RİEMANN ALTMANİFOLDLAR ÜZERİNDE BAZI EŞİTSİZLİKLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ECE GÜLER ASLAN

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

MERSİN
AĞUSTOS - 2024

RİEMANN ALTMANİFOLDLAR ÜZERİNDE BAZI EŞİTSİZLİKLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ECE GÜLER ASLAN
ORCID ID: 0009-0003-1109-5973

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
DOÇ. DR. ŞEMSİ EKEN MERİÇ
ORCID ID: 0000-0003-2783-1149

MERSİN
AĞUSTOS - 2024

ÖZET

RİEMANN ALTMANİFOLDLAR ÜZERİNDE BAZI EŞİTSİZLİKLER

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma beş ana bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde tez konusu ile ilgili tarihsel gelişmelere ve literatürde şimdiye kadar yapılmış olan çalışmalara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde ise yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma konusuna kaynak sağlayan bazı temel tanım ve kavramlardan bahsedilmiştir. Dördüncü bölüm iki alt bölüme ayrılmış olup burada sırasıyla bir Riemann manifoldun altmanifoldu için bazı temel eşitsizlikler ve hemen hemen Hermitiyen manifoldların altmanifoldları ile ilgili bir sınıflandırma verilmiştir. Son bölüm olan beşinci bölümde ise bu tez çalışması ile ilgili sonuçlara yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Riemann manifold, Riemann altmanifold, Ricci eğriliği, Hermitiyen manifold

Danışman: Doç. Dr. Şemsi Eken Meriç, Mersin Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Mersin.

ABSTRACT

SOME INEQUALITIES FOR RIEMANNIAN SUBMANIFOLDS

This study prepared as a master's thesis consists of five main sections. The first section is devoted to the introduction. The second section includes historical developments related to the thesis topic and studies conducted in the literature to date. The third section mentions some basic definitions and concepts that provide resources for this study prepared as a master's thesis. The fourth section is divided into two subsections, where some basic inequalities for a submanifold of a Riemannian manifold and a classification about a submanifold of almost Hermitian manifold are given respectively. The last section, the fifth section, includes the results related to this thesis study.

Keywords: Riemann manifold, Riemann submanifold, Ricci curvature, Hermitian manifold

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Şemsi Eken Meriç, Mersin University, Department of Mathematics, Mersin.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezimin her aşamasında bana inanan ve beni her daim motive eden, yol gösteren, değerli fikirlerini paylaşan ve onunla çalışmaktan da öğrencisi olmaktan da gururlandığım sayın danışanım Doç. Dr. Şemsi EKEN MERİÇ'e teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans yaptığım süreç boyunca emeği geçen tüm Mersin Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi kadrosuna çok teşekkür ederim.

Bugüne kadar maddi ve manevi desteklerini hiç esirgemeyen, bana güvenmekten vazgeçmeyen ve bu zorlu süreçte yanımda olan aileme içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR ve SİMGELER

Kısaltma/Simge	Tanım
M , $\widetilde{M}$	Riemann Manifold
g	Metrik Tensör
[,]	Lie Parantez Operatörü
T_pM	Tanjant Vektör Uzayı
$\Gamma(TM)$	Vektör Alanları Uzayı
$R^m(c)$	Reel Uzay Formu
∇	Afin Konneksiyon
$\tilde{\nabla}$	$\widetilde{M}$ Manifoldunun Konneksiyonu
σ	M Manifoldunun İkinci Temel Formu
R	Riemann-Christoffel Eğrilik Tensörü
$\tilde{R}$	$\widetilde{M}$ Manifoldunun Eğrilik Tensörü
K	Kesit Eğriliği
S	Ricci Tensörü
J	Skalar Eğrilik
T	∇ Konneksiyonunun Torsiyonu

1. GİRİŞ

Riemann invaryantlar, bir Riemann manifoldun içsel karakteristikleridir ve genellikle Riemann manifoldunun davranışı hakkında bize önemli bilgi verdiğinden literatürde önemli bir yere sahiptir. Riemann invaryantları arasında en çok kullanılanı ise eğrilik invaryantlarıdır. Eğrilik invaryantları özellikle teorik fizikte önemli bir rol oynar. Newton'un kanunlarına göre bir cismin büyüklüğünü sabit bir hızla hareket ettirmek için gereken kuvvetin büyüklüğü, cismin hareket yörüngesinin eğriliğinin sabit bir katı olmalıdır. Aynı şekilde yerçekimine maruz kalan bir cismin hareketi, Einstein'a göre içinde bulunduğu uzay zamanın eğriliği tarafından belirlenir. Sabun köpüğünün baloncuklarından kırmızı kan hücrelerinin şekline kadar yüzeylerin belirlediği bütün şekiller çeşitli eğrilikler ile ifade edilebilir. Bir manifoldun ana içsel invaryantları esasında kesit eğriliği, skalar eğrilik ve Ricci eğriliği gibi klasik eğrilik invaryantlarıdır.

1995 yılında B. Y. Chen, "Chen invaryantı" olarak adlandırdığı yeni bir eğrilik invaryantı tanımlamıştır (Chen, 1995). Daha sonra ise B. Y. Chen, bu eğrilikler invaryantlarının yeni türlerinin iki dizesini tanıtmış ve incelemiştir. Bu eğrilik invaryantları, Riemann, spektral ve simplektik geometrilerinde ve bunların altmanifold teorilerini içeren birçok alanda oldukça önemli rol oynamaktadır (Chen, 2000).

Son dönemin en popüler konularından biri olan Chen eşitsizlikleri, bir altmanifoldun içsel ve dışsal invaryantları arasındaki ilişkiyi elde etmede önemli yer tuttuğundan altmanifold teorisi üzerine çalışan kişiler için oldukça ilginçtir. Literatürde Chen eşitsizlikleri üzerine birçok çalışma bulunmaktadır. Örneğin 1996 yılında B.-Y. Chen yaptığı çalışmasında, kompleks uzay formunun bir altmanifoldunun Ricci eğriliğini ve ortalama eğriliğini içeren bir eşitsizlik kurduktan sonra devamında yapılan çalışmalarda bu S. Hong, K. Matsumoto ve M. M. Tripathi de B.- Y. Chen'in kurmuş olduğu eşitsizliğin daha genel bir formunu çalışmışlardır. Sonuç olarak, üzerinde farklı geometrik yapıları içeren manifoldlar ve bunların altmanifoldları ile ilgili Chen eşitsizlikleri çalışılmış olup bunlarla ilgili birçok karakterizasyonlar verilmiştir (Chen, 1996; Hong, Matsumoto ve Tripathi, 2005).

Bu tez çalışmasında bir Riemann manifoldun Riemann invaryantları çalışılmıştır. Burada $\widetilde{M}$ Riemann manifoldunun Ricci eğriliği ile $\widetilde{M}'$nın M altmanifoldunun Ricci eğriliği arasındaki ilişkiyi veren bir temel eşitsizlik kurulmuştur. Bu eşitsizliğin eşitlik durumu da göz önüne alınarak bununla ilgili gerek ve yeter şartlar verilmiştir. Daha sonra bir Riemann manifoldun skalar eğriliği ile bu manifoldun altmanifoldunun skalar eğriliği arasında bir temel eşitsizlik kurulmuş olup bu eşitsizliğin de eşitlik durumunun sağlanması durumunda gerek ve yeter şartlar belirlenmiştir. Benzer şekilde bu eşitsizlik bir reel uzay formunun altmanifoldu için de hesaplanmış olup bazı karakterizasyonlar verilmiştir.

Bir diğer alt bölümde ise bir $\widetilde{M}$ hemen hemen Hermitiyen manifoldun bir Riemann altmanifoldu ele alınmıştır. $\widetilde{M}$ üzerindeki hemen hemen kompleks yapı göz önüne alınarak M altmanifoldunun invaryant, anti-invaryant, CR-altmanifold, slant ve generic olması ile ilgili bir sınıflandırma verilmiştir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

C. L. Gauss (1777-1855) yüzeylerin geometrisi kavramını tanıtarak yüzeyler teorisini kurmuştur (Gauss, 1828). O zamandan beri yüzeyler konusu üzerine matematik alanında ciddi oranda çalışmalar yapılmıştır. Eğriler ve yüzeylerin diferansiyel geometrisi matematiğin birçok dalının yanı sıra dinamikte, fizikte ve mühendislikte büyük etki yaratmıştır. Örneğin jeodeziklerin geometrisi dinamik, kalkülüs ve topolojide kullanılırken minimal yüzeylerin geometrisi de kompleks fonksiyonlar teorisi, varyasyon hesabı ve topolojide oldukça önemlidir. Gauss' tan önce geometriciler, bir yüzeyi sonsuz sayıdaki eğrilerin birleşimi olarak tanımlarken Gauss, her yüzeyi kendi başına ayrı bir varlık olarak görüyordu. Gauss' un 3-boyutlu Öklid uzayındaki yüzeyler teorisinden etkilenen B. Riemann (1826-1866), 1854 yılında Riemann geometrisini ortaya koydu. Riemann geometrisi ise özel durumlarda hem Öklid geometrisini hem de Öklid dışı geometrileri içeriyordu. Bu anlamda Riemann geometrisi Öklid geometrisinin bir genelleştirilmişidir. Böylece Riemann geometrisi, 20.yy'da çalışan geometri ve fizik üzerine çalışanlar üzerinde oldukça büyük etki yaratmıştır.

Yüzeyler üzerinde içsel Riemann yapısı ile asli eğrilikleri veya yüzey üzerine indirgenmiş Riemann metriğini kullanarak iki farklı yöntemle yüzeylerin eğrilikleri hesaplanabiliyordu (Chen, 2000).

Diğer yandan manifold teorisi, modern diferansiyel geometrinin gelişiminde önemli bir rol oynayan aktif bir araştırma alanıdır. Altmanifoldlar teorisi, diferansiyel ve integral hesabının bulunmasından itibaren çalışılmaya başlanmıştır. Fermat'ın verilen bir eğriye teğetin nasıl çizileceği problemiyle teorinin başlangıcı başlamıştır. Bu teoriye ilk önemli katkı Euler tarafından 1736 yılında yapılmıştır. Euler, düzlem eğrililerinin eğriliklerini, yay uzunluğunu ve eğrilik yarıçapını tanıtmasıyla başlamış ve böylece altmanifoldların içsel diferansiyel geometrisi çalışmaya başlamıştır. Daha sonra 3-boyutlu Öklid uzayında yüzeylerin Gauss ve ortalama eğriliklerini tanımlamıştır. Yüzeyin Gauss eğriliği, içerisinde bulunduğu uzaydan bağımsız içsel bir invaryant iken ortalama eğrilik, yüzeyin içerisinde bulunduğu uzaydan kaynaklanan ve yüzeyin direncine karşılık gelen yüzey gerilimi şeklinde tanımlanabilir. Bu sebeple yüzeyin ortalama eğriliği dışsal bir invaryanttır. Altmanifoldlar üzerine Gauss, Lagrange, Meusnier, Weiestrass, Plateau gibi isimler katkı sağlamasına karşın ilk kapsamlı derleme Chen tarafından bir kitapta toplanmıştır. Bugün de bu kitap temel kaynaklardan biridir (Şahin, 2012).

B.-Y. Chen ve M. Okumura 1973 yılında M manifoldu c sabit eğrilikli bir reel uzay formunun $n-$ boyutlu bir altmanifoldu olması durumunda herhangi bir $p \in M$ noktasında

$$2\tau \geq (n-2)\,\|\sigma\|^2 + (n-2)(n-1)c \tag{2.1}$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermişlerdir. (2.1) eşitsizliğinde τ ve σ sırasıyla M manifoldunu skalar eğriliğini ve ikinci temel formunu göstermektedir (Chen ve Okumura, 1973). 1996 yılında ise B.-Y. Chen, $\mathbb{R}^m(c)$ bir reel uzay formunun $n-$boyutlu bir altmanifoldu olan M' nin herhangi bir noktasında

$$\tau \leq \frac{1}{2}\, n\,(n-1)\|\mathrm{H}\|^2 + \frac{1}{2}\, n\,(n-1)c \tag{2.2}$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermiştir. Burada τ ve H, M manifoldunun sırasıyla skalar eğriliğini ve ortalama eğrilik vektörünü göstermektedir. Ayrıca Chen (2.2) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şartın $p \in M$ noktasının bir total umbilik nokta olması gerektiğini göstermiştir. Literatürde bu tip eşitsizlikler, Chen-tipi eşitsizlikler veya Chen eşitsizlikleri olarak adlandırılır (Chen, 2001).

Bir manifoldun temel içsel invaryantları kesit eğriliği, Ricci eğriliği ve skalar eğrilik olarak bilinirken ortalama eğrilik vektörü ise bir dışsal invaryant şeklinde ifade edilir. Chen eşitsizlikleri ise bir altmanifoldun içsel ve dışsal invaryantları arasında ilişki elde etmeyi sağladığından altmanifold teorisi çalışan kişiler için bu konu son dönemlerin en popüler konularından biridir. Bu nedenle literatürde bu konu üzerine birçok çalışmalar mevcuttur (Deng, 2009).

