerdeğiştirmelerin matris formunda bir ifadesidir.

$$\underline{\delta} = \begin{bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y \end{bmatrix} \quad (V.52)$$

KPT için yerdeğiştirme vektörünü kolay tanımlayabilmek için x yönündeki yerdeğiştirmeyi u yerine U_1 ile, v yerine U_2 ve w yerine U_3 ile gösterilmiş olsun. Kirchhoff kaböllerine göre (Erdem,1993) ;

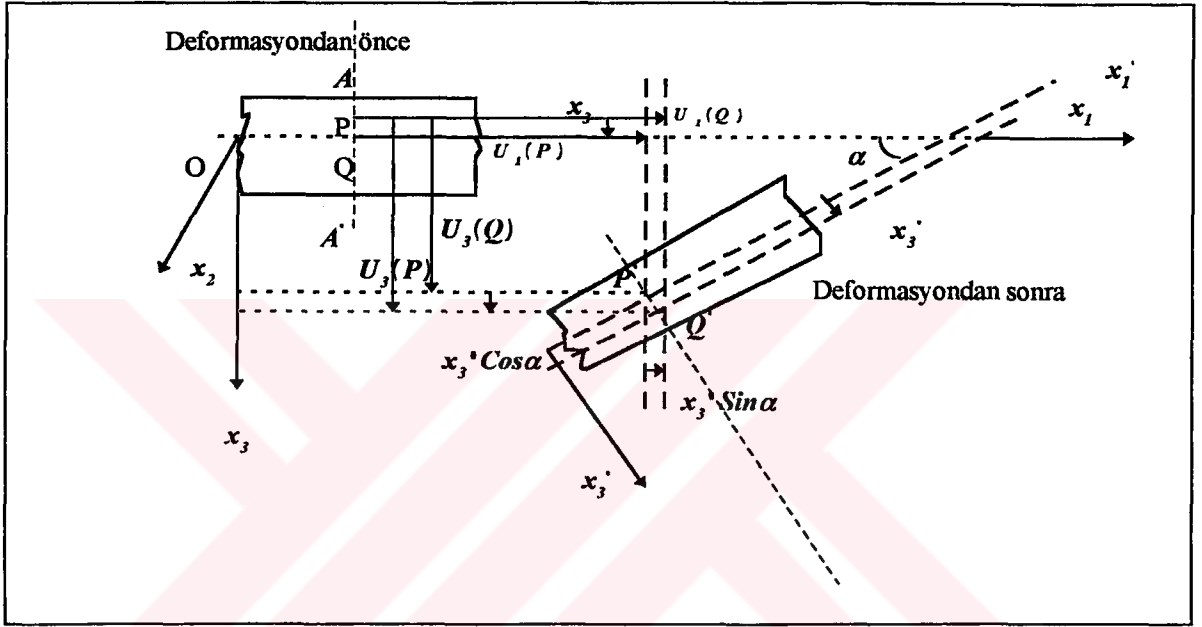
$$\begin{aligned} U_3(Q) &= U_3(P) - x_3 + x_3' \cos \alpha \\ U_1(Q) &= U_1(P) + x_3' \sin \alpha \end{aligned} \quad (V.53)$$

$$\epsilon_{33} = \frac{\Delta x_3' - \Delta x_3}{\Delta x_3} \quad (V.54)$$

olacaktır. Burada ϵ_{33} z yönündeki birim uzamadır.

$$\begin{aligned}\Delta x_3' &= \Delta x_3 (1 + \epsilon_{33}) \\ x_3' &= (1 + \epsilon_{33}) x_3\end{aligned}\quad (V.55)$$

$$\begin{aligned}P'Q' &= (1 + \epsilon_{33}) \overline{PQ} \\ x_3' &= x_3 \quad P'Q' = PQ\end{aligned}\quad (V.56)$$



Şekil V.1 Kirchhoff Teorisine göre yerdeğiştirme vektör alanının belirlenmesi

Denklem (V.56) da x_3' , $P'Q'$ ya eşittir (Şekil 5.1). Küçük deformasyon teorisine göre ϵ_{33} , 1 değerinin yanında çok küçük sayılar olarak ihmal edilmektedir.

$$\begin{aligned}U_3(Q) &= U_3(P) - x_3(1 - \cos \alpha) \\ U_1(Q) &= U_1(P) - x_3 \sin \alpha\end{aligned}\quad (V.57)$$

Küçük deformasyon teorisine göre ; rotasyonlar oldukça küçüktür. Böylece $\alpha \cong \sin \alpha \cong \tan \alpha$ olarak alınır.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_1}{\partial x_3} &= \lim_{\Delta x_3 \rightarrow 0} \frac{U_1(Q) - U_1(P)}{\Delta x_3} \\
&= \lim_{x_3 \rightarrow 0} \frac{x_3 \sin \alpha}{x_3} = \sin \alpha = \alpha = \tan \alpha \\
U_{1,3} &= \frac{\partial U_1}{\partial x_3} = \tan \alpha \\
\frac{\partial U_2}{\partial x_3} &= \lim_{\Delta x_3 \rightarrow 0} \frac{U_2(Q) - U_2(P)}{\Delta x_3} \\
&= \lim_{x_3 \rightarrow 0} \frac{x_3 \sin \alpha}{x_3} = \sin \alpha \\
U_{2,3} &= \tan \alpha = \sin \alpha
\end{aligned} \tag{V.58}$$

ve $U_{2,3}$, Denklem (V.57) denkleminde yerine konacak olursa ;

$$\begin{aligned}
U_3(Q) &= U_3(P) \\
U_1(Q) &= U_1(P) + x_3 U_{1,3}(P) \\
U_2(Q) &= U_2(P) + x_3 U_{2,3}(P)
\end{aligned} \tag{V.59}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{31}(P) &= \varepsilon_{32}(P) = 0 \\
\varepsilon_{13}(P) &= \frac{1}{2} [U_{1,3}(P) + U_{3,1}(P)] = 0 \\
\varepsilon_{23}(P) &= \frac{1}{2} [U_{2,3}(P) + U_{3,2}(P)] = 0
\end{aligned} \tag{V.60}$$

$$\begin{aligned}
U_{1,3}(P) &= -U_{3,1}(P) \\
U_{2,3}(P) &= -U_{3,2}(P)
\end{aligned} \tag{V.61}$$

$$\begin{aligned}
U_3(Q) &= U_3(P) \\
U_1(Q) &= U_1(P) - x_3 U_{3,1}(P) \\
U_2(Q) &= U_2(P) - x_3 U_{3,2}(P)
\end{aligned}$$

bulunur.

