

**T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

GRAFLARIN SOMBOR İNDEKSLERİ VE SINIRLARI

**Tezi Hazırlayan
Selma SUCU**

**Tez Danışmanı
Prof. Dr. Sezer SORGUN**

**Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi**

Ağustos 2024

NEVŞEHİR

**T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

GRAFLARIN SOMBOR İNDEKSLERİ VE SINIRLARI

**Tezi Hazırlayan
SELMA SUCU**

**Tez Danışmanı
Prof. Dr. Sezer SORGUN**

**Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi**

Ağustos 2024

Prof. Dr. Sezer SORGUN danışmanlığında Selma SUCU tarafından hazırlanan " **Grafların Sombor İndeksleri ve Sınırları** " başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

....../.../2024..

JÜRİ

Başkan : Prof Dr. Halil BİLGİL

Üye : Prof. Dr. Sezer SORGUN

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Hayrullah ÖZİMAMAOĞLU

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun.....tarih ve..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

.../.../20..

Prof. Dr. Cemal ÇARBOĞA

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Selma SUCU

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve tez çalışmam süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, bilgisi, tecrübesi ve anlayışıyla her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan, aynı zamanda çalışma enerjisi ve motivasyonu da bana çok şey katan Sayın Hocam Prof. Dr. Sezer SORGUN' a,

Çalışma ve motivasyon kaynağım olan, okuma sevgisi ve sürekli öğrenme azimlerinin yanı sıra karakterleri ve erdemli insan oluşlarıyla da bana örnek olan, fedakarlıklarını ve desteklerini hiçbir zaman unutmayacağım Canım Anneme ve Babama, sevgili kardeşlerime,

Yoğun çaba ve emek harcadığım bu süreçte, sabır ve anlayışla her zaman desteklerini gördüğüm Değerli Eşim Rafet SUCU, sevgili çocuklarım; Merve, Beril, Erva' ya,

Eğitim-Öğretim hayatım boyunca emeklerini esirgemeyen kıymetli öğretmenlerime, en içten teşekkürlerimi sunuyorum.

GRAFLARIN SOMBOR İNDEKSLERİ VE SINIRLARI
(Yüksek Lisans Tezi)

Selma SUCU

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ
ENSTİTÜSÜ

Ağustos 2024

ÖZET

Sombor indeksi (SO), yakın zamanda tanıtılan heyecan verici bir topolojik indekstir. Hızla dikkat çeken bu indeks, matematiksel özellikleri ve kimyasal uygulamalarıyla birçok çalışmanın odağını oluşturmuştur. Kimyasal graf teorisinde özellikle popüler olan Sombor indeksi, yeni keşfedilmiş ve hala aktif bir araştırma alanıdır. Sombor indeksi kavramı, Sombor Matrisi' nin tanımlanmasıyla lineer cebire genişletilmiş ve bu matrisin özellikle enerjisi üzerinde yoğun bir şekilde çalışılmıştır. Sombor Matrisi, grafin nokta derecelerine dayalı olarak oluşturulan bir matristir ve bu matrisin enerjisi, özdeğerlerinin mutlak değerlerinin toplamı olarak tanımlanır. Bu yeni topolojik indeks, spektrumun ve çeşitli spektrum tabanlı özelliklerin keşfiyle birlikte, kimyasal graf teorisinde önemli bir ilerleme sağlamıştır. Bu tez çalışmasında Sombor indeksin literatüre ilk katılmasıyla birlikte günümüze kadar yapılan çalışmalar derlenmiştir. Çalışma 5 bölümden oluşmaktadır. 2. Bölümde, temel tanım ve kavramlar verilmiştir. 3. Bölümde, Sombor indeksi ve varyantları ile ilgili mevcut sınırlar ve uç sonuçlar incelenmiştir. 4.bölümde ise; ortalama sombor indeksi, genelleştirilmiş sombor indeksi, sombor koindeksi gibi sombor tipi indeksler tanıtılmış, bu indekslerle ilgili literatürdeki sınırlar derlenmiştir.

Anahtar kelimeler: *Graf, Enerji, Sombor indeks*

Tez Danışman: Prof. Dr. Sezer SORGUN

Sayfa Adeti: 62

SOMBOR INDICES OF GRAPHS AND THEIR BOUNDS

(Master Thesis)

SELMA SUCU

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE**

August 2024

ABSTRACT

The Sombor Index (SO) is a recently introduced, intriguing topological index that has quickly garnered significant attention. Its mathematical properties and chemical applications have become the subject of numerous studies. Particularly in the field of chemical graph theory, the Sombor index is not only popular but also an actively researched area. The concept of the Sombor index has been extended to linear algebra through the definition of the Sombor matrix, which has led to intensive exploration, especially in the context of energy of matrix. The Sombor matrix is naturally associated with a graph based on the degrees of its vertices. The energy of this matrix is defined as the sum of the absolute values of its eigenvalues. This novel topological index has significantly advanced research in chemical graph theory, paving the way for the exploration of spectra and various spectrum-based features. In this thesis, the studies conducted until today with the first inclusion of the Sombor index in the literature have been compiled. The study consists of 5 sections. In the 2nd section, basic definitions and concepts are given. In the 3rd section, the current bounds and extreme results related to the Sombor index and its variants are examined. In the 4th section; Sombor type indexes such as average sombor index, generalized sombor index, sombor coindex are introduced and the bounds in the literature related to these indexes are compiled.

Keywords: *Graph, Energy, Sombor Index*

Thesis Supervisor: Assoc. Dr. Sezer SORGUN

Page Number: 62

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI	i
TEZ BİLDİRİM SAYFASI	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
TABLolar LİSTESİ.....	vi
ŞEKİLLER LİSTESİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	x
1. BÖLÜM	
GİRİŞ	1
2. BÖLÜM	
TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR	3
3.BÖLÜM	
SOMBOR İNDEKS VE SINIRLARI	7
3.1.Sombor Matrisi ve Spektral Özellikleri	7
3.2.Grafların Sombor Karakteristik Polinomları ve Enerjileri.....	9
3.3.Sombor spektral yarıçapı için Nordhaus-Gaddum tipi sonuçlar.....	10
3.4. Sombor İndeks ve Diğer Sınırları	11
3.4.1 Grafların Temel Parametrelerine Bağlı Sınırlar	11
3.4.2.Diğer Topolojik İndekslere Bağlı Sınırlar	13

3.5. Ekstrem ve bazı özel yapılı grafların Sombor İndeksleri.....	21
3.5.1. Yol ve Döngü Graf.....	21
3.5.2. Ağaçlar ve Bazı Özel Türleri.....	23
3.5.3. Döngüsel Graflar	29
3.5.4. Kaktüs Graf	31
3.5.5 Bazı Diğer Bağlantılı graflar	34
3.5.6 Kimyasal Graflar	37
4. BÖLÜM	
GENEL SOMBOR İNDEKS VE DİĞER ANALOGLARI	41
4.1. Diğer Analogları.....	41
4.2. Genel Sombor İndeksi ve Ortalama Sombor İndeksi İçin Sınırlar	41
4.3. Genel Sombor İndeksi İçin Nordhaus-Gaddum Tipi Sonuç	44
4.4. Genel Sombor İndeksinin Diğer Genelleştirilmiş İndekslerle Karşılaştırılması.....	45
4.5. Değiştirilmiş Sombor Spektral Yarıçapı İçin Sınırlar	53
5.BÖLÜM	
SONUÇ VE ÖNERİLER	55
KAYNAKLAR	56
ÖZGEÇMİŞ	62

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 3.1.	Bazı VDB İndeksler.....	7
------------	-------------------------	---



ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 3.1. $K_3 + P_2$ örneği.....	21
Şekil 3.2. $K_3 \odot P_2$ örneği.....	21
Şekil 3.3. G ve G' grafları örneği.....	23
Şekil 3.4. $T_{n,k}$ grafi örneği.....	24
Şekil 3.5. T_n^β grafi örneği.....	25
Şekil 3.6. $DS_{p,q}$ çift yıldız grafi örneği.....	25
Şekil 3.7. T Graf ailesinden iki ağaç örneği.....	28
Şekil 3.8.[36]'dan U_n^d ($d \geq 4$) grafi örneği.....	31
Şekil 3.9. [37]'den $H(n, t)$ ve $H(2\beta, t)$ kaktüsleri örneği.....	31
Şekil 3.10. [38]'den Y_1 ve Y_2 grafları örneği.....	32
Şekil 3.11. [41]'in minimum Q_i ($1 \leq i \leq 5$) grafları örneği.....	34

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$G = (V, E)$	Nokta kümesi V , kenar kümesi E olan bir G grafi
$a \sim b$	a ve b noktalarının birbirine komşu olması
$N(a)$	a noktasına komşu olan noktaların kümesi
$d(a)$	a noktasının derecesi
$\bar{G}$	G grafinin tümleyeni
$\Delta(G)$	G grafinin maksimum derecesi
$\delta(G)$	G grafinin minimum derecesi
$A(G)$	G grafinin komşuluk matrisi
$S(G)$	G grafinin sombor matrisi
$G \cup H$	G ve H graflarının ayrık birleşimi
$G + H$	G ve H birleşimi
$G \times H$	G ve H kartezyen çarpımı
P_n	n noktalı yol graf
C_n	n noktalı döngü graf
K_n	n noktalı tam graf
S_n	n noktalı yıldız graf
T_n	n noktalı ağaç graf
$K_{m,n}$	iki parçalı tam graf
$T_{n,k}$	n noktası ve k sarkık noktası olan ağaçlar kümesi
$\mathcal{T}_{n,\beta}$	n noktası ve eşleşen sayısı β olan ağaçlar kümesi
T_n^d	n mertebeden d çaplı ağaçlar kümesi

$\mathcal{G}_{n,k}$	n noktalı k döngü grafları kümesi
$\mathcal{U}_{n,\Delta}$	n mertebeden maksimum derecesi Δ olan tek döngülü graflar kümesi
$\mathcal{K}(n,b)$	n mertebeden b dallanma noktalı ağaçlar kümesi
$\mathcal{F}(n,k)$	n mertebeden k segmentli ağaçlar kümesi
$\mathbb{T}_{n,\gamma}$	n mertebeden baskınlık sayısı γ olan ağaçlar kümesi
$\mathcal{W}(n,w)$	n mertebeden w klik numarası ile bağlı graflar kümesi
$\mathbb{CG}(n,m)$	n noktası ve m kenarı olan bağlı graflar kümesi
$H(n,t)$	n noktalı t döngülü kaktüslerin koleksiyonu
$\rho(G)$	G grafinin spektral yarıçapı
$\gamma(G)$	G grafinin baskınlık sayısı
$\alpha(G)$	G grafinin bağımsızlık sayısı
$X(G)$	G grafinin kromatik sayısı
$SO(G)$	G grafinin sombor indeksi
$SO_{\alpha}(G)$	G grafinin genel sombor indeksi
$mSO_{\alpha}(G)$	G grafinin ortalama sombor indeksi
$m_{SO(G)}$	G grafinin değiştirilmiş sombor indeksi
$\overline{SO}(G)$	G grafinin sombor koindeksi
M_1	Birinci Zagreb indeksi
M_2	İkinci Zagreb indeksi
R	Randic indeksi
RR	Karşılıklı Randic indeksi
F	Unutulmuş topolojik indeks
ISI	Ters toplam indeg indeksi

H	Harmonik indeks
GA	Geometrik-aritmetik indeks
AG	Aritmetik-geometrik indeks
ID	Ters derece indeksi
Alb	Albertson indeksi
SDD	Simetrik bölünme derece indeksi
$\chi(G)$	Toplam bağlantı indeksi
$\chi_\alpha(G)$	Genel Toplam Bağlantı indeksi
$ES(G)$	G grafinin Sombor enerjisi
$\mathcal{E}(G)$	G grafinin Değiştirilmiş sombor enerjisi
σ_1	Sombor matrisinin en büyük özdeğeri
μ_1	Değiştirilmiş Sombor matrisinin en büyük özdeğeri
β	Belirtme ölçütü

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Graf teorisi çok farklı alanların çalışma odağı olmuştur. İşletmeden, endüstri mühendisliğine, sosyolojiden, bilgisayar bilimlerine kadar çok geniş alanlarda kullanımı olan bu teori, aslında en sade haliyle bir gerçek hayat probleminin graf ile modellenmesini amaçlamaktadır. Bu modelleme ile karmaşık halde bulunan problem durumları sistematize edilip görselleştirilerek daha basit ve anlaşılır hale gelmektedir. Model oluşturulduktan sonra graf teorisinde bulunan yöntemler kullanılarak problem çözülebilmekte ve ardından da tekrar gerçek hayata uygulanabilmektedir.

Kimyasal graf teorisinde, genellikle moleküler grafların (topolojik indeksler veya moleküler tanımlayıcılar olarak da bilinir) çeşitli graf-teori değişmezleri göz önünde bulundurulur ve bunlara karşılık gelen moleküllerin çeşitli özellikleriyle ne kadar güçlü bir şekilde ilişkili oldukları incelenir. Bu tür ilk topolojik indeks 1947'de H. Wiener tarafından tanıtılmıştır. Sonrasında çok sayıda graf değişmezi olmuştur (ve hala olmaya devam etmektedir). Zagreb indeksleri en çok çalışılan değişmezler arasındadır ve bir grafın tüm kenarları üzerindeki bitişik noktaların derecelerine bağlı katkıların toplamı olarak tanımlanırlar. G grafının Zagreb indeksleri, yani ilk Zagreb indeksi $M_1(G)$ ve ikinci Zagreb indeksi $M_2(G)$ olarak tanımlanmıştır. Bu tür graf değişmezlerin en eskileri 1970'lerde ortaya atılmış ve şimdiye kadar sayıları birkaç düzineyi aşmıştır. Bu türün en yeni değişmezleri arasında unutulmuş indeks ve sombor indeksi bulunmaktadır. Sombor indeksi SO, kimyada uygulamalar bulan geometrik düşüncelerin bir sonucu olarak elde edilen, yakın zamanda ortaya çıkan bir nokta derecesi tabanlı (VDB) topolojik indeksler sınıfına ait graf değişmezidir. Sombor indeksi kavramı, Sombor matrisini tanımlayarak lineer cebire genişletilmiş ve bu durum da spektrumunun ve çeşitli spektrum tabanlı özelliklerinin araştırılmasına yol açmıştır. Özellikle, Sombor matrisinin enerjisi çok incelenmiştir. Sombor indeksi ile ilgili ilk makale 2021'de yayınlanmıştır [1]. Bu graf değişmezi Öklid metriklerini kullanmaya dayandığından, kısa zamanda birkaç meslektaşının dikkatini çekmiş ve sonrasında, Sombor indeksi hakkında çok sayıda

makale yayınlanmıştır [2-6]. Yıllar geçtikçe daha fazlasının yayınlanacağı düşünülmektedir.

Bu tez çalışmasında 3.bölümde; Sombor indeksi ve varyantları ile ilgili mevcut sınırlar ve uç sonuçlar incelenmiştir. Spektral graf teorisi, matris teorisi ve lineer cebir yardımıyla grafların matrislerini analiz etmede önemli bir role sahiptir. Özdeğerler, bir grafın hemen hemen tüm ana değişmezleriyle yakından ilişkilidir, bir uç özelliği diğerine bağlar, grafların temel anlayışında merkezi bir rol oynarlar. Sombor spektral yarıçapı için literatürde verilen bazı sınırlar derlenmiştir. Spektral yarıçap için Nordhaus-Gaddum tipi sonuçlar da verilmiştir. Grafların Sombor karakteristik polinomları ve enerjilerine vurgu yapılarak bu konuda birkaç ek sonuç verilmiştir.

4.bölümde ise; ortalama sombor indeksi, genelleştirilmiş sombor indeksi, sombor koindeksi gibi sombor tipi indeksler tanıtılmış, bu indekslerle ilgili literatürdeki sınırlar derlenmiştir. Sombor koindeksin çeşitli özellikleri ve önemli graf parametreleri açısından sınırları verilmiştir. Değiştirilmiş Sombor indeksi ve sınırları verilmiştir. Aynı zamanda Değiştirilmiş Sombor spektral yarıçapı için sınırlar verilmiştir.

2. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu tezde kullanılan temel kavramlar için [7-11] referans numaralı kaynaklardan yararlanılmıştır.

Tanım 2.1. $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ noktalar kümesi ve $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ kenarlar kümesinden oluşan $G = (V, E)$ kümesine graf (graph) denir. Burada E kümesindeki her bir kenar V kümesindeki noktaların bir sıralı ikilisidir. Bir grafi çizebilmek için her şeyden önce $V(G)$ ile gösterilen ve çizilecek G grafının noktalarından oluşan bir nokta kümesi ve $V(G)$ ' den seçilen noktaların birleştirilmesiyle oluşan kenarları içeren $E(G)$ kenar kümesi bilinmelidir.

Tanım 2.2. $V(G)$ 'nin eleman sayısı mertebe (order), $E(G)$ ' nin eleman sayısı ise boyut (size) olarak adlandırılır.

