

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ**



**KAYMA DEFORMASYONLU FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ
NANOKİRİŞLERİN YEREL OLMAYAN SONLU ELEMANLAR
FORMÜLASYONU İLE MEKANİK ANALİZLERİ**

Hayri Metin NUMANOĞLU

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ

ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

EKİM 2024

ANTALYA

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ**



**KAYMA DEFORMASYONLU FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ
NANOKİRİŞLERİN YEREL OLMAYAN SONLU ELEMANLAR
FORMÜLASYONU İLE MEKANİK ANALİZLERİ**

Hayri Metin NUMANOĞLU

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ

ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

EKİM 2024

ANTALYA

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KAYMA DEFORMASYONLU FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ
NANOKİRİŞLERİN YEREL OLMAYAN SONLU ELEMENLAR
FORMÜLASYONU İLE MEKANİK ANALİZLERİ**

**Hayri Metin NUMANOĞLU
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ
ANABİLİM DALI
DOKTORA TEZİ**

EKİM 2024

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KAYMA DEFORMASYONLU FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ
NANOKİRİŞLERİN YEREL OLMAYAN SONLU ELEMANLAR
FORMÜLASYONU İLE MEKANİK ANALİZLERİ

Hayri Metin NUMANOĞLU
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ
ANABİLİM DALI
DOKTORA TEZİ

Bu tez 01/10/2024 tarihinde jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Ömer CİVALEK (Danışman)
Prof. Dr. Mehmet AVCAR
Prof. Dr. Hakan ERSOY
Prof. Dr. Mustafa Özgür YAYLI
Doç. Dr. Bekir AKGÖZ

ÖZET

KAYMA DEFORMASYONLU FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ NANOKİRİŞLERİN YEREL OLMAYAN SONLU ELEMANLAR FORMÜLASYONU İLE MEKANİK ANALİZLERİ

Hayri Metin NUMANOĞLU

Doktora Tezi, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ömer CİVALEK

Ekim 2024; 204 sayfa

Son 20 yıllık dönemde nano ve mikro ölçek teknolojisindeki gelişmelerin dikkat çekmesinden dolayı bu ölçekteki yapı ve sistemlerin tasarımı önem kazanmıştır. Nano ve mikro ölçekli yapıların mekanik davranışları, yapının karakteristik iç uzunlukları nedeniyle klasik elastisite teorileri ile anlaşılamamaktadır ve bu sorunun çözümü için yapının boyut etkisine bağlı çeşitli yüksek mertebeden sürekli ortam formülasyonları geliştirilmiştir. Ayrıca, yapısal elemanlarda kayma etkisine dayanan çözümleme sonuçlarının yapının mekanik davranışı hakkında daha gerçekçi sonuçlar verdiği bilinmektedir. Bu düşünceyle, bu tez çalışması tek doğrultulu, küçük ölçekli ve fonksiyonel dereceli yapıların kayma etkisine ve yerel olmayan elastisite teorisine dayanan titreşim davranışlarını araştırmaktadır.

İlk olarak, nano ölçekli fonksiyonel dereceli kirişlerin temel kayma etkisini açıklayan Timoshenko kiriş teorisine göre yerel olmayan titreşim analizi konu alınmıştır. Ardından, eksenel çubuklarda kayma etkisini göz önüne alan Love-Bishop çubuk teorisi kullanılarak bahsi edilen yapısal eleman modelinin boyuna serbest titreşimi çalışılmıştır. Bahsi edilen yapısal elemanların sıcaklık ve/veya elastik zemin gibi çevresel etkiler altında olduğu varsayılmıştır. Bunlara ek olarak, eğilme etkileri kayma deformasyonuna dayanan fonksiyonel derecelendirilmiş nanoölçekli çerçevelerin serbest titreşimi de incelenmiştir. Mekanik davranışın daha doğru belirlenebilmesi için fonksiyonel derecelendirilmiş nanoyapının tarafsız eksenini de göz önünde bulundurulmuştur.

Mekanik analizlerin tamamında yönetici denklemler varyasyon cebirine dayalı elde edilmiştir. Probleme etkiyen parametrelerin oldukça fazla olması analitik çözümü zorlaştırdığından, bir sonlu eleman formülasyonu geliştirilmiştir ve mekanik analizin çözümünde kullanılmıştır. Genel sonlu eleman analizi bazı yerel olmayan titreşim analizlerinde uygun olmayan sonuçlar verdiği için modifiye edilmiştir.

Sayısal uygulamalar için, bahsi edilen atomik ölçekli yapı modellerinin serbest titreşim frekansları farklı parametreler altında tablo ve grafikler ile sunulmuştur. Sayısal sonuçların detaylı tartışmaları verilmiştir ve son olarak elde edilen en genel sonuçlar sıralanmıştır. Özellikle tez kapsamında geliştirilmiş sonlu eleman formülasyonlarının analitik çözümler ve önceki literatür araştırmaları ile kıyaslamaları yapıldığında oldukça başarılı sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir. Bu tez çalışması ile nano ve mikro ölçekli cihaz ve sistemlerin konfigürasyonunda rol oynayan tek doğrultulu kompozit yapıların farklı

etkiler altındaki mekanik davranışlarının sayısal bir modelleme aracılığıyla anlaşılması amaçlanmıştır.

ANAHTAR KELİMELEER: Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme, Kiriş, Sonlu elemanlar, Titreşim, Yerel olmayan elastisite.

JÜRİ: Prof. Dr. Ömer CİVALEK

Prof. Dr. Mehmet AVCAR

Prof. Dr. Hakan ERSOY

Prof. Dr. Mustafa Özgür YAYLI

Doç. Dr. Bekir AKGÖZ



ABSTRACT

MECHANICAL ANALYSES OF SHEAR DEFORMABLE FUNCTIONALLY GRADED NANOBEMS BY USING NONLOCAL FINITE ELEMENT FORMULATION

Hayri Metin NUMANOĞLU

PhD Thesis in Civil Engineering

Supervisor: Prof. Dr. Ömer CİVALEK

October 2024; 204 pages

In the last 20 years, the design of structures and systems at this scale has gained importance since the developments at the nano/micro scale technology remarked. The mechanical behaviours of nano and micro scaled structures are not understood by using classical elasticity theory due to characteristic internal lengths of structure. Therefore, various higher-order continuum mechanics formulations depending on the size-effect of nano/micro structure are developed. Additionally, it is known that the results of analysis based on the shear effect in the structural elements present more realistic results about the mechanical behavior of structure. With this in motivation, this thesis study has investigated the shear-dependent and atomic size-dependent vibrational behavior of one-dimensional, small-scaled, and functionally graded structures. The nonlocal elasticity theory has been formulated to consider the atomic size dependency.

Firstly, nonlocal vibration analysis of functionally graded nanobeams according to Timoshenko beam theory, which is fundamental shear deformable beam theory, has been examined. Then, the longitudinal free vibration of related structural element model has been studied by employing the Love-Bishop rod theory that considers the shear effect in the axial rods. It is assumed that the related structural element model subjected to a thermal and/or elastic environment. In addition to these, free vibration of functionally graded nanoframes whose bending effects are based on fundamental shear deformation have been also investigated. In order to determine the mechanical behavior more accurately, the neutral axis of the functionally graded nanostructure has also been considered.

In the whole of mechanical analyses, the governing equations have been obtained based on the variational algebra. Since the large number of parameters affecting the problem complicates the analytical solution, a finite element formulation has been developed and used in the solution of mechanical analysis. The general formulation of finite element analysis has been modified since it gives inappropriate results for some nonlocal mechanical analysis problems.

For the numerical applications, free vibration frequencies of related structures have been presented with tables and graphics under different parameters. Detailed discussions of numerical results are given and finally, the most general results are outlined. When the comparisons are performed with analytical solutions and previous literature research, it has been observed that the finite element formulations developed

within the scope of thesis has attained very successful results. With this thesis study, it is aimed to understand the mechanical behavior under different effects of one-dimensional composite structures that play a role in the configuration of nano and micro-scale devices and systems by means of a numerical modelling.

KEYWORDS: Beam, Finite elements, Functionally graded material, Nonlocal elasticity, Vibration.

COMMITTEE: Prof. Dr. Ömer CİVALEK

Prof. Dr. Mehmet AVCAR

Prof. Dr. Hakan ERSOY

Prof. Dr. Mustafa Özgür YAYLI

Assoc. Prof. Dr. Bekir AKGÖZ

ÖNSÖZ

İnsanların kullanıma aldıkları cihaz ve sistemler günden güne boyut olarak küçülürken büyük işlemci hızlarına ve kapasitelerine ulaşmaktadır. Bütün bu teknolojik kazanımların arkasında nano-elektro-mekanik sistem (NEMS) teknolojisinin çalışmalarının bulunduğu reddedilemez bir gerçektir. Bir veya iki boyutlu nano ölçekli bileşenler bu sistemlerin temel yapıtaşlarını teşkil ederler. Örneğin atomik kuvvet mikroskobu, gaz sensörü, rezonatör, transistör, elektronik devresi gibi birçok sistemde, sistemin belirlenmiş görevini yapmasını sağlayan nanotüp, nanotel, nanoçubuk, nanoplaka gibi esas bileşenlerle karşılaşılır. Bu sistemlerin işlevselliği için, maruz kalınan çeşitli dış etmenler gözetilerek sistemin doğru bir tasarımının yapılabilmesi, bunun için doğru bir mekanik modelle analiz edilebiliyor olması elzemdir.

Atomik ölçekli yapıların mekanik davranışlarının ölçümü için gerçekleştirilen deney ve simülasyonların verimsiz süreçlere sebep olması, araştırmacıları teorik araştırmalara yöneltmiştir. Buna göre bilimsel literatürde yüksek mertebeden elastisite teorileri olarak anılan atomik boyut etkili mekanik analiz yaklaşımları kullanılarak çeşitli nano malzemelerin çok çeşitli mekanik davranışları çözümlenebilmiştir.

Birden fazla malzemeden oluşan ve kendini oluşturan malzemelerin tek başına kullanımına kıyasla çeşitli avantajlar sağlayan kompozit malzeme teknolojisi günümüze değin hızla ilerleyen bir diğer mühendislik disiplini. Kompozit malzemelerin makro anlamda birçok başarılı uygulamaya sahip olmasının devamında, nano ölçekteki bazı kullanım örnekleri nedeniyle bunların mekanik analizleri ilgi çekmiş olup, bu husus yaklaşık son on yıllık süreçte bilimsel literatürde büyük bir yer edinmiştir.

Fonksiyonel değişimli malzemeler, bir yapı elemanının en az bir doğrultusunda özellikleri sürekli biçimde değişen bir kompozit malzeme modeli olarak tanımlanabilir. 1970'li yılların hemen başında bazı polimerik malzemeler hakkındaki araştırmalar esnasında fikrîsel temeli ortaya atılan bu malzemelerin fiziksel açıdan gelişim macerası 1980'li yıllar itibarıyla bir dizi havacılık çalışmaları kapsamında Japonya'da başlamıştır. Üretim prosesi üzerindeki araştırmaların hız kazanmasının ardından çeşitli uygulamalarıyla fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler günümüzde önemi bir kompozit türevi konumunda bulunmaktadır.

Yukarıdaki açıklamalar doğrultusunda, bu doktora tezinde fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden imal edilen nano ölçekli yapısal sistemlerin atomik boyut etkisine dayanan ve yapısal kayma deformasyonunu da gözeten serbest titreşim analizleri sayısal olarak incelenmiştir. Buna göre, nanokiriş, nanoçubuk ve nanoçerçeve şeklindeki üç farklı nanoyapı modelinin yerel olmayan serbest titreşimlerinin hareket denklemleri analitik olarak çözülmüş ve buna bir alternatif çözüm olarak sonlu eleman prosedürleri geliştirilmiştir. Nanoyapıların sıcaklık ve elastik etkilerin olduğu bir çevrede yer aldığı varsayılarak NEMS'lerin genel ortamı da düşünülmüş, böylece gerçekçi bir mekanik davranış araştırması planlanmıştır. Çeşitli sayısal uygulamalar ve tartışmalar gerçekleştirilerek kompozit nanoyapıların titreşim davranışının anlaşılmasına ve nanomekanik analizde sonlu elemanlar yönteminin kullanım faydalarının açıklanmasına çalışılmıştır. Tez kapsamında elde edilen sonuçların kompozit nanoyapıların mekaniği ile ilgili bilimsel literatürdeki boşlukları dolduracak makalelere evrilmesi planlanarak bu yapıların tasarım süreçlerine öncü olması ümit edilmektedir.

Son olarak, çok değerli b y klerimin ve çok değerli arkadaşlarımın lisansüstü eğitim sürecimde bana önemli katkılarda bulunduklarını belirtmek isterim. Bu bağlamda, akademik desteklerini, tecrübelerini ve insani hoşgörülerini benden hiçbir zaman esirgemeyen danışman hocam sayın Prof. Dr. Ömer C VALEK'e, Akdeniz Üniversitesi İ naat Mühendisliği Bölümü Mekanik Anabilim Dalındaki  ęretim  yesi hocalarıma, görev yapmakta olduğum Giresun Üniversitesi İ naat Mühendisliği Bölümündeki çok değerli hocalarıma, çok değerli mesai arkadaşlarıma, bugünlere gelmemdeki en büyük emek ve desteği gösteren aileme çok büyük teşekkür ve saygılarımı sunuyorum.



İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	iii
ÖNSÖZ	v
AKADEMİK BEYAN	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	x
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xvii
ÇİZELGELER DİZİNİ	xx
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK TARAMASI	3
2.1. Nanoteknoloji Bilimi.....	3
2.2. NEMS Teknolojisi	4
2.3. Fonksiyonel Dereceli Malzemeler	6
2.4. Atomik Boyut Etkisine Dayalı Sürekli Ortam Mekaniği	9
2.5. Sonlu Elemanlar Yöntemi	9
2.6. Bilimsel Literatür Özeti.....	10
3. MATERYAL VE METOT	21
3.1. Yerel Olmayan Elastisite Teorisi	21
3.2. Problemin Çözüm Prosedürü	25
3.2.1. Analitik çözüm	25
3.2.2. Hareket denkleminin türetilmesi	26
3.2.3. Ağırlıklı kalıntı tabanlı sonlu eleman formülasyonu.....	27
3.3. Kayma Deformasyonlu Fonksiyonel Derecelenmiş Çubukların Yerel Olmayan Mekaniği.....	28
3.3.1. Fonksiyonel derecelendirilmiş eleman modeli.....	29
3.3.2. Kayma deformasyonlu kirişler	36
3.3.3. Kayma deformasyonlu eksenel çubuklar	50
3.4. Yerel Olmayan Sonlu Elemanlar Formülasyonu	65
3.4.1. Nanokirişler.....	65
3.4.2. Nanoçubuklar	84
3.4.3. Kayma deformasyonlu fonksiyonel derecelenmiş ayırık nano sistemler	91

4. BULGULAR VE TARTIŞMA	105
4.1. Analizlerde Kullanılan Parametreler	105
4.2. Sayısal Sonuçlar ve Tartışmalar	106
5. SONUÇLAR	179
6. KAYNAKLAR	183
ÖZGEÇMİŞ	



AKADEMİK BEYAN

Doktora Tezi olarak sunduğum “**Kayma Deformasyonlu Fonksiyonel Derecelendirilmiş Nanokirişlerin Yerel Olmayan Sonlu Elemanlar Formülasyonu İle Mekanik Analizleri**” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak yazıldığını belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

01/10/2024

Hayri Metin NUMANOĞLU

İmzası

XXXXXXXXXX

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

a	: Nanoyapı iç karakteristik uzunluğu
A	: Kesit alan, Fonksiyonel derecelendirilmiş kesit alt yüzeyi
A_i	: Nanokiriş mod şekli diferansiyel denklem katsayıları ($i = 1 - 4$)
A_0	: Basit eksenel çubuk rijitliği
b	: Dikdörtgen kesit kalınlığı
B	: Eğilme rijitliği
B_i	: Nanokiriş iç tesir diferansiyel denklem ve çözüm katsayıları ($i = 1 - 8$)
c_i, C_j	: Nanokiriş doğal frekans hesabı katsayıları ($i = 1 - 3, j = 1 - 11$)
C_{ijkl}	: Dördüncü mertebeden elastisite tansörü
d	: Adi türev operatörü
$\mathbf{d}$	: Sonlu eleman düğüm deplasmanı vektörü
d_i, d_j, d_k	: Üç düğümlü eksenel sonlu elemanı düğüm deplasmanları
d_n	: Bilinmeyen seri katsayısı
D_i	: Kayma deformasyonlu nanoçubuk mod şekli ve iç tesir diferansiyel denklem katsayıları ($i = 1, 2, 3$)
D^k	: Kinematik operatör
D_T	: Sıcaklık kaynaklı rijitlik
$D_{\bar{\omega}}$	: Sapma yüzdesi
e_0	: Atomik malzeme sabiti
E	: Elastisite modülü
E_i, F_i	: Kayma deformasyonlu nanoçubuk mod şekli ve iç tesir çözüm katsayıları ($i = 1 - 4$)
$\mathbf{f}$	: İlgili kiriş yük vektörü
f	: Enine dış tahrik

f_j	: Atomik yapı kütleli kuvveti
G	: Kayma modülü, Geometrik ağırlık merkezi
G_1, G_2	: Basit nanoçubuk mod şekli ve iç tesir diferansiyel denklem ve çözüm katsayıları
h	: Dikdörtgen kesit yüksekliği, Ağırlıklandırma fonksiyonu
h_0	: Fonksiyonel derecelendirilmiş kesit merkezleri arası mesafe
H_i	: Kritik sıcaklık hesap katsayıları ($i = 1 - 7$)
I	: Ortalama ağırlıklı kalıntı
I	: Eğilme atalet momenti
I_P	: Polar atalet momenti
I_S	: Yanal kütle ataleti
I_{y0}	: y - Ekseni birim yanal kütle ataleti
I_{z0}	: z - Ekseni birim yanal kütle ataleti
I_0	: Sıfırıncı kütle ataleti
I_2	: İkinci kütle ataleti
I_{12}	: y - Ekseni yanal kütle ataleti
I_{22}	: z - Ekseni yanal kütle ataleti
$\mathbf{i}$	: Kompleks sayı ($\mathbf{i} = \sqrt{-1}$)
i	: Titreşim mod sayısı
k_M	: Eksenel elastik ortam rijitliği
k_P	: Pasternak elastik zemin rijitliği
k_W	: Winkler elastik zemin rijitliği
K	: Kelvin
K	: İlgili rijitlik matrisi
K_{ij}	: Genel eksen de ilgili rijitlik matrisi girdisi ($i, j = 1 - 6$)

K_M	: Boyutsuz eksenel elastik ortam rijitliği
K_P	: Boyutsuz Pasternak zemin rijitliği
K_W	: Boyutsuz Winkler zemin rijitliği
K_0	: Modifiye edilmiş Bessel fonksiyonu
K^*	: Modifiye edilmiş ilgili rijitlik matrisi
l_e	: Sonlu eleman uzunluğu
L	: Nanoyapı dış karakteristik uzunluğu
L_0	: Lineer diferansiyel operatörü
M	: Eğilme momenti, İlgili kütle matrisi, Malzeme merkezi
M^0	: Basit kütle matrisi
M^1	: Yüksek mertebeden kütle matrisi
M_{ij}^0	: Genel eksenel ilgili basit kütle matrisi girdisi ($i, j = 1 - 6$)
M_{ij}^1	: Genel eksenel ilgili yüksek mertebeden kütle matrisi girdisi ($i, j = 1 - 6$)
M^*	: Modifiye edilmiş ilgili kütle matrisi
n	: Sonlu eleman sayısı
N	: Eksenel normal kuvvet
N_T	: Termal eksenel kuvvet
N^*	: Toplam eksenel kuvvet
p	: Fonksiyonel derecelenme güç indeksi
P	: Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme efektif özelliği, Toplam yanal kuvvet
$\mathbf{q}$	: İlgili eksenel çubuk yük vektörü
q	: Eksenel dış tahrik
$\tilde{q}_i$	: Yapı kütleli kuvveti ($i = x, y, z$)
R	: Kalıntı

s_{ii}	: Klasik eksenel gerilme ($i = x, y, z$)
s_{ij}	: Klasik gerilme tansörü ($i, j = x, y, z$)
S	: Modal çözüm (statik deplasman), Kayma rijitliği
S_r	: Yanal rijitlik
S_{y0}	: y - Eksen birim yanal rijitliği
S_{z0}	: z - Eksen birim yanal rijitliği
S_{12}	: y - Eksen yanal rijitliği
S_{22}	: z - Eksen yanal rijitliği
t	: Zaman
t_{ij}	: Klasik kayma gerilmesi ($i, j = x, y, z; i \neq j$)
T	: Harmonik çözüm, Kinetik enerji, Transformasyon matrisi
T_{cr}	: Kritik sıcaklık
u	: Atomik yapı genel deplasman vektörü
u, v, w	: Nanoyapının sırasıyla eksenel, enine ve yanal deplasman bileşenleri
u_x, u_y, u_z	: Nanoyapının sırasıyla eksenel, enine ve yanal deplasman vektörleri
u_0	: Saf eksenel deplasman
U	: İç şekil değiştirme enerjisi, Eksenel nanoçubuğun statik deplasmanı, Fonksiyonel derecelendirilmiş kesit üst yüzeyi
V	: Hacim, Kesme kuvveti, Fonksiyonel derecelenme hacim fraksiyonu
V^*	: Toplam kesme kuvveti
w_b	: Eğilme deplasmanı
w_i, w_j	: İki düğümlü eğilme sonlu elemanı düğüm enine deplasmanları
w_s	: Kesme deplasmanı
W	: Nanokirişin statik deplasmanı, Dış kuvvetin iş potansiyel enerjisi
W_b	: Statik eğilme deplasmanı

W_s	: Statik kesme deplasmanı
$\mathbf{x}$	: Atomik yapı için referans noktası
$\mathbf{x}'$	: Atomik yapıda bir nokta
x	: Konum bileşeni
x, y, z	: Nanoyapının sırasıyla eksenel, enine ve yanal koordinatları
y_0, z_0	: Fonksiyonel derecelendirilmiş dikdörtgen kesitin sırasıyla yatay ve düşey eksenleri
α	: Yerel olmayan modül, Termal genleşme katsayısı, Yönlenme açısı
α_i	: Sınır şartlara bağlı seri çözüm katsayısı
β	: Modifikasyon (değiştirme) parametresi
γ_{ij}	: Kayma şekil değiştirmesi ($i, j = x, y, z; i \neq j$)
Γ	: L-Şekilli nanoçerçeve
δ	: Dirac fonksiyonu, Birinci varyasyon
δ_{ij}	: Kronecker- δ sembolü
Δ	: Değişim (fark)
ε_{ii}	: Eksenel şekil değiştirme ($i = x, y, z$)
ε_{ij}	: Şekil değiştirme tansörü
η	: Boyutsuz atomik parametre
θ	: Faz açısı
θ_i, θ_j	: İki düğümlü eğilme sonlu elemanı düğüm dönmeleri
λ, μ	: Lamé sabitleri
Λ	: V-Şekilli nanoçerçeve
ν	: Poisson oranı
ζ	: Sonlu eleman boyutsuz deplasmanı
Π	: Portal-şekilli nanoçerçeve

ρ	: Birim hacim ağırlığı
σ_{ij}	: Yerel olmayan gerilme tansörü
τ_{ij}	: Yerel olmayan kayma gerilmesi ($i, j = x, y, z; i \neq j$)
φ	: Kesit dönmesi
ϕ	: Şekil fonksiyonu
ω	: Doğal frekans
$\bar{\omega}$	: Boyutsuz frekans parametresi
∂	: Kısmi türev operatörü
$(\bullet)'$	: Konuma göre birinci türev $(\bullet)' = d(\bullet)/dx$
$(\bullet)''$	: Konuma göre ikinci türev $(\bullet)'' = d^2(\bullet)/dx^2$
$(\bullet)'''$	: Konuma göre üçüncü türev $(\bullet)''' = d^3(\bullet)/dx^3$
$(\bullet)^{(n)}$	: Konuma göre n. mertebeden türev $(\bullet)^{(n)} = d^{(n)}(\bullet)/dx^{(n)}$
$(\ddot{\bullet})$	: Zamana göre ikinci türev $(\ddot{\bullet}) = d^2(\bullet)/dt^2$
$(\ddot{\ddot{\bullet}})$	: Zamana göre ikinci türev $(\ddot{\ddot{\bullet}}) = d^4(\bullet)/dt^4$
$(\Sigma[\bullet])^*$	: İlgili indirgenmiş küresel matris

Bu tez çalışmasında sayıların ondalık kısmını ayırmak için nokta işareti (.) kullanılmıştır.

Kısaltmalar

C-C	: Clamped-clamped (İki ucu tutulu nanoçubuk, iki ucu ankastre nanokiriş)
C-F	: Clamped-free (Bir ucu tutulu diğer ucu serbest nanoçubuk, bir ucu ankastre diğer ucu serbest nanokiriş)
C-G	: Clamped-guided (Bir ucu tutulu diğer ucu kılavuz kayıcı mesnetli nanokiriş)
C-S	: Clamped-simply supported (Bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli nanokiriş)

EBBT	: Euler-Bernoulli beam theory (Euler-Bernoulli kiriş teorisi)
FDM	: Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme
GE	: Geometrik eksen
GPa	: Gigapascal
HO-nl	: Higher-order nonlocal (Yüksek mertebeden yerel olmayan)
kg	: Kilogram
KDFD	: Kayma deformasyonlu fonksiyonel derecelenmiş
KDH	: Kayma deformasyonu homojen
m	: Metre
nm	: Nanometre
NEMS	: Nano elektro mekanik sistem
NL-FEM	: Nonlocal finite element method (Yerel olmayan sonlu elemanlar metodu)
RF	: Radyo frekans
S-G	: Simply supported-guided supported (Bir ucu basit diğer ucu kılavuz kayıcı mesnetli nanokiriş)
S-S	: Simply supported-simply supported (İki ucu basit mesnetli nanokiriş)
TBT	: Timoshenko beam theory (Timoshenko kiriş teorisi)
TE	: Tarafsız eksen
TPa	: Terapascal

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Bazı nano-elektro-mekanik sistem organizasyonları; a) RF-NEMS; b) Çift rezonant basınç sensörü.....	5
Şekil 2.2. Boeing 787 yolcu uçağının malzeme yapısı	6
Şekil 2.3. Bazı kompozit malzeme şemaları; a) Tabakalı kompozit; b) Sürekli fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit	8
Şekil 3.1. Fonksiyonel derecelendirilmiş yatay nanoyapı elemanı modeli.....	29
Şekil 3.2. Klasik karışım kuralı ile modellenen fonksiyonel derecelendirilmiş dikdörtgen kesitli yapı elemanı için hacim fraksiyonlarının değişimleri; a) Alt yüzey; b) Üst yüzey	30
Şekil 3.3. Klasik karışım kuralı ile modellenen fonksiyonel derecelendirilmiş dikdörtgen kesitli yapı elemanı için malzeme özelliklerinin değişimi; a) Elastisite modülü; b) Birim hacim ağırlığı; c) Termal genleşme katsayısı.....	32-33
Şekil 3.4. Fonksiyonel derecelendirilmiş yapı elemanı için dikdörtgen kesit	34
Şekil 3.5. Termo-elastik çevrede bulunan fonksiyonel derecelendirilmiş nanokirişin titreşim analizi için nanoyapı modeli	36
Şekil 3.6. Elastik ortama gömülü fonksiyonel derecelendirilmiş nanoçubuğun eksenel titreşimi için nanoyapı modeli.....	51
Şekil 3.7. Fonksiyonel derecelendirilmiş düzlem eğilme üyesinin serbestlikleri.....	92
Şekil 3.8. Sayısal uygulamalar için kayma deformasyonlu fonksiyonel derecelendirilmiş nanoçerçeve yapıları ve sonlu eleman modelleri; a) II-Tip; b) Λ -Tip; c) Γ -Tip	103
Şekil 4.1. İki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin güç indeksinin artışına göre boyutsuz frekanslarının değişimi; a) 1. Mod; b) 2. Mod; c) 3. Mod; d) 4. Mod.....	124
Şekil 4.2. İki ucu ankastre mesnetli KDFD nanokirişlerin güç indeksinin artışına göre boyutsuz frekanslarının değişimi; a) 1. Mod; b) 2. Mod; c) 3. Mod; d) 4. Mod...	125
Şekil 4.3. Winkler zeminine oturan iki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin boyutsuz zemin rijitliğinin artışına göre temel mod boyutsuz frekanslarının değişimi; a) $p = 0$; b) $p = 10$	126
Şekil 4.4. Sıcaklık etkisi altındaki iki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin ortam sıcaklığının artışına göre temel mod boyutsuz frekanslarının değişimi; a) $p = 0$; b) $p = 10$	127
Şekil 4.5. İki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin güç indeksinin artışına göre temel mod kritik sıcaklıklarının değişimi; a) 1. Mod; b) 2. Mod.....	129

Şekil 4.6. İki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin güç indeksinin artışına göre tarafsız eksen göz önüne alınarak hesaplanan frekanslarının geometrik eksen göz önüne alınarak hesaplanan frekanslardan sapma yüzdelerinin değişimi; a) 1. Mod; b) 5. Mod.....	130
Şekil 4.7. İki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin güç indeksi ve boyutsuz atomik parametre değerlerinin artışına göre ilk dört boyutsuz frekanslarının değişimi	130
Şekil 4.8. İki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin güç indeksi ve uzunluk/yükseklik oranı değerlerinin artışına göre boyutsuz frekanslarının değişimi; a) 1. Mod; b) 2. Mod	131
Şekil 4.9. İki ucu ankastre mesnetli KDFD nanokirişlerin güç indeksi ve uzunluk/yükseklik oranı değerlerinin artışına göre boyutsuz frekanslarının değişimi; a) 1. Mod; b) 2. Mod	132
Şekil 4.10. Winkler zeminine oturan iki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin güç indeksi ve boyutsuz zemin rijitliği değerlerinin artışına göre boyutsuz frekanslarının değişimi; a) 1. Mod; b) 2. Mod	133
Şekil 4.11. Winkler zeminine oturan iki ucu ankastre mesnetli KDFD nanokirişlerin güç indeksi ve boyutsuz zemin rijitliği değerlerinin artışına göre boyutsuz frekanslarının değişimi; a) 1. Mod; b) 2. Mod.....	134
Şekil 4.12. Sıcaklık etkisi altındaki iki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin güç indeksi ve ortam sıcaklığı değerlerinin artışına göre boyutsuz frekanslarının değişimi; a) 1. Mod; b) 2. Mod	135
Şekil 4.13. Sıcaklık etkisi altındaki iki ucu ankastre mesnetli KDFD nanokirişlerin güç indeksi ve ortam sıcaklığı değerlerinin artışına göre boyutsuz frekanslarının değişimi; a) 1. Mod; b) 2. Mod	136
Şekil 4.14. Bir ucu tutulu diğer ucu serbest KDFD nanoçubukların güç indeksinin artışına göre boyutsuz frekanslarının değişimi; a) 1. Mod; b) 2. Mod.....	153
Şekil 4.15. İki ucu tutulu KDFD nanoçubukların güç indeksinin artışına göre boyutsuz frekanslarının değişimi; a) 1. Mod; b) 2. Mod.....	154
Şekil 4.16. Elastik ortama gömülü bir ucu tutulu diğer ucu serbest KDFD nanoçubukların boyutsuz elastik ortam rijitliğinin artışına göre temel mod boyutsuz frekanslarının değişimi; a) $p = 0$; b) $p = 10$	155
Şekil 4.17. Elastik ortama gömülü iki ucu tutulu KDFD nanoçubukların boyutsuz elastik ortam rijitliğinin artışına göre temel mod boyutsuz frekanslarının değişimi; a) $p = 0$; b) $p = 10$	156
Şekil 4.18. Elastik ortama gömülü iki ucu tutulu KDFD nanoçubukların sonlu eleman sayısının artışına göre boyutsuz frekanslarının sapma yüzdelerinin değişimi ($\eta = 0.3$, $K_M = 5$, $p = 5$); a) 1. Mod; b) 4. Mod	157

Şekil 4.19. Bir ucu tutulu diğer ucu serbest KDFD nanoçubukların güç indeksi ve boyutsuz atomik parametre değerlerinin artışına göre ilk dört mod boyutsuz frekanslarının değişimi.....	158
Şekil 4.20. İki ucu tutulu KDFD nanoçubukların güç indeksi ve boyutsuz atomik parametre değerlerinin artışına göre ilk dört mod boyutsuz frekanslarının değişimi ...	159
Şekil 4.21. Bir ucu tutulu diğer ucu serbest KDFD nanoçubukların güç indeksi ve uzunluk/yükseklik oranı değerlerinin artışına göre boyutsuz frekanslarının değişimi; a) 1. Mod; b) 2. Mod	160
Şekil 4.22. İki ucu tutulu KDFD nanoçubukların güç indeksi ve uzunluk/yükseklik oranı değerlerinin artışına göre boyutsuz frekanslarının değişimi; a) 1. Mod; b) 2. Mod.....	161
Şekil 4.23. Elastik ortama gömülü bir ucu tutulu diğer ucu serbest KDFD nanoçubukların güç indeksi ve boyutsuz elastik ortam rijitliği değerlerinin artışına göre boyutsuz frekanslarının değişimi; a) 1. Mod; b) 2. Mod	162
Şekil 4.24. Elastik ortama gömülü iki ucu tutulu KDFD nanoçubukların güç indeksi ve boyutsuz elastik ortam rijitliği değerlerinin artışına göre boyutsuz frekanslarının değişimi; a) 1. Mod; b) 2. Mod	163
Şekil 4.25. II-Tipteki KDFD nanoçerçevelerin güç indeksinin artışına göre boyutsuz frekanslarının değişimi; a) 1. Mod; b) 2. Mod.....	171
Şekil 4.26. Γ_1 -Tipteki KDFD nanoçerçevelerin güç indeksinin artışına göre boyutsuz frekanslarının değişimi ($\alpha = 90^\circ$); a) 1. Mod; b) 2. Mod.....	172
Şekil 4.27. Γ_3 -Tipteki KDFD nanoçerçevelerin güç indeksinin artışına göre boyutsuz frekanslarının değişimi ($\alpha = 90^\circ$); a) 1. Mod; b) 2. Mod.....	173
Şekil 4.28. Γ_1 -Tipteki KDFD nanoçerçevelerin güç indeksi ve uzunluk/yükseklik oranı değerlerinin artışına göre boyutsuz frekanslarının değişimi ($\alpha = 90^\circ$); a) 1. Mod; b) 2. Mod	174
Şekil 4.29. Γ_3 -Tipteki KDFD nanoçerçevelerin güç indeksi ve uzunluk/yükseklik oranı değerlerinin artışına göre boyutsuz frekanslarının değişimi ($\alpha = 90^\circ$); a) 1. Mod; b) 2. Mod	175
Şekil 4.30. Γ_1 -Tipteki KDFD nanoçerçevelerin güç indeksi ve yönelim açısı değerlerinin artışına göre boyutsuz frekanslarının değişimi; a) 1. Mod; b) 2. Mod	176
Şekil 4.31. Γ_3 -Tipteki KDFD nanoçerçevelerin güç indeksi ve yönelim açısı değerlerinin artışına göre boyutsuz frekanslarının değişimi; a) 1. Mod; b) 2. Mod	177

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1. İki farklı sınır şartlı KDH nanokirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerlerine göre boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması	107
Çizelge 4.2. Farklı sınır şartlı KDH nanokirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerlerine göre ilk üç mod boyutsuz frekansları	108
Çizelge 4.3. İki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin farklı yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre farklı kesit eksenleri göz önüne alınarak hesaplanan boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması	109
Çizelge 4.4. İki ucu ankastre mesnetli KDFD nanokirişlerin farklı yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre farklı kesit eksenleri göz önüne alınarak hesaplanan boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması	109
Çizelge 4.5. Farklı sınır şartlı KDFD nanokirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre temel mod boyutsuz frekansları	110
Çizelge 4.6. İki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre geometrik eksen göz önüne alınarak hesaplanan ilk beş mod boyutsuz frekansları	111
Çizelge 4.7. İki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre tarafsız eksen göz önüne alınarak hesaplanan ilk beş mod boyutsuz frekansları	111
Çizelge 4.8. İki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre tarafsız eksen göz önüne alınarak hesaplanan ilk beş mod boyutsuz frekanslarının geometrik eksen göz önüne alınarak hesaplanan boyutsuz frekanslardan sapma yüzdeleri	112
Çizelge 4.9. Çift parametrelili elastik zemine oturan iki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin farklı boyutsuz elastik zemin parametresi, boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre temel mod boyutsuz frekansları	113
Çizelge 4.10. İki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin farklı ortam sıcaklık değişimi, boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre temel mod boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması ($L = 10$ nm, $h = 0.5$ nm)	114
Çizelge 4.11. Winkler zeminine oturan ve sıcaklık etkisi altındaki iki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin farklı boyutsuz elastik zemin parametresi, ortam sıcaklık değişimi, boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre temel mod boyutsuz frekansları	115
Çizelge 4.12. İki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin yerel olmayan serbest titreşimi için farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre ilk beş mod kritik sıcaklıkları (K)	115

Çizelge 4.13. İki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile hesaplanan temel mod boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması.....	117
Çizelge 4.14. İki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile hesaplanan ilk beş mod boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması	118
Çizelge 4.15. Çift parametrelili elastik zemine oturan ve sıcaklık etkisi altındaki iki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin farklı termo-elastik ortam parametreleri, boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile hesaplanan ilk üç mod boyutsuz frekansları ($n = 15$).....	119
Çizelge 4.16. Farklı sınır şartlı KDFD nanokirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerlerine göre yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile hesaplanan ilk üç mod boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması ($p = 2$).....	120
Çizelge 4.17. Farklı sınır şartlı KDFD nanokirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile hesaplanan temel mod boyutsuz frekansları ($n = 15$)	121
Çizelge 4.18. Farklı sınır şartlı KDFD nanokirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile hesaplanan ikinci mod boyutsuz frekansları ($n = 15$)	121
Çizelge 4.19. Farklı sınır şartlı KDFD nanokirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile hesaplanan üçüncü mod boyutsuz frekansları ($n = 15$).....	122
Çizelge 4.20. Winkler zeminine oturan farklı sınır şartlı KDFD nanokirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre, boyutsuz elastik zemin parametresi ve güç indeksi değerlerine göre yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile hesaplanan temel mod boyutsuz frekansları ($n = 15$).....	122
Çizelge 4.21. Sıcaklık etkisi altında farklı sınır şartlı KDFD nanokirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre, ortam sıcaklık değişimi ve güç indeksi değerlerine göre yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile hesaplanan temel mod boyutsuz frekansları ($n = 15$)	123
Çizelge 4.22. Farklı sınır şartlı KDH nanoçubukların farklı narinlik oranı değerlerine göre ilk üç mod boyutsuz frekans oranları için bir karşılaştırma çalışması ($\eta = 0.1$).....	137
Çizelge 4.23. Farklı sınır şartlı KDH nanoçubukların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerlerine göre ilk beş mod boyutsuz frekansları.....	138

Çizelge 4.24. Bir ucu tutulu diğer ucu serbest KDFD nanoçubukların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre ilk beş mod boyutsuz frekansları	139
Çizelge 4.25. İki ucu tutulu KDFD nanoçubukların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre ilk beş mod boyutsuz frekansları	139
Çizelge 4.26. Elastik ortama gömülü KDFD nanoçubukların farklı boyutsuz elastik ortam parametresi, boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre ilk üç mod boyutsuz frekansları	140
Çizelge 4.27. İki ucu tutulu KDFD nanoçubukların yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile hesaplanan ilk beş mod boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması ($p = 1$)	141
Çizelge 4.28. İki ucu tutulu KDH eksenel nanoçubukların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerlerine göre yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile hesaplanan ilk beş mod boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması	142
Çizelge 4.29. İki ucu tutulu kayma deformasyonsuz homojen eksenel nanoçubukların farklı boyutsuz atomik parametre değerlerine göre yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile hesaplanan ilk beş mod boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması	144
Çizelge 4.30. İki ucu tutulu KDH nanoçubukların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerlerine göre modifiye edilmiş (ilk defa) yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile hesaplanan ilk beş mod boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması	146
Çizelge 4.31. Elastik ortama gömülü iki ucu tutulu KDFD nanoçubukların yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile hesaplanan ilk beş mod boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması ($\eta = 0.2$, $K_M = 10$, $p = 10$)	147
Çizelge 4.32. İki ucu tutulu KDH nanoçubukların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerlerine göre modifiye edilmiş (ikinci defa) yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile hesaplanan ilk beş mod boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması	149
Çizelge 4.33. Elastik ortama gömülü iki ucu tutulu KDH nanoçubukların farklı boyutsuz elastik ortam rijitliği değerlerine göre modifiye edilmiş yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile hesaplanan ilk beş mod klasik boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması	149
Çizelge 4.34. Elastik ortama gömülü iki ucu tutulu KDH nanoçubukların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve boyutsuz elastik ortam rijitliği değerlerine göre modifiye edilmiş yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile hesaplanan ilk beş mod boyutsuz yerel olmayan frekanslarının karşılaştırılması	150

Çizelge 4.35. Elastik ortama gömülü iki ucu tutulu KDH nanoçubukların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve boyutsuz elastik ortam rijitliği değerlerine göre modifiye edilmiş yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile hesaplanan ilk beş mod boyutsuz frekanslarının sapma yüzdeleri	150
Çizelge 4.36. İki ucu tutulu KDFD nanoçubukların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre modifiye edilmiş yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile hesaplanan ilk beş mod boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması	151
Çizelge 4.37. Elastik ortama gömülü KDFD nanoçubukların farklı boyutsuz elastik ortam parametresi, boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre modifiye edilmiş yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile hesaplanan ilk üç mod boyutsuz frekansları ($n = 15$)	152
Çizelge 4.38. II-Tipteki çerçevelerin klasik serbest titreşiminin ilk üç mod doğal frekansları (Hz) için bir yakınsama çalışması	164
Çizelge 4.39. I1-Tipteki çerçevelerin klasik serbest titreşiminin ilk beş mod doğal frekansları (Hz) için bir yakınsama çalışması	164
Çizelge 4.40. Farklı tipteki kayma deformasyonsuz ve kayma deformasyonlu homojen nanoçerçevelerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerlerine göre ilk üç mod boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması	166
Çizelge 4.41. Farklı tipteki KDFD nanoçerçevelerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre ilk üç mod boyutsuz frekansları	167
Çizelge 4.42. I-Tipteki farklı sınır şartlı KDFD nanoçerçevelerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre temel mod boyutsuz frekansları ($\alpha = 90^\circ$)	168
Çizelge 4.43. A-Tipteki KDFD nanoçerçevelerin farklı yönelim açısı, boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre temel mod boyutsuz frekansları	169
Çizelge 4.44. I1-Tipteki KDFD nanoçerçevelerin farklı yönelim açısı, boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre temel mod boyutsuz frekansları	169
Çizelge 4.45. I2-Tipteki KDFD nanoçerçevelerin farklı yönelim açısı, boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre temel mod boyutsuz frekansları	170
Çizelge 4.46. I3-Tipteki KDFD nanoçerçevelerin farklı yönelim açısı, boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre temel mod boyutsuz frekansları	170

1. GİRİŞ

İç veya yüzey yapısının dış boyutları nano ölçekte yani metrenin milyonda biri kadar olan malzemeler nanomalzeme sınıfını teşkil etmektedir. 1950'lerin sonunda bilim dünyasındaki yolculuğuna başlayan nanoteknolojinin günümüze kadar önemli dönüm noktalarını yaşaması, nanomalzeme kavramının önemini ve dolayısı ile bu alandaki çalışmaları artırmıştır. Günümüze değin çalışmalar, nanomalzemelerin elektronik, enerji, tıp, hava-uzay, otomotiv sanayii, savunma sanayii ilk akla gelenler olmak üzere birçok disiplini etkilemesini ve bu suretle inovatif yönü yüksek malzemelerin ortaya çıkmasını sağlamıştır.

Öte yandan, kompozit malzeme, özellikleri birbirinden farklı olan iki veya daha fazla malzemenin çeşitli işlemlerle bir araya getirilmesi sonucunda daha farklı özelliklere sahip yenilikçi bir malzemedir. Burada amaç yeni malzemenin hedeflenen yönlerden daha güçlü özelliklere sahip olmasıdır. Kompozit malzemeler daha yüksek mekanik rijitliğe ve çevresel dış etmenlere karşı daha yüksek dayanıma sahiptir. Bu nedenle sandviç, tabakalı veya fonksiyonel derecelendirilmiş gibi farklı kompozit malzeme türleri, mühendisliğin farklı disiplinlerinde oldukça geniş bir kullanıma sahiptir.

Teknolojinin çok hızlı ilerlemesi sonucunda günümüzde kullanıma sunulan birçok cihaz ve sistem, boyut, hız, işlem kapasitesi gibi yönlerden öncüllerine kıyasla çok daha iyi konumdadırlar. Bu tür sistemler genel olarak nano-elektro-mekanik sistemler (NEMS) teknolojisinin birer çıktılarıdır. NEMS yapıları, farklı geometrilere sahip olabilen nano ölçekli malzemelerden (bileşenlerden) meydana gelen sistemlerdir. NEMS organizasyonları elektrik-elektronik, elektrokimya, biyoteknoloji, genetik başta olmak üzere birçok disiplinde önemli uygulamalarda görev almaktadır. Nanoteknolojik çalışmalardaki hızlı ilerlemeler, bu bileşenlerin mekanik davranışlarındaki araştırmaların yapılmasına sebep olmuştur. Çünkü mekanik davranışın doğru belirlenmesi, NEMS'lerin doğru tasarım için öncelikli bir husustur.

Nanomalzemelerin mekanik davranışları üzerine araştırmalar kapsamında yürütülen deneyler ve bilgisayar ortamlarında yürütülen simülasyonlar genel olarak maliyet, süreç ve ileri uzmanlık bilgisi gibi gerekçelerle efektif olamamıştır. Ayrıca, deneysel çalışmalar nanoyapıya inildiğinde klasik fizik öğretilerinin, dolayısı ile klasik elastisite öğretisinin geçersiz olduğunu göstermektedir. Bütün bu sonuçlar bir arada düşünüldüğünde, bilim insanları nano ölçekli malzemelerin mekanik davranışlarının yenilenmiş mekanik yapı modelleri ile ele alınması fikrinin üzerine gidilmiştir. Bu fikrin esas felsefesi, klasik mekanik denklemlerinin atomik boyut etkisiyle birleştirilmesine dayanmaktadır. Günümüzde, nanoyapıların bir ve iki boyutlu yapı modellerinin boyut etkili mekanik davranış araştırmaları hakkında çok büyük bir yol katedildiği mutlaka belirtilmelidir. Öte yandan, bilindiği üzere bir katı mekaniği analizinde temel etkilere ilave olunan deformasyon bileşenleri bazı durumlarda önem kazanabilmektedir. Bu ilave etmenler çoğu zaman bir kayma etkisini işaret eder. Bunlara ek olarak, konuya ilişkin bilimsel literatürün çok büyük bir kısmında, nanoyapıların çevresel etkilere de (piezo, manyetik, elektrik, ortam sıcaklığı, ortam nemi vb.) maruz kaldığı düşünülmektedir, çevresel etkilerin mekanik modelleri üzerinden NEMS'lerin çalışma düzenleri simüle edilmiştir. Günümüzde gelinen nokta itibarıyla nano ölçekli yapıların mekanik davranışları üzerinde boyut etkisinin, kayma deformasyonunun ve dış çevresel olguların çok önemli etkiler olduğu iyi bilinmektedir.

Çeşitli NEMS yapılarının insanoğlunun hayatında gün geçtikçe daha fazla yer alması ve nanomalzeme kavramı içerisinde nanokompozitlerin varlığı nedenleriyle kompozitlerin de yapısal tasarımlarının biliniyor olmasının önem arz ettiği belirtilmelidir. NEMS organizasyonlarında kompozit bileşenlerin homojen bileşenlere göre daha inovatif bir kullanım sağlayabileceği de bu bağlamda eklenebilir. Bütün bu anlatılanlar ışığında, tek doğrultulu kompozit nanoyapı elemanlarının atomik boyut etkisine dayanan kayma deformasyonlu serbest titreşim analizleri bu tez çalışmasının genel konusudur. Nanoyapının bir kompozit malzeme olan fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden imal edildiği varsayılmaktadır ve malzeme homojenizasyonu için klasik karışım kuralı kullanılmaktadır. Atomik boyut etkisi konuyla ilgili bilimsel literatürden oldukça iyi bilinen Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisinin bünye denklemi ile göz önünde bulundurulmaktadır. Buna göre, varyasyonel cebre dayanılarak türetilen nanoyapıların kiriş, eksenel çubuk ve çerçeve modellerinin yerel olmayan kayma deformasyonlu serbest titreşim hareket denklemlerinin analitik çözümleri yapılmaktadır ve bu çözümlerin uygulamadaki kısıtlı durumlarını aşmak için çeşitli sonlu elemanlar formülasyonları geliştirilmektedir. Ayrıca, çevresel etkileri analize yansıtılabilmek amacıyla yerel olmayan nanokirişte termo-elastik çevre ve yerel olmayan nanoçubukta elastik ortam etkileri de gözetilmektedir.

Tez kapsamında geliştirilen sonlu eleman formülasyonları kullanılarak, atomik boyut etkisi, nanoyapı boyutları, güç indeksi, elastik zemin/ortam rijitlikleri, ortam sıcaklığı değişimi gibi çeşitli parametreler altında hesaplanan sayısal uygulamalar ve bunların detaylı tartışmalarıyla, NEMS'lerin mekanik bileşeni olabilecek tek doğrultulu fonksiyonel derecelendirilmiş nanoyapıların titreşim davranışlarının anlaşılabilmesi ve bunların doğru tasarım süreçlerine ışık tutulabilmesi hedeflenmektedir.

2. KAYNAK TARAMASI

Bu bölümde, öncelikle tez çalışmasının yakın bağlantılı olduğu çeşitli kavramlara detaya girmeksizin sadece tanıtım amaçlı değinilecektir ve ardından tez çalışmasına teorik inceleme itibarıyla yakın olan bilimsel çalışmalardan kısa özetler halinde bahsedilecektir.