Kompleks yapılar ve kompleks yapılarla donatılmış manifoldlar klasik cebirsel geometrideki cebirsel eğrilerin ve cebirsel yüzeylerin incelenmesiyle ayrı bir çalışma alanı olarak ortaya çıkmıştır. Bu manifoldların üzerindeki Riemann metriğinin indirgenmesiyle kompleks altmanifoldlar üzerine çalışmalar 1950'lerin başında E. Calabi tarafından başlamıştır (Calabi ve Eckmann, 1953).

Kompleks bir manifoldun bir altmanifoldu, eğer teğet uzaylarının her biri ambient manifoldunun hemen hemen kompleks yapı altında invaryantsa, bir kompleks altmanifold olarak adlandırılır. Bir Kaehler manifoldunun kompleks bir altmanifoldunun kendisi indirgenmiş metriğe göre bir Kaehler manifoldudur. Bir J hemen hemen kompleks yapısı ile donatılmış manifold, altmanifoldunun tanjant demetine göre birçok altmanifold sınıfına sahiptir. Örneğin Kaehler altmanifold, total reel altmanifold, CR-altmanifold ve slant altmanifold vb. verilebilir.

1978'de Chen, Kaehler manifoldun bir CR-altmanifoldunun $D^{\perp}$ total reel altmanifoldunu her zaman integrallenebilir olduğunu göstermiştir. (Blair ve Chen, 1979).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Riemann Manifoldlar ve Altmanifoldları

Tanım 3.1.1. X kümesi verilsin. $\bar{\tau}$, X kümesinin alt kümelerinin bir ailesi olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır. $\bar{\tau}$ 'ye X üzerinde bir topoloji ve $(X, \bar{\tau})$ ikilisine ise bir topolojik uzay denir.

(a) $X \in \bar{\tau}$ ve $\emptyset \in \bar{\tau}$,
(b) $\bar{\tau}$ ailesinin keyfi birleşimi $\bar{\tau}$ kümesine aittir,
(c) $\bar{\tau}$ ailesinin sonlu sayıda kesişimi $\bar{\tau}$ kümesine aittir.

Yukarıda (a), (b), (c) maddeleri ile verilen X kümesinin elemanları topolojik uzayda bir nokta olarak adlandırılır. $\bar{\tau}$ ailesinin her bir alt kümesine $(X, \bar{\tau})$ uzayın açıkları denir (Şahin, 2012).

Tanım 3.1.2. X boştan farklı kümesi verilmek üzere X kümesi üzerinde $d : X \times X \to \mathbb{R}$ 'ye tanımlı bir fonksiyon verilsin. Bu durumda $\forall x_1, x_2, x_3 \in X$ için

i) $x_1 \neq x_2$ için $d(x_1, x_2) > 0$,

ii) $d(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$,

iii) $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$,

iv) $d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x_3) + d(x_3, x_2)$

şartları sağlanırsa yukarıdaki gibi tanımlı olan d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik denir. Burada d metriği, X kümesi üzerinde bir tek topoloji üretir. Bunun anlamı ise metrik uzay üzerinde her zaman topolojinin tanımlanmasının mümkün olduğudur (Şahin, 2012).

Örnek 3.1.1. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi olmak üzere, $\mathbb{R}^n$ üzerinde

$$\{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$$

olsun. Bu ifadede her bir x_i reel sayısına $x \in \mathbb{R}^n$ noktasının $i.$ koordinatı adı verilir. Herhangi bir $x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

fonksiyonu tanımlanırsa d fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir metrik tanımlar. Böylece $\mathbb{R}^n$ bir metrik uzaydır (Şahin, 2012).

Tanım 3.1.3. M bir diferansiyellenebilir manifold olsun. M üzerindeki diferansiyellenebilir vektör alanlarının kümesi $\Gamma(TM)$ ile gösterilmek üzere

$$g:\ \Gamma(TM)\times\ \Gamma(TM)\rightarrow\ C^{\infty}(M,\mathbb{R})$$

ile tanımlı g bilineer formu simetrik ve pozitif tanımlı ise, yani $\forall\ X,Y\in\Gamma(TM)$ için

(a) $g(X,Y)=g(Y,X)$
(b) $g(X,X)\geq 0$ ve $\forall X$ için $g(X,X)=0\ \Leftrightarrow X=0$

şartları sağlanırsa g bilineer formuna Riemann metriği veya metrik tensör adı verilir. Bu durumda (M,g) ikilisine Riemann manifoldu denir (Şahin, 2012).

Örnek 3.1.2. $\mathbb{R}^n$ Öklidyen uzayı olmak üzere

$$<X,Y>=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

iç çarpımı göz önüne alınırsa bu durumda kolayca görülür ki $<,>$ bilineer, simetrik ve pozitif tanımlıdır. Böylelikle $<,>$ bir Riemann metrik ve $(\mathbb{R}^n,<,>)$ ikilisi bir Riemann manifoldudur (Şahin, 2012).

Tanım 3.1.4. M bir manifold olmak üzere bu manifold üzerinde vektör alanlarının kümesi $\Gamma(TM)$ olsun. $\forall\ X,Y,Z\in\Gamma(TM)$ ve $f\in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$için

$$\nabla:\ \Gamma(TM)\times\ \Gamma(TM)\longrightarrow\Gamma(TM)$$

ile tanımlı ve

(1) $\nabla_{X+Y}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$
(2) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
(3) $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$
(4) $\nabla_X(fY) = X[f]Y + f\nabla_X Y$

şartlarını sağlarsa ∇ dönüşümüne afin veya lineer konneksiyon adı verilir. $\nabla_X Y$ vektör alanına Y vektör alanının X vektör alanı boyunca kovaryant türevi adı verilir. Yukarıdaki tanımdan görüldüğü üzere bir afin konneksiyon, M üzerindeki bir vektör alanını yine bir vektör alanına taşıyan bir dönüşümdür (Şahin, 2012).

Tanım 3.1.5. M bir manifold ve ∇ manifold üzerinde bir lineer konneksiyon olsun. Bu durumda

$$T : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$$
$$(X,Y) \longrightarrow T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

ve

$$R: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$$
$$(X,Y,Z) \longrightarrow R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{3.1}$$

ile tanımlı T ve R tensör alanlarına ∇ lineer konneksiyonun sırasıyla torsiyon tensörü ve eğrilik tensörü denir. Açıktır ki T, $(2,1)$ −mertebeli tensör alanı ve R, $(3,1)$ −mertebeli tensör alanıdır. $T = 0$ olması durumunda ∇ lineer konneksiyonu torsiyonsuzdur denir. $R = 0$ olduğu durumda M manifoldu flattır (düzlemsel) denir (Şahin, 2012).
Burada

$$R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z,W)$$

ile gösterilir. R'nin iyi bilinen özellikleri aşağıdaki gibidir:

$$R(X,Y,Z,W) = -R(X,Y,W,Z),$$

$$R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W),$$

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0, \tag{3.2}$$

$$R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y).$$

İspat. Yukarıda verilen (3.2) eşitliği "*1.Bianchi Özdeşliği*" olarak adlandırılır. Burada $\forall X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için (3.1) eşitliği kullanırsa

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = {} & \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \\ & + \nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Z\nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]}X \\ & + \nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_X\nabla_Z Y - \nabla_{[Z,X]}Y \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = {} & \nabla_X(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y) + \nabla_Y(\nabla_Z X - \nabla_X Z) \\ & + \nabla_Z(\nabla_X Y - \nabla_Y X) - \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_{[Y,Z]}X - \nabla_{[Z,X]}Y \end{aligned}$$

elde edilir. ∇ torsiyonsuz olduğundan $\nabla_Y Z - \nabla_Z Y = [Y,Z]$ dır. Böylece

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = {} & \nabla_X[Y,Z] + \nabla_Y[Z,X] + \nabla_Z[X,Y] \\ & - \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_{[Y,Z]}X - \nabla_{[Z,X]}Y \end{aligned}$$

dır. Burada konneksiyonun torsiyonsuz olması tekrar kullanılırsa

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = \big[X[Y,Z]\big] + \big[Y[Z,X]\big] + [Z[X,Y]]$$

elde edilir. Böylece Jacobi özdeşliğinden

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$$

olur (Şahin, 2012).

Teorem 3.1.1. (M,g) bir Riemann manifoldu olsun. M üzerinde torsiyonsuz ve g metriği ile uyumlu $(\nabla g = 0)$ bir tek ∇ lineer konneksiyon vardır.

İspat. (Teklik). $T = 0$ ve $\nabla g = 0$ olacak şekilde bir ∇ lineer konneksiyon var olsun. Bu durumda $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için $T(X,Y) = 0$ olduğundan

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \tag{3.3}$$

dır. Diğer taraftan $Z \in \Gamma(TM)$ için $(\nabla_X g)(Y,Z) = 0$ olduğundan

$$X_g(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \tag{3.4}$$

olur. Diğer taraftan (3.3) ve (3.4) denklemleri kullanılırsa

$$g(\nabla_X Y, Z) = X_g(Y,Z) - g(Y, \nabla_Z X) + g([Z,X],Y)$$

olur. Bu işlem devam ettirilirse

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) = {} & X_g(Y,Z) - Yg(Z,X) - Zg(X,Y) + g(Z,[X,Y]) \\ & + g(Y,[Z,X]) - g(X,[Y,Z]) - g(\nabla_X Y, Z) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan Koszul formülü adı verilen

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) = {} & \frac{1}{2}\{X_g(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) + g(Z,[X,Y]) + g(Y,[Z,X]) \\ & - g(X,[Y,Z])\} \end{aligned} \tag{3.5}$$

denklemi bulunur. Bu ifadede M üzerinde (3.3) ve (3.4) şartları sağlanır. Her ∇ konneksiyonu için sağlandığından ve g Riemann metriği pozitif tanımlı olduğundan ∇ tektir.

(Varlık). X ve Y vektör alanları seçilsin ve ∇ konneksiyonu (3.5) ile tanımlansın. Bu durumda kolayca görülür ki ∇ lineerdir. Yapılan işlemlerle (3.3) ve (3.4) şartlarının sağlandığı da görülür.

Teorem 3.1.1 de verilen konneksiyona Levi-Civita konneksiyon, Riemann konneksiyon veya metrik konneksiyon adı verilir (Şahin, 2012).

Tanım 3.1.6. M, $\widetilde{M}$ manifoldunun altmanifoldu olsun. $\widetilde{\nabla}$ ve ∇, sırasıyla $\widetilde{M}$ ve M manifoldları üzerinde tanımlı konneksiyonlar olmak üzere, $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sigma(X,Y) \tag{3.6}$$

şeklindedir. (3.6)'daki $\nabla_X Y$ ve $\sigma(X,Y)$, sırasıyla $\widetilde{\nabla}_X Y$'nin tanjant demeti ve normal demeti üzerindeki bileşenlerdir. ∇ Riemann konneksiyonu, $\widetilde{\nabla}$'den indirgenmiş konneksiyon olarak adlandırılırken σ, M altmanifoldunun ikinci temel formu olarak adlandırılır. σ ikinci temel formu simetriktir ve

$$\sigma(X,Y) = \sigma(Y,X) \tag{3.7}$$

sağlanır.

Tanım 3.1.7. $(\widetilde{M}, g)$ bir Riemann manifoldu olsun. M, $\widetilde{M}$ manifoldunun altmanifoldu olmak üzere $\forall\ X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $\forall\ Z \in \Gamma(TM)^{\perp}$ için

$$g(A_Z X, Y) = g(\sigma(X, Y), Z) \tag{3.8}$$

dir.

İspat. $Y \in \Gamma(TM)$ ve $Z \in \Gamma(TM)^{\perp}$ için $g(Y, Z) = 0$ dır. Bu belirtilen ifadenin her iki tarafına $\widetilde{\nabla}$ kovaryant türevi uygulanırsa

$$g\big(\widetilde{\nabla}_X Y, Z\big) + g\big(Y, \widetilde{\nabla}_X Z\big) = 0$$

elde edilir. Burada

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sigma(X, Y) \tag{3.9}$$

ve

$$\widetilde{\nabla}_X Z = -A_Z X + \nabla_X^{\perp} Z\,, \qquad \left(\widetilde{\nabla}_X Z\right)^T = -A_Z X \tag{3.10}$$

denklemleri kullanılırsa

$$g(\nabla_X Y + \sigma(X, Y), Z) + g(Y, -A_Z X + \nabla_X^{\perp} Z) = 0$$

olur. Burada

$$T\widetilde{M} = TM \oplus TM^{\perp}$$

ayrışımı kullanılarak (3.8) elde edilir.

σ simetrik ve bilineer olduğu bilindiğinden (3.8) ifadesi ile A_V operatörünün simetrik ve lineer olduğu görülür. (3.9) ve (3.10) denklemlerine sırasıyla Gauss ve Weingarten formülü adı verilir.