V.4.2 Lineer olmayan davranış için KPT ve Mindlin Teorisi denklemleri

Lineer olmayan genleme-yerdeğiştirme denklem sistemi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\
 \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
 \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
 \varepsilon_{22} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\
 \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
 \varepsilon_{33} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right]
 \end{aligned} \tag{V.62}$$

Lineer genlemeler, Denklem (V.63) de görüldüğü gibi birinci dereceli türevlerle açıklanmaktadır. Küçük deformasyonlar için türev çarpımları göz önüne alınmamaktadır. Böylece lineer denklemlerde ε^2 dereceli terimler Denklem (V.63)-Denklem (V.64) göz önüne alınmaz.

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z} = 0(\varepsilon) \tag{V.63}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2, \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2, \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right), \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right), \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right), \dots \tag{V.64}$$

Eğer enine genlemelerin normal vektörleri 10° ve 15° arasındaysa z yönündeki yerdeğiştirme vektörlerinin w ikinci türevleri ihmal edilememektedir

(Reddy,1996). Böylece küçük genleme (deformasyon) ve büyük rotasyona sahip genleme-yerdeğiştirme denklemleri aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\
 \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
 \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
 \varepsilon_{22} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\
 \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{V.65}$$

Klasik Plak Teori yerdeğiştirme vektör alanı $\frac{\partial w}{\partial z}$ değeri sıfır alınarak aşağıdaki şekilde elde edilecektir.

$$\begin{aligned}
 \underline{u}(x, y, z, t) &= \underline{u}_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
 \underline{v}(x, y, z, t) &= \underline{v}_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\
 \underline{w}(x, y, z, t) &= \underline{w}_0(x, y, t)
 \end{aligned} \tag{V.66}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\
 \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\
 \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = 0 \\
 \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = 0 \\
 \varepsilon_{zz} &= 0
 \end{aligned} \tag{V.67}$$

Denklem (V.67) de tanımlanan genlemeler, Von Karman genlemeleri olarak daha önceden de belirtildiği gibi, isimlendirilmektedirler.

Birinci Dereceden Kayma Deformasyon Teorisine göre lineer olmayan genlemeler, Denklem (V.51) ve (V.55) kullanılarak aşağıdaki formda bulunur.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\
 \gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + z \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\
 \varepsilon_{zz} &= 0
 \end{aligned} \tag{V.68}$$

Görüldüğü gibi, genlemeler ε_{xx} , ε_{yy} , γ_{xy} plağın kalınlığı boyunca lineer olarak değişmekle beraber, enine kayma genlemeleri γ_{xz} , γ_{yz} sabit kalmaktadırlar.

V.4.3 Mindlin Teorisine göre lineer olmayan davranış için genleme ve denge denklemleri

Denklem (V.52) de ifade edilen denklemler lineer olmayan davranış için Denklem (V.69) daki gibi yazılır. KPT için bu denklemleri elde edebilmek için, ϕ yerine θ koymak ve z koordinatının önüne ise (-) işareti getirilmesi gerekmektedir.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(0)} \\ \epsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(1)} \\ \epsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{yz}^{(1)} \\ \gamma_{xz}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (V.69)$$

Plak bünye denklemleri, statik analiz için aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q &= 0 \end{aligned} \quad (V.70)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0 \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - Q_y &= 0 \end{aligned} \quad (V.71)$$

Toplam gerilmeler ise Denklem (V.72) ile

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (V.72)$$

şekinde ifade edilirler. Burada $[A]$ ve $[B]$ daha önceki bölümlerde de anlatıldığı gibi uzama ve eğilme katılık matrisleridir.

Birinci Dereceden Kayma Deformasyon Teorisine göre denge denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} (a) : \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x + \frac{h}{2}(\tau_{1x} + \tau_{2x}) &= 0 \\ (b) : \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y + \frac{h}{2}(\tau_{1y} + \tau_{2y}) &= 0 \\ (c) : \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_{xy}}{\partial y} + p_1 - p_2 &= 0 \\ (d) : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + (\tau_{1x} + \tau_{2x}) &= 0 \\ (e) : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + (\tau_{1y} + \tau_{2y}) &= 0 \end{aligned} \quad (V.73)$$

Burada alt index olarak kullanılan 1 ve 2 sayıları plağın üst ve alt yüzeyini tanımlamak için kullanılmıştır. Aynı denklemlerin Klasik Plak Teori için yazılabilmesi için kayma gerilmelerinin denklemler içinde yok edilmesi gerekmektedir. Bunun için (a) ve (b) (c)'de yerine konulacak olursa, Denklem (V.74) elde edilecektir. $\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = 0$ alındığı zaman plağın yüzeyi boyunca hiçbir kayma yükü olmayacaktır. Çok katlı plaklar için bu durum doğru değildir. Böylece

$$\sigma_{1x} = \sigma_{xz} \left(+\frac{h}{2} \right) \text{ ve } \sigma_{2x} = \sigma_{xz} \left(-\frac{h}{2} \right) \text{ değerleri tanımlı olacaktır.}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p(x, y) &= 0 \\
\frac{\partial N_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + (\tau_{1x} - \tau_{2x}) &= 0 \\
\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + (\tau_{1y} - \tau_{2y}) &= 0
\end{aligned} \tag{V.74}$$

Eğilme momentleri lineer olmayan deformasyon için aşağıdaki gibi yazılacak olursa

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= [B] \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} + [D] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{V.75}$$

burada $[B]$ (3x3) uzama katılık matrisi, $[D]$ (3x3) eğilme-uzama katılık matrisidir. Denklem (V.70), Denklem (V.75) de yerine konacak olursa, denge denklemleri, yerdeğiştirmeler cinsinden ifade edilmiş olacaktır. Bu işlemden sonra elde edilen 5 denklem, genelleştirilmiş-yerdeğiştirmeler cinsinden elde edilmiş, ikinci dereceden, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem takımıdır.