Tanım 2.3. Aralarında en az bir kenar bulunan noktalara komşu (adjacent) noktalar, ortak bir ucu bulunan kenarlara ise komşu kenarlar denir. Örneğin $u, v \in V(G)$ için $uv \in E(G)$ ise u ile v noktaları komşu noktalar. Eğer $uv \notin E(G)$ ise u ile v 'ye komşu olmayan (non-adjacent) noktalar denir.

Bir $e \in E(G)$ alındığında, bu e kenarı, $u \in V(G)$ noktası ile birleşiyorsa e kenarı u noktası ile bitişiktir (incident) denir.

Bir v noktasını uç kabul eden kenarların sayısına o noktanın derecesi denir. $deg(v)$ veya d_v ile gösterilir.

Başlangıç ve bitiş noktaları aynı olan bir kenara döngü (loop) adı verilir.

$v \in V(G)$ olmak üzere; $N = \{x \in V \mid xv \in E(G)\}$ kümesine ise v noktasının açık komşuluğu denir.

Tanım 2.4. Başlangıç ve iç köşeleri farklı olan kapalı geziye döngü (cycle) denir. k uzunluğundaki bir döngüye k -döngü denir. Bir k -döngüsü k nın tek ya da çift oluşuna göre tek döngü veya çift döngü olarak adlandırılır. Bir 3-döngüye üçgen de denir.

Tanım 2.5. $G = (V, E)$ grafi, n noktalı bir graf olmak üzere derece dizisindeki en büyük elemana maksimum derece, en küçük elemana minimum derece denir ve sırasıyla $\Delta(G)$ ve $\delta(G)$ ile gösterilir.

Tanım 2.6. Herhangi iki noktası arasında birden fazla kenara sahip olmayan ve döngü içermeyen graflara basit (simple) graf denir.

Tanım 2.7. k uzunluğunda bir yürüme (walk) $uv, vy, yz, \dots, tn$ şeklinde sıralanan kenar sayısı k olan bir graftır. Bu yürüme $uvyz \dots tn$ ile gösterilir. Buna u ve n arasında bir yürüme denir. Başlangıç ve bitiş noktası haricindeki kalan tüm köşeleri ve kenarları farklı olan kapalı yürüyüş ise devir olarak adlandırılır.

Tanım 2.8. Basit bir G grafinin içerdiği en kısa uzunluklu devrin uzunluğuna grafin çevresi (girth) denir. Eğer graf hiçbir devir içermiyorsa çevresi sonsuzdur denir.

Tanım 2.9. Bir G grafında her $u, v \in V(G)$ için $uv \notin E(G)$ olacak şekildeki uv kenarlarının oluşturduğu grafa tümleyen (complement) graf denir ve $\bar{G}$ ile gösterilir.

Tanım 2.10. Bir grafin tüm nokta dereceleri aynı dereceye sahipse bu grafa düzenli (regüler) graf denir. Eğer tüm nokta dereceleri r ise bu durumda grafa r – düzenli (regüler) graf denir.

Tanım 2.11. n noktaya sahip bir G grafında, eğer $\forall u, v \in V(G)$ için $uv \notin E(G)$ ise bu grafa boş (empty) graf denir. Boş graf yalnızca noktalardan oluşur ve E_n ile gösterilir.

Tanım 2.12. Bir grafta noktalar ve kenarların tek bir döngüden oluştuğu grafa döngü (cycle) graf denir. n noktalı döngü graf C_n ile gösterilir. C_n graflar, 2 dereceli regüler graflardır.

Tanım 2.13. n noktaya sahip, ağaç özelliğini taşıyan ayrıca yalnızca bir noktasının derecesi $n - 1$, diğer noktalarının dereceleri 1 olan graflara yıldız (star) graf denir. S_n ile gösterilir.

Tanım 2.14. Her noktanın bir kenar ile diğer tüm noktalara bağlanmasıyla oluşan grafa tam graf (complete graph) denir. n noktalı tam graf K_n ile gösterilir. K_n grafi $\frac{n(n-1)}{2}$ kenarı olan $(n - 1) -$ düzenli graftır.

Tanım 2.15. Bir G grafi, graftan alınan her bir kenarın bir noktası M 'ye ait, diğer noktası N 'ye ait olacak şekilde M ve N şeklinde iki alt nokta kümesine ayrılabiliriyorsa bu grafa iki parçalı (bipartite) graf denir. $s(M) = m$ ve $s(N) = n$ ise bu graf $K_{m,n}$ ile gösterilir.

Tanım 2.16. Herhangi iki noktası arasında en az bir yol bulunabilen bir grafa bağlantılı graf (connected graph) denir. Bağlantılı olmayan bir grafa ise bağlantısız graf (disconnected graph) denir.

Tanım 2.17. Bağlantılı olan ve döngü içermeyen graflara ağaç (tree) graf denir. T_n ile gösterilir.

Tanım 2.18.[12] $T(a, b, c)$ maksimum derecesi 3 olan v_i noktaya sahip ve $a \geq b \geq c \geq 2$ için $T(a, b, c) - v_i = P_a \cup P_b \cup P_c$ olacak biçimde bir ağaç, olarak ifade edilir.

Tanım 2.19. Bir $G = (V, E)$ grafında, $D \subseteq V(G)$ olmak üzere; $V(G) - D$ 'deki her köşe, D 'nin bir noktasına komşu ise; D kümesine, G grafının bir baskın kümesi (dominating set) denir. Baskınlık sayısı (domination number); G grafının baskın kümeleri arasında en az kenara sahip olan kümenin kenar sayısıdır ve $\gamma(G)$ ile gösterilir.

Tanım 2.20. $S \subseteq V(G)$, bir G grafının noktalar kümesinin herhangi bir alt kümesi olsun. S kümesindeki noktalar ikişerli alındığında; bu noktalar, G grafında bir ayrıta sahip değilse bu kümeye bağımsız küme denir. Bir G grafi birden fazla bağımsız kümeye sahip olabilir. Bu kümeler içinde en çok elemana sahip olan kümenin eleman sayısına G grafının bağımsızlık sayısı (independence number) denir ve $\alpha(G)$ ile gösterilir.

Tanım 2.21. G , n noktalı ve m kenarlı bağlantılı bir graf olsun. $m = n - 1$ olan grafa, ağaç graf denir. Ayrıca; $m = n - 1 + k$ ($k \geq 1$) ise grafın, k -döngü (k -cyclic) olduğu söylenir. $k = 1$ için graf tek döngülü (unicyclic), $k = 2$ için çift döngülü (bicyclic) graftır.

Tanım 2.22. Bir G grafinin uygun renklendirilebilmesi için gerekli olan en az renk sayısına G grafinin kromatik sayısı denir ve $X(G)$ ile gösterilir.



3. BÖLÜM

SOMBOR İNDEKS VE SINIRLARI

3.1.Sombor Matrisi ve Spektral Özellikleri

Tanım 3.1.1.[13] G , n noktalı ve m kenarlı bir graf olsun. G grafının Sombor matrisi, $S(G)=(s_{ij})_{n \times n}$ olarak tanımlanır. Burada:

$$s_{ij} = \begin{cases} \sqrt{d_u^2 + d_v^2}, & uv \in E(G); \\ 0, & \text{diğer durumlarda;} \end{cases}$$

dır.

Tanım 3.1.2.[13] Bir G grafının Sombor indeksi

$$SO(G) = \sum_{uv \in E(G)} \sqrt{d(u)^2 + d(v)^2}$$

olarak tanımlanır.

Sombor indeksi ve varyantları, genel forma sahip olan nokta derecesi tabanlı (VDB) topolojik indeksler sınıfına aittir. (bakınız Tablo 3.1)

$$TI(G) = \sum_{uv \in E(G)} F(d_u, d_v) \quad (1)$$

Tablo 3.1. Bazı nokta derece bazlı indeksler

Fonksiyon $f(d_u, d_v)$	Denklem (1) şuna karşılık gelir.	Sembol
$\sqrt{d_u^2 + d_v^2}$	Sombor indeks [18]	SO
$d_u + d_v$	Birinci Zagreb indeksi [32, 59]	M_1
$d_u d_v$	İkinci Zagreb indeksi [52]	M_2
$\frac{1}{\sqrt{d_u d_v}}$	Randic indeksi [60]	R
$\sqrt{d_u d_v}$	Karşılıklı Randic indeksi [61]	RR

$(d_u d_v)^\alpha$	Genel Randic İndeksi [62]	$R_\alpha(G)$
$d_u^2 + d_v^2$	Unutulmuş topolojik indeks [32]	F
$\frac{2d_u d_v}{d_u} + d_v$	Ters toplam indeg indeksi [63]	ISI
$2 / (d_u + d_v)$	Harmonik indeks [51]	H
$2\sqrt{d_u d_v} / (d_u + d_v)$	Geometrik-aritmetik indeks [64]	GA
$\frac{(d_u + d_v)}{2\sqrt{d_u d_v}}$	Aritmetik-geometrik indeks [65]	AG
$\frac{1}{d_u^2} + \frac{1}{d_v^2}$	Ters derece indeksi [51]	ID
$ d_u - d_v $	Albertson indeksi [66]	Alb
$(d_v / d_u) + (d_u / d_v)$	Simetrik bölünme derece indeksi [67]	SDD
$\frac{1}{\sqrt{d_u + d_v}}$	Toplam Bağlantı İndeksi [68]	$\chi(G)$
$(d_u + d_v)^\alpha$	Genel Toplam Bağlantı İndeksi [69]	$\chi_\alpha(G)$

Teorem 3.1.3. [13] G n noktalı, Sombor matrisi $S(G) = (s_{ij})_{n \times n}$ ve özdeğerleri $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \cdots \geq \sigma_n$ olan herhangi bir graf olmak üzere;

$$\sigma_1 \leq \sqrt{2(n-1)F(G)}$$

eşitsizliği sağlanır.

Lemma 3.1.4. [13,14] Sombor matrisinin özdeğerleri verilsin. Bu durumda;

- i. $\sum_{i=1}^n \sigma_i = 0$
- ii. $\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = 2F(G)$
- iii. $\sum_{i=1}^n \sigma_i^3 = 3 \sum_{\Delta} \prod_{uv \in E(\Delta)} \sqrt{d_u^2 + d_v^2}$

dir.

Lemma 3.1.5. [14] Sombor matrisinin spektrumundaki en büyük özdeğer σ_1 olsun. Bu durumda;

$$\sigma_1 \geq 2 \frac{SO(G)}{n}$$

eşitsizliği vardır. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G grafinin düzenli bir graf olmasıdır.

Teorem 3.1.6. [13] G , nokta kümesi $V(G)$ ve kenar kümesi $E(G)$ olan bir graf ve Sombor matrisi $S(G)$ olsun. $P_{S(G)} = c_0\sigma^n + c_1\sigma^{n-1} + c_2\sigma^{n-2} + \dots + c_n$ polinomu $S(G)$ 'nin karakteristik polinomu olmak üzere;

- i. $c_2 = -F(G)$,
- ii. $c_3 = \sum_{\Delta} \prod_{uv \in E(\Delta)} \sqrt{d_u^2 + d_v^2}$

dir.

3.2.Grafların Sombor Karekteristik Polinomları ve Enerjileri

Tanım 3.2.1. [13] n noktalı bir G grafinin Sombor enerjisi, özdeğerleri $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ olmak üzere;

$$ES(G) = \sum_{i=1}^n |\sigma_i|$$

biçimindedir.

Teorem 3.2.2. [15] Her $n \geq 5$ için, P_n yol grafinin Sombor karakteristik polinomu; $\varphi_{SO}(P_n, \lambda) = \lambda^2 \Lambda_{n-2} - 10\lambda \Lambda_{n-3} + 25\Lambda_{n-4}$

dir.

Burada her $k \geq 3$ için, $\Lambda_k = \lambda \Lambda_{k-1} - 8\Lambda_{k-2}$ ile $\Lambda_1 = \lambda$ ve $\Lambda_2 = \lambda^2 - 8$ dir.

Ayrıca P_2, P_3 ve P_4 'ün karakteristik polinomları sırasıyla; $\lambda^2 - 2$, $\lambda^3 - 10\lambda$ ve $\lambda^4 - 18\lambda^2 + 25$ dir.

Teorem 3.2.3. [15] Her $n \geq 3$ için, C_n döngü grafinin Sombor karakteristik polinomu;

$$\varphi_{SO}(C_n, \lambda) = \lambda \Lambda_{n-1} - 16\Lambda_{n-2} - 2(\sqrt{8})^n$$

dir.

Burada her $k \geq 3$ için, $\Lambda_k = \lambda \Lambda_{k-1} - 8 \Lambda_{k-2}$ ile $\Lambda_1 = \lambda$ ve $\Lambda_2 = \lambda^2 - 8$ dir.

Teorem 3.2.4. [15] $n \geq 2$ için,

(i) $S_n = K_{1,n-1}$ Yıldız grafinin Sombor karakteristik polinomu;

$$\varphi_{SO}(S_n, \lambda) = \lambda^{n-2} (\lambda^2 - (n-1)(n^2 - 2n + 2))$$

dir.

S_n 'nin Sombor enerjisi

$$En_{SO}(S_n) = 2 \sqrt{(n-1)(n^2 - 2n + 2)}$$

dir.

(ii) K_n tam grafinin Sombor karakteristik polinomu;

$$\varphi_{SO}(K_n, \lambda) = (\lambda - (n-1)^2 \sqrt{2})(\lambda + (n-1) \sqrt{2})^{n-1},$$

dir.

$$K_n \text{'in Sombor enerjisi } En_{SO}(K_n) = 2(n-1)^2 \sqrt{2}$$

dir.

Lemma 3.2.5. [15] $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup \dots \cup G_n$ olsun. Bu durumda;

$$(i) \quad \varphi_{SO}(G) = \prod_{i=1}^n \varphi_{SO}(G_i)$$

$$(ii) \quad En_{SO}(G) = \sum_{i=1}^n En_{SO}(G_i).$$

3.3. Sombor Spektral Yarıçapı İçin Nordhaus-Gaddum Tipi Sonuçlar

Teorem 3.3.1. [16] Burada $\sigma_1 + \overline{\sigma_1}$ 'de bazı sınırlar sunulmuştur. G , n noktalı m kenarlı bir graf ve maksimum derecesi Δ , minimum derecesi δ olsun. G grafinin Sombor matrisi $S(G)$ 'nin, özdeğerleri $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$ olmak üzere; Sombor matrisinin spektrumundaki en büyük özdeğer σ_1 olsun. $\bar{G}$ grafinin sombor matrisi $S(\bar{G})$ 'nin en büyük özdeğeri ise $\overline{\sigma_1}$ olsun. Bu durumda;

$$(1) \quad \sigma_1 + \overline{\sigma_1} \geq \frac{2}{n} \left[\sqrt{2} m \delta(G) + \left[\binom{n}{2} - m \right] [n - 1 - \Delta(G)] \sqrt{2} \right]$$

dir.

(2) G düzenli bir graf olmak üzere;

$$\sigma_1 + \overline{\sigma}_1 \geq x^T(S(G) + S(\overline{G}))x \geq \sqrt{2}\Delta^2 + \sqrt{2}(n-1-\Delta)^2$$

dir.

Teorem 3.3.2.[16] G, n mertebesinde m kenarlı bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned} \sigma_1 + \overline{\sigma}_1 \leq \sqrt{2}\Delta(G)\sqrt{2n - \delta(n-1) + (\delta-1)\Delta} \\ + \sqrt{2}(n-1-\delta)\sqrt{2\left(\frac{n}{2}\right) - 2m - (\delta+1)(n-1) + \delta(\Delta+1)} \end{aligned}$$

dir.

3.4. Sombor İndeks ve Diğer Sınırları

3.4.1 Grafların Temel Parametrelerine Bağlı Sınırlar

Burada, çeşitli yapısal parametreler açısından grafların Sombor indeksinin sınırları verilmiştir.

Lemma 3.4.1.1. [17] Herhangi bir G grafı için;

- (i) $SO(G) > SO(G - e)$ dir. Burada $e = v_i v_j$, G 'deki herhangi bir kenardır,
- (ii) $SO(G + e) > SO(G)$ dir. Burada $e = v_i v_j$, v_i ve v_j noktaları G 'de komşu olmayan noktalardır.

İlk olarak, n, Δ ve δ parametrelerine bağlı olarak elde edilen $SO(G)$ için bazı sınırları verelim.

Teorem 3.4.1.2. [17] G' nin n noktalı bir graf olduğunu varsayalım. Eğer G 'nin Δ maksimum derecesi ve δ minimum derecesi varsa;

$$\frac{n\delta^2}{\sqrt{2}} \leq SO(G) \leq \frac{n\Delta^2}{\sqrt{2}}$$

Eşitlik (sol ve sağ) sağlanır, ancak ve ancak G düzenli bir graf olmalıdır.