Diğer yandan M Riemann manifoldu için, $\forall\ X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ için

$$R(X,Y,Z,W) = \tilde{R}(X,Y,Z,W) + g(\sigma(X,W),\sigma(Y,Z)) - g(\sigma(X,Z),\sigma(Y,W)) \tag{3.11}$$

eşitliği vardır. (3.11) eşitliği Gauss denklemi olarak adlandırılır. Burada $\tilde{R}$ ve R sırasıyla $\widetilde{M}$ ve M manifoldlarının eğrilik tensörlerini göstermektedir. M Riemann manifoldunun normal kısmının eğrilik tensörü $R^{\perp}$, $\forall\, X,Y,Z,W \in \Gamma(TM)$ ve $N \in \Gamma(TM)^{\perp}$ olmak üzere

$$R^{\perp}(X,Y)\, N = \nabla_X^{\perp}\nabla_Y^{\perp}N - \nabla_Y^{\perp}\nabla_X^{\perp}N - \nabla_{[X,Y]}^{\perp}N \tag{3.12}$$

ile verilir. Eğer $R^{\perp} = 0$ ise bu durumda M manifoldunun $\nabla^{\perp}$ normal konneksiyonu düzlemseldir, denir. Diğer yandan σ'nın kovaryant türevi

$$(\nabla'\sigma)(X,Y,Z) = \nabla_X^{\perp}\sigma(Y,Z) - \sigma(\nabla_X Y,Z) - \sigma(Y,\nabla_X Z) \tag{3.13}$$

ile tanımlanır. Eğer $\nabla'\sigma = 0$ ise bu durumda ikinci temel form paraleldir, denir.
$\forall\, X,Y \in \Gamma(TM)$ ve $N,V \in \Gamma(TM)^{\perp}$ için

$$\tilde{R}(X,Y,N,V) = R^{\perp}(X,Y,N,V) - \langle A_N A_V X, Y \rangle + \langle A_V A_N X, Y \rangle \tag{3.14}$$

vardır. Yukarıda verilen (3.14) ifadesi Ricci-Kühn denklemi olarak adlandırılır.
$(\widetilde{M}^m, g)$ bir Riemann manifoldu olsun. M^n, $\widetilde{M}$ manifoldunun altmanifoldu olsun. T_pM tanjant uzayının herhangi bir ortonormal bazı $\{e_1, \dots, e_n\}$ için, ortalama eğrilik vektörü $H(p)$

$$H(p) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma(e_i, e_i). \tag{3.15}$$

ile verilir. Burada eğer $\sigma = 0$ ise M altmanifoldu, $\widetilde{M}$'da total jeodeziktir, denir. Eğer $H = 0$ ise minimaldir. $\forall\, X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\sigma(X,Y) = g(X,Y)H$$

şartı sağlanırsa M altmanifoldu total umbiliktir, denir (Chen, 2000).
$\widetilde{M}$ m-boyutlu bir Riemann manifold, M $\widetilde{M}$'nın n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. T_pM tanjant uzayının bir ortonormal tabanı $\{e_1, \dots, e_n\}$ olsun. e_r, $(T_pM)^{\perp}$ normal uzayının bir $\{e_{n+1}, \dots, e_m\}$ ortonormal tabanına ait olsun. Bu durumda

$$g_{ij}^{r} = \langle g(e_i, e_j), e_r \rangle \ ve \ \|g\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \langle g(e_i, e_j), g(e_i, e_j) \rangle \tag{3.16}$$

şeklindedir.

Tanım 3.1.8. (M, g) $n-$boyutlu Riemann manifoldu ve M manifoldunun bir p noktasındaki tanjant uzayı T_pM olsun. T_pM uzayının $2-$boyutlu bir alt uzayı P olsun. x ve y, P düzlemini geren birim vektörler olmak üzere

$$K(P) = K(x, y) = \frac{g(R(x, y)y, x)}{g(x, x)g(y, y) - g(x, y)^2} \tag{3.17}$$

ifadesine M manifoldunun P düzlemine göre kesit eğriliği denir (Şahin, 2012).
M, $n-$boyutlu Riemann manifoldu olsun. $p \in M$'deki ortogonal birim vektörler olan e_i ve e_j tarafından gerilen düzlem kesitinin kesit eğriliği $K_M(e_i \wedge e_j)$ ile gösterilir.

$$K_M(e_i \wedge e_j) \equiv R(e_i, e_j, e_j, e_i) = R(e_j, e_i, e_i, e_j) \tag{3.18}$$

burada R, Riemann eğrilik tensörüdür. Genellikle kesit eğriliği $K_M(e_i \wedge e_j)$, K_{ij} ile gösterilir.

Tanım 3.1.9. $\mathbb{R}^m(c)$, $m-$boyutlu ve c sabit kesit eğrilikli Riemann manifoldu bir reel uzay formu olarak adlandırılır. $\forall\, X, Y, Z, W \in \mathbb{R}^m(c)$ vektör alanları için Riemann eğrilik tensörü

$$\tilde{R}(X, Y, Z, W) = c\{\langle Y, Z\rangle \langle X, W\rangle - \langle X, Z\rangle \langle Y, W\rangle\}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan $c = 0$ olması durumunda manifold bir Öklid uzayı, $c > 0$ ise küre, $c < 0$ ise c bir hiperbolik uzay olacaktır (Tripathi, 2002).

Tanım 3.1.10. M , $n-$boyutlu Riemann manifoldu olsun. T_pM' deki birim vektörler kümesi T_p^1M olmak üzere

$$T_p^1M = \{\, X \in T_pM \mid g(X, X) = 1 \,\}$$

yazılabilir. Burada $\{e_1, \ldots, e_n\}$, T_pM için herhangi bir ortonormal taban ise M manifoldunun S Ricci tensörü

$$S(X,Y) = \sum_{j=1}^{n} R\,(e_j, X, Y, e_j) \qquad X, Y \in T_pM \tag{3.19}$$

ile verilir. Burada

$$S(X,Y) = S(Y,X)\,, \qquad X, Y \in T_pM$$

sağlanır. Diğer yandan, M manifoldunun Ricci eğriliği $Ric\,(X)$,

$$Ric\,(X) = S(X,X), \qquad X \in T_pM$$

ile tanımlanır. Burada her bir $i \in \{1, \ldots, n\}$ için

$$Ric(e_i) = S(e_i, e_i) = \sum_{j=1}^{n} R\big(e_j, e_i, e_i, e_j\big) = \sum_{j=1}^{n} R\big(e_i, e_j, e_j, e_i\big) = \sum_{j \neq i}^{n} R\big(e_i, e_j, e_j, e_i\big)$$
$$= \sum_{j \neq i}^{n} K_M\big(e_i \wedge e_j\big)$$

şeklindedir. Özel olarak eğer $X = e_1$ alınırsa yukarıdaki eşitlik

$$Ric(X) = \sum_{j=2}^{n} K_M\big(e_1 \wedge e_j\big) \tag{3.20}$$

olur. Böylece her bir $i \in \{1, \ldots, n\}$ için

$$Ric(e_i) = \sum_{j \neq i}^{n} K_M\big(e_i \wedge e_j\big) = S(e_i, e_i)$$

yazılabilir. Diğer yandan, M manifoldu üzerindeki maksimum Ricci eğrilik fonksiyonu $\widehat{Ric}$ ile gösterilirse

$$\widehat{Ric}(p) = max\{Ric(X)|\ X \in T_p^1 M\}$$

şeklinde verilebilir (Chen, 2000).

Tanım 3.1.11. (M, g) bir Riemann manifoldu ve $p \in M$ noktasındaki tanjant uzay T_pM olsun. M manifoldunun X doğrultusundaki Ricci eğriliği $Ric(X)$

$$Ric(X) = \frac{S(X,X)}{g(X,X)}$$

ile tanımlanır (Şahin,2012).

M, n −boyutlu bir Riemann manifoldu olmak üzere $p \in M$ noktasındaki skalar eğrilik $\tau(p)$

$$\tau(p) = \sum_{1 \le i \le j \le n} K_M\left(e_i \wedge e_j\right) \tag{3.21}$$

ile de verilebilir. Burada $\{e_1, \dots, e_n\}$, T_pM için herhangi bir ortonormal tabandır ve $K_M\left(e_i \wedge e_j\right)$ $p \in M$'de e_i ve e_j tarafından gerilen düzlem kesitinin eğriliğidir. Özel olarak 2 −boyutlu Riemann manifoldları için skalar eğrilik onun Gauss eğriliğine karşılık gelmektedir. Böylece

$$\tau(p) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq 1}^{n} K_M\left(e_i \wedge e_j\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} S(e_i, e_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Ric(e_i). \tag{3.22}$$

$\widetilde{M}$ bir Riemann manifoldu M'de $\widetilde{M}$'nın bir altmanifoldu olsun. K_{ij} ve $\widetilde{K}_{ij}$ sırasıyla altmanifoldu M ve $\widetilde{M}$ manifoldlarının e_i ve e_j tarafından gerilen düzlem kesitinin kesit eğriliğini göstersin. Böylece, K_{ij} ve $\widetilde{K}_{ij}$'nin $p \in M$ noktasında $Span\{e_i, e_j\}$'nin "içsel" ve "dışsal" kesit eğriliği olarak adlandırılır. (3.11) göre

$$K_{ij} = \widetilde{K}_{ij} + \sum_{r=n+1}^{m} (\sigma_{ii}^r \sigma_{jj}^r - (\sigma_{ij}^r)^2) \tag{3.23}$$

elde edilir.

Yukarıda verilen (3.23) eşitliğinden

$$2\tau(p) = 2\tilde{\tau}\left(T_pM\right) + n^2 \|H\|^2 - \|\sigma\|^2 , \tag{3.24}$$

bulunur. Burada

$$\tilde{\tau}(T_pM) = \sum_{1\leq i<j\leq n} \widetilde{K}_{ij}$$

şeklinde olup $\tau(p)$ ve $\tilde{\tau}(T_pM)$'nin sırasıyla $p \in M$ noktasındaki altmanifoldunun "içsel" ve "dışsal" skalar eğriliklerini göstermektedir.

Ayrıca, bir altmanifoldun ikinci temel formun ve ortalama eğriliğin normunun karesi arasındaki ilişki

$$\|\sigma\|^2 = \frac{1}{2} n^2 \|H\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{r=n+1}^{m} (\sigma_{11}^r - \sigma_{22}^r - \cdots - \sigma_{nn}^r)^2$$
$$+2 \sum_{r=n+1}^{m} \sum_{j=2}^{n} (\sigma_{1j}^r)^2 - 2 \sum_{r=n+1}^{m} \sum_{2\leq i<j\leq n} \left(\sigma_{ii}^r \sigma_{jj}^r - (\sigma_{ij}^r)^2\right). \quad (3.25)$$

ile verilir (Chen, 1999).

M'nin bir $p \in M$ noktasındaki ikinci temel formun çekirdeği:

$$\mathcal{N}_p = \left\{X \in T_pM \,\middle|\, \sigma(X,Y) = 0\,,\ \forall\, Y \in T_pM\right\}, \quad (3.26)$$

verilir (Chen, 2000).

Diğer yandan $p \in M$ deki normalleştirilmiş skalar eğrilik:

$$\tau_{\mathcal{N}}(p) = \frac{2\tau(p)}{n(n-1)} \quad (3.27)$$

ile tanımlanır. Burada (3.20) ve (3.21) eşitliklerinden

$$Ric(e_1) = \tau - \sum_{2\leq i<j\leq n} K_M(e_i \wedge e_j) = \tau - \frac{1}{2} \sum_{2\leq i\neq j\leq n} K_M(e_i \wedge e_j) \quad (3.28)$$

şeklindedir.

$$Ric(e_1) = \tau - \sum_{2\leq i<j\leq 4} K_M(e_i \wedge e_j) = \tau - \frac{1}{2} \sum_{2\leq i\neq j\leq 4} K_M(e_i \wedge e_j) \quad (3.29)$$

şeklindedir. Burada e_i ve e_j M altmanifoldunun ortonormal bazını göstermektedir.

3.2. Hemen Hemen Kompleks Manifoldlar

Tanım 3.2.1. M bir diferansiyallenebilir manifold olsun. J, M manifoldu üzerinde $(1,1)$ −tipinde bir tensör alanı olmak üzere J, M'nin her p noktasında $J^2 = -I$ olacak şekilde $T_p(M)$ tanjant uzayının bir endormorfizmi ise, M üzerinde hemen hemen kompleks bir yapı olarak adlandırılır. Üzerinde bir J hemen hemen kompleks yapısı bulunan M manifolduna hemen hemen kompleks manifold adı verilir. Her hemen hemen kompleks manifold çift boyutludur.