2.1. Nanoteknoloji Bilimi

Nanoteknolojiyi tanımlamadan önce nanobilimin tanımını yapmak gerekir. Buna göre nanobilim, maddenin nano ölçekte kontrol edilmesi ve bu ölçekte özelliklerinin anlaşılmasına yönelik bir bilim dalıdır (Singh vd. 2017). Burada “nano ölçek” ile temel uzunluk birimi olan metrenin (m) milyonda bire bölünmesini tanımlayan nanometre (nm) mertebesi kastedilir ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$). Öte yandan, nanoteknoloji için ilk olarak oldukça kısa bir tanım “atomik hassasiyette mühendislik ve teknoloji” şeklinde yapılmaktadır (Nasrollahzadeh vd. 2019). Bu ifade edilenler bağlamında, ölçüleri nanometre ölçeği ile ifade edilen madde ve maddesel her türlü sistemdeki atomların diziliminin incelenmesi, dizilimin düzenlenmesi, bu ölçeğe inildiğinde varılan yeni malzeme özelliği keşifleri, yeni özelliklerin klasik disiplinlerle birleştirilerek daha inovatif teknolojilere varılması nanoteknolojiyi tanımlamaktadır. Birim nanometre ölçeğinin bir saç telinin yüz binde biri kadar olduğu bilgisi (Perker 2010) altında, nanoteknolojinin ne kadar küçük bir ölçekte çalıştığı tahayyül edilebilir. Nanobilim ve nanoteknolojide teknik olarak 1-100 nm aralığındaki madde ve sistemlerle ilgilenilmektedir (Subramani vd. 2019; Civalek ve Numanoğlu 2020).

Bilindiği üzere günümüzde kullanılmakta olan birçok elektro-mekanik cihaz veya sistem öncüllerine göre daha yüksek mekanik dayanıma, yüksek fiziksel dayanıklılığa, daha güçlü elektriksel ve optik özelliklere, daha büyük veri işleme hızlarına, bunların belki de en önemlisi çok daha küçük boyutlara sahiptir. Akla gelen en basit örneğe göre, Eskiden bir oda hacmindeki bilgisayar sistemlerinde bu devasa büyüklüğe rağmen elektronik veri depolama hacmi oldukça kısıtlı kalmıştır. Yine çok eski yıllarda elektronik ortamda yapılan araştırmalar işlem hızları nedeniyle günlerce sürmüştür. İş süreçlerinde büyük performans kayıpları yaşamamak için mesai dışında çalıştırılan bilgisayarlar bilinmektedir. Elbette bu durum mali zararlar veya çalışana yansıyan negatif etki gibi başka sorunları ortaya çıkarmıştır. Bunlara ek olarak, eski zamanlardan bilinen disket gibi harici veri depolama birimleri en fazla 1.44 megabyte veri depolayabilmektedir (Getz 1991). Nano-elektro-mekanik sistemler (NEMS) teknolojisindeki önemli çalışmaların sonucunda, örneğin günümüzde bilgisayar boyutları küçülmüş, bilgisayar devre parçalarından olan çiplerin boyutsal küçülmesine ek olarak işlemci hızları artırılmış, harici veri depolama anlamında harici bellek teknolojisi geliştirilerek bilişim teknolojilerinde resmen bir çağ kapanmış, yeni bir çağ açılmıştır. Elbette NEMS teknolojisi bilişimle sınırlı değildir, örneğin kimya ve biyoloji gibi fenni alanlarda da elektro-mekanik devrelerin çok çeşitli uygulamaları mevcuttur.

Tabi nanoteknoloji üzerine giriş seviyesinde araştırmalar yapıldığında akla gelen ilk örnekler NEMS teknolojisi üzerine olsa da, malzeme karakterizasyonu (Zhou vd. 2007), biyomedikal (Holm vd. 2002; Ramos vd. 2017), genetik (Seeman 1998; Condon 2006; Shen vd. 2021), havacılık (Meyyapan 2000; Kausar vd. 2017), savunma teknolojileri (Kumar ve Dixit 2019; Singh vd. 2023), otomotiv sanayii (Tomar 2012;

Mathew vd. 2019), inşaat malzemesi (Norharsi vd. 2017; Chakraborty vd. 2020, Mohajerani vd. 2019; Bozsaky 2016), kimya endüstrisi (Zhao vd. 2003; Adams ve Barbante 2015; Soni vd. 2022) gibi çok farklı dallarda nanoteknolojinin oldukça önemli uygulamalarına rastlanmaktadır.

2.2. NEMS Teknolojisi

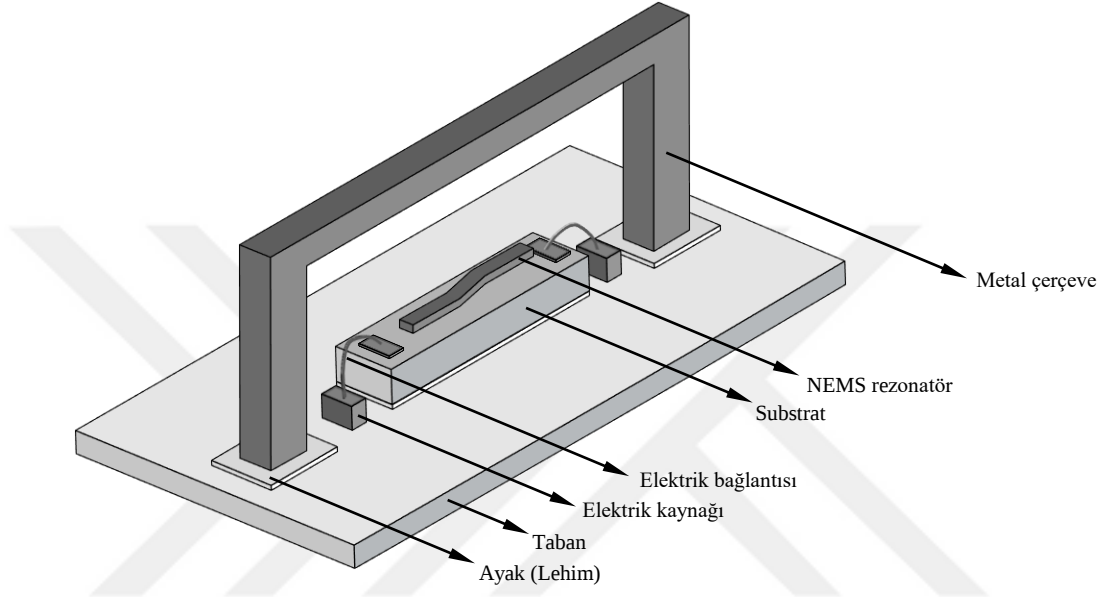
İnsan yaşantısındaki bazı belirli ihtiyaçların elektro-mekanik tabanlı giderilebilmesi görevini gören ve nano ölçekli malzemelerle organize edilen yapı ve cihazlar genel olarak nano-elektro-mekanik sistemleri (NEMS) tanımlamaktadır. Elektriksel ve mekaniksel ilke ve proseslere dayanarak çalışan bu sistemler birçok biyolojik, kimyasal, genetik, optik, termal ilk aklı gelenler olmak üzere çeşitli alanlardaki fonksiyonel olarak görev yapmaktadır. Nanoteknolojinin bir hedef noktası da NEMS grubu yapı ve cihazların imalatı ve üzerindeki ileri çalışmalarla daha da geliştirilmesidir. NEMS teknolojisi için genel bir tanım ve çeşitli örnekler Numanoğlu (2019) tarafından sunulmuştur.

Bir önceki paragrafın hemen başında, NEMS organizasyonların nano ölçekli malzemelerle oluşturulduğu belirtilmişti. “Nano ölçekli malzeme” kavramı, günümüzde varlığı deneysel olarak bilinen, fen ve mühendislik özellikleri üzerinde çeşitli araştırmalar yapılan nanometre ölçülerine sahip malzemeler olarak açıklanabilir. Nanomalzemelerin çeşitli sınıfları mevcuttur. Nanotüp, nanotel, nanoçubuk gibi tek doğrultulu yapılar ve nanoplaka gibi iki doğrultulu nanoyapılar bu sınıfları belirtir. 1950’lerin sonunda başlayan ve günümüze kadar çok büyük dönüm noktalarını yaşayan nanoteknoloji biliminde, bugün karbon nanotüp (Iijima 1991; Iijima ve Ichihashi 1993; Bethune vd. 1993; Dresselhaus vd. 1998; Rueckes vd. 2000; Krüger vd. 2001; Popov 2004; Wang 2005; Raffaele vd. 2005), bor nitrit nanotüp (Chopra ve Zettl 1997; Loiseau vd. 1998; Radosavljevic vd. 2003; Jhi ve Kwon 2004; Bai vd. 2007; Zhang vd. 2009; Zhi vd. 2010; Ghassemi ve Yassar 2010; Mukhopadhyay vd. 2011; Merlo vd. 2018), silikon karbit nanotüp (Pham-Huu vd. 2001; Gao 2004; Taguchi vd. 2005; Elyassi vd. 2007), çinko nanotel (Zheng vd. 2002; Wang 2004; Xing vd. 2005; Fan ve Lu 2006; Desai ve Haque 2007; Liu vd. 2007; Wang vd. 2007), grafen plaka (Sharma vd. 2013; Zang vd. 2015; Khan vd. 2017; Foo ve Gopinath 2017; Chen vd. 2017), silisen plaka (Nakano ve Ikuno 2016; Lin vd. 2021; Wang vd. 2022), borofen plaka (Abdi vd. 2022; Hou vd. 2022; Sharma vd. 2023) gibi malzemeler NEMS organizasyonlarının temel yapıtaşları olarak bilinir. Yani insanoğlu günümüzde yaşadığı teknolojik devrimi bu malzemelerin keşfine borçludur.

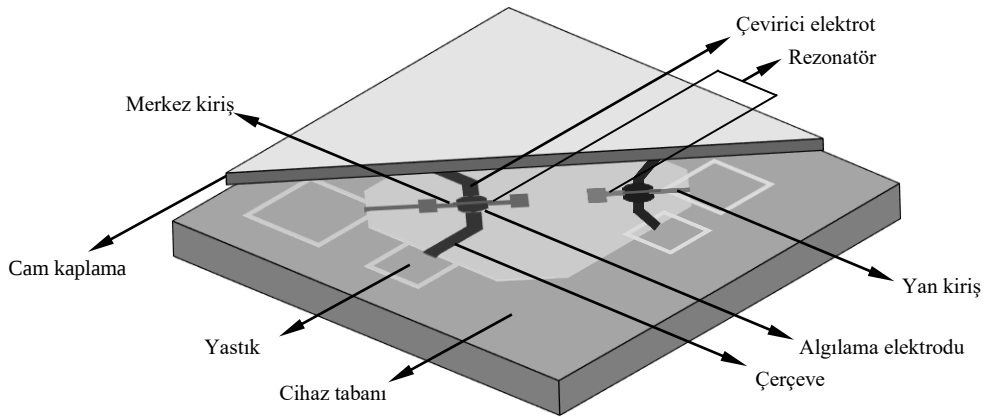
NEMS organizasyonları için atomik kuvvet mikroskobu (Binnig vd. 1986; Meyer 1992, Hanley and Gray 1995; Blanchard 1996; Giessibl 2003; Wojcikiewicz vd. 2004; Seo ve Jhe 2007; Michels ve Rangelow 2014; Alsteens vd. 2017), alan etkili transistörler (Braga ve Horowitz 2009; Cheng vd. 2015; Ahmad vd. 2018; Wadhera vd. 2019; Bushra ve Prasad 2022), gaz sensörleri (Kawano vd. 2007; Cobianu vd. 2009; Bargatin 2012; Jousseume vd. 2018), basınç sensörleri (Greenwood ve Satchell 1988; Eaton ve Smith 1997; Kinnell and Craddock 2009; Luo vd. 2014; Xie vd. 2015), nanoaktivatörler (Lu ve Pancapakesan 2006; Lee ve Cho 2007; Soroush vd. 2010; Kanygin ve Bahreyni 2021), nanokonsollar (Drechsler 2003; Wee vd. 2005; Chakraborty ve Luo 2006; Li vd. 2007; Kacem vd. 2010; Datar vd. 2011; Kilinc vd. 2014), nanorezonatörler (Xu vd. 2010; Wang ve Arash 2014; Kazmi vd. 2017; Yang vd. 2017), nanoanahtarlar (Tian vd. 2007; Ranallo

vd. 2016; Patino vd. 2019; Huo vd. 2022; Socrier ve Steinem 2023), radyo-frekans anahtarlar (Luo vd. 2014; Chaudhary ve Mudimela 2022) temel örneklerdir.

Bir ve iki boyutlu bazı nanomalzemelerin temel karakteristik özellikleri ve geometrik yapıları hakkında Numanoglu (2019) tarafından çeşitli bilgiler verilmiştir. Bu referansa ek olarak, genel bir NEMS organizasyonunu da temsil ettiği düşünülerek, bir radyo-frekans nano-elektro-mekanik sistem (RF-NEMS) ve çift rezonatörlü basınç sensörünün örnek şemaları Şekil 2.1’de sunulmaktadır.



(a)



(b)

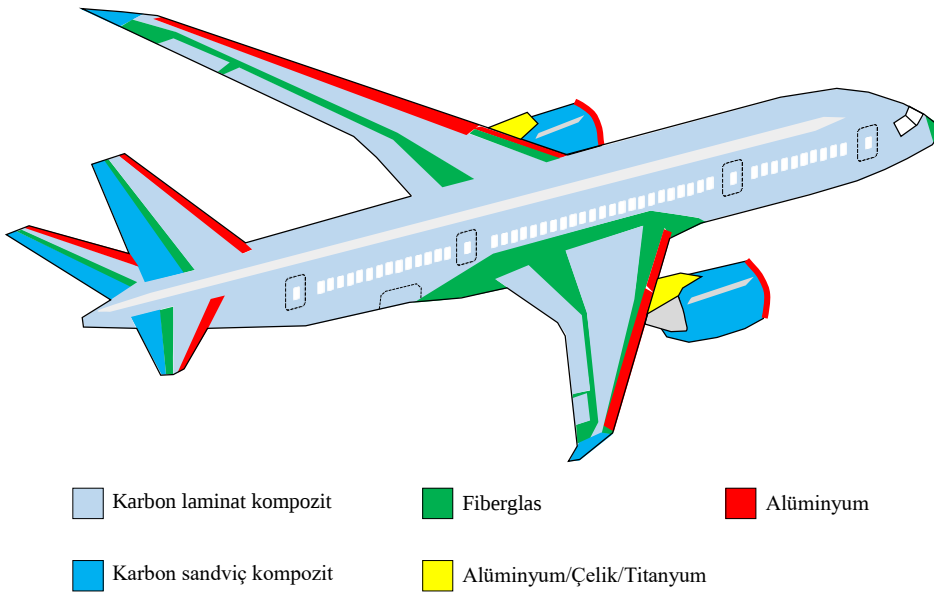
Şekil 2.1. Bazı nano-elektro-mekanik sistem organizasyonları; **a)** RF-NEMS; **b)** Çift rezonant basınç sensörü

Bu örneklerden rezonant basınç sensörünün genel işlevi, rezonans frekansı altındaki kirişe eksenel gerinim uygulanarak deformasyon ölçmektir (Xie vd. 2015). Bu

sensörler diğer sensörlere göre yüksek tekrarlanabilirlik, çözünürlük ve hassasiyet sağlar (Ikeda vd. 1990). Ayrıca, RF-NEMS anahtarı sinyal yönlendirme, empedans eşleştirme, sinyal anahtarlama gibi görevler görmektedir (Jaafar vd. 2014; Feng vd. 2022). Bu sistemler geleneksel anahtarlara göre daha düşük çalışma voltajı, iyileştirilmiş açma/kapama oranı, düşük akım ve yüksek anahtarlama hızı gibi faydalar sağlamaktadır (Loh ve Espinosa 2012).

2.3. Fonksiyonel Dereceli Malzemeler

Yapı mühendisliği ve mekaniği biliminde malzeme kavramı büyük bir öneme sahiptir. Malzeme sınıfı içerisinde, dünyada yaygın kullanıldığından beton, çelik, ahşap, alüminyum gibi homojen malzemeler ilk olarak akla gelmektedir. Ancak, homojen malzemelere göre daha üstün özelliklere sahip olan ve kompozit malzeme olarak bilinen bir malzeme sınıfı daha mevcuttur. Tez konusu her ne kadar fonksiyonel dereceli malzeme de olsa, bu kavramı tamadan önce detayına girmeksizin kompozit malzemeyi tanımakta fayda vardır. Kompozit malzeme, en az iki malzemenin fiziksel veya kimyasal metotlarla bir araya getirilerek bunlardan herhangi birine veya bir homojen malzemeye göre daha üstün özellikler sağlayan malzemedir. Kompozit malzemelerde karakteristik olarak, birbirinden farklı özelliklere sahip matris ve takviye adında iki bileşen bulunur. Burada takviye taşıyıcı olarak görev yaparken matris takviye malzemesini bir aderans (sarılma) göstererek tutma ve destekleme görevlerini üstlenir. Bilinen en yaygın malzeme beton ve çelikten oluşan betonarmedir. Bunun gibi örnekler fiber takviyeli kompozit malzeme olarak bilinir. Bunun haricinde, en az iki farklı malzemenin katmanlar halinde bir araya getirilmesiyle de üretilen kompozitler mevcuttur. Sandviç kompozitler ve laminatlar bunun en yaygın örneğidir. Kompozit paneller, alaşımlar, otomobil lastikleri, köpükler, karbon fiber takviyeli polimerler, kontraplaklar kompozit malzemelere örnek verilebilir. Kompozit malzemeler, genel olarak uçak-uzay, denizcilik, otomotiv, savunma, inşaat, biyomedikal, kimya gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Kompozit malzemelerin bir kullanım alanı için Parveez vd. (2022)'den incelenen Boeing 787 yolcu uçağının malzeme yapısı Şekil 2.2'de resmedilmektedir.



Şekil 2.2. Boeing 787 yolcu uçağının malzeme yapısı

Kompozit malzeme sınıfının çok önemli bir üyesi de fonksiyonel değişimli (veya derecelendirilmiş) malzemelerdir. Teknik tanım konu gereği üçüncü bölümde verilecektir ancak burada ana hatları ile bir açıklama yapılması uygun olacaktır. Fiziksel veya mühendislik özellikleri en az bir belli doğrultuda değişen malzeme fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeyi (FDM) tanımlamaktadır.

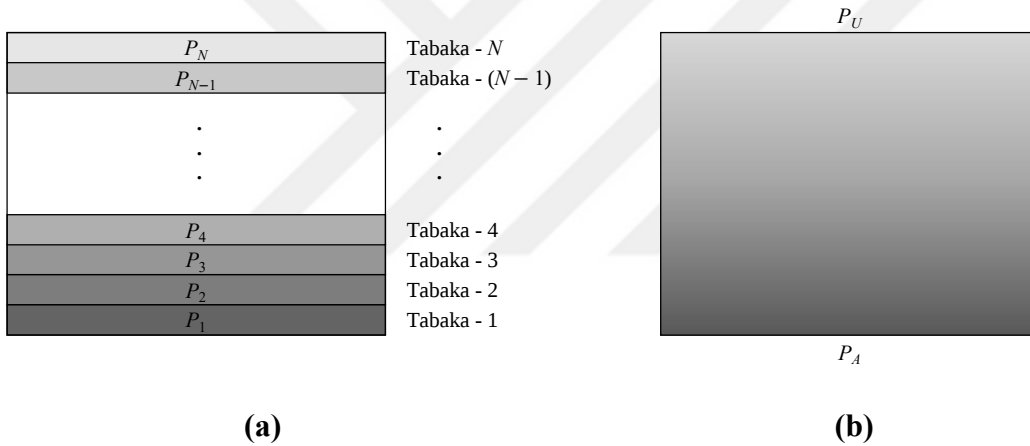
Mahammood ve Akinlabi (2017), mühendisliğin kendi problemlerini çözmek için sürekli olarak doğaya yöneldiğini, FDM'lerin de bunun bir sonucu olduğunu belirtmişlerdir. Doğanın kendisinin sağladığı ahşap ve bambu gibi ağaç endüstrisi malzemelerin (Hon 2001; Amada vd. 1996; Ray vd. 2004) yanı sıra insan dişi ve kemiği gibi organizma dokuları da (Low ve Mahmood 2004; Bartel vd. 2006) FDM örneği sergilemektedir. Doğanın bu malzemeleri maruz kaldığı hizmet koşullarını düşünerek tasarladığı belirtilmiştir. Öte yandan, insan dişinin mine adı verilen dış tabakasının aşınmaya karşı dirençli olduğu ve iç kısımlarının bir amortisör görevi gördüğü, bu tasarımın dişlerin yorulma ömrünü artırarak sünek hale getirdiği belirtilmiş, buna benzer şekilde insan kemiğinin de görmesi gereken hizmet gereği tasarlandığı ifade edilmiştir.

Mühendislikte malzeme derecelendirilmesi fikri genel olarak ilk defa 1972'de kompozit polimerler için ortaya çıktı (Bever ve Duvez 1972; Shen ve Bever 1972). Bu kapsamda malzeme bileşimindeki filaman polimer fraksiyonları için çeşitli modeller ve potansiyel uygulamalar öne sürüldü. Ancak 1980'li yıllara kadar bu malzemelerin tasarım, üretim ve uygulama konularında somut bir araştırma mevcut değildi (Miyamoto vd. 1999). Bunun devamında, 1980'lerin ortalarında Japonya'da bir grup araştırmacının bir uzay projesinde çok yüksek sıcaklık değişimlerine dayanması istenen kompozit ihtiyacına haiz bir problem esnasında FDM fikri ortaya atıldı (Niino vd. 1987; Koizumi ve Niino 1995). Buna göre malzemenin bir tarafının yaklaşık 2000 K sıcaklığa maruz kalması ve bu sıcaklığın bir diğer tarafa iletilmemesi gerekmektedir. Uçak gövdesinde, uçak içi ve dışı arasında yaklaşık 1000 K kadar bir sıcaklık farkına dayanabilecek bir kompozit malzeme ihtiyacı vardı. Proje kapsamındaki deneylerde geleneksel laminat kompozitler başarısız oldu. Deneylerde farklı kompozitler kullanılmasına rağmen başarısızlık modlarının benzer olduğu anlaşılmıştır. Genel olarak bu başarısızlık, delaminasyon da denilen, laminat kompozitin bileşenlerinin birleştiği noktalardan ayrışması ile gözlemlenmiştir. Bu sınır bölgede, bileşenlerin birbiriyle termal genleşme yönünden uyumsuz olmaları nedeniyle yüksek gerilme yığılmaları söz konusu olmuştur. Araştırmacılar, bileşenler arasındaki bu keskin geçişi kaldırılabirlerse sorunu çözebileceklerini düşünmüşlerdir. Buna göre, iki malzemenin de tamamı birbirine yaklaştırılarak keskin arayüz sorunu kademeli değişken arayüz ile çözülmüştür ve yeni malzeme yüksek termal yüklere dayanabilmiştir (Mahammood ve Akinlabi 2017). Böylece FDM'lerin gelişiminin yolu açıldı. FDM'ler ilk olarak havacılık yapıları ve füzyon reaktörlerinde termal bariyer tasarımı için geliştirildi (Koizumi 1997; Hirai ve Chen 1999; Chan 2001).

Geleneksel kompozit malzemeler, özellikle uçak-uzay endüstrisi ve mühendislik disiplinlerinde yüksek mukavemet/ağırlık ve rijitlik/ağırlık oranları sunmaktadırlar ve bunlar bu disiplinlerde oldukça başarılı olmaktadır. Geleneksel kompozitlerdeki metal malzemesi yüksek mukavemet ve tokluk özellikleri ile mühendislik alanında yıllardır öne çıkmaktadır. Ancak sıcaklık artışına karşılık metalin mukavemeti azalmaktadır, dolayısı ile kompozit malzemenin yüksek sıcaklıklarda kullanımı mümkün olmamaktadır. Buna karşılık seramiğin ısıl direnci mükemmel bir seviyededir. Fakat seramiğin mühendislik

uygulamaları düşük tokluk nedeniyle kısıtlıdır (Shen 2009). İki bileşenin fonksiyonel derecelenme düşüncesiyle bir araya getirilmesi ile yüksek sıcaklıklara dayanım sağlanabilmektedir. Burada seramik yüksek sıcaklıklara dayanırken metal seramiğe destek görevi görür, bu durum performansı artmaya ve delaminasyon ihtimalini azaltmaya yardımcı olur (Mahammood ve Akinlabi 2017).

Fonksiyonel derecelendirilmiş ve tabakalı kompozit malzeme konfigürasyonları Şekil 2.3'te resmedilmektedir. Buna göre, tabakalı malzemede özellikleri P ile simgelenen farklı N adet tabaka ($N \geq 2$) üst üste birleşerek malzemeyi oluşturmaktayken, FDM şemasında malzeme özellikleri en alt yüzeyden en üst yüzeye doğru sürekli olarak değişmektedir. FDM'nin sonsuz sayıda tabakanın bir araya getirilip yapıştırılmasıyla elde edildiği sadece bir idealleştirme olarak düşünülebilir. Ancak bu benzeşimde katmanlar birbirinden oldukça farklı bir malzeme değildir, yapının en alt ve en üst yüzeyindeki malzemelerin belirli fraksiyonlarına (hacim oranlarına) bağlı olarak özellikleri değişen ara malzemelerdir. Ayrıca, FDM'ler için metal-seramik modeli oldukça yaygındır. Buna göre malzemenin alt yüzeyi %100 metal fazıyken üst yüzeyi %100 seramik fazından meydana gelir. Bu malzeme modelinin mühendislik özelliklerinin yanı sıra makro ve nano/mikro düzeyde katı mekaniği analizleri yaygın bir araştırma konusu olmuştur.



Şekil 2.3. Bazı kompozit malzeme şemaları; **a)** Tabakalı kompozit; **b)** Sürekli fonksiyonel derecelendirilmiş kompozit

Bu anlatılanlardan çıkarılacak en önemli sonucun, FDM'nin geleneksel tabakalı kompozit malzemelerde yaşanan arayüz sorunlarını kaldırmakta olduğu anlaşılmaktadır. Öte yandan, Niino vd. (1987) FDM kavramı ile young modülü, çekme mukavemeti ve aşınma direnci gibi özellikler açısından daha üstün malzeme tasarımlarının geliştirilmesine yol açıldığını ifade etmişlerdir. Ayrıca, malzemenin elastik özelliklerindeki kontrollü bir değişim aşınmaya karşı direncin ve kırılmaya karşı tokluğunun artmasına yardımcı olmaktadır (Suresh 2001).

FDM malzemeleri genel olarak; evaporasyon tabanlı, püskürtme tabanlı ve plazma spreyi gibi fiziksel buhar biriktirme yöntemlerle ve kimyasal buhar biriktirme yöntemleriyle imal edilebilmektedir. Bu yöntemlerin detaylı bilgisi için Mahammood ve Akinlabi (2017)'nin çalışması incelenebilir. FDM yapıları, uzay (Nath vd. 2019), otomotiv (Tošić vd. 2022), biyomedikal (Pompe vd. 2003), savunma (Sharma ve Bhandari 2018), elektrik-elektronik (Kurimoto vd. 2010), enerji (Müller vd. 2003),

denizcilik (Chandrasekaran ve Hari 2022), optoelektronik (Wośko vd. 2005), dişçilik (Watari vd. 1997; Mehrali vd. 2013; Hedia ve Foud 2013), ortopedi (Sola vd. 2016) gibi birçok alanda kullanıma sahiptir.

2.4. Atomik Boyut Etkisine Dayalı Sürekli Ortam Mekaniği

NEMS organizasyonlarında yer alan bileşenlerin optimum tasarımı, mekanik davranışın eksiksiz olarak belirlenebilmesine bağlıdır. Nanoteknoloji çalışmaları içerisinde, bu bileşenlerin mekanik davranışı nanomekanik biliminin konusudur. Bu anlamda nanoyapılar üzerindeki deneysel çalışmaların oldukça kısıtlı yöntemlere dayanması ve zahmetli olması mekanik davranışın öğrenilebilmesine engeldir. Mekanik davranışı öğrenebilmek adına bilim adamları ilk olarak atomik düzeydeki simülasyon yöntemlerine başvurmuşlardır. Bu simülasyonlardan en iyi bilinen ikisi moleküler dinamik simülasyonu ve Monte Carlo simülasyonudur (Gopalakrishnan ve Narendar 2013). Moleküler dinamikte, nanoyapı atomlarının ve bunlar arasındaki bağların zamana karşı davranışları Newton deterministik dinamiği (hareket denklemleri) ve Langevin-tipi stokastik dinamiği ile sayısal olarak modellenir. Atomlar arasındaki kuvvetler ve potansiyel enerji, mekanik kuvvet alanları tarafından tanımlanmaktadır (Karličić vd. 2015). Atomlar arasındaki bu etkileşimden faydalanılarak her atom üzerindeki net kuvvet, net kuvvet üzerinden de atomların hız ve konumları elde edilmektedir (Numanoğlu 2019). Moleküler dinamik simülasyonu, yüksek maliyet, uzun işlem süreçleri, yüksek hesaplama hacmi ve ileri uzmanlık bilgisi gibi büyük zahmetler barındırmaktadır (Liu vd. 2004; Murmu ve Adhikari 2012; Numanoğlu ve Civalek 2019a, 2022; Civalek ve Numanoğlu 2020; Numanoğlu vd. 2021).

Nanoyapıların mekanik analizleri için belirtilen bu sorunlar, araştırmacıları teorik formülasyon kullanımına yöneltmiştir. Temel nanoteknolojik deneylerin sonucu olarak nanoyapıya inildiğinde klasik fizik kuralları geçersiz olmaktadır. Bu sonuç, nanomekanik için de klasik elastisite teorisi ile yaklaşımın geçersiz olacağını işaret etmektedir. Deneysel sonuçların, nanoyapıya etkiyen kuvvetlerin yapının karakteristik iç boyutlarıyla (bağlarıyla) bağlantılı olduğunu ortaya çıkarması da bu düşüncüyü doğrulamıştır. 1960'lı yıllarda geliştirilmeye başlanan süreklilik teorilerinin 2000'li yılların başında atomik ölçekli yapılara uyarlanmasına başlanmıştır ve bu suretle atomik yapıların mekanik davranışları günümüze kadar yoğun bir şekilde araştırılmıştır. Katı cisimler mekaniği biliminde, yüksek mertebeden sürekli ortam teorileri denilen bu yeni sınıf, klasik elastisite teorisinin atomik boyut etkisi ile modifiye edilmesi felsefesi ile varlık halinde olmuştur. Bilimsel çalışmalarda yaygın olarak bir ve iki boyutlu nanomalzemeler bu yaklaşımlarla mekanik analize konu edilmiştir. Söz konusu formülasyonlardan günümüze değin yaygın bilinenleri, yerel olmayan elastisite teorisi, değiştirilmiş gerilme çifti elastisite teorisi, değiştirilmiş şekil değiştirme elastisite teorisi, yüzey enerjisi elastisite teorisi, eşil mekaniği elastisite teorisi olarak zikredilebilir. Bu teorilerden bazılarının zamanla yüksek mertebeli yeni varyasyonları da önerilmiştir (Numanoğlu 2019).

2.5. Sonlu Elemanlar Yöntemi

Mühendislik problemlerinde analitik (kesin) çözüme dayanan matematiksel modelleme esasen oldukça temel bir işlemdir yani basit problemlere kolaylıkla uygulanabilmektedir. Ancak çeşitli sebepler analitik çözümün kullanımının önünü keser. Tez kapsamı gereğince katı cisimler mekaniği düşünülecek olursa, yapı kinematığının

karmaşıklaşması, yükleme durumunun karmaşıklaşması, sınır şartların karmaşıklaşması, tek doğrultulu çubuk yerine iki doğrultulu yüzeysel yapı elemanı modellemesi, malzemenin homojen olmaması, kesitin sabit olmaması, yapıda hasar yer alması vb. gibi durumlar buna örnektir ve bu örnekler rahatlıkla çoğaltılabilmektedir. Bu tür problemlerde, mühendislik sürecinin ilk kısmı olan analizin gerçekleştirilmesi, analitik yöntemin alternatifi olan yaklaşık matematiksel yöntemler vasıtasıyla yürütülür. Günümüzde yaklaşık matematiksel yöntemler çok çeşitlidir ve bu yöntemler çeşitli mühendislik problemlerine uygulanarak elde edilen sonuçlardan sonra çıktıya yani ürüne geçiş sağlanabilmektedir.

Sonlu elemanlar yöntemi, bu matematiksel yöntemler sınıfının belki de en önemli üyesi konumundadır. Temeli 1940'ların hemen başına dayanan sonlu elemanlar yönteminin temel felsefesine göre, probleme esas sistem ufak birimlere (alt alanlara) bölünür, bu alt alanların fiziksel etkileşimi matematiksel denklemlere dönüştürülür ve denklemlerin çözümü ile analiz süreci tamamlanmış olur. Sonlu elemanlar yönteminin uygulama alanı oldukça geniş ve bu yöntem günümüz dünyasının mühendislik hizmet talebinin büyüklüğüne paralel olarak elektronik ortamda programlama ile oldukça büyük bir iş birliği içerisinde çalışmaktadır. Buna göre, günümüzde çeşitli bilgisayar yazılımları sayesinde, başlıcaları yapısal analiz, akış analizi, termal analiz, havacılık, geoteknik mühendisliği, elektro-manyetizma, otomotiv, dişçilik, biyomekanik olmak üzere birçok alanda sonlu eleman analizleri çok yoğun bir şekilde kullanım halindedir. Tez kapsamında, makro ölçeğin aksine nano ölçekli katıların sonlu eleman analizleri inceleneceğinden yöntem hakkında detay bilginin verilmemesi tercih edilmiştir. Yöntem hakkında temel bilgiler, tarihçe, dayanak esasları ve genel uygulamalar gibi yönleri ele alan çeşitli çalışmalara açık bilimsel literatürden rahatlıkla ulaşılabilmektedir.

Sonlu elemanlar yönteminin makro düzeyli problemlerde geniş bir uygulama alanı ve çözümleme için büyük bir başarısının olmasının yanı sıra, nano ölçekli yapılar üzerinde geçmişi henüz yaklaşık on beş yıl öncesine dayanan uygulamalarının mevcut olduğu da tez konusu göz önüne alınarak kesinlikle ifade edilmelidir. Bahsi edilen dönemde tek doğrultulu nanoçubuk yapılarının temel kinematik kuramlarına dayanan yani kapsamı oldukça kısıtlı problemlerle incelenmesine başlanan atomik boyut etkili sonlu elemanlar analizi, günümüze değin giderek artan basılı çalışmalarla büyük bir yol kat etmiştir. Bir sonraki alt başlıkta bu anlatılan mevzu için bazı referanslar örnek gösterilmiş ve bazı kaynak taramalarına da yer verilmiştir.

2.6. Bilimsel Literatür Özeti

1960'ların hemen başında macerasına başlayan nanoteknolojik çalışmaların gittikçe hız kazanması ve bunun sonucunda nano-elektro-mekanik-sistem teknolojisi üzerindeki çalışmaların ilgi çekmesi, bu sistemlerin uygun yapısal tasarım mevzusunu öne çıkarmıştır. Atomik ölçekli yapının tasarımı öncesinde bunun bağlı olduğu mekanik davranışının anlaşılmasını konu edinen simülasyon tabanlı çalışmaların getirdiği yükler nedeniyle bu konuda bilim camiasının boyut etkisine dayanan yüksek mertebeden sürekli ortam teorilerini geliştirerek atomik ölçekli yapıların mekaniğini bu teorik yaklaşımlar üzerinden çözümlemeye çalıştığı yaklaşık son yirmi yıllık süreçte çok iyi bilinmektedir. Boyut etkisini göz önüne alan teorik yaklaşımlardan birisi de Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisi olup, bu teori konu hakkındaki bilimsel literatürde büyük bir popüleriteye sahiptir.

İlk dönemlerde nanoyapıların homojen malzemeden imal edilme ve yapı kinematığında temel etkileri gözetme gibi temel durumlarını göz önüne alan temel çalışmalar oldukça yaygın olsa da kompozit malzeme teknolojisindeki gelişmeler zamanla nanomekanik alanına da önemli etkilerde bulunmuştur. Bu nedenle, tez konusu da düşünülerek bu alt başlıkta çoğunlukla fonksiyonel değişimli malzemeden imal edilen nanoyapıların yerel olmayan mekaniği hakkındaki seçilmiş çalışmalardan kısaca bahsedilecektir.

Yerel olmayan elastisite teorisi esasen matematiksel fizik denklemlerine dayanır (Numanoğlu 2017, 2019). Bu konuda Gurtin (1965) ve Kunin (1969) tarafından yapılan temel çalışmaların ardından A.C. Eringen ve arkadaşları tarafından gerçekleştirilen çalışmalarla (Eringen 1972, 1973, 1977, 1978, 1983, 1984, 2002; Eringen ve Edelen 1972; Eringen ve Kim 1977; Ari ve Eringen 1983) yerel olmayan elastisite teorisi katı cisimler mekaniğinde bir temele oturtulmuştur. Yerel olmayan teorelin elastik katılardaki ilk uygulamaları ise 2000'li yılların başında çoğunlukla Euler-Bernoulli nanokirişleri üzerinde gerçekleştirilen eğilme (Peddieson vd. 2003; Wang ve Liew 2007), burkulma (Sudak 2003; Wang vd. 2006) ve titreşim analizleri (Wang ve Varadan 2006) ile olmuştur. Nanokiriş analizlerini kinematik açıdan daha kapsamlı inceleyen çalışmalara da rastlanmıştır (Reddy 2007; Reddy ve Pang 2008). Öte yandan, basit (elemanter) eksenel nanoçubuk titreşimleri (Aydoğdu 2009, 2012) hakkında incelemeler de yapılmıştır. Yaklaşık ilk altı yıllık süreçteki bu temel çalışmalarda çoğunlukla karbon nanotüp, nanoyapı malzemesi olarak düşünülmüştür. Homojen malzemeyi göz önüne alan nanokirişlerde yerel olmayan analizlerin kapsamı izleyen süreçte oldukça genişlemiştir ancak tez konusu da düşünüldüğünde bu alt başlık kapsamında bu çalışmalara daha fazla girilmemesi tercih edilmiştir. Bu konuda Numanoğlu (2019) tarafından verilen literatür taraması incelenerek bilgi alınabilir.

Elbette yerel olmayan mekanik analizler üzerine temel çalışmalar analitik çözümlemelere dayanmaktadır. Fakat zamanla incelenen problemler daha da karmaşık bir yapıda olduğundan çeşitli sayısal yaklaşımlar nanomekanik literatürü içerisinde yerini almıştır. Bunların içerisinde yerel olmayan sonlu eleman formülasyonu önemli bir yerdedir. Bu konuda, Euler-Bernoulli kirişlerinin mekaniği (Pradhan ve Phadikar 2010; Alshorbagy vd. 2013; Eltaher vd. 2013a; Eptaimeros vd. 2016; Dinçkal 2016; Demir ve Civatek 2016, 2017; Khodabakshi ve Reddy 2015; Demir vd. 2018; Eptaimeros vd. 2018; Uzun vd. 2018; Numanoğlu vd. 2019; Numanoğlu 2020), basit çubuk titreşimleri (Narendar 2012; Adhikari vd. 2013a, 2013b; Demir ve Civatek 2013; Chang 2013; Li vd. 2016; Uzun vd. 2020; Numanoğlu ve Civatek 2022), burulma titreşimleri (Lim vd. 2015; Numanoğlu ve Civatek 2019a), Timoshenko kirişinin mekaniği (Pradhan 2012; Pradhan ve Mandal 2013; Alotta 2014; Numanoğlu vd. 2021; Numanoğlu vd. 2022; Fakher ve Hosseini-Hashemi 2022), yüksek mertebeden kayma deformasyonlu eğrisel nanokirişlerin mekaniği (Ganapathi vd. 2018; Polit vd. 2018), kaymalı (Poisson etkili) eksenel çubuk titreşimleri (Civatek ve Numanoğlu 2020) ve ayrıık nanoyapıların serbest titreşimleri (Numanoğlu ve Civatek 2019b, 2024; Russillo vd. 2021; Hozhabrossadati vd. 2022) gibi çalışmalar örneklenebilir.

Tez konusu göz önüne alındığı zaman homojen kayma deformasyonlu nanokirişlerin yerel olmayan mekanik analizleri hakkında seçilmiş çalışmalara izleyen sayfadan itibaren değinilmektedir.

Nanokirişlerin sıcaklık etkisi altında yerel olmayan titreşimi Benzair vd. (2008) tarafından formüle edilmiştir. Timoshenko kiriş teorisine göre kayma deformasyonu ve sıcaklıktan kaynaklı eksenel kuvvete göre hareket denklemi elde edilmiş olup, uygulama olarak iki ucu basit mesnetli tek duvarlı karbon nanotüplerin yerel olmayan frekansları üzerinde atomik parametre, ortam sıcaklığı ve narinlik oranının etkileri grafiksel olarak ele alınmıştır.

Ansari vd. (2011) Winkler zeminine oturan tek duvarlı karbon nanotüplerin termal burkulmasını çalışmışlardır. Söz konusu mekanik analizin yönetici denklemini çözmek için genelleştirilmiş diferansiyel kuadratür metodu kullanılmıştır. Üç farklı sınır şartlı nanokirişlerin burkulma modlarının kritik sıcaklıkları üzerinde mod sayısı, narinlik oranı ve atomik parametrenin etkileri araştırılmıştır.

Shen vd. (2012) uçta küresel biyonesne eklentili çok duvarlı karbon nanotüpün konsol kiriş modelinin (biyonsensör modeli) yerel olmayan serbest titreşimini transfer fonksiyonları yöntemi vasıtasıyla incelemiştir. Uç eklentisinin dönel ataletinin ihmal veya dahil edilmesi durumları altında eklenti çapının değişimine göre boyutsuz frekanslar mukayese edilmiştir. Bir benzer çalışmaya göre, uçta nanoparçacık eklentili daralan nanokirişin serbest titreşimi transfer fonksiyon metodu ve pertürbasyon metodu ile Tang vd. (2014) tarafından çalışılmıştır. Daralma profili lineer olarak düşünülmüştür. Daralma oranı, mod sayısı, eklenti kütlesi ve narinlik oranının etkileri tartışılmıştır.

Ke vd. (2009) Winkler zeminine oturan çift duvarlı karbon nanotüplerin yerel olmayan lineer olmayan enine serbest titreşimini araştırmışlardır. Lineer olmama durumu von Kármán tipi şekil değiştirme-deplasman ilişkisi ile düşünülmüştür. Ayrıca nanoyapı duvarları arasındaki van der Waals etkileşimi de dikkate alınmıştır. Titreşimin diferansiyel kuadratür çözümüne göre, üç farklı sınır şartlı nanokirişin frekans oranları ve mod şekilleri üzerinde atomik parametre ve yapı boyutlarının etkisi irdelenmiştir.

Ansari vd. (2015a) nanokirişlerin yerel olmayan lineer olmayan zorlanmış titreşiminde manyetik-elektrik-termal etkileri diferansiyel kuadratür çözümü ile araştırmışlardır. Manyetik ve elektrik etkiler Maxwell eşitliğine ve lineer olmayan şekil değiştirmeler von Kármán eşitliğine göre formüle edilmiştir. Üç farklı sınır şartlı nanokirişlerin genlikleri üzerinde frekans oranı, boyutsuz atomik parametre, sıcaklık değişimi ve manyetik potansiyel gibi farklı parametrelerin etkileri ele alınmıştır.

Tek duvarlı karbon nanotüplerin yerel olmayan lineer olmayan burkulma ve burkulma sonrası analizleri için diferansiyel kuadratür çözümü Ansari vd. (2015b) tarafından yapılmıştır. von Kármán tipi lineer olmama durumu da analize katılmıştır. Üç farklı sınır şartlı nanokirişin yerel olmayan kritik burkulma yükü oranları ve burkulma deformasyonları üzerinde nanotüp geometrik boyutlarının etkileri incelenmiştir.

Torabi ve Dastgerdi (2012) kayma deformasyonlu nanokirişlerin yerel olmayan serbest titreşiminde yapısal çatlak etkisini incelemiştir. Nanokirişin burulma yayıyla modellenmiş tek bir çatlaka sahip olduğu düşünülmüştür. Çözüm analitik olarak elde edilen hareket denklemleri ve sınır şartlara ek olarak çatlak noktasındaki uygunluk şartlarının uygulanması üzerinden gerçekleştirilmiştir. İki farklı sınır şartlı nanokirişin frekansları üzerinde kayma deformasyonunun, yerel olmayan parametrenin, çatlak şiddetinin ve çatlak konumunun etkileri ele alınmıştır.

Lei vd. (2013) yerel olmayan nanokirişlerin sönümlü titreşimini incelemişlerdir. Sönümün matematiksel modeli olarak Kelvin-Voigt viskoelastisite tanımı kullanılmıştır. Mekanik analizin çözümü için transfer fonksiyonu metodundan faydalanılmıştır. Üç farklı sınır şartlı nanokirişlerin sönümsüz ve sönümlü serbest titreşim boyutsuz frekansları karşılaştırılmış, frekanslar üzerinde viskoelastik sönüm ve boyutsuz atomik parametrenin etkileri araştırılmıştır.

Tuna ve Kirca (2016) eğilme analizinde paradoks yaşanan ankastre mesnetli nanokiriş modellerinin doğru çözümü için Laplace dönüşümüne bağlı bir yaklaşım önermiştir. Yaklaşım kullanılarak iki farklı sınır şartlı ankastre mesnetli nanokirişlerin deplasman değerlerine kayma deformasyonunun ve yapı boyutlarının etkisi ele alınmıştır.

Pradhan (2012), Timoshenko nanokirişlerinin statik, titreşim ve burkulma analizleri için sonlu elemanlar formülasyonlarını sunmuştur. Sonlu eleman prosedürü Galerkin çözümü ile elde edilmiştir. İki ucu basit mesnetli nanokirişlerin deplasman, kritik burkulma yükü ve temel mod doğal frekanslarının boyutsuz formları doğrulanmış ve bunlar üzerinde atomik parametrenin etkileri araştırılmıştır. Ayrıca bu sonlu elemanlar formülasyonu kullanılarak kayma deformasyonlu nanokirişlerin termo-mekanik analizleri de Pradhan ve Mandal (2013) tarafından çalışılmıştır.

Winkler zeminine oturan nanokirişlerin yerel olmayan burkulması Wu ve Liou (2016) tarafından Reissner'in karışık varyasyon teorisi yaklaşımıyla formüle edilmiştir. Analizde von Kármán tipi lineer olmama durumu da gözetilmiştir. Dört farklı sınır şart için elde edilen kritik burkulma parametreleri doğrulanmıştır ve burkulma yükleri üzerinde mod sayısının ve atomik parametrenin etkileri incelenmiştir.

Wu ve Lai (2015) çift parametrelili elastik zemine oturan nanokirişin yerel olmayan serbest titreşimini Reissner'in karışık varyasyon teorisi üzerinden çalışmışlardır. Dört farklı sınır şartlı nanokirişin boyutsuz frekansları kesin sonuçlarla karşılaştırılmıştır ve frekanslar üzerinde yapı boyutları ve zemin parametrelerinin etkileri tartışılmıştır.

Numanoğlu vd. (2021), termo-elastik bir ortamda yer alan yerel olmayan Timoshenko nanokirişlerinin serbest titreşimi için ağırlıklı kalıntı metoduna dayalı sonlu elemanlar formülasyonunu vermişlerdir. Buna göre, birleştirilmiş bir yaklaşım ile elde edilen hareket denklemi, iki düğümlü sonlu eleman kinematiğine dayalı olarak bir özdeğer problemine dönüştürülmüştür. Dört farklı sınır şartlı nanokirişlerin frekansları için yerel olmayan parametre, sıcaklık ve elastik zemin etkileri ele alınmıştır.

Numanoğlu vd. (2022), kayma deformasyonsuz nanokirişlere (Euler-Bernoulli kirişi) ek olarak Timoshenko ve Rayleigh nanokirişlerinin termal serbest titreşimi için yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonunu açıklamışlardır. Dört farklı sınır şartlı nanokirişlerin yerel olmayan boyutsuz frekansları üzerinde sıcaklık değişimi ve narinlik oranı değişiminin etkileri üzerinden kayma deformasyonunun önemi araştırılmıştır.

De Rosa vd. (2021) uçta kütle ve elastik yay eklentili daralan nanokirişin titreşim analizini ele almıştır. Nanokiriş için lineer daralma profili düşünülmüştür. Hareket denkleminin çözümü diferansiyel kuadratur metoduna bağlı olarak verilmiştir. Farklı daralma oranları için temel mod boyutsuz frekansları karşılaştırılarak çözüm doğrulanmış ve frekans oranlarının değişimine daralma oranının etkilerinden bahsedilmiştir.

Küresel nanoparçacıkla birleşik iki ucu ankastre nanokirişin serbest titreşimi Ceballes vd. (2022) tarafından analitik olarak formüle edilmiştir. Parçacığın kütsel bir eklenti olduğı ve nanokiriş üzerinde serbestçe dolaşabildiğı düşünölmüştür. Uygulama olarak parçacık konumunun doğa frekanslar üzerindeki etkileri incelenmiştir.

Numanoğlu (2022), iki ucu basit mesnetli nanokirişlerin kayma deformasyonlu çökmeleri üzerinde kesit alan etkisini ele almıştır. Tekil ve yayılı yük altındaki iki ucu basit mesnetli nanokirişin analitik çözümle elde edilen çökmeleri dört farklı kesit şekli için hesaplanmış olup, sonuçlar üzerinde kesit şeklinin, kiriş uzunluğunun ve yük şiddetinin ve boyutsuz atomik parametrenin etkileri araştırılmıştır.

Abdullah vd. (2023) çatlaklı yerel olmayan Timoshenko kirişlerinin termal serbest titreşimini araştırmışlardır. Çatlak dönel yay ile modellenmiştir ve termal yük Poisson etkili eksenel bir kuvvet olarak formüle edilmiştir. Sonuçlar üzerinde boyutsuz atomik parametrenin, çatlak şiddetinin ve sıcaklık değişiminin etkileri tartışılmıştır.

Nanokiriş veya nanoçubuk gibi düz eksenli mekanik katılardan farklı olarak halkasal nanoyapılarda da kayma deformasyonu etkisinin ele alındığı gözlemlenmektedir. Moosavi vd. (2011), yüksek mertebeden kayma deformasyonuna dayanan nanohalkaların düzlem içi yerel olmayan serbest titreşimini analitik olarak formüle etmişlerdir. Sonuçlar üzerinde atomik parametrenin ve nanohalka çapının etkileri incelenmiştir.