Sonuç 3.4.1.3. [18] G, n mertebeli bir graf olsun. Bu durumda;

$$SO(G) \leq \frac{n(n-1)^2}{\sqrt{2}}$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak $G \cong K_n$ olmalıdır.

Üçgen içermeyen G grafi için, n, m, Δ ve δ 'ye dayalı olarak $SO(G)$ üzerinde bir üst sınır aşağıdaki teoremden ifade edilmiştir.

Teorem 3.4.1.4 [17] G , m kenarlı ve minimum derecesi δ , maksimum derecesi Δ olan n mertebeli üçgen içermeyen bir graf olsun.

$$SO(G) \leq \begin{cases} m\sqrt{\delta^2 + (n - \delta)^2} & \text{eğer } \Delta + \delta \leq n \text{ ise} \\ m\sqrt{\Delta^2 + (n - \Delta)^2} & \text{eğer } \Delta + \delta \geq n \text{ ise} \end{cases}$$

dir.

Teorem 3.4.1.5 [17] G , n noktalı iki parçalı bir graf olsun. Böylece;

$$SO(G) \leq \begin{cases} \frac{n^3}{4\sqrt{2}} & , n \text{ çift ise} \\ \frac{(n^2 - 1)\sqrt{n^2 + 1}}{4\sqrt{2}} & , n \text{ tek ise ,} \end{cases}$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak $G \cong K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ olmalıdır.

Teorem 3.4.1.6. [19] G bağlantılı bir graf, $|V(G)| = n \geq 2$ ve $|E(G)| = m$ olsun. Bu durumda;

$$SO(G) \leq \sqrt{m[2m(\Delta^2 + \delta^2 + \Delta\delta) - n\Delta\delta(\Delta + \delta)]}$$

dir.

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G 'nin düzenli veya yarı düzenli iki parçalı graf olmasıdır.

Teorem 3.4.1.7.[19, 20] G , n noktalı, m kenarlı bir graf ve $\delta \geq 1$ olsun. Bu durumda;

$$SO(G) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{4m^2}{n} + \frac{1}{2}(\Delta - \delta^2) \right) \geq \frac{2\sqrt{2}m^2}{n}$$

dır.

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G 'nin düzenli bir graf olmasıdır.

Teorem 3.4.1.8. [21, 19] G , n noktalı bir graf olsun. Bu durumda;

$$\frac{\sqrt{2}}{4} n(n-1)^2 \leq SO(G) + SO(\bar{G}) \leq \frac{n(n-1)^2}{\sqrt{2}}$$

dir.

Sol eşitlik n tek sayısı için, ancak ve ancak G grafının, $\frac{n-1}{2}$ – düzenli olması durumunda; sağ eşitlik ancak ve ancak $G \cong K_n$ veya $G \cong \bar{K}_n$ olması durumunda geçerlidir.

Teorem 3.4.1.9. [19] G , n noktalı bir graf olsun. Bu durumda;

$$SO(G)SO(\bar{G}) \geq \frac{2m^2[n(n-1) - 2m]^2}{n^2}$$

dir.

Eşitlik ancak ve ancak G 'nin düzenli bir graf olması durumunda geçerlidir.

Teorem 3.4.1.10. [22] G , n noktalı bir graf olsun. Bu durumda;

$$SO(G) + SO(\bar{G}) \geq \sum_{u,v \in V(G)} \frac{|d_u - d_v|}{\sqrt{2}}$$

dir.

3.4.2. Diğer Topolojik İndekslere Bağlı Sınırlar

Burada, Sombor indeks ile diğer indeksler arasındaki ilişkiler verilmiştir.

Teorem 3.4.2.1. [17] G , bağımsızlık sayısı α olan n mertebeli bağlantılı bir graf olsun.

Bu durumda;

$$SO(G) \leq \sqrt{2} \binom{n-\alpha}{2} (n-1) + \alpha(n-\alpha) \sqrt{(n-1)^2 + (n-\alpha)^2}$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak $G \cong CS(n, \alpha)$ olmalıdır.

Teorem 3.4.2.2. [17] G , m kenarlı ve minimum derecesi δ olan bir graf olsun. Bu durumda;

$$SO(G) \leq M_1(G) - (2 - \sqrt{2})\delta m$$

dir.

Ayrıca, eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G 'nin düzenli bir graf olmasıdır.

Teorem 3.4.2.3. [17] G , n noktalı bir graf olsun.

$$SO(G) + SO(\bar{G}) \leq \frac{n(n-1)^2}{\sqrt{2}}$$

dir.

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul $G \cong K_n$ veya $G \cong \bar{K}_n$ olmasıdır.

Teorem 3.4.2.4. [17] G , n noktalı ve m kenarlı bir graf olsun. Bu durumda;

$$(\sqrt{2(\Delta^2 + \delta^2)} + \Delta + \delta) SO(G) \geq \sqrt{\Delta^2 + \delta^2} M_1(G) + \sqrt{2}(\Delta + \delta)\delta m$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca, eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G 'nin düzenli bir graf olmasıdır.

Teorem 3.4.2.5. [17] G , n noktalı bir graf olsun. Maksimum derecesi Δ ve minimum derecesi $\delta > 0$ olsun. Bu durumda;

$$SO(G) \geq \frac{2M_2(G) + n\Delta\delta^2}{\sqrt{2}(\Delta + \delta)}$$

eşitsizliği vardır. Ayrıca, eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G 'nin düzenli bir graf olmasıdır.

Teorem 3.4.2.6. [17] G , n noktalı bir graf olsun. Bu durumda;

$$SO(G)^2 \leq \left(\frac{\Delta}{\delta} + \frac{\delta}{\Delta}\right) mM_2(G),$$

dir.

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G iki parçalı yarı düzenli bir graf veya G düzenli bir graf olmalıdır.

Teorem 3.4.2.7. [18] G , n noktalı bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda;

$$SO(P_n) \leq SO(G) \leq SO(K_n)$$

dir.

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul $G \cong P_n$ veya $G \cong K_n$ olmasıdır.

Teorem 3.4.2.8. [23,19,24] G , n noktalı bir graf olsun. Bu durumda;

$$\frac{\sqrt{2}}{2} M_1(G) \leq SO(G) \leq M_1(G)$$

dir.

u ve v 'nin herhangi bir komşu nokta çifti için sol eşitlik, ancak ve ancak $d_u = d_v$ ise ve sağ eşitlik, ancak ve ancak $G \cong K_n$ ise geçerlidir.

Teorem 3.4.2.9. [24] G , maksimum derecesi Δ ve minimum derecesi δ olan bir graf olsun. Bu durumda;

$$SO(G) \leq \frac{\sqrt{\Delta^2 + \delta^2}}{\Delta + \delta} M_1(G)$$

dir.

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G düzenli veya 2-düzenli olmalıdır.

Teorem 3.4.2.10. [19] G , $n \geq 2$ noktalı bir graf olsun. Bu durumda;

$$SO(G) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} [M_1(G) + m(\Delta - \delta)]$$

G 'deki herhangi bir bitişik u, v nokta çifti için, eşitlik sağlanır ancak ve ancak $d_u = d_v$ olmalıdır.

Teorem 3.4.2.11. [19] G , $n \geq 2$ noktalı ve m kenarlı bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda;

$$SO(G) \leq \sqrt{m[(\Delta + \delta)M_1(G) - 2m\Delta\delta]}$$

dir.

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G 'nin düzenli veya yarı düzenli iki parçalı graf olmasıdır.

Teorem 3.4.2.13. [24] G , m kenarlı ve maksimum derece Δ , minimum derece δ olan bir graf olsun. Bu durumda;

$$\sqrt{F(G) + \frac{1}{2}m(m-1)\Pi_1^*(G)^{2/m}} \leq SO(G) \leq \sqrt{(m-1)F(G) + m\Pi_1^*(G)^{2/m}}$$

eşitsizliği vardır.

Burada $\Pi_1^*(G) = \Pi_{uv \in E(G)}(d_u + d_v)$ dir.

Teorem 3.4.2.14. [23] G , n noktalı bir graf olsun. Bu durumda;

$$SO(G) \geq \frac{\sqrt{2}}{n-1} M_2(G)$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak $G \cong K_n$ olmalıdır.

Teorem 3.4.2.15. [24] G , m kenarlı bir graf ve $\alpha > 0$ olsun. Bu durumda;

$$SO(G)^{2\alpha} \geq 2^\alpha m^{2\alpha+1} M_2(G)^\alpha$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak G düzenli bir graf olmalıdır.

Teorem 3.4.2.16. [24] G , m kenarlı ve maksimum derecesi Δ , minimum derecesi δ olan bir graf olsun.

(I) $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ ise, bu durumda;

$$SO(G) \geq 2^\alpha m^{2\alpha-1} M_2(G)^\alpha$$

dir.

$0 < \alpha < \frac{1}{2}$ ise, bu durumda eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G 'nin düzenli olmasıdır.

$\alpha = \frac{1}{2}$ ise, eşitlik sağlanır. Ancak ve ancak G' nin her bağlı bileşeni düzenli olmalıdır.

(II) $\alpha \geq \frac{1}{2}$ ise, bu durumda;

$$SO(G) \geq m^{2\alpha-1} \left(\frac{\Delta^2 + \delta^2}{\Delta\delta} \right)^\alpha M_2(G)^\alpha$$

dir.

Eşitliğe ancak ve ancak G 'nin düzenli veya 2-düzenli bir graf olması durumunda ulaşılır.

Teorem 3.4.2.17. [23] G bir graf, $|V(G)| = n$, $|E(G)| = m$ olan olsun. Bu durumda;

$$SO(G) \geq \frac{\sqrt{2}m^2}{R(G)}$$

dir.

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G grafının düzenli bir graf olmasıdır.

Teorem 3.4.2.18. [23] G , üçgen içermeyen n noktalı bir graf olsun. Bu durumda;

$$SO(G) \geq \frac{2\sqrt{2}}{n} M_2(G)$$

dir.

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul $G \cong K_{\frac{n}{2}+1}$ olmasıdır.

Teorem 3.4.2.19. [23] G , üçgen içermeyen n noktalı, m kenarlı bir graf olsun. Bu durumda;

$$SO(G) \leq \sqrt{m[mn^2 - 2M_2(G)]}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.4.2.20. [26] G , izole kenarları olmayan n noktalı, m kenarlı bir graf, olsun. Bu durumda;

$$SO(G) \geq \frac{1}{3} (2\sqrt{2} - \sqrt{5}) (3M_1(G) - 4m + 2\sqrt{5}\sqrt{2}m)$$

dir.

Teorem 3.4.2.21. [20] G bir graf olsun. Bu durumda;

$$SO(G) \geq \sqrt{2RR(G)},$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak G düzenli bir graf olmalıdır.

Teorem 3.4.2.22. [25] G bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda;

$$SO(G) \leq \sqrt{M_1(G)[M_1(G) - 2ISI(G)]}$$

dir.

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G 'nin düzenli bir graf olmasıdır.

Teorem 3.4.2.23. [25] G bağlantılı, $n \geq 2$ noktalı ve m kenarlı bir graf olsun. Bu durumda;

$$SO(\bar{G}) \leq \sqrt{M_1(G) \left(M_1(G) - 2ISI(G) + \frac{1}{2}(n-1)^2 H(G) - m(n-1) \right)}$$

dir.

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G 'nin kenar-düzenli bir graf olmasıdır.

Teorem 3.4.2.24. [25] G bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda;

$$SO(\bar{G}) \leq \sqrt{\frac{1}{2}[F(G) + 2M_2(G)][2AG(G) - GA(G)]}$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak G düzenli bir graf olmalıdır.

Teorem 3.4.2.25. [19] G bağlantılı, $n \geq 2$ noktalı ve m kenarlı bir graf olsun. Bu durumda;

$$SO(G) \leq \sqrt{m[2m(\Delta^2 + \delta^2) - ID(G)(\Delta\delta)^2]}$$

dir.

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul, G 'nin düzenli bir graf veya yarı düzenli iki parçalı bir graf olmasıdır.

Teorem 3.4.2.26. [25] G bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda;

$$SO(G) \leq \sqrt[4]{ID(G)F(G)M_2(G)^2}$$

dir.

Eşitlik ancak ve ancak G 'nin kenar-düzenli bir graf olması durumunda geçerlidir.

Teorem 3.4.2.27. [19] G , $n \geq 2$ noktalı ve m kenarlı bir graf olsun. Bu durumda;

$$\frac{\sqrt{2}}{2} [Alb(G) + \sqrt{2}RR(G)] \leq SO(G) \leq Alb(G) + \sqrt{2}RR(G)$$

dir.

Eşitsizlikleri sağlanır. Sol taraftaki eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul $G \cong \overline{K_n}$ olmasıdır. Sağ taraftaki eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul u ve v komşu iki nokta çifti için $d_u = d_v$ olmasıdır.

Teorem 3.4.2.28. [25] G bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda;

$$SO(G) \geq \sqrt{\frac{M_1(G)^2 + Alb(G)^2}{2}}$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak G kenar-düzenli bir graf olmalıdır.

Teorem 3.4.2.29. [16] G , $n \geq 2$ noktalı bir graf olsun. Bu durumda;

$$SO(G) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} [Alb(G) + M_1(G)]$$

dir.

Eşitlik ancak ve ancak G 'de, u ve v 'nin herhangi bir komşu nokta çifti için $d_u = d_v$ olması durumunda geçerlidir.

Teorem 3.4.2.30. [27] G , n noktalı m kenarlı bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda;

$$\frac{\sqrt{2}M_2(G)}{\Delta} \leq SO(G) \leq \frac{\sqrt{2}M_2(G)}{\delta}$$

dir.

Teorem 3.4.2.31. [23, 24, 20, 27] G , n noktalı m kenarlı bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda;

$$\max\left\{\frac{F(G)}{\sqrt{2\Delta}}, \frac{2\sqrt{\Delta\delta}}{\Delta+\delta}\sqrt{mF(G)}\right\} \leq SO(G) \leq \sqrt{mF(G)}$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak G düzenli bir graf olmalıdır.

Teorem 3.4.2.32. [17] G bir graf, $|E(G)| = m$, maksimum derece Δ , minimum derece δ olsun. Bu durumda;

$$SO(G) \geq \frac{\sqrt{2} F(G) + 2\Delta\delta n}{2(\Delta + \delta)}$$

dir.

Eşitlik sağlanır ancak ve ancak G düzenli bir graf olmalıdır.

Teorem 3.4.2.33. [27] G , n noktalı m kenarlı bağlantılı bir graf olsun.

$$\sqrt{2}\delta^2 R(G) \leq SO(G) \leq \sqrt{2}\Delta^2 R(G)$$

dir.

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G 'nin düzenli bir graf olmasıdır.

Teorem 3.4.2.34. [19] G , $n \geq 2$ noktalı bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda;

$$SO(G) \leq \sqrt{M_2(G)SDD(G)}$$

dir.

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul herhangi bir u, v komşu nokta çifti için

$$\frac{1}{d_u^2} + \frac{1}{d_v^2} \text{ ifadesinin sabit olmasıdır.}$$

Teorem 3.4.2.35. [27] G , n noktalı ve m kenarlı bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda;

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\delta[SDD(G)] \leq SO(G) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\Delta[SDD(G)]$$

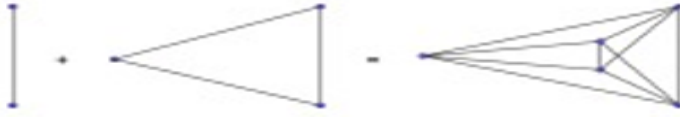
dir.

3.5. Ekstrem ve bazı özel yapıları grafların Sombor İndeksleri

3.5.1. Yol ve Döngü Graf

Tanım 3.5.1.1. [28] İki nokta-ayrık graf G ve H için, G ve H 'nin birleşimi $G + H$ ile gösterilir;

$V(G + H) = V(G) \cup V(H)$ nokta kümesi ve $E(G + H) = E(G) \cup E(H) \cup \{uv : u \in V(G), v \in V(H)\}$ kenar kümesidir. (Bkz. Şekil 3.1)



Şekil 3.1: $K_3 + P_2$

Tanım 3.5.1.2 [29] G , n noktalı bağlantılı bir graf olsun ve H (bağlantılı olmak zorunda değil) en az iki noktalı bir graf olsun, G ve H 'nin çarpımı, H 'nin n kopyasını alarak ve G 'nin i . noktasını her kopyada H 'nin noktalarına bağlayarak oluşturulan bir graf olarak tanımlanır ve $G \odot H$ ile gösterilir. (Bkz. Şekil 3.2)



Şekil 3.2: $K_3 \odot P_2$

Teorem 3.5.1.3. [30] $P_n + P_m$ grafinin Sombor indeksi;

$$SO(P_n + P_m) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 18\sqrt{2} ; n = m = 2 \\ \square \\ 10 + (5m - 11)\sqrt{2} + 4\sqrt{9 + (m + 1)^2} + 2(m - 2)\sqrt{16 + (m + 1)^2}; n = 2, m > 2 \\ \square \\ 10 + (5m - 11)\sqrt{2} + 4\sqrt{9 + (n + 1)^2} + 2(n - 2)\sqrt{16 + (n + 1)^2}; n > 2, m = 2 \\ \square \\ 2\sqrt{(m + 1)^2 + (m + 2)^2} + (n - 3)\sqrt{2(m + 2)^2} \\ + 2\sqrt{(n + 1)^2 + (n + 2)^2} + (m - 3)\sqrt{2(n + 2)^2} \\ + 4\sqrt{(n + 1)^2 + (m + 1)^2} + 2(m - 2)\sqrt{(n + 2)^2 + (m + 1)^2} \\ + (n - 2)(m - 2)\sqrt{(n + 2)^2 + (m + 2)^2} \\ + 2(n - 2)\sqrt{(n + 1)^2 + (m + 2)^2}; n, m > 2 \end{array} \right.$$

dir.