M manifoldunun bir p noktasının U komşuluğunda kompleks lokal koordinat sistemi $(z^1, \ldots, z^n)$ olsun. $j = 1, \ldots, n$ için $z^j = x^j + iy^j$ yazılabilir. $T_p(M)$ üzerindeki bir J endormorfizmi

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial y^j}, \quad J\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = -\frac{\partial}{\partial x^j}, \quad j = 1, \ldots, n \tag{3.30}$$

şeklinde tanımlanabilir. Böylelikle J kompleks yapısının yerel koordinat sisteminin seçimine bağlı olmadığı görülür (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 3.2.2. M üzerindeki J hemen hemen kompleks yapısının $(1,2)$ −tipli torsiyon tensör alanı N ile tanımlanır ve

$$N(X,Y) = [JX, JY] - J[X, JY] - J[JX, Y] - [X, Y] \tag{3.31}$$

şeklindedir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 3.2.3. M, hemen hemen kompleks J yapısına sahip bir hemen hemen kompleks manifold olsun. M üzerindeki her $\forall\, X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$g(JX, JY) = g(X, Y)$$

ise g'ye M üzerinde bir Hermitiyen metrik denir.

Hermitiyen metrik ile donatılmış bir hemen hemen kompleks bir manifolduna hemen hemen Hermitiyen manifold adı verilir. Ayrıca Hermitiyen metrik ile donatılmış bir kompleks manifold, Hermitiyen manifold olarak adlandırılır (Yano ve Kon,1984).

Tanım 3.2.4. (M, J, g) bir hemen hemen Hermitiyen bir manifold olsun. M üzerindeki X ve Y vektör alanları için M'nin temel $2-$formu olan ϕ

$$\phi(X, Y) = g(X, JY)$$

ile tanımlanır. Burada

$$\phi(JX, JY) = \phi(X, Y)$$

şeklindedir (Yano ve Kon, 1984).

Teorem 3.2.1. (M, J, g) bir hemen hemen kompleks bir manifold olsun. M üzerinde bir ∇ lineer konneksiyonu olması için gerek ve yeter koşul $\nabla J = 0$ ve $T = 0$ şartlarının sağlanmasıdır. Burada T, ∇'nin torsiyon tensörünü göstermektedir.

İspat. M üzerinde $\nabla J = 0$ ve $T = 0$ şartını sağlayan bir ∇ lineer konneksiyonu olsun. Bu durumda $\forall\, X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X, \qquad \nabla_X JY = J\nabla_X Y$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca

$$\begin{aligned} N(X, Y) &= [JX, JY] - J[X, JY] - J[JX, Y] - [X, Y] \\ &= J\nabla_{JX} Y - J\nabla_{JY} X - J^2\nabla_X Y + J\nabla_{JY} X - J\nabla_{JX} Y + J^2\nabla_Y X - \nabla_X Y + \nabla_Y X = 0 \quad (3.32) \end{aligned}$$

şeklindedir. O halde (3.32) ifadesinden $N(X, Y) = 0$ bulunur. Böylece M bir kompleks manifolddur. Tersine M bir kompleks manifold olsun. Bu durumda $N = 0$'dır. Öncelikle M kompleks manifoldu üzerinde torsiyon tensör alanı $T = 0$ şartını sağlayan bir ∇ lineer konneksiyonu verilsin. Bu durumda

$$A(X, Y) = (\nabla_X J)Y - (\nabla_Y J)X, \quad S(X, Y) = (\nabla_X J)Y - (\nabla_Y J)X$$

şeklinde tanımlansın. M üzerinde $\forall\, X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla'_X J)Y = \nabla'_X JY - J\nabla'_X Y$$

$$= \nabla_X JY - \mathrm{J}\nabla_X Y - \frac{1}{4}[A(X,Y) - JS(X,JY) + JA(X,JY) + S(X,Y)]$$
$$= (\nabla_X J)Y - \frac{1}{2}[(\nabla_X J)Y + \mathrm{J}(\nabla_X Y)JY]$$
$$= \frac{1}{2}[(\nabla_X J)Y + \mathrm{J}(\nabla_X Y)JY]$$

şeklindedir.

Diğer bir taraftan

$$J(\nabla_X J)JY = J\nabla_X J^2 Y - J^2\nabla_X JY = -\mathrm{J}\nabla_X Y + (\nabla_X J)Y + \mathrm{J}\nabla_X Y = (\nabla_X J)Y$$

elde edilir. Böylece $\nabla'_X J = 0$ olacaktır.

$T' = 0$ olduğunu göstermeden önce $T = 0$ ifadesinin gösterilmesi gerekmektedir.

$$A(JX,Y) + A(X,JY) = -[X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] = N(X,Y)$$
$$\begin{aligned} T'(X,Y) &= \nabla'_X Y - \nabla'_Y X - [X,Y] \\ &= T(X,Y) + \frac{1}{4}[A(JX,Y) + A(X,JY)] \\ &= \frac{1}{4}\, N(X,Y) \end{aligned}$$

eşitliğinden sonuç olarak $N = 0$ ise $T' = 0$ olduğu görülür. Böylece

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{4}[A(X,JY) - JS(X,Y)]$$

ifadesinde ∇''nün istenen konneksiyon olduğu görülür. Böylece ∇', M üzerinde $\nabla' J = 0$ ve $T' = 0$ şartını sağlayan bir lineer konneksiyondur. Burada T', ∇''nün torsiyonudur (Yano ve Kon,1984).

Lemma 3.2.1. (M,J,g) bir hemen hemen Hermitiyen manifold olsun. Bu durumda g metriği ile donatılmış Riemann konneksiyonunun ∇ kovaryant türevi, ϕ temel 2 −formu ve J'nin N torsiyon alanı $\forall\, X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için

$$2g\big((\nabla_X J)Y, Z\big) - g\big(JX, N(Y,Z)\big) = 3d\phi(X,JY,JZ) - 3d\phi(X,Y,Z)$$

eşitliği vardır.

İspat. M üzerindeki $\forall\ X, Y$ ve Z vektör alanları için

$$(\nabla_X J)JY = -J(\nabla_X J)Y \tag{3.33}$$

$$(\nabla_X \phi)(Y,Z) = g(Y,(\nabla_X J)Z), \tag{3.34}$$

$$N(Y,Z) = (\nabla_{JY} J)Z - (\nabla_{JZ} J)Y + J(\nabla_Z J)Y - J(\nabla_Y J)Z \tag{3.35}$$

eşitlikleri vardır.

Diğer bir taraftan (3.33), (3.34) ve (3.35) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} 3d\phi(X,Y,Z) &= X\big(\phi(Y,Z)\big) + Y(\phi(Z,X) + Z(\phi(X,Y) - \phi([X,Y],Z) - \phi([Y,Z],X) \\ &\quad - \phi([Z,X],Y) \\ &= g(Y,(\nabla_X J)Z) + \ g(Z,(\nabla_Y J)X) + g(X,(\nabla_Z J)Y) \end{aligned} \tag{3.36}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} 3d\phi(X,Y,Z) - 3d\phi(X,JY,JZ) &= -2g\big((\nabla_X J)Y,Z\big) + g(Z,(\nabla_Y J)X) \\ &\quad + g(X,(\nabla_Z J)Y) \ - g\big(JZ,\big(\nabla_{JY} J\big)X\big) - g\big(X,\big(\nabla_{JZ} J\big)JY\big) \\ &= -2g\big((\nabla_X J)Y,Z\big) - g\big(J(\nabla_Y J)Z,JX\big) + g\big(JX,\big(\nabla_{JZ} J\big)JY\big) \\ &\quad + g\left(\left(\nabla_{JY} J\right)Z,JX\right) - g\left(\left(\nabla_{JY} J\right)Y,JX\right) \\ &= -2g\big((\nabla_X J)Y,Z\big) + g\big(JX,N(Y,Z)\big) \end{aligned}$$

bulunur (Yano ve Kon, 1984).

Teorem 3.2.2. (M,J,g) hemen hemen kompleks bir manifold olsun. ∇, M üzerindeki bir Riemann konneksiyonunu göstermek üzere aşağıdaki şartlar birbirine denktir:

(a) $\nabla J = 0$,
(b) $\nabla \phi = 0$,
(c) Hemen hemen kompleks yapı torsiyonsuzdur ve ϕ temel 2-formu kapalıdır, yani $N = 0$ ve $d\phi = 0$'dır.

İspat. M üzerindeki herhangi bir X, Y ve Z vektör alanı için

$$(\nabla_X \phi)(Y,Z) = g(Y,(\nabla_X J)Z)$$

sağlanır. Böylece $\nabla J = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\nabla \phi = 0$ olmasıdır. Böylece (a) koşulu (b) koşuluna denktir. Diğer yandan kabul edelim ki (b) koşulu sağlansın. Böylece $\mathrm{d}\phi = 0$ olduğundan $N = 0$ bulunur. Tersine kabul edelim ki (c) koşulu sağlansın. Bu durumda Lemma 3.2.1'den, $\nabla J = 0$ ve buradan $\nabla \phi = 0$ elde edilir. Dolayısıyla (b) koşulu da (c) koşuluna denktir.

Tanım 3.2.5. (M, J, g) bir hemen hemen Hermitiyen manifold olsun. Eğer M üzerindeki ϕ temel $2-$formu kapalı ise bu durumda g Kaehler metriği olarak adlandırılır. Üzerinde Kaehler metriği bulunan bir hemen hemen kompleks manifolda hemen hemen Kaehler manifold denir. Benzer şekilde üzerinde Kaehler metriği bulunan bir kompleks manifolda da Kaehler manifoldu denir. Ayrıca bir M Hermitiyen manifoldunun Kaehler manifoldu olması için gerek ve yeter koşul $\nabla J = 0$ sağlanmasıdır.

Tanım 3.2.6. (M, J, g) bir hemen hemen Hermitiyen manifold olsun. Eğer M üzerindeki $\forall\, X, Y$ vektör alanları için

$$(\nabla_X J)Y + (\nabla_Y J)X = 0 \tag{3.37}$$

şartı sağlanırsa veya (3.37) eşitliğine denk olarak

$$(\nabla_X J)X = 0$$

ise bu durumda (M, J, g)' ye nearly Kaehler manifold denir. Ayrıca M üzerindeki herhangi bir X ve Y vektör alanları için

$$(\nabla_X J)Y + (\nabla_{JX} J)JY = 0$$

sağlanırsa M'ye quasi-Kaehler manifold denir (Yano ve Kon, 1984).

Önerme 3.2.1. (M, J, g) bir Kaehler manifoldu olsun. M üzerinde Riemann eğrilik tensörü R ve Ricci tensörü S ile gösterilmek üzere $\forall\, X, Y \in \Gamma(TM)$ için

(a) $R(X, Y)J = JR(X, Y)$ ve $R(JX, JY) = R(X, Y)$

(b) $S(JX, JY) = S(X, Y)$ ve $S(X, Y) = \frac{1}{2} iz(JR(X, JY))$

sağlanır.

İspat.

(a) J hemen hemen kompleks yapı paralel olduğundan birinci denklem açıktır. Bu durumda ikinci denklemi gösterelim. M üzerindeki herhangi bir X, Y, Z ve W vektör alanları için

$$\begin{aligned} g(R(JX,JY)Z,W) &= g(R(W,Z)JY,JX) = g(JR(W,Z)Y,JX) \\ &= g(R(W,Z)Y,X) = g(R(X,Y)Z,W) \end{aligned} \tag{3.38}$$

şeklindedir. Böylece $R(JX,JY) = R(X,Y)$ elde edilir.

(b) M Kaehler manifoldu üzerindeki bir ortonormal baz $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} S(JX,JY) &= \sum_i g(R(e_i,JX)JY,e_i) = \sum_i g(R(Je_i,JX)JY,Je_i) \\ &= \sum_i g(R(e_i,X)JY,Je_i) = \sum_i g(JR(e_i,X)Y,Je_i) \\ &= \sum_i g(R(e_i,X)Y,e_i) = S(X,Y) \end{aligned} \tag{3.39}$$

eşitliğinden (b)'nin ilk eşitliği elde edilir.

Diğer yandan, birinci Bianchi eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= \sum_i g(R(e_i,X)Y,e_i) = -\sum_i g(JR(e_i,X)JY,e_i) \\ &= \sum_i [g(JR(X,JY)e_i,e_i) + g(JR(e_i,X)JY,e_i)] \\ &= \sum_i [g(JR(X,JY)e_i,e_i) + g(JR(JY,Je_i)X,Je_i)] \\ &= \sum_i [g(JR(X,JY)e_i,e_i) + g(R(Y,e_i)X,e_i)] \\ &= iz\big(JR(X,JY)\big) - S(X,Y) \end{aligned} \tag{3.40}$$

bulunur. Böylece (b)'nin ikinci eşitliği de elde edilir (Yano ve Kon,1984).

Önerme 3.2.2. (M,J,g) bir Kaehler manifoldu olsun. M üzerindeki Ricci tensörü S ile gösterilmek üzere

$$(\nabla_Z S)(X,Y) = (\nabla_X S)(Y,Z) + (\nabla_{JY} S)(JX,Z)$$

şeklindedir.