Bunların dışında, yerel olmayan elastisite kapsamında kayma deformasyonu düzlemsel ayırık sistemler için de gözetilmiştir. Buna göre, Numanoğlu ve Civalek (2024b), eğilme etkileri Timoshenko kiriş teorisine dayanan düzlemsel nanoçerçevelerin yerel olmayan serbest titreşim analizi için sonlu eleman çözümü tabanlı bir matris deplasman formölasyonu sunmuşlardır. Bu formölasyon üzerinden farklı tip geometrilere sahip nanoçerçevelerin boyutsuz frekansları üzerinde atomik parametre ve çerçeve geometrisinin etkileri incelenmiştir.

Öte yandan, fonksiyonel değişimli malzemelerin (FDM) nanomekanikteki ilk uygulamaları 2010'lu yılların başlarında gözlemlenmektedir. FDM nanoçubukları hakkındaki ilk çalışmalarda malzeme için en alt yüzeyde %100 çelik-en üst yüzeyde %100 alüminyum düşünölmüş ve malzemenin klasik karışım kuralı ile modellenmiştir. Ayrıca ilk çalışmalarda mekanik analiz çözümünde sonlu elemanlar formölasyonlarından faydalanıldığı gözlemlenmektedir. FDM'lerin yerel olmayan mekaniğı hakkında kaynak taramaları bu alt başlığın buradan itibaren devam eden kısmında verilmektedir.

Euler-Bernoulli nanokirişlerinin titreşim analizleri Eltaher vd. (2013b) tarafından sunulmuştur. Dört farklı sınır şarta sahip nanokirişlerin ilk beş mod boyutsuz frekansları üzerinde yerel olmayan parametre ve narinlik oranının etkileri araştırılmıştır. Sonuçlar, yerel olmayan frekanslar üzerinde FDM güç indeksinin önemli olduğunu göstermiştir. Malzeme ve kinematik yönlerinden aynı nanoyapı modelinin eğilme ve burkulma analizleri de Eltaher vd. (2013c) tarafından çalışılmıştır.

Yerel olmayan nanokirişler üzerindeki yukarıda anlatılan ilk çalışmalarda, kesitin geometrik merkezi aynı zamanda malzeme merkezi olarak düşünölmüştür yani homojen malzemenin geometrik eksenı aynı zamanda FDM'nin nötr eksenidir. Ancak izleyen çalışmalarda, geometrik eksenle arasında küçük deplasman yaklaşımından kaynaklanan

bir fark oluşan nötr eksen etkisini hesaba katan çalışmalara da rastlanılmıştır. İlk defa Eltaher vd. (2013b)'nin Euler-Bernoulli nanokirişlerinin serbest titreşimini buna göre modellediği anlaşılmıştır. Çalışmada geometrik merkez ile malzeme merkezi arasındaki mesafe formüle edilmiştir. Güç indeksinin bu mesafe üzerindeki etkisinin yanı sıra iki ucu basit mesnetli nanokirişlerin boyutsuz frekansları üzerinde güç indeksi, nötr eksen ve malzeme oranı gibi çeşitli faktörler gözetilmiştir. Yazarlar, nötr eksen etkisinin frekanslarda belirli durumlar için %10'un üzerinde sapmaya neden olduğunu ve bu nedenle FDM nanokirişler üzerinde önemli etkisi olduğunu vurgulamışlardır.

Timoshenko nanokirişlerinin titreşimi üzerinde nötr eksen etkisi Eltaher vd. (2014a) tarafından çalışılmıştır. İlgili analiz yerel olmayan sonlu elemanlar hakkındaki ilk çalışmalardan farklı olarak üç düğümlü bir sonlu eleman kinematikine dayanmaktadır. Üç farklı sınır şartı sahip nanokirişlerin ilk üç mod frekansları geometrik ve nötr eksenler için karşılaştırılmıştır. Yine üç düğümlü bir sonlu eleman modeline dayanan Timoshenko nanokirişlerinin nötr eksen etkisiyle eğilmesi ve burkulması Eltaher vd. (2014b) tarafından incelenmiştir.

Rahmani ve Pedram (2014) çelik-alümina FDM nanokirişin Timoshenko teorisine göre serbest titreşimini analitik olarak formüle etmişlerdir. Malzeme rijitlik ve kütle hesaplarında nötr eksen etkisi ihmal edilmiştir. İki ucu basit mesnet sınır şartını gözetenek nanokirişlerin boyutsuz frekansları üzerinde kiriş boyutlarının, boyutsuz atomik parametrenin ve güç indeksinin etkileri araştırılmıştır.

Şimşek ve Yurtcu (2013) FDM nanokirişlerin yerel olmayan statik ve stabilite davranışlarını incelemişlerdir. Elde edilen hareket denklemleri uygun seri açılımları ile çözülerek iki ucu basit mesnetli nanokirişlerin boyutsuz frekans ve burkulma yükü değerleri üzerinde kayma deformasyonunun, atomik parametrenin, güç indeksinin ve narinlik oranının etkileri açıklanmıştır.

Ebrahimi ve Salari (2015a) termal etkiler altındaki FDM Euler-Bernoulli nanokirişlerin serbest titreşimini analitik ve diferansiyel transformasyon metotları ile incelemişlerdir. Malzeme özellikleri için Touloukian (1967) tarafından önerilen sıcaklığın lineer olmayan fonksiyonu kullanılmıştır. Klasik karışım kuralına göre modellenen Al_2O_3 -SUS304 malzemesinin üç farklı sınır şartlı kirişin boyutsuz frekansları üzerinde boyutsuz atomik parametre, güç indeksi ve ortam sıcaklığının etkileri incelenmiştir. Buna ek olarak, Si_3N_4 -SUS304 malzeme modelinin Timoshenko teorisine dayanan yerel olmayan serbest titreşim ve burkulma analizleri de analitik ve diferansiyel transformasyon çözümleri ile Ebrahimi ve Salari (2015b) tarafından araştırılmıştır.

Aria ve Friswell (2019) yerel olmayan FDM Timoshenko nanokirişlerinin serbest titreşim ve burkulma analizi için on serbestlikli bir sonlu eleman çözümü geliştirmişlerdir. Önceki çalışma özetlerinde bahsedilen FDM nanokirişlerin nötr eksen hesabı rijitlik ve kütle özelliğini etkilemektedir fakat bu çalışmada nötr eksenin malzeme efektif özelliklerine de dahil edilmiş olması dikkat çekmiştir. Buna göre üç farklı sınır şartı sahip nanokirişlerin frekans ve burkulma yük parametreleri üzerinde kiriş boyutları, atomik parametre ve güç indeksinin etkileri incelenmiştir. Öte yandan, bu çalışmaya konu sonlu eleman modeli Aria vd. (2019) tarafından pürüz fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden imal edilmiş kayma deformasyonlu nanokirişin yerel olmayan termo-elastik titreşim ve burkulmasına da uygulanmıştır.

Hosseini ve Rahmani (2016) eğrisel FDM nanokirişlerin yerel olmayan termal titreşimini çalışmışlardır. Eğrisel nanokirişin kinematığında Euler-Bernoulli teorisi gözetilmiş, malzeme modellemesinde ise klasik karışım kuralı ve lineer olmayan sıcaklık dağılımı göz önüne alınmıştır ancak nötr eksen etkisi göz ardı edilmiştir. Analitik olarak elde edilen yerel olmayan hareket denklemleri seri açılımları ile çözülmüş olup, iki ucu basit mesnetli nanokirişin frekansları üzerinde boyutsuz atomik parametre, güç indeksi, sıcaklık, eğrilik açısı gibi faktörler ele alınmıştır.

Yüksek mertebeden bir kayma deformasyon teorisi olan Reddy kiriş teorisine (üçüncü mertebeden kiriş teorisi) dayanan ve çift parametrelili elastik zemine oturan FDM nanokirişlerin yerel olmayan termal titreşimi Ebrahimi ve Barati (2016) tarafından incelenmiştir. Malzeme homojenizasyonunda Mori-Tanaka modeli (Mori ve Tanaka 1973), efektif malzeme özellikleri için sıcaklığın lineer olmayan fonksiyonu ve sıcaklık değişimi için üç farklı dağılım modeli göz önüne alınmıştır. Elde edilen hareket denklemi uygun seri açılımları ile çözülmüştür. Boyutsuz frekanslar üzerinde atomik parametre, güç indeksi ve termo-elastik parametrelerin etkileri araştırılmıştır.

Rahmani ve Jandaghian (2015), üçüncü mertebeden kiriş teorisi ile FDM nanokirişlerin yerel olmayan burkulmasını araştırmışlardır. İki ucu basit mesnetli kiriş için hareket denklemlerine seri açılımı ve dört tür sınır şart için enerji denklemlerine Rayleigh-Ritz çözümünün uygulanmasıyla kritik burkulma yükleri elde edilmiştir.

FDM Timoshenko nanokirişlerinin piezo-elektrik ve termal etkiler altındaki burkulma analizi Ebrahimi ve Salari (2015c) tarafından sunulmuştur. Elde edilen yönetici denklemler iki ucu basit mesnetli nanokiriş için seri açılımları ile çözülmüştür ve çeşitli parametreler altında kritik burkulma sıcaklıkları verilmiştir.

Nazemnezhad ve Hosseini-Hashemi (2014) von Kármán tipi lineer olmayan FDM nanokirişlerin yerel olmayan titreşimini Euler-Bernoulli teorisi ile araştırmışlardır. Mekanik analiz iki tip sınır şartın şekil fonksiyonu için Galerkin metodu ile çözülmüştür. Kirişlerin çeşitli parametreler için lineer olmayan frekansları elde edilmiştir.

Hamed vd. (2016), sigmoid dağılıma sahip FDM nanokirişlerin yerel olmayan serbest titreşimini bir sonlu eleman çözümüyle araştırmışlardır. Kiriş kinematığında kayma deformasyonu ihmal edilmiştir. İki ucu basit mesnetli nanokirişlerin boyutsuz frekansları farklı parametreler altında hesaplanmıştır.

Soltanpour vd. (2017) elastik zemine oturan çatlaklı FDM Timoshenko nanokirişlerinin yerel olmayan serbest titreşimini analitik olarak araştırmışlardır. Kirişte çatlak hasarı dönel yayla temsil edilmiştir. İki farklı sınır şartına sahip nanokirişin frekansları üzerinde çeşitli parametrelerin etkisi incelenmiştir.

Refainejad vd. (2017) çift parametrelili elastik zemine oturan yüksek mertebeden kayma deformasyonlu FDM nanokirişlerin yerel olmayan eğilme, burkulma ve serbest titreşim problemlerini ele almışlardır. Nanokiriş kinematığı için dokuz farklı yüksek mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorisi gözetilmiştir. Problemlerin yönetici denklemleri varyasyon cebriyle elde edildikten sonra iki ucu basit mesnetli nanokirişler için uygun seri açılımlarıyla çözülmüştür. Nanokirişin statik çökme, burkulma yükü ve titreşim frekansları üzerinde çeşitli parametrelerin etkisi detaylı olarak tartışılmıştır.

Lal ve Dangi (2019) birinci mertebeden kayma deformasyonlu lineer daralan FDM nanokirişin termal titreşimini diferansiyel kuadratür çözümü üzerinden araştırmışlardır. İki ucu basit mesnetli nanokirişlerin çeşitli parametreler altında boyutsuz frekansları ve mod şekilleri sunulmuştur.

Fang vd. (2020), dönen FDM nanokirişlerin termal titreşim ve burkulma problemlerini ele almışlardır. Analizde kayma deformasyonları ihmal edilmiş ve von Kármán tipi lineer olmayan şekil değiştirme gözetilmiştir. Elde edilen hareket denklemleri iki farklı sınır şart için Galerkin yöntemiyle çözüme kavuşturulmuştur. Nanokirişlerin kritik sıcaklıkları ve boyutsuz frekansları hesaplanmıştır.

Civalek vd. (2022) uçları hem basit hem de elastik yay mesnetli FDM nanokirişlerin Euler-Bernoulli teorisine göre burkulma analizini çalışmışlardır. Burkulmanın yönetici denklemi Stokes dönüşümü vasıtasıyla gerçekleştirilmiştir. Söz konusu nanokiriş yapısının farklı parametrelere göre kritik burkulma yükleri verilmiştir.

Uzun vd. (2023) Winkler zeminine oturan FDM Euler-Bernoulli nanokirişlerin yerel olmayan serbest titreşimi için sonlu eleman formülasyonunu geliştirmişlerdir. Üç farklı sınır şartlı nanokirişin çeşitli parametrelere göre doğal frekansları hesaplanmıştır.

El-Borgi vd. (2015) lineer olmayan elastik zemine oturan FDM Euler-Bernoulli nanokirişinin yerel olmayan serbest ve zorlanmış titreşim analizlerini işlemişlerdir. Ayrıca lineer olmayan şekil değiştirme de hesaba katılmıştır. Söz konusu hareket denklemleri varyasyonel iterasyon ve çoklu ölçek yöntemleri ile çözülmüştür. İki ucu basit mesnetli nanokirişlerin farklı parametreler altında lineer olmayan frekansları ve frekans cevapları elde edilmiştir.

Arefi ve Zenkour (2017a) manyetik ve elektrik etkiler altında ve visko-Pasternak zeminine oturan FDM Timoshenko kirişlerinin dalga yayılım analizini sunmuşlardır. Hareket denklemi birleşik bir Hooke yasası-Lame sabitleri ile temellendirilmiştir. Varyasyon cebri üzerinden elde edilen hareket denklemi harmonik eşitlikler vasıtasıyla çözülerek nanokirişlerin çeşitli doğrultularının dalga yayılım hızlarına ulaşılmıştır.

Lei vd. (2019) eksenel yönde fonksiyonel derecelendirilmiş nanokirişin burkulmasında termal etkileri araştırmışlardır. Kiriş kinematiği olarak sinüzoidal kayma deformasyonu (Touratier 1991) gözetilmiştir. Ayrıca sıcaklık dağılımı da sinüs fonksiyonu ile modellenmiştir. Hareket denkleminin Chebyshev polinomları ile çözümü üzerinden iki ucu basit mesnetli nanokirişlerin burkulma yükleri hesaplanmıştır.

Belarbi vd. (2021) parabolik kayma deformasyonu yaklaşımına dayanan kiriş kinematiği üzerinden FDM nanokirişin yerel olmayan eğilme ve burkulma analizleri hakkında iki düğümlü-sekiz serbestlikli bir sonlu eleman çözümü geliştirmişlerdir. Söz konusu formülasyon üzerinden nanokiriş yapısının çeşitli parametrelere göre boyutsuz çökme ve burkulma yükü değerleri elde edilmiştir.

Öte yandan, FDM'den imal edilmiş kayma deformasyonlu nanokirişlerin, ikinci bir boyut etkisiyle birleştirilmiş yerel olmayan yaklaşıma (yerel olmayan şekil değiştirme değişimi elastisite teorisi) dayanan mekanik analizleri de (Barretta vd. 2016; Norouzzadeh vd. 2018; She vd. 2018; Jalaei vd. 2019; Jalaei ve Civalek 2019; Ghoulipour

ve Ghayesh, 2020; Karami vd. 2020; Thang vd. 2021; Tang vd. 2021; Yue vd. 2021; Faghidian vd. 2022; Trabelssi ve El-Borgi 2022) de bilimsel literatürde yoğun çalışılan bir konudur.

Atomik ölçekli nanoçubukların da FDM modelleri üzerinden yerel olmayan burulmalı ve eksenel titreşim olgularının ele alındığı bilimsel literatürden bilinmektedir. Bunun yanı sıra, bu tür çubukların homojen olma ve FDM'den imal edilme durumları için farklı kinematik etkiler de gözetilmiştir. Dahası, yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonları ile nanoçubukların çeşitli titreşimi incelemeleri gerçekleştirilmiştir. Bütün bu anlatılanlar düşünülerek, bu altbaşlığın kalanında güncelliği bulunan çalışmalardan aşağıda kısaca bahsedilmektedir. İlk olarak homojen nanoçubuklar hakkında açıklamalar yapılmaktadır.

Demir ve Civalek (2013), nanoçubukların basit eksenel ve burulmalı titreşimleri için yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonunu açıklamışlardır. Hareket denklemlerine ortalama ağırlıklı kalıntının uygulanması ile elde edilen özdeğer denklemi çözülerek hesaplanan boyutsuz frekanslar analitik sonuçlarla mukayese edilerek formülasyon doğrulanmıştır. Nanoçubukların burulmalı ve eksenel titreşim frekansları ve dalga yayılım hızları üzerinde boyutsuz atomik parametrenin etkileri incelenmiştir.

Ecsedi ve Baksa (2017) Rayleigh teorisine dayanan ve eksenel ortama gömülü nanoçubukların serbest titreşimini analitik çözüm ile incelemişlerdir. İki farklı sınır şartlı nanoçubuğun yerel olmayan frekanslarının oranları üzerinde çubuk uzunluğunun, elastik ortam parametresinin ve mod sayısının etkileri araştırılmıştır.

Lim vd. (2015) nanoçubukların yerel olmayan statik ve dinamik burulması için sonlu eleman formülasyonunu vermişlerdir. İki farklı sınır şartlı nanoçubuğun farklı tork yükleri altındaki statik deformasyonları ve serbest titreşim frekansları analitik sonuçlarla mukayese edilmiş ve sonuçlar üzerinde atomik boyut etkisi araştırılmıştır.

Nazemnezhad ve Kamali (2018a) kalın nanoçubukların eksenel titreşimini analitik olarak incelemiştir. Kalın nanoçubukların kinematiği yanal deformasyon etkili (veya Poisson etkili) eksenel çubuk kuramı olan Bishop teorisine dayanmaktadır. İki farklı sınır şartlı nanoçubuklar için türetilen frekans denklemleri kullanılarak doğal frekanslar üzerinde yanal atalet etkisi, çubuk uzunluğu ve atomik parametrenin etkilerinden bahsedilmiştir. Bu çubuk modelinin elastik yay eklentili uçlara sahip olması durumu için Stokes dönüşümleri ile yerel olmayan doğal frekans hesapları da Uzun vd. (2020) tarafından sunulmuştur.

Karličić vd. (2018) Bishop çubuklarının yerel olmayan eksenel titreşimini analitik ve sonlu farklar çözümleri ile çalışmışlardır. Ayrıca bu çözüm, üyeleri birbiri ile elastik etkileşimde olan birleşik nanoçubuk sistemine de uygulanmıştır. Üç tür sınır şartlı eksenel nanoçubukların ve birleşik nanoçubuk sisteminin doğal frekansları elde edilmiştir.

Numanoğlu ve Civalek (2019a) eksenel ortama gömülü homojen nanoçubukların yerel olmayan burulmalı titreşimi için sonlu elemanlar çözümünü ele almışlardır. Burulmalı titreşime ağırlıklı kalıntının uygulanmasıyla elde edilen formülasyon üzerinden, ikisi genel ve ikisi elastik yay eklentili olmak üzere dört farklı sınır şartlı nanoçubuğun yerel olmayan burulma frekansları farklı parametreler için hesaplanmıştır.

Civalek ve Numanoğlu (2020) Bishop çubuk teorisi üzerinden eksenel ortama gömülü homojen nanoçubukların yerel olmayan eksenel serbest titreşimi hakkında bir sonlu eleman modelini açıklamışlardır. Sonlu eleman modeli için üç düğümlü eksenel eleman kullanılmıştır. Hareket denkleminin ağırlıklı kalıntı ile çözülmesi ile elde edilen frekansların analitik sonuçlara yakınsama çalışmaları üzerinden çözüm doğrulanmış, iki farklı sınır şartlı nanoçubuğun frekansları üzerinde çeşitli parametrelerin etkileri incelenmiştir.

Homojen Bishop nanoçubuğunun yerel olmayan şekil değiştirme elastisite teorisi ile eksenel titreşimi Gul ve Aydogdu (2022) tarafından sunulmuştur. Nanoyapının enerji denklemleri üzerinden gerçekleştirilen Ritz çözümünün sonucunda iki farklı sınır şarta sahip nanoçubukların doğal frekansları çeşitli etkilere göre hesaplanmıştır.

Nazemnezhad vd. (2023) Bishop nanoçubuklarının serbest titreşimini iki fazlı yerel/yerel olmayan elastisite yaklaşımı ile çalışmışlardır. Varyasyon cebri üzerinden elde edilen hareket denklemi genelleştirilmiş diferansiyel kuadratür yöntemi ile çözülmüştür ve iki tür sınır şartlı nanoçubukların doğal frekansları üzerinde çeşitli parametrelerin etkileri araştırılmıştır.

Numanoğlu ve Civalek (2022) tek çatlaklı basit eksenel nanoçubukların yerel olmayan serbest titreşim davranışını bir sonlu elemanlar formülasyonu ile açıklamışlardır. Formülasyonda, çatlak çubuk rijitliğinden düşük rijitlikli fakat uzunluksuz ve kütsüz bir sonlu eleman olarak düşünülmüştür. Bazı mukayese çalışmaları ile formülasyon doğrulanmış ve çeşitli parametrelere göre çatlaklı nanoçubukların boyutsuz frekansları elde edilmiştir.

Burulmalı nanoçubuklarda dairesel olmayan kesitler, çarpılma nedeniyle bir kayma etkisi meydana getirmektedir. Bu bağlamda, eliptik (Khosravi vd. 2020a), üçgensel (Khosravi vd. 2020b) ve dikdörtgensel (Khosravi vd. 2020c) kesitli nanoçubukların yerel olmayan burulma titreşim analizleri de analitik çözümlemeler yardımı ile verilmiştir. Çalışmalar kapsamındaki sayısal analizler dairesel kesitli olmayan nanoçubukların yerel olmayan burulmasında çarpılmanın frekansları önemli ölçüde etkilediğini ortaya koymaktadır. Bunlara ek olarak, eliptik ve üçgensel kesitli negatif Poisson etkili nanoçubukların iki farklı sınır şart modelinin yerel olmayan serbest titreşim frekansları da Seyfi vd. (2021) tarafından sunulmuştur.

Öte yandan, yerel olmayan FDM nanoçubuklar hakkında seçilmiş çalışmalar da bu altbaşlığın kalanında kısa özetler halinde anlatılmaktadır. İlk olarak, Şimşek (2012) daralan FDM nanoçubukların eksenel titreşim analizi için Galerkin çözümünü sunmuştur. Çubuk kinematiği basit çubuk, fonksiyonel derecelendirilme gradyanı eksenel yön ve daralma profili lineer daralma olarak gözetilmiştir. İki farklı sınır şarta sahip nanoçubukların doğal frekansları üzerinde mod sayısı, boyutsuz atomik parametre, güç indeksi, malzeme oranı ve daralma oranının etkileri ele alınmıştır.

Uzun ve Yaylı (2020) eksenel ve enine fonksiyonel derecelendirilmiş basit nanoçubukların yerel olmayan titreşimleri için sonlu elemanlar formülasyonunu ele almışlardır. İlgili formülasyon üzerinden söz konusu nanoçubukların boyutsuz frekansları üzerinde güç indeksi ve mod sayısının etkileri incelenmiştir.

Bahrami vd. (2019) uçta kütle ve lineer olmayan yay eklentili daralan kesitli FDM basit nanoçubuk modelinin serbest titreşimini harmonik bir fonksiyon yardımıyla incelemişlerdir. Eksenel derecelenen malzemenin ve kesit alanın üstel olarak değiştiği varsayılmıştır. Yerel olmayan frekans değerleri üzerinde çeşitli parametrelerin etkisi araştırılmıştır.

Nazemnezhad ve Kamali (2018b) eksenel yönde FDM Bishop nanoçubuğunun serbest titreşim analizini araştırmışlardır. Malzeme homojenizasyonu klasik karışım kuralına göre belirlenmiştir. Elde edilen hareket denklemi harmonik diferansiyel kuadratr metoduyla çözülerek iki ucu tutulu nanoçubukların çeşitli parametreler altında doğal frekansları hesaplanmıştır.

Arefi (2016) manyetik-elektrik etkiler altındaki FDM Bishop nanoçubuğunun birleştirilmiş bir yerel olmayan elastisite yaklaşımıyla (yerel olmayan şekil değiştirme elastisite teorisi) dalga yayılım analizini sunmuştur. Malzeme homojenizasyonu için klaisk karışım kuralı göz önüne alınmıştır. İlgili manyetik-elektrik tansörlerini temel alan ve varyasyonel cebre göre türetilen hareket denklemleri uygun dalga denklemleriyle çözülerek faz hızlarının gerçek ve sanal kısımları hesaplanmıştır. Buna benzer bir çalışma da, Arefi ve Zenkour (2017b) tarafından sunulan piezo-elektrik FDM Love-Bishop nanoçubuklarının yüzey enerjisini gözetken dalga yayılım analizleridir.

Arda (2021) eksenel FDM Bishop nanoçubuğunun yerel olmayan eksenel titreşimini Ritz metoduyla işlemiştir. İki farklı sınır şarta sahip nanoçubukların frekansları üzerinde Poisson etkisi ve çeşitli parametrelerin boyutsuz frekans ve genliklere etkisi incelenmiştir. Benzer bir çalışmada ise, aynı nanoçubuk modelinin boyuna dalga yayılımı Haar dalgacık yaklaşımı kullanılarak Arda vd. (2024) tarafından sunulmuştur.

Mohammadian ve Hosseini (2022) daralan geometrili ve karbon nanotüp yığılmalı FDM nanoçubuğun eksenel titreşimini incelemişlerdir. Nanoyapının boyut etkili kinematığı Bishop teorisi yerel olmayan şekil değiştirme değişimi elastisite teorisi ile yapılandırılmıştır. Malzeme homojenizasyonu için Mori-Tanaka modeli göz önünde bulundurulmuştur. Elde edilen hareket denklemi kuadratr eleman metodu ile çözülmüştür. İki farklı sınır şartlı nanoçubuğun boyutsuz frekansları üzerinde farklı parametrelerin etkileri araştırılmıştır.

Uzun vd. (2023) uçları elastik yaylarla desteklenmiş pürüz FDM Bishop çubuğunun yerel olmayan eksenel titreşimini konu almışlardır. Hareket denklemi için bir Stokes dönüşümü gerçekleştirilmiştir. İlgili nanoçubuk modelinin doğal frekansları için pürüzitenin etkileri ele alınmıştır.

FDM nanoçubukların eksenel titreşiminin yanı sıra burulmalı titreşimlerinin de yerel olmayan elastisite çerçevesinde incelendiği belirtilebilir. İki ucu elastik yay eklentili FDM nanoçubukların yerel olmayan burulma titreşimi için Stokes dönüşümü Civalek vd. (2022) tarafından formüle edilmiştir. Zarezadeh vd. (2020) manyetik alan altında ve elastik ortama gömülü FDM nanoçubukların yerel olmayan burulma titreşimini genelleştirilmiş diferansiyel kuadratr metodu ile incelemişlerdir.

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, atomik ölçekli kayma deformasyonlu fonksiyonel derecelendirilmiş nanoyapıların eğilme çubuğu (kiriş), eksenel çubuk ve çerçeve modellerinin yerel olmayan elastisite teorisine dayanan serbest titreşim analizleri değişkenlere ayırma tabanlı analitik çözüm ve ortalama ağırlıklı kalıntı tabanlı sonlu elemanlar metodu ile formüle edilecektir. Bunun için, ilk olarak mekanik analizin temeli olan yerel olmayan elastisite teorisi tanıtılacaktır.

3.1. Yerel Olmayan Elastisite Teorisi

Atomik yapıların mekanik davranışlarının klasik elastisite teorisi kullanılarak araştırılmasının gerçekçi olmadığı deneysel yöntemlerin bir sonucudur ve bu gerçek özellikle 2000’li yılların başından beri bilimsel literatürde belirtilmektedir. Klasik elastisite teorilerine göre mekanik analize esas teşkil edecek denklemler katı cismin tamamı için geçerlidir. Ancak, atomik yapının mekanik olaydaki yer değiştirmelerinden ileri gelen ilave gerilmeler ve şekil değiştirmeler sonsuzda değer aldığından yapının enerji ifadeleri de sonsuza gider. Bunun sonucunda mekanik analiz gerçekçi sonuçlar ortaya koyamaz.

Ayrıca, atomik yapının bir unsuru olan karakteristik iç uzunlukların yapının maruz kaldığı dış çevresel etmenlerle (mekanik kuvvet, ortam sıcaklığı, ortam nemi, piezomanyetik-elektrik etmenler, elastik ortam/zemin, vb.) etkileşimlere giriyor olması, deneysel çalışmaların önemli bir sonucudur. Gerek bu çıkarım gerekse deneysel ve simülatif yöntemlerin nano/mikro mekanik davranışın araştırılması üzerinde çeşitli zorluklar çıkarması, konuyla ilgilenen araştırmacıları “klasik teorilerin göz önüne almadığı atomik ölçeği mekanik analize dahil etme” fikrine yöneltmiştir. Bu durumun sonucu olarak klasik teorileri geliştirmek üzerine yapılan çalışmalar çeşitli yüksek mertebeden sürekli ortam teorilerini ortaya çıkarmıştır ve “yerel olmayan elastisite teorisi” bu anılan yeni sürekli ortam teorisi sınıfının önemli bir üyesi, belki de bilimsel literatür genelinde en bilinen üyesi konumundadır. Yerel olmayan elastisite teorisi kullanılarak, yukarıdaki paragrafta bahsedilen atomik yapının mekanik analizindeki çözümlenme sorunları ortadan kaldırılır.

Yerel olmayan elastisite teorisinin ana fikri, atomik yapının bir noktasındaki gerilme ve şekil değiştirmelerin, o noktanın bütün komşuluklarındaki gerilme ve şekil değiştirmelerine bağlı olmasıdır (Tepe 2007; Işık 2011; Numanoğlu 2017). Teoriyi öne süren A.C. Eringen tarafından atomik yapı dengesi aşağıdaki denklemle açıklanır (Eringen 1983):

$$\sigma_{ij,i} + \rho(f_j - \ddot{u}_j) = 0 \quad (3.1)$$

burada σ_{ij} yerel olmayan gerilme tansörünü, ρ nanoyapı birim hacim ağırlığını, f_j nanoyapı kütleli kuvvetini ve $\ddot{u}_j = d^2u_j/dt^2$ hareketin zamana göre ikinci türevini (ivmesini) tanımlamaktadır. Buna ek olarak, atomik yapıdaki bir $\mathbf{x}'$ noktasında yapı kinematığı aşağıdaki gibi ifade edilir (Eringen 1983):

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}') = \frac{1}{2}(u_{i,j}(\mathbf{x}') + u_{j,i}(\mathbf{x}')) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i(\mathbf{x}')}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(\mathbf{x}')}{\partial x_i}\right) \quad (3.2)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}') = \int_V \alpha(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \eta) C_{ijkl} \varepsilon_{ij} dV(\mathbf{x}') \quad (3.3)$$

burada ε_{ij} yerel olmayan şekil değiştirme tansörü, u_i ve u_j deplasman bileşenleri, x_i ve x_j konuma göre türev operatörleri, α yerel olmayan modül, nanoyapıdaki referans noktası $\mathbf{x}$ olmak üzere $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ Öklidyen formda uzaklık, C_{ijkl} dördüncü dereceden elastisite tansörü ve V nanoyapının uzayda kapladığı hacimdir. Öte yandan klasik gerilme tansörü aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$s_{ij}(\mathbf{x}') = C_{ijkl} \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}') = \lambda \varepsilon_{rr}(\mathbf{x}') \delta_{ij} + \mu \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}') \quad (3.4)$$

burada δ_{ij} Kronecker Delta sembolüdür. λ ve μ Lamé sabitleri olarak bilinir ve aşağıdaki gibi açıklanır:

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (3.5)$$

burada E , μ ve ν sırasıyla elastisite modülünü, kayma modülünü ve Poisson oranını belirtir. Denklem (3.3)'ün, Denklem (3.1)'de kullanımı ile aşağıdaki neticeye ulaşılmalıdır:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial x'_k} s_{ij}(\mathbf{x}') &= -\frac{\partial \alpha}{\partial x'_k} s_{ij}(\mathbf{x}') \\ &= -\frac{\partial \alpha}{\partial x'_k} [\alpha s_{ij}(\mathbf{x}')] + \alpha \frac{\partial s_{ij}(\mathbf{x}')}{\partial x'_k} - \int_{\partial V} \alpha(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) s_{ij}(\mathbf{x}') n_i(\mathbf{x}') dA(\mathbf{x}') \\ &\quad + \int_V \alpha(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) s_{ij,i}(\mathbf{x}') dA(\mathbf{x}') + \rho(f_j - \ddot{u}_j) = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Sonuç denklemde görülen birinci integral A yüzey alanı için yüzey gerilmelerini ifade eder. Böylece yerel olmayan teoremin klasik teoriden farklı olarak yüzey fiziğini de kapsadığı belirtilebilir. Denklemler (3.2) ve (3.4), Denklem (3.6)'da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &-\int_{\partial V} \alpha(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) [\lambda u_{r,r}(\mathbf{x}') \delta_{ij} + \mu (u_{i,j}(\mathbf{x}') + u_{j,i}(\mathbf{x}'))] n_i(\mathbf{x}') dA(\mathbf{x}') + \\ &-\int_V \alpha(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) [(\lambda + \mu) u_{i,ji}(\mathbf{x}') + \mu u_{j,ii}(\mathbf{x}')] dV(\mathbf{x}') + \rho(f_j - \ddot{u}_j) = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

elde edilir. Uygun sınır ve başlangıç koşullarının burada kullanımı ile deplasman vektörü $u = u(x, t)$ 'ye ulaşılabilir. Tabi başlangıç koşulları yerel olmayan gerilme tansörüne bağlıdır. Öngörülen sınır ifadesi ise

$$\sigma_{ij}n_i = \sigma_{(n)j} \quad (3.8)$$

olarak açıklanır (Eringen 1983).

Denklem (3.3)'teki η parametresi boyutsuz atomik parametre olarak bilinir:

$$\eta = \frac{e_0 a}{L} \quad (3.9)$$

burada e_0 atomik yapıya özgü olan ve deneysel belirlenen bir sabit, a iç karakteristik uzunluk ve L dış karakteristik uzunluktur. Atomik malzeme sabiti e_0 , maksimum değerine $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ konumundayken ulaşır. Bu durumda $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ parametresinin değerine bağlı olarak atomik malzeme sabitinin değeri azalır. Öte yandan, Eringen (1983) tarafından açıklandığı üzere,

- Boyutsuz atomik parametre η , 0'a yakınsarsa yerel olmayan modül α , Dirac Fonksiyonu δ 'ya yakınsar.
- Boyutsuz atomik parametre η , 1'e yakınsarsa yerel olmayan modül α , kafes dinamiği (lattik model) olarak bilinen ve nanoyapıdaki atomları birbirine elastik bağlı varsayan bir modele göre hesaplanır.

Eringen (1983) tarafından, Denklem (3.4)'te yer alan yerel olmayan modülün dalga yayılım eğrilerinin kafes dinamiği modeli yayılım eğrileri ile eşleştirilerek belirlenebileceği belirtilmiştir. Bu hususta bazı çalışmalar yerel olmayan modül hakkında şu denklemleri sunmaktadır (Eringen 1972; Eringen ve Ari 1983). Buna göre ilk olarak bir boyutlu yerel olmayan modeller

$$\alpha(|\mathbf{x}|, \eta) = \begin{cases} \frac{1}{e_0 a} \left(1 - \frac{|\mathbf{x}|}{e_0 a} \right) & |\mathbf{x}| \leq e_0 a \text{ ise} \\ 0 & |\mathbf{x}| \geq e_0 a \text{ ise} \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\alpha(|\mathbf{x}|, \eta) = \frac{1}{2e_0 a} e^{-\frac{|\mathbf{x}|}{e_0 a}} \quad (3.11)$$

$$\alpha(|\mathbf{x}|, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi L e_0 a}} e^{-\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}{L e_0 a}} \quad (3.12)$$

olarak açıklanırken iki boyutlu modül

$$\alpha(|\mathbf{x}|, \eta) = \frac{1}{2\pi (e_0 a)^2} K_0 \left(\frac{\sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}}{e_0 a} \right) \quad (3.13)$$

$$\alpha(|\mathbf{x}|, \eta) = \frac{1}{\pi L e_0 a} e^{-\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}{L e_0 a}} \quad (3.14)$$

denklemleri ile verilir. Denklem (3.13)'teki K_0 modifiye edilmiş Bessel fonksiyonudur ve aşağıdaki gibi ifade edilir (Haberman 2013):

$$K_0(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}} e^{-\sqrt{x^2 + z^2}} dz \quad (3.15)$$

Ayrıca, üç boyutlu yerel olmayan modül çeşitleri de aşağıdaki gibidir:

$$\alpha(|\mathbf{x}|, \eta) = \frac{1}{\sqrt{(\pi L e_0 a)^3}} e^{-\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}{L e_0 a}} \quad (3.16)$$

$$\alpha(|\mathbf{x}|, \eta) = \frac{1}{4\pi (e_0 a)^2 \sqrt{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})}} e^{-\frac{\sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}}{e_0 a}} \quad (3.17)$$

Yukarıda tanımlanan yerel olmayan modül tanımları içerisinde Denklem (3.10) ile verilenin analizde kullanılması ile, kafes dinamiğinin Born-Karman modeli ve bir boyutlu düzlem dalga yayılım eğrisi arasında mükemmel bir uyumu ortaya çıkardığı ifade edilebilir. Ek olarak, Denklem (3.13) ile yazılan iki boyutlu yerel olmayan modül üzerinden analizde maksimum hata %1.2 kadardır (Ari ve Eringen 1983). Diğer yerel olmayan modüllerin atomik dalga yayılım modelleri ile iyi bir uyum sağlaması için atomik malzeme sabiti ayrıca seçilmelidir (Eringen 1978).

Boyutsuz atomik parametrenin sıfıra yakınsaması durumu için yerel olmayan modülün Dirac fonksiyonuna yakınsadığı belirtilmişti. Bu durum yerel olmayan modülün Green fonksiyonunun lineer diferansiyel operatörü olması koşulu ile

$$L_0 \alpha(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \eta) = \delta(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \quad (3.18)$$

şeklinde belirtilir (Eringen 1983). Burada L_0 lineer diferansiyel operatörünü tanımlar. δ ise Dirac- δ fonksiyonu olarak bilinir. Yukarıdaki denklem aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$L_0 \sigma_{ij} = s_{ij} \quad (3.19)$$

burada lineer diferansiyel operatörü

$$L_0(\bullet) = 1 - L^2 \eta^2 \frac{\partial^2 (\bullet)}{\partial x^2} = 1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 (\bullet)}{\partial x^2} \quad (3.20)$$

olarak tanımlanır. Bu denklemin Denklem (3.19)'da kullanılmasıyla

$$\left(1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \sigma_{ij} = s_{ij} \quad (3.21)$$

ifadesine ulaşılır. Bu denklem üzerinden yerel olmayan elastisite için lineer, izotropik ve elastik katıların sırasıyla eksenel ve kayma gerilme-şekil değiştirme bünye bağıntıları aşağıdaki şekilde tanımlanır (Numanoğlu 2019):

$$\sigma_{ii} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 \sigma_{ii}}{\partial x^2} = s_{ii} = E \varepsilon_{ii} \quad (3.22)$$

$$\tau_{ij} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 \tau_{ij}}{\partial x^2} = t_{ij} = 2G \gamma_{ij} \quad (3.23)$$

burada $i, j = x, y, z$ eksenlerini temsil etmek suretiyle, σ_{ii} yerel olmayan eksenel gerilmeyi, τ_{ij} yerel olmayan kayma gerilmesini, ε_{ii} eksenel şekil değiştirmeyi, γ_{ij} kayma şekil değiştirmesini, s_{ii} klasik eksenel gerilmeyi, t_{ij} klasik kayma gerilmesini, E elastisite modülünü ve G kayma modülünü ifade eder.

3.2. Problemin Çözüm Prosedürü

3.2.1. Analitik çözüm

Sürekli sistemlerin mekaniği, diferansiyel denklemler aracılığıyla mekanik bir olaydan matematiksel bir probleme dönüştürülmektedir. Burada diferansiyel denklemin şekli (adi-kısmi, homojen-homojen değil, sabit katsayılı-değişken katsayılı, tek türevli adi-çok türevli adi) çözümü etkilemektedir. Titreşim analizleri, olayda rol alan temel parametreler olan konum ve zaman nedeniyle deplasmanın bu ikisine bağlı kısmi bir diferansiyel denklemini teşkil eder. Şayet dinamik analizde dış tahrik varsa (zorlanmış titreşim hali) kısmi diferansiyel denklem homojen olmayan, dış tahrik yoksa (serbest titreşim hali) kısmi diferansiyel denklem homojen bir haldedir. Bu tez kapsamında serbest titreşim analizleri ele alınacaktır. Serbest titreşimin diferansiyel denklemi genel formda aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\partial_{(n)x} d + \partial_{(n)t} d = 0 \quad (3.24)$$

burada ∂ kısmi diferansiyel operatörüdür. $d = d(x, t)$ türevlenebilir bir fonksiyon olup titreşim analizi için deplasmandır. x ve t türevleme değişkenleri olup, sırasıyla konum ve zamanı temsil eder. n ise türevleme miktarıdır. O halde homojen ve kısmi diferansiyel denklem çözümüyle ilgilenilmesi gerekmektedir. Bu tür diferansiyel denklemler “değişkenlere ayırma metodu” ile çözülebilmektedir:

$$d(x, t) = S(x)T(t) \quad (3.25)$$

burada $S = S(x)$ ve $T = T(t)$ sırasıyla modal çözüm (statik deplasman) ve harmonik çözüm olarak belirtilmektedir. Çözüm, Denklem (3.25)’in Denklem (3.24)’te yerine yazılması suretiyle, dinamik deplasmanın kısmi bir diferansiyel denkleminin statik deplasmanın adi bir diferansiyel denklemine dönüştürülmesi ile başlamaktadır. Ardından ilgili kısmi diferansiyel denklem karakteristik polinomlar ile incelenerek çözüm devam ettirilir. Çözüm sonucunda mod denklemi elde edilmektedir. Sabitlere bağlı olan mod denkleminde sınır şartlar yerine yazılarak bir aşikâr çözüme ulaşılır ve bu çözümün sonucu mekaniksel olarak doğal frekans anlamına gelir.

Uygulanışı oldukça kolay ve anlaşılır olan değişkenlere ayırma metodunun kısıtlandığı haller de mevcuttur ve açıkçası mühendislik mekaniğindeki birçok titreşim problemi bu metodun uygulanabileceği kadar basit değildir. Sınır şartların sayısının fazla olabilmesi, matematiksel yapı itibariyle karmaşık olabilmesi veya problemin yeterince sınır şart tanımlayamaması gibi başlıca sebeplerden dolayı değişkenlere ayırma çözümü kullanılamaz bir vaziyette olabilir. Böyle durumlarda, karmaşıklaşacak hesabın üstesinden gelmek için ilk olarak sürekli sistemin en azından geometrik sınır şartlarını sağlayan bir seri çözümü ile aranır. Bu tür durumlarda formüle edilmesi gereken Fourier seri ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$d(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin(\alpha_n x) \sin(\omega t - \theta) \quad (3.26)$$

burada d_n bilinmeyen seri katsayısı, α_n sistemin geometrik davranışını belirten bir katsayı, ω doğal frekans, t zaman ve θ faz açısı olarak tanımlanır. Örnek verilecek olursa, L uzunluklu eksenal çubuklarda, bir ucu tutulu diğer ucu serbest ve iki ucu tutulu sınır şartları için sırasıyla $\alpha_i = i\pi/L$ ve $\alpha_i = (2i - 1)\pi/2L$ olarak belirtilirken bu iki katsayı aynı zamanda eğilme çubuğu (kiriş) yapılarında sırasıyla iki ucu basit mesnetli ve bir ucu ankastre diğer ucu kılavuz (dönmeyen düşeyde kayıcı) mesnetli sınır şartlarını yansıtır.

3.2.2. Hareket denkleminin türetilmesi

Bir önceki alt başlıkta da ifade edildiği bir titreşim analizi, aslında fiziksel bir olay olan titreşimin matematiksel anlamda bir diferansiyel denkleme yani hareket denklemine dönüşmesi ve bunun tanımlı koşullara göre çözülmesi suretiyle çıktıların (mod şekli, frekans, periyot) hesaplanması sürecini kapsar. Dolayısı ile burada hareket denkleminin türetilmesinin başlıca bir gereklilik olduğu anlaşılmaktadır. Burada hareket denklemi, hareketin konum ve zaman değişkenlerine göre diferansiyellenebilen ifadelerinden oluşan bir denklemdir ve analize giren iç (kütle ataletleri) ve dış (tahrik, sönüm, elastik çevre, termal çevre, piezo-manyetik-elektrik etkiler, ortam nemi vb.) faktörlere göre tanımlı olmaktadır. Hareket denklemi sürekli yapı mekaniğinde yapı kinematiki açısından basit problemler (sıfırdan farklı tek deformasyon bileşeni gibi) için denge denklemleri ile elde edilebilirken yapı kinematiki karmaşıktığı (sıfırdan farklı birden çok deformasyon bileşeninin rol oynadığı) problemlerde Lagrange denklemi veya varyasyon cebri gibi matematik analiz yaklaşımları ile belirlenmektedir. Kayma deformasyonlu eksenal nanokiriş ve nanoçubuk titreşimi gibi problemlerin, gerek sıfırdan farklı birden çok deformasyon bileşeni içermesi, üstüne bir de yerel olmayan gerilme nedeniyle ek türetimlere ihtiyaç duyması nedeniyle bu tür titreşim analizleri denge yaklaşımına karşı matematiksel yaklaşımların kullanımını öne çıkarmaktadır.

Öte yandan ifade edilmelidir ki, hareket denklemleri türetilse bile sınır şartların karmaşık olması, dış çevresel etmenler ve nanoölçekte boyut etkisinin probleme dahil olması başlıcaları olmak üzere birçok durumda titreşim çıktısı elde edilememektedir. Bu açıdan hareket denklemi üzerinden kurulabilecek sayısal bir yaklaşım formülasyonu veya algoritması üzerinden yaklaşık çözüm elde edilebilmektedir. Bütün bu açıklamalar, titreşim analizi için hareket denkleminin bilinmesinin olmazsa olmaz olduğunu vurgulamaktadır.

Tekrar kayma deformasyonlu nanoyapıların hareket denklemi eldesine dönülecek olursa, bu anlamda varyasyonel cebirin kullanımı çok büyük bir öneme sahiptir. Varyasyon cebri, titreşim analizinde Hamilton İlkesi ile kendisini gösterir. Bu ilkeye göre, bir katının (t_1, t_2) zaman aralığında potansiyel enerjisinin birinci varyasyonu sıfırdır. Yani,

$$\delta\Pi = \int_{t_1}^{t_2} [U - (T + W)] dt = 0 \quad (3.27)$$

burada δ varyasyon sembolü, U iç gerilme ve şekil değiştirmeden doğan iç şekil değiştirme enerjisi, T deformasyon bileşenlerinden doğan toplam kinetik enerji ve W dış kuvvetin yapı üzerinde iş yapabilme kabiliyeti yani iş potansiyel enerjisidir. Enerji ifadelerinin farklı deformasyon bileşenlerinin varyasyonlarına göre gerekli formları hesaplanıp işleme alındıktan sonra, bu deformasyon bileşenlerinin varyasyonların çeşitli durumlarına göre sonuçları, bir dizi matematiksel işlem üzerinden birleştirilir ve sürecin sonunda hareket denklemi ve sınır şartlar problemin yapısına uygun olarak formüle edilmiş olur. Tez kapsamındaki hareket denklemi türetimleri Hamilton İlkesiyle gerçekleştirilecektir.

3.2.3. Ağırlıklı kalıntı tabanlı sonlu eleman formülasyonu

Denklem (3.26)'daki seri çözümü anlaşıldığı üzere her sınır şart için kullanılamaz. Analitik çözüm de yetersizse böyle durumlar artık sayısal (yaklaşık) çözümlerin kullanımını gerektirmektedir. Mühendislik mekaniği analizlerinde çeşitli sayısal yöntemlerin varlığından ve bunlardan birinin de sonlu elemanlar yöntemi olduğundan bahsedilmiştir. Bu yöntemin temelinde bir ağırlıklandırma işlemi mevcuttur. Buna göre ağırlıklı ortalama kalıntı, sürekli yapıda ilgili mekanik analizi idare eden denklemin ağırlıklandırılmasıyla elde edilen toplam kalıntıyı sıfıra eşitler. Mekanik analizi idare eden denklem ve ağırlıklandırma işlemleri sonlu eleman kinematiki tarafından gerçekleştirilmektedir. Böylece, ortalama ağırlıklı kalıntı aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır (Kwon ve Bang 2000):

$$I = \int_{x_i}^{x_j} hR dx \quad (3.28)$$

burada h ve R sırasıyla ağırlıklandırma ve kalıntıdır. Ağırlıklı kalıntı tabanlı sonlu eleman çözümüne göre şekil fonksiyonunun transpozu ağırlıklandırmayı ve nanoyapının serbest titreşim hareket denklemi de kalıntıyı tanımlar.

Ortalama ağırlıklı kalıntı işlemi sonucunda, serbest titreşim problemi için bir sonlu elemana ait kütle ve rijitlik matrisleri ortaya çıkar. Detayına girilmeksizin, kütle ve rijitlik matrislerinin yapı serbestlikleri doğrultusunda toplanması ve geometrik sınır şartlar doğrultusunda elimine edilmesi suretiyle yine detayı verilmeksizin ulaşılan özdeğer problemi olan

$$\det \left(\sum_{n=1}^N [K] - \omega_i^2 \sum_{n=1}^N [M] \right) = 0 \quad (3.29)$$

denkleminin çözümü gerçekleştirilir. Burada $[K]$ ve $[M]$ yapıdaki negatif ve pozitif sırasıyla rijitlik ve kütle bileşenlerinin toplamalarını yansıtan sırasıyla indirgenmiş küresel rijitlik ve indirgenmiş küresel kütle matrisidir.