Teorem 3.5.1.4. [30] $n, m \geq 3$ olacak şekilde iki pozitif tam sayı olsun. Bu durumda;

$$SO(C_n + C_m) = 2\sqrt{2}(nm + n + m) + nm + \sqrt{(n + 2)^2 + (m + 2)^2}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.5.1.5. [30] P_n ve K_m yol ve tam graflar olmak üzere

$$SO(P_n + K_m) = \begin{cases} 2(m + 1)\sqrt{2} ; \text{eğer } n = 2 \text{ ise,} \\ \square \\ \square \\ T(n, m) ; \text{eğer } n > 2 \text{ ise} \end{cases}$$

$$\text{Burada} \quad T(n, m) = [2(m + 1) + (n - 3)(m + 2) + (n + m - 1)\left(\frac{2}{m}\right)]\sqrt{2} +$$

$$2m\sqrt{(m + 1)^2 + (n + m - 1)^2} + m(n - 2)\sqrt{(m + 2)^2 + (n + m - 1)^2}$$

dir.

Teorem 3.5.1.6. [30] C_n ve K_m , döngü ve tam graflar olmak üzere;

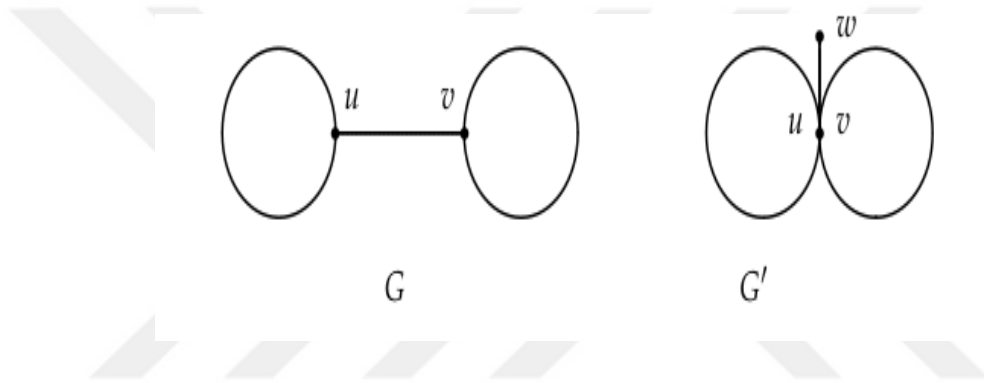
$$SO(C_n + K_m) = \sqrt{2}n(m+2) + \sqrt{2}(m+n-1) \binom{m}{2} + mn\sqrt{(m+2)^2 + (m+n-1)^2}$$

eşitliği sağlanır.

Lemma 3.5.1.7 [31] G bir graf olsun ve $e = uv$ kenarı $N_G(u) \cap N_G(v) = \emptyset$ ile G' nin bir kenarı olsun. G grafında, önce e kenarını silerek ve u ' yu v ile özdeşleştirerek ve ardından ortak tepe noktasına bir sarkit tepe noktası w ekleyerek elde edilen graf G' olsun. (bkz. Şekil 3.3)

$d_G(u) \geq 2$ ve $d_G(v) \geq 2$ ise, $SO(G) < SO(G')$

dir.



Şekil 3.3. G ve G' grafları.

3.5.2. Ağaçlar ve Bazı Özel Türleri

Burada, ağaçların Sombor indeksinin uç değerleri çeşitli yapısal parametreler açısından derlenmiştir. T_n , n noktalı ağaçlar kümesi olarak ifade edilir.

Teorem 3.5.2.1. [18] $T \in T_n$ olsun. Bu durumda;

$$SO(P_n) \leq SO(T) \leq SO(S_n)$$

eşitsizliği vardır. Eşitlik sağlanır ancak ve ancak $T \cong P_n$ veya $T \cong S_n$ olmalıdır.

Teorem 3.5.2.2 [12] $T \in T_n$ ve $T \not\cong P_n$ ($n \geq 7$). Bu durumda

$$SO(T) \geq 2\sqrt{2}(n-7) + 3\sqrt{13} + 3\sqrt{5}$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak $T \cong T(a, b, c)$ dir. Burada $a + b + c = n - 1$ ve $a \geq b \geq c \geq 2$ dir.

Tanım 3.5.2.3. [12] $DS_{p,q}$ ($p \geq q \geq 1$), $K_{1,p}$ ve $K_{1,q}$ yıldızlarının merkezi noktalarının birleştirilmesiyle (yeni bir kenarla) elde edilen çift yıldız olur.

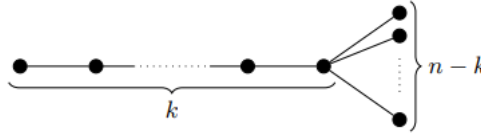
Teorem 3.5.2.4. [12] $T \in T_n$ ($n \geq 4$) ve $T \not\cong K_{1,n-1}$ olsun. Bu durumda;

$$SO(T) \leq \sqrt{5} + \sqrt{n^2 - 4n + 8} + (n - 3)\sqrt{n^2 - 4n + 5}$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak $T \cong DS_{n-3,1}$ olmalıdır.

Tanım 3.5.2.5. [12] $T_{n,k}$, n noktalı ve k sarkık noktası olan ağaçlar kümesi olsun. $Y_{n,k} \in T_{n,k}$ süpürge grafi, S_k 'nin sarkık kenarlarından birini $n - k$ uzunluğunda bir yolla değiştirerek elde edilen ağaçtır.



Şekil 3.4. $T_{n,k}$ grafi

Teorem 3.5.2.6. [32, 23] $T \in T_{n,k}$ ($2 \leq k \leq n - 2$) olsun. Bu durumda;

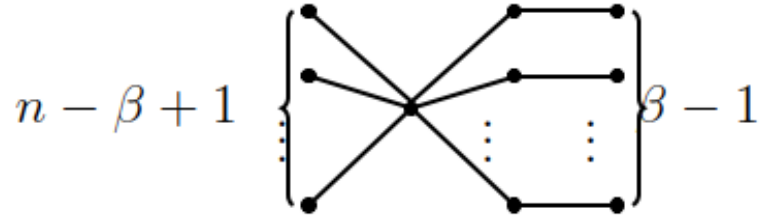
$$SO(T) \leq (k - 1)\sqrt{1 + k^2} + \sqrt{4 + k^2} + 2\sqrt{2}(n - k - 2) + \sqrt{5}$$

dir.

Eşitlik sağlanır ancak ve ancak $T \cong Y_{n,k}$ olmalıdır.

Tanım 3.5.2.7. [32, 23] Noktası n ve eşleşme sayısı β olan ağaçlar kümesi $\mathfrak{T}_{n,\beta}$ olsun.

T_n^β , $S_{n-\beta+1}$ yıldızından $S_{n-\beta+1}$ 'de $\beta - 1$ sarkık kenarı alt bölümlere ayırarak elde edilen ağaçtır.



Şekil 3.5. T_n^β grafi

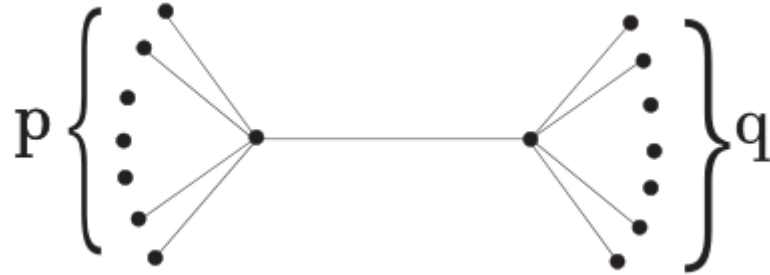
Teorem 3.5.2.8. [33, 34] $T \in \mathfrak{T}_{n,\beta}$ ($2 \leq \beta \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$) olsun. Bu durumda;

$$SO(T) \leq (n - 2\beta + 1)\sqrt{1 + (n - \beta)^2} + (\beta - 1) \left[\sqrt{5} + \sqrt{4 + (n - \beta)^2} \right]$$

dir. Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak $T \cong T_n^\beta$ olmalıdır.

Tanım 3.5.2.9. [33,34] $G = (V_1, V_2)$ iki parçalı bir graf, $|V_1| = p$ ve $|V_2| = q$ olsun. Bu durumda;

G 'nin bir (p, q) -bölümü olduğunu söyleriz. $\mathfrak{B}_{p,q}$, $p+q$ noktaları ve bir (p, q) bölümü olan ağaçlar kümesi olsun. $DS_{p,q}$, ilgili çift yıldız graflarıdır.



Şekil 3.6. $DS_{p,q}$ çift yıldız grafi

Teorem 3.5.2.10. [33] $T \in V_{p+1,q+1}$ olsun. Bu durumda;

$$SO(T) \leq \sqrt{p^2 + q^2} + (p - 1)\sqrt{1 + p^2} + (q - 1)\sqrt{1 + q^2}$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak $T \cong DS_{p,q}$ olmalıdır.

Tanım 3.5.2.11. [33] $\mathcal{T}_n^d$ ağaçlar kümesinin, n mertebesi ve d çapı olsun. Çift süpürge grafi $H_l(s, t)$, s ve t kalem girintilerinin noktalarını sırasıyla v_1 ve v_l 'ye bağlayarak $P_l = v_1 v_2 \dots v_l$ yolundan elde edilir, burada $n = l + s + t$, $l \geq 2$, $s \geq t \geq 1$ dir.

Teorem 3.5.2.12. [35] $H_2(s, t)$ için burada $n = 2 + s + t$, $s \geq t \geq 1$ ve

$$SO(H_2(n-3, 1)) > SO(H_2(n-4, 2)) > \dots > SO\left(H_2\left(\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor\right)\right)$$

dir.

Teorem 3.5.2.13. [33] $H_l(s, t)$ için, burada $n = 1 + s + t$, $l \geq 2$, $s \geq t \geq 1$ ve

$$SO(H_l(n-l-1, 1)) > SO(H_l(n-l-2, 2)) > \dots > SO\left(H_1\left(\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor\right)\right)$$

dir.

$\mathcal{T}_n^{d,i}$, $i \in \{1, 2, \dots, d-1\}$ için v_i noktasına $n-d-1$ sarkık nokta eklenerek

$P = v_0 v_1 \dots v_d$ yolundan elde edilen n -nokta ağaçlar kümesi olsun. Kolaylık sağlamak için, $\mathcal{T}_n^{d,1} = \mathcal{T}_n^d$ olsun. Chen ve ark. [33] ve Li ve ark. [35], $\mathcal{T}_n^d$ ($d \geq 4$) arasındaki en büyük iki Sombor indeksini eş zamanlı olarak elde ettiler.

Teorem 3.5.2.14. [33, 35] $T \in \mathcal{T}_n^d$ ($d \geq 4$) olsun. Bu durumda;

$$SO(T) \leq (n-d)\sqrt{1+(n-d+1)^2} + \sqrt{4+(n-d+1)^2} + 2\sqrt{2}(d-3) + \sqrt{5}$$

dir.

Eşitlik sağlanır ancak ve ancak $T = T_n^d$ ve burada $T_n^d = T_n^{d,1} \cong T_n^{d,d-1}$ olmalıdır.

$T \not\cong T_n^d$ ise, bu durumda;

$$SO(T) \leq 2\left(\sqrt{5} + (d-4)\sqrt{2} + \sqrt{4+(n-d-1)^2}\right) + (n-d-1)\sqrt{1+(n-d-1)^2}$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak $T \in \{T_n^{d,i} : i = 2, 3, \dots, d-2\}$ olmalıdır.

$T_n^{d,i,j}$, $P = v_0 v_1 \dots v_d$ yolundan elde edilen n -nokta ağaçlarının kümesi olsun.

$i, j \in \{1, 2, \dots, d-1\}$ için $n-d-2$ (veya 1) sarkık noktaları, v_i noktası (veya v_j) ekleyerek, $\mathcal{H}_n^d = \{T_n^{d,i,j} : i, j = 1, 2, \dots, d-1\}$ olsun.

$T \in T_n^d \setminus \{T_n^{d,i} : i = 1, 2, \dots, d-1\}$ dir. Li ve ark. [35] Sombor indeksine göre $\mathcal{H}_n^d$ 'deki ağaçları daha fazla sıralamışlardır.

Teorem 3.5.2.15. [35] $T \in \mathcal{T}_n \setminus \{S_2, H_2(1, n-3), H_2(2, n-4), T_n^4\}$ ($n \geq 3$) olsun. Bu durumda;

$$SO(T) < SO(T_n^4) < SO(H_2(2, n-4)) < SO(H_2(1, n-3)) < SO(S_n)$$

dir.

Tanım 3.5.2.16. [33] Bir ağacın bir parçası, terminal noktaları dallanan veya sarkık noktalar olan bir yol alt ağacıdır. $\mathcal{F}_{n,k}$ ile tam olarak k segmentli n mertebesindeki ağaçlar kümesi belirtilir.

Teorem 3.5.2.17. [33] $T \in \mathcal{F}_{n,k}$ olsun. Bu durumda;

$$SO(T) \leq (k-1)\sqrt{1+k^2} + \sqrt{4+k^2} + 2\sqrt{2}(n-k-2) + \sqrt{5}$$

dir. Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak $T \cong Y_{n,k}$ dir. Burada $Y_{n,k}$ süpürge grafıdır.

Teorem 3.5.2.18. [33] $T \in \mathcal{F}_{n,k}$ olsun. Bu durumda;

(I) $3 \leq k \leq \frac{2n-5}{3}$ ve k tek ise, o zaman;

$$SO(T) \geq \frac{3\sqrt{2}(k-3) + (\sqrt{5} + \sqrt{13})(k+3)}{2} + \sqrt{2}(2n-3k-5)$$

dir.

(II) $\frac{2n-5}{3} \leq k \leq n-2$ ve k tek ise, o zaman;

$$SO(T) \geq \frac{3\sqrt{2}(k-3) + \sqrt{10}(3k-2n-5)}{2} + (\sqrt{5} + \sqrt{13})(n-k-1)$$

dir.

(III) $4 \leq k \leq 10$ ve k çift ise, o zaman;

$$SO(T) \geq \frac{\sqrt{5}(28-k) + 5k + 2\sqrt{13} - 20}{2} + \sqrt{2}(2n - 3k - 6)$$

dir.

(IV) $12 \leq k \leq \frac{2n-6}{3}$ ve k çift ise, o zaman;

$$SO(T) \geq \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{13})(k+4) + 3\sqrt{2}(k-12)}{2} + \sqrt{2}(2n - 3k - 6) + 20$$

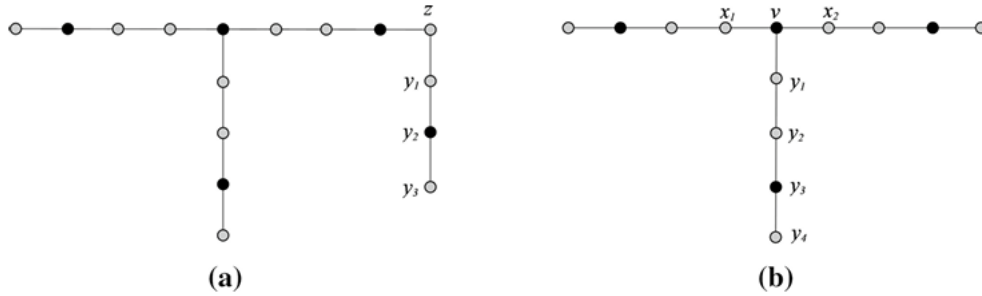
dir.

(V) $\frac{2n-6}{3} \leq k \leq n-2$ ve k çift ise, o zaman;

$$SO(T) \geq (\sqrt{5} + \sqrt{13})(n-k-1) + \frac{\sqrt{10}}{2}(3k-2n+6) + \frac{3\sqrt{2}}{2}(k-12) + 20$$

dir.

Tanım 3.5.2.19. [12] $S_{n,\alpha}$, bağımsızlık numarası α olan n mertebeden ağaçların sınıfı olsun. $n - \alpha - 1$ sarkık noktalarına bir sarkık kenar ekleyerek $K_{1,\alpha}$ yıldızından elde edilen ağaçlar olarak tanımlanır.