$$\begin{aligned}
& A_{11} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right) + A_{12} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \right) + \\
& A_{16} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + \\
& B_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 \phi_{yy}}{\partial x \partial y} + B_{16} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) + \\
& A_{16} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + A_{26} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \\
& A_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \\
& B_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + B_{66} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} \right) = 0
\end{aligned} \tag{V.76}$$

$$\begin{aligned}
& A_{16} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + A_{26} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \right) + \\
& A_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + \\
& B_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + B_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} + B_{66} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) + \\
& A_{12} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + A_{22} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \\
& A_{26} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + B_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \\
& B_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + B_{26} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} \right) = 0
\end{aligned} \tag{V.77}$$

$$\begin{aligned}
& A_{55} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + A_{45} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) + \\
& A_{45} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) + A_{44} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + q = 0
\end{aligned} \tag{V.78}$$

$$\begin{aligned}
& B_{11} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + B_{12} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \right) + \\
& B_{16} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + \\
& D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} + D_{16} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) + \\
& B_{16} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + B_{26} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \\
& B_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \\
& D_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + D_{66} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} \right) - \\
& A_{55} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + \phi_x \right) - A_{45} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + \phi_y \right) = 0
\end{aligned} \tag{V.79}$$

$$\begin{aligned}
& B_{16} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + B_{26} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \right) + \\
& B_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \right) + \\
& D_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} + D_{66} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) + \\
& B_{12} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + B_{22} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \\
& B_{26} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \\
& D_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + D_{26} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) \\
& - A_{45} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \right) - A_{44} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \right) = 0
\end{aligned}$$

(V.80)

EK-VI

***LAMINATE
ÖRNEK VERİ-ÇIKIŞ DOSYASI***

M A T E R I A L S

2

MATERIAL NO: 1

HS-CARBON/EPOXY UD

E1	E2	G12	NU 12	
0.300000E+08	0.750000E+06	0.450000E+06	0.250000E+00	
XT	XC	YT	YC	S
0.150000E+04	0.120000E+04	0.500000E+02	0.250000E+03	0.700000E+02
EXT	EXC	EYT	EYC	ES
0.105000E+01	0.850000E+00	0.500000E+00	0.250000E+01	0.140000E+01
AL1	AL2	BT1	BT2	
-.300000E-06	0.280000E-04	0.100000E-01	0.300000E+00	

MATERIAL NO: 2

E-GLASS/EPOXY UD

E1	E2	G12	NU 12	
0.200000E+08	0.200000E+07	0.400000E+06	0.300000E+00	
XT	XC	YT	YC	S
0.100000E+04	0.600000E+03	0.300000E+02	0.110000E+03	0.400000E+02
EXT	EXC	EYT	EYC	ES
0.250000E+01	0.150000E+01	0.350000E+00	0.135000E+01	0.100000E+01
AL1	AL2	BT1	BT2	
0.600000E-05	0.350000E-04	0.100000E-01	0.300000E+00	

TOTAL NUMBER OF POSSIBLE CONFIGURATIONS: 4
 CONFIG NO: ANGLE: THICKNESS: MATER NO:

1	60.0000	0.1250	1
2	90.0000	1.7800	1
3	0.0000	1.7800	1
4	-45.0000	0.1250	2

Number of Material Types in the Laminate : 2

1
2

Specify full layup for composite laminate starting
 with bottom ply (ply 1)

LAYUP

Plies:

9

SYMMETRIC:1 UNSYMMETRIC:0 ODD NUMBER OF LAYERS:3
 PROBLEM TYPE: 3.00

PLY NO: PLY THICKNESS: MAT NUM: CONF NO: PLY ANGLE:

1	0.178000E+01	1	3	0.000
2	0.178000E+01	1	2	90.000
3	0.178000E+01	1	3	0.000
4	0.178000E+01	1	2	90.000
5	0.178000E+01	1	3	0.000
6	0.178000E+01	1	2	90.000
7	0.178000E+01	1	3	0.000
8	0.178000E+01	1	2	90.000
9	0.178000E+01	1	3	0.000

PLY NO : Zo VALUES WITH RESPECT TO THE MID PLANE

1	-.801000E+01
2	-.623000E+01
3	-.445000E+01
4	-.267000E+01
5	-.890000E+00
Mid Plane	0.000000E+00
6	0.890000E+00
7	0.267000E+01
8	0.445000E+01
9	0.623000E+01
10	0.801000E+01

A B C STIFFNESS MATRIX

1 : Extensional stiffness matrix A_{ij}
 2 : Coupling stiffness matrix B_{ij}
 3 : Bending stiffness matrix D_{ij}

272766E+09	*	0.300845E+07	*	0.000000E+00	*	-.107131E-06	*
300845E+07	*	0.220620E+09	*	0.000000E+00	*	0.354930E-09	*
000000E+00	*	0.000000E+00	*	0.720900E+07	*	0.000000E+00	*
107131E-06	*	0.354930E-09	*	0.000000E+00	*	0.693504E+10	*
354930E-09	*	0.172783E-06	*	0.000000E+00	*	0.643408E+08	*
000000E+00	*	0.000000E+00	*	-.526597E-09	*	0.000000E+00	*

a-b-c COMPLIANCE MATRIX

- 1: Extensional compliance matrix a_{ij}
 2: Coupling compliance matrix b_{ij}
 3: Bending compliance matrix d_{ij}

366669E-08	*	-.500004E-10	*	0.000000E+00	*	0.566355E-25	*
500004E-10	*	0.453337E-08	*	0.000000E+00	*	0.100494E-26	*
000000E+00	*	0.000000E+00	*	0.138715E-06	*	0.000000E+00	*
566355E-25	*	0.100494E-26	*	0.000000E+00	*	0.144219E-09	*
102128E-26	*	-.216579E-24	*	0.000000E+00	*	-.256554E-11	*
000000E+00	*	0.000000E+00	*	0.473789E-24	*	0.000000E+00	*

TOTAL THICKNESS OF THE PLATE : 16.0200

E L A S T I C CONSTANTS - MEMBRANE MODEL

Ex : 0.170240E+08
 Ey : 0.137694E+08
 Gxy : 0.450000E+06
 Nuxy : 0.136364E-01
 Nuyx : 0.110294E-01
 Mx : 0.000000E+00
 My : 0.000000E+00

E L A S T I C CONSTANTS - BENDING MODE

Ex : 0.202382E+08
 Ey : 0.105549E+08
 Gxy : 0.450000E+06
 Nuxy : 0.177892E-01
 Nuyx : 0.927764E-02
 Mx : 0.000000E+00
 My : 0.000000E+00

* * * * *

MIDPLANE STRAINS AND CURVATURES

Ex Ey Exy Kx Ky Kxy IN THE LAMINATE w.r.t. MID PLANE AND

0.366669E-07
 -.500004E-09
 0.000000E+00
 0.566355E-24
 0.102128E-25
 0.000000E+00

=====

F A I L U R E I N D I C E S
 M E C H A N I C A L L O A D I N G

MAXIMUM STRESS THEORY

SPECIFICATIONS:

PRFL=PROBABLE FAILURE MODE

PRFL=0.0 : NO FAILURE

PRFL=1.0 : FAILURE DUE TO f1

PRFL=2.0 : FAILURE DUE TO f2

PRFL=3.0 : FAILURE DUE TO f12

=====

PLY NO	PLY STRESSES			PRFL FAILURE MODES
1	0.734424E-03	0.130204E-03	0.000000E+00	0.0000 0.0000 0.0000
2	0.678148E-05	0.548987E-03	0.000000E+00	0.0000 0.0000 0.0000
3	0.734424E-03	0.130204E-03	0.000000E+00	0.0000 0.0000 0.0000
4	0.678148E-05	0.548987E-03	0.000000E+00	0.0000 0.0000 0.0000
5	0.734424E-03	0.130204E-03	0.000000E+00	0.0000 0.0000 0.0000

6	0.734424E-03	0.130204E-03	0.000000E+00	0.0000 0.0000 0.0000
7	0.678148E-05	0.548987E-03	0.000000E+00	0.0000 0.0000 0.0000
8	0.734424E-03	0.130204E-03	0.000000E+00	0.0000 0.0000 0.0000
9	0.678148E-05	0.548987E-03	0.000000E+00	0.0000 0.0000 0.0000
10	0.734424E-03	0.130204E-03	0.000000E+00	0.0000 0.0000 0.0000

F.I.# >1 : FAILURE INDEX
 MAXIMUM STRAIN THEORY
 SPECIFICATIONS :
 PRFL=PROBABLE FAILURE MODE
 PRFL=0.0 : NO FAILURE
 PRFL=1.0 : FAILURE DUE TO e1
 PRFL=2.0 : FAILURE DUE TO e2
 PRFL=3.0 : FAILURE DUE TO e12

=====

PLY NO	PLY STRAINS	PRFL FAILURE MODES

1	0.349209E-07 0.200002E-09 0.000000E+00	0.0000 0.0000 0.0000
2	0.588240E-09 0.733339E-07 0.000000E+00	0.0000 0.0000 0.0000
3	0.349209E-07 0.200002E-09 0.000000E+00	0.0000

				0.0000	
				0.0000	
4	0.588240E-09	0.733339E-07	0.000000E+00		
				0.0000	
				0.0000	
				0.0000	
5	0.349209E-07	0.200002E-09	0.000000E+00		
				0.0000	
				0.0000	
				0.0000	
6	0.349209E-07	0.200002E-09	0.000000E+00		
				0.0000	
				0.0000	
				0.0000	
7	0.588240E-09	0.733339E-07	0.000000E+00		
				0.0000	
				0.0000	
				0.0000	
8	0.349209E-07	0.200002E-09	0.000000E+00		
				0.0000	
				0.0000	
				0.0000	
9	0.588240E-09	0.733339E-07	0.000000E+00		
				0.0000	
				0.0000	
				0.0000	
10	0.349209E-07	0.200002E-09	0.000000E+00		
				0.0000	
				0.0000	
				0.0000	

=====

RESULTS OF THE INTERACTIVE THORIES

Results w.r.t. M E C H A N I C A L stresses and strains:
 Failure occure for each ply when the given inequalities of
 the corresponding theories are not satisfied
 Results corresponding F.I. values are found as in the
 followings:

=====

If F.I.# >= 1.0 then theories for which failure
 of ply occure shown by their corresponding theory number
 0 : means there is no failure

THEORIES

FAILURE INDEX VALUE=F.I

```

PLY NUMBER      1
1-)HOFFMAN THEORY      -.787688E-04
2-)TSAI-WU STRESS THEORY -.788126E-04
3-)TSAI-HILL THEORY    0.553144E-06
4-)TSAI-WU STRAIN THEORY -.788126E-04
      FAILURE OCCURE(Theo. num)
      -----

```

```

      0.0000
      0.0000
      0.0000
      0.0000

```

```

PLY NUMBER      2
1-)HOFFMAN THEORY      0.440606E-03
2-)TSAI-WU STRESS THEORY 0.440608E-03
3-)TSAI-HILL THEORY    0.301588E-06
4-)TSAI-WU STRAIN THEORY 0.440608E-03
      FAILURE OCCURE(Theo. num)
      -----

```

```

      0.0000
      0.0000
      0.0000
      0.0000

```

```

PLY NUMBER      3
1-)HOFFMAN THEORY      -.787688E-04
2-)TSAI-WU STRESS THEORY -.788126E-04
3-)TSAI-HILL THEORY    0.553144E-06
4-)TSAI-WU STRAIN THEORY -.788126E-04
      FAILURE OCCURE(Theo. num)
      -----

```

```

      0.0000
      0.0000
      0.0000
      0.0000

```

```

PLY NUMBER      4
1-)HOFFMAN THEORY      0.440606E-03
2-)TSAI-WU STRESS THEORY 0.440608E-03
3-)TSAI-HILL THEORY    0.301588E-06
4-)TSAI-WU STRAIN THEORY 0.440608E-03
      FAILURE OCCURE(Theo. num)
      -----

```

```

      0.0000
      0.0000

```

0.0000
0.0000

PLY NUMBER 5
1-)HOFFMAN THEORY -.787688E-04
2-)TSAI-WU STRESS THEORY -.788126E-04
3-)TSAI-HILL THEORY 0.553144E-06
4-)TSAI-WU STRAIN THEORY -.788126E-04
FAILURE OCCURE(Theo. num)

0.0000
0.0000
0.0000
0.0000

PLY NUMBER 6
1-)HOFFMAN THEORY -.787688E-04
2-)TSAI-WU STRESS THEORY -.788126E-04
3-)TSAI-HILL THEORY 0.553144E-06
4-)TSAI-WU STRAIN THEORY -.788126E-04
FAILURE OCCURE(Theo. num)

0.0000
0.0000
0.0000
0.0000

PLY NUMBER 7
1-)HOFFMAN THEORY 0.440606E-03
2-)TSAI-WU STRESS THEORY 0.440608E-03
3-)TSAI-HILL THEORY 0.301588E-06
4-)TSAI-WU STRAIN THEORY 0.440608E-03
FAILURE OCCURE(Theo. num)