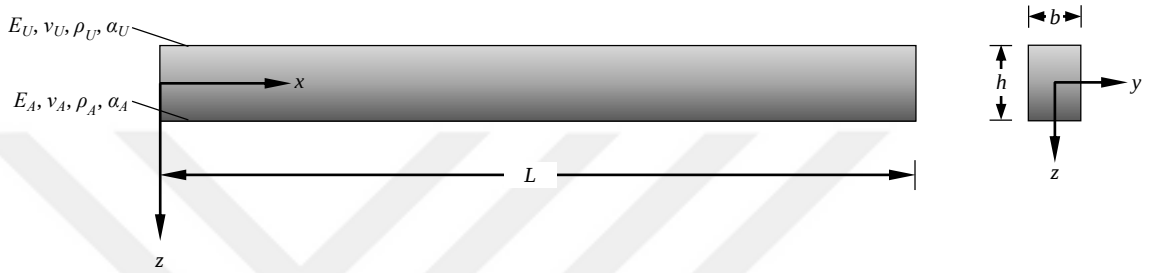
Sonlu eleman analizinde bir sonlu elemanın rijitlik ve kütle matrislerinin ifade edilmesi, temel olarak sonlu eleman kinematiği ile ilişkilidir. Sonlu eleman kinematiği ise sonlu eleman geometrisine bağlıdır. Bilindiği üzere tek doğrultulu (çubuk), iki doğrultulu (yüzey) ve üç doğrultulu (hacim) sonlu elemanları, yapı mekaniğinde sıklıkla karşılaşılan modellerdir. Ayrıca sonlu eleman kinematiği, bir de elemanın düğümlendirilme yapısına bağlıdır. Bundan kasıt, sonlu elemanın düğüm sayısı ve düğüm konumlarının belirlenmesidir. Genel olarak sonlu eleman modellerinden, çubuk sonlu eleman kullanımı oldukça pratik ve analiz için oldukça temel bir yapıdadır. Bunlar, birisi sol ve diğeri sağ ucunda olmak üzere asgari iki düğümlü olmalıdır. Daha hassas analiz ihtiyacı veya iki düğümün matematiksel anlamda yetersizliği gibi sebeplerle düğüm sayısı artırılarak daha yüksek mertebeden bir çubuk sonlu eleman teşkil edilerek problemde kullanılabilir. Çubuk sonlu elemanların elbette problemlere uygulanışı genel olarak sınırlı bir düzeydedir ve karmaşık problemler için uygun olmamaktadır. Genellikle çubuk sonlu eleman ile eksenel çubuk, kiriş, kafes ve çerçeve gibi yapıların serbest titreşim davranışları araştırılabilir. Bu tez, nanoyapıların eğilme çubuğu (kiriş), eksenel çubuk ve çerçeve modellerini yapısal anlamda kapsamına aldığından esas olarak bu yapıların sonlu eleman kinematiklerini de oluşturmak gerekmektedir. Çeşitli eksenel ve eğilme çubuğu sonlu elemanlarının kinematikleri hakkında detaya girilmeyecek olup bu konuda Numanoğlu (2019) tarafından açıklanan bilgiler incelenebilir.

3.3. Kayma Deformasyonlu Fonksiyonel Derecelenmiş Çubukların Yerel Olmayan Mekaniği

Tez konusu itibarıyla fonksiyonel derecelendirilmiş nanoyapı modellerinin kayma deformasyonlu yerel olmayan çubuk ve kiriş teorileri üzerinden serbest titreşim hareket denklemleri üzerinde çalışılacaktır ancak öncesinde fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme modelinin tanıtılması gerekmektedir. Bir tanıma göre, “mekanik ve fiziksel özellikleri, belirli matematiksel modellere dayalı olan ve homojen yapılara göre daha güçlü performansa sahip olan malzeme” (Numanoğlu ve Civalek 2019a) kompozit malzemeler sınıfının bir üyesi olan fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeyi belirtir. Tabi bu tanıma bir ekleme yapılmalıdır. Burada matematiksel modelin sürekli bir denklemle karakterize edildiği belirtilebilir. Örneğin malzeme özelliği uzunluk boyunca, kesit yüksekliği boyunca, kesit kalınlığı boyunca veya bu üçünden birkaçı boyunca değişmelidir. Kesikli değişkenlik gösteren malzeme tabakalı kompozit konfigürasyonunu akla getirir. O halde fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme sonsuz sayıda tabakanın bir araya getirilmesi ile oluşturulan tabakalı bir kompozit gibi düşünülebilir. Tezde incelenen nanoyapının dikdörtgensel kesite sahip düz bir çubuk olduğu, sadece kesit yüksekliği boyunca sürekli değişime sahip fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden imal edildiği kabul edilecektir.

3.3.1. Fonksiyonel derecelendirilmiş eleman modeli

Söz konusu fonksiyonel derecelendirilmiş dikdörtgen kesitli nanoyapı modeli Şekil 3.1’de resmedilmektedir. Burada L , b ve h sırasıyla nanoyapının uzunluğu, kesit kalınlığı ve kesit yüksekliğidir. Buna göre nanoyapının kesit yüksekliği boyunca malzeme özellikleri farklı olmaktadır. “A” ve “U” alt indisleri sırasıyla fonksiyonel derecelendirilmiş malzemenin alt ve üst yüzeylerinin ilgili mekanik özelliklerini temsil etmek üzere, malzemenin elastisite modülleri E_A ve E_U , Poisson oranları ν_A ve ν_U (böylece kayma modülleri $G_A = E_A/2(1 + \nu_A)$ ve $G_U = E_U/2(1 + \nu_U)$), birim hacim ağırlıkları ρ_A ve ρ_U , termal genleşme katsayıları α_A ve α_U olarak belirtilir. Tez kapsamında türetilen formülasyonlarda basitlik için Poisson oranı sabit varsayılacaktır ($\nu_A = \nu_U$).



Şekil 3.1. Fonksiyonel derecelendirilmiş yatay nanoyapı elemanı modeli

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler, mekanik davranışın belirlenebilmesi amacıyla çeşitli karışım kurallarına göre matematiksel olarak modellenmektedirler. Matematiksel modellemenin fiziksel anlamı malzeme homojenizasyonudur ve bunun için çeşitli yaklaşımlar mevcuttur. Bunlardan en yaygın bilineni klasik karışım kuralıdır. Bu kurala göre, yükseklik doğrultusundaki bir koordinatın malzeme özelliğinin malzeme alt ve üst yüzeyinin belli fraksiyonları (hacim oranları) nispetinde tayin edildiği ve hacim fraksiyonlarının toplamalarının 1’e eşit olduğu kabulü yapılmaktadır:

$$P(z) = P_A V_A + P_U V_U \quad (3.30)$$

$$V_A + V_U = 1 \quad (3.31)$$

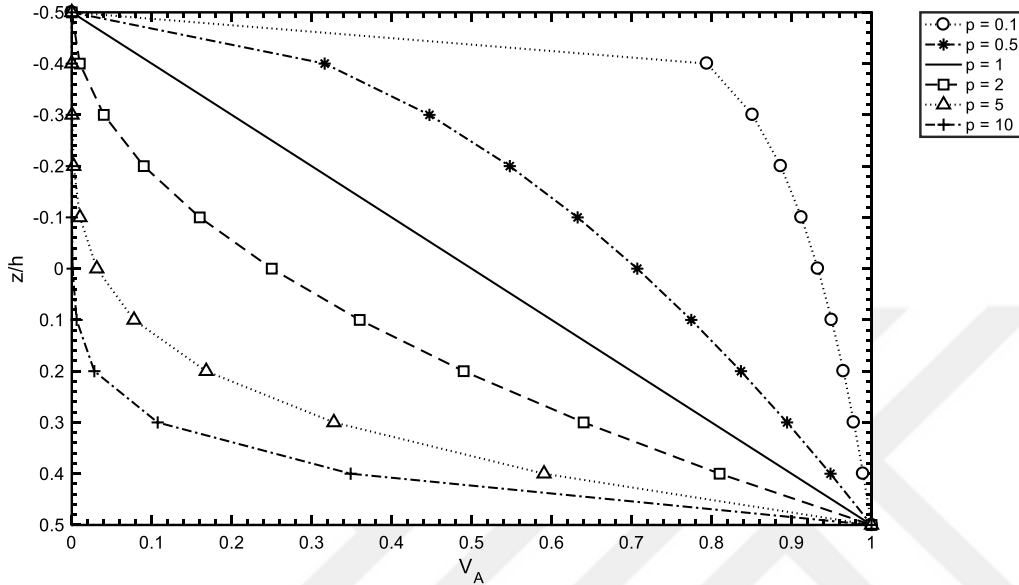
burada bir z koordinatı için P efektif malzeme özelliği, P_A ve P_U sırasıyla malzeme alt ve üst yüzeylerinin ilgili malzeme özelliği (elastisite modülü, kayma modülü, Poisson oranı, birim hacim ağırlığı, termal genleşme katsayısı, atomik malzeme sabiti, vb.) olarak tanımlanır. V_A ve V_U sırasıyla malzeme alt ve üst yüzeylerinin hacim fraksiyonları olup aşağıdaki gibi açıklanır:

$$V_A = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p, \quad V_U = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p. \quad (3.32)$$

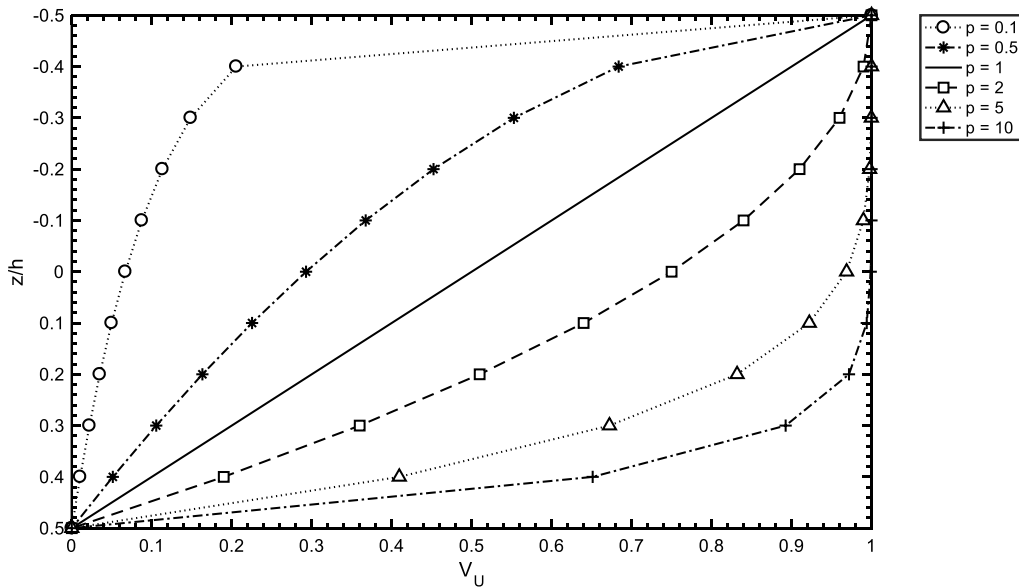
burada p fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme güç indeksi (veya sadece güç indeksi) olarak tanımlanır ve güç indeksinin değeri negatif olamaz.

Dikdörtgen kesit yüksekliği doğrultusundaki boyutsuz koordinata karşı gelen alt ve üst yüzey malzemesi hacim fraksiyonları, seçilmiş çeşitli güç indeksi değerleri için

Şekil 3.2’de verilmektedir. Görüldüğü üzere güç indeksi arttıkça alt yüzeyin hacim fraksiyonu kendi bölgesi düşünüldüğünde artmakta ve aynı şekilde üst yüzeyin hacim fraksiyonu kendi bölgesi düşünüldüğünde düşüş göstermektedir. Elde edilen bu sonuçlar, güç indeksi 0’a yaklaştıkça fonksiyonel değişimli malzemenin tamamen üst yüzey özelliklerine göre ve aynı şekilde güç indeksi sonsuza yaklaştıkça fonksiyonel değişimli malzemenin tamamen alt yüzey özelliklerine göre davrandığı anlaşılır.



(a)



(b)

Şekil 3.2. Klasik karışım kuralı ile modellenen fonksiyonel derecelendirilmiş dikdörtgen kesitli yapı elemanı için hacim fraksiyonlarının değişimleri; **a)** Alt yüzey; **b)** Üst yüzey

Denklem (3.32)'nin Denklem (3.30)'da kullanımından sonra efektif malzeme özelliği sadece alt yüzey hacim fraksiyonuna göre yazılırsa, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemenin Şekil 3.1'deki özellikleri aşağıdaki denklemlerle ifade edilir:

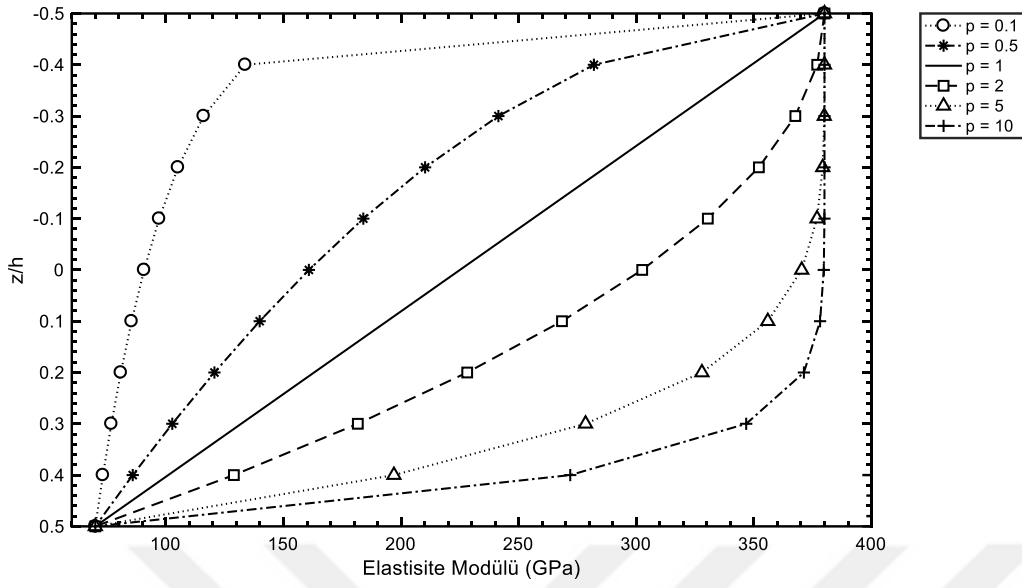
$$E(z) = \Delta E \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p + E_A \quad (3.33)$$

$$G(z) = \Delta G \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p + G_A \quad (3.34)$$

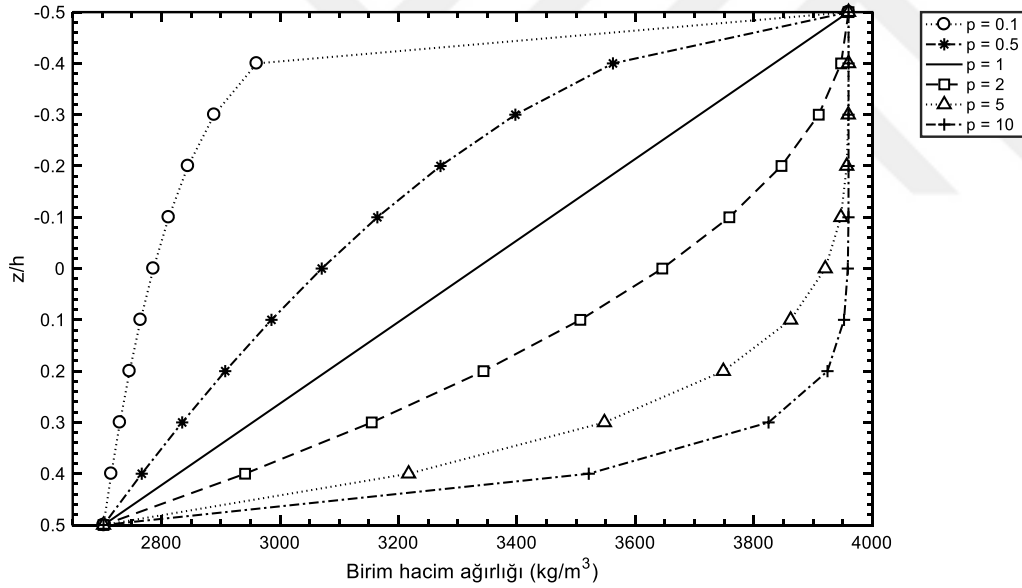
$$\rho(z) = \Delta \rho \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p + \rho_A \quad (3.35)$$

$$\alpha(z) = \Delta \alpha \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p + \alpha_A \quad (3.36)$$

burada Δ ilgili özelliğin alt ve üst yüzeydeki değerleri arasındaki farkını tanımlamaktadır ($\Delta E = E_A - E_U$, $\Delta G = G_A - G_U$, $\Delta \rho = \rho_A - \rho_U$ ve $\Delta \alpha = \alpha_A - \alpha_U$). Bir sonraki bölümde, kayma deformasyonlu fonksiyonel derecelendirilmiş nanoyapıların yerel olmayan serbest titreşimi hakkındaki sayısal sonuçlar ve bunların tartışmaları sunulmaktadır. Bölümün hemen girişinde malzeme özellikleri detaylı olarak tanıtılmaktadır. Söz konusu nanoyapı için o kısımda detaylı olarak yazılan şu malzeme özellikleri göz önüne alınarak, seçilmiş çeşitli güç indeksi değerlerine ve alt yüzey hacim fraksiyonunun artışına göre ilgili malzeme özelliğinin değişimleri Şekil 3.3'te betimlenmektedir: Elastisite modülleri $E_A = 70$ GPa ve $E_U = 380$ GPa, birim hacim ağırlıkları $\rho_A = 2702$ kg/m³ ve $\rho_U = 3960$ kg/m³ ve termal genleşme katsayıları $\alpha_A = 2.31 \times 10^{-5}$ K⁻¹ ve $\alpha_U = 6.8269 \times 10^{-6}$ K⁻¹.

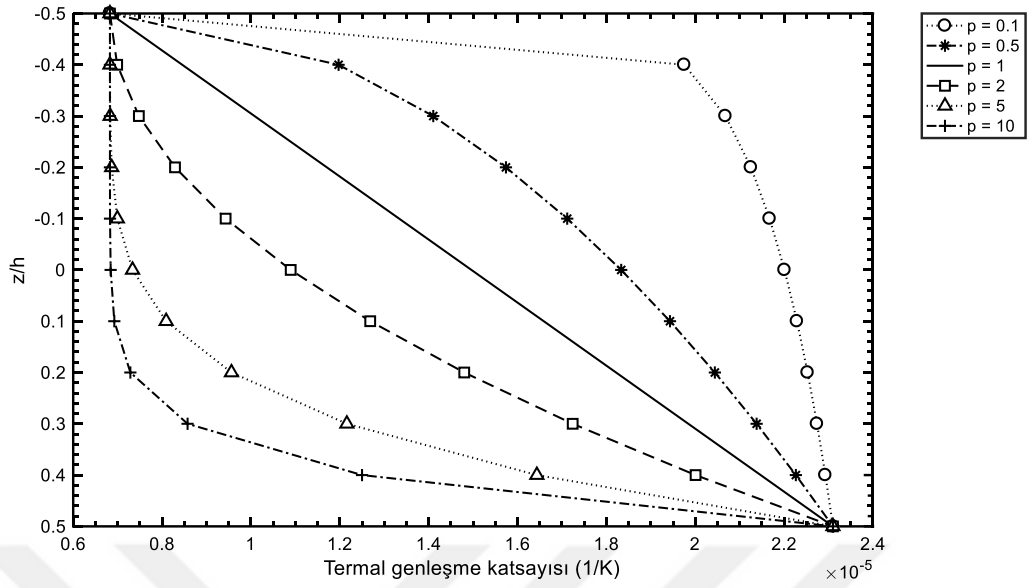


(a)



(b)

Şekil 3.3. Klasik karışım kuralı ile modellenen fonksiyonel derecelendirilmiş dikdörtgen kesitli yapı elemanı için malzeme özelliklerinin değişimi; **a)** Elastisite modülü; **b)** Birim hacim ağırlığı; **c)** Termal genleşme katsayısı (**Devamı arkada**)



(c)

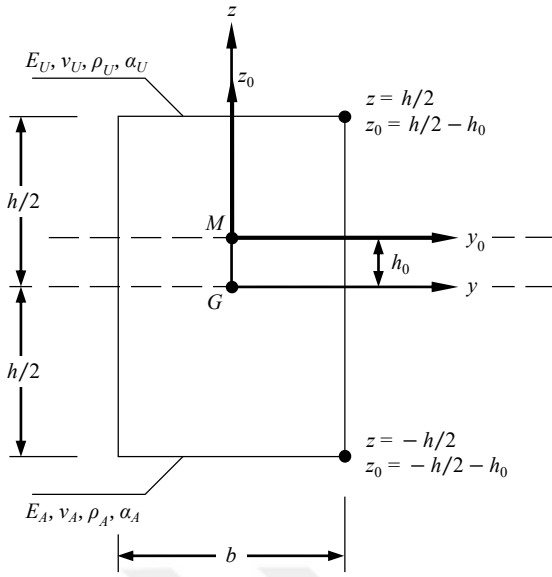
Şekil 3.3. Klasik karışım kuralı ile modellenen fonksiyonel derecelendirilmiş dikdörtgen kesitli yapı elemanı için malzeme özelliklerinin değişimi; **a)** Elastisite modülü; **b)** Birim hacim ağırlığı; **c)** Termal genleşme katsayısı

Dördüncü bölümün konusu sayısal uygulamalarda göz önüne alınan fonksiyonel derecelendirilmiş malzemede klasik karışım kuralı göz önüne alınarak elastisite modülü, birim hacim ağırlığı ve termal genleşme katsayılarının kesitin boyutsuz yükseklik koordinatına göre değişimleri güç indeksinin farklı değerleri altında Şekil 3.3'te verilmektedir. Şekil 3.2'de yapılan açıklamalara benzer olarak, burada da güç indeksi 0'a yaklaştıkça ilgili malzemenin efektif özellik değerinin üst yüzey malzemesinin ilgili özellik değerine yaklaşmakta olduğu ve güç indeksi sonsuza yaklaştıkça aynı şekilde malzeme efektif özelliğinin alt yüzey malzemesinin değerine yakınsadığı anlaşılmaktadır.

Eğilme zorları altında çalışan bir fonksiyonel derecelendirilmiş katı cisimde efektif malzeme özelliği hesaplarını ağırlık merkezine göre gerçekleştirmek kesin doğruluktaki sonuçların elde edilmesinin önüne geçer. Çünkü kesitin tarafsız eksen (nötr eksen veya rijitlik eksen olarak da anılabilir), malzeme homojen olmadığından geometrik eksenle çakışmaz. Bu durum Şekil 3.4'te resmedilmiştir. Buna göre fonksiyonel derecelendirilmiş kirişin dikdörtgen kesitinde kesitin ağırlık merkezi G noktasından geçen yz - eksen takımı geometrik eksen takımı ve malzeme rijitlik merkezi olan y_0z_0 - eksen takımı tarafsız eksen takımı olarak betimlenir. Burada düşey eksenler z ve z_0 çakışırken yatay eksenler y ve y_0 çakışmaz, bu ikisinin arasındaki mesafe h_0 kadardır. Davranışı doğru belirlemek için h_0 mesafesinin bilinmesi gerekmektedir. Kirişlerde küçük deplasman varsayımı (Eltaher vd. 2013b) kullanılarak bu mesafe hesaplanabilir. Tabi öncelikle düşey eksenler arasındaki koordinat dönüşümü yazılmalıdır. Buna göre, Şekil 3.4'teki dikdörtgen kesitin köşe koordinatları göz önüne alınarak:

$$z_0 = z - h_0 \quad (3.37)$$

bağıntısı kurulabilir.



Şekil 3.4. Fonksiyonel derecelendirilmiş yapı elemanı için dikdörtgen kesit

Küçük deplasman varsayımı yapı elemanı üzerindeki net eksenel kuvvetin sıfıra eşit olduğunu ifade eder. Eksenel kuvvetten eksenel gerilmeye geçilerek

$$\sum F_x = 0 \text{ veya } \int_A \sigma_{xx} dA = 0. \quad (3.38)$$

denklemi kurulabilir. Eksenel gerilme, elastisite modülü fonksiyonu göz önüne alınarak

$$\sigma_{xx} = E(z_0) \varepsilon_{xx} \quad (3.39)$$

şeklinde ifade edilebilir. Ayrıca kirişin kinematiği gereğince eksenel deplasman

$$u_x(x, z_0, t) = u_0(x, t) - z_0 \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \quad (3.40)$$

şeklindedir. Burada $u_x = u_x(x, z_0, t)$ nihai eksenel deplasman, $u_0 = u_0(x, t)$ saf eksenel deplasman ve $w = w(x, t)$ enine deplasmandır. Temel eğilmede saf eksenel deplasman $u_0 = 0$ kabul edilerek, Denklem (3.40)'ın eksenel şekil değiştirmede kullanımıyla

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -z_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.41)$$

sonucuna varılır. Denklem (3.41) Denklem (3.39)'da yerine yazılırsa eksenel gerilme

$$\sigma_{xx} = -E(z_0) z_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.42)$$

olarak elde edilir. Diferansiyel alan elemanı için $dA = b dz_0$ tanımının ve Denklem (3.42)'nin Denklem (3.38)'de kullanılması sonucunda

$$-b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \int_{-h/2-h_0}^{h/2-h_0} E(z_0) z_0 dz_0 = 0 \text{ veya } \int_{-h/2-h_0}^{h/2-h_0} E(z_0) z_0 dz_0 = 0. \quad (3.43)$$

eşitliği ortaya çıkar. Burada Denklem (3.37) elastisite modülü hariç kullanılıp, integral sınırları söz konusu koordinat dönüşümüne göre düzenlenirse

$$\int_{-h/2}^{h/2} E(z_0)(z - h_0) dz = 0 \quad (3.44)$$

ifadesine ulaşılır. Burada çok önemli bir basitlik kabulünün yapılması gerekmektedir. Elastisite modülü içerisinde de koordinat dönüşümü yapılarak $E(z - h_0)$ ifadesi kullanılırsa h_0 hesabı el ile yürütülememekte, yüksek güç indeksi değerleri için h_0 dikdörtgen kesit dışına taşarak fiziksel bir anlamsızlığı ortaya çıkarmakta ve çok daha yüksek güç indeksleri için bu mesafe farkının hesap süresi aşırı uzamakta veya mesafe farkı hiç hesaplanamamaktadır. Bu nedenle hesaplarda basitleştirme yapılarak elastisite modülü için Denklem (3.33) ile tanımlanan elastisite modülünün z eksenine göre değişimi kullanılacaktır. Denklemin düzenlenmesi ile h_0 mesafesine aşağıdaki gibi ulaşılır (Eltaher vd. 2013c; Eltaher vd. 2014a; Eltaher vd. 2014b; Ebrahimi ve Salari 2015d):

$$h_0 = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} E(z) z dz}{\int_{-h/2}^{h/2} E(z) dz} = \frac{ph\Delta E}{2(p+1)(p+2)} \quad (3.45)$$

Burada tarafsız ve geometrik eksen farklılığının fonksiyonel derecelendirilmiş malzemenin elastisite modülü farkı, güç indeksi ve dikdörtgen kesitin yüksekliğine göre değişeceği dikkat çekmektedir.

Bilimsel literatürde konuyla ilgili bazı çalışmalarda (Şimşek 2016; Aria ve Friswell 2019), Denklemler (3.33)-(3.36) ile görülen fonksiyonel derecelendirilmiş efektif malzeme özelliklerinin yüksekliğin boyutsuz koordinatı olan z/h ifadesinin $(z + h_0)/h$ olarak değiştirilmesi suretiyle yeniden tanımlandığı görülmektedir. Ancak bu tanımlamada bazı soru işaretlerinin mevcut olduğu düşünülmektedir. Öncelikle, Şekil 3.1’de resmedilen fonksiyonel derecelendirilmiş dikdörtgen kesit incelenirse, sırasıyla en üst ve en alt yüzeylerin koordinatları $z_U = -z/h$ ve $z_A = z/h$ için ilgili yüzeyin malzeme özelliklerine ulaşamamakta, yani fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme tanımı en başından çelişkili bir hal almaktadır. Ayrıca, bu yeni model düşünülerek, bu tez kapsamında sayısal hesapların test aşamasında elde edilen titreşim sonuçları, güç indeksinin $p = 1$ değeri hariç Aria ve Friswell (2019) ile hiçbir uyum göstermemiştir. Buna ek olarak, Aria ve Friswell (2019)’un mukayese çalışmalarında aldıkları referanslarda efektif malzeme özelliğinin nötr eksene göre yapılandırılmadığı gözlemlenmiştir. Kısacası fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme için bu yeni tanımlama hakkında bazı anlaşılamayan durumlar olduğundan Denklemler (3.33)-(3.36) ile verilen temel malzeme homojenizasyonu düşünülecektir ancak yapının eğilme kinematığından

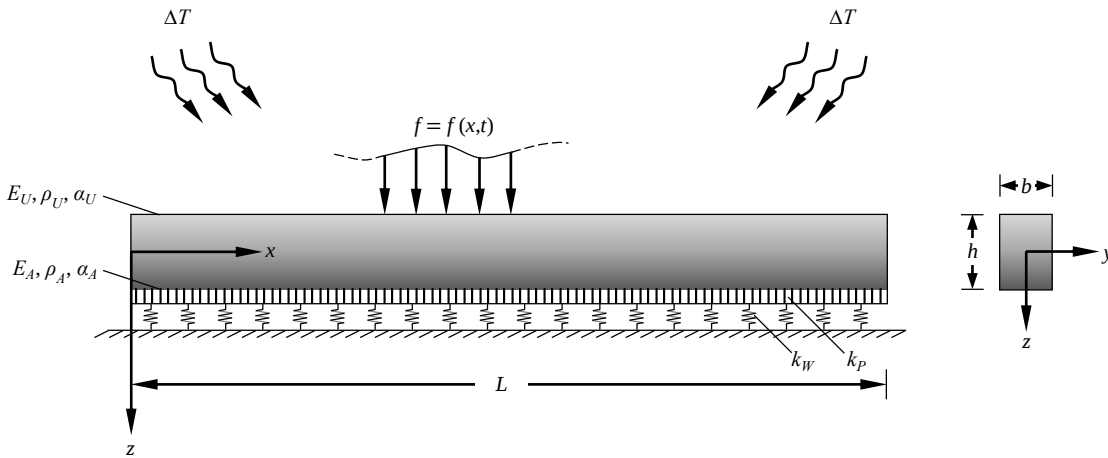
doğan ve özellikle nanokiriş enerji denklemlerinde, bunun sonucu olarak da çeşitli rijitlik ve kütle tanımlarında kendisini gösterecek olan h_0 mesafesi mutlaka göz önüne alınacaktır.

3.3.2. Kayma deformasyonlu kirişler

Çift parametrelili elastik zemine oturan ve termal etkiler altındaki fonksiyonel derecelendirilmiş atomik ölçekli kirişlerin yerel olmayan elastisite teorisine ve Timoshenko kiriş teorisine dayanan serbest titreşim analizi bu alt başlıkta formüle edilecektir.

Hatırlatılacak olursa, kiriş davranışı üzerine kuramlar kayma deformasyonunu ele alıp almamasına göre ayrılır. Kayma deformasyonunun niteliğine göre teorinin kapsamı farklılaşır. Bu nedenle, günümüze değin Timoshenko, parabolik, üstel, trigonometrik, sinüzoidal, çok bilinmeyenli, zenginleştirilmiş gibi kayma deformasyonlu kiriş teorileri ortaya atılmıştır. Bunlardan Timoshenko teorisi, kayma deformasyonunu temel düzeyde ele aldığından birinci dereceden kayma deformasyonlu kiriş teorisi olarak bilinir. Diğer teoriler yüksek mertebeli terimleri analize dahil etmektedir. Öte yandan, Euler-Bernoulli kiriş teorisi ise kayma deformasyonunu temelden reddetmektedir. Euler-Bernoulli kiriş teorisi her ne kadar genel uygulanabilirlik ve davranış anlama açılarından pratik bir yaklaşım olsa da kısa açıklık, yüksek kesit ve tekil yükleme gibi durumların bir veya birkaçının problemde öne çıkması nedeniyle gerçekçi olmaz ve kayma deformasyonlu kiriş teorileri bu noktada devreye girer. Bilimsel literatürde, genel olarak uzunluğun yüksekliğe oranının 20'den büyük olduğu kirişler için Euler-Bernoulli teorisinin kullanılabileceği ve bu sınırın altı için kayma deformasyonlu teorilerin göz önünde bulundurulması gerektiği ifade edilmektedir.

Hareket Denkleminin Türetilmesi: Analize konu nanokiriş yapısı Şekil 3.5'te verilmekte olup, alt ve üst yüzeyin malzeme özellikleri de şekilde görülmektedir. Ayrıca, şekildeki diğer parametrelerden k_W ve k_P sırasıyla Winkler (lineer tabaka) ve Pasternak (kayma tabakası) zeminlerinin rijitliklerini, ΔT ortam sıcaklığı değişimini ve $f=f(x, t)$ nanokiriş yapısına etkileyen enine dış dinamik zoru (tahrik) belirtir.



Şekil 3.5. Termo-elastik çevrede bulunan fonksiyonel derecelendirilmiş nanokirişin titreşim analizi için nanoyapı modeli

Hareket denklemini türetmek amacıyla Hamilton ilkesini tanıtan Denklem (3.27)'nin kullanılabilmesi için en önce nanokirişin kinematik ilişkilerinin oluşturulması gerekmektedir. Bunun için ilk adım olan kayma deformasyonlu bir kiriş yapısının deplasman bileşenleri

$$\begin{aligned} u_x(x, z, t) &= u(x, t) - z\varphi(x, t) = u - z \frac{\partial w_b}{\partial x}, \quad u_y(x, z, t) = v(x, t) = v = 0, \\ u_z(x, z, t) &= w(x, t) = w = w_b + w_s. \end{aligned} \quad (3.46)$$

şeklinde. Burada u_x , u_y ve u_z sırasıyla eksenel, yanal ve enine deplasman bileşenlerini belirtir. Eksenel deplasman bileşeni için u saf eksenel deplasman ve φ kesit dönme açısı, v yanal deplasman ve enine deplasman bileşeni için w toplam enine deplasman, w_b eğilme deplasmanı ve w_s kayma deplasmanıdır. Saf eksenel deplasman temel olarak ihmal edilmektedir ($u = 0$). Bu kiriş teorisini kayma deformasyonsuz kuram olan Euler-Bernoulli kiriş teorisinden ayıran nüans φ 'nin karakteristiğinde gizlidir. Buna göre, Euler-Bernoulli kiriş teorisi bu parametreyi ihmal ederken ($\varphi = 0$) Timoshenko kiriş teorisine göre bunun değeri kesit boyunca sabittir.

Kinematik ilişkilerin oluşturulmasına şekil değiştirme tansörü ile devam edilmelidir. Buna göre, fonksiyonel derecelendirilmiş kesitin tarafsız ekseni düşünülerek şekil değiştirme bileşenleri

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -(z - h_0) \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = 0, \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right), \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = 0, \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = 0, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.47)$$

şeklinde formüle edilebilir. Burada ε_{xx} , ε_{yy} ve ε_{zz} ilgili eksenlerin eksenel şekil değiştirme bileşenleriyken ε_{xy} , ε_{xz} ve ε_{yz} kayma şekil değiştirme bileşenleridir. Euler-Bernoulli kiriş teorisinde sıfırdan farklı tek şekil değiştirme bileşeni ε_{xx} iken burada buna ilaveten ε_{xz} bileşeninin sıfırdan farklı olduğu dikkat çekmektedir. Buradan fonksiyonel derecelendirilme durumu da göz önünde bulundurularak klasik gerilme bileşenlerine

$$\begin{aligned} s_{xx} &= E(z) \varepsilon_{xx} = -E(z) (z - h_0) \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad s_{xy} = 2G(z) \varepsilon_{xy} = 0, \\ s_{xz} &= 2G(z) \varepsilon_{xz} = G(z) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right), \quad s_{yy} = E(z) \varepsilon_{yy} = 0, \\ s_{yz} &= 2G(z) \varepsilon_{yz} = 0, \quad s_{zz} = E(z) \varepsilon_{zz} = 0. \end{aligned} \quad (3.48)$$

olarak geçilir. Burada s_{xx} , s_{yy} ve s_{zz} ilgili eksenlerin eksenel gerilme bileşenlerini ve s_{xy} , s_{xz} ve s_{yz} kayma şekil değiştirme bileşenlerini gösterir.

Hamilton ilkesi denkleminde esas teşkil etmesi gereken enerji ifadeleri aşağıdaki gibi kurulur:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + 2\sigma_{xy} \varepsilon_{xy} + 2\sigma_{xz} \varepsilon_{xz} + 2\sigma_{yz} \varepsilon_{yz}) dV \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_0^L k_W w^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L k_P \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \\
 &= \int_0^L \left[-M \frac{\partial \varphi}{\partial x} + V \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^L \left[k_W w^2 + k_P \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (3.49)
 \end{aligned}$$

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho(z) \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} \right)^2 \right] dV = \frac{1}{2} \int_0^L \left[I_0 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + I_2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right] dx \quad (3.50)$$

$$W = \int_0^L f w dx + \int_0^L N_T \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (3.51)$$

burada iç şekil değiştirme enerjisi U 'nun sonucunda M ve V sırasıyla eğilme momenti ve kesme kuvveti iç tesirlerini belirtir. Kinetik enerji T 'nin sonucunda yer alan olan I_0 ve I_2 sırasıyla fonksiyonel derecelendirilmiş dikdörtgen kesitin sıfırıncı ve ikinci kütle ataletlerini tanımlar:

$$I_0 = \int_A \rho(z) dA = b \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) dz \quad (3.52)$$

$$I_2 = \int_A \rho(z) (z - h_0)^2 dA = b \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) (z - h_0)^2 dz \quad (3.53)$$

Öte yandan W dış kuvvetlerin iş enerjisi (iş yapabilme potansiyeli) olarak adlandırılır. Bunun içerisinde yer alan N_T termal eksenel kuvvettir ve aşağıdaki gibi yazılır:

$$N_T = \int_A E(z) \alpha(z) \Delta T dA = b \Delta T \int_{-h/2}^{h/2} E(z) \alpha(z) dz = D_T \Delta T \quad (3.54)$$

burada D_T sıcaklıktan kaynaklanan ve yapıya etkisi negatif bir rijitliktir. Öte yandan, analizin ilerleyen safhasında nanoyapı için klasik eğilme momenti ve kesme kuvveti iç tesirlerine ihtiyaç duyulacak olup bunlar aşağıda formüle edilmektedir:

$$M_c = \int_A s_{xx} (z - h_0) dA = - \int_A E(z) (z - h_0)^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} dA = -B \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \quad (3.55)$$

$$V_c = \int_A k s_{xz} dA = kS \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (3.56)$$

burada k kayma düzeltme faktörüdür. Ayrıca, B ve S kayma deformasyonlu fonksiyonel derecelendirilmiş nanokirişin sırasıyla eğilme ve kayma rijitlikleri olarak tanımlanmakta olup şöyle açıklanırlar:

$$B = b \int_{-h/2}^{h/2} E(z)(z - h_0)^2 dz \quad (3.57)$$

$$S = b \int_{-h/2}^{h/2} G(z) dz \quad (3.58)$$

Denklem (3.45) kullanılarak, kayma deformasyonlu nanokirişin muhtelif kütle ataleti ve rijitlik bileşenleri, bir dizi kısmi integral hesabı sonucunda aşağıdaki gibi türetilmiş olur:

$$I_0 = bh \left(\frac{\Delta \rho}{p+1} + \rho_A \right) \quad (3.59)$$

$$I_2 = bh \left[h_0^2 \left(\frac{\Delta \rho}{p+1} + \rho_A \right) + h \left(-\frac{ph_0 \Delta \rho}{(p+1)(p+2)} + h \left(\frac{(p^2 + p + 2) \Delta \rho}{4(p+1)(p+2)(p+3)} + \frac{\rho_A}{12} \right) \right) \right] \quad (3.60)$$

$$B = bh \left[h_0^2 \left(\frac{\Delta E}{p+1} + E_A \right) + h \left(-\frac{ph_0 \Delta E}{(p+1)(p+2)} + h \left(\frac{(p^2 + p + 2) \Delta E}{4(p+1)(p+2)(p+3)} + \frac{E_A}{12} \right) \right) \right] \quad (3.61)$$

$$S = bh \left(\frac{\Delta G}{p+1} + G_A \right) \quad (3.62)$$

$$D_T = bh \left(\frac{\Delta E \Delta \alpha}{2p+1} + \frac{\alpha_A \Delta E + E_A \Delta \alpha}{p+1} + E_A \alpha_A \right) \quad (3.63)$$

Bu arada, kayma rijitliği hesabı için Poisson oranı sabit kabul edildiğinden sırasıyla alt ve üst yüzeylerin kayma modüllerinin şu şekilde göz önüne alınacağı da not edilmelidir:

$$G_A = \frac{E_A}{2(1+\nu)}, \quad G_U = \frac{E_U}{2(1+\nu)}. \quad (3.64)$$

Buraya kadar gerekli ara bilgiler tanımlandığından tekrardan varyasyon hesaplarına dönülebilir. Denklemler (3.49)-(3.51) ile oluşturulan enerji denklemlerinin birinci varyasyonlarının Denklem (3.27)'de kullanılması gerektiğinden söz konusu varyasyon ifadeleri

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta U dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(-M \delta \frac{\partial \varphi}{\partial x} + V \delta \frac{\partial w}{\partial x} - V \delta \varphi + k_w w \delta w + k_p \frac{\partial w}{\partial x} \delta \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dt \quad (3.65)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(I_0 \frac{\partial w}{\partial t} \delta \frac{\partial w}{\partial t} + I_2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \delta \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) dx dt \quad (3.66)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L f \delta w dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L D_T \Delta T \frac{\partial w}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dt \quad (3.67)$$

şeklinde verilir. Burada görülen bazı varyasyonlar gerekli integrasyon sınırları içerisinde kısmi integrasyon işlemine tabi tutularak

$$\begin{aligned} \int_0^L M \delta \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx &= M \delta \varphi \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial M}{\partial x} \delta \varphi dx, \quad \int_0^L V \delta \frac{\partial w}{\partial x} dx = V \delta w \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial V}{\partial x} \delta w dx, \\ \int_0^L k_p \frac{\partial w}{\partial x} \delta \frac{\partial w}{\partial x} dx &= k_p \frac{\partial w}{\partial x} \delta w \Big|_0^L - \int_0^L k_p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta w dx, \\ \int_{t_1}^{t_2} I_0 \frac{\partial w}{\partial t} \delta \frac{\partial w}{\partial t} dt &= I_0 \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w dt, \\ \int_{t_1}^{t_2} I_2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \delta \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx &= I_2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \delta \varphi \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} I_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \delta \varphi dt, \\ \int_0^L D_T \Delta T \frac{\partial w}{\partial x} \delta \frac{\partial w}{\partial x} dx &= D_T \Delta T \frac{\partial w}{\partial x} \delta w \Big|_0^L - \int_0^L D_T \Delta T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta w dx. \end{aligned} \quad (3.68)$$

denklemleri ortaya çıkar. Bu ifadeler Denklemler (3.65)-(3.67)'de yerine yazıldıktan sonra elde edilen ifade düzenlenirse aşağıdaki sonuca varılır:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(\frac{\partial M}{\partial x} - V + I_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) \delta \varphi dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(-\frac{\partial V}{\partial x} + k_w w - k_p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - f + D_T \Delta T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right. \\
& \left. + I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta w dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(-\frac{\partial V}{\partial x} + k_w w - k_p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - f + D_T \Delta T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta w dx dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} (-M) \delta \varphi \Big|_0^L dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(V + k_p \frac{\partial w}{\partial x} - D_T \Delta T \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta w \Big|_0^L dt + \int_0^L \left(-I_2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \delta w \Big|_{t_1}^{t_2} dt \\
& + \int_0^L \left(-I_0 \frac{\partial w}{\partial t} \right) \delta w \Big|_{t_1}^{t_2} dt = 0
\end{aligned} \tag{3.69}$$

burada çift integralli ifadelere dikkat edilirse, $\delta \varphi \neq 0$ ve $\delta w \neq 0$ durumları için sırasıyla

$$\frac{\partial M}{\partial x} - V = -\rho I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \tag{3.70}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = k_w w + (D_T \Delta T - k_p) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - f + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{3.71}$$

elde edilir. Bu iki denklem, kayma deformasyonlu fonksiyonel derecelendirilmiş Timoshenko nanokirişinin yerel olmayan titreşiminin hareket denklemini türetmek için esas teşkil etmektedir. Buna göre, Denklemler (3.22), (3.23), (3.55)-(3.58) göz önünde bulundurularak eksenel gerilmenin momenti ve kayma gerilmesinin kesit alan üzerinden integrasyonları üzerinden sırasıyla eğilme momenti ve kesme kuvveti iç tesirlerinin klasik-yerel olmayan elastisite bağıntıları

$$M - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -B \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -B \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \tag{3.72}$$

$$V - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = kS \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) = kS \frac{\partial w_s}{\partial x} \tag{3.73}$$

olarak sunulur. İlk olarak Denklem (3.70)'in x 'e göre birinci türevinde Denklem (3.73)'ün yerine yazılmasıyla elde edilen momentin ikinci türevi Denklem (3.72)'de kullanılırsa eğilme momenti, ardından Denklem (3.71)'in x 'e göre birinci türevi Denklem (3.73)'te kullanılırsa kesme kuvveti iç tesiri, deplasman bileşenlerinin de açık yazılmasıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
M = & -B \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + (e_0 a)^2 k_w (w_b + w_s) + (e_0 a)^2 (D_T \Delta T - k_p) \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} \\
& - (e_0 a)^2 f + (e_0 a)^2 I_0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial t^2} - (e_0 a)^2 I_2 \frac{\partial^4 (w_b + w_s)}{\partial x^2 \partial t^2}
\end{aligned} \tag{3.74}$$

$$V = kS \frac{\partial w_s}{\partial x} + (e_0 a)^2 k_w \frac{\partial (w_b + w_s)}{\partial x} + (e_0 a)^2 (D_T \Delta T - k_P) \frac{\partial^3 (w_b + w_s)}{\partial x^3} - (e_0 a)^2 \frac{\partial f}{\partial x} + (e_0 a)^2 I_0 \frac{\partial^3 (w_b + w_s)}{\partial x \partial t^2} \quad (3.75)$$

burada formülasyon türetiminin devam ettirilebilmesi için eğilme ve kesme deplasmanı bileşenleri arasında bir ilişkinin kurulması gerekmektedir. Buna göre Denklemler (3.74) ve (3.75)'in Denklem (3.70)'te kullanılması ile bu ilişki

$$w_s = -\frac{1}{kS} \left(B \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - I_2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + (e_0 a)^2 I_2 \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} \right) \quad (3.76)$$

şeklinde ortaya çıkartılmış olur. Anlaşılabileceği üzere bu denklem kesme deplasmanını eğilme deplasmanına dönüştürür. Bu bağıntının Denklemler (3.74) ve (3.75)'te ayrı ayrı kullanılması ile ilgili iç tesirlerin nihai hallerine aşağıdaki şekilde ulaşılır:

$$M = -\frac{(e_0 a)^2 (D_T \Delta T - k_P) B}{kS} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + \left(-B - \frac{(e_0 a)^2 k_w B}{kS} + (e_0 a)^2 (D_T \Delta T - k_P) \right) \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + (e_0 a)^2 k_w w_B + \frac{(e_0 a)^2 I_0 I_2}{kS} \frac{\partial^4 w_b}{\partial t^4} + \left((e_0 a)^2 I_0 + \frac{(e_0 a)^2 k_w I_2}{kS} \right) \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} - \frac{(e_0 a)^2 (D_T \Delta T - k_P) I_2}{kS} \frac{\partial^6 w_b}{\partial x^4 \partial t^2} + \left(-\frac{(e_0 a)^2 I_0 B}{kS} - (e_0 a)^2 I_2 + \frac{(e_0 a)^2 (D_T \Delta T - k_P) I_2}{kS} - \frac{(e_0 a)^4 k_w I_2}{kS} \right) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{(e_0 a)^4 I_0 I_2}{kS} \frac{\partial^6 w_b}{\partial x^2 \partial t^4} - (e_0 a)^2 f \quad (3.77)$$

$$V = -\frac{(e_0 a)^2 (D_T \Delta T - k_P) B}{kS} \frac{\partial^5 w_b}{\partial x^5} + \left(-B - \frac{(e_0 a)^2 k_w B}{kS} + (e_0 a)^2 (D_T \Delta T - k_P) \right) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} + (e_0 a)^2 k_w \frac{\partial w_b}{\partial x} - \frac{(e_0 a)^2 (D_T \Delta T - k_P) I_2}{kS} \frac{\partial^7 w_b}{\partial x^5 \partial t^2} + \left(-\frac{(e_0 a)^2 I_0 B}{kS} - (e_0 a)^2 I_2 + \frac{(e_0 a)^2 (D_T \Delta T - k_P) I_2}{kS} - \frac{(e_0 a)^4 k_w I_2}{kS} \right) \frac{\partial^5 w_b}{\partial x^3 \partial t^2} + \left((e_0 a)^2 I_0 + I_2 + \frac{(e_0 a)^2 k_w I_2}{kS} \right) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} - \frac{(e_0 a)^4 I_0 I_2}{kS} \frac{\partial^7 w_b}{\partial x^3 \partial t^4} + \frac{(e_0 a)^2 I_0 I_2}{kS} \frac{\partial^5 w_b}{\partial x \partial t^4} - (e_0 a)^2 \frac{\partial f}{\partial x} \quad (3.78)$$

bunlardan kesme kuvveti iç tesirinin Denklem (3.71)'de yazılmasından sonra yine Denklem (3.76)'nın kullanımı sonucunda hareket denkleminde aşağıdaki gibi ulaşılmış olur:

$$\begin{aligned}
& -\frac{(e_0 a)^2 (D_T \Delta T - k_P) B}{kS} \frac{\partial^6 w_b}{\partial x^6} + \left(-B - \frac{(e_0 a)^2 k_W B}{kS} + \frac{(D_T \Delta T - k_P) B}{kS} \right. \\
& + (e_0 a)^2 (D_T \Delta T - k_P) \left. \right) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + \left(\frac{k_W B}{kS} + (e_0 a)^2 k_W - (D_T \Delta T - k_P) \right) \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\
& - k_W w_b - \frac{I_0 I_2}{kS} \frac{\partial^4 w_b}{\partial t^4} - \left(I_0 + \frac{k_W I_2}{kS} \right) \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} - \frac{(e_0 a)^4 (D_T \Delta T - k_P) I_2}{kS} \frac{\partial^8 w_b}{\partial x^6 \partial t^4} \\
& + \left(-\frac{(e_0 a)^2 I_0 B}{kS} + \frac{2(e_0 a)^2 (D_T \Delta T - k_P) I_2}{kS} - (e_0 a)^2 I_2 - \frac{(e_0 a)^4 k_W I_2}{kS} \right) \frac{\partial^6 w_b}{\partial x^4 \partial t^2} \\
& + \left(\frac{2(e_0 a)^2 k_W I_2}{kS} + \frac{I_0 B}{kS} + (e_0 a)^2 I_0 + I_2 - \frac{(D_T \Delta T - k_P) I_2}{kS} \right) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} \\
& - \frac{(e_0 a)^4 I_0 I_2}{kS} \frac{\partial^8 w_b}{\partial x^4 \partial t^4} + \frac{2(e_0 a)^2 I_0 I_2}{kS} \frac{\partial^6 w_b}{\partial x^2 \partial t^4} (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + f = 0
\end{aligned} \tag{3.79}$$

Bu denklemin sadece eğilme deplasmanının türevlerine bağlı bir diferansiyel denklem olarak görüldüğüne dikkat edilmelidir. Bilindiği üzere bir sürekli yapının mekanik davranışı sınır şartların hareket denkleminde uygulanması ile belirlenebilir. Geometrik sınır şartlar Denklem (3.69)'da verilen w ve φ gibi varyasyon sınırlarıdır ve uç türlerinden kolaylıkla belirlenebilir. Öte yandan, dinamik sınır şartları ise, eğilme dönmesinin varyasyonu $\delta\varphi(0, t) = \delta w_b'(0, t) \neq 0$ ve/veya $\delta\varphi(L, t) = \delta w_b'(L, t) \neq 0$ durumu için Denklem (3.77) ile belirlenen

$$M = 0 \tag{3.80}$$

sınır şartının yanı sıra deplasmanın varyasyonu $\delta w(0, t) \neq 0$ ve/veya $\delta w(L, t) \neq 0$ durumu için Denklem (3.78)'in Denklem (3.69)'dan yazılabilecek

$$V = (D_T \Delta T - k_P) \frac{\partial (w_b + w_s)}{\partial x} \tag{3.81}$$

ifadesine eşitlenmesi sonucunda türetilen

$$\begin{aligned}
& -\frac{(e_0 a)^2 (D_T \Delta T - k_P) B}{kS} \frac{\partial^5 w_b}{\partial x^5} + \left(-B - \frac{(e_0 a)^2 k_W B}{kS} + (e_0 a)^2 (D_T \Delta T - k_P) \right. \\
& \left. + \frac{(D_T \Delta T - k_P) B}{kS} \right) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} + \left((e_0 a)^2 k_W - (D_T \Delta T - k_P) \right) \frac{\partial w_b}{\partial x} \\
& -\frac{(e_0 a)^2 (D_T \Delta T - k_P) I_2}{kS} \frac{\partial^7 w_b}{\partial x^5 \partial t^2} + \left(-\frac{(e_0 a)^2 I_0 B}{kS} - (e_0 a)^2 I_2 \right. \\
& \left. + \frac{2(e_0 a)^2 (D_T \Delta T - k_P) I_2}{kS} - \frac{(e_0 a)^4 k_W I_2}{kS} \right) \frac{\partial^5 w_b}{\partial x^3 \partial t^2} + \left((e_0 a)^2 I_0 + I_2 \right. \\
& \left. + \frac{(e_0 a)^2 k_W I_2}{kS} - \frac{(D_T \Delta T - k_P) I_2}{kS} \right) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} - \frac{(e_0 a)^4 I_0 I_2}{kS} \frac{\partial^7 w_b}{\partial x^3 \partial t^4} \\
& \left. + \frac{(e_0 a)^2 I_0 I_2}{kS} \frac{\partial^5 w_b}{\partial x \partial t^4} - (e_0 a)^2 \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \right. \quad (3.82)
\end{aligned}$$

sınır şartı olarak açıklanabilmektedir. Denklem (3.82) yeri geldiğinde “toplam kesme kuvveti” olarak anılacak olup,

$$V^* = 0 \quad (3.83)$$

ile sembolize edilecektir.