Şekil 3.7. T Graf ailesinden iki ağaç

Teorem 3.5.2.20. [12] $T \in S_{n,\alpha}$ olsun. Bu durumda;

$$SO(T) \leq (2\alpha - n + 1)\sqrt{1 + \alpha^2} + (n - \alpha - 1)(\sqrt{4 + \alpha^2} + \sqrt{5})$$

dir.

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul $T \cong S_{n,\alpha}$ olmasıdır.

3.5.3. Döngüsel Graflar

Burada, döngüsel grafların Sombor indeksinin uç değerleri çeşitli yapısal parametreler açısından toplanmıştır. $\mathcal{G}_{n,k}$, n noktalı k -döngüsü grafları kümesi olsun.

Teorem 3.5.3.1. [36,37,26] $G \in \mathcal{G}_{n,1}$ olsun. Bu durumda;

$$SO(G) \geq SO(C_n) = 2\sqrt{2}n.$$

dir.

Teorem 3.5.3.2 [38] $G \in \mathcal{G}_{n,2}$ olsun. Bu durumda;

$$SO(G) \geq 2\sqrt{2}n - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{13} = SO(G')$$

dir.

Burada G' , yalnızca bir kenarın iki döngüye ait olduğu veya yalnızca bir kenarın iki döngüyü birbirine bağladığı herhangi bir bağlantılı iki döngülü graftır.

Teorem 3.5.3.3 [38] $G \in \mathcal{G}_{n,1}$ olsun ($n \geq 4$) olsun. Bu durumda;

$$SO(G) \leq SO(U(n, n-3, 0, 0))$$

dir.

Burada $U(n, n-3, 0, 0)$, üçgenin bir noktasına $n-3$ sarkık nokta eklenerek elde edilen graftır.

Teorem 3.5.3.4 [38] $G \in \mathcal{G}_{n,2}$ ($n \geq 6$) olsun. Bu durumda;

$$SO(G) \leq SO(B_{2,0}(n, n-4, 0, 0, 0))$$

dir.

Burada $B_{2,0}(n, n-4, 0, 0, 0)$, $K_4 - e$ ' nin 3. derecesinin bir noktasına $n-4$ sarkık nokta eklenerek elde edilen graftır.

$\mathcal{U}_{n,\Delta}$, maksimum derecesi Δ olan n mertebesindeki tek döngülü graflar kümesi olsun. $U_{n,\Delta}$, $n - \Delta - 1$ yolları P_2 ' yi C_3 döngüsünün bir noktasına kadar, $2\Delta - n - 1$ sarkık nokta eklenerek elde edilen tek döngülü graf olsun ve U_Δ , en az 2 uzunluğundaki $\Delta - 2$ yolunun bir döngüye eklenmesiyle elde edilen tek döngülü graf olsun [39].

Teorem 3.5.3.5. [39] $G \in \mathcal{U}_{n,\Delta}$ ($n \geq 5$) ve $3 \leq \Delta \leq n - 2$ olsun. Bu durumda;

(I) $3 \leq \Delta \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ ise, o zaman

$$SO(G) \geq \Delta\sqrt{\Delta^2 + 4} + 2\sqrt{2}(n - 2\Delta + 2) + \sqrt{5}(\Delta - 2)$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak $G \cong U_\Delta$ olmalıdır.

(II) $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor \leq \Delta \leq n - 2$ ise, o zaman

$$SO(G) \geq (n - \Delta + 1)\sqrt{\Delta^2 + 4} + (2\Delta - n - 1)\sqrt{\Delta^2 + 1} + \sqrt{5}(n - \Delta - 1) + 2\sqrt{2}$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak $G \cong U_{n,\Delta}$ olmalıdır.

$\mathcal{U}_{n,\beta}$, n noktalı ve β sayısı ile eşleşen tek döngülü graflar kümesi olsun. $U_n^\beta, \beta - 2$ yolları P_2 'yi C_3 döngüsünün bir noktasına kadar, $n - 2\beta + 1$ sarkık noktalar eklenerek elde edilen tek döngüsel graflar olsun.

Teorem 3.5.3.6. [34] $G \in \mathcal{U}_{n,\beta}$, ($2 \leq \beta \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$) olsun. Bu durumda;

$$SO(T) \leq (n - 2\beta + 1)\sqrt{1 + (n - \beta + 1)^2} + \beta\sqrt{4 + (n - \beta + 1)^2} + \sqrt{5}(\beta - 2) + 2\sqrt{2}$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak $G \cong U_n^\beta$ olmalıdır.

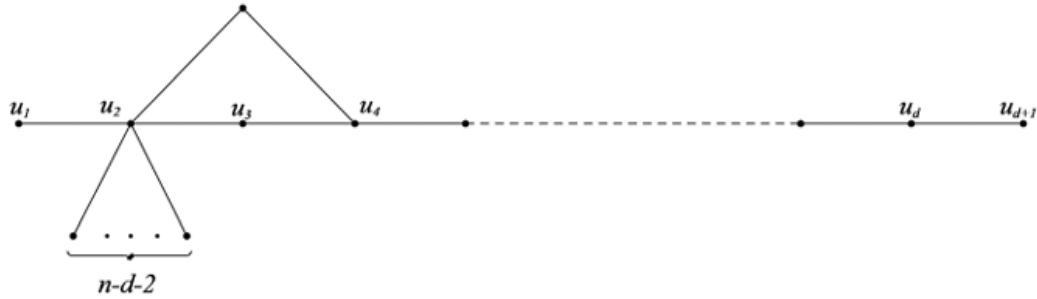
Teorem 3.5.3.7. [40] G , çevresi g olan n mertebeli tek döngülü bir graf olsun. Bu durumda;

$$SO(G) \leq 2\sqrt{4 + (n - g + 2)^2} + (n - g)\sqrt{1 + (n - g + 2)^2} + 2\sqrt{2}(g - 2)$$

dir.

Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G , C_g 'nin bir tepe noktasına $n - g$ sarkık kenarları eklenerek elde edilen grafa izomorf ise geçerlidir.

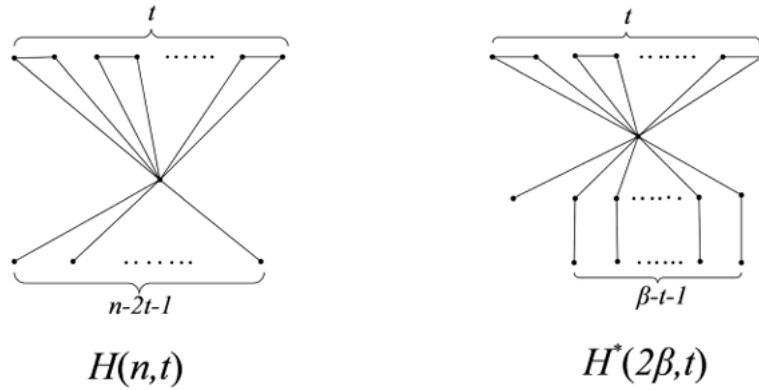
$\mathcal{U}_{n,d}$, n mertebeli ve d çapında tek döngüsel graflar kümesi olsun. $U_n^d \in \mathcal{U}_{n,d}$ grafi Şekil 2'de gösterilmiştir. [36]



Şekil 3.8. U_n^d ($d \geq 4$) grafi

3.5.4. Kaktüs Graf

Bir kaktüs, herhangi iki döngünün en fazla bir ortak tepe noktasına sahip olduğu bir graftır. $H(n, t)$ ve $\mathcal{C}(2\beta, t)$ ile sırasıyla; n noktalı, t döngülü kaktüslerin koleksiyonunu ve 2β noktalı, t döngülü mükemmel eşleşmelere sahip kaktüslerin koleksiyonunu belirtelim.



Şekil 3.9. [41]' nin $H(n, t)$ ve $H^*(2\beta, t)$ kaktüsleri

Teorem 3.5.4.1. [41] $G \in H(n, t)$ ($n \geq 5$) olsun. Bu durumda;

$$SO(G) \leq (n - 2t - 1)\sqrt{(n - 1)^2 + 1} + 2t\sqrt{(n - 1)^2 + 4} + 2\sqrt{2}t$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak $G \cong H(n, t)$ olmalıdır.

Teorem 3.5.4.2. [41] $G \in \mathcal{C}(2\beta, t)$ ($\beta \geq 2$) olsun. Bu durumda;

$$SO(G) \leq (\beta + t - 1)\sqrt{(\beta + t)^2 + 4} + \sqrt{(\beta + t)^2 + 1} + \sqrt{5}(\beta - t - 1) + 2\sqrt{2}t$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak $G \cong H^*(2\beta, t)$ olmalıdır.

C_n^k ve $\mathcal{C}(n, p)$ ile sırasıyla; k kesik kenarlı n mertebesindeki kaktüslerin toplanmasını ve n mertebesindeki p sarkık noktalı kaktüslerin toplanmasını belirtelim. Ning ve ark. [42] sırasıyla C_n^k ve $\mathcal{C}(n, p)$ arasında maksimum Sombor indeksini belirlemişlerdir. Önce Y_1 ve Y_2 olmak üzere iki sınıf graf verdiler. Y_1 , S_{n-1} 'den önce sarkık noktaları arasına yeni kenarların ikisi komşu olmayacak şekilde $\frac{n-k-2}{2}$ yeni kenar ekleyerek ve ardından bir yeni kenarı alt bölümlere ayırarak elde edilen graf olsun; Y_2 , S_n 'den sarkık noktaları arasına $\frac{n-k-1}{2}$ yeni kenar eklenerek, böylece yeni kenarların ikisi komşu olmayacak şekilde elde edilen graf olsun. (bkz. Şekil 3.10)

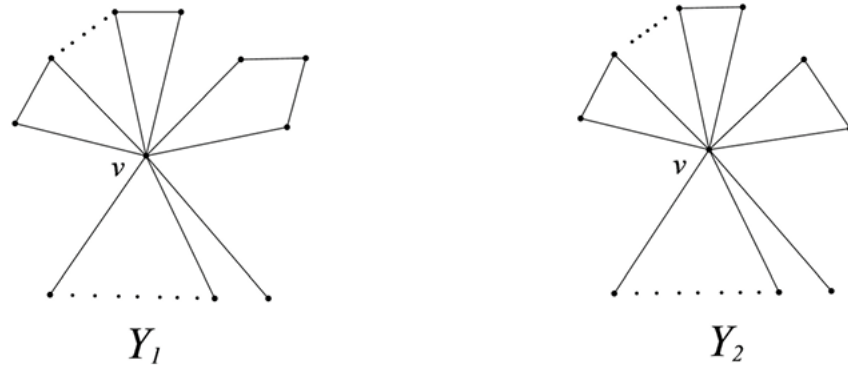
Teorem 3.5.4.3. [42] C_n^k içindeki graflar için ($0 \leq k \leq n - 3$) olsun. Bu durumda;

(I) $n - k$ çift ise, Y_1 maksimum Sombor indeksine sahip benzersiz graftır,

(II) $n - k$ tek ise, Y_2 maksimum Sombor indeksine sahip benzersiz graftır,

burada Y_1 ve Y_2 Şekil 3.10' da gösterilmiştir.

$DS_{p,q}$ 'nin, q sarkık noktalarını bir sarkık tepe noktasına bağlayarak bir S_{p+2} yıldızından elde edilen çift yıldız grafi olduğunu hatırlayın.



Şekil 3.10. [42] Y_1 ve Y_2 grafları

Teorem 3.5.4.4. [42] $C(n, p)$ 'deki graflar için, burada $0 \leq p \leq n - 5$ ve $n \geq 5$ dir. Bu durumda;

- (I) $p = n - 2$ ise, $DS_{n-3,1}$ maksimum Sombor indeksine sahip benzersiz graftır;
 - (II) $P \leq n - 3$ ve $n - p$ çift ise, Y_1 maksimum Sombor indeksine sahip benzersiz graftır,
 - (III) $P \leq n - 3$ ve $n - p$ tek ise, Y_2 maksimum Sombor indeksine sahip benzersiz graftır,
- burada Y_1 ve Y_2 Şekil 3.10' da gösterilmiştir.

[39]' da, aşağıdaki iki koşul geçerliyse, kimyasal bir kaktüs H ' nin güzel doymuş olduğu söylenir:

- (I) H 'nin mümkün olduğu kadar çok doymuş çokgeni vardır;
- (II) H 'nin her bir çokgenindeki kesilmiş noktalar art arda düzenlenir.

$\mathcal{G}_{n,k}$, n çokgenli k -çokgen kaktüslerin kümesi olsun.

Teorem 3.5.4.5. [43] $G \in \mathcal{G}_{n,k}$, $n \geq 3$, $k \geq 3$ olsun. Bu durumda;

$$SO(G) \geq 2\sqrt{2}nk + 8(\sqrt{5} - \sqrt{2})(n - 1) + (6\sqrt{2} - 4\sqrt{5}) \left(n - 2 + \left\lfloor \frac{n-2}{k-1} \right\rfloor \right)$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak G güzel doymuş bir kimyasal kaktüs olmalıdır.

[43]' da, yıldız benzeri bir kaktüs $S_{n,k}$, tüm çokgenlerin ortak bir tepe noktasına sahip olacak şekilde bir k -çokgen kaktüs olarak tanımlanır.

Teorem 3.5.4.6. [43] $G \in \mathcal{G}_{n,k}$, $n \geq 3$, $k \geq 3$ olsun. Bu durumda;

$$SO(G) \leq 2\sqrt{2}n(k - 2) + 4n\sqrt{n^2 + 1}$$

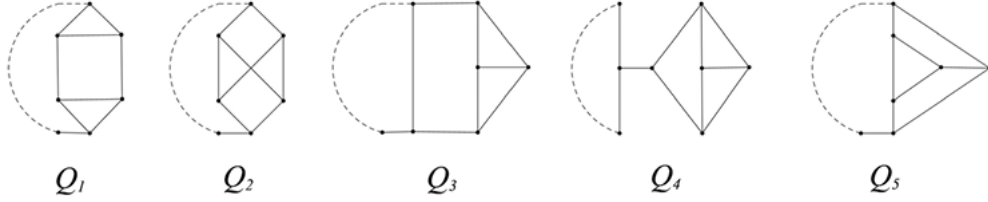
dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak $G \cong S_{n,k}$ olmalıdır.

3.5.5 Bazı Diğer Bağlantılı graflar

Bu bölümde, bağlantılı grafların Sombor indeksinin sınırları çeşitli yapısal parametreler açısından toplanmıştır.

Aashtab ve ark. [44] Sombor indeksinin ilginç bir özelliğini bulmuşlardır. $\mathbb{CG}(n, m)$ ile n noktalı ve m kenarlı bağlı graflar kümesi belirtilsin.



Şekil 3.11. [45]'in minimum $Q_i (1 \leq i \leq 5)$ grafları

Teorem 3.5.5.1. [46] $G \in \mathbb{CG}(n, m)$ ve her $H \in \mathbb{CG}(n, m)$ için,

$$SO(G) \leq SO(H)$$

dir. Bu durumda; $\Delta(G) - \delta(G) \leq 1$ olduğunu varsayalım.

Yukarıdaki sonucu kullanarak, mevcut yazarlardan üçü [41] üç döngülü (tricyclic) ve dört döngülü (tetracyclic) grafların minimum Sombor indekslerini belirledi. $\mathcal{TG}_n$, n noktalı dört döngülü (tetracyclic) graflar kümesi olsun.

Teorem 3.5.5.2. [45] $G \in \mathcal{TG}_n$ ($n \geq 9$) olsun. Bu durumda;

$$SO(G) \geq 2\sqrt{2}n + 2\sqrt{13} + 10\sqrt{2}$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak $G \cong Q_i$, $1 \leq i \leq 5$ olmalıdır. (Bkz.Şekil 3.11)

Eğer $v_i \in V(G)$ şeklinde bir nokta varsa ve $G - v_i$ bir ağaç ise, bu durumda G grafinin bir yarı ağaç olduğu söylenir. $\mathcal{Q}T'(n)$ ile n noktalı yarı ağaçlar kümesini belirtilsin.

Teorem 3.5.5.3. [12] $G \in \mathcal{Q}T'(n)$ olsun. Bu durumda;

$$\sqrt{8}n \leq SO(G) \leq \sqrt{2}(n-1) + 2(n-2)\sqrt{n^2 - 2n + 5}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Sol eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul $G \cong C_n$ olmasıdır, sağ eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul $G \cong K_{2,n-2}$ olmasıdır.

$v_i \in V(G)$ olacak şekilde bir v_i noktası varsa ve $G - v_i$ tek döngülü bir graf ise, bu durumda G grafının yarı tek döngülü bir graf olduğu söylenir. $QU(n)$ ile n noktalı yarı tek döngülü graflar kümesi belirtilsin.