İspat. Önerme 3.2.1'deki (3.40) ve ikinci Bianchi eşitliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}(\nabla_Z S)(X,Y) &= \frac{1}{2}\sum_i [g(J(\nabla_Z R)(X,JY)e_i, e_i)\\ &= \frac{1}{2}\sum_i [g(J(\nabla_X R)(Z,JY)e_i, e_i) + \frac{1}{2}\sum_i [g(J(\nabla_{JY} R)(X,Z)e_i, e_i)\\ &= (\nabla_X S)(Y,Z) + \big(\nabla_{JY} S\big)(JX,Z)\end{aligned}$$

elde edilir (Yano ve Kon, 1984).

Önerme 3.2.3. (M,J,g) reel $2n$ −boyutlu bir Kaehler manifoldu olsun. $n > 1$ olmak üzere eğer M sabit eğriliğe sahipse, M manifoldu düzlemseldir.

İspat. Eğer M Kaehler manifoldu c sabit eğrilikli ise bu durumda M üzerindeki herhangi bir X, Y ve Z vektör alanları için

$$R(X,Y) = c[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y]$$

yazılabilir. Burada Önerme 3.2.1'deki (3.38)' den

$$\begin{aligned}R(X,Y)Y &= c[g(Y,Y)X - g(X,Y)Y]\\ &= c[g(JY,Y)JX - g(JX,Y)JY]\\ &= R(JX,JY)Y\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece burada $(2n-1)\,cX = cX$ olduğu görülür. O halde $2(n-1)c = 0$ olur. $n > 1$ olduğundan $c = 0$ bulunur (Yano ve Kon, 1984).

Önerme 3.2.3'den açıkça görülebilir ki, Kaehler manifoldları için sabit eğrilik kavramı gerekli değildir. Bu sebeple Kaehler manifoldları için sabit holomorfik kesit eğriliği kavramı tanımlanabilir.

V, J hemen hemen kompleks yapısı ile birlikte $2n$ −boyutlu reel vektör uzayı olsun. Bu durumda

$$B: V \times V \times V \times V \to R$$

dönüşümü $\forall X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ için aşağıdaki şartlar sağlanır:

(a) $B(X,Y,Z,W) = -B(Y,X,Z,W) = -B(X,Y,W,Z)$
(b) $B(X,Y,Z,W) = B(Z,W,X,Y)$
(c) $B(X,Y,Z,W) + B(X,Z,W,Y) + B(X,W,Y,Z) = 0$
(d) $B(JX,JY,Z,W) = B(X,Y,JZ,JW) = B(X,Y,Z,W)$
(Yano ve Kon, 1984).

(M,J,g) bir Kaehler manifold ve R, M Kaehler manifoldu üzerindeki Riemann eğrilik tensörü olsun. $p \in M$ olmak üzere $T_p(M)$ tanjant düzlemindeki her bir P düzlemi için $K(P)$ kesit eğriliği

$$K(P) = R(X,Y,X,Y) = g(R(X,Y)Y,X)$$

ile tanımlanır. Burada eğer P düzlemi J altında invaryant ise bu durumda $K(P)$' ye holomorfik kesit eğriliği denir. Böylece $K(P)$ holomorfik kesit eğriliği, $p \in M$ deki birim vektör X olmak üzere

$$K(P) = R(X,JX,X,JX) = g(R(X,JX)JX,X)$$

şeklinde verilir.
Eğer her $p \in M$ noktalarındaki $T_p(M)$ tanjant düzlemindeki P düzlemlerinin hepsi $J-$invaryant ise bu durumda M'ye sabit holomorfik kesit eğrilikli uzay veya kompleks uzay formu denir (Yano ve Kon, 1984).

Teorem 3.2.3. (M,J,g) bir Kaehler manifoldu olsun. M manifoldunun sabit holomorfik kesit eğriliğine sahip olması için gerek ve yeter koşul R, M üzerindeki Riemann eğrilik tensör alanını göstermek üzere $\forall X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için

$$R(X,Y)Z = \frac{1}{4}[\, g(X,Z)Y - g(Y,Z)X + g(JX,Z)JY - g(JY,Z)JX + 2g(JX,Y)JZ \,]$$

koşulunun sağlanmasıdır (Yano ve Kon, 1984).
Diğer yandan, $M(c)$ kompleks uzay formu bir $M(c,\alpha)$ hemen hemen Hermitiyen manifold sınıfına aittir, burada c sabit holomorfik kesit eğriliğini ve α ise M üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyonu göstermektedir.
Bir M hemen hemen Hermitiyen manifoldu üzerindeki R Riemann eğrilik tensör alanı

$$R = f_1 R_1 + f_2 R_2$$

şartını sağlarsa bu durumda $M(f_1, f_2)$ genelleştirilmiş kompleks uzay formu olarak adlandırılır. Burada f_1 ve f_2, M üzerinde smooth fonksiyonlar ve $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$R_1(X,Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y$$
$$R_2(X,Y)Z = g(X,JZ)JY - g(Y,JZ)JX + 2g(X,JY)JZ$$

şeklindedir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Riemann Altmanifoldlar için Bazı Eşitsizlikler

Chen, $n-$boyutlu bir Riemann manifoldu için Ricci eğriliği kavramını, $k-$Ricci eğrilik kavramına genişletmiş $(2 \leq k \leq n)$ ve $k-$Ricci eğriliği ile şekil operatörü arasında önemli bir ilişki vermiştir. Ardından reel uzayların altmanifoldları için $k-$Ricci eğriliği ile ortalama eğrilik vektörünün karesi arasındaki ilişkiyi vermiştir (Chen, 1999; Shen, 1993; Yu, 1996; Wu, 1987).

Teorem 4.1.1. $\widetilde{M}$ bir Riemann manifoldu ve M de $\widetilde{M}$' nın $n-$boyutlu bir altmanifoldu olsun. T_pM, $p \in M$ noktasındaki tanjant uzayını göstermek üzere Π_k, T_pM'nin bir $k-$düzlem kesiti ve X, Π_k'da bir birim vektör olsun. Eğer $k = n$ ise $\Pi_n = T_pM$ olur. Benzer şekilde eğer $k = 2$ ise, bu durumda Π_2, T_pM'de bir düzlem kesitidir. Burada $e_1 = X$ olmak üzere Π_k'nın ortonormal bir tabanını $\{e_1, \dots, e_k\}$ olarak alalım. Bu durumda Π_k'nın X'deki $k-$Ricci eğriliği, $Ric_{\Pi_k}(X)$

$$Ric_{\Pi_k}(X) = K_M(e_1 \wedge e_2) + K_M(e_1 \wedge e_3) + \dots + K_M(e_1 \wedge e_k) \tag{4.1}$$

ile tanımlanır (Chen, 1999).

Böylece her bir $i \in \{1, \dots, k\}$ için,

$$Ric_{\Pi_k}(e_i) = \sum_{j \neq i}^{k} K_M\left(e_i \wedge e_j\right) = \sum_{j \neq i}^{k} K_{ij} \tag{4.2}$$

şeklindedir.

Diğer yandan, bir $n-$Ricci eğriliği $Ric_{T_pM}(e_i)$, $Ric(e_i)$ ile gösterilen e_i'nin bilinen Ricci eğriliğidir. Dolayısıyla $i \in \{1, \dots, n\}$ için $\{e_1, \dots, e_n\}$, T_pM nin herhangi bir ortonormal tabanını göstermek üzere

$$Ric_{T_pM}(e_i) \equiv Ric(e_i) = \sum_{j \neq i}^{n} K_{ij}$$

ile yazılabilir. Diğer yandan, Π_k $k-$düzlem kesitinin skalar eğriliği $\tau(\Pi_k)$

$$\tau(\Pi_k) = \sum_{1 \leq i < j \leq k} K_M\left(e_i \wedge e_j\right) = \sum_{1 \leq i < j \leq k} K_{ij} \tag{4.3}$$

ile verilir. Burada $\{e_1, \ldots, e_k\}$, k −düzlemi Π_k kesitinin herhangi bir ortonormal tabanını göstermektedir. Böylece

$$\tau(\Pi_k) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j\neq 1}^{k} K_M(e_i \wedge e_j) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} Ric_{\Pi_k}(e_i) \tag{4.4}$$

şeklindedir.

Burada eğer $k = 2$ alınırsa $\tau(\Pi_k)$, Π_k düzleminin kesit eğriliği $K(\Pi_k)$'ya eşit olacaktır. Ayrıca Π_k'nın normalleştirilmiş skalar eğriliği olan $\tau_N(\Pi_k)$,

$$\tau_N(\Pi_k) = \frac{2\tau(\Pi_k)}{k(k-1)} \tag{4.5}$$

ile tanımlanır. Buradan açıktır ki

$$\tau_N(p) = \tau_N(T_pM)$$

şeklindedir. Π_2 bir düzlem kesiti ve $\{e_1, e_2\}$, Π_2 için herhangi bir ortonormal taban ise, bu durumda

$$Ric_{\Pi_2}(e_1) = Ric_{\Pi_2}(e_1) = \tau(\Pi_2) = \tau_N(\Pi_2) = K_{12}$$

sağlanır.

Aşağıdaki teorem, $\widetilde{M}$ Riemann manifoldunun Ricci eğriliği ile $\widetilde{M}$ manifoldunun bir M altmanifoldunun Ricci eğriliği arasındaki ilişkiyi vermektedir:

Teorem 4.1.2. $\widetilde{M}$ m −boyutlu bir Riemann manifoldu ve M de $\widetilde{M}'$ nın n −boyutlu bir altmanifoldu olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur:

a) $X \in T_p^1M$ olmak üzere

$$Ric\,(X) \leq \frac{1}{4} n^2 \, \|H\|^2 + \widetilde{Ric}_{(T_pM)}\,(X) \tag{4.6}$$

eşitsizliği vardır. Burada $\widetilde{Ric}_{(T_pM)}\,(X)$, $\widetilde{M}$ manifoldunun $X \in T_p^1M$ deki n −Ricci eğriliğini ve H'de ortalama eğriliği göstermektedir.

b) Bir $X \in T_p^1M$ için (4.6) eşitsizliğinin eşitlik durumu sağlanır ancak ve ancak

$$\begin{cases} \sigma(X,Y) = 0, & X'\text{e dik olan her } Y \in T_pM \text{ için,} \\ \sigma(X,X) = \dfrac{n}{2} H(p), & \end{cases} \tag{4.7}$$

sağlanır.

c) $\forall X \in T_p^1 M$ için (4.6) eşitsizliğinin eşitlik durumu sağlanır ancak ve ancak p bir total jeodezik noktadır veya $n = 2$ ve p bir total umbilik noktadır.

İspat: Eğer (3.24) göz önüne alınırsa

$$2\tau(p) = 2\tilde{\tau}(T_pM) + n^2 \|H\|^2 - \|\sigma\|^2 \tag{4.8}$$

yazılabilir. Ayrıca (3.25) eşitliği yukarıda verilen son eşitlikte yerine yazılırsa

$$2\tau(p) = 2\tilde{\tau}(T_pM) + n^2 \|H\|^2 - \frac{1}{2} n^2 \|H\|^2 - \frac{1}{2} \sum_{r=n+1}^{m} (\sigma_{11}^r - \sigma_{22}^r - \cdots - \sigma_{nn}^r)^2$$
$$- 2 \sum_{r=n+1}^{m} \sum_{j=2}^{n} (\sigma_{1j}^r)^2 + 2 \sum_{r=n+1}^{m} \sum_{2 \le i < j \le n} \left(\sigma_{ii}^r \sigma_{jj}^r - (\sigma_{ij}^r)^2\right).$$

elde edilir. Diğer yandan

$$n^2 \|H\|^2 - \frac{1}{2} n^2 \|H\|^2 = \frac{1}{2} n^2 \|H\|^2$$

olduğu açıktır. Bu son ifade göz önüne alınırsa ve (4.8) eşitliğinde yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{1}{2} n^2 \|H\|^2 = 2\tau(p) - 2\tilde{\tau}(T_pM) + \frac{1}{2} \sum_{r=n+1}^{m} (\sigma_{11}^r - \sigma_{22}^r - \cdots - \sigma_{nn}^r)^2$$
$$+ 2 \sum_{r=n+1}^{m} \sum_{j=2}^{n} (\sigma_{1j}^r)^2 - 2 \sum_{r=n+1}^{m} \sum_{2 \le i < j \le n} \left(\sigma_{ii}^r \sigma_{jj}^r - (\sigma_{ij}^r)^2\right)$$

bulunur. Son ifadenin her iki tarafı 2'ye bölünürse

$$\frac{1}{4}\, n^2 \, \|H\|^2 = \tau(p) \; - \; \tilde{\tau}\big(T_pM\big) \; + \frac{1}{4} \sum_{r=n+1}^{m} (\sigma_{11}^r - \sigma_{22}^r - \cdots - \sigma_{nn}^r)^2$$
$$+ \sum_{r=n+1}^{m} \sum_{j=2}^{n} (\sigma_{1j}^r)^2 \; - \sum_{r=n+1}^{m} \sum_{2\le i<j\le n} \big(\sigma_{ii}^r \sigma_{jj}^r \; - \; (\sigma_{ij}^r)^2\big) \tag{4.9}$$

elde edilir.