Hareket Denkleminin Çözümü: Tez çalışması mekanik açıdan bir serbest titreşim analizini kapsadığından ilk olarak Denklem (3.79)’da $f=0$ alındıktan sonra denkleme uygulanacak değişkenlere ayırma ifadesi

$$w_b(x, t) = W_b(x) \sin(\omega t - \theta) \quad (3.84)$$

şeklinde ifade edilir. Denklem (3.84), Denklem (3.79)’da yerine yazılırsa ve devamında harmonik fonksiyon olan sinüs fonksiyonu denklemden sadeleştirilirse kısmi bir diferansiyel denklem olan hareket denklemini aşağıdaki gibi adi bir diferansiyel denklem olan mod denklemine dönüşmektedir:

$$A_1 \frac{d^6 W_b(x)}{dx^6} + A_2 \frac{d^4 W_b(x)}{dx^4} + A_3 \frac{d^2 W_b(x)}{dx^2} + A_4 W_b(x) = 0 \quad (3.85)$$

burada aşağıdaki tanımlar geçerlidir:

$$\begin{aligned}
A_1 &= -\frac{(e_0 a)^2 (D_T \Delta T - k_P) B}{kS} + \omega^2 \left(\frac{(e_0 a)^4 (D_T \Delta T - k_P) I_2}{kS} \right), \\
A_2 &= B \left[-1 + \frac{1}{kS} (D_T \Delta T - k_P - (e_0 a)^2 k_W) \right] + (e_0 a)^2 (D_T \Delta T - k_P) \\
&\quad \omega^2 \left[\frac{(e_0 a)^2 I_0 B}{kS} + (e_0 a)^2 I_2 \left[1 + \frac{1}{kS} (-2(D_T \Delta T - k_P) + (e_0 a)^2 k_W) \right] \right] \\
&\quad \omega^4 \left(-\frac{(e_0 a)^4 I_0 I_2}{kS} \right), \\
A_3 &= k_W \left(\frac{B}{kS} + (e_0 a)^2 \right) - (D_T \Delta T - k_P) + \omega^2 \left[I_0 \left(-\frac{B}{kS} - (e_0 a)^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + I_2 \left[-1 + \frac{1}{kS} ((D_T \Delta T - k_P) - (e_0 a)^2 k_W) \right] \right] + \omega^4 \left(\frac{2(e_0 a)^4 I_0 I_2}{kS} \right), \\
A_4 &= -k_W + \omega^2 \left(I_0 + \frac{k_W I_2}{kS} \right) + \omega^4 \left(-\frac{I_0 I_2}{kS} \right). \tag{3.86}
\end{aligned}$$

bunlara ek olarak, mekanik sınır şartlar olan eğilme momenti (Denklem (3.77)) ve toplam kesme kuvveti (Denklem (3.82)), Denklem (3.84)'nin idaresinde

$$M = B_1 \frac{d^4 W_b}{dx^4} + B_2 \frac{d^2 W_b}{dx^2} + B_3 W_b \tag{3.87}$$

$$V^* = B_4 \frac{d^5 W_b}{dx^5} + B_5 \frac{d^3 W_b}{dx^3} + B_6 \frac{dW_b}{dx} \tag{3.88}$$

şeklinde formülize edilebilir. Burada gerekli tanımlar yeri geldiğinde verilecektir.

Denklem (3.85) altıncı dereceden, adi, sabit katsayılı ve homojen bir diferansiyel denklem teşkil etmektedir. Her ne kadar diferansiyel denklemin çözümünde ortaya çıkan karakteristik polinomun altıncı dereceden olduğu bilinse de bu denklemde A_4 'ün varlığı nedeniyle karakteristik polinomun çözümünden mod denklemine el hesabıyla geçiş çok zordur. Dolayısı ile sınır şartların uygulanması manasız kalacaktır. Dahası, karakteristik polinom çözülebilecek olsa dahi altı adet sınır şarta ihtiyaç olacağını gösterir. Elbette sıcaklık ve/veya Pasternak zemini problemde rol almazsa çözüm gerçekleştirilebilecektir. Öte yandan, Euler-Bernoulli kiriş teorisi ile yapılan serbest titreşim çözümünde dört adet mod çözümü sabiti mevcuttur, geometrik ve mekanik sınır şartlar da dört adet olduğundan çözümün duyduğu ihtiyaç karşılanmış olur. Ancak burada kayma deformasyonsuz teoriden farklı olarak sıcaklık ve/veya Pasternak zeminin yerel olmayan parametre, kayma düzeltme çarpanı ve kayma modülü ile birlikte etki göstermesi daha yüksek mertebeden bir diferansiyel denklemi meydana getirmiş olup, aşikâr sonuca sebebiyet vermeyecek iki sınır şarta daha ihtiyaç duyulmaktadır. Euler-Bernoulli kiriş teorisinden farklı olarak Timoshenko kiriş teorisinin bu ilave sınır şartı geometrik yapıda bir sınır şart

olan kayma deplasmanı ile karşılanabilmektedir. Buna göre, bu defa kayma deplasmanını da idare eden

$$w_s(x, t) = W_s(x) \sin(\omega t - \theta) \quad (3.89)$$

şeklindeki değişkenlere ayırma ifadesinin Denklem (3.84) ile beraber Denklem (3.76)'ya uygulanması

$$W_s = B_7 \frac{d^2 W_b}{dx^2} + B_8 W_b \quad (3.90)$$

neticesini vermektedir. Denklemler (3.87), (3.88) ve (3.90) ile tanımlanan sınır şartlarda görülen B_i ($i = 1 - 8$) katsayıları

$$\begin{aligned} B_1 = B_4 &= -\frac{(e_0 a)^2 (D_T \Delta T - k_p) B}{kS} + \omega^2 \left(\frac{(e_0 a)^4 (D_T \Delta T - k_p) I_2}{kS} \right), \\ B_2 &= B \left[-1 - \frac{(e_0 a)^2 k_w}{kS} \right] + (e_0 a)^2 (D_T \Delta T - k_p) + \omega^2 \left[\frac{(e_0 a)^2 I_0 B}{kS} + \right. \\ &\quad \left. (e_0 a)^2 I_2 \left[1 + \frac{1}{kS} \left(-(D_T \Delta T - k_p) + (e_0 a)^2 k_w \right) \right] \right] + \omega^4 \left(-\frac{(e_0 a)^4 I_0 I_2}{kS} \right), \\ B_3 &= (e_0 a)^2 k_w + \omega^2 \left(-(e_0 a)^2 I_0 - \frac{(e_0 a)^2 k_w I_2}{kS} \right) + \omega^4 \left(\frac{(e_0 a)^4 I_0 I_2}{kS} \right), \\ B_5 &= B \left[-1 + \frac{1}{kS} \left(-(D_T \Delta T - k_p) - (e_0 a)^2 k_w \right) \right] + (e_0 a)^2 (D_T \Delta T - k_p) \\ &\quad + \omega^2 \left[\frac{(e_0 a)^2 I_0 B}{kS} + (e_0 a)^2 I_2 \left[1 + \frac{1}{kS} \left(-2(D_T \Delta T - k_p) + (e_0 a)^2 k_w \right) \right] \right] \\ &\quad + \omega^4 \left(-\frac{(e_0 a)^4 I_0 I_2}{kS} \right), \\ B_6 &= -(D_T \Delta T - k_p) + (e_0 a)^2 k_w + \omega^2 \left[-(e_0 a)^2 I_0 + I_2 \left[-1 + \frac{1}{kS} (D_T \Delta T - k_p) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (e_0 a)^2 k_w \right) \right] \right] + \omega^4 \left(-\frac{(e_0 a)^4 I_0 I_2}{kS} \right), \\ B_7 &= -\frac{B}{kS} + \omega^2 \frac{(e_0 a)^2 I_2}{kS}, \quad B_8 = -\omega^2 \frac{I_2}{kS}. \end{aligned} \quad (3.91)$$

olarak ifade edilmektedir.

Sınır Şartlar: Termo-elastik çevrede yer alan yerel olmayan Timoshenko kirişinin mod çözümlemesine dair denklemin elle edilmesi çok zor olduğundan altı adet sınır şartını uygulamanın bir anlamı yoktur ancak tezde ele alınan nanokiriş tiplerinin sınır şartlarının tanıtılması gerekmektedir. Zira bu kapsamdaki bazı açıklamalar mekaniksel ve matematiksel olarak birkaç önemli çıkarım sağlayacaktır.

1- Basit Mesnet (S): Yarı rijit bağlantı olarak da adlandırılan bu uç türünün geometrik olarak çökmediği ve mekanik olarak eğilme momenti almadığı mühendislik mekaniğinde yaygın bilinen bir bilgidir. Buna ek olarak, ilave sınır şartı olarak tanıtılan kesme deplasmanının da olmaması gerekmektedir. Bu anlatılanlar Denklemler (3.69), (3.87) ve (3.90) için sırasıyla

$$W_b = 0, B_1 W_b^{(4)} + B_2 W_b'' + B_3 W_b = 0, B_7 W_b'' + B_8 W_b = 0. \quad (3.92)$$

denklemleri ile ifade edilir. Burada ilk olarak, eğilme deplasmanı sınır şartı kayma deplasmanı sınır şartında yerine yazıldıktan sonra elde edilen netice yine eğilme deplasmanı ile beraber eğilme momenti sınır şartında yerine yazılırsa,

$$W_b = 0, W_b'' = 0, W_b^{(4)} = 0. \quad (3.93)$$

neticeleri elde edilir ve bunun mod çözümü sürecinde dolaylı olarak önemli bir bulguyu sağladığından yeri geldiğinde söz edilecektir.

2- Ankastre Mesnet (C): Tam rijit bağlantı olarak adlandırılan bu uç türünde geometrik olarak hiçbir harekete izin verilmez, yani çökme ve dönme olmaz. Teorik formülasyon gereğince bunun anlamı, eğilme ve kesme deplasmanlarının yanı sıra eğilme dönmesinin sıfıra eşit olmasıdır.

$$W_b = 0, W_b' = 0, B_7 W_b'' + B_8 W_b = 0. \quad (3.94)$$

sonuç olarak sınır şartların nihai hali şöyle sıralanır:

$$W_b = 0, W_b' = 0, W_b'' = 0. \quad (3.95)$$

3- Serbest Uç (F): Herhangi bir mesnetlenme veya özel bir kısıtlama bulunmadığından yani rijit hareket görüleceğinden iç tesir oluşmaz. Buna ek olarak kiriş kinematiği gereğince geometrik olarak sadece kesme deplasmanı yoktur. Dolayısı ile Denklemler (3.87), (3.88) ve (3.90)'a göre sırasıyla

$$B_1 W_b^{(4)} + B_2 W_b'' + B_3 W_b = 0, B_4 W_b^{(5)} + B_5 W_b''' + B_6 W_b' = 0, \\ B_7 W_b'' + B_8 W_b = 0. \quad (3.96)$$

şeklinde sınır şartlar açıklanır.

4- Kılavuz Mesnet (G): Teknik tabirle düşeyde kayıcı ama dönmeyen mesnet yukarıda açıklanan diğer uç türüne göre nispeten az karşılaşılan uç türüdür ancak mekanik davranışın kapsamlı araştırılması için analize dâhil olması tercih edilmiştir. Burada kılavuz uç yarı ankastre bir mesnet gibidir yani ankastre gibi dönmemekte ancak çizgisel hareket yapabilmektedir. Bu nedenle eğilme dönmesinin olmadığı ve çizgisel hareket serbestliği nedeniyle toplam kesme kuvvetinin de olmayacağı anlaşılmakta, bu ikisine ek olarak ucun kinematiği gereğince kesme dönmesinin de olmayacağı belirtilmektedir. Sonuç itibarıyla kılavuz mesnet

$$W_b' = 0, B_4 W_b^{(5)} + B_5 W_b''' + B_6 W_b' = 0, B_7 W_b''' + B_8 W_b' = 0. \quad (3.97)$$

denklemleri ile ifade edilir. Burada ilk olarak eğilme dönmesinin kesme dönmesinde yerine yazılmasıyla elde edilen sonuç yine eğilme dönmesi ile beraber toplam kesme kuvvetinde kullanılırsa şu sonuca varılır:

$$W_b' = 0, W_b''' = 0, W_b^{(5)} = 0. \quad (3.98)$$

Uygulamalar: Sınır şartlar üzerinden dinamik davranışın araştırılmasında el hesabının verimsiz süreçlere yol açacağı durumlarda kullanılacak seri açılımdan Denklem (3.26) sunularak bahsedilmiştir. Timoshenko kiriş teorisi için görüldüğü üzere, sınır şartların uygulanacağı mod denklemi ilgili diferansiyel denklemin yapısı itibarıyla elde edilememekteydi. Bu arada, buraya kadar ele alınan nanokiriş analizi kayma deformasyonunu gözlemeseydi yani Euler-Bernoulli kuramı kullanılsaydı mod çözümüne ulaşılabilecek ve sınır şartların uygulanması ile frekans analizi el çözümüyle veya elektronik ortamda programlama ile bir şekilde gerçekleştirilebilecekti (Numanoğlu 2019). Öte yandan, Timoshenko teorisi için ilgili diferansiyel denklemin çözümü, sıcaklık ve Pasternak zemin parametrelerinin ihmalıyla elde edilse bile buna yönelik bir analiz tez kapsamını eksik ifade edecektir. Buna göre, analitik çözüm hususunda doğrudan elde edilemeyen mod çözümü için bir seri açılımından bahsedilecektir. Seri açılımı eğer kirişin bütün sınır şartlarını sağlarsa hareket denklemini teşkil eden adi diferansiyel denklemde kullanılarak frekans hesabına geçilebilmektedir. Buna göre, Denklemler (3.92)-(3.98)'in değerlendirilmesi sonucunda, iki ucu basit mesnetli (S-S) ve bir ucu basit diğer ucu kılavuz mesnetli (S-G) şeklinde sınır şartlara sahip kayma deformasyonlu fonksiyonel derecelendirilmiş yerel olmayan nanokirişlerin

$$\begin{aligned} \text{S-S Nanokirişi: } W_b(0) = 0, W_b''(0) = 0, W_b^{(4)}(0) = 0, \\ W_b(L) = 0, W_b''(L) = 0, W_b^{(4)}(L) = 0. \end{aligned} \quad (3.99)$$

$$\begin{aligned} \text{S-G Nanokirişi: } W_b(0) = 0, W_b''(0) = 0, W_b^{(4)}(0) = 0, \\ W_b'(L) = 0, W_b'''(L) = 0, W_b^{(5)}(L) = 0. \end{aligned} \quad (3.100)$$

ile verilen sınır şartlarını sağlayan aşağıdaki seri açılımları kullanılarak serbest titreşim davranışları araştırılabilir:

$$\text{S-S Nanokirişi: } W_b(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_{b,n} \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \sin(\omega t - \theta) \quad (3.101)$$

$$\text{S-G Nanokirişi: } W_b(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_{b,n} \sin\left(\frac{(2i-1)\pi x}{2L}\right) \sin(\omega t - \theta) \quad (3.102)$$

bu serinin hareket denkleminin uygulanışı iki sınır şart tipi için de aynı olup, örnek olması adına sadece iki ucu basit mesnetli nanokirişin hesabı açıklanmaktadır. Buna göre seri açılımının Denklem (3.79)'da kullanımından sonra harmonik fonksiyon sadeleştirilirse

$$-A_1\left(\frac{i\pi}{L}\right)^6 + A_2\left(\frac{i\pi}{L}\right)^4 - A_3\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 + A_4 = 0 \quad (3.103)$$

elde edilir. Burada Denklem (3.86) kullanıldıktan sonra sonuç denklem ω^4 , ω^2 ve sabite bağlı polinom olarak düzenlenirse, polinom kökleri ω_1^2 ve ω_2^2 olacak şekilde bunlar şöyle formüle edilir:

$$\omega_1^2 = \frac{-C_2 + \sqrt{C_2^2 - 4C_1C_3}}{2C_1}, \quad \omega_2^2 = \frac{-C_2 - \sqrt{C_2^2 - 4C_1C_3}}{2C_1}. \quad (3.104)$$

burada aşağıdaki tanımlar geçerlidir:

$$\begin{aligned} C_1 &= c_1\left(\frac{i\pi}{L}\right)^4 + c_2\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 + c_3, \quad C_2 = c_4\left(\frac{i\pi}{L}\right)^6 + c_5\left(\frac{i\pi}{L}\right)^4 + c_6\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 + c_7, \\ C_3 &= c_8\left(\frac{i\pi}{L}\right)^6 + c_9\left(\frac{i\pi}{L}\right)^4 + c_{10}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 + c_{11}. \end{aligned} \quad (3.105)$$

bu ifadeler de görüldüğü üzere aşağıdakilere bağlıdır:

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{(e_0 a)^4 I_0 I_2}{kS}, \quad c_2 = -\frac{2(e_0 a)^2 I_0 I_2}{kS}, \quad c_3 = -\frac{I_0 I_2}{kS}, \quad c_4 = -\frac{(e_0 a)^4 (D_T \Delta T - k_P) I_2}{kS}, \\ c_5 &= \frac{(e_0 a)^2 I_0 B}{kS} + (e_0 a)^2 I_2 \left[1 + \frac{1}{kS} \left(-2(D_T \Delta T - k_P) + (e_0 a)^2 k_W \right) \right], \\ c_6 &= I_0 \left(\frac{B}{kS} + (e_0 a)^2 \right) + I_2 \left[1 + \frac{1}{kS} \left((D_T \Delta T - k_P) + 2(e_0 a)^2 k_W \right) \right], \\ c_7 &= I_0 + \frac{k_W I_2}{kS}, \quad c_8 = \frac{(e_0 a)^2 (D_T \Delta T - k_P) B}{kS}, \\ c_9 &= B \left[-1 - \frac{1}{kS} \left(-(D_T \Delta T - k_P) + (e_0 a)^2 k_W \right) \right] + (e_0 a)^2 (D_T \Delta T - k_P), \\ c_{10} &= k_W \left(-\frac{B}{kS} - (e_0 a)^2 \right) + D_T \Delta T - k_P, \quad c_{11} = -k_W. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Denklemler (3.105) ve (3.106) ile verilen tanımlar gereğince, problemin yerel olmayan parametre, ortam sıcaklığı, elastik zemin rijitlikleri gibi temel olmayan faktörlerinin değerleri ekstrem olmadığı sürece $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ ve $C_3 < 0$ olduğu anlaşılır. Bu sonuç da $\omega_1^2 > 0$ ve $\omega_2^2 < 0$ olacağına işaret eder. Böylece ele alınan problemde fiziksel olarak sadece ω_1 frekansının uygun olduğu, sonuç olarak i . titreşim modunun doğal frekansının

$$\omega_i = \sqrt{\frac{-C_2 + \sqrt{C_2^2 - 4C_1C_3}}{2C_1}} \quad (3.107)$$

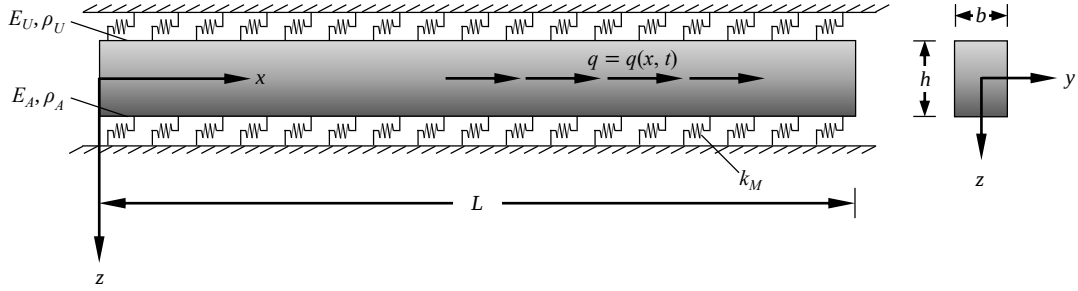
ile hesaplanması gerektiği ifade edilebilir.

3.3.3. Kayma deformasyonlu aksenal çubuklar

Kayma deformasyonuna (teknik açıdan “yanal atalet” veya “Poisson etkisi” ifadeleriyle zikredilmesi de doğrudur) sahip ve elastik bir ortama gömülü aksenal nanoçubukların fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden imal edildiği göz önüne alınarak yerel olmayan aksenal serbest titreşim analizi bu alt başlıkta irdelenmektedir. Ayrıca, ilerideki bir alt başlığa konu olan nanoçerçeve yapılarında aksenal davranış kayma deformasyonunun ihmal edilmesiyle düşünüleceğinden buna dair çıkarımlar da detaya girmeksizin sunulacaktır.

Katı bir cisimde aksenal yani çubuk eksenini yönünde gerçekleşen bir hareket Poisson etkileri nedeniyle çubuk eksenine dik yönlerde yanal şekil değişimlerine sebep olur ve bunun sonucunda yanal deplasmanlar gerçekleşir. Tabi, şekil değişiminin olduğu yerde gerilmelerin varlığı da akla gelmektedir. İşte Poisson etkisine sahip çubuklarda kayma yönlerinde meydana gelen bu durum kirişler için kayma deformasyonlu teorileri akla getirir. Aksenal yatay yapı elemanlarında kayma etkileri temel olarak Rayleigh ve Love-Bishop (veya sadece Bishop olarak da anılmaktadır) teorileri ile incelenmektedir. Rayleigh teorisi yanal ataletin etkisini sadece kütleyle dahil ederken rijitlikte bir değişim olmaz. Buna karşın Love-Bishop teorisi bir adım daha kapsamlıdır, buna göre yanal atalet hem kütlede hem rijitlikte bir etki göstermektedir. Tabi bu anlatılana paralel olarak, kirişler için de bir Rayleigh teorisi mevcuttur. Ayrıca belirtilebilir ki, yanal ataletin tümüyle reddedildiği çubuk davranışı elemanter (“basit” veya “kaymasız” olarak da zikredilebilir) çubuk teorisi ile ele alınır. Bu teoride tüm şekil değişimi aksenal yöndedir, çubuğun diğer yönlerinde hiçbir şekil değişimi olmadığı kabul edilir. Düşük çubuk uzunlukları ve yüksek kesit yükseklikleri gibi durumlar basit çubuk ve Love-Bishop çubuğu arasındaki davranışı farklılaştırır. Sonuç olarak bütün bu anlatılanlardan, basit çubuğun Euler-Bernoulli kirişiyle ve Love-Bishop çubuğunun Timoshenko kirişiyle benzerlik gösterdiği anlaşılır.

Hareket Denkleminin Türetilmesi: Söz konusu serbest titreşim analizinin rol modeli Şekil 3.6’da betimlenmektedir. Burada alt ve üst yüzeyin malzeme özellikleri de görülmektedir. Öte yandan, k_M çubuğun gömüldüğü aksenal tam elastik ortamın rijitliği ve $q = q(x, t)$ nanoçubuk yapısının maruz kaldığı dış aksenal tahrik olarak tanımlanır.



Şekil 3.6. Elastik ortama gömülü fonksiyonel derecelendirilmiş nanoçubuğun eksenel titreşimi için nanoyapı modeli

Nanokirişlerde olduğu gibi hareket denkleminde ulaşmak için Denklem (3.27)'nin düzenlenebilmesi nanoçubuk kinematiğine bağlıdır. Buna göre ilk olarak hareket bileşenleri

$$\begin{aligned} u_x(x, z, t) &= u(x, t) = u, \quad u_y(x, z, t) = v(x, t) = v = -\nu y \frac{\partial u}{\partial x}, \\ u_z(x, z, t) &= w(x, t) = w = -\nu z \frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.108)$$

olarak yazılır. Burada u_x eksenel, u_y yanal ve u_z enine deplasman bileşenleridir. ν Poisson oranıdır ve nanokirişlerde olduğu gibi sabit kabul edilecektir. Burada basit çubuk ve Love-Bishop çubuğu arasındaki farklılık matematiksel olarak da gözlemlenebilir. Buna göre, basit çubukta yanal ve enine deplasman bileşenleri sıfıra eşittir. Öte yandan, Love-Bishop çubuğunda görüldüğü üzere yanal ve enine deplasman bileşenleri Poisson oranı nedeniyle eksenel hareketten doğmaktadır. Bu ifadelerle göre şekil değiştirme bileşenleri

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = -\frac{1}{2} \nu y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = -\frac{1}{2} \nu z \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = -\nu \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = 0, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\nu \frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.109)$$

şeklinde formüle edilebilir. Burada ε_{xx} , ε_{yy} ve ε_{zz} ilgili eksenlerin eksenel şekil değiştirme bileşenlerini ve ε_{xy} , ε_{xz} ve ε_{yz} kayma şekil değiştirme bileşenlerini belirtir. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme için klasik gerilme bileşenleri de

$$\begin{aligned} s_{xx} &= E(z) \varepsilon_{xx} = -E(z) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad s_{xy} = 2G(z) \varepsilon_{xy} = -G\nu y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ s_{xz} &= 2G(z) \varepsilon_{xz} = -G\nu z \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad s_{yy} = E(z) \varepsilon_{yy} = 0, \\ s_{yz} &= 2G(z) \varepsilon_{yz} = 0, \quad s_{zz} = E(z) \varepsilon_{zz} = 0. \end{aligned} \quad (3.110)$$

şeklinde tanımlanır. Burada s_{xx} , s_{yy} ve s_{zz} ilgili eksenlerin eksenel gerilme bileşenlerini ve s_{xy} , s_{xz} ve s_{yz} kayma şekil değiştirme bileşenlerini açıklar. Her ne kadar sıfırdan farklı olduğu düşünülse de çubuk teorisinin bir diğer kabulüne göre s_{yy} ve s_{zz} gerilmeleri ihmal edilmektedir.

Love-Bishop çubuğunda yerel olmayan gerilme bileşenleri Timoshenko nanokirişinde olduğu gibi doğrudan tanımlamadığından klasik-yerel olmayan gerilme bağıntısı kurulamaz çünkü yerel olmayan gerilmeler Poisson etkisi nedeniyle birbirine bağımlıdır. Bu durum, dinamik denge üzerinden (Rao 2007; Karličić vd. 2018; Civalek ve Numanoğlu 2020), nano ölçekli katı cisme etkiyen diğer dış kuvvetler (bunlar söz konusu analiz düşünüldüğünde sadece eksenel dış tahrik ve elastik ortam tepkisidir) ve fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme düşünülerek aşağıdaki gibi yazılır:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \rho(z) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho(z) \tilde{q}_x + \frac{k_M}{A} u \quad (3.111)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = \rho(z) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \rho(z) \tilde{q}_y \quad (3.112)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} = \rho(z) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho(z) \tilde{q}_z \quad (3.113)$$

burada σ_{ij} notasyonu ile gösterilen gerilme tansörünün bütün bileşenleri ilgili eksenel veya kayma yönünün yerel olmayan gerilmesini tanımlar. Yukarıda görülen

$$\tilde{q}_x = \frac{q_x}{\rho(z)A} = \frac{q}{\rho(z)A}, \quad \tilde{q}_y = \frac{q_y}{\rho(z)A} = 0, \quad \tilde{q}_z = \frac{q_z}{\rho(z)A} = 0. \quad (3.114)$$

ifadelerinde $\tilde{q}_x$, $\tilde{q}_y$ ve $\tilde{q}_z$ kütleli kuvvetleri (birim uzunluğa düşen kütleye düşen yayılı yük) temsil etmekte olup, söz konusu analizde dış tahrik sadece eksenel yönde resmedilerek formülasyona katılacağından $\tilde{q}_y = \tilde{q}_z = 0$ olmalıdır.

Gerekli bilgiler sunulduğuna göre enerji ifadeleri şu şekilde tanımlanabilir:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + 2\sigma_{xy} \varepsilon_{xy} + 2\sigma_{xz} \varepsilon_{xz} + 2\sigma_{yz} \varepsilon_{yz}) dV \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^L k_M u^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left(N \frac{\partial u}{\partial x} - P \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx \end{aligned} \quad (3.115)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho(z) \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} \right)^2 \right] dV = \frac{1}{2} \int_0^L \left[I_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + I_S \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)^2 \right] dx \quad (3.116)$$

$$W = \int_0^L q u dx \quad (3.117)$$

burada iç şekil değiştirme enerjisi U 'nun düzenlenmesiyle ortaya çıkan N eksenel normal kuvveti ve P toplam yanal kuvveti tanımlar. Kinetik enerji T 'nin sonucunda görülen I_0 nanokirişte olduğu gibi Denklem (3.52) ile formüle edilmiş sıfırıncı kütle ataletiyken ve I_S yanal atalettir:

$$I_S = \int_A \rho(z) v^2 (y^2 + z^2) dA = v^2 I_{12} + v^2 I_{22} \quad (3.118)$$

burada I_{12} ve I_{22} sırasıyla y - ve z - eksenleri için yanal kütle ataletleri olup, bunlar için sırasıyla $dA = dydz$ ve $dA = bdz$ tanımları kullanılarak

$$I_{12} = \int_A \rho(z) y^2 dA = \int_{-b/2}^{b/2} y^2 \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) dz dy = \frac{b^3}{12} I_{y0} \quad (3.119)$$

$$I_{22} = \int_A \rho(z) z^2 dA = b \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z^2 dz = b I_{z0} \quad (3.120)$$

denklemlerine ulaşılır. Burada görülen I_{y0} ve I_{z0} sırasıyla y - ve z - eksenleri için birim yanal kütle ataletleri olarak açıklanabilir. Bu iki yeni ifade hesaplanıp, önce ilgili yanal kütle ataletlerinde yerine koyıldıktan sonra elde edilenler sonra Denklem (3.118)'de kullanılırsa fonksiyonel derecelendirilmiş nanoçubuğun yanal ataleti nihai olarak aşağıdaki gibi yazılır:

$$I_S = v^2 b h \left[\frac{b^2}{12} \left(\frac{\Delta \rho}{p+1} + \rho_A \right) + h^2 \left[\frac{\Delta \rho}{p+1} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p+2} + \frac{2}{(p+2)(p+3)} \right) + \frac{\rho_A}{12} \right] \right] \quad (3.121)$$

Bunlara ek olarak Denklem (3.115)'te görülen toplam yanal kuvvet iç tesiri aşağıdaki gibi verilebilir:

$$P = v \int_A (\sigma_{xy} y + \sigma_{xz} z) dA \quad (3.122)$$

Gerekli ara bilgiler tanımlandığına göre tekrardan varyasyon hesaplarına dönülebilir. Buna göre Denklemler (3.115)-(3.117) ile yazılan enerji ifadelerinin birinci varyasyonları

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta U dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(N \delta \frac{\partial u}{\partial x} - P \delta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L k_M u \delta u dx dt \quad (3.123)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(I_0 \frac{\partial u}{\partial t} \delta \frac{\partial u}{\partial t} + I_S \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \delta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) dx dt \quad (3.124)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L q \delta u dx dt \quad (3.125)$$

şeklinde oluşturulur. Buradaki bazı ifadelerin kısmi integrasyon işlemine tabi tutulması gerekmekte olup, bu amaçla yazılan

$$\begin{aligned} \int_0^L N \delta \frac{\partial u}{\partial x} dx &= N \delta u \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial N}{\partial x} \delta u dx, \\ \int_{t_1}^{t_2} I_0 \frac{\partial u}{\partial t} \delta \frac{\partial u}{\partial t} dt &= I_0 \frac{\partial u}{\partial t} \delta u \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u dt, \\ \int_0^L P \delta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx &= P \delta \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^L - \frac{\partial P}{\partial x} \delta u \Big|_0^L + \int_0^L \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \delta u dx, \\ \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L I_S \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \delta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} dt &= \int_0^L I_S \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \delta \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t_1}^{t_2} dx - \int_{t_1}^{t_2} I_S \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \delta u \Big|_0^L dt \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L I_S \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} \delta u dx dt. \end{aligned} \quad (3.126)$$

denklemleri de kullanılarak Denklem (3.27) söz konusu nanoyapı için şu şekilde düzenlenir:

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(-\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + k_M u + I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - I_S \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} - q \right) \delta u dx dt \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \left(N + \frac{\partial P}{\partial x} + I_S \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \right) \delta u \Big|_0^L dt + \int_{t_1}^{t_2} (-P) \delta \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^L dt + \int_0^L \left(-I_0 \frac{\partial u}{\partial t} \right) \delta u \Big|_{t_1}^{t_2} dx \\ &+ \int_0^L \left(-I_S \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) \delta \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t_1}^{t_2} dx = 0 \end{aligned} \quad (3.127)$$

burada ilk olarak, en baştaki çift integrallli ifadede $\delta u \neq 0$ durumu için yazılabilecek

$$\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - k_M u - I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_S \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + q = 0 \quad (3.128)$$

denklemini kayma deformasyonlu fonksiyonel derecelendirilmiş yerel olmayan eksenel nanoçubuğun dinamik dengesini açıklamakta ve hareket denkleminin temelini oluşturmaktadır. Buna göre işlemlerin devam ettirilebilmesi için Denklemler (3.22), (3.23) ve (3.110) göz önüne alınarak klasik-yerel olmayan gerilme bağıntılarının kurulması gerekmektedir:

$$\left(1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \sigma_{xx} = E(z) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.129)$$

$$\left(1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \sigma_{xy} = -G(z) \nu y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.130)$$

$$\left(1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \sigma_{xz} = -G(z) \nu z \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.131)$$

Denklem (3.112) ve (3.113) sırasıyla Denklemler (3.130) ve (3.131)'de kullanılırsa yerel olmayan kayma gerilmeleri

$$\sigma_{xy} = -(e_0 a)^2 \rho(z) \nu y \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} - G(z) \nu y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.132)$$

$$\sigma_{xz} = -(e_0 a)^2 \rho(z) \nu z \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} - G(z) \nu z \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.133)$$

şeklinde türetilir. Ayrıca, Denklem (3.111)'in konuma göre bir defa türevi alınıp yalnız bırakılan yerel olmayan eksenel gerilmenin konuma göre ikinci türevi Denklem (3.129)'da yerleştirilirse yerel olmayan eksenel gerilmeye

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = & (e_0 a)^2 (1 + 2\nu) \rho(z) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} - (e_0 a)^2 \rho(z) \frac{\partial \tilde{q}_x}{\partial x} + (e_0 a)^2 \frac{k_M}{A} \frac{\partial u}{\partial x} \\ & + E(z) \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.134)$$

olarak ulaşılır. Öte yandan, Denklemler (3.132) ve (3.133) ile sunulan yerel olmayan kayma gerilmelerinin Denklem (3.122)'da kullanılmasıyla, Denklem (3.118) ile verilen yanal atalet tanımı da hatırlanarak toplam yanal kuvvet formüle edilebilir:

$$P = -(e_0 a)^2 I_S \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} - S_r \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.135)$$

burada S_r yanal rijitliktir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$S_r = \int_A G(z) \nu^2 (y^2 + z^2) dA = \nu^2 S_{12} + \nu^2 S_{22} \quad (3.136)$$

burada kesit eksenleri için yapılan yanal kütle ataleti tanımlarına benzer olarak S_{12} ve S_{22} ifadeleri de sırasıyla y - ve z - eksenleri için yanal rijitlikler olup, bunlar için de sırasıyla $dA = dydz$ ve $dA = b dz$ tanımları yardımıyla yazılabilen

$$S_{12} = \int_A G(z) y^2 dA = \int_{-b/2}^{b/2} y^2 \int_{-h/2}^{h/2} G(z) dz dy = \frac{b^3}{12} S_{y0} \quad (3.137)$$

$$S_{22} = \int_A G(z) z^2 dA = b \int_{-h/2}^{h/2} G(z) z^2 dz = b S_{z0} \quad (3.138)$$

denklemlerinin yanal atalet hesabına benzer şekilde yanal rijitlikte kullanımı sonucunda

$$S_r = \nu^2 b h \left[\frac{b^2}{12} \left(\frac{\Delta G}{p+1} + G_A \right) + h^2 \left[\frac{\Delta G}{p+1} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p+2} + \frac{2}{(p+2)(p+3)} \right) + \frac{G_A}{12} \right] \right] \quad (3.139)$$

ifadesi ortaya çıkar. Sırasıyla Denklemler (3.137) ve (3.138)'de görülen S_{y0} ve S_{z0} sırasıyla y - ve z - eksenleri için birim yanal rijitlikler olarak tanımlanır.

Öte yandan, hareket denkleminin kurulabilmesi maksadıyla diğer iç tesir olan eksenel normal kuvveti elde etmek için Denklem (3.134) ile tanıtılmış yerel olmayan eksenel gerilmeyi kesit alan üzerinden integre etmek yeterlidir:

$$N = (e_0 a)^2 (1 + 2\nu) I_0 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} - (e_0 a)^2 \frac{\partial q}{\partial x} + (e_0 a)^2 k_M \frac{\partial u}{\partial x} + A_0 \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.140)$$

burada A_0 eksenel rijitliktir ve esasen basit çubuk teorisinin temel bir bileşenidir. $dA = b dz$ eşitliği kullanılarak eksenel rijitlik

$$A_0 = \int_A E(z) dA = b h \left(\frac{\Delta E}{p+1} + E_U \right) \quad (3.141)$$

olarak hesaplanır.

Nihayetinde, sırasıyla Denklemler (3.140) ve (3.135) ile elde edilmiş eksenel normal kuvvet ve toplam yanal kuvvetin Denklem (3.128)'de yerine koyulması ile titreşimin hareket denklemi formüle edilmiş olur:

$$S_r \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \left[A_0 + (e_0 a)^2 k_M \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_M u + I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (e_0 a)^2 I_s \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial t^2} - \left[I_s + (e_0 a)^2 (1 + 2\nu) I_0 \right] \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - q = 0 \quad (3.142)$$

Tabi mekanik davranışın belirlenmesi hareket denklemi veya onun çözümünün elde edilmesi ile yeterli olmamaktadır. Buna göre nanokirişlerde de bahsedildiği gibi sınır şartların elde edilmesi gerekmektedir. Denklem (3.127)'nin yapısı göz önüne alındığında, geometrik sınır şartların u ve u' olduğu, mekanik sınır şartların ise $\delta u(0, t) \neq 0$ ve/veya $\delta u(L, t) \neq 0$ durumu için belirlenen

$$N = -\frac{\partial P}{\partial x} - I_s \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \quad (3.143)$$

ifadesinde Denklemler (3.135) ve (3.140)'ın kullanılmasıyla elde edilecek olan

$$S_r \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \left(A_0 + (e_0 a)^2 k_M \right) \frac{\partial u}{\partial x} + (e_0 a)^2 I_s \frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial t^2} - \left(I_s + (e_0 a)^2 (1 + 2\nu) I_0 \right) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} + (e_0 a)^2 \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (3.144)$$

ifadesini sembolize eden ve toplam eksenel kuvvet olarak adlandırılan

$$N^* = 0 \quad (3.145)$$

sınır şartı ve yine Denklem (3.127)'deki $\delta u'(0, t) \neq 0$ ve/veya $\delta u'(L, t) \neq 0$ durumu için toplam yanal kuvveti işaret eden

$$P = 0 \quad (3.146)$$

sınır şartı olduğu anlaşılır.

Hareket Denkleminin Çözümü: Yine bir serbest titreşim çalışması konu olduğundan hareket denklemini tanımlayan Denklem (3.128)'de, $q = 0$ alınmasıyla kalan denkleme uygulanması gereken değişkenlere ayırma denklemi

$$u(x, t) = U(x) \sin(\omega t - \theta) \quad (3.147)$$

olarak verilir. Bu denklemin hareket denkleminde yerine yazılmasından sonra nanokiriş çözümünde olduğu gibi hareket denklemi kısmi diferansiyel denklem şeklinden aşağıdaki adi diferansiyel denkleme dönüşür:

$$D_1 \frac{d^4 U(x)}{dx^4} + D_2 \frac{d^2 U(x)}{dx^2} + D_3 U(x) = 0 \quad (3.148)$$

burada görülen katsayılar aşağıda tanımlanır:

$$D_1 = S_r - \omega^2 (e_0 a)^2 I_S, \\ D_2 = -A_0 - (e_0 a)^2 k_M + \omega^2 \left[I_S + (e_0 a)^2 (1 + 2\nu) I_0 \right], D_3 = k_M - \omega^2 I_0. \quad (3.149)$$

Ayrıca, mekanik sınır şartlar olan ve sırasıyla Denklemler (3.144) ve (3.135) ile sunulan toplam eksenel kuvvet ve toplam yanal kuvvet, Denklemler (3.147) ve (3.149) kullanılarak

$$N^* = D_1 \frac{d^3 U}{dx^3} + D_2 \frac{dU}{dx} \quad (3.150)$$

$$P = D_1 \frac{d^2 U}{dx^2} \quad (3.151)$$

olarak yazılmaktadır.

Hareket denklemini ifade eden diferansiyel denklem olan Denklem (3.148)'in yapısı nedeniyle analitik olarak çözülmesi yani nanoçubuğun mod denkleminin elde edilmesi mümkündür. Buna göre,

$$U(x) = Ee^{kx} \quad (3.152)$$

ifadesinin Denklem (3.148)'de yerine yazılmasıyla elde edilen karakteristik polinom

$$D_1 k^4 + D_2 k^2 + D_3 = 0 \quad (3.153)$$

şeklinde olmaktadır. Burada aşağıda tanımlanan

$$k^2 = K \quad (3.154)$$

dönüşümü sayesinde Denklem (3.153), K 'ye bağlı ikinci dereceden bir denklem olduğundan kökleri

$$K_1 = \frac{-D_2 + \sqrt{D_2^2 - 4D_1 D_3}}{2D_1}, K_2 = \frac{-D_2 - \sqrt{D_2^2 - 4D_1 D_3}}{2D_1}. \quad (3.155)$$

olarak verilir. Burada söz konusu denklemin diskriminantı $\Delta = D_2^2 - 4D_1 D_3$ olmak üzere öncelikle bu ifadenin pozitif tanımlı olması gerekir. Yerel olmayan parametre $e_0 a$ ve elastik dış ortam rijitliği k_M 'nin ekstrem olmayan değerleri düşünüldüğünde Denklem (3.149)'deki parametreler hakkında $D_1 > 0$, $D_2 < 0$ ve $D_3 < 0$ çıkarımı yapılabilir ve böylece $K_1 > 0$ ve $K_2 < 0$ olduğu tespit edilir. Bu nedenle Denklem (3.154) gereğince Denklem (3.153)'ün iki reel ve iki sanal kökü vardır ve bunlar

$$k_{11} = \sqrt{K_1}, k_{12} = -\sqrt{K_1}, k_{21} = i\sqrt{-K_2}, k_{22} = -i\sqrt{-K_2} \quad (3.156)$$

şeklinde belirtilir. Böylece Denklem (3.152) ile verilen şablon

$$U(x) = E_1 e^{\sqrt{K_1}x} + E_2 e^{-\sqrt{K_1}x} + E_3 e^{i\sqrt{-K_2}x} + E_4 e^{-i\sqrt{-K_2}x} \quad (3.157)$$

olarak Denklem (3.148)'in çözümünü belirtir. Ancak çözümün bu formu sınır şart uygulamaları için kullanışlı olmadığından Euler dönüşümleri vasıtasıyla çözüm tekrar düzenlenecektir:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos \theta + i \sin \theta, e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta, \\ e^\theta &= \cosh \theta + \sinh \theta, e^{-\theta} = \cosh \theta - \sinh \theta. \end{aligned} \quad (3.158)$$

bu denklemlerin Denklem (3.157)'de kullanımı ile mod denkleminin nihai haline ulaşılır:

$$U(x) = F_1 \cos(\sqrt{-K_2}x) + F_2 \sin(\sqrt{-K_2}x) + F_3 \cosh(\sqrt{K_1}x) + F_4 \sinh(\sqrt{K_1}x) \quad (3.159)$$

burada F_i ($i = 1 - 4$) çözüm sabitleridir ve nanoçubuğun sınır şartlarından belirlenmekte olup, buradan itibaren bu husus ele alınmaktadır.

Sınır Şartlar: Mod denkleminin dört tane çözüm sabitine sahip olması, nanoçubuk için dört adet sınır şarta ihtiyaç olduğunu ifade eder. Yerel olmayan kayma deformasyonlu nanoçubuğun sınır şartları, eksenel deplasman ve Denklem (3.127) gereğince bunun türevine bağlı yanal deplasman gibi geometrik ve toplam eksenel normal kuvvet ve toplam yanal kuvvet gibi dinamik yapıdaki sınır şartlarını belirtir. Bu çubuğun yaygın bilinen uç tipleri aşağıda tanıtılmaktadır.

1- Tutulu Uç (C): Tutulu bir uç tamamen rijittir yani bu uçta bir hareket olmamalıdır. O halde eksenel ve yanal deplasmanlar gözlemlenmemelidir:

$$U = 0, U' = 0. \quad (3.160)$$

2- Serbest Uç (F): Mesnetlenmemiş bir uçta deplasmanlar görüleceğine göre kayma deformasyonlu nanoçubuk için bunun anlamı toplam eksenel kuvvet ve toplam yanal kuvvetin olmamasıdır. Buna göre Denklemler (3.150) ve (3.151) düşünülerek sırasıyla

$$D_1 U''' + D_2 U' = 0, D_1 U'' = 0. \quad (3.161)$$

denklemleri yazılabilir. Denklem (3.149)'daki D_1 sıfıra eşit olamayacağına göre, toplam yanal kuvvet sınır şartı için,

$$U'' = 0 \quad (3.162)$$

ifadesi kurulabilir. Sonuç olarak sınır şartlar aşağıdaki gibi verilir:

$$D_1 U''' + D_2 U' = 0, U'' = 0. \quad (3.163)$$

3- Yumuşak Tutulu Uç (S): Tutulu uç tamamen rijittir ancak bazı tutulu uç türleri yarı rijit davranmaktadır. Yarı rijit uç türlerinden olan yumuşak tutulu uçta eksenel deplasman görülmeyeceği gibi toplam yanal kuvvet oluşmaz:

$$U = 0, U'' = 0. \quad (3.164)$$

şeklinde sınır şartlar açıklanır.

4- Kavrayıcı Tutulu Uç (G): Diğer bir yarı rijit uç türü olan kavrayıcı tutulu uç, toplam eksenel kuvvet ve yanal deplasmanın oluşmayacağını ifade eder. Buna göre:

$$D_1 U''' + D_2 U' = 0, U' = 0. \quad (3.165)$$

burada yanal deplasman toplam eksenel kuvvette yerine yazılırsa

$$D_1 U''' = 0 \text{ veya } U''' = 0. \quad (3.166)$$

elde edilir. Sonuç itibarıyla sınır şartlar aşağıdaki gibi yazılır:

$$U' = 0, U''' = 0. \quad (3.167)$$

Uygulamalar: Yeri geldiğinde daha detaylı ele alınacaktır ama burada kısaca değinmek gerekirse, kaymasız yani basit çubuk teorisinde Love-Bishop çubuğuna göre yönetici diferansiyel denklemin mertebesinin düşük ve sınır şartların daha sade yapıda ve az sayıda olması nedenleriyle çözüm daha kolay olabilmektedir. Love-Bishop çubuk teorisinde ise bu belirtilen durumlar nedeniyle çözüm birçok durumda el hesabı ile gerçekleştirilemez. Bu hususta seri çözümü, bilgisayarda sembolik programlama veya sayısal yöntemler tercih edilmektedir ancak bu husus yeri geldiğinde incelenecektir. Bu nedenle uygulamalar kapsamında, el çözümüne uygun olan bir adet sınır şartlı nanoçubuk ve bazı seri açılımları ile çözümler incelenecektir.