Teorem 3.5.5.4 [42] $G \in QU(n)$ olsun. Bu durumda;

$$SO(G) \leq 2(n-4)\sqrt{(n-1)^2+4} + 4\sqrt{(n-1)^2+9} + (n+2)\sqrt{2}$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak $G \cong C_3(n-4,0,0) \vee K_1$ olmalıdır. Burada;

$G \cong C_3(n-4,0,0)$, C_3 'ten, C_3 'ün bir noktasına $n-4$ sarkık nokta eklenerek elde edilen 3-döngülü graflardır.

Ning ve ark. [42] $\Theta(s, t, r)$ ve $\infty(p, l, q)$ olmak üzere iki graf sınıfı tanımlamıştır. $\Theta(s, t, r)$ ortak uç noktaları $P_{s+1}, P_{t+1}, P_{r+1}$ olan ağaç yollarının bir birleşimi olsun. Burada $s + t + r + 1 = n$, $s \geq t \geq r \geq 1$ ve bunlardan en fazla biri 1' dir. $\infty(p, l, q)$, $u \in V(C_p)$ noktası ve $v \in V(C_q)$ noktası ile l uzunluğunda bir $v_0v_1 \cdots v_l$ yolu bağlanarak C_p ve C_q şeklinde iki döngüden elde edilen graf olsun. Burada $v_0 = u$, $v_l = v$ ve $p + q + l = n + 1$ dir.

Teorem 3.5.5.5. [42] $n \geq 4$ için $G \in QU(n)$ minimum Sombor indeksine sahip graf olsun. Bu durumda; $G \cong \Theta(s, t, 1)$ veya $\infty(p, 1, q)$ ve

$$SO(G) = (2n-5)\sqrt{2} + 4\sqrt{13}$$

dir.

$\mathcal{CG}_{n,\Delta}$, maksimum derecesi Δ olan n mertebeli bağlantılı grafların kümesi olsun.

Teorem 3.5.5.6. [40] $T \in \mathcal{CG}_{n,\Delta}$ ve $\Delta \leq 3$ olsun. Bu durumda;

(I) $2\Delta \leq n-1$ ise, o zaman;

$$SO(G) \geq \Delta(\sqrt{\Delta^2+4} + \sqrt{5}) + 2\sqrt{2}(n-2\Delta-1)$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak G , maksimum derece tepe noktasının tüm komşularının ikinci dereceye sahip olduğu, maksimum derecesi Δ olan n mertebeli yıldız benzeri bir ağaca izomorf olmalıdır.

(II) $2\Delta > n - 1$ ise, o zaman;

$$SO(G) \geq (n - 1 - \Delta) \left(\sqrt{\Delta^2 + 4} + \sqrt{5} \right) + (2\Delta - n + 1) \sqrt{\Delta^2 + 1}$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak G , maksimum derece tepe noktasının tam olarak $2\Delta - n + 1$ sarkık komşuya sahip olduğu, maksimum derecesi Δ olan n dereceli yıldız benzeri bir ağaca izomorf olmalıdır.

Teorem 3.5.5.7. [40] $SO(G)$, çevresi g olan n mertebesindeki graflar sınıfında minimum olsun. Eğer G , C_n ’den farklıysa, o zaman G , tam olarak bir sarkık yola sahip olan çevresi g olan tek döngülü grafa izomorftur.

Kısa uçurtma grafi $Ki_{n,w}$ klik K_w ’nin bir tepe noktasına $n - w$ sarkık noktalar eklenerek elde edilen graftır.

Teorem 3.5.5.8. [47, 40] G , n mertebesinde k sarkık noktalı bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda;

$$SO(G) \leq \frac{(n - k - 2)(n - k - 1)^2}{\sqrt{2}} + k\sqrt{(n - 1)^2 + 1} + (n - k - 1)\sqrt{(n - 1)^2 + (n - k - 1)^2}$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak $G \cong Ki_{n,n-k}$ olmalıdır.

Teorem 3.5.5.9. [40] Eğer $SO(G)$, r kesme kenarlı n mertebesindeki bağlantılı graflar sınıfında maksimum ise, o zaman $G \cong Ki_{n,n-r}$ olur.

$\mathcal{W}(n, w)$, w klik numarası ile n mertebesinin bağlı graflar kümesi olsun.

Uzun uçurtma grafi Ki_n^w , bir klik K_w ve bir P_{n-w} yolundan, klikten bir tepe noktası ile yoldan bir uç nokta arasına bir kenar eklenerek elde edilen n mertebesinin bir grafidir. [48].

Teorem 3.5.5.10. [48] $G \in \mathcal{W}(n, w)$ olsun. Bu durumda;

$$SO(G) \geq SO(Ki_n^w)$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak $G \cong Ki_n^w$ olmalıdır.

$\mathcal{X}(n, k)$, kromatik sayısı k olan n mertebesindeki bağlı graflar kümesi olsun. Turán grafi $T_n(k)$, bölüm kümelerinin boyutu en fazla 1 olan n mertebesinde tam bir k -parçalı graftır. [47].

Teorem 3.5.5.11. [47] $G \in \mathcal{X}(n, k)$ olsun. Bu durumda;

$$SO(G) \leq r(k-r) \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil \sqrt{\left(n - \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right)^2 + \left(n - \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil\right)^2} + \sqrt{2} \binom{r}{2} \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil^2 \left(n - \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right) \\ + \sqrt{2} \binom{k-r}{2} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor^2 \left(n - \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil\right)$$

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak $G \cong T_n(k)$ olmalıdır.

Teorem 3.5.5.12. [21] G , n noktalı ve α bağımsızlık sayısı ile bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda;

$$SO(G) \leq \sqrt{2}(n - \alpha/2)(n - 1) + \alpha(n - \alpha)\sqrt{(n - 1)^2 + (n - \alpha)^2}$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak $G \cong CS(n, \alpha)$ olmalıdır. Burada $CS(n, \alpha)$, n noktalı ve bağımsızlık sayısı α olan tam bölünmüş graftır.

3.5.6 Kimyasal Graflar

Bir kimyasal graf, tüm $u \in V(G)$ için $d_u(G) \leq 4$ olan bir graftır. Bu bölümde, Sombor kimyasal graf indeksinin uç değerleri toplanmıştır. $\mathcal{T}_n(\mathcal{CT}_n)$, n noktalı ağaçlar (kimyasal

ağaçlar) kümesi olsun. $\mathcal{T}_{n,k}(CT_{n,k})$, n noktalı ve k sarkık noktalı ağaçlar (kimyasal ağaçlar) kümesi olsun.

Önerme 3.5.6.1. [39] Kimyasal graflarda, iki derece noktası, ancak ve ancak çakışılırsa, yani; ancak ve ancak her ikisi de aynı derece koordinatlarına sahipse, eşit derece yarıçaplarına sahiptir.

Teorem 3.5.6.2. [49,50,51] $T \in CT_n$, $n \geq 5$ olsun. Bu durumda

$$SO(T) \leq \begin{cases} \frac{2}{3}(\sqrt{17} + 2\sqrt{2})n + \frac{2}{3}\sqrt{17} - \frac{20}{3}\sqrt{2} & n \equiv 2 \pmod{3} \\ \frac{2}{3}(\sqrt{17} + 2\sqrt{2})n + \frac{1}{3}\sqrt{17} - \frac{52}{3}\sqrt{2} + 15 & n \equiv 1 \pmod{3} \\ \frac{2}{3}(\sqrt{17} + 2\sqrt{2})n + 4\sqrt{5} - 12\sqrt{2} & n \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

dir.

Teorem 3.5.6.3. [49] G , n noktalı bağlı bir kimyasal graf olsun. Bu durumda;

$$2\sqrt{2}(n-3) + 2\sqrt{5} \leq SO(G) \leq 8\sqrt{2}n$$

dir.

Sol eşitlik sağlanır, ancak ve ancak $G \cong P_n$ olmalıdır. Sağ eşitlik sağlanır, ancak ve ancak G bağlantılı ve 4-düzenli bir graf olmalıdır.

Teorem 3.5.6.4 [49] H, h altıgenleri olan katakonsek bir altıgen sistem olsun. Bu durumda;

$$SO(E_h) \leq SO(H) \leq SO(L_h)$$

dir.

Burada L_h , h altıgenli doğrusal altıgen zincir iken, E_h grafi Ref. [49]'de karakterize edilmiştir. (Bkz. Şekil 6, [49])

Teorem 3.5.6.5 [49] H, h altıgenleri olan altıgen bir zincir olsun. Bu durumda;

$$SO(F) \leq SO(H) \leq SO(L_h)$$

dir.

Burada F, fibonacene zinciridir.

$\Phi(n, k)$ kimyasal ağaçları (bkz. Şekil 1/[53]) S_5 yıldızlarının $(\frac{k}{2} - 1)$ kopyalarından elde edilmiştir ve bu yıldızlar uzunlukları 0 olabilen yollarla birbirine bağlıdır.

Teorem 3.5.6.6. [53] $T \in \mathcal{CT}_{n,k}$ ($k \geq 5$) olsun. Bu durumda;

$$SO(T) \leq 2\sqrt{2}n + (\sqrt{17} + 2\sqrt{5} - 4\sqrt{2})k + 6\sqrt{2} - 8\sqrt{5}$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak $T \in \Phi(n, k)$ olmalıdır. Burada k çift sayı ve

$$6 \leq k \leq \lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor \text{ dir.}$$

$\Omega(n, k)$ 'deki kimyasal ağaçlar (bkz. Şekil 2/[53]), bir ağacı indükleyen maksimum derecesi 3 olan, $k - 2$ noktalı bir alt grafa sahiptir. Bu noktaların tümü 2 noktalı veya 3 noktalı bir noktaya komşudur.

Teorem 3.5.6.7 [53] $T \in \mathcal{CT}_{n,k}$ ($k \geq 5$) olsun. Bu durumda;

$$SO(T) \geq 2\sqrt{2}n + (\sqrt{13} + \sqrt{5} - 3\sqrt{2})k - 5\sqrt{2}$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak $T \in \Omega(n, k)$ olmalıdır. Burada $3 \leq k \leq \lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor$ dir.

CT_n, CU_n, CB_n, CTG_n sırasıyla; kimyasal ağaçlar, kimyasal tek döngülü graflar, kimyasal çift döngülü graflar ve n noktalı kimyasal üç döngülü graflar kümesi olsun.

$\Omega(n) = \{T \in (3^3, 2^{n-8}, 1^5) \mid m_{1,2}(T) = m_{2,3}(T) = 5, m_{1,3}(T) = 0, m_{3,3}(T) = 2, m_{2,2}(T) = n - 13\}$ olsun. Burada $(3^3, 2^{n-8}, 1^5)$, T ağacının derece dizisidir. Mevcut yazarlardan üçü [54] ilk on dört minimum kimyasal ağacı, ilk dört minimum kimyasal tek döngülü grafi, ilk üç minimum kimyasal çift döngülü grafi ve ilk yedi minimum kimyasal üç döngülü grafi belirlemişlerdir.

Teorem 3.5.6.8. [54] $n \geq 13$ ise, $T_1 \in A_1, T_2 \in A_4, T_3 \in A_3, T_4 \in A_2, T_5 \in A_{13}, T_6 \in A_{11}, T_7 \in A_{12}, T_8 \in A_9, T_9 \in A_{10}, T_{10} \in A_7, T_{11} \in A_8, T_{12} \in A_6, T_{13} \in A_5, T_{14} \in \Omega_n$

Bahsedilen graf sınıflarının [54]' de Tablo 1' de belirtildiği durumlarda $T \in CT_n \setminus \{T_1, T_2, \dots, T_{14}\}$ olur. Bu durumda;

$$SO(T_1) < SO(T_2) < SO(T_3) < SO(T_4) < SO(T_5) < SO(T_6) < SO(T_7) < SO(T_8) < SO(T_9) < SO(T_{10}) < SO(T_{11}) < SO(T_{12}) < SO(T_{13}) < SO(T_{14}) < SO(T)$$

dir.

Teorem 3.5.6.9. [54] Eğer $n \geq 7$, $G_1 \in \alpha_1, G_2 \in \alpha_3, G_3 \in \alpha_2, G_4 \in \alpha_9$ ise, burada belirtilen graf sınıfları [54]' deki Tablo 3' te belirtilmiştir ve $G \in CU_n \setminus \{G_1, G_2, G_3, G_4\}$ dir. Bu durumda;

$$SO(G_1) < SO(G_2) < SO(G_3) < SO(G_4) < SO(G)$$

dir.

Teorem 3.5.6.10. [54] $n \geq 6$, $G_1 \in \beta_2, G_2 \in \beta_3, G_3 \in \beta_9$ olsun. Burada belirtilen graf sınıfları [54]'deki Tablo 5'te belirtilmiştir. $G \in CB_n \setminus \{G_1, G_2, G_3\}$ ise, bu durumda;

$$SO(G_1) < SO(G_2) < SO(G_3) < SO(G)$$

dir.

Teorem 3.5.6.11. [54] $n \geq 6$, $G_1 \in \gamma_9, G_2 \in \gamma_{10}, G_3 \in \gamma_{11}, G_4 \in \gamma_{12}, G_5 \in \gamma_{13}, G_6 \in \gamma_{14}, G_7 \in \gamma_{65}$ olsun. Burada belirtilen graf sınıfları [47]'deki Tablo 7 ve 8'de belirtilmiştir. $G \in CTG_n \setminus \{G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7\}$ ise, bu durumda;

$$SO(G_1) < SO(G_2) < SO(G_3) < SO(G_4) < SO(G_5) < SO(G_6) < SO(G_7) < SO(G)$$

dir.

4. BÖLÜM

GENEL SOMBOR İNDEKS VE DİĞER ANALOGLARI

4.1. Diğer Analogları

Tanım 4.1.1. [18] G , m kenarlı ve n noktalı sonlu, basit, bağlantılı bir graf olsun. Sombor indeksinin diğer analogları olarak, indirgenmiş Sombor indeksi ve ortalama Sombor indeksi sırasıyla;

$$SO_{red}(G) = \sum_{uv \in E(G)} \sqrt{(d_u - 1)^2 + (d_v - 1)^2}$$

ve $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için Ortalama Sombor indeksi;

$$mSO_{\alpha}(G) = \sum_{uv \in E(G)} \left(\frac{d_u^{\alpha} + d_v^{\alpha}}{2} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

şeklinde ifade edilir.[55]

Tanım 4.1.2. [56] Herhangi bir α reel sayısı için genel sombor indeksi

$$SO_{\alpha}(G) = \sum_{uv \in E(G)} (d_u^2 + d_v^2)^{\alpha/2}$$

olarak tanımlanır. $\alpha = 1$ için normal Sombor indeksine sahipken, $\alpha = 2$ için unutulmuş indeksi elde ederiz. Böylece $SO_{\alpha}(G)$ Sombor indeksini ve unutulmuş indeksi genelleştirir.

4.2. Genel Sombor İndeksi ve Ortalama Sombor İndeksi İçin Sınırlar

Teorem 4.2.1. [56] G , $m \geq 1$ kenarlı bir graf olsun. Bu durumda;

(I) $SO_{\alpha}(G) \geq m^{1-\alpha/2} F(G)^{\alpha/2}$ ise $\alpha < 0$ veya $\alpha > 1$ dir.

(II) $SO_{\alpha}(G) \leq m^{1-\alpha/2} F(G)^{\alpha/2}$ ise $0 < \alpha < 1$ dir.

Eşitlik her iki durumda da sağlanır, ancak ve ancak G , 2-düzenli olmalıdır.

Sonuç 4.2.2 [56] G, n noktalı ve $m \geq 1$ kenarlı bir graf olsun. Bu durumda;

(I) $SO_{\alpha}(G) \geq 8^{\alpha/2} m^{1+\alpha} n^{-\alpha}$ ise $\alpha < 0$ veya $\alpha > 1$

dir.

(II) $SO_{\alpha}(G) \geq 8^{\alpha/2} m^{1+\alpha} n^{-\alpha}$ ise $0 < \alpha < 1$

dir.

Eşitlik her iki durumda da sağlanır, ancak ve ancak G , düzenli olmalıdır.

Teorem 4.2.3. [56] $G, n \geq 2$ noktalı ve m kenarlı bir graf olsun.

(I) $0 < \alpha < 1$ ise, bu durumda;

$$SO_{\alpha}(G) \geq F(G)^{\frac{\alpha}{2}}$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak $G = K_2 \cup \overline{K_{n-2}}$ veya $G = \overline{K_n}$ olmalıdır.

(II) Eğer $\alpha < 0$ ise,

$$SO_{\alpha}(G) \leq 2^{-1+\alpha/2} n(n-1)$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak $G = K_2$ olmalıdır.

(III) Eğer $\alpha > 1$ ise,

$$SO_{\alpha}(G) \leq 2^{\alpha/2} m(n-1)^{\alpha}$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak $G = K_n$ veya $G = \overline{K_n}$ olmalıdır.