Ayrıca (3.23)'den

$$\sum_{r=n+1}^{m} \sum_{2\le i<j\le n} \big(\sigma_{ii}^r \sigma_{jj}^r \; - \; (\sigma_{ij}^r)^2\big) \; = \sum_{2\le i<j\le n} \big(K_{ij} - \widetilde{K}_{ij}\,\big) \tag{4.10}$$

yazılabilir. Bu durumda (4.9) eşitliği (4.10) da kullanılırsa

$$\frac{1}{4}\, n^2 \, \|H\|^2 = \tau(p) \; - \; \tilde{\tau}\big(T_pM\big) \; + \frac{1}{4} \sum_{r=n+1}^{m} (\sigma_{11}^r - \sigma_{22}^r - \cdots - \sigma_{nn}^r)^2$$
$$+ \sum_{r=n+1}^{m} \sum_{j=2}^{n} (\sigma_{1j}^r)^2 - \sum_{2\le i<j\le n} \big(K_{ij} - \widetilde{K}_{ij}\,\big)$$

bulunur. Buradan

$$\frac{1}{4}\, n^2 \, \|H\|^2 \; - \; \frac{1}{4} \sum_{r=n+1}^{m} (\sigma_{11}^r - \sigma_{22}^r - \cdots - \sigma_{nn}^r)^2 \; - \sum_{r=n+1}^{m} \sum_{j=2}^{n} (\sigma_{1j}^r)^2$$
$$= \; \tau(p) - \sum_{2\le i<j\le n} K_{ij} \; - \; \tilde{\tau}\big(T_pM\big) - \sum_{2\le i<j\le n} \widetilde{K}_{ij}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece son ifadeden

$$\tau(p) - \sum_{2\le i<j\le n} K_{ij} \; = Ric(e_1) \quad ve \quad \tilde{\tau}\big(T_pM\big) - \sum_{2\le i<j\le n} \widetilde{K}_{ij} \; = \; \widetilde{Ric}_{T_pM}(e_1)$$

olur. Bu durumda son eşitlikten

$$Ric(e_1) \le \frac{1}{4}\, n^2 \, \|H\|^2 \; + \; \widetilde{Ric}_{T_pM}(e_1) - \sum_{r=n+1}^{m} \sum_{j=2}^{n} (\sigma_{1j}^r)^2$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{r=n+1}^{m}(\sigma_{11}^{r}-\sigma_{22}^{r}-\cdots-\sigma_{nn}^{r})^{2} \tag{4.11}$$

elde edilir. Burada herhangi bir birim vektör $e_1 = X \in T_p^1 M$ için, (4.6) eşitliği elde edilir.
Eğer $X = e_1$ alınırsa, (4.11) eşitliğinin eşitlik durumu sağlanır, ancak ve ancak

$$\sigma_{12}^{r}=\cdots=\sigma_{1n}^{r} \ \ ve \ \ \sigma_{11}^{r}=\sigma_{22}^{r}+\cdots+\sigma_{nn}^{r}, \ \ r\in\{n+1,\dots,m\} \tag{4.12}$$

sağlanmasıdır ve bu da (4.5)'e eşdeğerdir.
Diğer yandan $\forall\, X \in T_p^1 M$ için (4.6) eşitlik durumu sağlansın. Bu durumda (4.12)'ye göre her bir $r \in \{n+1,\dots,m\}$ için

$$\sigma_{ij}^{r}=0, \qquad i\neq j \tag{4.13}$$

$$2\sigma_{ii}^{r}=\sigma_{11}^{r}+\sigma_{22}^{r}+\cdots+\sigma_{nn}^{r}, \qquad i\in\{1,\dots,n\}, \tag{4.14}$$

elde edilir. Burada (4.14) ifadesinden $2\sigma_{11}^{r}=2\sigma_{22}^{r}=\cdots=2\sigma_{nn}^{r}=\sigma_{11}^{r}+\sigma_{22}^{r}+\cdots+\sigma_{nn}^{r}$ olur, böylece

$$(n-2)(\sigma_{11}^{r}+\sigma_{22}^{r}+\cdots+\sigma_{nn}^{r})=0$$

bulunur.
Burada $\sigma_{11}^{r}+\sigma_{22}^{r}+\cdots+\sigma_{nn}^{r}=0$ veya $n=2$ olmalıdır.
Eğer $\sigma_{11}^{r}+\sigma_{22}^{r}+\cdots+\sigma_{nn}^{r}=0$ ise (4.14)'e göre her $i\in\{1,\dots,n\}$ için $\sigma_{ii}^{r}=0$ elde edilir. Bu (4.13) ile birlikte her $i,j\in\{1,\dots,n\}$ ve $r\in\{n+1,\dots,m\}$ için $\sigma_{ij}^{r}=0$ olur, yani p total jeodezik bir noktadır.
$n=2$ ise, o zaman (4.14) ifadesinden $2\sigma_{11}^{r}=2\sigma_{22}^{r}=(\sigma_{11}^{r}+\sigma_{22}^{r})$ olur; ki bu da p'nin bir total umbilik nokta olduğunu gösterir. Ters kısmın ispatı benzer şekildedir.
Yukarıda verilen Teorem 4.1.2 göz önüne alınırsa aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 4.1.2. $\widetilde{M}$, $m-$boyutlu bir Riemann manifoldu ve M de $\widetilde{M}$ 'nın $n-$boyutlu bir altmanifoldu olsun. Bu durumda $X \in T_p^1 M$ için aşağıdaki ifadelerden herhangi ikisi bir diğerini gerektirir:
(a) (4.2.1) eşitsizliğinin eşitlik durumu bir X vektör alanı için sağlanır.
(b) $H(p)=0$.
(c) $X\in\mathcal{N}_p$.
(Hong, Matsumoto ve Tripathi, 2005).

$\widetilde{M}$, $m-$boyutlu bir Riemann manifoldu ve M de $\widetilde{M}$ 'nın $n-$boyutlu bir altmanifoldu olsun. T_pM teğet uzayının ortonormal bazı $\{e_1,\dots,e_n\}$ ve e_r, $(r=n+1,\dots,m)$ olmak üzere $T_p^{\perp}M$ normal uzayının ortonormal tabanı olan $\{e_{n+1}, \dots, e_m\}$'e ait olsun. K_{ij} ve $\widetilde{K}_{ij}$ sırasıyla $p \in M$ noktasında M altmanifoldunun ve $\widetilde{M}$ ambiyent manifoldunun e_i ve e_j vektörleri tarafından gerilen düzlem kesitinin kesit eğriliklerini göstersin. Bu durumda aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.1.3. $\widetilde{M}$, m −boyutlu bir Riemann manifoldu ve M de $\widetilde{M}$ ‘nın n −boyutlu bir altmanifoldu olsun. Bu durumda

$$\tau(p) \leq \frac{1}{2} n^2 \|H\|^2 + \tilde{\tau}(T_p M) \tag{4.15}$$

eşitsizliği vardır. Yukarıda verilen (4.15) eşitsizliğinin eşitlik durumu sağlanır gerek ve yeter koşul M total jeodeziktir (Oprea, 2005; Deng, 2009).

Diğer yandan aşağıdaki cebirsel lemma verilebilir:

Lemma 4.1.1. $(n > 1)$ olmak üzere $a_1, \dots, a_n$ reel sayıları için

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} {a_i}^2, \tag{4.16}$$

eşitsizliği vardır. Yukarıda verilen (4.16) eşitsizliğinin eşitlik durumu sağlanır gerek ve yeter koşul $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ sağlanmasıdır (Tripathi, 2003).

Yukarıda verilen Lemma 4.1.1 göz önüne alınırsa (4.13) eşitsizliği aşağıdaki gibi verilebilir:

Teorem 4.1.4. $\widetilde{M}$, m −boyutlu bir Riemann manifoldu ve M de $\widetilde{M}$ ‘nın n −boyutlu bir altmanifoldu olsun. Bu durumda $\forall p \in M$ noktasında

$$\tau(p) \leq \frac{n(n-1)}{2} \|H\|^2 + \tilde{\tau}(T_p M) \tag{4.17}$$

eşitsizliği vardır. Yukarıda verilen (4.17) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart p noktası bir total umbilik noktadır.

İspat. $p \in M$ noktasındaki bir ortonormal baz $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_m\}$ olsun öyle ki burada $e_1, \dots, e_n$ vektörleri $p \in M$ noktasında M ’ye teğet , e_{n+1} vektörü ortalama eğrilik vektörü $H(p)$’ ye paralel ve $A_{e_{n+1}}$ şekil operatörü köşegenleştirilebilir olsun. Bu durumda şekil operatörleri her $i, j = 1, \dots, n$ ve $r = n+2, \dots, m$ için

$$A_{e_{n+1}} = diag\,(\sigma_{11}^{n+1}, \sigma_{22}^{n+1}, \cdots, \sigma_{nn}^{n+1})\,, \tag{4.18}$$

$$A_{e_r} = (\sigma_{ij}^r)\,, \qquad izA_{e_r} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ii}^r = 0 \tag{4.19}$$

şeklindedir. Ayrıca (3.19) ifadesi göz önüne alınırsa

$$2\tau\,(p) = 2\tilde{\tau}\,(T_pM) + n^2\,\|H\|^2 - \sum_{i=1}^{n} (\sigma_{ii}^{n+1})^2 - \sum_{r=n+2}^{m} \sum_{i,j=1}^{n} (\sigma_{ij}^r)^2 \tag{4.20}$$

elde edilir. Burada Önerme 4.1.1 kullanılırsa

$$n\,\|H\|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (\sigma_{ii}^{n+1})^2 \tag{4.21}$$

bulunur. Diğer yandan (4.20) ve (4.21) ifadelerinden

$$\tau\,(p) \;\leq\; \frac{n(n-1)}{2}\|H\|^2 + \tilde{\tau}\,(T_pM) - \frac{1}{2}\sum_{r=n+2}^{m} \sum_{i,j=1}^{n} (\sigma_{ij}^r)^2 \tag{4.22}$$

yazılabilir. Dolayısıyla buradan (4.17) elde edilir.

Eğer (4.17) eşitsizliğinin eşitlik durumu sağlanırsa Lemma 4.1.1 ve (4.22) eşitsizliğinden

$$\sigma_{11}^{n+1} = \sigma_{22}^{n+1} = \cdots = \sigma_{nn}^{n+1} \;\; ve\; A_{e_r} = 0\,, r = n+2, \ldots\,, m$$

olduğu görülür. Bu ise $p \in M$ noktasının total umbilik nokta olduğunu gösterir. Tersi de benzer şekilde doğrudan görülebilir (Suceava, 2000).

Yukarıda verilen Teorem 4.1.4 göz önüne alınarak aşağıdakiler verilebilir:

Teorem 4.1.5. $\widetilde{M}$, m −boyutlu bir Riemann manifoldu ve M de $\widetilde{M}$ 'nın n −boyutlu bir altmanifoldu olsun. Bu durumda her $p \in M$ noktasında

$$\tau_N(p) \leq \|H\|^2 + \tilde{\tau}_N\,(T_pM) \tag{4.23}$$

eşitsizliği vardır. Burada τ_N, M altmanifoldunun p noktasındaki normalleştirilmiş skalar eğriliğini ve $\tilde{\tau}_N\ (T_pM)$ de $\widetilde{M}$ ambiyent manifoldunda T_pM'nin normalleştirilmiş skalar eğriliğini göstermektedir. Yukarıda verilen (4.23) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter koşul p nin bir total umbilik nokta olmasıdır (Suceava, 2000).

Daha sonra kullanılmak üzere bir diğer cebirsel lemma aşağıdaki gibidir:

Lemma 4.1.2. Eğer $n > k \geq 2$ ve $a_1, a_2, \cdots, a_n$, a birer reel sayı ise

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = (n-k+1)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + a\right) \tag{4.24}$$

olmak üzere

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq k} a_i a_j \geq a$$

eşitsizliği vardır. Bu son eşitsizliğin eşitlik durumu sağlanır gerek ve yeter koşul

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = a_{k+1} = \cdots = a_n$$

olmasıdır.

İspat. Cauchy-Schwartz eşitsizliğine göre,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq (n-k+1)\big((a_1 + a_2 + \cdots a_k)^2 + a_{k+1}^2 + \cdots + a_n^2\big) \tag{4.25}$$

yazılabilir. Burada (4.24) ve (4.25) ifadeleri göz önüne alınırsa

$$\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2 + a \ \leq (a_1 + a_2 + \cdots a_k)^2 + a_{k+1}^2 + \cdots + a_n^2 \tag{4.26}$$

bulunur. Böylece (4.26) eşitsizliği

$$2 \sum_{1 \le i < j \le k} a_i a_j \ge a$$

şeklindedir. Yukarıda verilen son eşitsizliğin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = a_{k+1} = \cdots = a_n$$

sağlanmasıdır.