İki ucu yumuşak tutulu (S-S) kayma deformasyonlu fonksiyonel derecelendirilmiş nanoçubuğun modal analiz hesabı el çözümüne uygundur. Denklem (3.164) göz önüne alınarak, L uzunluklu çubuğun sınır şartları

$$U(0) = 0, U''(0) = 0, U(L) = 0, U''(L) = 0. \quad (3.168)$$

şeklinde yazılır. Burada ilk iki sınır şartın Denklem (3.159)'a uygulanması neticesinde, detayına girilmeksizin

$$F_1 = F_3 = 0 \quad (3.169)$$

elde edilir. Bu sonucun mod denkleminde yerine yazılmasından sonra, üçüncü ve dördüncü sınır şartların mod denklemine uygulanması neticesinde elde edilen denklemler lineer cebrik yapıda şöyle yazılabilir:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sin(\sqrt{-K_2}L) & \sinh(\sqrt{K_1}L) \\ -K_2 \sin(\sqrt{-K_2}L) & K_1 \sinh(\sqrt{K_2}L) \end{bmatrix}}_{[A]} \underbrace{\begin{Bmatrix} C_2 \\ C_4 \end{Bmatrix}}_{\{C\}} = 0 \quad (3.170)$$

burada aşikâr çözüm için katsayılar matrisi $[A]$ 'nın determinanı sıfıra eşit olmalıdır:

$$(K_1 + K_2) \sin(\sqrt{-K_2}L) \sinh(\sqrt{K_1}L) = 0 \quad (3.171)$$

burada şöyle bir inceleme yapılabilir. İlk olarak, $(K_1 + K_2) = 0$ olması Denklem (3.155)'e istinaden $D_2 = 0$ anlamına gelir ve Denklem (3.149)'da tanımlanan D_2 parametresi göz önüne alındığında bu durum periyodik bir çözümü vermez. İkinci olarak $\sinh \sqrt{K_1}L = 0$ için $K_1 = 0$ olmalıdır ve Denklem (3.153)'ün K değişkenine bağlı ikinci dereceden denklem formunun bir negatif bir de pozitif kökü olduğu tespit edildiğinden bu durum da geçerli olmaz. Son olarak

$$\sin(\sqrt{-K_2}L) = 0 \quad (3.172)$$

durumunda aşağıda yazılan periyodik bir çözüm mevcut olur:

$$-K_2 = \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 \quad (3.173)$$

burada $i = 1, 2, 3, \dots i \in \mathbb{Z}^+$ ile tanımlanan bir tamsayı olmak üzere mod numarasını belirtir. Denklem (3.173)'ün Denklem (3.155)'te kullanılması sonucunda elde edilen denklem bir miktar düzenlenerek

$$D_1 \left(\frac{i\pi}{L}\right)^4 - D_2 \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 + D_3 = 0 \quad (3.174)$$

sonucuna varılır. Denklem (3.149)'da verilenlerin burada kullanımı ile i . modun doğal titreşim frekansı

$$\omega = \sqrt{\frac{S_r \left(\frac{i\pi}{L}\right)^4 + [A_0 + (e_0 a)^2 k_M] \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 + k_M}{(e_0 a)^2 I_S \left(\frac{i\pi}{L}\right)^4 + [(e_0 a)^2 (1 + 2\nu) I_0 + I_S] \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 + I_0}} \quad (3.175)$$

şeklinde hesaplanmaktadır.

Öte yandan, hesapları verilmeksizin bir ucu yumuşak tutulu diğer ucu kavrayıcı tutulu (S-G) nanoçubuğun sınır şartları Denklemler (3.164) ve (3.167)'ye istinaden aşağıdaki gibi sıralanabilir:

$$U(0) = 0, U''(0) = 0, U'(L) = 0, U'''(L) = 0. \quad (3.176)$$

Böylece S-S ve S-G nanokirişlerinin bütün sınır şartlarını sağlayan aşağıdaki seri açılımları, statik mod denklemi üzerinde sınır şart uygulaması yapmaksızın dinamik analiz için kullanılabilir:

$$\text{S-S Nanoçubuğu: } U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \sin(\omega t - \theta) \quad (3.177)$$

$$\text{S-G Nanoçubuğu: } U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \sin\left(\frac{(2i-1)\pi x}{2L}\right) \sin(\omega t - \theta) \quad (3.178)$$

burada Denklem (3.177)'nin Denklem (3.142)'da kullanımının sonucu Denklem (3.174) olarak ortaya çıkar. O halde kayma deformasyonlu fonksiyonel derecelendirilmiş S-G nanoçubuğunun yerel olmayan doğal frekansları

$$\omega = \sqrt{\frac{S_r \left(\frac{(2i-1)\pi}{2L}\right)^4 + [A_0 + (e_0 a)^2 k_M] \left(\frac{(2i-1)\pi}{2L}\right)^2 + k_M}{(e_0 a)^2 I_s \left(\frac{(2i-1)\pi}{2L}\right)^4 + [(e_0 a)^2 (1+2\nu) I_0 + I_s] \left(\frac{(2i-1)\pi}{2L}\right)^2 + I_0}} \quad (3.179)$$

olarak elde edilir.

S-S ve S-G nanoçubuklarının davranışları tespit edilebilse bile sürekli nanoyapıların genel mekanik davranışını araştırmak için esasen tam tutulu ve serbest uç gibi sınır şartlarından oluşan nanoyapıları bilmek elzemdir. İşlem detayı verilmeksizin, homojen Love-Bishop nanoçubuklarından yola çıkılarak (Karličić vd. 2018; Civalek ve Numanoğlu 2020) kayma deformasyonlu fonksiyonel derecelendirilmiş bir ucu tutulu diğer ucu serbest ve iki ucu tutulu Love-Bishop nanoçubuklarının frekans denklemleri

$$\begin{aligned} \text{C-F Nanoçubuğu: } & 2 + \left(\frac{K_2}{K_1} + \frac{K_2}{K_2}\right) \cos(\sqrt{-K_2}L) \cosh(\sqrt{K_1}L) - \\ & \left(\sqrt{-\frac{K_2}{K_1}} - \sqrt{-\frac{K_1}{K_2}}\right) \sin(\sqrt{-K_2}L) \sinh(\sqrt{K_1}L) = 0 \end{aligned} \quad (3.180)$$

$$\begin{aligned} \text{C-C Nanoçubuğu: } & 2 - 2 \cos(\sqrt{-K_2}L) \cosh(\sqrt{K_1}L) - \\ & \left(\sqrt{-\frac{K_2}{K_1}} - \sqrt{-\frac{K_1}{K_2}}\right) \sin(\sqrt{-K_2}L) \sinh(\sqrt{K_1}L) = 0 \end{aligned} \quad (3.181)$$

şeklinde. Buna göre, kayma deformasyonlu C-F ve C-C nanoçubuklarının frekans denkleminin sonuçları sırasıyla S-G ve S-S nanoçubuklarıyla aynı olmaktadır (Civalek ve Numanoğlu 2020). Zira, tam tutulu ve yumuşak tutulu uçların eşleştirilmesinde

geometrik sınır şartlar deplasman yönünden aynı olmakta, deplasmanın birinci türevi tam tutululuğun yumuşak tutulu olma haline kıyasla yüksek rijiditesi gereği kayma etkisinin getirdiği bir fark olarak ortaya çıkmaktadır. Öte yandan, kavrayıcı tutulu ve serbest uçların eşleştirilmesinde, mekanik (dinamik) sınır şartlar açısından toplam eksenel kuvvet sınır şartı aynı olmakta, kavrayıcı tutulu uça serbest uca göre yanal deplasman şeklindeki geometrik şart yine kayma etkisinin getirdiği bir fark olarak gözlemlenmektedir. Sonuç itibariyle, kayma deformasyonlu fonksiyonel derecelendirilmiş C-F ve C-C çubuklarının yerel olmayan mekanik davranışlarının sırasıyla S-G ve S-S çubukları ile aynı olduğu kabul edilebilir.

Poisson Etkisinin İhmal Edilmesi: Esasen bu alt başlıkta kayma deformasyonlu nanoçubuklar incelenmiştir ancak bu bölümün ilerleyen alt başlıklarından olan ve nanoyapıların yerel olmayan sonlu eleman analizlerinden birisi olan kayma deformasyonlu fonksiyonel derecelendirilmiş nanoçerçeve formülasyonunda yapının eksenel serbestliklerini Love-Bishop formülasyonu ile ifade etmek maalesef mümkün olmayacağından kayma etkisi eksenel serbestlikler için ihmal edilecek olup, bunun yerine basit çubuk teorisi kullanılacaktır. Bu tercih, yeri geldiğinde gerekçeleriyle daha detaylı olarak açıklanacaktır. İlgili konunun teorik formülasyonunun altyapısını hazırlamak maksadıyla, basit çubuk teorisi hakkında detaya girmeden temel bilgilerden burada bahsedilecektir. Matematiksel olarak, yanal deformasyon etkili bir eksenel çubuk kuramı ile formüle edilen çubukta Poisson oranının sıfırlanması ile çubuk teorisinin basit çubuğa indirildiği ifade edilebilir. Buna göre temel olarak çubuğun kinematik ilişkileri (sırasıyla deplasman, şekil değiştirme ve klasik gerilme bileşenleri) aşağıda açıklanmaktadır:

$$\begin{aligned} u_x(x, z, t) &= u(x, t) = u, \quad u_y(x, z, t) = v(x, t) = v = 0, \\ u_z(x, z, t) &= w(x, t) = w = 0. \end{aligned} \quad (3.182)$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \varepsilon_{yz} = 0. \quad (3.183)$$

$$s_{xx} = E(z) \varepsilon_{xx} = -E(z) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad s_{yy} = s_{zz} = s_{xy} = s_{xz} = s_{yz} = 0. \quad (3.184)$$

görüldüğü üzere Poisson oranının sıfırlanmasıyla yanal deplasmanlar oluşmamakta ve sadece eksenel deplasman var olmaktadır. Bunun sonucu olarak sıfırdan farklı bir tek boylamsal yöndeki şekil değiştirme ve gerilme bileşenleri ile karşılaşmaktadır. Basit çubuk ve Love-Bishop çubukları arasındaki bu temel ayırım, toplam yanal kuvvet P , yanal kütle ataleti I_S ve yanal rijitlik S_r parametrelerini titreşim analizinden düşüreceği için varyasyon cebri hesapları sonucunda, $\delta u \neq 0$ durumu için dinamik denge denklemi ve $\delta u(0, t) \neq 0$ ve/veya $\delta u(L, t) \neq 0$ durumu için mekanik sınır şartlar sırasıyla aşağıdaki gibi ifade edilmelidir:

$$\frac{\partial N}{\partial x} - k_M u - I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q = 0 \quad (3.185)$$

$$N = 0 \quad (3.186)$$

Ayrıca, bu çubuk kuramında yerel olmayan serbest titreşimin sadece Denklem (3.129) ile idare edilmesi gerekecektir. Gerilme denkleminin iki tarafının kesit alana göre integre edilmesi ile ulaşılan normal kuvvetten yola çıkılarak yerel olmayan hareket denklemi

$$\begin{aligned} & \left(A_0 + (e_0 a)^2 k_M \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k_M u - I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (e_0 a)^2 I_0 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} \\ & - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + q = 0 \end{aligned} \quad (3.187)$$

olarak türetilirken problemde rol oynayan mekanik (dinamik) yapıdaki tek sınır şart olan eksenel normal kuvvet

$$N = \left(A_0 + (e_0 a)^2 k_M \right) \frac{\partial u}{\partial x} + (e_0 a)^2 I_0 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} - (e_0 a)^2 \frac{\partial q}{\partial x} \quad (3.188)$$

şeklinde açıklanır. Serbest titreşim analizinde değişkenlere ayırma çözümünün kullanımı sayesinde, sırasıyla hareket denklemi ve mekanik sınır şart için ulaşılan

$$G_1 \frac{d^2 U}{dx^2} + G_2 U = 0 \quad (3.189)$$

$$N = G_1 \frac{dU}{dx} \quad (3.190)$$

denklemlerinde

$$G_1 = A_0 + (e_0 a)^2 k_M - \omega^2 (e_0 a)^2 I_0, \quad G_2 = -k_M + \omega^2 I_0. \quad (3.191)$$

olarak verilir. Denklem (3.152)'nin Denklem (3.189)'da kullanılması ile karakteristik polinoma şöyle ulaşılır:

$$G_1 k^2 + G_2 = 0 \quad (3.192)$$

burada problemin temel olmayan parametreleri k_M ve $e_0 a$ 'nın ekstrem olmayan değerleri için $G_1 > 0$ ve $G_2 > 0$ olduğundan denklemin iki kökü de sanal sayıdır:

$$k_1 = \mathbf{i} \frac{G_2}{G_1}, \quad k_2 = -\mathbf{i} \frac{G_2}{G_1}. \quad (3.193)$$

böylece mod çözümü

$$U(x) = E_1 e^{\frac{G_2}{G_1} x} + E_2 e^{-\frac{G_2}{G_1} x} \quad (3.194)$$

olarak yazılır ve burada Denklem (3.158)'deki Euler denklemlerinden gerekli olanların kullanımı sonucunda

$$U(x) = F_1 \cos\left(\frac{G_2}{G_1} x\right) + F_2 \sin\left(\frac{G_2}{G_1} x\right) \quad (3.195)$$

eşitliğine varılmış olur. Çözüm sabitlerini belirleyecek sınır şartlar:

$$\textbf{Tutulu Uç (C): } U = 0, \textbf{ Serbest Uç (F): } N = G_1 U' \text{ veya } U' = 0. \quad (3.196)$$

şeklinde tanıtılır. Basit çubuk Love-Bishop çubuğuna göre düşük mertebeli bir çubuk teorisi olduğundan sınır şartların daha az sayıda olduğu, yani yanal deplasman (matematiksel olarak aksenal deplasmanın birinci türevi) ve toplam yanal kuvvet gibi yüksek mertebeli sınır şartların burada yer almadığı dikkat çekmektedir.

3.4. Yerel Olmayan Sonlu Elemanlar Formülasyonu

Bu altbaşlık itibariyle, daha önceden analitik çözümleri anlatılmış kayma deformasyonlu fonksiyonel derecelendirilmiş nanokiriş ve nanoçubuk yapıların atomik ölçekli serbest titreşim analizlerinin tez konusu da olması itibariyle yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile çözümleri sunulacaktır. Bunlara ek olarak, kayma deformasyonlu fonksiyonel derecelendirilmiş ayrık üyelerden oluşan yapıların nanoçerçeve modellerinin de serbest titreşim analizi formüle edilecektir.

3.4.1. Nanokirişler

Sonlu Eleman Kinematiği: Ağırlıklı kalıntı ile çözülmesi gereken hareket denklemi Denklem (3.79)'da görülmektedir. Hatırlanacak olursa denklem sadece eğilme deplasmanı w_b cinsinden oluşturulmuştur. O halde sonlu elemanın eğilme deplasmanı formüle edilmelidir. Buna göre bir eğilme sonlu elemanın toplam hareketi

$$w_b = \phi \mathbf{d} \quad (3.197)$$

denklemi ile tanımlanır. Burada $\mathbf{d}$ sonlu eleman uç düğümlerinin hareket serbestliklerini tanımlarken ϕ kiriş şekil fonksiyonunu ifade etmekte olup, bu ikisi,

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_j \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ l_e(-\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \\ 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ l_e(-\xi^2 + \xi^3) \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{d} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_i \\ w_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}. \quad (3.198)$$

şeklinde açıklanır. Burada l_e sonlu eleman uzunluğunu ifade etmek üzere $\xi = x/l_e$ boyutsuz koordinat olarak bilinir. Sonlu eleman düğümleri i ve j olmak üzere w_i ve w_j bunların deplasmanlarını, θ_i ve θ_j bunların dönmelerini belirtir.

Sonlu Eleman Hareket Denklemi: Probleme etkiyen parametrelerin sonlu eleman formülasyonuna nasıl bir katkı koyacağını ayrı ayrı tespit etmek maksadıyla, hareket denkleminin bileşenleri açık yazılarak, formülasyona esas teşkil etmesi gereken kalıntı ifadesi, türev mertebeleri (yüksekten alçağa), türev bileşenleri (önce konum sonra zaman) ve yerel olmayan parametreyi içerip-içermeme (önce klasik sonra yerel olmayan parametre) durumları göz önüne alınarak önce rijitliği, sonra çevresel faktörleri ve en son sadece kütle ataletlerini içeren terimlerin sıralanmasıyla

$$\begin{aligned}
R = & B \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - \frac{I_0 B}{kS} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{(e_0 a)^2 I_0 B}{kS} \frac{\partial^6 w_b}{\partial x^4 \partial t^2} - \frac{k_W B}{kS} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{(e_0 a)^2 k_W B}{kS} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} \\
& - \frac{D_T \Delta T B}{kS} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + \frac{(e_0 a)^2 D_T \Delta T B}{kS} \frac{\partial^6 w_b}{\partial x^6} + \frac{k_P B}{kS} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - \frac{(e_0 a)^2 k_P B}{kS} \frac{\partial^6 w_b}{\partial x^6} \\
& + k_W w_b - (e_0 a)^2 k_W \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{k_W I_2}{kS} \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} - \frac{2(e_0 a)^2 k_W I_2}{kS} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} \\
& + \frac{(e_0 a)^4 k_W I_2}{kS} \frac{\partial^6 w_b}{\partial x^4 \partial t^2} + D_T \Delta T \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - (e_0 a)^2 D_T \Delta T \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + \frac{D_T \Delta T I_2}{kS} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} \\
& - \frac{2(e_0 a)^2 D_T \Delta T I_2}{kS} \frac{\partial^6 w_b}{\partial x^4 \partial t^2} + \frac{(e_0 a)^4 D_T \Delta T I_2}{kS} \frac{\partial^8 w_b}{\partial x^6 \partial t^4} - k_P \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\
& + (e_0 a)^2 k_P \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - \frac{k_P I_2}{kS} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{2(e_0 a)^2 k_P I_2}{kS} \frac{\partial^6 w_b}{\partial x^4 \partial t^2} - \frac{(e_0 a)^4 k_P I_2}{kS} \frac{\partial^8 w_b}{\partial x^6 \partial t^4} \\
& + I_0 \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} - (e_0 a)^2 I_0 \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{I_0 I_2}{kS} \frac{\partial^4 w_b}{\partial t^4} - \frac{2(e_0 a)^2 I_0 I_2}{kS} \frac{\partial^6 w_b}{\partial x^2 \partial t^4} \\
& + \frac{(e_0 a)^4 I_0 I_2}{kS} \frac{\partial^8 w_b}{\partial x^4 \partial t^4} - I_2 \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} + (e_0 a)^2 I_2 \frac{\partial^6 w_b}{\partial x^4 \partial t^2} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - f = 0 \quad (3.199)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Böylece ağırlıklı kalıntının şu şekilde yazılması gerekir.

$$\begin{aligned}
I = \int_0^{l_e} h \left(B \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - \frac{I_0 B}{kS} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{(e_0 a)^2 I_0 B}{kS} \frac{\partial^6 w_b}{\partial x^4 \partial t^2} - \frac{k_W B}{kS} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \right. \\
+ \frac{(e_0 a)^2 k_W B}{kS} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - \frac{D_T \Delta T B}{kS} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + \frac{(e_0 a)^2 D_T \Delta T B}{kS} \frac{\partial^6 w_b}{\partial x^6} + \frac{k_P B}{kS} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} \\
- \frac{(e_0 a)^2 k_P B}{kS} \frac{\partial^6 w_b}{\partial x^6} + k_W w_b - (e_0 a)^2 k_W \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{k_W I_2}{kS} \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} \\
- \frac{2(e_0 a)^2 k_W I_2}{kS} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{(e_0 a)^4 k_W I_2}{kS} \frac{\partial^6 w_b}{\partial x^4 \partial t^2} + D_T \Delta T \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\
- (e_0 a)^2 D_T \Delta T \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + \frac{D_T \Delta T I_2}{kS} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{2(e_0 a)^2 D_T \Delta T I_2}{kS} \frac{\partial^6 w_b}{\partial x^4 \partial t^2} \\
+ \frac{(e_0 a)^4 D_T \Delta T I_2}{kS} \frac{\partial^8 w_b}{\partial x^6 \partial t^4} - k_P \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + (e_0 a)^2 k_P \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - \frac{k_P I_2}{kS} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} \\
+ \frac{2(e_0 a)^2 k_P I_2}{kS} \frac{\partial^6 w_b}{\partial x^4 \partial t^2} - \frac{(e_0 a)^4 k_P I_2}{kS} \frac{\partial^8 w_b}{\partial x^6 \partial t^4} + I_0 \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} - (e_0 a)^2 I_0 \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} \\
+ \frac{I_0 I_2}{kS} \frac{\partial^4 w_b}{\partial t^4} - \frac{2(e_0 a)^2 I_0 I_2}{kS} \frac{\partial^6 w_b}{\partial x^2 \partial t^4} + \frac{(e_0 a)^4 I_0 I_2}{kS} \frac{\partial^8 w_b}{\partial x^4 \partial t^4} - I_2 \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} \\
\left. + (e_0 a)^2 I_2 \frac{\partial^6 w_b}{\partial x^4 \partial t^2} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - f \right) dx \quad (3.200)
\end{aligned}$$

Burada integralin 33 farklı bileşeni mevcuttur ve bunların çoğu kısmi integrasyona tabi tutulmalıdır. Ağırlıklı ortalama kalıntı bileşenlerinin tümü kısmi integrasyona tabi tutulanların sonuçları da yazılmak kaydıyla aşağıdaki gibi listelenir:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{l_e} B h \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} dx = B h \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} \Big|_0^{l_e} - B \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \Big|_0^{l_e} + \int_0^{l_e} B \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} dx, \\
I_2 &= \int_0^{l_e} \frac{I_0 B}{kS} h \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} dx = \frac{I_0 B}{kS} h \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} \Big|_0^{l_e} - \int_0^{l_e} \frac{I_0 B}{kS} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} dx \\
I_3 &= \int_0^{l_e} \frac{(e_0 a)^2 I_0 B}{kS} h \frac{\partial^6 w_b}{\partial x^4 \partial t^2} dx = \frac{(e_0 a)^2 I_0 B}{kS} h \frac{\partial^5 w_b}{\partial x^3 \partial t^2} \Big|_0^{l_e} - \frac{(e_0 a)^2 I_0 B}{kS} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} \Big|_0^{l_e} \\
&\quad + \int_0^{l_e} \frac{(e_0 a)^2 I_0 B}{kS} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} dx, \\
I_4 &= \int_0^{l_e} \frac{k_W B}{kS} h \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} dx = \frac{k_W B}{kS} h \frac{\partial w_b}{\partial x} \Big|_0^{l_e} - \int_0^{l_e} \frac{k_W B}{kS} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial w_b}{\partial x} dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_5 &= \int_0^{l_e} \frac{(e_0 a)^2 k_W B}{kS} h \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} dx = \frac{(e_0 a)^2 k_W B}{kS} h \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} \Big|_0^{l_e} - \frac{(e_0 a)^2 k_W B}{kS} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \Big|_0^{l_e} \\
&\quad + \int_0^{l_e} \frac{(e_0 a)^2 k_W B}{kS} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} dx, \\
I_6 &= \int_0^{l_e} \frac{D_T \Delta T B}{kS} h \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} dx = \frac{D_T \Delta T B}{kS} h \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} \Big|_0^{l_e} - \frac{D_T \Delta T B}{kS} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \Big|_0^{l_e} \\
&\quad + \int_0^{l_e} \frac{D_T \Delta T B}{kS} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} dx, \\
I_7 &= \int_0^{l_e} \frac{(e_0 a)^2 D_T \Delta T B}{kS} h \frac{\partial^6 w_b}{\partial x^6} dx = \frac{(e_0 a)^2 D_T \Delta T B}{kS} h \frac{\partial^5 w_b}{\partial x^5} \Big|_0^{l_e} - \frac{(e_0 a)^2 D_T \Delta T B}{kS} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} \Big|_0^{l_e} \\
&\quad + \frac{(e_0 a)^2 D_T \Delta T B}{kS} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} \Big|_0^{l_e} - \int_0^{l_e} \frac{(e_0 a)^2 D_T \Delta T B}{kS} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} dx, \\
I_8 &= \int_0^{l_e} \frac{k_P B}{kS} h \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} dx = \frac{k_P B}{kS} h \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} \Big|_0^{l_e} - \frac{k_P B}{kS} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \Big|_0^{l_e} + \int_0^{l_e} \frac{k_P B}{kS} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} dx, \\
I_9 &= \int_0^{l_e} \frac{(e_0 a)^2 k_P B}{kS} h \frac{\partial^6 w_b}{\partial x^6} dx = \frac{(e_0 a)^2 k_P B}{kS} h \frac{\partial^5 w_b}{\partial x^5} \Big|_0^{l_e} - \frac{(e_0 a)^2 k_P B}{kS} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} \Big|_0^{l_e} \\
&\quad + \frac{(e_0 a)^2 k_P B}{kS} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} \Big|_0^{l_e} - \int_0^{l_e} \frac{(e_0 a)^2 k_P B}{kS} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} dx, \\
I_{10} &= \int_0^{l_e} k_W h w_b dx, \quad I_{11} = \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 k_W h \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} dx = (e_0 a)^2 k_W h \frac{\partial w_b}{\partial x} \Big|_0^{l_e} - \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 k_W \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial w_b}{\partial x} dx, \\
I_{12} &= \int_0^{l_e} \frac{k_W I_2}{kS} h \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} dx, \\
I_{13} &= \int_0^{l_e} \frac{2(e_0 a)^2 k_W I_2}{kS} h \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} dx = \frac{2(e_0 a)^2 k_W I_2}{kS} h \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} \Big|_0^{l_e} - \int_0^{l_e} \frac{2(e_0 a)^2 k_W I_2}{kS} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} dx, \\
I_{14} &= \int_0^{l_e} \frac{(e_0 a)^4 k_W I_2}{kS} h \frac{\partial^6 w_b}{\partial x^4 \partial t^2} dx = \frac{(e_0 a)^4 k_W I_2}{kS} h \frac{\partial^5 w_b}{\partial x^3 \partial t^2} \Big|_0^{l_e} - \frac{(e_0 a)^4 k_W I_2}{kS} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} \Big|_0^{l_e} \\
&\quad + \int_0^{l_e} \frac{(e_0 a)^4 k_W I_2}{kS} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{15} &= \int_0^{l_e} D_T \Delta T h \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} dx = D_T \Delta T h \frac{\partial w_b}{\partial x} \Big|_0^{l_e} - \int_0^{l_e} D_T \Delta T \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial w_b}{\partial x} dx, \\
I_{16} &= \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 D_T \Delta T h \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} dx = (e_0 a)^2 D_T \Delta T h \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} \Big|_0^{l_e} - (e_0 a)^2 D_T \Delta T \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \Big|_0^{l_e} \\
&\quad + \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 D_T \Delta T \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} dx, \\
I_{17} &= \int_0^{l_e} \frac{D_T \Delta T I_2}{kS} h \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} dx = \frac{D_T \Delta T I_2}{kS} h \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} \Big|_0^{l_e} - \int_0^{l_e} \frac{D_T \Delta T I_2}{kS} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} dx, \\
I_{18} &= \int_0^{l_e} \frac{2(e_0 a)^2 D_T \Delta T I_2}{kS} h \frac{\partial^6 w_b}{\partial x^4 \partial t^2} dx = \frac{2(e_0 a)^2 D_T \Delta T I_2}{kS} h \frac{\partial^5 w_b}{\partial x^3 \partial t^2} \Big|_0^{l_e} \\
&\quad - \frac{2(e_0 a)^2 D_T \Delta T I_2}{kS} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} \Big|_0^{l_e} + \int_0^{l_e} \frac{2(e_0 a)^2 D_T \Delta T I_2}{kS} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} dx, \\
I_{19} &= \int_0^{l_e} \frac{(e_0 a)^4 D_T \Delta T I_2}{kS} h \frac{\partial^8 w_b}{\partial x^6 \partial t^2} dx = \frac{(e_0 a)^4 D_T \Delta T I_2}{kS} h \frac{\partial^7 w_b}{\partial x^5 \partial t^2} \Big|_0^{l_e} \\
&\quad - \frac{(e_0 a)^4 D_T \Delta T I_2}{kS} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^6 w_b}{\partial x^4 \partial t^2} \Big|_0^{l_e} + \frac{(e_0 a)^4 D_T \Delta T I_2}{kS} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^5 w_b}{\partial x^3 \partial t^2} \Big|_0^{l_e} \\
&\quad - \int_0^{l_e} \frac{(e_0 a)^4 D_T \Delta T I_2}{kS} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \frac{\partial^5 w_b}{\partial x^3 \partial t^2} dx, \\
I_{20} &= \int_0^{l_e} k_P h \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} dx = k_P h \frac{\partial w_b}{\partial x} \Big|_0^{l_e} - \int_0^{l_e} k_P \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial w_b}{\partial x} dx, \\
I_{21} &= \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 k_P h \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} dx = (e_0 a)^2 k_P h \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} \Big|_0^{l_e} - (e_0 a)^2 k_P \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \Big|_0^{l_e} \\
&\quad + \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 k_P \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} dx, \\
I_{22} &= \int_0^{l_e} \frac{k_P I_2}{kS} h \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} dx = \frac{k_P I_2}{kS} h \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} \Big|_0^{l_e} - \int_0^{l_e} \frac{k_P I_2}{kS} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} dx, \\
I_{23} &= \int_0^{l_e} \frac{2(e_0 a)^2 k_P I_2}{kS} h \frac{\partial^6 w_b}{\partial x^4 \partial t^2} dx = \frac{2(e_0 a)^2 k_P I_2}{kS} h \frac{\partial^5 w_b}{\partial x^3 \partial t^2} \Big|_0^{l_e} - \frac{2(e_0 a)^2 k_P I_2}{kS} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} \Big|_0^{l_e} \\
&\quad + \int_0^{l_e} \frac{2(e_0 a)^2 k_P I_2}{kS} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{24} &= \int_0^{l_e} \frac{(e_0 a)^4 k_P I_2}{kS} h \frac{\partial^8 w_b}{\partial x^6 \partial t^2} dx = \frac{(e_0 a)^4 k_P I_2}{kS} h \frac{\partial^7 w_b}{\partial x^5 \partial t^2} \Big|_0^{l_e} - \frac{(e_0 a)^4 k_P I_2}{kS} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^6 w_b}{\partial x^4 \partial t^2} \Big|_0^{l_e} \\
&\quad + \frac{(e_0 a)^4 k_P I_2}{kS} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^5 w_b}{\partial x^3 \partial t^2} \Big|_0^{l_e} - \int_0^{l_e} \frac{(e_0 a)^4 k_P I_2}{kS} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \frac{\partial^5 w_b}{\partial x^3 \partial t^2} dx, \\
I_{25} &= \int_0^{l_e} I_0 h \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} dx, \\
I_{26} &= \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 I_0 h \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} dx = (e_0 a)^2 I_0 h \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} \Big|_0^{l_e} - \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 I_0 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} dx, \\
I_{27} &= \int_0^{l_e} \frac{I_0 I_2}{kS} h \frac{\partial^4 w_b}{\partial t^4} dx, \\
I_{28} &= \int_0^{l_e} \frac{2(e_0 a)^2 I_0 I_2}{kS} h \frac{\partial^6 w_b}{\partial x^2 \partial t^4} dx = \frac{2(e_0 a)^2 I_0 I_2}{kS} h \frac{\partial^5 w_b}{\partial x \partial t^4} \Big|_0^{l_e} - \int_0^{l_e} \frac{2(e_0 a)^2 I_0 I_2}{kS} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^5 w_b}{\partial x \partial t^4} dx \\
I_{29} &= \int_0^{l_e} \frac{(e_0 a)^4 I_0 I_2}{kS} h \frac{\partial^8 w_b}{\partial x^4 \partial t^4} dx = \frac{(e_0 a)^4 I_0 I_2}{kS} h \frac{\partial^7 w_b}{\partial x^3 \partial t^4} \Big|_0^{l_e} - \frac{(e_0 a)^4 I_0 I_2}{kS} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^6 w_b}{\partial x^2 \partial t^4} \Big|_0^{l_e} \\
&\quad + \int_0^{l_e} \frac{(e_0 a)^4 I_0 I_2}{kS} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^6 w_b}{\partial x^2 \partial t^4} dx, \\
I_{30} &= \int_0^{l_e} I_2 h \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} dx = I_2 h \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} \Big|_0^{l_e} - \int_0^{l_e} I_2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} dx, \\
I_{31} &= \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 I_2 h \frac{\partial^6 w_b}{\partial x^4 \partial t^2} dx = (e_0 a)^2 I_2 h \frac{\partial^5 w_b}{\partial x^3 \partial t^2} \Big|_0^{l_e} - (e_0 a)^2 I_2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} \Big|_0^{l_e} \\
&\quad + \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 I_2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} dx, \\
I_{32} &= \int_0^{l_e} h f dx, \quad I_{33} = \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 h \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx = (e_0 a)^2 h \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_0^{l_e} - \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} dx. \quad (3.201)
\end{aligned}$$

buradaki integral ifadeleri Denklem (3.199)'da yerine yazıldıktan sonra oluşan ifadede çeşitli kısımlar toplu olarak 0'a eşittir ancak denklemi uzatarak karmaşaya yol açmamak maksadıyla sonlu eleman analizine esas kısım aşağıda verilmektedir:

$$\begin{aligned}
& \int_0^l B \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} dx + \int_0^l \frac{I_0 B}{kS} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} dx + \int_0^l \frac{(e_0 a)^2 I_0 B}{kS} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} dx + \int_0^l \frac{k_W B}{kS} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial w_b}{\partial x} dx \\
& + \int_0^l \frac{(e_0 a)^2 k_W B}{kS} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} dx - \int_0^l \frac{D_T \Delta T B}{kS} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} dx - \int_0^l \frac{(e_0 a)^2 D_T \Delta T B}{kS} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} dx \\
& + \int_0^l \frac{k_P B}{kS} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} dx + \int_0^l \frac{(e_0 a)^2 k_P B}{kS} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} dx + \int_0^l k_W h w_b dx + \int_0^l (e_0 a)^2 k_W \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial w_b}{\partial x} dx \\
& + \int_0^l \frac{k_W I_2}{kS} h \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} dx + \int_0^l \frac{2(e_0 a)^2 k_W I_2}{kS} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} dx + \int_0^l \frac{(e_0 a)^4 k_W I_2}{kS} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} dx \\
& - \int_0^l D_T \Delta T \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial w_b}{\partial x} dx - \int_0^l (e_0 a)^2 D_T \Delta T \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} dx - \int_0^l \frac{D_T \Delta T I_2}{kS} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} dx \\
& - \int_0^l \frac{2(e_0 a)^2 D_T \Delta T I_2}{kS} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} dx - \int_0^l \frac{(e_0 a)^4 D_T \Delta T I_2}{kS} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \frac{\partial^5 w_b}{\partial x^3 \partial t^2} dx + \int_0^l k_P \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial w_b}{\partial x} dx \\
& + \int_0^l (e_0 a)^2 k_P \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} dx + \int_0^l \frac{k_P I_2}{kS} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} dx + \int_0^l \frac{2(e_0 a)^2 k_P I_2}{kS} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} dx \\
& + \int_0^l \frac{(e_0 a)^4 k_P I_2}{kS} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \frac{\partial^5 w_b}{\partial x^3 \partial t^2} dx + \int_0^l I_0 h \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} dx + \int_0^l (e_0 a)^2 I_0 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} dx + \int_0^l \frac{I_0 I_2}{kS} h \frac{\partial^4 w_b}{\partial t^4} dx \\
& + \int_0^l \frac{2(e_0 a)^2 I_0 I_2}{kS} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^5 w_b}{\partial x \partial t^4} dx + \int_0^l \frac{(e_0 a)^4 I_0 I_2}{kS} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^6 w_b}{\partial x^2 \partial t^4} dx + \int_0^l I_2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} dx \\
& + \int_0^l (e_0 a)^2 I_2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} dx - \int_0^l (e_0 a)^2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} - \int_0^l h f dx = 0
\end{aligned} \tag{3.202}$$

Eğilme sonlu elemanı hakkında aşağıda yazılan tanımlar, sonlu eleman formülasyonunun ifade edilebilmesi için gerekmektedir:

$$\begin{aligned}
h &= \phi^T, \mathbf{B} = \mathbf{D}^k \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial x} = (\phi^T)' = \mathbf{B}^T, \frac{\partial w_b}{\partial x} = \mathbf{B} \mathbf{d}, \\
\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} &= \mathbf{B}' \mathbf{d}, \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} = \mathbf{B}'' \mathbf{d}, \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} = \phi \ddot{\mathbf{d}}, \frac{\partial^4 w_b}{\partial t^4} = \phi \ddot{\ddot{\mathbf{d}}}.
\end{aligned} \tag{3.203}$$

burada h hatırlanacak olduğu üzere ağırlıklandırma fonksiyonu olup, matematiksel tanımı görüldüğü üzere şekil fonksiyonunun transpozudur. Öte yandan $\mathbf{D}_k$ kinematik operatörü belirtir. Denklem (3.202) düşünüldüğünde, ağırlıklandırma fonksiyonu ve deplasmanın konum ve zamana göre görülen türev mertebeleri göz önüne alınarak gerekli tanımlar Denklem (3.203)'te yapılmıştır. Denklem (3.203)'ün Denklem (3.202)'de yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned}
& \int_0^{l_e} B(\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') d\mathbf{x} + \int_0^{l_e} \frac{I_0 B}{kS} (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) \ddot{\mathbf{x}} + \int_0^{l_e} \frac{(e_0 a)^2 I_0 B}{kS} (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') \ddot{\mathbf{x}} + \int_0^{l_e} \frac{k_W B}{kS} (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) d\mathbf{x} \\
& + \int_0^{l_e} \frac{(e_0 a)^2 k_W B}{kS} (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') d\mathbf{x} - \int_0^{l_e} \frac{D_T \Delta T B}{kS} (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') d\mathbf{x} - \int_0^{l_e} \frac{(e_0 a)^2 D_T \Delta T B}{kS} (\mathbf{B}''^T \mathbf{B}'') d\mathbf{x} \\
& + \int_0^{l_e} \frac{k_P B}{kS} (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') d\mathbf{x} + \int_0^{l_e} \frac{(e_0 a)^2 k_P B}{kS} (\mathbf{B}''^T \mathbf{B}'') d\mathbf{x} + \int_0^{l_e} k_W (\phi^T \phi) d\mathbf{x} \\
& + \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 k_W (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) d\mathbf{x} + \int_0^{l_e} \frac{k_W I_2}{kS} (\phi^T \phi) \ddot{\mathbf{x}} + \int_0^{l_e} \frac{2(e_0 a)^2 k_W I_2}{kS} (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) \ddot{\mathbf{x}} \\
& + \int_0^{l_e} \frac{(e_0 a)^4 k_W I_2}{kS} (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') \ddot{\mathbf{x}} - \int_0^{l_e} D_T \Delta T (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) d\mathbf{x} - \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 D_T \Delta T (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') d\mathbf{x} \\
& - \int_0^{l_e} \frac{D_T \Delta T I_2}{kS} (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) \ddot{\mathbf{x}} - \int_0^{l_e} \frac{2(e_0 a)^2 D_T \Delta T I_2}{kS} (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') \ddot{\mathbf{x}} \\
& - \int_0^{l_e} \frac{(e_0 a)^4 D_T \Delta T I_2}{kS} (\mathbf{B}''^T \mathbf{B}'') \ddot{\mathbf{x}} + \int_0^{l_e} k_P (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) d\mathbf{x} + \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 k_P (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') d\mathbf{x} \\
& + \int_0^{l_e} \frac{k_P I_2}{kS} (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) \ddot{\mathbf{x}} + \int_0^{l_e} \frac{2(e_0 a)^2 k_P I_2}{kS} (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') \ddot{\mathbf{x}} + \int_0^{l_e} \frac{(e_0 a)^4 k_P I_2}{kS} (\mathbf{B}''^T \mathbf{B}'') \ddot{\mathbf{x}} \\
& + \int_0^{l_e} I_0 (\phi^T \phi) \ddot{\mathbf{x}} + \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 I_0 (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) \ddot{\mathbf{x}} + \int_0^{l_e} \frac{I_0 I_2}{kS} (\phi^T \phi) \ddot{\mathbf{x}} \\
& + \int_0^{l_e} \frac{2(e_0 a)^2 I_0 I_2}{kS} (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) \ddot{\mathbf{x}} + \int_0^{l_e} \frac{(e_0 a)^4 I_0 I_2}{kS} (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') \ddot{\mathbf{x}} + \int_0^{l_e} I_2 (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) \ddot{\mathbf{x}} \\
& + \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 I_2 (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') \ddot{\mathbf{x}} - \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 \mathbf{B}^T f' - \int_0^{l_e} \phi^T f d\mathbf{x} = 0
\end{aligned} \tag{3.204}$$

ifadesine ulaşılmış olur. Bu denklemin matris notasyonu ile

$$(\sum K) \mathbf{d} + (\sum M^0) \ddot{\mathbf{d}} + (\sum M^1) \ddot{\ddot{\mathbf{d}}} = \sum \mathbf{f} \tag{3.205}$$

şeklinde sembolize edilmesi suretiyle burada ΣK , ΣM^0 , ΣM^1 ve $\Sigma \mathbf{f}$ ifadeleri bir sonlu eleman için sırasıyla toplam rijitlik matrisini, toplam basit kütle matrisini, toplam yüksek mertebeden kütle matrisini ve toplam yük vektörünü ifade eder. Bu ifadeler Numanoğlu (2019)'daki kayma deformasyonlu homojen yerel olmayan nanokirişler için açıklananlara benzer olarak şöyle yazılmaktadır:

$$\begin{aligned} \sum K = & K_b + K_{W,c} + K_{W,nl} + K_{P,c} + K_{P,nl} + K_{W,R,c} + K_{W,R,nl} + K_{P,R,c} \\ & + K_{P,R,nl} - K_{T,c} - K_{T,nl} - K_{T,R,c} - K_{T,R,nl} \end{aligned} \quad (3.206)$$

$$\begin{aligned} \sum M^0 = & M_{A,c} + M_{A,nl} + M_{I,c} + M_{I,nl} + M_{A,R,c} + M_{A,R,nl} + M_{I,W,c} \\ & + M_{I,W,nl} + M_{I,P,c} + M_{I,P,nl} - M_{I,T,c} - M_{I,T,nl} + M_{I,W,HO-nl} \\ & + M_{I,P,HO-nl} - M_{I,T,HO-nl} \end{aligned} \quad (3.207)$$

$$\sum M^1 = M_{I,R,c} + M_{I,R,nl} + M_{I,R,HO-nl} \quad (3.208)$$

$$\sum \mathbf{f} = \mathbf{f}_c + \mathbf{f}_{nl} \quad (3.209)$$

Burada ilk olarak rijitlik matrisinin bileşenleri aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$\begin{aligned} K_b = & \int_0^{l_e} B (\mathbf{B}^T \mathbf{B}') dx = \int_0^{l_e} B \begin{Bmatrix} \phi_i'' \\ \phi_i'' \\ \phi_j'' \\ \phi_j'' \end{Bmatrix} \left[\phi_i'' \quad \phi_i'' \quad \phi_j'' \quad \phi_j'' \right] dx \\ & = \frac{B}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.210)$$

$$\begin{aligned} K_{W,c} = & \int_0^{l_e} k_W (\phi^T \phi) dx = \int_0^{l_e} k_W \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_j \end{Bmatrix} \left[\phi_i \quad \phi_i \quad \phi_j \quad \phi_j \right] dx \\ & = \frac{k_W l_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l_e & 54 & -13l_e \\ 22l_e & 4l_e^2 & 13l_e & -3l_e^2 \\ 54 & 13l_e & 156 & -22l_e \\ -13l_e & -3l_e^2 & -22l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.211)$$

$$\begin{aligned}
K_{W,nl} &= \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 k_W (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) dx = \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 k_W \begin{Bmatrix} \phi_i' \\ \phi_j' \\ \phi_j' \\ \phi_j' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i' & \phi_i' & \phi_j' & \phi_j' \end{bmatrix} dx \\
&= \frac{(e_0 a)^2 k_W}{30l_e} \begin{bmatrix} 36 & 3l_e & -36 & 3l_e \\ 3l_e & 4l_e^2 & -3l_e & -l_e^2 \\ -36 & -3l_e & 36 & -3l_e \\ 3l_e & -l_e^2 & -3l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (3.212)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{P,c} &= \int_0^{l_e} k_P (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) dx = \int_0^{l_e} k_P \begin{Bmatrix} \phi_i' \\ \phi_j' \\ \phi_j' \\ \phi_j' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i' & \phi_i' & \phi_j' & \phi_j' \end{bmatrix} dx \\
&= \frac{k_P}{30l_e} \begin{bmatrix} 36 & 3l_e & -36 & 3l_e \\ 3l_e & 4l_e^2 & -3l_e & -l_e^2 \\ -36 & -3l_e & 36 & -3l_e \\ 3l_e & -l_e^2 & -3l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (3.213)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{P,nl} &= \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 k_P (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') dx = \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 k_P \begin{Bmatrix} \phi_i'' \\ \phi_i'' \\ \phi_j'' \\ \phi_j'' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i'' & \phi_i'' & \phi_j'' & \phi_j'' \end{bmatrix} dx \\
&= \frac{(e_0 a)^2 k_P}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (3.214)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{W,R,c} &= \int_0^{l_e} \frac{k_W B}{kS} (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) dx = \int_0^{l_e} \frac{k_W B}{kS} \begin{Bmatrix} \phi_i' \\ \phi_j' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i' & \phi_i' & \phi_j' & \phi_j' \end{bmatrix} dx \\
&= \frac{k_W B}{30kSl_e} \begin{bmatrix} 36 & 3l_e & -36 & 3l_e \\ 3l_e & 4l_e^2 & -3l_e & -l_e^2 \\ -36 & -3l_e & 36 & -3l_e \\ 3l_e & -l_e^2 & -3l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (3.215)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{W,R,nl} &= \int_0^{l_e} \frac{(e_0 a)^2 k_W B}{kS} (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') dx = \int_0^{l_e} \frac{(e_0 a)^2 k_W B}{kS} \begin{Bmatrix} \phi_i'' \\ \phi_j'' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i'' & \phi_i'' & \phi_j'' & \phi_j'' \end{bmatrix} dx \\
&= \frac{(e_0 a)^2 k_W B}{kSl_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (3.216)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{P,R,c} &= \int_0^{l_e} \frac{k_P B}{kS} (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') dx = \int_0^{l_e} \frac{k_P B}{kS} \begin{Bmatrix} \phi_i'' \\ \phi_j'' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i'' & \phi_i'' & \phi_j'' & \phi_j'' \end{bmatrix} dx \\
&= \frac{k_P B}{kSl_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (3.217)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{P,R,nl} &= \int_0^{l_e} \frac{(e_0 a)^2 k_p B}{kS} (\mathbf{B}''^T \mathbf{B}'') dx = \int_0^{l_e} \frac{(e_0 a)^2 k_p B}{kS} \begin{Bmatrix} \phi_i''' \\ \phi_j''' \\ \phi_j''' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i''' & \phi_i''' & \phi_j''' & \phi_j''' \end{bmatrix} dx \\
&= \frac{36(e_0 a)^2 k_p B}{kS l_e^5} \begin{bmatrix} 4 & 2l_e & -4 & 2l_e \\ 2l_e & l_e^2 & -2l_e & l_e^2 \\ -4 & -2l_e & 4 & -2l_e \\ 2l_e & l_e^2 & -2l_e & l_e^2 \end{bmatrix} \quad (3.218)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{T,c} &= \int_0^{l_e} D_T \Delta T (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) dx = \int_0^{l_e} D_T \Delta T \begin{Bmatrix} \phi_i' \\ \phi_j' \\ \phi_j' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i' & \phi_i' & \phi_j' & \phi_j' \end{bmatrix} dx \\
&= \frac{D_T \Delta T}{30l_e} \begin{bmatrix} 36 & 3l_e & -36 & 3l_e \\ 3l_e & 4l_e^2 & -3l_e & -l_e^2 \\ -36 & -3l_e & 36 & -3l_e \\ 3l_e & -l_e^2 & -3l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (3.219)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{T,nl} &= \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 D_T \Delta T (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') dx = \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 D_T \Delta T \begin{Bmatrix} \phi_i'' \\ \phi_i'' \\ \phi_j'' \\ \phi_j'' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i'' & \phi_i'' & \phi_j'' & \phi_j'' \end{bmatrix} dx \\
&= \frac{(e_0 a)^2 D_T \Delta T}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (3.220)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{T,R,c} &= \int_0^{l_e} \frac{D_T \Delta TB}{kS} (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') dx = \int_0^{l_e} \frac{D_T \Delta TB}{kS} \begin{Bmatrix} \phi_i'' \\ \phi_j'' \\ \phi_j'' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i'' & \phi_i'' & \phi_j'' & \phi_j'' \end{bmatrix} dx \\
&= \frac{D_T \Delta TB}{kS l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (3.221)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{T,R,nl} &= \int_0^{l_e} \frac{(e_0 a)^2 D_T \Delta TB}{kS} (\mathbf{B}''^T \mathbf{B}'') dx = \int_0^{l_e} \frac{(e_0 a)^2 D_T \Delta TB}{kS} \begin{Bmatrix} \phi_i''' \\ \phi_i''' \\ \phi_j''' \\ \phi_j''' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i''' & \phi_i''' & \phi_j''' & \phi_j''' \end{bmatrix} dx \\
&= \frac{36(e_0 a)^2 D_T \Delta TB}{kS l_e^5} \begin{bmatrix} 4 & 2l_e & -4 & 2l_e \\ 2l_e & l_e^2 & -2l_e & l_e^2 \\ -4 & -2l_e & 4 & -2l_e \\ 2l_e & l_e^2 & -2l_e & l_e^2 \end{bmatrix} \quad (3.222)
\end{aligned}$$