0.0000
0.0000
0.0000
0.0000

PLY NUMBER 8
1-)HOFFMAN THEORY -.787688E-04
2-)TSAI-WU STRESS THEORY -.788126E-04
3-)TSAI-HILL THEORY 0.553144E-06
4-)TSAI-WU STRAIN THEORY -.788126E-04
FAILURE OCCURE(Theo. num)

0.0000
0.0000
0.0000
0.0000

PLY NUMBER 9
 1-)HOFFMAN THEORY 0.440606E-03
 2-)TSAI-WU STRESS THEORY 0.440608E-03
 3-)TSAI-HILL THEORY 0.301588E-06
 4-)TSAI-WU STRAIN THEORY 0.440608E-03
 FAILURE OCCURE(Theo. num)

0.0000
 0.0000
 0.0000
 0.0000

PLY NUMBER 10
 1-)HOFFMAN THEORY -.787688E-04
 2-)TSAI-WU STRESS THEORY -.788126E-04
 3-)TSAI-HILL THEORY 0.553144E-06
 4-)TSAI-WU STRAIN THEORY -.788126E-04
 FAILURE OCCURE(Theo. num)

0.0000
 0.0000
 0.0000
 0.0000

 T H E R M A L E F F E C T

APPARENT LAMINATE T H E R M A L F O R C E - M O M E N T
 I N T E N S I T I E S :

-.115926E+05
 -.159949E+05
 0.000000E+00
 -.922418E-11
 0.702016E-11
 0.000000E+00

T H E R M A L M I D P L A N E S T R A I N S A N D C U R V A T U R E S
 -

-.417066E-04
 -.719313E-04

0.000000E+00

266

-.202094E-20

0.541728E-20

0.000000E+00

R E S I D U A L

PLY STRAINS FOR X-Y COORDINATE SYSTEM

Layer no	ex	ey	exy
1	0.417433E-04	0.719308E-04	0.000000E+00
2	0.417433E-04	0.719308E-04	0.000000E+00
3	0.417433E-04	0.719308E-04	0.000000E+00
4	0.417433E-04	0.719308E-04	0.000000E+00
5	0.417433E-04	0.719308E-04	0.000000E+00
6	0.417433E-04	0.719308E-04	0.000000E+00
7	0.417433E-04	0.719308E-04	0.000000E+00
8	0.417433E-04	0.719308E-04	0.000000E+00
9	0.417433E-04	0.719308E-04	0.000000E+00
10	0.417433E-04	0.719308E-04	0.000000E+00

PLY STRAINS FOR XY COOR.SYS. BELOW

Layer no	ex	ey	exy
1	0.417433E-04	0.719308E-04	0.000000E+00
2	0.417433E-04	0.719308E-04	0.000000E+00
3	0.417433E-04	0.719308E-04	0.000000E+00
4	0.417433E-04	0.719308E-04	0.000000E+00
5	0.417433E-04	0.719308E-04	0.000000E+00
6	0.417433E-04	0.719308E-04	0.000000E+00
7	0.417433E-04	0.719308E-04	0.000000E+00
8	0.417433E-04	0.719308E-04	0.000000E+00

9	0.417433E-04	0.719308E-04	0.000000E+00
10	0.417433E-04	0.719308E-04	0.000000E+00

PLY STRAINS FOR 1-2 COORDINATE SYSTEM

Layer no	e1	e2	e12
1	0.417433E-04	0.719308E-04	0.000000E+00
2	0.719308E-04	0.417433E-04	0.000000E+00
3	0.417433E-04	0.719308E-04	0.000000E+00
4	0.719308E-04	0.417433E-04	0.000000E+00
5	0.417433E-04	0.719308E-04	0.000000E+00
6	0.417433E-04	0.719308E-04	0.000000E+00
7	0.719308E-04	0.417433E-04	0.000000E+00
8	0.417433E-04	0.719308E-04	0.000000E+00
9	0.719308E-04	0.417433E-04	0.000000E+00
10	0.417433E-04	0.719308E-04	0.000000E+00

PLY STRAINS FOR 1-2 COORD.SYS.(Principle) BELOW

Layer no	e1	e2	e12
1	0.417433E-04	0.719308E-04	0.000000E+00
2	0.719308E-04	0.417433E-04	0.000000E+00
3	0.417433E-04	0.719308E-04	0.000000E+00
4	0.719308E-04	0.417433E-04	0.000000E+00
5	0.417433E-04	0.719308E-04	0.000000E+00
6	0.417433E-04	0.719308E-04	0.000000E+00
7	0.719308E-04	0.417433E-04	0.000000E+00
8	0.417433E-04	0.719308E-04	0.000000E+00
9	0.719308E-04	0.417433E-04	0.000000E+00
10	0.417433E-04	0.719308E-04	0.000000E+00

PLY STRESSES FOR 1-2 COORDINATE SYSTEM

Layer no	f1	f2	f12
1	0.126777E+04	0.618716E+02	0.000000E+00
2	0.216914E+04	0.448646E+02	0.000000E+00
3	0.126777E+04	0.618716E+02	0.000000E+00
4	0.216914E+04	0.448646E+02	0.000000E+00
5	0.126777E+04	0.618716E+02	0.000000E+00
6	0.126777E+04	0.618716E+02	0.000000E+00
7	0.216914E+04	0.448646E+02	0.000000E+00
8	0.126777E+04	0.618716E+02	0.000000E+00
9	0.216914E+04	0.448646E+02	0.000000E+00
10	0.126777E+04	0.618716E+02	0.000000E+00

PLY STRESSES FOR 1-2 COORD.SYS. BELOW LAYER

Layer no	f1	f2	f12
1	0.126777E+04	0.618716E+02	0.000000E+00
2	0.216914E+04	0.448646E+02	0.000000E+00
3	0.126777E+04	0.618716E+02	0.000000E+00
4	0.216914E+04	0.448646E+02	0.000000E+00
5	0.126777E+04	0.618716E+02	0.000000E+00
6	0.126777E+04	0.618716E+02	0.000000E+00
7	0.216914E+04	0.448646E+02	0.000000E+00
8	0.126777E+04	0.618716E+02	0.000000E+00
9	0.216914E+04	0.448646E+02	0.000000E+00
10	0.126777E+04	0.618716E+02	0.000000E+00