4.2. Reel Uzay Formlarının Altmanifoldları için Bazı Eşitsizlikler

$\mathbb{R}^m(c)$, $\tilde{g}$ Riemann metriği ile donatılmış m −boyutlu bir reel uzay formu ve M de $\mathbb{R}^m(c)$'nin n −boyutlu bir altmanifoldu olsun. Burada hem $\mathbb{R}^m(c)$' nin $\tilde{g}$ metriği hem de M üzerine indirgenmiş g metriği $\langle .,. \rangle$ ile gösterilsin. Ayrıca T_pM teğet uzayının ortonormal tabanı $\{e_1, \dots, e_n\}$ ve e_r, $(r = n+1, \dots, m)$ olmak üzere $T_p^{\perp}M$ normal uzayının ortonormal tabanı olan $\{e_{n+1}, \dots, e_m\}$'e ait olsun. K_{ij} ve $\widetilde{K}_{ij}$ sırasıyla M altmanifoldunun ve $\mathbb{R}^m(c)$ reel uzay formunun bir p noktasında e_i ve e_j tarafından gerilen düzlem kesitinin kesit eğriliklerini ve

$$\sigma_{ij}^r = \langle \sigma(e_i, e_j), e_r \rangle \text{ ve } \|\sigma\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \langle \sigma(e_i, e_j), \sigma(e_i, e_j) \rangle$$

olmak üzere (4.1.3) ifadesinden

$$K_{ij} = \widetilde{K}_{ij} + \sum_{r=n+1}^{m} (\sigma_{ii}^r \sigma_{jj}^r - (\sigma_{ij}^r)^2)$$

yazılabilir. Burada $\mathbb{R}^m(c)$ nin bir reel uzay formu olduğu göz önüne alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$2\tau(p) = n^2 \|H\|^2 - \|\sigma\|^2 + n(n-1)\, c \tag{4.27}$$

bulunur. Burada $2\tau(p)$, M altmanifoldunun skalar eğriliğini göstermektedir. Ayrıca

$$\tilde{\tau}(T_pM) - \widetilde{K}(\Pi_2) = \frac{1}{2} n\,(n-1)\,c - c = \frac{1}{2}\,(n+1)(n-2)\,c$$

elde edilir (Özgür ve Tripathi, 2008).

Sıradaki teorem bir reel uzay formunun altmanifoldları için Ricci eğriliği ile ortalama eğriliği arasındaki ilişkiyi vermektedir:

Teorem 4.2.1. $\mathbb{R}^m(c)$, $\tilde{g}$ Riemann metriği ile donatılmış $m-$boyutlu bir reel uzay formu ve M de $\mathbb{R}^m(c)$‘nin $n-$boyutlu bir altmanifoldu olsun. Bu durumda

(a) $X \in T_p^1 M$ için,

$$\|H\|^2 \geq \frac{4}{n^2}\{Ric(X) - (n-1)c\} \tag{4.28}$$

sağlanır.

(b) Eğer $H(p) = 0$ ise, bu durumda $X \in T_p^1 M$ için (4.28) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter koşul $X \in \mathcal{N}_p$ olmasıdır.

(c) Her $X \in T_p^1 M$ için (4.28) eşitsizliğinin eşitlik durumu sağlanması için gerek ve yeter koşul ya p bir total jeodezik nokta ya da $n = 2$ ve p ’nin bir total umbilik nokta olmasıdır (Chen, 1999).

İspat. M, $\mathbb{R}^m(c)$ reel uzay formunun n boyutlu bir altmanifoldu ise, o halde $\forall X \in T_p^1 M$ için,

$$\widetilde{Ric}_{T_pM}(X) = (n-1)c$$

yazılabilir. Burada yukarıdaki son eşitlik (4.6) ifadesinde kullanılırsa (4.28) eşitsizliği elde edilir.

4.3. Hemen Hemen Hermitiyen Manifoldların Altmanifoldları

Tanım 4.3.1. $(\widetilde{M}, J, \tilde{g})$ bir hemen hemen Hermitiyen manifold, M de $\widetilde{M}$’ nın bir Kaehler altmanifoldu olsun. Bu durumda herhangi bir $X \in T_pM$ için

$$JX = PX + FX \tag{4.29}$$

yazılabilir. Burada PX, JX vektör alanının teğet kısmını gösterirken FX de JX vektör alanının normal kısmını göstermektedir. Ayrıca $p \in M$ noktasında P’ nin normunun karesi

$$\|P\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \langle Pe_i, e_j \rangle^2 ,$$

ile tanımlanır. Burada $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, T_pM tanjant uzayının bir ortonormal bazını göstermektedir.

Hemen hemen Hermitiyen manifoldlarda onun hemen hemen kompleks yapısı J, bir vektörü ona dik olan başka bir vektöre dönüştürür. Ambiyent manifoldun J hemen hemen kompleks yapının etkisi altında olan bir altmanifoldun tanjant demetinin davranışına göre ambiyent manifoldun yani hemen hemen Hermitiyen manifoldun holomorfik (invaryant) ve total reel (anti-invaryant) olmak üzere iki alt sınıfı mevcuttur. Invaryant altmanifoldlarda, altmanifoldun teğet uzayı J hemen hemen kompleks yapısının etkisi altında invaryant kalırken, anti-invaryant altmanifoldlarda altmanifoldun teğet uzayı normal uzaya dönüşür. Böylece eğer $F = 0$ ise M invaryant, $P = 0$ ise M anti-invaryant altmanifoldtur.

1978 yılında A. Bejancu, invaryant ve anti-invaryant kavramlarını genelleştirerek CR-altmanifold kavramını tanımladı. Böylece eğer M altmanifoldunun TM tanjant demeti bir holomorfik (invaryant) distribüsyonun ve total reel (anti-invaryant) distribüsyonun direkt toplamı olarak ayrıştırılabiliyorsa yani

$$TM = D^1 \oplus D^0$$

ise M'ye bir CR-altmanifold denir. Burada $J(D^1) = D^1$ ve $J(D^0) \subset (T_pM)^{\perp}$ şeklindedir. Gerçekten, $D^1 = \ker(F)$ ve $D^0 = \ker(P)$ olarak alınırsa bu durum sağlanır. Dolayısıyla invaryant ve anti-invaryant altmanifoldlar sırasıyla $D^0 = \{0\}$ ve $D^1 = \{0\}$ şartını sağlayan bir CR-altmanifoldtur.

Diğer yandan, eğer hemen hemen Hermitiyen manifoldun bir M altmanifoldu

$$D = TM \cap J(TM)$$

şeklinde bir holomorfik distribüsyon içerirse bu durumda M generic altmanifold olarak adlandırılır. Böylece generic altmanifold kavramı CR-altmanifold kavramının da bir genelleştirilmişidir.

1990 yılında, hemen hemen Hermitiyen manifoldların invaryant ve anti-invaryant altmanifoldlarının bir diğer önemli genelleştirilmişi olan slant altmanifoldlar B.-Y. Chen tarafından tanımlanmıştır. Burada hemen hemen Hermitiyen manifoldun bir M altmanifoldu üzerinde $0 \neq X_p \in T_pM$ şartını sağlayan bir vektör için JX_p ile T_pM arasındaki $\theta(X_p)$' ye Wirtinger açısı denir. Böylece Chen'in vermiş olduğu tanıma göre eğer Wirtinger açısı $p \in M$ ve $X_p \in T_pM$ seçilişinden bağımsız ise bu durumda M, bir slant altmanifold olarak tanımlanır. Bu durumda invaryant ve anti-invaryant altmanifoldlar sırasıyla $\theta = 0$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ şartını sağlayan bir slant altmanifoldlardır.

Bir hemen hemen Hermitiyen manifoldların slant altmanifoldları, $\lambda \in [0,1]$ reel sayısı için

$$P^2 + \lambda^2 I = 0$$

şartı ile karakterize edilir. Burada PX, $\forall\, X \in TM$ için JX' in teğet kısmını ve I ise birim dönüşümü göstermektedir.

Diğer yandan, 1990 yılında G. S. Ronsse P^2 sınırlı simetrik lineer operatörü kullanarak invaryant, anti-invaryant, CR ve slant altmanifold kavramlarını birleştirmiştir (Ronsse, 1990).

$(\widetilde{M}, J, \tilde{g})$ bir hemen hemen Hermitiyen manifold, M de $\widetilde{M}$' nın bir altmanifoldu olsun. T_pM üzerindeki P^2 operatörü simetriktir, yani her $\forall\, X, Y \in T_pM$ için

$$\langle P^2X, Y\rangle = \langle X, P^2Y\rangle$$

sağlanır. Böylece özdeğerler reeldir ve köşegenleştirilebilir. Ayrıca özdeğerler -1 ve 0 ile sınırlıdır. Her bir $p \in M$ için

$$D_p^{\lambda} = \ker\,(P^2 + \lambda^2(p)I)_p$$

alınabilir. Burada I birim dönüşüm ve $\lambda(p)$ de kapalı $[0,1]$ aralığına ait reel sayıdır öyle ki P_p^2 nin özdeğeri $-\lambda^2(p)$ dir. Ayrıca P_p^2 simetrik ve köşegenleştirilebilir olduğundan öyle q sayıları vardır ki P_p^2'nin farklı özdeğerleri $-\lambda_1^2(p), -\lambda_2^2(p), \dots, -\lambda_q^2(p)$ şeklindedir ve T_pM, birbirlerine ortogonal olan $P\,-$invaryant özuzayların direkt toplamı olarak yazılabilir, yani

$$T_pM = D_p^{\lambda_1} \oplus D_p^{\lambda_2} \oplus \dots \oplus D_p^{\lambda_q}$$

sağlanır. Eğer $\lambda_i(p) > 0$, $i \in \{1,2,\dots,q\}$ ise, bu durumda $D_p^{\lambda_i}$ çift boyutludur. Ayrıca $D_p^1 = \ker\,(F_p)$ ve $D_p^0 = \ker\,(P_p)$ şeklindedir. Burada eğer D_p^1 maksimal $J\,-$invaryant iken D_p^0 da T_pM nin maksimal anti $J\,-$invaryant altmanifoldudur.

Tanım 4.3.2. M, $\widetilde{M}$ hemen hemen Hermitiyen manifoldunun bir altmanifoldu olsun. M üzerinde $(0,1)$ açık aralığında tanımlı $k\,-$tane $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ fonksiyonları olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanırsa M ye $\widetilde{M}$' nın bir generic altmanifoldu denir.

(i) $p \in M$ noktasında , P^2'nin farklı özdeğerleri $-\lambda_1^2(p), \dots, -\lambda_k^2(p)$ olmak üzere

$$T_pM = D_p^1 \oplus D_p^0 \oplus D_p^{\lambda_1} \oplus \cdots\; D_p^{\lambda_k}$$

sağlanır, burada $D_p^1 = \ker\big(F_p\big), D_p^0 = \ker\,(P_P)$ ve

$$D_p^{\lambda_i} = \ker\,(P^2 + {\lambda_i}^2(p)\, I)_p\,, \qquad i \in \{1, \dots, k\}$$

şeklindedir.

(ii) $D_p^1, D_p^0, D_p^{\lambda_1}, \dots, D_p^{\lambda_k}$'nin boyutları $p \in M$ noktasının seçilişinden bağımsızdır (Ronsse,1990).

Buna ilaveten, eğer her bir λ_i sabitse bu durumda M'ye anti-CR altmanifold denir. Eğer $k = 0$ ise, yani (i) koşulu sağlanırsa $T_pM = D_p^1 \oplus D_p^0$ şeklinde yazılabilir ve böylece (i) şartı (ii) şartını sağlar (Tripathi, 1996).

Diğer yandan, yukarıdaki son tanımda (ii) şartı, M üzerinde birbirlerine dik olan $P-$invaryant diferansiyellenebilir distribüsyonları

$$D^\lambda = \bigcup_{p \in M} D_p^\lambda \qquad \lambda \in \{0,1,\lambda_1, \cdots, \lambda_k\}$$

tanımlanmasını mümkün kılar, öyle ki $T_pM = D^1 \oplus D^0 \oplus D^\lambda \oplus \cdots \oplus D^{\lambda_k}$ şeklindedir.

Dolayısıyla bir hemen hemen Hermitiyen manifoldun generic bir altmanifoldu için aşağıdaki şekilde bir sınıflandırma verilebilir:

1. Eğer $k = 0$ ise M bir CR-altmanifold (Bejancu, 1986),
2. Eğer $k = 0$ ve $D^0 = \{0\}$ ise M bir holomorfik (invaryant) altmanifold (Yano ve Kon, 1984),
3. Eğer $k = 0$ ve $D^1 = \{0\}$ ise total reel (anti-invaryant) altmanifolddur (Yano ve Kon, 1976).