Ardından basit kütle matrisinin bileşenleri aşağıdaki yazılmaktadır:

$$\begin{aligned}
M_{A,c} &= \int_0^{l_e} I_0 (\phi^T \phi) dx = \int_0^{l_e} I_0 \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_j \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i & \phi_i & \phi_j & \phi_j \end{bmatrix} dx \\
&= \frac{I_0 l_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l_e & 54 & -13l_e \\ 22l_e & 4l_e^2 & 13l_e & -3l_e^2 \\ 54 & 13l_e & 156 & -22l_e \\ -13l_e & -3l_e^2 & -22l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (3.223)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{A,nl} &= \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 I_0 (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) dx = \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 I_0 \begin{Bmatrix} \phi_i' \\ \phi_i' \\ \phi_j' \\ \phi_j' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i' & \phi_i' & \phi_j' & \phi_j' \end{bmatrix} dx \\
&= \frac{(e_0 a)^2 I_0}{30 l_e} \begin{bmatrix} 36 & 3l_e & -36 & 3l_e \\ 3l_e & 4l_e^2 & -3l_e & -l_e^2 \\ -36 & -3l_e & 36 & -3l_e \\ 3l_e & -l_e^2 & -3l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.224}$$

$$\begin{aligned}
M_{I,c} &= \int_0^{l_e} I_2 (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) dx = \int_0^{l_e} I_2 \begin{Bmatrix} \phi_i' \\ \phi_i' \\ \phi_j' \\ \phi_j' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i' & \phi_i' & \phi_j' & \phi_j' \end{bmatrix} dx \\
&= \frac{I_2}{30 l_e} \begin{bmatrix} 36 & 3l_e & -36 & 3l_e \\ 3l_e & 4l_e^2 & -3l_e & -l_e^2 \\ -36 & -3l_e & 36 & -3l_e \\ 3l_e & -l_e^2 & -3l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.225}$$

$$\begin{aligned}
M_{I,nl} &= \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 I_2 (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') dx = \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 I_2 \begin{Bmatrix} \phi_i'' \\ \phi_i'' \\ \phi_j'' \\ \phi_j'' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i'' & \phi_i'' & \phi_j'' & \phi_j'' \end{bmatrix} dx \\
&= \frac{(e_0 a)^2 I_2}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.226}$$

$$\begin{aligned}
M_{A,R,c} &= \int_0^{l_e} \frac{I_0 B}{kS} (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) dx = \int_0^{l_e} \frac{I_0 B}{kS} \begin{Bmatrix} \phi_i' \\ \phi_j' \\ \phi_j' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i' & \phi_i' & \phi_j' & \phi_j' \end{bmatrix} dx \\
&= \frac{I_0 B}{30kSl_e} \begin{bmatrix} 36 & 3l_e & -36 & 3l_e \\ 3l_e & 4l_e^2 & -3l_e & -l_e^2 \\ -36 & -3l_e & 36 & -3l_e \\ 3l_e & -l_e^2 & -3l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (3.227)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{A,R,nl} &= \int_0^{l_e} \frac{(e_0 a)^2 I_0 B}{kS} (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') dx = \int_0^{l_e} \frac{(e_0 a)^2 I_0 B}{kS} \begin{Bmatrix} \phi_i'' \\ \phi_i'' \\ \phi_j'' \\ \phi_j'' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i'' & \phi_i'' & \phi_j'' & \phi_j'' \end{bmatrix} dx \\
&= \frac{(e_0 a)^2 I_0 B}{kSl_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (3.228)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{I,W,c} &= \int_0^{l_e} \frac{k_w I_2}{kS} (\phi^T \phi) dx = \int_0^{l_e} \frac{k_w I_2}{kS} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_j \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i & \phi_i & \phi_j & \phi_j \end{bmatrix} dx \\
&= \frac{k_w I_2 l_e}{420kS} \begin{bmatrix} 156 & 22l_e & 54 & -13l_e \\ 22l_e & 4l_e^2 & 13l_e & -3l_e^2 \\ 54 & 13l_e & 156 & -22l_e \\ -13l_e & -3l_e^2 & -22l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (3.229)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{I,W,nl} &= \int_0^{l_e} \frac{2(e_0 a)^2 k_w I_2}{kS} (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) dx = \int_0^{l_e} \frac{2(e_0 a)^2 k_w I_2}{kS} \begin{Bmatrix} \phi_i' \\ \phi_i' \\ \phi_j' \\ \phi_j' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i' & \phi_i' & \phi_j' & \phi_j' \end{bmatrix} dx \\
&= \frac{(e_0 a)^2 k_w I_2}{15kS l_e} \begin{bmatrix} 36 & 3l_e & -36 & 3l_e \\ 3l_e & 4l_e^2 & -3l_e & -l_e^2 \\ -36 & -3l_e & 36 & -3l_e \\ 3l_e & -l_e^2 & -3l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (3.230)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{I,P,c} &= \int_0^{l_e} \frac{k_p I_2}{kS} (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) dx = \int_0^{l_e} \frac{k_p I_2}{kS} \begin{Bmatrix} \phi_i' \\ \phi_i' \\ \phi_j' \\ \phi_j' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i' & \phi_i' & \phi_j' & \phi_j' \end{bmatrix} dx \\
&= \frac{k_p I_2}{30kS l_e} \begin{bmatrix} 36 & 3l_e & -36 & 3l_e \\ 3l_e & 4l_e^2 & -3l_e & -l_e^2 \\ -36 & -3l_e & 36 & -3l_e \\ 3l_e & -l_e^2 & -3l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (3.231)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{I,P,nl} &= \int_0^{l_e} \frac{2(e_0 a)^2 k_p I_2}{kS} (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') dx = \int_0^{l_e} \frac{2(e_0 a)^2 k_p I_2}{kS} \begin{Bmatrix} \phi_i'' \\ \phi_i'' \\ \phi_j'' \\ \phi_j'' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i'' & \phi_i'' & \phi_j'' & \phi_j'' \end{bmatrix} dx \\
&= \frac{2(e_0 a)^2 k_p I_2}{kS l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (3.232)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{I,T,c} &= \int_0^{l_e} \frac{D_T \Delta T I_2}{kS} (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) dx = \int_0^{l_e} \frac{D_T \Delta T I_2}{kS} \begin{Bmatrix} \phi_i' \\ \phi_j' \\ \phi_j' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i' & \phi_i' & \phi_j' & \phi_j' \end{bmatrix} dx \\
&= \frac{D_T \Delta T I_2}{30kS l_e} \begin{bmatrix} 36 & 3l_e & -36 & 3l_e \\ 3l_e & 4l_e^2 & -3l_e & -l_e^2 \\ -36 & -3l_e & 36 & -3l_e \\ 3l_e & -l_e^2 & -3l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (3.233)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{I,T,nl} &= \int_0^{l_e} \frac{2(e_0 a)^2 D_T \Delta T I_2}{kS} (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') dx = \int_0^{l_e} \frac{2(e_0 a)^2 D_T \Delta T I_2}{kS} \begin{Bmatrix} \phi_i'' \\ \phi_i'' \\ \phi_j'' \\ \phi_j'' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i'' & \phi_i'' & \phi_j'' & \phi_j'' \end{bmatrix} dx \\
&= \frac{2(e_0 a)^2 D_T \Delta T I_2}{kS l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (3.234)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{I,W,HO-nl} &= \int_0^{l_e} \frac{(e_0 a)^4 k_W I_2}{kS} (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') dx = \int_0^{l_e} \frac{(e_0 a)^4 k_W I_2}{kS} \begin{Bmatrix} \phi_i'' \\ \phi_i'' \\ \phi_j'' \\ \phi_j'' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i'' & \phi_i'' & \phi_j'' & \phi_j'' \end{bmatrix} dx \\
&= \frac{2(e_0 a)^4 k_W I_2}{kS l_e} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (3.235)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{I,P,HO-nl} &= \int_0^{l_e} \frac{(e_0 a)^4 k_P I_2}{kS} (\mathbf{B}''^T \mathbf{B}'') dx = \int_0^{l_e} \frac{(e_0 a)^4 k_P I_2}{kS} \begin{Bmatrix} \phi_i''' \\ \phi_j''' \\ \phi_j''' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i''' & \phi_i''' & \phi_j''' & \phi_j''' \end{bmatrix} dx \\
&= \frac{36(e_0 a)^4 k_P I_2}{kS l_e^5} \begin{bmatrix} 4 & 2l_e & -4 & 2l_e \\ 2l_e & l_e^2 & -2l_e & l_e^2 \\ -4 & -2l_e & 4 & -2l_e \\ 2l_e & l_e^2 & -2l_e & l_e^2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.236}$$

$$\begin{aligned}
M_{I,T,HO-nl} &= \int_0^{l_e} \frac{(e_0 a)^4 D_T \Delta T I_2}{kS} (\mathbf{B}''^T \mathbf{B}'') dx \\
&= \int_0^{l_e} \frac{(e_0 a)^4 D_T \Delta T I_2}{kS} \begin{Bmatrix} \phi_i''' \\ \phi_i''' \\ \phi_j''' \\ \phi_j''' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i''' & \phi_i''' & \phi_j''' & \phi_j''' \end{bmatrix} dx \\
&= \frac{36(e_0 a)^4 D_T \Delta T I_2}{kS l_e^5} \begin{bmatrix} 4 & 2l_e & -4 & 2l_e \\ 2l_e & l_e^2 & -2l_e & l_e^2 \\ -4 & -2l_e & 4 & -2l_e \\ 2l_e & l_e^2 & -2l_e & l_e^2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.237}$$

Ayrıca, yüksek mertebeden kütle matrisinin bileşenleri de aşağıda yazılmaktadır:

$$\begin{aligned}
M_{I,R,c} &= \int_0^{l_e} \frac{I_0 I_2}{kS} (\phi^T \phi) dx = \int_0^{l_e} \frac{I_0 I_2}{kS} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_j \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i & \phi_i & \phi_j & \phi_j \end{bmatrix} dx \\
&= \frac{I_0 I_2 l_e}{420 kS} \begin{bmatrix} 156 & 22l_e & 54 & -13l_e \\ 22l_e & 4l_e^2 & 13l_e & -3l_e^2 \\ 54 & 13l_e & 156 & -22l_e \\ -13l_e & -3l_e^2 & -22l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.238}$$

$$\begin{aligned}
M_{I,R,nl} &= \int_0^{l_e} \frac{2(e_0 a)^2 I_0 I_2}{kS} (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) dx = \int_0^{l_e} \frac{2(e_0 a)^2 I_0 I_2}{kS} \begin{Bmatrix} \phi_i' \\ \phi_i' \\ \phi_j' \\ \phi_j' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i' & \phi_i' & \phi_j' & \phi_j' \end{bmatrix} dx \\
&= \frac{(e_0 a)^2 I_0 I_2}{15kS l_e} \begin{bmatrix} 36 & 3l_e & -36 & 3l_e \\ 3l_e & 4l_e^2 & -3l_e & -l_e^2 \\ -36 & -3l_e & 36 & -3l_e \\ 3l_e & -l_e^2 & -3l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (3.239)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{I,R,HO-nl} &= \int_0^{l_e} \frac{(e_0 a)^4 I_0 I_2}{kS} (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') dx = \int_0^{l_e} \frac{(e_0 a)^4 I_0 I_2}{kS} \begin{Bmatrix} \phi_i'' \\ \phi_i'' \\ \phi_j'' \\ \phi_j'' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i'' & \phi_i'' & \phi_j'' & \phi_j'' \end{bmatrix} dx \\
&= \frac{(e_0 a)^4 I_0 I_2}{kS l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (3.240)
\end{aligned}$$

Son olarak, toplam yük vektörünün bileşenleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\mathbf{f}_c = \int_0^{l_e} \phi^T f dx = \int_0^{l_e} f \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_j \end{Bmatrix} dx = \frac{l_e}{12} f \begin{Bmatrix} 6 \\ l_e \\ 6 \\ -l_e \end{Bmatrix} \quad (3.241)$$

$$\mathbf{f}_{nl} = \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 \mathbf{B}^T f' dx = \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 f' \begin{Bmatrix} \phi_i' \\ \phi_i' \\ \phi_j' \\ \phi_j' \end{Bmatrix} dx = (e_0 a)^2 f' \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.242)$$

Buradaki matrislerin sayıca çokluğu nedeniyle sadece alt indislerin tanımlanması tercih edilmektedir. Buna göre, ilgili matris bileşeninin alt indisinde W Winkler zemininin, P Pasternak zemininin, T ortam sıcaklığının, R kayma rijitliği (kS) ve eğilme rijitliği (B) parametrelerinden en az birinin bulunması durumunun, c klasik elastisitenin ve yerel olmayan elastisite için nl alt indisi $(e_0 a)^2$ ifadesinin ve bunun daha yüksek yüksek mertebesi olan $Ho - nl$ alt indisi $(e_0 a)^4$ ifadesinin bileşen olarak yer almasından dolayı

adlandırmada kullanıldığını belirtir. Öte yandan $\mathbf{f}_c$ klasik yük vektörünü ve $\mathbf{f}_{nl}$ yerel olmayan yük vektörünü tanımlar.

Frekansların Hesaplanması: Serbest titreşimde $\mathbf{f}_c = \mathbf{f}_{nl} = 0$ alınıp, Denklem (3.25)'de tanımlanan değişkenlere ayırma bu defa düğüm deplasmanları için yazılırsa,

$$\det \left[\left(\sum_{e=1}^n [K]_e \right)^* - \omega_i^2 \left(\sum_{e=1}^n [M^0]_e \right)^* + \omega_i^4 \left(\sum_{e=1}^n [M^1]_e \right)^* \right] = 0 \quad (3.243)$$

şeklindeki özdeğer denkleminde ulaşılır. Denklemin sayısal yöntemlerle veya bilgisayarda programlama vasıtasıyla çözümü ile özdeğerler yani i . modun doğal frekansı ω_i elde edilir. Burada $\sum_{e=1}^n [K]_e$, $\sum_{e=1}^n [M^0]_e$ ve $\sum_{e=1}^n [M^1]_e$ ilgili küresel matrisi tanımlar ve bunların indirgenerek özdeğer analizine girmesi gereken nihai matrisler (teknik adıyla indirgenmiş küresel matrisler) $(\Sigma[\dots])^*$ gösterimiyle sembolize edilmektedir.

Küresel Matrislerin İndirgenmesi: Bilindiği üzere küresel matrisler sistemdeki n sayıdaki sonlu elemanın serbestlik doğrultularına göre toplanarak kurulur. Yani sonlu elemanların ilgili matrisleri terim terime toplanmaz. Sonlu elemanlar yönteminin tekniği gereğince sonlu elemanların ortak düğümündeki serbestlikler birbiri ile toplanacağından $(2n+2) \times (2n+2)$ boyutunda küresel matrisler oluşur. Ardından bu küresel matrisler indirgenir yani sonlu eleman ağında geometrik sınır şartı adresleyen ilgili serbestliğe denk gelen satır ve sütunlar küresel matrislerden silinir.

3.4.2. Nanoçubuklar

Sonlu Eleman Kinematığı: Başlamadan önce muhakkak belirtilmelidir ki, eksenel çubuklar sonlu eleman analizinde çoğunlukla iki düğümlü sonlu elemanla modellenirler çünkü formülasyonda göz önüne alınan basit çubuğun kinematığı basit olarak bu eleman tipinin kullanımını mümkün kılar. Ancak Love-Bishop çubuğunda iki düğümlü elemanın kullanımı mümkün değildir çünkü çubuk kinematığı yüksek mertebeden türevli terimleri ortaya çıkartır. Bu durum bu alt başlığa incelenecek formülasyonda yeri geldiğinde gösterilecektir. Sonuç itibarıyla, kayma deformasyonlu fonksiyonel derecelendirilmiş eksenel nanoçubuğun yerel olmayan sonlu eleman analizi en az üç düğümlü (Numanoğlu 2019; Civalek ve Numanoğlu 2020; Numanoğlu ve Şen 2022) sonlu eleman üzerinden yürütülmelidir. İlk olarak, nanokirişe benzer şekilde üyenin toplam eksenel deplasmanı

$$u = \phi \mathbf{d} \quad (3.244)$$

olarak ifade edilir. Burada şekil fonksiyonu ve düğüm deplasmanları,

$$\phi = \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{Bmatrix}^T = \begin{Bmatrix} 2\xi^2 - 3\xi + 1 \\ -4\xi^2 + 4\xi \\ 2\xi^2 - \xi \end{Bmatrix}^T, \quad \mathbf{d} = \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_k \end{Bmatrix}. \quad (3.245)$$

ile verilir. Burada ξ boyutsuz koordinat iken d_i , d_j ve d_k sonlu eleman düğümlerinin eksenel deplasmanlarını tanımlar.

Sonlu Eleman Hareket Denklemi: Bu defa kalıntı, her bir parametrenin özdeğer çözümüne katkılarının ayrı ayrı belirlenebilmesi maksadıyla

$$R = S_r \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - A_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (e_0 a)^2 k_M \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_M u + I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (e_0 a)^2 I_s \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial t^2} - I_s \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} - (e_0 a)^2 (1 + 2\nu) I_0 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - q = 0 \quad (3.246)$$

biçiminde tanımlanır. Ardından ortalama ağırlıklı kalıntı aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$I = \int_0^{l_e} h \left(S_r \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - A_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (e_0 a)^2 k_M \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_M u + I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (e_0 a)^2 I_s \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial t^2} - I_s \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} - (e_0 a)^2 (1 + 2\nu) I_0 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - q \right) dx \quad (3.247)$$

burada görülen integraller aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{l_e} S_r h \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} dx = S_r h \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_0^{l_e} - S_r \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_0^{l_e} + \int_0^{l_e} S_r \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x^2} dx, \\ I_2 &= \int_0^{l_e} A_0 h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = A_0 h \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^{l_e} - \int_0^{l_e} A_0 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx, \\ I_3 &= \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 k_M h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = (e_0 a)^2 k_M h \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^{l_e} - \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 k_M \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx, \\ I_4 &= \int_0^{l_e} k_M h u dx, \quad I_5 = \int_0^{l_e} I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx, \\ I_6 &= (e_0 a)^2 I_s h \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial t^2} \Big|_0^{l_e} - (e_0 a)^2 I_s \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial t^2} \Big|_0^{l_e} + \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 I_s \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} dx \\ I_7 &= \int_0^{l_e} I_s h \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} dx = I_s \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \Big|_0^{l_e} - \int_0^{l_e} I_s \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} dx, \\ I_8 &= \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 (1 + 2\nu) I_0 h \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} dx = (e_0 a)^2 (1 + 2\nu) I_0 h \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \Big|_0^{l_e} \\ &\quad - \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 (1 + 2\nu) I_0 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} dx, \\ I_9 &= \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 h \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} dx = (e_0 a)^2 h \frac{\partial q}{\partial x} \Big|_0^{l_e} - \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial x} dx, \quad I_{10} = \int_0^{l_e} h q dx. \end{aligned} \quad (3.248)$$

Bu ifadelerin Denklem (3.247)'de yazılmasından sonra sadece belirli integraller bir araya getirilirse

$$\begin{aligned}
& \int_0^{l_e} S_r \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x^2} dx + \int_0^{l_e} A_0 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 k_M \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \int_0^{l_e} k_M h u dx \\
& + \int_0^{l_e} I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx + \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 I_s \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} dx + \int_0^{l_e} I_s \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} dx \\
& + \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 (1+2\nu) I_0 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} dx - \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial x} dx - \int_0^{l_e} h q dx = 0 \quad (3.249)
\end{aligned}$$

ifadesine ulaşılır. Bu denklemin düzenlenmesi için, Denklem (3.244)'e ek olarak gerekli tanımlar

$$\begin{aligned}
h &= \phi^T, \quad \mathbf{B} = \mathbf{D}^k \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial h}{\partial x} = (\phi^T)' = \mathbf{B}^T, \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= \mathbf{B} \mathbf{d}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mathbf{B}' \mathbf{d}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \phi \ddot{\mathbf{d}}. \quad (3.250)
\end{aligned}$$

şeklinde verilir. Denklem (2.249), Denklemler (2.244) ve (2.250) vasıtasıyla

$$\begin{aligned}
& \int_0^{l_e} S_r (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') \mathbf{d} dx + \int_0^{l_e} A_0 (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) \mathbf{d} dx + \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 k_M (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) \mathbf{d} dx + \int_0^{l_e} k_M (\phi^T \phi) \mathbf{d} dx \\
& + \int_0^{l_e} I_0 (\phi^T \phi) \ddot{\mathbf{d}} dx + \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 I_s (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') \ddot{\mathbf{d}} dx + \int_0^{l_e} I_s (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) \ddot{\mathbf{d}} dx \\
& + \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 (1+2\nu) I_0 (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) \ddot{\mathbf{d}} dx - \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 \mathbf{B}^T q' dx - \int_0^{l_e} \phi^T q dx = 0 \quad (3.251)
\end{aligned}$$

olarak düzenlenir. Bu denklem matris notasyonu gösterimi şöyle yazılır:

$$(\sum K) \mathbf{d} + (\sum M) \ddot{\mathbf{d}} = \sum \mathbf{f} \quad (3.252)$$

burada $\sum K$ toplam rijitlik matrisini, $\sum M^0$ toplam kütle matrisini ve $\sum \mathbf{f}$ toplam yük vektörünü belirtir. Bu tanımlar

$$\sum K = K_a + K_I + K_{M,c} + K_{M,nl} \quad (3.253)$$

$$\sum M = M_{A,c} + M_{A,nl} + M_{I,c} + M_{I,nl} \quad (3.254)$$

$$\sum \mathbf{q} = \mathbf{q}_c + \mathbf{q}_{nl} \quad (3.255)$$

şeklinde açıklanır. Burada toplam rijitlik matrisinin bileşenleri olarak K_a eksenel rijitlik matrisi, K_I yanal atalet rijitlik matrisi, $K_{M,c}$ eksenel ortam klasik rijitlik matrisi ve $K_{M,nl}$ eksenel ortam yerel olmayan rijitlik matrisi olarak adlandırılır. Ayrıca, toplam kütle matrisinin bileşenleri olarak $M_{A,c}$ klasik kütle matrisini, $M_{A,nl}$ yerel olmayan kütle

matrisini, $M_{I,c}$ klasik yanal kütle ataleti matrisini ve $M_{I,nl}$ yerel olmayan yanal kütle ataleti matrisini tanımlar. Ek olarak, $\mathbf{q}_c$ ve $\mathbf{q}_{nl}$ sırasıyla klasik ve yerel olmayan yük vektörleridir. Bu ifadeler aşağıda formüle edilmektedir:

$$K_a = \int_0^{l_e} A_0 (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) dx = \int_0^{l_e} A_0 \begin{Bmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \\ \phi_3' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1' & \phi_2' & \phi_3' \end{bmatrix} dx = \frac{A_0}{3l_e} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \quad (3.256)$$

$$K_I = \int_0^{l_e} S_r (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') dx = \int_0^{l_e} S_r \begin{Bmatrix} \phi_1'' \\ \phi_2'' \\ \phi_3'' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1'' & \phi_2'' & \phi_3'' \end{bmatrix} dx = \frac{S_r}{l_e^3} \begin{bmatrix} 16 & -32 & 16 \\ -32 & 64 & -32 \\ 16 & -32 & 16 \end{bmatrix} \quad (3.257)$$

$$K_{M,c} = \int_0^{l_e} k_M (\phi^T \phi) dx = \int_0^{l_e} k_M \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix} dx = \frac{k_M l_e}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.258)$$

$$K_{M,nl} = \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 k_M (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) dx = \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 k_M \begin{Bmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \\ \phi_3' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1' & \phi_2' & \phi_3' \end{bmatrix} dx$$

$$= \frac{(e_0 a)^2 k_M}{3l_e} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \quad (3.259)$$

$$M_{A,c} = \int_0^{l_e} I_0 (\phi^T \phi) dx = \int_0^{l_e} I_0 \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix} dx = \frac{I_0 l_e}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.260)$$

$$M_{A,nl} = \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 (1+2\nu) I_0 (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) dx = \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 (1+2\nu) I_0 \begin{Bmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \\ \phi_3' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1' & \phi_2' & \phi_3' \end{bmatrix} dx$$

$$= \frac{(e_0 a)^2 (1+2\nu) I_0}{3l_e} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \quad (3.261)$$

$$M_{I,c} = \int_0^{l_e} I_s (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) dx = \int_0^{l_e} I_s \begin{Bmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \\ \phi_3' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1' & \phi_2' & \phi_3' \end{bmatrix} dx = \frac{I_s}{3l_e} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \quad (3.262)$$

$$M_{I,nl} = \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 I_s (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}') dx = \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 I_s \begin{Bmatrix} \phi_1'' \\ \phi_2'' \\ \phi_3'' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1'' & \phi_2'' & \phi_3'' \end{bmatrix} dx$$

$$= \frac{(e_0 a)^2 I_s}{l_e^3} \begin{bmatrix} 16 & -32 & 16 \\ -32 & 64 & -32 \\ 16 & -32 & 16 \end{bmatrix} \quad (3.263)$$

$$\mathbf{q}_c = \int_0^{l_e} \phi^T q dx = \int_0^{l_e} q \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} dx = \frac{ql_e}{6} \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.264)$$

$$\mathbf{q}_{nl} = \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 \mathbf{B}^T q' dx = \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 q' \begin{Bmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \\ \phi_3' \end{Bmatrix} dx = \frac{(e_0 a)^2 q'}{l_e} \begin{Bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{Bmatrix} \quad (3.265)$$

Frekansların Hesaplanması: Sırasıyla küresel toplam rijitlik ve kütle matrisleri olan $\Sigma_{e=1}^n [K]_e$ ve $\Sigma_{e=1}^n [M]_e$ kurulduktan ve indirgendikten sonra

$$\det \left[\left(\sum_{e=1}^n [K]_e \right)^* - \omega_i^2 \left(\sum_{e=1}^n [M]_e \right)^* \right] = 0 \quad (3.266)$$

şeklinde yazılması gereken özdeğer denkleminin çözülmesiyle ω_i özdeğerleri yani i . modun doğal frekansı hesaplanmaktadır.

Küresel Matrislerin İndirgenmesi: Üç düğümlü eksenel elemanların uç düğümleri üzerinden yapılacak birleştirmeler sonucunda küresel matrisler n sayıda sonlu eleman için $(2n+1) \times (2n+1)$ boyutunda hesaplanmalıdır. Denklem (2.244) gereğince sonlu eleman kinematiği sadece eksenel deplasman üzerinden oluşturulduğundan bu çubuk türünde geometrik sınır şart sadece eksenel deplasmandır. Örneğin tutulu uç durumunda, tutulu ucun denk geldiği düğümü işaret eden satır ve sütun ilgili küresel matrislerden silinerek oluşan ifadeler özdeğer denklemine girer.

Basit Nanoçubuk İçin Yerel Olmayan Sonlu Eleman Formülasyonu: Hareket denkleminin formülizasyonu sunulurken, ileride ele alınacak kayma deformasyonlu nanoçerçeveler de tez kapsamında formüle edileceğinden ve eksenel yönde kayma

deformasyonunu hesaba katmak matematiksel olarak mümkün olamayacağından eksenel yönde Poisson etkisinin ihmal edileceği belirtilmiş, bu nedenle Poisson etkisinin ihmali hakkında kısa bir anlatımda bulunulmuştur. Hatırlanacak olursa bir önceki alt başlıkta değinilen nanokirişler için iki düğümlü eleman, kayma deformasyonu ile analize izin vermektedir çünkü Denklem (3.245)'te verilen şekil fonksiyonu, Denklemler (3.248) ile verilen belirli integrallerdeki maksimum türevler derecesi olan üç defa türev alınabilmesini mümkün kılmaktadır. Ancak bu alt başlıkta da değinildiği gibi, Denklem (3.248)'deki I_1 ve I_6 integralleri iki defa türev içerdiğinden ve iki düğümlü şekil fonksiyonu bu türevler için yetersiz kalacağından Love-Bishop çubuğunun analizi için en az üç düğümlü elemanın kullanımının gerekli olduğu anlaşılmaktadır. Buna göre, Denklem (3.245)'teki şekil fonksiyonu iki defa türevleme işlemini sağlayabilmektedir. Bu bölümün son kısmı olan bir sonraki alt başlığa konu nanoyapı modelini tanımlayan nanoçerçevelerin sonlu eleman formülasyonunun eksenel davranışla ilgili kısmı için bu alt başlıkta, basit nanoçubuk için yerel olmayan sonlu eleman analizine kısaca değinilecektir.

İlk olarak, iki düğümlü eksenel sonlu elemanın kinematığı aşağıdaki denklemlerle açıklanır:

$$\phi = \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix}^T = \begin{Bmatrix} 1-\xi \\ \xi \end{Bmatrix}^T = \begin{Bmatrix} 1-x/L \\ x/L \end{Bmatrix}^T, \mathbf{d} = \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \end{Bmatrix}. \quad (3.267)$$

$$h = \phi^T, \mathbf{B} = \mathbf{D}^k \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial x} = (\phi^T)' = \mathbf{B}^T, \frac{\partial u}{\partial x} = \mathbf{B} \mathbf{d}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \phi \ddot{\mathbf{d}}. \quad (3.268)$$

burada sonlu elemanın şekil fonksiyonlarının birinci dereceden denklemlerle ifade edildiğine dikkat edilmelidir. Öte yandan, Denklem (3.187) ile verilen hareket denklemi kalıntıyı belirttiğinden, ağırlıklı ortalama kalıntı

$$I = \int_0^{l_e} h \left(A_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (e_0 a)^2 k_M \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k_M u - I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (e_0 a)^2 I_0 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + q \right) dx \quad (3.269)$$

ile ifade edilebilir. Bu denklem, Denklem (3.248)'de görülen I_2, I_3, I_4, I_5, I_8 ($v = 0$ olduğu da hatırlatılarak), I_9 ve I_{10} integrallerinin sonuçları kullanılarak

$$\begin{aligned} & \int_0^{l_e} A_0 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 k_M \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \int_0^{l_e} k_M h u dx + \int_0^{l_e} I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx \\ & - \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 I_0 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} dx - \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial x} dx - \int_0^{l_e} h q dx = 0 \end{aligned} \quad (3.270)$$

olarak yazılır. Burada Denklemler (2.267) ve (2.268) yardımıyla

$$\begin{aligned} & \int_0^{l_e} A_0 (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) d\mathbf{x} + \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 k_M (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) d\mathbf{x} + \int_0^{l_e} k_M (\phi^T \phi) d\mathbf{x} + \int_0^{l_e} I_0 (\phi^T \phi) d\mathbf{x} \\ & + \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 I_0 (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) d\mathbf{x} - \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 \mathbf{B}^T q' d\mathbf{x} - \int_0^{l_e} \phi^T q d\mathbf{x} = 0 \end{aligned} \quad (3.271)$$

ifadesi ortaya çıkar. Denklem (3.252)'deki matris notasyonu bu defa

$$\sum K = K_a + K_{M,c} + K_{M,nl} \quad (3.272)$$

$$\sum M = M_c + M_{nl} \quad (3.273)$$

$$\sum \mathbf{q} = \mathbf{q}_c + \mathbf{q}_{nl} \quad (3.274)$$

denklemleri ile kurulur. Buradaki tanımlar Love-Bishop çubuğu için formülasyon türetilirken yapılmıştır. Sadece kütle bileşenleri için notasyon değişikliği yapılmış olup, M_c ve M_{nl} kayma deformasyonsuz eksenel nanoçubuğun sırasıyla klasik ve yerel olmayan kütlelerini ifade eder. Böylece, fonksiyonel derecelendirilmiş kayma deformasyonsuz nanoçubuğun yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonunun bileşenleri aşağıdaki gibi açıklanır:

$$K_a = \int_0^{l_e} A_0 (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) d\mathbf{x} = \int_0^{l_e} A_0 \begin{Bmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1' & \phi_2' \end{bmatrix} d\mathbf{x} = \frac{A_0}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.275)$$

$$K_{M,c} = \int_0^{l_e} k_M (\phi^T \phi) d\mathbf{x} = \int_0^{l_e} k_M \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} d\mathbf{x} = \frac{k_M l_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.276)$$

$$\begin{aligned} K_{M,nl} &= \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 k_M (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) d\mathbf{x} = \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 k_M \begin{Bmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1' & \phi_2' \end{bmatrix} d\mathbf{x} \\ &= \frac{(e_0 a)^2 k_M}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.277)$$

$$M_c = \int_0^{l_e} I_0 (\phi^T \phi) d\mathbf{x} = \int_0^{l_e} I_0 \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} d\mathbf{x} = \frac{I_0 l_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.278)$$

$$\begin{aligned} M_{nl} &= \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 I_0 (\mathbf{B}^T \mathbf{B}) d\mathbf{x} = \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 I_0 \begin{Bmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1' & \phi_2' \end{bmatrix} d\mathbf{x} \\ &= \frac{(e_0 a)^2 I_0}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.279)$$

$$\mathbf{q}_c = \int_0^{l_e} \phi^T q dx = \int_0^{l_e} q \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} dx = \frac{ql_e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.280)$$

$$\mathbf{q}_{nl} = \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 \mathbf{B}^T q' dx = \int_0^{l_e} (e_0 a)^2 q' \begin{Bmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \end{Bmatrix} dx = \frac{(e_0 a)^2 q'}{l_e} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.281)$$

Kısa bir inceleme yapılacak olursa, yerel olmayan basit eksenel nanoçubuk analizinde Poisson etkisi ihmal edildiğinden, yanal atalet rijitliği K_I , klasik yanal kütle ataleti $M_{I,c}$ ve yerel olmayan kütle ataleti $M_{I,nl}$ matrislerinin analizde yer almadığı gözlemlenmektedir. Öte yandan, yukarıdaki ifadelerin kullanımı üzerinden oluşturulacak küresel matrislerin indirgenmesiyle ilgili özdeğer denkleminin çözümü sonucunda doğal frekanslar hesaplanmış olur ancak konunun bu olmadığı, burada nanoçerçeve modeli için yerel olmayan sonlu elemanlar analizinin ilgili kısmının kurulmasının amaçlandığı not edilmelidir.

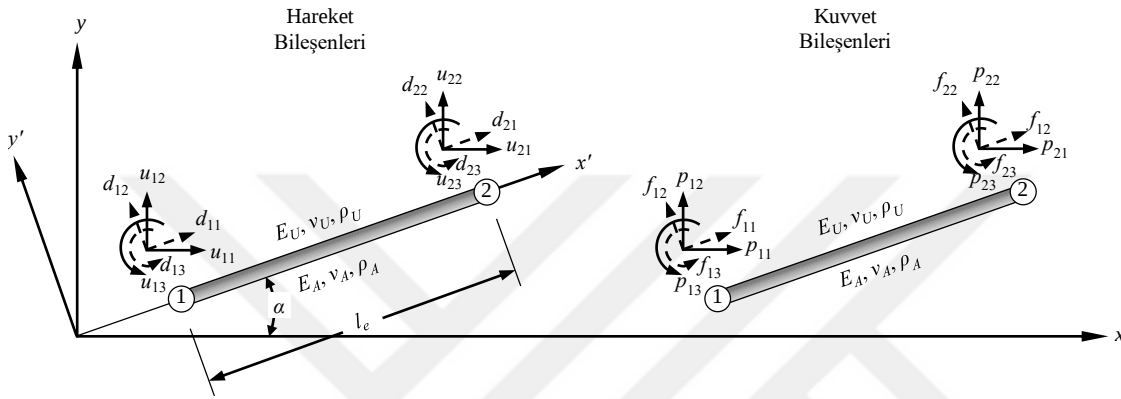
3.4.3. Kayma deformasyonlu fonksiyonel derecelenmiş ayrık nano sistemler

Bu bölümde son olarak, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden imal edilmiş düzlem nanoçerçeve yapılarının kayma deformasyonuna dayanan yerel olmayan serbest titreşim analizinden bahsedilecektir. Bilindiği üzere, çerçeve yapılar, en basit anlamda, en az iki tane üyeye sahip ayrık yapılar olarak tanımlanabilmektedir. Burada bir üye mekaniksel ve geometrik olarak diğer üyelerden bağımsız olarak kendi başına tanımlanabildiğinden bu tür yapılar ayrık sistem olarak bilinir. Hatırlatılacak olursa, yaygın bilinen diğer ayrık yapı çeşidi olan kafes sistemlerde üyeler sadece eksenel etkiler altında çalışırken çerçeve yapılarında üyeler, bütün serbestlik doğrultularında (eksenel, burulma, enine, dönme) hareket gösterirler ve bu doğrultulardaki iç tesirlerle karakterize edilmektedirler. Tabi çerçeve yapılarında burulma etkisi çoğunlukla analizde yer almaz, diğer etkilere göre mekanik analiz formüle edilmektedir.

Nano ve mikro-elektro-mekanik sistemlerin yapısal mekanik davranışlarının araştırılmasında genel olarak eksenel çubuk, kiriş, kabuk ve plak gibi mekanik modellerinin göz önüne alındığı bilimsel literatürden bilinmektedir. Ancak, bazı nano/mikro ölçekli yapısal sistemler, farklı yönelimli birden çok elemana (Que vd. 2001; Piazza vd. 2006; Kinnell ve Craddock 2009; Xie vd. 2015; Chaudhary ve Mudimela 2022) sahip olduğundan bu sistemleri sürekli yapı gibi modellemek makul görünmeyebilir. Bu tür küçük ölçekli yapılara ayrık mekanik sistem modeli (Numanoğlu ve Civalek 2019b, 2024) ile yaklaşılmalıdır.

Düzlemsel çerçeve yapıların statik, dinamik ve burkulma gibi temel mekanik analizleri çoğunlukla matris deplasman metodu ile gerçekleştirilmektedir ve çözümün teorik yapı mekaniği bilimi ile ilgilenenlerce iyi bilinmektedir. Her ne kadar teorik altyapı bilinse de nano mekanik alanında boyut etkili sürekli ortam teorileri kullanılarak ayrık yapıların analizleri henüz oldukça kısıtlı bir mevzu olduğundan ve metodolojinin mantığını yerel olmayan parametreden kaynaklı terimlere de uygulayarak teorik altyapıyı tam anlamıyla açıklayabilmek maksadıyla, serbest titreşim analizi için sonlu eleman tabanlı matris deplasman metodu burada detaylı olarak aktarılacaktır. Matris deplasman

analizinde ayrık yapının her bir üyesi tek başına sonlu eleman olabileceği gibi sonlu elemanlara bölünebilmektedir. Literatürde çoğunlukla her bir üyenin kendi başına bir sonlu eleman olarak hesaba katıldığı bilinmektedir. Zira diğer türlü yani her üyenin sonlu elemanlara bölünmesi belki hesap hassasiyetini artıracaktır ancak işlem süresini oldukça uzatacaktır. Bu açıklananlar bağlamında, analize konu düzlem nanoçerçevenin bir üyesi Şekil 3.7’de tasvir edilmektedir. Çerçeve üyesinin uzunluğu l_e olmak üzere, konu gereği üyelerin fonksiyonel derecelenmiş malzemeden imal edildiği varsayılarak, malzemenin alt ve üst yüzey özellikleri de şekilde gözlemlenmektedir.



Şekil 3.7. Fonksiyonel derecelendirilmiş düzlem eğilme üyesinin serbestlikleri

Nanoçerçeve üyesinin yer aldığı ve yatayına göre α olarak sembolize edilen yönelim açısı kadar yönlendiği xy düzlemi genel eksen takımı ve üye eksenini yatay olarak baz alan $x'y'$ düzlemi yerel eksen takımını ifade etmektedir. Buna göre, üyenin uç düğümlerinin serbestlikleri için, yerel takıma göre d_{11} ve d_{21} eksenel deplasman, d_{12} ve d_{22} enine deplasman, d_{13} ve d_{23} dönme yönlerindeki serbestlikleri; genel takıma göre u_{11} ve u_{21} eksenel deplasman, u_{12} ve u_{22} enine deplasman, u_{13} ve u_{23} dönme yönlerindeki serbestlikleri belirtir. Buna benzer olarak, serbestlik yönündeki iç tesirlerden yerel eksen takımı için p_{11} ve p_{21} eksenel kuvveti, p_{12} ve p_{22} kesme kuvvetini, p_{13} ve p_{23} eğilme momentlerini; genel takıma göre f_{11} ve f_{21} eksenel kuvveti, f_{12} ve f_{22} kesme kuvvetini, f_{13} ve f_{23} eğilme momentlerini gösterir.

Sürekli yapı mekaniğinde eksenel ve eğilme titreşimlerinin ayrı ayrı incelenebilmesi, çerçevelerin matris deplasman analizi için de bir temel oluşturmaktadır. Buna göre, Şekil 3.7 üzerinde verilen hareket ve dönme bileşenleri üzerinden ilk olarak eksenel titreşime esas bir formülasyon elde edilmelidir. Eksenel titreşim her ne kadar çubuk ekseninde görülse de sadece eksenel etkiler altında çalıştığı bilinen kafes yapıların ayrık üyelerden oluşması yani her bir üyenin cisim ekseninin farklı olması ayrık yapı hareketinin sadece bir yönde değil, o yöne dik doğrultuda da gerçekleşmesi gerektiğini ortaya koyar. Bilindiği üzere kafes yapıları uç birleşimlerinde dönme hareketi yapmadığından eğilme momenti iç tesiri almazlar. Bu nedenle, şimdilik üyenin dönme hareketleri düşünülmemektedir, genel ve yerel eksen takımlarında deplasman ve bunların yönündeki iç tesirlerinin kendi arasındaki bağıntılar, sırasıyla şu denklemlerle izah edilmektedir:

$$\begin{aligned} d_{11} &= u_{11} \cos \alpha + u_{12} \sin \alpha, \quad d_{12} = -u_{11} \sin \alpha + u_{12} \cos \alpha \\ d_{21} &= u_{21} \cos \alpha + u_{22} \sin \alpha, \quad d_{22} = -u_{21} \sin \alpha + u_{22} \cos \alpha. \end{aligned} \quad (3.282)$$

$$\begin{aligned} f_{11} &= p_{11} \cos \alpha + p_{12} \sin \alpha, \quad f_{12} = -p_{11} \sin \alpha + p_{12} \cos \alpha, \\ f_{21} &= p_{21} \cos \alpha + p_{22} \sin \alpha, \quad f_{22} = -p_{21} \sin \alpha + p_{22} \cos \alpha. \end{aligned} \quad (3.283)$$

bu ifadeler

$$\mathbf{d} = T\mathbf{u} \quad (3.284)$$

$$\mathbf{f} = T\mathbf{p} \quad (3.285)$$

şeklinde temsil edilmek suretiyle

$$\begin{Bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ d_{21} \\ d_{22} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{21} \\ u_{22} \end{Bmatrix} \quad (3.286)$$

$$\begin{Bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{21} \\ f_{22} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{21} \\ p_{22} \end{Bmatrix} \quad (3.287)$$

olarak yazılan bağıntılarda $\mathbf{d}$ ve $\mathbf{u}$ sırasıyla yerel ve genel eksen takımlarının deplasman vektörlerini ve buna benzer biçimde $\mathbf{f}$ ve $\mathbf{p}$ sırasıyla yerel ve genel eksen takımlarının kuvvet vektörlerini belirtirken bunların arasındaki ilişkiyi kuran T transformasyon matrisi olarak bilinir:

$$T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (3.288)$$

burada transformasyon işlemi genel bileşenleri yerele dönüştürmektedir. Ancak, bu dönüşüm mantığı sonlu eleman hesabının esasına terstir çünkü hesap sürecinin sonunda küresel matrislerin bütün sistem genelinde yazılması gerekmektedir. Bununla ilgili mantık, tam da geometrik bağıntılara ek olarak mekaniksel bağıntının da formüle edilmesi gereken şu aşamada aktarılacaktır. Geometrik bağıntılara ek olarak mekaniksel bağıntının da formüle edilmesi gerekmektedir. Bu söylenen,

$$\mathbf{f} = k\mathbf{d} \quad (3.289)$$

olarak belirtilen Hooke denklemi üzerinden temellendirilir. Burada mantıken k üyenin yerel takımdaki rijitliği olmalıdır. Bilindiği üzere eksenel bir çubuğun enine rijitliği olmaz çünkü bir üye kendi başına enine rijit cisim hareketi yapamaz. O halde, fonksiyonel derecelendirilmiş basit eksenel çubuk düşünülerek Denklem (3.275)'in Denklem (3.289)'a uyarlanmasıyla yerel takımdaki kuvvet bileşenleri ve deplasman serbestlikleri düşünülerek

$$\begin{Bmatrix} f_{11} \\ 0 \\ f_{21} \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{A_0}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ d_{21} \\ d_{22} \end{Bmatrix} \quad (3.290)$$

denklemine, buradan da

$$k = \frac{A_0}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.291)$$

neticesine varılmaktadır. Tamamen eksenel etkiler altındaki ayrık nanoyapıda titreşimin diğer iki bileşeni klasik ve yerel olmayan kütle matrisleridir. Bunların dayanağına göre, Newton'un ikinci hareket kanunu olan

$$\mathbf{f} = m\ddot{\mathbf{d}} \quad (3.292)$$

gereğince hareket iki yönde gözlemleneceğinden, Denklemler (3.278) ve (3.279) doğrultusunda, kütle matrisleri

$$m_c = \frac{I_0 l_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.293)$$

$$m_{nl} = \frac{(e_0 a)^2 I_0}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.294)$$

olarak tespit edilir. Şimdi transformasyon matrisinin rijitlik ve kütle dönüşümleri için mantığı belirlenebilir. Buna göre ilk olarak Denklemler (3.284) ve (3.285)'in Denklem (3.289)'da kullanımı ile

$$T\mathbf{p} = kT\mathbf{u} \quad (3.295)$$

denklemini oluşturulabilir. Burada transformasyon matrisinin ortogonalite ($T^T = T^{-1}$) özelliğinden faydalanılabilir. Buna göre, transformasyon matrisinin tersi denklemin iki tarafıyla soldan çarpıldıktan sonra ve çarpmanın etkisiz elemanı olarak da bilinen birim matris I tanımının kullanılması suretiyle, Hooke Denkleminin bu defa genel eksen takımında göz önüne alınması yani

$$\mathbf{p} = \mathbf{K}\mathbf{u} \quad (3.296)$$

denkleminin sonucunda

$$T^T k T = K \quad (3.297)$$

bağıntısına ulaşılmış olur. Burada K genel eksen takımı için rijitlik matrisidir. Böylece transformasyon işlemi, yerel takımındaki bir üyenin rijitliğini genel ekseninde ifade etmiş olur. Benzer şekilde sırasıyla klasik ve yerel olmayan kütle bileşenleri için

$$T^T m_c T = M_c \quad (3.298)$$

$$T^T m_{nl} T = M_{nl} \quad (3.299)$$

eşitlikleri de kurulabilir. Denklemler (3.275), (3.278), (3.279) ve (3.288)'in Denklemler (3.297), (3.298) ve (3.299)'da kullanımları, fonksiyonel derecelendirilmiş üye için genel eksen takımında sırasıyla rijitlik, klasik kütle ve yerel olmayan kütle matrislerini ortaya çıkartır:

$$K = \frac{A_0}{l_e} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \theta \sin \alpha & -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha \\ \cos \theta \sin \alpha & \sin^2 \alpha & -\cos \theta \sin \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\cos \theta \sin \alpha & \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ -\cos \theta \sin \alpha & -\sin^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (3.300)$$

$$M_c = \frac{I_0 l_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.301)$$

$$M_{nl} = \frac{(e_0 a)^2 I_0}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.302)$$

burada kütle matrislerinin üye yöneliminden etkilenmediği anlaşılmaktadır.

Buraya kadar ayırık yapıların sadece eksenel yönlerindeki titreşimleri formüle edilmiştir. Yani bu formülasyon eğilme ve dönme hareketlerinden izole bir titreşim

analizini açıklamaktadır. Eksenel titreşime dair bu matris türetimleri yerel olmayan nanoçerçeveyi ilgilendirmemekte olup, esasen nanoçerçeve hesabının temel dayanağı hakkında bir altyapı oluşturulması amaçlanmaktadır. Çerçeve yapılarında üyeler bütün serbestlikler yönünden hareket ve iç tesir bileşenlerine sahip olduğundan eğilme ve dönme hareketleri de düşünülmelidir. Bu bağlamda, eğilme ve dönme hareketleri de göz önüne alındıktan sonra formülasyon buraya kadar elde edilen eksenel titreşimle birleştirilerek yerel olmayan serbest titreşimin genel matris deplasman formülasyonuna ulaşılır. Bu suretle formülasyon türetim sürecinin başında, Şekil 3.7 göz önüne alınarak Denklemler (3.282) ve (3.283)'te değinilmeyen nanoyapı üyesinin dönme serbestlik ve iç tesir bileşenlerinin yerel ve genel takımlar arasındaki ilişkileri bulunmaktadır:

$$d_{13} = u_{13}, \quad d_{23} = u_{23}. \quad (3.303)$$

$$f_{13} = p_{13}, \quad f_{23} = p_{23}. \quad (3.304)$$

O halde, bu defa yerel takımdaki hareket ve iç tesir bileşenleri, yukarıdaki ilişkiler transformasyon işlemine dahil edilerek

$$\begin{Bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ d_{13} \\ d_{21} \\ d_{22} \\ d_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \\ u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \end{Bmatrix} \quad (3.305)$$

$$\begin{Bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{13} \\ f_{21} \\ f_{22} \\ f_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \\ p_{21} \\ p_{22} \\ p_{23} \end{Bmatrix} \quad (3.306)$$

şeklinde ilişkilendirilir. Böylece transformasyon matrisi nanoçerçeve üyesi için

$$T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.307)$$

ile ifade edilmektedir.