Teorem 4.2.4. [55] G, m kenarlı ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olan bir graf olsun;

(I) $\alpha > 1$ ise

$$mSO_{\alpha}(G) \leq \frac{m^{1-1/\alpha}}{2^{1/\alpha}} (M_1^{\alpha+1}(G))^{1/\alpha}$$

dir.

(II) $\alpha < 1$ ve $\alpha \neq 0$ ise

$$mSO_{\alpha}(G) \geq \frac{m^{1-1/\alpha}}{2^{1/\alpha}} (M_1^{\alpha+1}(G))^{1/\alpha}$$

dir.

Ve bağlantılı bir G grafi için her sınırdaki eşitlik, ancak ve ancak G 'nin düzenli veya 2-düzenli olması ile elde edilir.

Teorem 4.2.5. [55] G , m kenarlı, maksimum derece Δ ve minimum derece δ olan bir graf ve $0 < \alpha < 1$ olsun, bu durumda;

$$mSO_{\alpha}(G) \leq \frac{m^{1-1/\alpha}}{2^{1/\alpha}} K_{\alpha} (M_1^{\alpha+1}(G))^{1/\alpha}$$

dir. Burada;

$$K_{\alpha}^{\alpha} = \begin{cases} \alpha \left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^{\frac{\alpha-\alpha^2}{2}} + (1-\alpha) \left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^{-\frac{\alpha^2}{2}}, & \text{eğer } 0 < \alpha \leq \frac{1}{2} \text{ ise} \\ \alpha \left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^{\frac{\alpha^2-\alpha}{2}} + (1-\alpha) \left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^{-\frac{\alpha^2}{2}}, & \text{eğer } \frac{1}{2} < \alpha < 1 \text{ ise} \end{cases}$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak G düzenli bir graf olmalıdır.

Önerme 4.2.6. [55] G bir graf ve $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olsun. Bu durumda;

$$(i) \ 0 < \alpha < 2 \text{ ise } 2^{-1/\alpha} SO(G) < mSO_{\alpha}(G) \leq 2^{-1/2} SO(G)$$

$$(ii) \ \alpha > 2 \text{ ise } 2^{-1/2} SO(G) \leq mSO_{\alpha}(G) < 2^{-1/\alpha} SO(G)$$

$$(iii) \ \alpha < 0 \text{ ise } mSO_{\alpha}(G) \leq 2^{-1/2} SO(G)$$

olur.

Önerme 4.2.7. [55] G , m kenarlı bir graf, σ özdeğer ve ortalama sombor matrisi

$$mSM_{\alpha}(G) = \begin{cases} \left(\frac{a_u^{\alpha} + d_v^{\alpha}}{2}\right)^{1/\alpha}, & uv \in E(G) \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dir. ve bu durumda;

$$mSO_{\alpha}(G) = \sqrt{\frac{m}{2} tr(mSM_{\alpha}(G)^2) - m^2 \sigma^2}$$

$$\text{dir. Burada; } tr(mSM_{\alpha}(G)^2) = \sum_{uv \in E(G)} \left(\frac{d_u^{\alpha} + d_v^{\alpha}}{2} \right)^{2/\alpha}$$

dir.

Teorem 4.2.8. [55] G herhangi bir graf olsun. Bu durumda;

$$mSO_2 \leq M_1(G) - M_2^{\frac{1}{2}}(G)$$

dir. Burada $M_2^{\frac{1}{2}}, \alpha = 1 / 2$ ' de değişken ikinci Zagreb indeksi M_2^{α} 'dır. Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak G ' nin her bir bağlantılı bileşeni düzenli graf olmalıdır.

4.3. Genel Sombor İndeksi İçin Nordhaus-Gaddum Tipi Sonuç

Teorem 4.3.1. [56] $G, n \geq 2$ noktalı ve m kenarlı bir graf olsun.

(I) Eğer $\alpha > 0$ ise, bu durumda;

$$SO_{\alpha}(G) + SO_{\alpha}(\bar{G}) \leq 2^{-1+\alpha/2} n(n-1)^{\alpha+1}$$

dir.

Burada eşitlik sağlanır, ancak ve ancak $G=K_n$ veya $G=\overline{K_n}$ olmalıdır.

Ayrıca, $\alpha \geq 1$ ise, bu durumda;

$$SO_{\alpha}(G) + SO_{\alpha}(\bar{G}) \geq \frac{n \cdot (n-1)^{1+\alpha}}{2^{1+\alpha}}$$

dir.

ve $0 < \alpha < 1$ ise, o zaman

$$SO_{\alpha}(G) + SO_{\alpha}(\bar{G}) \geq \frac{n^{\alpha/2} (n-1)^{(3\alpha)/2}}{2^{(3\alpha)/2}}$$

dir.

(II) Eğer $\alpha < 0$ ise, o zaman

$$2^{-1+\alpha/2} n(n-1)^{\alpha+1} \leq SO_{\alpha}(G) + SO_{\alpha}(\bar{G}) < 2^{\alpha/2} n(n-1)$$

dir.

Burada sol eşitlik sağlanır, ancak ve ancak $G=K_n$ veya $G=\overline{K_n}$ olmalıdır.

4.4. Genel Sombor İndeksinin Diğer Genelleştirilmiş İndekslerle Karşılaştırılması

Burada, genel Sombor indeksinin diğer genelleştirilmiş indekslerle ilişkileri verilmiştir.

Teorem 4.4.1. [56] G , n noktalı ve m kenarlı bir graf olsun. Bu durumda;

$$\frac{2^{\alpha/2}}{\Delta^\alpha} R_\alpha(G) \leq SO_\alpha(G) \leq \frac{2^{\alpha/2}}{\delta^\alpha} R_\alpha(G)$$

dir.

Burada eşitlik sağlanır, ancak ve ancak G düzenli olmalıdır.

Teorem 4.4.2. [56] G , n noktalı ve m kenarlı bir graf olsun. Bu durumda;

$$\frac{\chi_\alpha(G)}{2^{\alpha/2}} \leq SO_\alpha(G) \leq \sqrt{m\Delta^\alpha \chi_\alpha(G)}$$

dir.

Burada sol eşitlik sağlanır, ancak ve ancak G düzenli olmalıdır.

Sonuç 4.4.3. [56] G , n noktalı ve m kenarlı bir graf olsun. Bu durumda;

$$\frac{M_1(G)}{\sqrt{2}} \leq SO(G) \leq \sqrt{m\Delta M_1(G)}$$

dir.

Burada sol eşitlik sağlanır, ancak ve ancak G düzenli olmalıdır.

Tanım 4.4.4. [57] G' nin Sombor koindeksi şu şekilde tanımlanır:

$$\overline{SO}(G) = \sum_{uv \notin E(G)} \sqrt{d_G(u)^2 + d_G(v)^2}$$

dir.

Açıklama 4.4.5. [57] G' nin Sombor koindeksi bir de şu şekilde tanımlanır:

$$\overline{SO}(G) = \sum_{uv \in E(\bar{G})} \sqrt{d_G(u)^2 + d_G(v)^2}$$

dir.

G' nin Sombor koindeksinde, tanımlayıcı toplamaların $E(\bar{G})$ üzerinden geçtiğine, ancak noktaların derecelerinin G' ye göre olduğuna dikkat edin. Bu nedenle, $\bar{G}'$ nin Sombor indeksine eşit değildir.

Açıklama 4.4.6. [57] Bir G grafi için,

- I. $\overline{SO}(G - e) > \overline{SO}(G)$ dir. Burada e, G' deki herhangi bir kenardır.
- II. $\overline{SO}(G + e) < \overline{SO}(G)$ dir. Burada $e = uv$ kenarı ve u, G' de v' ye komşu değildir.

Açıklama 4.4.7. [57] P_n yolunun ($n \geq 3$), n noktalı herhangi bir bağlı graf için Sombor koindeks'in maksimum değerini verdiğine, minimum değer ise tam graf K_n ile elde edildiğine dikkat edilmesi gerekir.

Burada, ilk önce $\overline{SO}(G)$ için n, Δ ve δ cinsinden üst ve alt sınırlar verilmiştir.

Teorem 4.4.8. [57] G, n noktalı ve m kenarlı bir graf olsun. Bu durumda;

$$\frac{\delta n}{\sqrt{2}}(n - 1 - \Delta) \leq \overline{SO}(G) \leq \frac{\Delta n}{\sqrt{2}}(n - 1 - \delta)$$

dir.

Eşitlik, G' nin düzenli bir graf olması durumunda geçerlidir.

Sonuç 4.4.9. [57] G, n noktalı ve r -düzenli bir graf olsun. Bu durumda;

$$\overline{SO}(G) = \frac{nr(n-1-r)}{\sqrt{2}}$$

dir.

Açıklama 4.4.10. [57] G, n noktalı bir graf olsun. $\Delta \leq n - 1$ olsun.

$$\overline{SO}(G) \leq \frac{n(n-1)(n-1-\delta)}{\sqrt{2}}$$

dir.

Bu durumda; Sombor koindeksi için m, δ ve $\bar{M}_1(G)$ cinsinden başka bir üst sınır verilmiştir.

Teorem 4.4.11. [57] G, m kenarlı bir graf olsun. Bu durumda;

$$\overline{SO}(G) \leq \overline{M}_1(G) - (2 - \sqrt{2})\delta\overline{m}$$

dir.

Eşitlik, G 'nin düzenli bir graf olması durumunda geçerlidir.

Sonuç 4.4.12. [57] G, n noktalı ve m kenarlı bir graf olsun. Bu durumda;

$$\overline{SO}(G) \leq 2m(n-1) - \overline{M}_1(G) - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)[n(n-1) - 2m]\delta$$

dir.

Eşitlik, G 'nin düzenli bir graf olması durumunda geçerlidir.

Bir G grafının Sombor koindeksinin, $\bar{G}$ 'nin Sombor indeksi ile aynı olmadığı belirtilmişti. Ancak, aşağıdaki gibi yakından ilişkilidirler.

Teorem 4.4.13. [57] G, n noktalı ve m kenarlı bir graf olsun. Bu durumda;

$$(I) \ SO(G) + \overline{SO}(G) \leq \frac{n(n-1)\Delta}{\sqrt{2}}$$

dir.

Eşitlik, G 'nin düzenli bir graf olması durumunda geçerlidir.

$$(II) \ SO(G) + \overline{SO}(G) \leq \overline{m}(n-1 + \Delta - \delta)\sqrt{2}$$

dir.

Eşitlik, G 'nin düzenli bir graf olması durumunda geçerlidir.

Teorem 4.4.14. [57] G, m kenarlı bir graf olsun. Bu durumda;

$$\overline{SO}(G) + \overline{SO}(\bar{G}) \leq 2\overline{M}_1(G) - (2 - \sqrt{2})\delta \binom{n}{2}$$

dir.

Eşitlik, G 'nin düzenli bir graf olması durumunda geçerlidir.

Tanım 4.4.15. [58] G , kenar kümesi $E(G)$ olan basit bir graf olsun. Değiştirilmiş Sombor matrisi ve Değiştirilmiş Sombor indeksi sırasıyla şu şekilde tanımlanır:

$$(S(G))_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{d_i^2 + d_j^2}}, & u_i u_j \in E(G) \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve

$$m_{SO(G)} = \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{\sqrt{d_u^2 + d_v^2}}$$

dir.

Teorem 4.4.16. [58] G , maksimum derece Δ , minimum derece δ ve Randic indeksi $R(G)$ olan basit bir graf olsun. Bu durumda;

$$\frac{R(G)}{\sqrt{\frac{\Delta}{\delta} + \frac{\delta}{\Delta}}} \leq m_{SO(G)} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} R(G)$$

dir.

Eşitlik varsa G düzenli bir graftır.

Sonuç 4.4.17. [58] G, n noktalı basit bir graf olsun. Bu durumda;

$$m_{SO(G)} \leq \frac{\sqrt{2}}{4} n$$

dir.

Eşitlik varsa G düzenli bir graftır.

Sonuç 4.4.17 ile, değiştirilmiş Sombor indeksine göre maksimum tek döngülü grafları belirlenmiştir.

Teorem 4.4.18. [58] G, m kenarlı ve minimum derecesi δ olan basit bir graf olsun.

Belirtmeölçütü; $\beta = \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{d_u^2 + d_v^2}$ olsun. Bu durumda;

$$\sqrt{2}\delta\beta \leq m_{SO(G)} \leq \sqrt{m\beta}$$

dir.

Sol eşitlik sağlanır , ancak ve ancak G düzenli bir graf olmalıdır. Sağ eşitliğin sağlanması da ancak ve ancak G 'nin yarı düzenli bir graf olmasıyla mümkündür.

Teorem 4.4.19. [58] G, m kenarlı, maksimum derece Δ ve minimum derece δ olan basit bir graf olsun. Bu durumda;

$$\frac{\sqrt{2}m}{2\Delta} \leq m_{SO(G)} \leq \frac{\sqrt{2}m}{2\delta}$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak G düzenli bir graf olmalıdır.

Sonuç 4.4.20. [58] G, n noktalı, maksimum derece Δ ve minimum derece δ olan basit bir graf olsun. Bu durumda;

$$\frac{\sqrt{2}n\delta}{4\Delta} \leq m_{SO(G)} \leq \frac{\sqrt{2}n\Delta}{4\delta}$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak G düzenli bir graf olmalıdır.

Teorem 4.4.21. [58] G , maksimum derece Δ , minimum derece δ ve genel Randic indeksi $R_{-1}(G)$ olan basit bir graf olsun. Bu durumda;

$$\frac{\sqrt{2}\delta}{2} R_{-1}(G) \leq m_{SO(G)} \leq \frac{\sqrt{2}\Delta}{2} R_{-1}(G)$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak G düzenli bir graf olmalıdır.

Teorem 4.4.22. [58] G, n noktalı ve Harmonik indeksi $H(G)$ olan bir graf olsun. Bu durumda;

$$\frac{1}{2} H(G) \leq m_{SO(G)} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} H(G)$$

dir.

Sol eşitlik sağlanır, ancak ve ancak $G \cong \overline{K_n}$ olmalıdır ve sağ eşitliğin sağlanması da ancak ve ancak G 'nin düzenli bir graf olmasıyla mümkündür.

Sonuç 4.4.23. [58] G, n noktalı ve $D(G)$ çapına sahip bağlantılı bir graf olsun.

$$(I) \ m_{SO(G)} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} D(G) + \frac{\sqrt{2}}{4} n - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak $G \cong K_n$ olmalıdır.

$$(II) \ m_{SO(G)} \leq \frac{\sqrt{2}}{4} n D(G)$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak $G \cong K_n$ olmalıdır.

Sonuç 4.4.24. [58] G, n noktalı ve m kenarlı olan bağlantılı moleküler bir graf olsun. Bu durumda;

$$m_{SO(G)} \leq \frac{\sqrt{2}}{12} (m + 2n)$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak $G \cong C_n$ olmalıdır.

Sonuç 4.4.25. [58] $G, g(G) \geq k \geq 3$ ifadesini sağlayan $g(G)$ çevresi ile bağlantılı bir n -nokta grafi olsun. Bu durumda;

$$(I) \ m_{SO(G)} \leq \frac{3\sqrt{2}}{4} n - \frac{\sqrt{2}}{2} g(G),$$

$$(II) \ m_{SO(G)} \leq \frac{\sqrt{2} n^2}{4 g(G)},$$

$$(III) \ m_{SO(G)} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{n}{2} + g(G) - k \right),$$

$$(IV) \ m_{SO(G)} \leq \frac{\sqrt{2} n g(G)}{4k},$$

dir.

(I) ve (II) eşitlikleri sağlanır, ancak ve ancak $G \cong C_n$ olmalıdır. (III) ve (IV) eşitliklerinin sağlanması da ancak ve ancak G 'nin düzenli bir graf ve $g(G) = k$ olmasıyla mümkün olur.

dir. Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak $G \cong \overline{K_n}$ olmalıdır.

Sonuç 4.4.26. [58] G, n noktalı, m kenarlı ve Randic indeksi $R(G)$ olan bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda;

$$m_{SO(G)} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} R(G)$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak $G, \frac{2m}{n} -$ düzenli graf olmalıdır.

Sonuç 4.4.27. [58] G , Randic indeksi $R(G)$ ve ABC indeksi $ABC(G)$ ile bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda;

$$m_{SO(G)} \leq \frac{\sqrt{2}}{4} (ABC(G) + 2R(G))$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak $G \cong P_2$ olmalıdır.

Sonuç 4.4.28. [58] G bağlantılı bir graf olsun. G' 'nin minimum derecesi en az $k \geq 2$ ' dir. $\chi(G)$, G' 'nin toplam bağlantı indeksi olsun.

$$(I) m_{SO(G)} \leq \sqrt{\frac{2}{k}} \chi(G)$$

$$(II) m_{SO(G)} \leq \frac{ABC(G)}{2\sqrt{k-1}}$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak G, k -düzenli graf olmalıdır.