* NON-MECHANICAL (THERMAL OR MOISTURE)
LOADS-UNSTRAINED STRESSES AND STRAINS

PLY STRAINS FOR X-Y COORDINATE SYSTEM

Layer no	ex	ey	exy
----------	----	----	-----

1	-.417066E-04	-.719313E-04	0.000000E+00
2	-.417066E-04	-.719313E-04	0.000000E+00
3	-.417066E-04	-.719313E-04	0.000000E+00
4	-.417066E-04	-.719313E-04	0.000000E+00
5	-.417066E-04	-.719313E-04	0.000000E+00
6	-.417066E-04	-.719313E-04	0.000000E+00
7	-.417066E-04	-.719313E-04	0.000000E+00
8	-.417066E-04	-.719313E-04	0.000000E+00
9	-.417066E-04	-.719313E-04	0.000000E+00
10	-.417066E-04	-.719313E-04	0.000000E+00

PLY STRAINS FOR XY COOR.SYS. BELOW

Layer no	ex	ey	exy
1	-.417066E-04	-.719313E-04	0.000000E+00
2	-.417066E-04	-.719313E-04	0.000000E+00
3	-.417066E-04	-.719313E-04	0.000000E+00
4	-.417066E-04	-.719313E-04	0.000000E+00
5	-.417066E-04	-.719313E-04	0.000000E+00
6	-.417066E-04	-.719313E-04	0.000000E+00
7	-.417066E-04	-.719313E-04	0.000000E+00
8	-.417066E-04	-.719313E-04	0.000000E+00
9	-.417066E-04	-.719313E-04	0.000000E+00
10	-.417066E-04	-.719313E-04	0.000000E+00

PLY STRAINS FOR 1-2 COORDINATE SYSTEM

Layer no	e1	e2	e12
1	-.417066E-04	-.719313E-04	0.000000E+00
2	-.719313E-04	-.417066E-04	0.000000E+00
3	-.417066E-04	-.719313E-04	0.000000E+00

4	-.719313E-04	-.417066E-04	0.000000E+00 ²⁷⁰
5	-.417066E-04	-.719313E-04	0.000000E+00
6	-.417066E-04	-.719313E-04	0.000000E+00
7	-.719313E-04	-.417066E-04	0.000000E+00
8	-.417066E-04	-.719313E-04	0.000000E+00
9	-.719313E-04	-.417066E-04	0.000000E+00
10	-.417066E-04	-.719313E-04	0.000000E+00

PLY STRAINS FOR 1-2 COORD.SYS.(Principle) BELOW

Layer no	e1	e2	e12
1	-.417066E-04	-.719313E-04	0.000000E+00
2	-.719313E-04	-.417066E-04	0.000000E+00
3	-.417066E-04	-.719313E-04	0.000000E+00
4	-.719313E-04	-.417066E-04	0.000000E+00
5	-.417066E-04	-.719313E-04	0.000000E+00
6	-.417066E-04	-.719313E-04	0.000000E+00
7	-.719313E-04	-.417066E-04	0.000000E+00
8	-.417066E-04	-.719313E-04	0.000000E+00
9	-.719313E-04	-.417066E-04	0.000000E+00
10	-.417066E-04	-.719313E-04	0.000000E+00

PLY STRESSES FOR 1-2 COORDINATE SYSTEM

Layer no	f1	f2	f12
1	-.126667E+04	-.618651E+02	0.000000E+00
2	-.216915E+04	-.448372E+02	0.000000E+00
3	-.126667E+04	-.618651E+02	0.000000E+00
4	-.216915E+04	-.448372E+02	0.000000E+00
5	-.126667E+04	-.618651E+02	0.000000E+00
6	-.126667E+04	-.618651E+02	0.000000E+00
7	-.216915E+04	-.448372E+02	0.000000E+00

YUKSEK GORENME
DOKUMANTASYON
0.000000E+00

8	-.126667E+04	-.618651E+02	0.000000E+00 ²⁷¹
9	-.216915E+04	-.448372E+02	0.000000E+00
10	-.126667E+04	-.618651E+02	0.000000E+00

PLY STRESSES FOR 1-2 COORD.SYS. BELOW LAYER

Layer no	f1	f2	f12
1	-.126667E+04	-.618651E+02	0.000000E+00
2	-.216915E+04	-.448372E+02	0.000000E+00
3	-.126667E+04	-.618651E+02	0.000000E+00
4	-.216915E+04	-.448372E+02	0.000000E+00
5	-.126667E+04	-.618651E+02	0.000000E+00
6	-.126667E+04	-.618651E+02	0.000000E+00
7	-.216915E+04	-.448372E+02	0.000000E+00
8	-.126667E+04	-.618651E+02	0.000000E+00
9	-.216915E+04	-.448372E+02	0.000000E+00
10	-.126667E+04	-.618651E+02	0.000000E+00

M O I S T U R E E F F E C T

EQUIVALENT ** M O I S T U R E **

FORCE - MOMENT INTENSITIES

0.479346E+07

0.456282E+07

0.000000E+00

-.967702E-09

-.105729E-09

0.000000E+00

M O I S T U R E MID PLANE STRAINS AND CURVATURES

0.173480E-01

0.204453E-01

0.000000E+00

0.136776E-18

-.101007E-17

0.000000E+00

R E S I D U A L

PLY STRAINS FOR X-Y COORDINATE SYSTEM

Layer no	ex	ey	exy
1	-.173480E-01	-.204453E-01	0.000000E+00
2	-.173480E-01	-.204453E-01	0.000000E+00
3	-.173480E-01	-.204453E-01	0.000000E+00
4	-.173480E-01	-.204453E-01	0.000000E+00
5	-.173480E-01	-.204453E-01	0.000000E+00
6	-.173480E-01	-.204453E-01	0.000000E+00
7	-.173480E-01	-.204453E-01	0.000000E+00
8	-.173480E-01	-.204453E-01	0.000000E+00
9	-.173480E-01	-.204453E-01	0.000000E+00
10	-.173480E-01	-.204453E-01	0.000000E+00

PLY STRAINS FOR XY COOR.SYS. BELOW

Layer no	ex	ey	exy
1	-.173480E-01	-.204453E-01	0.000000E+00
2	-.173480E-01	-.204453E-01	0.000000E+00
3	-.173480E-01	-.204453E-01	0.000000E+00
4	-.173480E-01	-.204453E-01	0.000000E+00

5	-.173480E-01	-.204453E-01	0.000000E+00 ²⁷³
6	-.173480E-01	-.204453E-01	0.000000E+00
7	-.173480E-01	-.204453E-01	0.000000E+00
8	-.173480E-01	-.204453E-01	0.000000E+00
9	-.173480E-01	-.204453E-01	0.000000E+00
10	-.173480E-01	-.204453E-01	0.000000E+00