4.4. Chen-Ricci Eşitsizliği

$\widetilde{M}(f_1, f_2)$ genelleştirilmiş kompleks uzay formu ve M de $\widetilde{M}(f_1, f_2)$ nın $n-$boyutlu bir altmanifoldu olsun. Bu durumda

$$\widetilde{Ric}_{(T_pM)}(X) = (n-1)f_1 + 3f_2\|PX\|^2\,, \quad X \in T_p^1M \tag{4.30}$$

şeklindedir. Eğer M, $\widetilde{M}$ hemen hemen Hermitiyen manifoldunun bir generic altmanifoldu ise bu durumda $X \in TM$ için

$$X = U^1X + U^0X + U^{\lambda_1}X + \cdots + U^{\lambda_k}X$$

yazılabilir. Burada $U^1, U^0, U^{\lambda_1}, \cdots, U^{\lambda_k}$, TM'nin sırasıyla $D^1, D^0, D^{\lambda_1}, \cdots, D^{\lambda_k}$ üzerindeki ortogonal izdüşüm operatörleridir. Ayrıca

$$P^2X = -U^1X - {\lambda_1}^2\left(U^{\lambda_1}X\right) - \cdots - {\lambda_k}^2\left(U^{\lambda_k}X\right) \tag{4.31}$$

ifadesi

$$\|PX\|^2 = \langle PX, PX\rangle = -\langle P^2X, X\rangle = \sum_{\lambda\in\{1,\lambda_1,\cdots,\cdots,\lambda_k\}} \lambda^2\left\|U^\lambda X\right\|^2 \tag{4.32}$$

eşitliğini verir. Özel olarak, eğer M, bir θ-slant altmanifold ise, bu durumda $D^1 = D^0 = \{0\}, k = 1$ bulunur. Böylece her $X \in T_pM$ birim vektörü için

$$\|PX\|^2 = \cos^2\theta \tag{4.33}$$

elde edilir.

Teorem 4.4.1. M, $\widetilde{M}$'nın n −boyutlu bir altmanifoldu ve $X \in T_p^1M$ olsun. Bu durumda aşağıdaki tablo verilebilir:

(a)

Tablo 4.1.

	$\widetilde{M}$	M	Eşitsizlikler
(1)	$\widetilde{M}(f_1, f_2)$		$Ric(X) \leq \frac{1}{4}n^2\|H\|^2 + (n-1)f_1 + 3f_2\|PX\|^2$
(2)	$\widetilde{M}(f_1, f_2)$	generic	$Ric(X) \leq \frac{1}{4}n^2\|H\|^2 + (n-1)f_1 + 3f_2 \sum_{\lambda\in\{1,\lambda_1,\cdots,\cdots,\lambda_k\}} \lambda^2\left\|U^\lambda X\right\|^2$
(3)	$\widetilde{M}(f_1, f_2)$	θ-slant	$Ric(X) \leq \frac{1}{4}n^2\|H\|^2 + (n-1)f_1 + 3f_2cos^2\theta$
(4)	$\widetilde{M}(f_1, f_2)$	tamamen reel	$Ric(X) \leq \frac{1}{4}n^2\|H\|^2 + (n-1)f_1$
(5)	$\widetilde{M}(f_1, f_2)$	invaryant	$Ric(X) \leq \frac{1}{4}n^2\|H\|^2 + (n-1)f_1 + 3f_2$
(6)	$\widetilde{M}(c, \alpha)$		$Ric(X) \leq \frac{1}{4}\{n^2\|H\|^2 + (n-1)(c+3\alpha) + 3(c-\alpha)\|PX\|^2\}$
(7)	$\widetilde{M}(c, \alpha)$	generic	$Ric(X) \leq \frac{1}{4}\{n^2\|H\|^2 + (n-1)(c+3\alpha)\} + \frac{1}{4}\left\{3(c-\alpha)\sum_{\lambda\in\{1,\lambda_1,\cdots,\cdots,\lambda_k\}} \lambda^2\left\|U^\lambda X\right\|^2\right\}$
(8)	$\widetilde{M}(c, \alpha)$	θ-slant	$Ric(X) \leq \frac{1}{4}\{n^2\|H\|^2 + (n-1)(c+3\alpha) + 3(c-\alpha)cos^2\theta\}$

Tablo 4.1. (devamı)

	$\widetilde{M}$	M	Eşitsizlikler
(9)	$\widetilde{M}(c,\alpha)$	θ-slant	$Ric(X) \leq \frac{1}{4}\{n^2\|H\|^2 + (n-1)(c+3\alpha) + 3(c-\alpha)cos^2\theta\}$
(10)	$\widetilde{M}(c,\alpha)$	tamamen reel	$Ric(X) \leq \frac{1}{4}\{n^2\|H\|^2 + (n-1)(c+3\alpha)\}$
(11)	$\widetilde{M}(c,\alpha)$	invaryant	$Ric(X) \leq \frac{1}{4}\{n^2\|H\|^2 + (n+2)c + 3(n-2)\alpha\}$
(12)	$\widetilde{M}(4c)$		$Ric(X) \leq \frac{1}{4}n^2\|H\|^2 + (n-1)c + 3c\|PX\|^2$
(13)	$\widetilde{M}(4c)$	generic	$Ric(X) \leq \frac{1}{4}n^2\|H\|^2 + (n-1)c + 3c\sum_{\lambda\in\{1,\lambda_1,\cdots,\cdots,\lambda_k\}} \lambda^2\left\|U^\lambda X\right\|^2$
(14)	$\widetilde{M}(4c)$	θ-slant	$Ric(X) \leq \frac{1}{4}n^2\|H\|^2 + (n-1)c + 3ccos^2\theta$
(15)	$\widetilde{M}(4c)$	tamamen reel	$Ric(X) \leq \frac{1}{4}n^2\|H\|^2 + (n-1)c$

(b) (Tablo 4.1.)' den $X \in T_p^1M$ için eşitsizliklerin eşitlik durumu sağlanır gerek ve yeter şart

$$\begin{cases} \sigma\,(X,Y) = 0\,, & tüm\ Y \in T_pM\ için\ X'e\ ortogonal \\ 2\sigma\,(X,X) = nH(p) \end{cases}$$

sağlanmasıdır. Eğer $H(p) = 0$ ise, bu durumda $X \in T_p^1M$, (Tablo 4.1.)'den bulunan tablodaki eşitsizliklerin eşitlik durumunu sağlar ancak ve ancak $X \in \mathcal{N}_p$ dir.

(c) Tabloda verilen $(1)-(14)$ eşitsizliklerinin eşitlik durumu her $X \in T_p^1M$ için sağlanır ancak ve ancak

p' ye tamamen jeodezik bir noktadır ya da $n = 2$ ve p tamamen umbilik noktadır.

İspat. (4.6) ifadesinde (4.30) denklemi kullanılırsa tabloda (1) eşitsizliği bulunur. (1) eşitsizliğinde (4.31) kullanılarak (2) eşitsizliği bulunur. Daha sonra (1) eşitsizliğinde (4.32)'yi kullanarak (3) eşitsizliği elde edilir. (3) eşitsizliğinde $\theta = \frac{\pi}{2}$ ve 0 alınırsa sırasıyla (4) ve (5) eşitsizlikleri elde edilir. $(1)-(5)$ eşitsizliklerinde sırasıyla $f_1 = {}^{(c+3\alpha)}/_4$ ve $f_2 = {}^{(c-\alpha)}/_4$ yerine konulursa $(6)-(10)$ eşitsizlikleri elde edilir. Benzer şekilde $(1)-(4)$ eşitsizliklerinde sırasıyla $f_1 = 4c = f_2$ yerine yazıldığında $(11)-(14)$ eşitsizlikleri elde edilir.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bir Riemann manifoldun Ricci eğriliği ile altmanifoldunun Ricci eğriliği arasındaki ilişkiyi veren bir eşitsizlik verilmiştir. Ayrıca bu eşitsizliğin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şartlar belirlenmiştir.

Benzer şekilde bir Riemann manifoldun skalar eğriliği ile altmanifoldunun skalar eğriliği ve ortalama eğriliği içeren bir eşitsizlik verilmiştir. Ayrıca bu eşitsizliğin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şartlar verilmiştir.

Özel olarak bir reel uzay formu ve üzerindeki Ricci eğriliği ele alınmış olup bu uzay formunun altmanifoldu üzerindeki Ricci eğriliğini içeren bir temel eşitsizlik kurulmuştur. Bu eşitsizliğin de eşitlik durumunun olması durumunda gerek ve yeter şartlar ortaya koyularak bazı karakterizasyonlar elde edilmiştir.

Ayrıca bir hemen hemen Hermitiyen manifoldun bir Riemann altmanifoldu ele alınmış olup ambiyent uzay üzerindeki hemen hemen kompleks yapı göz önüne alınarak bu altmanifoldun invaryant, anti-invaryant, CR-altmanifold, slant ve generic olması ile ilgili bir sınıflandırma verilmiştir.

KAYNAKLAR

Bejancu, A., (1986), Geometry of CR-submanifolds,Mathematics and its applications, D.Reidel Publishing Co., Dordrecht.

Blair, D.E.; Chen, B.Y., (1973), On CR-submanifolds of Hermitian manifolds, Math. 34, 353–363.

Calabi, E.; Eckmann, B., (1953), A class of compact, complex manifolds which are not algebraic, Annals of Mathematics . İkinci Seri. **58** (3): 494–500.

Chen, B.-Y. ve Okumura, M., (1973), Scalar Curvature, Inequality and Submanifold, Proc. Amer. Math. Soc., 605-608.

Chen, B.Y., (1995), A Riemannian invariant and its applications to submanifold theory, 17-26.

Chen, B.-Y., (1996), A General Inequality for Submanifolds in Complex Space Forms and Its Applications, Archiv. Math. , 519-528.

Chen, B.Y., Yano,K., (1996), On submanifolds of submanifolds of a Riemannian manifold, J.Math.Soc., Japan, 548-554.

Chen, B.Y., (1996), Mean curvature and shape operator of isometric immersions in real space form, Glasgow Math. J. 38, 87-97.

Chen, B.Y., (1998), Strings of Riemannian invariants,inequalities,ideal immersions and their applications, The Third Pacific Rim Geometry Conference, Cambridge.

Chen, B.Y., (1999), Relations between Ricci curvature and shape operator for submanifolds with arbitrary codimensions, Glasgow Math. J. 41, 33-41.

Chen, B.Y., (2000), On Ricci curvature of isotropic and Langrangian submanifolds in complex space forms, Arch. Math. (Basel) 74, 154-160.

Chen. B.Y., (2000), Rıemannıan submanifolds, in Handbook of Didderential Geometry, Amsterdam, 187-418.

Chen. B.Y., (2000), Rıemannıan submanifolds, Michigan State University, Michigan.

Chen, B.-Y., (2001), Riemannian Geometry of Lagrangian Submanifolds, Taiwan. J. Math. , 681-723.

Chen, B.Y., (2011), Pseudo-Riemannian Geometry,δ-invariants and applications, Michigan State University, USA.

Deng, S., (2009), An improved Chen-Ricc inequality,International Electronic Journal of Geometry, 39-45.

Gauss, C.F., (1828), Disquisitiones generales circa superficies curvas, Göttingen, Dieterich.

Hong, S., Matsumoto K., Tripathi M.M., (2005), Certain basic inequalities for submanifols of locally conformal Kaehler space forms, Sci Univ, Tokyo.

Oprea, T.(2005), On a geometric inequality, arXiv:math/0511088.

Özgür, C., Tripathi, M.M., (2008), On submanifolds satisfying Chen's equality in a real space form,Arab. J. Sci. Eng. Sect. A Sci., 321-330.

Ronsse, G.S., (1990), Generic and skew CR-submanifolds of a Kaehler manifold,Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 127-141.

Shen, Z., (1993), On complete manifolds of nonnegative kth-Ricci curvature, Trans. Amer. Math. Soc. 338, 289-310.

Suceava, B., (1999), Some remarks on B.Y. Chen's inequality involving classical inbariants,An. Ştiint. Univ. Al. I. Cuza Iaşi. Mat., 405-412.

Şahin, B., (2012), Manifoldların Diferansiyel Geometrisi, 1. Cilt, Nobel Akademik Yayın. Eğt. Dan. Tic. Ltd. Şti.

Tripathi, M.M., (1996), Some characterizations of CR-submanifolds of generalized complex space forms, 135-138.

Tripathi, M.M., Kim, J.S, Kim, S.-B, (2002), A basic inequality for submanifolds in locally conformal almost cosymplectic manifolds,Proc. Indian Acad. Sci., 415-423.

Tripathi, M.M., (2003), Certain basic inequalities for submaniflds in $(\mathcal{K}, \mu)$-spaces, Recent advances in Riemannian and Lorentzian geometries, 187-202.

Yano K., Kon M., (1976), Anti-invariant submanifolds, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, New York, Basel.

Yano K., Kon M., (1984), Structures on manifolds, Series in Pure Mathematics, 3. World Scientific Publishing Co., Singapore.

Yu., V., (1996), Rovenskii, Submanifolds with restrictions on q-Ricci curvature, New developments in differential geometry, Budapest 1996, 375-388, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.

Wu., H., (1987), Manifolds of partially positive curvature, Indiana Univ. Math. J. 36, no. 3, 525-548.

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
www.mersin.edu.tr