Sonuç 4.4.29. [58] G , minimum derece δ , maksimum derece Δ ve geometrik -aritmetik indeksi $GA(G)$ olan basit bir graf olsun. Bu durumda;

$$\frac{GA(G)}{2\Delta} \leq m_{so(G)} \leq \frac{\sqrt{2}GA(G)}{2\delta},$$

dir.

Sol eşitlik sağlanır, ancak ve ancak $G \cong \overline{K_n}$ olmalıdır ve sağ eşitliğin sağlanması ancak ve ancak G 'nin düzenli bir graf olmasıyla mümkün olur.

Sonuç 4.4.30. [58] G , minimum derece δ , maksimum derece Δ ve geometrik -aritmetik indeksi $GA(G)$ olan basit bir graf olsun. Bu durumda;

$$\frac{\delta GA(G)^2}{2M_2(G)} \leq m_{so(G)} \leq \frac{\sqrt{2}GA(G)^2(\delta^2 + \Delta^2)^2}{8\delta^2\Delta M_2(G)}$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak G düzenli bir graf olmalıdır.

Sonuç 4.4.31. [58] G , maksimum derece Δ ve ters derece $ID(G)$ ile bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda;

$$m_{so(G)} \leq \frac{\sqrt{2}}{4} ID(G)\Delta$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak G düzenli bir graf olmalıdır.

Sonuç 4.4.32. [58] G , m kenarlı, minimum derece δ , maksimum derece Δ , ikinci Zagreb indeksi $M_2(G)$ ve ters toplam indeg indeksi $ISI(G)$ olan basit bir graf olsun. Bu durumda;

$$m_{so(G)} \leq \frac{\sqrt{2}m(\delta + \Delta)ISI(G)}{2\sqrt{\delta\Delta}M_2(G)}$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak G düzenli bir graf olmalıdır.

Sonuç 4.4.33. [58] G , minimum derece δ , maksimum derece Δ ve ters toplam indeg indeksi $ISI(G)$ olan basit bir graf olsun. Bu durumda;

$$\frac{ISI(G)}{\Delta^2} \leq m_{SO(G)} \leq \frac{\sqrt{2}ISI(G)}{\delta^2}$$

dir.

Sol eşitlik sağlanır, ancak ve ancak $G \cong \overline{K_n}$ olmalıdır ve sağ eşitliğin sağlanması da ancak ve ancak G 'nin düzenli bir graf olmasıyla mümkün olur.

Teorem 4.4.34. [58] G , n noktalı basit bir graf olsun. Bu durumda;

$$m_{SO(G)} + m_{SO}(\bar{G}) \geq \frac{\sqrt{2}}{4}n$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak $G \cong K_n$ veya $G \cong \overline{K_n}$ olmalıdır.

4.5. Değiştirilmiş Sombor Spektral Yarıçapı İçin Sınırlar

Teorem 4.5.1. [58] G , n ($n \geq 3$) noktalı, maksimum derece Δ ve minimum derece δ olan bağlantılı basit bir graf olsun. $M_1(G)$ ilk Zagreb indeksi olsun. Burada μ_1 , G 'nin Değiştirilmiş sombor matrisinin en büyük özdeğeridir.

$$(I) \quad \frac{\sqrt{2}\lambda_1}{2\Delta} \leq \mu_1 \leq \frac{\sqrt{2}\lambda_1}{2\delta}$$

$$(II) \quad \frac{1}{\Delta} \sqrt{\frac{M_1(G)}{2n}} \leq \mu_1 \leq \frac{\sqrt{2}\Delta}{2\delta}$$

$$(III) \quad \frac{\sqrt{2}m}{\Delta n} \leq \mu_1 \leq \frac{\sqrt{2(2m - n + 1)}}{2\delta}$$

dir.

Eşitlik sağlanır, ancak ve ancak G , bağlantılı düzenli bir graf olmalıdır.

Teorem 4.5.2. [58] G , n noktalı basit bir graf olsun. Bu durumda;

$$\mu_1 \leq \sqrt{\frac{2(n-1)\beta}{n}} \text{ dir.}$$

Lemma 4.5.3. [58] G, n noktalı basit bir graf olsun.

G' 'nin değiştirilmiş Sombor matrisi $S(G)$ ve özdeğerleri $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$ biçiminde sıralansın. Bu durumda;

$$\text{(I)} \quad \text{tr}(S) = \sum_{i=1}^n \mu_i = 0$$

$$\text{(II)} \quad \text{tr}(S^2) = \sum_{i=1}^n \mu_i^2 = \sum_{i \sim j} \frac{2}{d_i^2 + d_j^2}$$

$$\text{(III)} \quad \text{tr}(S^3) = \sum_{i=1}^n \mu_i^3 = 2 \sum_{i \sim j} \frac{1}{\sqrt{d_i^2 + d_j^2}} \left(\sum_{k \sim i, k \sim j} \frac{1}{\sqrt{(d_i^2 + d_k^2)(d_k^2 + d_j^2)}} \right)$$

$$\text{(IV)} \quad \text{tr}(S^4) = \sum_{i=1}^n \mu_i^4 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{i \sim j} \frac{1}{d_i^2 + d_j^2} \right)^2 + \sum_{i \neq i} \left(\sum_{k \sim i, k \sim j} \frac{1}{\sqrt{(d_i^2 + d_k^2)(d_k^2 + d_j^2)}} \right)$$

dir.

5. BÖLÜM

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasının 3.bölümü; 2021 yılında literatüre ilk kazandırılmış olan Sombor indeksler ve Sombor indekslerin alt ve üst sınırları ile ilgili sonuçları içerir. Sınırlardaki amaç en iyi alt veya üst sınırı bulmaktır. Literatürde yer alan diğer indekslere paralel olarak benzer sonuçlar elde edildiği görülmüştür. Daha sonra Sombor indeksinin değişik analogları kullanılarak, literatüre yeni sonuçlar kazandırılmıştır. Yapılan çalışmalar içerisinde Sombor indeksin ilk tanıtıldığı tarihten günümüze kadar, Sombor indeksin sınırlarının elde edilen sınırların mukayesesi bulunmamaktadır. Her ne kadar genel graflar için mevcut sınırların karşılaştırılması yapılamasa da, özel graf tipleri için kıyaslamanın yapılabilmesi kuvvetle muhtemeldir. Dolayısıyla bu problem tezimizin önerilerinden birisidir. Özellikle bu tezimizin 4. bölümündeki Sombor indeks analoglarından yararlanılarak pek çok Sombor tipi indeks tanıtılarak aralarındaki ilişkiler bulunabilir. Bundan sonraki araştırmalarda, araştırmacılar bu tezin önerilerine çalışabilirler.

Tüm bunları göz önünde bulundurduğumuzda, Sombor indeksi ile ilgili araştırmaların hala hızlı bir gelişme içinde olduğunu görüyoruz. Bu tez çalışması ile bu araştırmaların bir alanında biriken verilerin sistematize edilmesine yardımcı olmak amaçlanmaktadır.

KAYNAKLAR

1. Gutman I, "Geometric Approach to Degree–Based Topological Indices: Sombor Indices" MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 86 (2021).
2. Alikhani & Ghanbari, "Sombor Index of Certain Graphs" January 202112(1):27-37 DOI:10.22052/ijmc.2021.242106.154
3. Cruz & Rada, "Extremal values of vertex-degree-based topological indices of coronoid systems" <https://doi.org/10.1002/qua.26536>
4. Došlić ve diğerleri, "Simulation of UV absorption spectra and relaxation Dynamics of uracil and uracil–water clusters" 2021.
5. Horoldagva & Xu, "On the Sombor index of graphs with given connectivity and number of bridges" 2021.
6. Kulli V.R., Gutman I., "Computation of Sombor indices of certain networks". SSRG International Journal of Applied Chemistry 8 (1), 1-5, 2021. 80, 2021.
7. Bondy A., Muny V.S.R., "Graph theory with,applications". Amerika, 1976.
8. Harary F., "Graph theory" Amerika,1969.
9. Chartrand G., Zhang P., "A First Course In Graph Theory". Dover Publications, INC.Mineola, New York, 2012.
10. Dharwadker A., Pirzada S., "Graph Theory". CreateSpace Ind. Publishing Platform South Caroline, 2011.
11. Diestel R., "Graph Theory", Springer-Verlag, New York, 2005.
12. Das K.C., Gutman I., On Sombor index of trees. Appl. Math. Comput. 412, 126575 (2022).
13. Gowtham K.J., Swamy N.N., "OnSombor energy of graphs" Nanosystems:Physics, Chemistry, Mathematics, 2021, 12 (4), P. 411–417.

14. Gutman, I., “Spectrum and energy of the Sombor matrix”, pp.551-561.
15. Ghanbari, N., “On the Sombor characteristic polynomial and Sombor energy of a graph” <http://arxiv.org/abs/2108.08552v1>
16. Z. Wang ve arkadaşları, “Spectral Radius and Energy of Sombor Matrix of Graphs” *Filomat* 35:15 (2021), 5093–5100.
17. Das, K.C., Çevik, A.S., Cangul, I.N., Shang, Y., “On Sombor Index”. *Symmetry* 2021, 13, 140. <https://doi.org/10.3390/sym13010140>
18. Gutman, I., “Geometric approach to degree-based topological indices: Sombor indices”. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* 2021, 86, 11–16.
19. I. Milovanović, E. Milovanović, M. Matejić, “On some mathematical properties of Sombor indices”. *Bull. Int. Math. Virtual Inst.* 11, 341–353 (2021).
20. T. Réti, T. Došlić, A. Ali, “On the Sombor index of graphs”. *Contrib. Math.* 3, 11–18 (2021).
21. K.C. Das, A.S. Çevik, I.N. Cangul, Y. Shang, “On Sombor index”. *Symmetry* 13, 140 (2021).
22. N. Ghanbari, S. Alikhani, “Sombor index of certain graphs”. *Iran. J. Math. Chem.* 12, 27–37 (2021).
23. S. Filipovski, “Relations between Sombor index and some degree-based topological indices”. *Iran. J. Math. Chem.* 12, 19–26 (2021).
24. J. Rada, J.M. Rodriguez, J.M. Sigarreta, “General properties on Sombor indices”. *Discrete Appl. Math.* 299, 87–97 (2021).
25. T. Došlić, T. Réti, A. Ali, “On the structure of graphs with integer Sombor indices”. *Discr. Math. Lett.* 7, 1–4 (2021).
26. K.C. Das, A. Ghalavand, A.R. Ashraf, “On a conjecture about the Sombor index of graphs”. *Symmetry* 13, 1830 (2021).
27. M. Eliasi, A. Iranmanesh, “On ordinary generalized geometric–arithmetic index”. *Appl. Math. Lett.* 24, 582–587 (2011).

28. G. Chartrand and P. Zhang, "Chromatic Graph Theory". CRC press, 2019.
29. H. Iswadi, E.T. Baskoro and R. Simanjuntak, "On the metric dimension of corona product of graphs". Far East J. Math. Sci. 52 (2011) 155–170.
30. Arifa N.E., Karimb A.H., Hasnic R., "Sombor index of some graph operations"
Int. J. Nonlinear Anal. Appl. 13 (2022) No. 1, 2561-2571
31. Ning W., Song I.Y. and Wang K., "More on Sombor Index of Graphs" Mathematics 2022, 10, 301.
32. B. Furtula, I. Gutman, "A forgotten topological index". J. Math. Chem. 53, 1184–1190 (2015).
33. H. Chen, W. Li, J. Wang, "Extremal values on the Sombor index of trees". MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 87, 23–49 (2022).
34. T. Zhou, Z. Lin, L. Miao, "The Sombor index of trees and unicyclic graphs with given matching number". arXiv:2103.04645v1
35. S. Li, Z. Wang, M. Zhang, "On the extremal Sombor index of trees with a given diameter". Appl. Math. Comput. 416, 126731 (2022).
36. I. Gutman, "Some basic properties of Sombor indices". Open J. Discrete Appl. Math. 4, 1–3 (2021).
37. I. Gutman, Spectrum and energy of the Sombor matrix. Military Tech. Courier 69, 551–561 (2021)
38. R. Cruz, J. Rada, "Extremal values of the Sombor index in unicyclic and bicyclic graphs". J. Math. Chem. 59, 1098–1116 (2021).
39. T. Zhou, Z. Lin, L. Miao, "The Sombor index of trees and unicyclic graphs with given maximum degree". Discrete Math. Lett. 7, 24–29 (2021).
40. B. Horoldagva, C. Xu, "On Sombor index of graphs". MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 86, 703–713 (2021).
41. H. Liu, "Extremal cacti with respect to Sombor index". Iran. J. Math. Chem. 12, 197–208 (2021).

42. W. Ning, Y. Song, K. Wang, "More on Sombor index of graphs". *Mathematics* 10, 301 (2022).
43. J. Ye, J. Qian, "Extremal polygonal cacti for general Sombor index". *arXiv:2108.12775v2*
44. A. Aashtab, S. Akbari, S. Madadinia, M. Noei, F. Salehi, "On the graphs with minimum Sombor index". *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* 88, 1 (2022).
45. H. Liu, L. You, Y. Huang, "Extremal Sombor indices of tetracyclic (chemical) graphs". *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* 88, 1 (2022).
46. A. Aashtab, S. Akbari, S. Madadinia, M. Noei, F. Salehi, "On the graphs with minimum Sombor index". *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* 88, 1 (2022).
47. K.C. Das, Y. Shang, "Some extremal graphs with respect to Sombor index". *Mathematics* 9, 1202 (2021).
48. Diaz, J.B.; Metcalf, F.T. Stronger forms of a class of inequalities of G. Pólya-G. Szegő and L. V. Kantorovich. *Bull. Am. Math. Soc.* 1963, 69, 415–418.
49. R. Cruz, I. Gutman, J. Rada, "Sombor index of chemical graphs". *Appl. Math. Comput.* 399, 126018 (2021).
50. H. Deng, Z. Tang, R. Wu, "Molecular trees with extremal values of Sombor indices". *Int. J. Quantum Chem.* 121, e26622 (2021).
51. S. Fajtlowicz, "On conjectures of Graffiti-II". *Congr. Numer.* 60, 187–197 (1987).
52. I. Gutman, B. Rušćić, N. Trinajstić, C.F. Wilcox, "Graph theory and molecular orbitals". XII. Acyclic polyenes. *J. Chem. Phys.* 62, 3399–3405 (1975).
53. H. Liu, H. Chen, Q. Xiao, X. Fang, Z. Tang, "More on Sombor indices of chemical graphs and their applications to the boiling point of benzenoid hydrocarbons". *Int. J. Quantum Chem.* 121, e26689 (2021).
54. H. Liu, L. You, Y. Huang, "Ordering chemical graphs by Sombor indices and its applications". *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* 87, 5–22 (2022).

55. M'endez-Berm'udez, J. A ve arkadaşları., "Mean Sombor index", Discrete Math. Lett. X (202X) XX–XX <http://arxiv.org/abs/2110.02721v1>
56. Chinglensana P., Mawiong S.M., "On General Sombor index" <http://arxiv.org/abs/2110.03225v1>
57. Chinglensana P., Mawiong S.M., "On Sombor coindex of graphs" <http://arxiv.org/abs/2109.03108v1>
58. V. R. Kulli, I. Gutman, "Computation of Sombor indices of certain networks", SSRG Int. J. Appl. Chem., 8 (2021), 1–5
59. I. Gutman, N. Trinajstić, "Graph theory and molecular orbitals, Total π -electron energy of alternant hydrocarbons". Chem. Phys. Lett. 17, 535–538 (1972)
60. M. Randić, "On characterization of molecular branching". J. Am. Chem. Soc. 97, 6609–6615 (1975).
61. I. Gutman, B. Furtula, C. Elphick, "Three new/old vertex-degree-based topological indices". MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 72, 617–632 (2014).
62. D.J. Klein, T. Došlić and D. Bonchev, "Vertex-weightings for distance moments and thorny graphs", Discrete Appl. Math. 155 (2007), 2294-2302
63. Sachs, H., "Beziehungen zwischen den in einem Graphen enthaltenen Kreisen und seinem charakteristischen Polynom". Publicationes Mathematica (Debrecen), 11, 119–134. (1964).
64. D. Vukičević, B. Furtula, "Topological index based on the ratios of geometrical and arithmetical means of end-vertex degrees of edges". J. Math. Chem. 46, 1369–1376 (2009)
65. M. Eliasi, A. Iranmanesh, "On ordinary generalized geometric–arithmetic index". Appl. Math. Lett. 24, 582–587 (2011).
66. M.O. Albertson, "The irregularity of a graph". ARS Comb. 46, 219–225 (1997).
67. D. Vukičević, M. Gašperov, "Bond additive modeling 1. Adriatic indices". Croat. Chem. Acta 83, 243–260 (2010).

- 68.** B. Zhou and N. Trinajstić, “On a novel connectivity index”. J. Math. Chem. 46 (2009) 1252-1270.
- 69.** B. Zhou and N. Trinajstić, “On general sum-connectivity index”. J. Math. Chem. 47 (2010) 210-218.