PLY STRAINS FOR 1-2 COORDINATE SYSTEM

Layer no	e1	e2	e12
1	-.173480E-01	-.204453E-01	0.000000E+00
2	-.204453E-01	-.173480E-01	0.000000E+00
3	-.173480E-01	-.204453E-01	0.000000E+00
4	-.204453E-01	-.173480E-01	0.000000E+00
5	-.173480E-01	-.204453E-01	0.000000E+00
6	-.173480E-01	-.204453E-01	0.000000E+00
7	-.204453E-01	-.173480E-01	0.000000E+00
8	-.173480E-01	-.204453E-01	0.000000E+00
9	-.204453E-01	-.173480E-01	0.000000E+00
10	-.173480E-01	-.204453E-01	0.000000E+00

PLY STRAINS FOR 1-2 COORD.SYS.(Principle) BELOW

=====

Layer no	e1	e2	e12
1	-.173480E-01	-.204453E-01	0.000000E+00
2	-.204453E-01	-.173480E-01	0.000000E+00
3	-.173480E-01	-.204453E-01	0.000000E+00
4	-.204453E-01	-.173480E-01	0.000000E+00
5	-.173480E-01	-.204453E-01	0.000000E+00
6	-.173480E-01	-.204453E-01	0.000000E+00
7	-.204453E-01	-.173480E-01	0.000000E+00
8	-.173480E-01	-.204453E-01	0.000000E+00

9	-.204453E-01	-.173480E-01	0.000000E+00 ²⁷⁴
10	-.173480E-01	-.204453E-01	0.000000E+00

PLY STRESSES FOR 1-2 COORDINATE SYSTEM

Layer no	f1	f2	f12
1	-.525094E+06	-.186158E+05	0.000000E+00
2	-.617575E+06	-.168708E+05	0.000000E+00
3	-.525094E+06	-.186158E+05	0.000000E+00
4	-.617575E+06	-.168708E+05	0.000000E+00
5	-.525094E+06	-.186158E+05	0.000000E+00
6	-.525094E+06	-.186158E+05	0.000000E+00
7	-.617575E+06	-.168708E+05	0.000000E+00
8	-.525094E+06	-.186158E+05	0.000000E+00
9	-.617575E+06	-.168708E+05	0.000000E+00
10	-.525094E+06	-.186158E+05	0.000000E+00

PLY STRESSES FOR 1-2 COORD.SYS. BELOW LAYER

Layer no	f1	f2	f12
1	-.525094E+06	-.186158E+05	0.000000E+00
2	-.617575E+06	-.168708E+05	0.000000E+00
3	-.525094E+06	-.186158E+05	0.000000E+00
4	-.617575E+06	-.168708E+05	0.000000E+00
5	-.525094E+06	-.186158E+05	0.000000E+00
6	-.525094E+06	-.186158E+05	0.000000E+00
7	-.617575E+06	-.168708E+05	0.000000E+00
8	-.525094E+06	-.186158E+05	0.000000E+00
9	-.617575E+06	-.168708E+05	0.000000E+00
10	-.525094E+06	-.186158E+05	0.000000E+00

R E S I D U A L

 F A I L U R E I N D I C E S
 M O I S T U R E L O A D I N G

MAXIMUM STRESS THEORY

SPECIFICATIONS:

PRFL=PROBABLE FAILURE MODE

PRFL=0.0 : NO FAILURE

PRFL=1.0 : FAILURE DUE TO f1

PRFL=2.0 : FAILURE DUE TO f2

PRFL=3.0 : FAILURE DUE TO f12

PLY NO	PLY STRESSES			PRFL FAILURE MODES

1	0.437578E+03	0.372316E+03	0.000000E+00	1.0000 2.0000 0.0000
2	0.514646E+03	0.337417E+03	0.000000E+00	1.0000 2.0000 0.0000
3	0.437578E+03	0.372316E+03	0.000000E+00	1.0000 2.0000 0.0000
4	0.514646E+03	0.337417E+03	0.000000E+00	1.0000 2.0000 0.0000
5	0.437578E+03	0.372316E+03	0.000000E+00	1.0000 2.0000 0.0000
6	0.437578E+03	0.372316E+03	0.000000E+00	1.0000 2.0000 0.0000
7	0.514646E+03	0.337417E+03	0.000000E+00	1.0000 2.0000 0.0000

8	0.437578E+03	0.372316E+03	0.000000E+00	1.0000 2.0000 0.0000
9	0.514646E+03	0.337417E+03	0.000000E+00	1.0000 2.0000 0.0000
10	0.437578E+03	0.372316E+03	0.000000E+00	1.0000 2.0000 0.0000

R E S I D U A L

 **** M O I S T U R E L O A D I N G ****
 MAXIMUM STRAIN THEORY
 SPECIFICATIONS :
 PRFL=PROBABLE FAILURE MODE
 PRFL=0.0 : NO FAILURE
 PRFL=1.0 : FAILURE DUE TO e1
 PRFL=2.0 : FAILURE DUE TO e2
 PRFL=3.0 : FAILURE DUE TO e12
 =====

PLY NO	PLY STRAINS	PRFL FAILURE MODES
--------	-------------	-----------------------

1	0.204094E-01 0.817810E-02 0.000000E+00	0.0000 0.0000 0.0000
2	0.240532E-01 0.693920E-02 0.000000E+00	0.0000 0.0000 0.0000
3	0.204094E-01 0.817810E-02 0.000000E+00	0.0000 0.0000 0.0000
4	0.240532E-01 0.693920E-02 0.000000E+00	0.0000 0.0000

5	0.204094E-01	0.817810E-02	0.000000E+00	0.0000 0.0000 0.0000
6	0.204094E-01	0.817810E-02	0.000000E+00	0.0000 0.0000 0.0000
7	0.240532E-01	0.693920E-02	0.000000E+00	0.0000 0.0000 0.0000
8	0.204094E-01	0.817810E-02	0.000000E+00	0.0000 0.0000 0.0000
9	0.240532E-01	0.693920E-02	0.000000E+00	0.0000 0.0000 0.0000
10	0.204094E-01	0.817810E-02	0.000000E+00	0.0000 0.0000 0.0000

R E S I D U A L *****

If F.I.# ≥ 1.0 then theories for which failure
of ply occur shown by their corresponding theory number
0 : means there is no failure

THEORIES

FAILURE INDEX VALUE=F.I

PLY NUMBER	1
1-)HOFFMAN THEORY	0.175263E+06
2-)TSAI-WU STRESS THEORY	0.115526E+06
3-)TSAI-HILL THEORY	0.190231E+06

4-) TSAI-WU STRAIN THEORY 0.115526E+06
 FAILURE OCCURE(Theo. num)

1.0000
 2.0000
 3.0000
 4.0000

PLY NUMBER 2
 1-) HOFFMAN THEORY 0.228703E+06
 2-) TSAI-WU STRESS THEORY 0.165031E+06
 3-) TSAI-HILL THEORY 0.262179E+06
 4-) TSAI-WU STRAIN THEORY 0.165031E+06
 FAILURE OCCURE(Theo. num)

1.0000
 2.0000
 3.0000
 4.0000

PLY NUMBER 3
 1-) HOFFMAN THEORY 0.175263E+06
 2-) TSAI-WU STRESS THEORY 0.115526E+06
 3-) TSAI-HILL THEORY 0.190231E+06
 4-) TSAI-WU STRAIN THEORY 0.115526E+06
 FAILURE OCCURE(Theo. num)

1.0000
 2.0000
 3.0000
 4.0000

PLY NUMBER 4
 1-) HOFFMAN THEORY 0.228703E+06
 2-) TSAI-WU STRESS THEORY 0.165031E+06
 3-) TSAI-HILL THEORY 0.262179E+06
 4-) TSAI-WU STRAIN THEORY 0.165031E+06
 FAILURE OCCURE(Theo. num)

1.0000
 2.0000
 3.0000
 4.0000

PLY NUMBER 5
 1-) HOFFMAN THEORY 0.175263E+06
 2-) TSAI-WU STRESS THEORY 0.115526E+06
 3-) TSAI-HILL THEORY 0.190231E+06
 4-) TSAI-WU STRAIN THEORY 0.115526E+06
 FAILURE OCCURE(Theo. num)

1.0000
2.0000
3.0000
4.0000

PLY NUMBER 6
1-)HOFFMAN THEORY 0.175263E+06
2-) TSAI-WU STRESS THEORY 0.115526E+06
3-) TSAI-HILL THEORY 0.190231E+06
4-) TSAI-WU STRAIN THEORY 0.115526E+06
 FAILURE OCCURE(Theo. num)

1.0000
2.0000
3.0000
4.0000

PLY NUMBER 7
1-)HOFFMAN THEORY 0.228703E+06
2-) TSAI-WU STRESS THEORY 0.165031E+06
3-) TSAI-HILL THEORY 0.262179E+06
4-) TSAI-WU STRAIN THEORY 0.165031E+06
 FAILURE OCCURE(Theo. num)

1.0000
2.0000
3.0000
4.0000

PLY NUMBER 8
1-)HOFFMAN THEORY 0.175263E+06
2-) TSAI-WU STRESS THEORY 0.115526E+06
3-) TSAI-HILL THEORY 0.190231E+06
4-) TSAI-WU STRAIN THEORY 0.115526E+06
 FAILURE OCCURE(Theo. num)

1.0000
2.0000
3.0000
4.0000

PLY NUMBER 9
1-)HOFFMAN THEORY 0.228703E+06
2-) TSAI-WU STRESS THEORY 0.165031E+06
3-) TSAI-HILL THEORY 0.262179E+06
4-) TSAI-WU STRAIN THEORY 0.165031E+06
 FAILURE OCCURE(Theo. num)

1.0000
2.0000
3.0000
4.0000

PLY NUMBER 10
 1-)HOFFMAN THEORY 0.175263E+06
 2-)TSAI-WU STRESS THEORY 0.115526E+06
 3-)TSAI-HILL THEORY 0.190231E+06
 4-)TSAI-WU STRAIN THEORY 0.115526E+06

FAILURE OCCURE(Theo. num)

1.0000
 2.0000
 3.0000
 4.0000

* NON-MECHANICAL (THERMAL OR MOISTURE)
 LOADS-UNSTRAINED STRESSES AND STRAINS

PLY STRAINS FOR X-Y COORDINATE SYSTEM

Layer no	ex	ey	exy
1	0.173480E-01	0.204453E-01	0.000000E+00
2	0.173480E-01	0.204453E-01	0.000000E+00
3	0.173480E-01	0.204453E-01	0.000000E+00
4	0.173480E-01	0.204453E-01	0.000000E+00
5	0.173480E-01	0.204453E-01	0.000000E+00
6	0.173480E-01	0.204453E-01	0.000000E+00
7	0.173480E-01	0.204453E-01	0.000000E+00
8	0.173480E-01	0.204453E-01	0.000000E+00
9	0.173480E-01	0.204453E-01	0.000000E+00
10	0.173480E-01	0.204453E-01	0.000000E+00

PLY STRAINS FOR XY COOR.SYS. BELOW

Layer no	ex	ey	exy
1	0.173480E-01	0.204453E-01	0.000000E+00
2	0.173480E-01	0.204453E-01	0.000000E+00
3	0.173480E-01	0.204453E-01	0.000000E+00

ÖZGEÇMİŞ

Ankara doğumlu Ezgi GÜNEY, öğrenimine Anıttepe İlkokulunda başladı, orta ve lise öğrenimini Ankara Bahçelievler Deneme Lisesinde tamamladı.

1979 - 1989 yılları arasında Orta Doğu Teknik Üniversitesinde; sırası ile İngilizce Hazırlık Okulu, Mühendislik Fakültesi - Mühendislik Bilimleri Bölümünde (Uygulamalı Mekanik Mühendisliği) lisans ve yüksek lisans öğrenimini tamamladı. 1985-1988 yılları içerisinde aynı zamanda bu bölümde Araştırma Görevliliği statüsünde bulundu. 1988-1990 yılları arasında bir özel şirkette bilgisayar uzmanı olarak çalıştı. 1991 yılı içerisinde YÜKTEK/BAYEM Bilgisayar Şirketinde AutoCAD manager olarak çalışırken 1990 ve 1991 yıllarında, Orta Doğu Teknik Üniversitesi Havacılık Mühendisliği Bölümünde verilen Lisans derslerine özel öğrenci statüsünde devam etti. 1991-1993 yıllarında Emekli Sandığı Genel Müdürlüğü Bilgi İşlem Dairesinde sözleşmeli programcı olarak görev yaptı ve aynı esnada Gazi Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Makina Mühendisliği Bölümünde doktora derslerine devam etti. 1993 yılında aynı bölümde araştırma görevlisi olarak göreve başladı.