Bilimsel literatürde düzlem çerçevelerin matris deplasman formülasyonunda genellikle kayma deformasyonunun ihmal edildiği yani Euler-Bernoulli kiriş teorisi tabanlı hesaplama yapıldığı çok iyi bilinmektedir. Buradan, yerel olmayan elastisite düşünüldüğünde bir nanoçerçeve için rijitlik, klasik kütle ve yerel olmayan kütle matrislerinin serbest titreşim analizi için yeterli olabileceği sonucuna varılmaktadır. Ancak bu tez çalışmasında fonksiyonel derecelendirilmiş nanoyapıların kinematiki kayma deformasyonu ile incelenmekte olduğundan buna dair formülasyon sunulacaktır. İlk olarak, Timoshenko kiriş teorisi nedeniyle Denklem (3.46) doğrultusunda, bu defa saf deplasman ihmal edilmeksizin ancak Poisson etkileri ihmal edilerek eğilme üyesinin deplasman bileşenleri

$$u_x = u - z\varphi = u - z \frac{\partial w_b}{\partial x}, \quad u_y = v = 0, \quad u_z = w = w_b + w_s. \quad (3.308)$$

şeklinde ifade edilebilir. Poisson etkileri düşünüldüğünde u_y ve u_z bileşenleri sırasıyla $-vy \partial u / \partial x$ ve $-vz \partial u / \partial x$ ilave edilerek yapılandırılmalıydı ancak hatırlanacak olursa eksenel yönde Poisson etkisinin ihmal edileceği daha önceden belirtilmişti. Yine hatırlanacak olursa, nanoçubukların eksenel titreşimi için Love-Bishop çubuk teorisi düşünülerek geliştirilen yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonunda yanal deplasmanların getirdiği yüksek mertebeden terimler nedeniyle iki düğümlü elemanın iş göremediği, bunun yerine üç düğümlü bir elemanın kullanılması gerektiği ifade edilmiş, formülasyon türetim süreci bunun üzerinden yapılandırılmıştı. Tezde üç düğümlü bir eğilme sonlu elemanı oldukça kapsamlı işlem süreçlerini barındırdığından Timoshenko teorisi için formüle edilmemiştir ve nanokirişlerin sonlu eleman analizi iki düğümlü elemanla açıklanmıştır. Buna ek olarak, eksenel titreşimde basit yani Poisson etkisini ihmal eden çubuk teorisinin de iki düğümlü elemanla yürütülebileceği anlaşıldığından sonuç itibarıyla nanoçerçevelerin eğilme üyesi için genel manada Poisson etkisi ihmal edilerek matris deplasman formülasyonu geliştirilecektir. Artık buradan itibaren çerçeve üyesinin mekanik analize esas yani malzeme özelliklerini ilgilendiren matrisleri elde edilebilir. Timoshenko kiriş teorisi için, yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonunda termo-elastik ortamın ihmal edilmesinden geriye kalan matrislere göre işlem yapılmalıdır. Nanoyapı üyesinin yerel takımı için rijitlik, basit kütle ve yüksek mertebeden kütle matrisleri sırasıyla şöyle açıklanabilir:

$$\sum k = k_b \quad (3.309)$$

$$\sum m^0 = m_{A,c} + m_{A,nl} + m_{I,c} + m_{I,nl} + m_{A,R,c} + m_{A,R,nl} \quad (3.310)$$

$$\sum m^1 = m_{I,R,c} + m_{I,R,nl} + m_{I,R,HO-nl} \quad (3.311)$$

İlgili matrisler incelendiğinde bu matrislerin, Şekil 3.7, Denklemler (3.275), (3.278) ve (3.279) göz önüne alınarak eksenel titreşimi ilgilendiren bileşenlerle ilave edilmesi sonucunda

$$k = \begin{bmatrix} k_{11}^a & 0 & 0 & k_{12}^a & 0 & 0 \\ 0 & k_{11}^b & k_{12}^b & 0 & k_{13}^b & k_{14}^b \\ 0 & k_{21}^b & k_{22}^b & 0 & k_{23}^b & k_{24}^b \\ k_{21}^a & 0 & 0 & k_{22}^a & 0 & 0 \\ 0 & k_{31}^b & k_{32}^b & 0 & k_{33}^b & k_{34}^b \\ 0 & k_{41}^b & k_{42}^b & 0 & k_{43}^b & k_{44}^b \end{bmatrix} \quad (3.312)$$

$$m^0 = \begin{bmatrix} m_{11}^a & 0 & 0 & m_{12}^a & 0 & 0 \\ 0 & m_{11}^{b,0} & m_{12}^{b,0} & 0 & m_{13}^{b,0} & m_{14}^{b,0} \\ 0 & m_{21}^{b,0} & m_{22}^{b,0} & 0 & m_{23}^{b,0} & m_{24}^{b,0} \\ m_{21}^a & 0 & 0 & m_{22}^a & 0 & 0 \\ 0 & m_{31}^{b,0} & m_{32}^{b,0} & 0 & m_{33}^{b,0} & m_{34}^{b,0} \\ 0 & m_{41}^{b,0} & m_{42}^{b,0} & 0 & m_{43}^{b,0} & m_{44}^{b,0} \end{bmatrix} \quad (3.313)$$

$$m^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{11}^{b,1} & m_{12}^{b,1} & 0 & m_{13}^{b,1} & m_{14}^{b,1} \\ 0 & m_{21}^{b,1} & m_{22}^{b,1} & 0 & m_{23}^{b,1} & m_{24}^{b,1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{31}^{b,1} & m_{32}^{b,1} & 0 & m_{33}^{b,1} & m_{34}^{b,1} \\ 0 & m_{41}^{b,1} & m_{42}^{b,1} & 0 & m_{43}^{b,1} & m_{44}^{b,1} \end{bmatrix} \quad (3.314)$$

ile temsil edileceği açıklanmaktadır (Numanoğlu ve Civalek 2024). Burada matris girdilerinde a ve b üst indisleri, sırasıyla basit eksenel ve kayma deformasyonlu eğilme titreşimleri temel alınarak girdi belirleneceğini belirtmektedir. Yerel takımın rijitlik matrisinin bileşenleri Denklemler (3.210) ve (3.275) kaynak alınarak oluşturulmaktadır. Yerel takımın basit kütle matrisinde eğilme bileşenleri Denklemler (3.223)-(3.228) ile hesaplanan matrislerin toplamından ve buna ek olarak eksenel bileşenler Denklemler (3.278) ve (3.279)'un toplamından gelmektedir. Son olarak, kayma deformasyonu nedeniyle ortaya çıkan ve Denklemler (3.238)-(3.240)'ın toplamıyla hesaplanan bileşenler yerel takımın yüksek mertebeden kütle matrisinin sadece eğilme bileşenlerini tayin eder, basit çubuk teorisi bu hususta bir bileşene sahip değildir çünkü eğilme serbestliğine atıf yapan bileşenler Denklem (3.243) uyarınca doğal frekansın dördüncü kuvveti ile dolaylı olarak özdeğer problemine girdiklerinden ve basit çubuk teorisinde frekansın ikiden yüksek mertebeli terimi bulunmadığından yüksek mertebeden kütle matrisinde eksenel serbestlik girdisi yer almaz. O halde, Denklemler (3.297)-(3.299)'a benzer biçimde nanoçerçeve üyesinin yerel takım matrisleri genel takıma

$$K = T^T k T \quad (3.315)$$

$$M^0 = T^T m^0 T \quad (3.316)$$

$$M^1 = T^T m^1 T \quad (3.317)$$

ile dönüştürülür. Böylece, Denklemler (3.307) ve (3.312)-(3.314), Denklemler (3.315)-(3.317)'de kullanılarak genel takımın mekanik analize esas matrislerine ulaşılabilir. İlk olarak rijitlik girdileri yazılmaktadır (Numanoğlu ve Civalek 2019b, 2024):

$$\begin{aligned}
K_{11} = K_{44} &= \frac{A_0}{l_e} \cos^2 \alpha + \frac{12B}{l_e^3} \sin^2 \alpha, \quad K_{12} = K_{45} = \left(\frac{A_0}{l_e} - \frac{12B}{l_e^3} \right) \cos \alpha \sin \alpha, \\
K_{13} = K_{16} &= -\frac{6B}{l_e^2} \sin \alpha, \quad K_{14} = -\frac{A_0}{l_e} \cos^2 \alpha - \frac{12B}{l_e^3} \sin^2 \alpha, \\
K_{15} = K_{24} &= \left(-\frac{A_0}{l_e} + \frac{12B}{l_e^3} \right) \cos \alpha \sin \alpha, \quad K_{22} = K_{55} = \frac{A_0}{l_e} \sin^2 \alpha + \frac{12B}{l_e^3} \cos^2 \alpha, \\
K_{23} = K_{26} &= \frac{6B}{l_e^2} \cos \alpha, \quad K_{25} = -\frac{A_0}{l_e} \sin^2 \alpha - \frac{12B}{l_e^3} \cos^2 \alpha, \quad K_{33} = K_{66} = \frac{4B}{l_e}, \\
K_{34} = K_{46} &= \frac{6B}{l_e^2} \sin \alpha, \quad K_{35} = K_{56} = -\frac{6B}{l_e^2} \cos \alpha, \quad K_{36} = \frac{2B}{l_e}. \quad (3.318)
\end{aligned}$$

Ardından basit kütle matrisinin girdileri şöyle elde edilebilir:

$$\begin{aligned}
M_{11}^0 = M_{44}^0 &= \left(\frac{I_0 l_e}{3} + \frac{(e_0 a)^2 I_0}{l_e} \right) \cos^2 \alpha + \left[\frac{13 I_0 l_e}{35} + \frac{6}{5} \left(\frac{(e_0 a)^2 I_0}{l_e} + \frac{I_2}{l_e} + \frac{I_0 B}{k S l_e} \right) \right. \\
&\quad \left. + 12 \left(\frac{(e_0 a)^2 I_2}{l_e^3} + \frac{(e_0 a)^2 I_0 B}{k S l_e^3} \right) \right] \sin^2 \alpha, \\
M_{12}^0 = M_{45}^0 &= \left[-\frac{4 I_0 l_e}{105} - \frac{(e_0 a)^2 I_0}{5 L} - \frac{6}{5} \left(\frac{I_2}{l_e} + \frac{I_0 B}{k S l_e} \right) - 12 \left(\frac{(e_0 a)^2 I_2}{l_e^3} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{(e_0 a)^2 I_0 B}{k S l_e^3} \right) \right] \cos \alpha \sin \alpha, \\
M_{13}^0 &= \left[-\frac{11 I_0 l_e^2}{210} - \frac{1}{10} \left((e_0 a)^2 I_0 + I_2 + \frac{I_0 B}{k S} \right) - 6 \left(\frac{(e_0 a)^2 I_2}{l_e^2} + \frac{(e_0 a)^2 I_0 B}{k S l_e^2} \right) \right] \sin \alpha, \\
M_{14}^0 &= \left(\frac{I_0 l_e}{6} - \frac{(e_0 a)^2 I_0}{l_e} \right) \cos^2 \alpha + \left[\frac{9 I_0 l_e}{35} - \frac{6}{5} \left(\frac{(e_0 a)^2 I_0}{l_e} + \frac{I_2}{l_e} + \frac{I_0 B}{k S l_e} \right) \right. \\
&\quad \left. - 12 \left(\frac{(e_0 a)^2 I_2}{l_e^3} + \frac{(e_0 a)^2 I_0 B}{k S l_e^3} \right) \right] \sin^2 \alpha, \\
M_{15}^0 = M_{24}^0 &= \left[-\frac{19 I_0 l_e}{54} + \frac{(e_0 a)^2 I_0}{5 l_e} + \frac{6}{5} \left(\frac{\rho I}{l_e} + \frac{I_0 B}{k S l_e} \right) + 12 \left(\frac{(e_0 a)^2 I_2}{l_e^3} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{(e_0 a)^2 I_0 B}{k S l_e^3} \right) \right] \cos \alpha \sin \alpha,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{16}^0 &= \left[\frac{13I_0 l_e^2}{420} - \frac{1}{10} \left((e_0 a)^2 I_0 + I_2 + \frac{I_0 B}{kS} \right) - 6 \left(\frac{(e_0 a)^2 I_2}{l_e^2} + \frac{(e_0 a)^2 I_0 B}{kS l_e^2} \right) \right] \sin \alpha, \\
M_{22}^0 &= M_{55}^0 = \left(\frac{I_0 l_e}{3} + \frac{(e_0 a)^2 I_0}{l_e} \right) \sin^2 \alpha + \left[\frac{13I_0 l_e}{35} + \frac{6}{5} \left(\frac{(e_0 a)^2 I_0}{l_e} + \frac{I_2}{l_e} + \frac{I_0 B}{kS l_e} \right) \right. \\
&\quad \left. + 12 \left(\frac{(e_0 a)^2 I_2}{l_e^3} + \frac{(e_0 a)^2 I_0 B}{kS l_e^3} \right) \right] \cos^2 \alpha, \\
M_{23}^0 &= \left[\frac{11I_0 l_e^2}{210} + \frac{1}{10} \left((e_0 a)^2 I_0 + I_2 + \frac{I_0 B}{kS} \right) + 6 \left(\frac{(e_0 a)^2 I_2}{l_e^2} + \frac{(e_0 a)^2 I_0 B}{kS l_e^2} \right) \right] \cos \alpha, \\
M_{25}^0 &= \left(\frac{I_0 l_e}{6} - \frac{(e_0 a)^2 I_0}{l_e} \right) \sin^2 \alpha + \left[\frac{9I_0 l_e}{35} - \frac{6}{5} \left(\frac{(e_0 a)^2 I_0}{l_e} + \frac{I_2}{l_e} + \frac{I_0 B}{kS l_e} \right) \right. \\
&\quad \left. - 12 \left(\frac{(e_0 a)^2 I_2}{l_e^3} + \frac{(e_0 a)^2 I_0 B}{kS l_e^3} \right) \right] \cos^2 \alpha, \\
M_{26}^0 &= \left[-\frac{13I_0 l_e^2}{210} + \frac{1}{10} \left((e_0 a)^2 I_0 + I_2 + \frac{I_0 B}{kS} \right) + 6 \left(\frac{(e_0 a)^2 I_2}{l_e^2} + \frac{(e_0 a)^2 I_0 B}{kS l_e^2} \right) \right] \cos \alpha, \\
M_{33}^0 &= M_{66}^0 = \frac{I_0 l_e^3}{105} + \frac{2}{15} \left((e_0 a)^2 I_0 l_e + I_2 l_e + \frac{I_0 B l_e}{kS} \right) + 4 \left(\frac{(e_0 a)^2 I_2}{l_e} + \frac{(e_0 a)^2 I_0 B}{kS l_e} \right), \\
M_{34}^0 &= \left[-\frac{13I_0 l_e^2}{210} + \frac{1}{10} \left((e_0 a)^2 I_0 + I_2 + \frac{I_0 EI}{kS} \right) + 6 \left(\frac{(e_0 a)^2 I_2}{l_e^2} + \frac{(e_0 a)^2 I_0 EI}{kS l_e^2} \right) \right] \sin \alpha, \\
M_{35}^0 &= \left[\frac{13I_0 l_e^2}{420} - \frac{1}{10} \left((e_0 a)^2 I_0 + I_2 + \frac{I_0 B}{kS} \right) - 6 \left(\frac{(e_0 a)^2 I_2}{l_e^2} + \frac{(e_0 a)^2 I_0 B}{kS l_e^2} \right) \right] \cos \alpha, \\
M_{36}^0 &= -\frac{I_0 l_e^3}{140} - \frac{1}{30} \left((e_0 a)^2 I_0 l_e + I_2 l_e + \frac{I_0 B l_e}{kS} \right) + 2 \left(\frac{(e_0 a)^2 I_2}{l_e} + \frac{(e_0 a)^2 I_0 B}{kS l_e} \right), \\
M_{46}^0 &= \left[\frac{11I_0 l_e^2}{210} + \frac{1}{10} \left((e_0 a)^2 I_0 + I_2 + \frac{I_0 B}{kS} \right) + 6 \left(\frac{(e_0 a)^2 I_2}{l_e^2} + \frac{(e_0 a)^2 I_0 B}{kS l_e^2} \right) \right] \sin \alpha, \\
M_{56}^0 &= \left[-\frac{11I_0 l_e^2}{210} - \frac{1}{10} \left((e_0 a)^2 I_0 + I_2 + \frac{I_0 B}{kS} \right) - 6 \left(\frac{(e_0 a)^2 I_2}{l_e^2} + \frac{(e_0 a)^2 I_0 B}{kS l_e^2} \right) \right] \cos \alpha.
\end{aligned} \tag{3.319}$$

Ayrıca, yüksek mertebeden kütle matrisinin girdilerine de şu şekilde ulaşılmış olur:

$$\begin{aligned}
M_{11}^1 &= M_{44}^1 = \left(\frac{13I_0I_2l_e}{35kS} + \frac{12(e_0a)^2 I_0I_2}{5kSL} + \frac{12(e_0a)^4 I_0I_2}{kSl_e^3} \right) \sin^2 \alpha, \\
M_{12}^1 &= M_{45}^1 = \left(-\frac{13I_0I_2l_e}{35kS} - \frac{12(e_0a)^2 I_0I_2}{5kSL} - \frac{12(e_0a)^4 I_0I_2}{kSl_e^3} \right) \cos \alpha \sin \alpha, \\
M_{13}^1 &= \left(-\frac{11I_0I_2l_e^2}{210kS} - \frac{(e_0a)^2 I_0I_2}{5kS} - \frac{6(e_0a)^4 I_0I_2}{kSl_e^2} \right) \sin \alpha, \\
M_{14}^1 &= \left(\frac{9I_0I_2l_e}{70kS} - \frac{12(e_0a)^2 I_0I_2}{5kSl_e} - \frac{12(e_0a)^4 I_0I_2}{kSl_e^3} \right) \sin^2 \alpha, \\
M_{15}^1 &= M_{24}^1 = \left(-\frac{9I_0I_2l_e}{70kS} + \frac{12(e_0a)^2 I_0I_2}{5kSl_e} + \frac{12(e_0a)^4 I_0I_2}{kSl_e^3} \right) \cos \alpha \sin \alpha, \\
M_{16}^1 &= \left(\frac{13I_0I_2l_e^2}{420kS} - \frac{(e_0a)^2 I_0I_2}{5kS} - \frac{6(e_0a)^4 I_0I_2}{kSl_e^2} \right) \sin \alpha, \\
M_{22}^1 &= M_{55}^1 = \left(\frac{13I_0I_2l_e}{35kS} + \frac{12(e_0a)^2 I_0I_2}{5kSl_e} + \frac{12(e_0a)^4 I_0I_2}{kSl_e^3} \right) \cos^2 \alpha, \\
M_{23}^1 &= \left(\frac{11I_0I_2l_e^2}{210kS} + \frac{(e_0a)^2 I_0I_2}{5kS} + \frac{6(e_0a)^4 I_0I_2}{kSl_e^2} \right) \cos \alpha, \\
M_{25}^1 &= \left(\frac{9I_0I_2l_e}{70kS} - \frac{12(e_0a)^2 I_0I_2}{5kSl_e} - \frac{12(e_0a)^4 I_0I_2}{kSl_e^3} \right) \cos^2 \alpha, \\
M_{26}^1 &= \left(-\frac{13I_0I_2l_e^2}{420kS} + \frac{(e_0a)^2 I_0I_2}{5kS} + \frac{6(e_0a)^4 I_0I_2}{kSl_e^2} \right) \cos \alpha, \\
M_{33}^1 &= M_{66}^1 = \frac{I_0I_2L^3}{105kS} + \frac{4(e_0a)^2 I_0I_2L}{5kS} + \frac{4(e_0a)^4 I_0I_2}{kSL}, \\
M_{34}^1 &= \left(-\frac{13I_0I_2l_e^2}{420kS} + \frac{(e_0a)^2 I_0I_2}{5kS} + \frac{6(e_0a)^4 I_0I_2}{kSl_e^2} \right) \sin \alpha, \\
M_{35}^1 &= \left(\frac{13I_0I_2l_e^2}{420kS} - \frac{(e_0a)^2 I_0I_2}{5kS} - \frac{6(e_0a)^4 I_0I_2}{kSl_e^2} \right) \cos \alpha, \\
M_{36}^1 &= -\frac{I_0I_2l_e^3}{140kS} - \frac{(e_0a)^2 I_0I_2l_e}{15kS} + \frac{2(e_0a)^4 I_0I_2}{kSl_e}, \\
M_{46}^1 &= \left(\frac{11I_0I_2l_e^2}{210kS} + \frac{(e_0a)^2 I_0I_2}{5kS} + \frac{6(e_0a)^4 I_0I_2}{kSl_e^2} \right) \sin \alpha, \\
M_{56}^1 &= \left(-\frac{11I_0I_2l_e^2}{210kS} - \frac{(e_0a)^2 I_0I_2}{5kS} - \frac{6(e_0a)^4 I_0I_2}{kSl_e^2} \right) \cos \alpha. \tag{3.320}
\end{aligned}$$

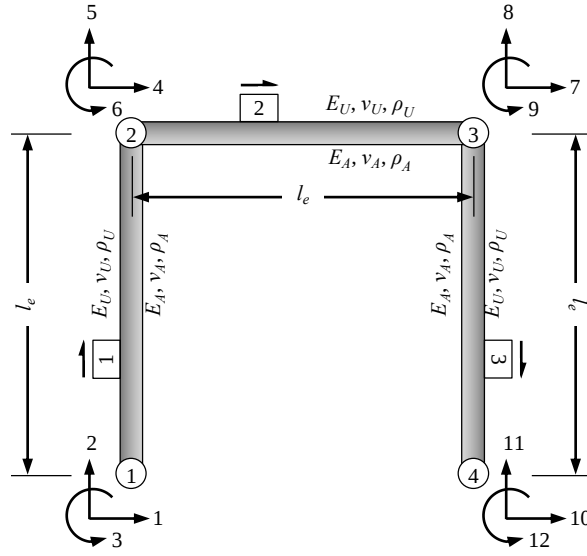
Her bir üye için genel takıma göre rijitlik, basit kütle ve yüksek mertebeden kütle matrisleri hesaplandıktan sonra nanoçerçevenin genel takımındaki serbestlikleri doğrultusunda hesaplanan küresel matrisleri mesnetlenme koşulları altında indirgenmeli ve aşağıdaki özdeğer denklemi çözülmelidir:

$$\det \left[\left(\sum_{e=1}^n [K]_e \right)^* - \omega_i^2 \left(\sum_{e=1}^n [M^0]_e \right)^* + \omega_i^4 \left(\sum_{e=1}^n [M^1]_e \right)^* \right] = 0 \quad (3.321)$$

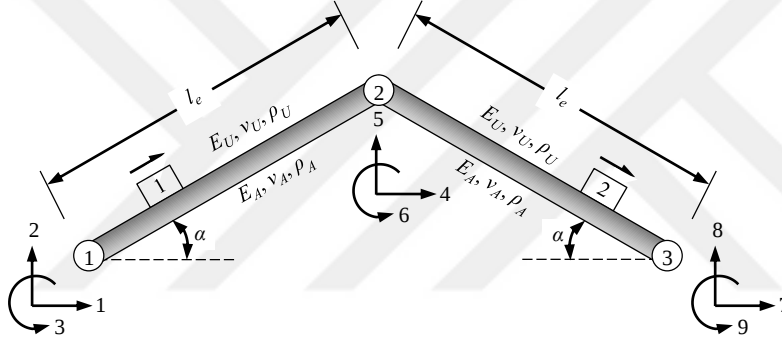
burada çözüm sonucunda doğal frekanslar elde edilmiş olur. Çerçeve yapılar için geometrik sınır şartlar eksenel çubuk ve kirişte ifade edilenlerin birleşimi olarak ilgili eksenel, enine ve dönme serbestlikleridir.

Bunların haricinde, her nasıl ki nanoçubuk ve nanokiriş gibi sürekli sistemlerde ne kadar çok sonlu eleman kullanılırsa o kadar çok sayıda modun doğal frekansına ulaşıyorsa, aynı şekilde nanoçerçeve üyeleri de birer sonlu elemanla değil birden fazla sonlu elemanlara bölünerek matris deplasman analizi yapılırsa, nanoçerçevenin çok yüksek modlarının da yerel olmayan doğal frekanslarının hesaplanabileceği olduğu not edilmelidir.

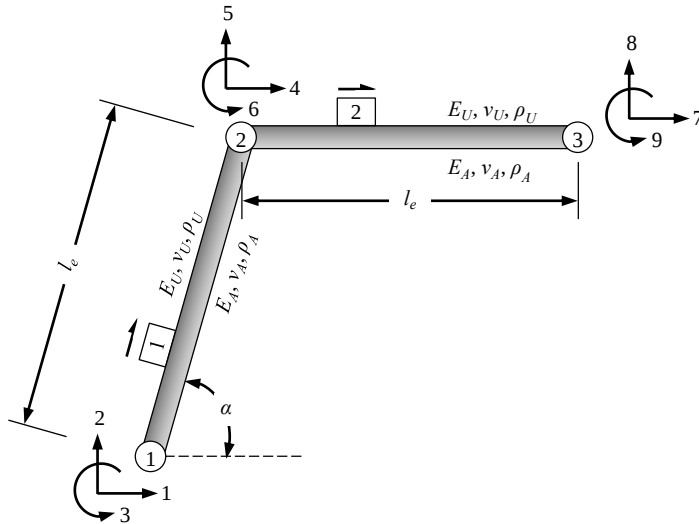
Son olarak, sayısal uygulamaların ilgili kesitinde göz önüne alınan nanoçerçeve yapıları ve bunların üye başına tek sonlu elemanlı modelleri Şekil 3.8’de sunulmaktadır. Sayısal uygulamalarda üyeler fazla sayıda sonlu elemana bölünecekse, her elemanın eşit sayıda bölüneceği kabul edilecektir. Öte yandan, fonksiyonel derecelendirilme konfigürasyonu, malzeme alt yüzeyinin yapının içine ve üst yüzeyinin yapının dışına bakacak şekilde ve her bir üyenin dikdörtgen kesit yüksekliği (h), genel takım düzlemi içinde kalacak şekilde varsayılacaktır. Bunlardan Şekil 3.8(a)’da resmedilen Π -tip nanoçerçeve uzunlukları eşit iki düşey ve bir yatay üyeden oluşan portal çerçeveyi, Şekil 3.8(b)’de resmedilen Λ -tip nanoçerçeve uzunlukları ve eğim açıları eşit iki üyeli bent-kiriş yapısını ve Şekil 3.8(c)’de resmedilen Γ -tip nanoçerçeve eşit uzunluklu biri eğimli ve diğeri yatay elemanlı nanoçerçeveyi tanıtmaktadır. Π -Tip nanoçerçevenin düşey üyelerinin, Λ -tip nanoçerçevenin iki üyesinin ve Γ -tip nanoçerçevenin sadece eğimli üyesinin ayaklarının ankastre mesnetli olacağı ve sadece Γ -tip nanoçerçevenin yatay üyesinin birleşimsiz ucunun (sağ ucunun) şu yedi farklı mesnetlenmeye sahip olacağı varsayılacaktır: $\Gamma 1$: Boş (Mesnetsiz), $\Gamma 2$: Sabit, $\Gamma 3$: Ankastre, $\Gamma 4$: Düşeyde kayıcı, $\Gamma 5$: Yatayda kayıcı, $\Gamma 6$: Düşeyde kılavuz, $\Gamma 7$: Yatayda kılavuz. Kayıcının kılavuzdan farkına göre, kayıcılar dönme hareketi yaparken yani yarı sabit mesnet gibiyken kılavuzlar dönme hareketi yapmazlar yani yarı ankastre mesnet gibidirler.



(a)



(b)



(c)

Şekil 3.8. Sayısal uygulamalar için kayma deformasyonlu fonksiyonel derecelendirilmiş nanoçerçeve yapıları ve sonlu eleman modelleri; **a)** Π -Tip; **b)** Λ -Tip; **c)** Γ -Tip



4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Kayma deformasyonuna sahip fonksiyonel derecelendirilmiş nanoyapıların kiriş, eksenel çubuk ve çerçeve modellerinin serbest titreşim analizleri için yerel olmayan elastisite teorisi çerçevesinde geliştirilen analitik çözüm ve sonlu eleman formülasyonu kullanılarak elde edilen söz konusu analiz sonuçları ve bunların analizlere etki eden parametrelere göre tartışmaları bu bölümde sunulmuştur. Sonuçların elde edilmesi için analitik yöntem ve yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu MATLAB'da programlanmıştır. Programların koşturulması neticesinde ilgili nanoyapının boyutsuz frekans parametreleri hesaplanmıştır.

4.1. Analizlerde Kullanılan Parametreler

Sayısal hesaplamalarda göz önüne alınan temel denklemler (boyutsuzlaştırma parametreleri) aşağıda verilmektedir:

$$\begin{aligned} (\bar{\omega}_b)_i &= (\omega_b)_i L^2 \sqrt{\frac{\rho_U A}{E_U I}}, \quad (\bar{\omega}_r)_i = (\omega_r)_i L \sqrt{\frac{\rho_U}{E_U}}, \\ (\bar{\omega}_f)_i &= (\omega_f)_i L_f^2 \sqrt{\frac{\rho_U A}{E_U I}}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

burada titreşim mod numarası i olmak üzere; ω_b , ω_r ve ω_f ifadeleri sırasıyla kiriş, eksenel çubuk ve çerçeve yapısının için serbest titreşim doğal frekanslarını ve $\bar{\omega}_b$, $\bar{\omega}_r$ ve $\bar{\omega}_f$ bunların boyutsuz formlarını ifade eder. L nanokiriş ve eksenel nanoçubuk uzunluğu ve L_f nanoçerçeve uzunluk parametresidir. Ayrıca, fonksiyonel derecelendirilmiş atomik yapının diğer malzeme özellikleri aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$\eta = \frac{e_0 a}{L}, \quad \{G_A, G_U\} = \frac{1}{2 + 2\nu} \{E_A, E_U\}. \quad (4.2)$$

burada η boyutsuz atomik parametreyi tanımlar. Sayısal hesaplamalarda, aksi belirtilmediği sürece, göz önüne alınan malzeme, alt yüzeyi alüminyum (Al) ve üst yüzeyi alümina seramik (Al_2O_3) olarak seçilmiştir. Buna göre malzeme özellikleri şu şekildedir: Alt yüzey malzemesini “A” ve üst yüzey malzemesini “U” alt indisleri temsil etmek suretiyle, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemenin elastisite modülleri $E_A = 70$ GPa ve $E_U = 380$ GPa, Poisson oranı sabit ve $\nu = 0.3$, kayma modülleri $G_A = E_A/2(1 + \nu) = 26.9231$ GPa ve $G_U = E_U/2(1 + \nu) = 146.1538$ GPa, birim hacim ağırlıkları $\rho_A = 2702$ kg/m³ ve $\rho_U = 3960$ kg/m³ (Aria ve Friswell 2019), termal genleşme katsayıları $\alpha_A = 2.31 \times 10^{-5}$ K⁻¹ (Zenkour ve Abouelregal 2016) ve $\alpha_U = 6.8269 \times 10^{-6}$ K⁻¹ (Ebrahimi ve Salari 2015a) olarak verilmektedir. Böylece güç indeksi $p = 0$ alındığında nanoyapı tamamen alümina seramik ve $p = \infty$ alındığında nanoyapı tamamen alüminyum malzemesine dönüşmektedir. Ayrıca, sayısal sonuçlarda homojen nanoyapı durumu $p = 0$ olarak kabul edilmiştir.

Ek olarak, nanoçubuk ve nanokiriş yapısının kapsamında yer aldığı elastik ortam aşağıdaki şekilde formüle edilmektedir:

$$K_M = \frac{k_M L^2}{E_U A}, K_W = \frac{k_W L^4}{E_U I}, K_P = \frac{k_P L^2}{E_U I}. \quad (4.3)$$

burada eksenel nanoçubuklar için K_M boyutsuz eksenel elastik ortam rijitliğini belirtirken nanokirişler için K_W boyutsuz Winkler elastik zemin rijitliğini ve K_P boyutsuz Pasternak elastik zemin rijitliğini tanımlar. I eğilme eksenine göre atalet momentini ve A eleman enkesit alanını ifade eder.

Öte yandan, nanoçubuk ve nanokirişlerin titreşim analizlerinde yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonunun doğruluğuna dair tartışmalarda kullanılacak olan sapma (hata) yüzdeleri,

$$D_{\omega} = \frac{\overline{\omega_{\text{NLFEM}}} - \overline{\omega_{\text{Analitik}}}}{\overline{\omega_{\text{Analitik}}}} \times 100\% \quad (4.4)$$

denklemleri ile hesaplanmıştır.

Aksi belirtilmediği sürece, kiriş geometrik boyutları, uzunluk: $L = 20$ nm, dikdörtgen kesit yüksekliği $h = 1$ nm ve kalınlığı $b = 2$ nm olarak alınmıştır. Dolayısıyla kesit alan $A = bh = 2$ nm² ve atalet momenti $I = bh^3/12 = 0.1667$ nm⁴ şeklinde hesaplanmaktadır. Ek olarak dikdörtgen kesit için kayma düzeltme katsayısı $k = 5/6$ olarak kullanılmıştır. Yerel olmayan boyutsuz parametre $\eta = 0 - 0.5$ aralığındaki değerler olarak alınmış olup, sonuçların tartışılmasını mümkün olduğunca sağlıklı bir şekilde gerçekleştirebilmek adına boyutsuz yerel olmayan parametrenin büyüklüğü için tez kapsamında bir standart da tanımlanmıştır. Buna göre, $\eta = 0$ (veya $e_0 a = 0$ nm) durumunun klasik elastisite teorisini ifade ettiği de hatırlatılarak, $0 < \eta \leq 0.1$ aralığı “çok düşük”, $0.1 < \eta \leq 0.2$ aralığı “düşük”, $0.2 < \eta \leq 0.3$ aralığı “orta”, $0.3 < \eta \leq 0.4$ aralığı “yüksek” ve $0.4 < \eta \leq 0.5$ aralığı “çok yüksek” büyüklükte boyutsuz yerel olmayan parametre olarak adlandırılmıştır. Ayrıca, çizelge ve şekil başlıklarında nanoyapının mekanik kinematığı ve malzeme homojenitesi açısından aynı ifadeleri tekrarlamamak için nanoyapı kayma deformasyonlu homojen ise “KDH” ve kayma deformasyonlu fonksiyonel derecelendirilmiş ise “KDFD” kısaltmaları kullanılmıştır.

Nanokirişlerin sınır şartları için, S: Basit mesnetli, C: Ankastre mesnetli, F: Serbest ve G: Kılavuz mesnetli (Dönmeyen düşeyde kayıcı) uç tiplerini sembolize ederken eksenel nanoçubuklar için, C: Tutulu ve F: Serbest uç tiplerini tanımlar.

4.2. Sayısal Sonuçlar ve Tartışmalar

İlk olarak, kayma deformasyonlu fonksiyonel derecelendirilmiş nanokirişlerin serbest titreşim analiz sonuçları Çizelgeler 4.1-4.21 ve Şekiller 4.1-4.13 vasıtasıyla sunulmakta ve bunların tartışmaları yapılmaktadır.

Çizelge 4.1. İki farklı sınır şartlı KDH nanokirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerlerine göre boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması

Sınır Şart	e_0a (nm)	Aria ve Friswell (2019)	Trabelssi vd. (2019)		Bu Tez
			DQM	MMS	
S-S	0	9.8679	9.8679	9.8590	9.8679
	0.5	9.6331	9.6331	9.6244	9.6331
	1	9.4143	9.4143	9.4058	9.4143
	1.5	9.2097	9.2097	9.2014	9.2097
	2	9.0180	9.0180	9.0098	9.0180
	2.5	8.8377	8.8377	8.8297	8.8377
	3	8.6678	8.6678	8.6600	8.6678
C-C	0	-	22.3578	22.3578	22.3686
	0.5	-	21.6995	21.6995	21.7092
	1	-	21.0946	21.0946	21.1034
	1.5	-	20.5364	20.5364	20.5444
	2	-	20.0193	20.0193	20.0266
	2.5	-	19.5385	19.5385	19.5453
	3	-	19.0901	19.0901	19.0963

Öncelikle, analitik hesaplamaları doğrulamak adına kayma deformasyonlu homojen nanokirişlerin yerel olmayan serbest titreşim boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması hakkında bir çalışma Çizelge 4.1’de sunulmaktadır. Buna göre, yerel olmayan parametrenin artışına karşılık iki ucu basit mesnetli (S-S) ve iki ucu ankastre mesnetli (C-C) nanokirişlerin temel mod boyutsuz frekans parametreleri tez kapsamında formüle edilen analitik yöntem ile hesaplanmış olup, Aria ve Friswell (2019) tarafından sonlu elemanlar yöntemi (FEM) ve Trabelssi vd. (2019) tarafından diferansiyel kuadratür yöntemi (DQM) ve çoklu ölçek yöntemi (MMS) kullanılarak elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmaktadır. Nanokiriş uzunluğu $L = 10$ nm ve kesit yüksekliği $h = 0.1$ nm olarak alınmıştır. Sonuçlar çizelge bütününde genel olarak uyumlu olmakla beraber S-S nanokirişleri için elde edilen sonuçlar Aria ve Friswell (2019) ve Trabelssi vd. (2019)’un DQM sonuçları ile birebir aynı iken atomik parametre arttıkça Trabelssi vd. (2019)’un MMS sonuçlarından bir miktar uzaklaşmaktadır. Ek olarak, C-C nanokirişleri için tezde elde edilen sonuçların karşılaştırılması hakkında da aynı çıkarım yapılabilir. Ancak sonuçların farklılıkları oldukça düşüktür. Neticede ilgili mukayesede göz önüne alınan çalışma bir yaklaşık yöntemle dayanmaktadır. Bu çizelge için yapılabilecek mekanik açıdan tartışmalar Çizelge 4.2’yi de kapsayacağından ilgili tartışmaların orada yapılması tercih edilmiştir. Netice olarak, analitik çözüm için formülasyonun ilk olarak homojen nanokirişler yönünden doğru kurulduğu ve hesapların güvenilir olduğu anlaşılmıştır.

Çizelge 4.2. Farklı sınır şartlı KDH nanokirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerlerine göre ilk üç mod boyutsuz frekansları

Sınır Şart	Mod	$\eta = 0$	$\eta = 0.05$	$\eta = 0.1$	$\eta = 0.15$	$\eta = 0.2$
S-S	1	9.8281	9.7091	9.3763	8.8904	8.3218
	2	38.8299	37.0448	32.8786	28.2576	24.1785
	3	85.6619	77.4891	62.33850	49.4685	40.1454
C-F	1	3.5153	3.5190	3.5302	3.5494	3.5773
	2	21.8674	21.5053	20.5025	19.0596	17.3973
	3	60.3413	57.0775	49.7560	42.0919	35.7172
C-S	1	15.3428	15.1249	14.5218	13.6571	12.6677
	2	49.0773	46.6106	40.9747	34.9036	29.6806
	3	100.3422	90.1415	71.7554	56.5819	45.7881
C-C	1	22.2568	21.9139	20.9710	19.6331	18.1220
	2	60.5026	57.19671	49.7762	41.9709	35.3954
	3	116.1726	103.6136	81.5929	63.9312	51.5995
S-G	1	2.4648	2.4572	2.4349	2.3991	2.3515
	2	21.9987	21.4123	19.8998	17.9639	16.0090
	3	60.1281	55.9674	47.2871	38.9106	32.2906
C-G	1	5.5860	5.5645	5.5014	5.4008	5.2685
	2	29.9119	29.0190	26.7533	23.9280	21.1530
	3	72.6349	67.2226	56.2119	45.8996	37.9286

Altı farklı sınır şartlı kayma deformasyonlu homojen nanokirişlerin ilk üç mod boyutsuz frekansları boyutsuz yerel olmayan parametrenin beş farklı değerine göre Çizelge 4.2’de listelenmektedir. Bu çizelgede olduğu gibi izleyen çizelgelerde de mekanik davranış çoğunlukla klasik elastisite ve çok düşük ve düşük boyutsuz yerel olmayan parametre durumları altında araştırılacaktır. Bu tezde mevzubahis her ne kadar fonksiyonel derecelendirilmiş nanokirişler de olsa, nanoyapının mekanik davranışını temelden anlayabilmek adına bu çizelgenin verilmesinde fayda görülmüştür. Sınır şartlar ele alınmadan önce, atomik parametrenin boyutsuz frekansları düşüren bir etmen olduğu, boyutsuz yerel olmayan parametre arttıkça bu düşüşün daha da fazla olduğu, bu parametrenin etkisinin yüksek modlarda yine daha fazla hesaplandığı bir ucu ankastre mesnetli diğer ucu serbest nanokirişlerin (C-F) temel modu hariç yani çizelgenin büyük bir çoğunluğunda gözlemlenir. C-F nanokirişi için bu durum bilimsel literatürde yaygın bilinen bir paradoksu işaret eder. Paradoksu aşmak için çeşitli yaklaşımlar literatürde yerini almıştır ve bu durum Numanoğlu (2019) tarafından yazılan ve farklı eğilme kuramlarına dayanan homojen nanokirişlerin dinamiği hakkında sonuçları inceleyen yüksek lisans tez çalışmasında da açıklanmıştır. Dahası, bahsi edilen tez çalışmasında geliştirilen sonlu eleman çözümü sonuçlarının paradoksu çözen bir yöntemin sonuçlarıyla büyük uyuma sahip olduğu gözlemlenmiştir. Tabi bu durumun incelenmesi şu anki tartışmanın konusu olmayıp yeri geldiğinde kısaca ele alınacaktır. Sonuç olarak boyutsuz atomik parametrenin frekansları düşüren bir etmen olması, yerel olmayan elastisitenin nanoyapının mekanik zorlara karşı tepki gücünü azaltan bir mevcudiyet olduğunu gösterir ve böylece nanomekanik biliminde boyut etkisinin mutlaka düşünülmesi gerektiği anlaşılr.

Ayrıca sınır şartlar hakkında bir inceleme yapılacak olursa, ankastre mesnet en rijit uç bağlantı türü olduğundan C-C nanokirişlerinin boyutsuz frekansları en yüksek olarak hesaplanmaktadır. Dolayısı ile bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli nanokirişin (C-S) boyutsuz frekans parametreleri bir ara durum olarak göze çarpmaktadır. Ayrıca, basit mesnet kılavuz mesnetten daha rijit olduğundan iki ucu basit mesnetli nanokirişin frekansları kılavuz mesnetli kirişlerden daha yüksek olarak hesaplanmaktadır. Buna benzer nedenle bir ucu ankastre diğer ucu kılavuz mesnetli nanokirişin (C-G) boyutsuz frekansları bir ucu basit diğer ucu kılavuz mesnetli nanokirişlerden (S-G) daha fazla olarak hesaplanmaktadır. Son olarak, bu çizelgeden ulaşılabilecek başka bir önemli sonucun atomik parametrenin daha rijit sistemlerde daha etkin olduğudur.

Çizelge 4.3. İki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin farklı yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre farklı kesit eksenleri göz önüne alınarak hesaplanan boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması

$(e_0a)^2$ (nm ²)	Eksen	Mod	$p = 0.1$		$p = 1$		$p = 10$	
			Eltaher vd. (2014b)	Bu Tez	Eltaher vd. (2014b)	Bu Tez	Eltaher vd. (2014b)	Bu Tez
0	GE	1	11.7680	11.7680	15.9014	15.9014	17.6845	17.6845
		2	44.8369	44.8369	60.8179	60.8179	67.8750	67.8751
		3	94.1060	94.1060	128.2739	128.2739	143.8072	143.8072
	TE	1	11.4468	11.4468	14.5787	14.5787	17.5542	17.5542
		2	43.6782	43.6782	56.0022	56.0022	67.4009	67.4009
		3	91.8552	91.8553	118.8006	118.8006	142.8763	142.8764
4	GE	1	9.9643	9.9643	13.4643	13.4643	14.9741	14.9741
		2	27.9189	27.9189	37.8699	37.8699	42.2642	42.2642
		3	44.1028	44.1028	60.1155	60.1155	67.3952	67.3952
	TE	1	9.6924	9.6924	12.3443	12.3443	14.8637	14.8637
		2	27.1974	27.1974	34.8713	34.8713	41.9690	41.9690
		3	43.0479	43.0480	55.6759	55.6759	66.9590	66.9590

Çizelge 4.4. İki ucu ankastre mesnetli KDFD nanokirişlerin farklı yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre farklı kesit eksenleri göz önüne alınarak hesaplanan boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması

$(e_0a)^2$ (nm ²)	Eksen	Mod	$p = 0.1$		$p = 1$		$p = 10$	
			Eltaher vd. (2014b)	Bu Tez	Eltaher vd. (2014b)	Bu Tez	Eltaher vd. (2014b)	Bu Tez
0	GE	1	25.3233	26.5733	34.3946	35.9182	38.4204	39.9570
		2	64.6011	69.4364	88.2648	94.2442	99.1291	105.2386
		3	116.2792	126.8513	159.7296	173.0111	180.2945	194.0581
	TE	1	24.6965	25.8514	31.7561	32.9425	38.1596	39.6637
		2	63.1663	67.6621	82.1099	86.8503	98.5206	104.5106
		3	113.9596	123.8620	149.6266	160.3731	179.2979	192.8161
4	GE	1	20.7676	21.3738	28.1890	28.9280	31.4736	32.2194
		2	38.5758	39.6062	52.6183	53.8913	59.0173	60.3186
		3	53.3385	54.4295	73.1033	74.4698	82.3624	83.7780
	TE	1	20.2439	20.8035	25.9957	26.5704	31.2571	31.9872
		2	37.6759	38.6313	48.8033	49.8066	58.6416	59.9169
		3	52.1953	53.2113	68.1948	69.2869	81.8805	83.2697

Kayma deformasyonlu fonksiyonel derecelendirilmiş nanokirişlerin farklı atomik parametre ve fonksiyonel derecelendirilme güç indeksi (izleyen tartışmalarda sadece güç indeksi olarak anılacaktır) değerlerine göre ilk üç mod boyutsuz frekanslarının Eltaher vd. (2014b) ile karşılaştırılması S-S nanokirişleri için Çizelge 4.3'te ve C-C nanokirişleri için Çizelge 4.4'te verilmektedir. Teorik altyapıda da aktarıldığı üzere fonksiyonel derecelendirilmiş bir nanokirişin malzeme tarafsız merkezi ile geometrik merkezi birbirinden farklıdır. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme rijitliği ve kütle ataletlerinde integrasyon hesabı esnasında malzeme ekseninin varlığı küçük deplasman yaklaşımı nedeniyle (Eltaher vd. 2013b) ortaya çıkar. Buna göre, malzeme merkezi hesapta mutlaka dikkate alınmalıdır ve Çizelge 4.3'te geometrik eksen (GE) ve malzeme tarafsız eksen (TE) göz önüne alınarak elde edilen boyutsuz frekansları ayrı ayrı gösterilir. Öncelikle, mukayese için dikkate alınan Eltaher vd. (2014b)'nin çalışmasında malzemenin elastisite modülleri $E_A = 70$ GPa ve $E_U = 393$ GPa, kayma modülleri $G_A = 26$ GPa ve $G_U = 157$ GPa ve birim hacim ağırlıkları $\rho_A = 2700$ kg/m³ ve $\rho_U = 3960$ kg/m³ olarak verilmiştir. Yazarlar tarafından nanokirişin geometrik ebatlarının sayısal değerleri belirtilmese bile, yazarların kendi mukayeselerindeki referans çalışmalar incelendiğinde, hesaplarda uzunluğun $L = 10$ nm ve yüksekliğin $h = 1$ nm olarak alındığı sonucuna varılmıştır. Sonuçlara göre, genel olarak güç indeksi arttıkça boyutsuz frekanslar artmaktadır. Fakat bu, izleyen çizelgelere göre aksi bir durumdur. Bunun sebebi, yazarların boyutsuz frekans hesabında Denklem (4.1)'de tanımlanan boyutsuz frekans parametresinde kullanılan üst yüzeyin aksine doğrudan belirtmeseler bile alt yüzeyin malzeme özelliklerini kullandıklarının anlaşılmasıdır. Bu nedenle mukayeseler bu çıkarıma göre yapılmıştır. Sayısal verilerin incelenmesine gelince, S-S nanokirişi için sonuçlar referans ile birebir uyumlu iken C-C nanokirişinde sonuçlar bir miktar farklıdır ancak farklılık temel modda oldukça düşükken yüksek modlarda farklılık artış göstermektedir. Farklılığın şiddeti yerel olmayan elastisite ile hesapta genel olarak oldukça düşüktür. Bu çıkarım tezdeki hesapların en azından güvenilirliğini göstermek için yeterlidir. Son olarak, malzeme tarafsız ekseninin göz önüne alınmasıyla hesaplanan frekanslar geometrik eksenin göz önüne alındığı duruma göre düşüktür ve bu çıkarım kayma deformasyonlu fonksiyonel derecelendirilmiş nanokirişlerin gerçek titreşim davranışını öğrenmek için tarafsız eksenin ihmal edilemeyeceğini açıkça ortaya koymaktadır. Bu konuda genel tartışmalar Çizelgeler 4.6-4.8 ile verilecek olup, şu aşamada tartışmanın kalabalıklaştırılmaması tercih edilmiştir.

Çizelge 4.5. Farklı sınır şartlı KDFD nanokirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre temel mod boyutsuz frekansları

p	Sınır Şart	$\eta = 0$	$\eta = 0.05$	$\eta = 0.1$	$\eta = 0.15$	$\eta = 0.2$
2	S-S	6.9059	6.8222	6.5884	6.2470	5.8474
	C-F	2.4690	2.4717	2.4796	2.4931	2.5127
	C-S	10.7814	10.6283	10.2047	9.5973	8.9023
	C-C	15.6401	15.3996	14.7380	13.7989	12.7380
	S-G	1.7315	1.7262	1.7106	1.6854	1.6519
	C-G	3.9243	3.9092	3.8649	3.7942	3.7014
10	S-S	6.3745	6.2973	6.0815	5.7663	5.3975
	C-F	2.2815	2.2839	2.2911	2.3036	2.3216
	C-S	9.9503	9.8087	9.4172	8.8559	8.2137
	C-C	14.4335	14.2103	13.5968	12.7267	11.7446
	S-G	1.5995	1.5946	1.5801	1.5568	1.5259
	C-G	3.6248	3.6108	3.5698	3.5045	3.4186

Kayma deformasyonlu fonksiyonel derecelendirilmiş nanokirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerleri altında hesaplanan temel mod boyutsuz frekans parametreleri Çizelge 4.5'te sunulmaktadır. Buna göre $p = 0$ durumunu açıklayan Çizelge 4.2'deki temel mod boyutsuz frekans sonuçları dikkate alındığında, güç indeksinin artışı ile boyutsuz frekansların azalması ilk çıkarım olarak göze çarpmaktadır. Ayrıca, güç indeksi artışının frekansları düşürme oranı genel olarak bütün sınır şartla için birbirine yakındır ancak daha rijit nanokirişlerin frekansları sayısal olarak (fark olarak) daha fazla azalmaktadır.

Çizelge 4.6. İki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre geometrik eksen göz önüne alınarak hesaplanan ilk beş mod boyutsuz frekansları

η	Mod	$p = 0.01$	$p = 0.1$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 10$
0	1	9.7908	9.4901	8.2458	7.9064	6.8272
	2	38.6835	37.5030	32.5781	31.2012	26.8889
	3	85.3425	82.7634	71.8700	68.7095	59.0349
	4	147.8392	143.4262	124.4941	118.7548	101.6538
	5	223.9662	217.3741	188.5889	179.4477	152.9736
0.1	1	9.3407	9.0539	7.8667	7.5430	6.5133
	2	32.7546	31.7550	27.5850	26.4191	22.7677
	3	62.1061	60.2292	52.3017	50.0018	42.9613
	4	92.0560	89.3082	77.5196	73.9459	63.2975
	5	120.2764	116.7362	101.2778	96.3687	82.1513
0.2	1	8.2902	8.0356	6.9820	6.6946	5.7808
	2	24.0873	23.3523	20.2857	19.4283	16.7431
	3	39.9958	38.7871	33.6818	32.2007	27.6667
	4	54.6558	53.0244	46.0252	43.9034	37.5812
	5	67.9322	65.9327	57.2018	54.4291	46.3991

Çizelge 4.7. İki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre tarafsız eksen göz önüne alınarak hesaplanan ilk beş mod boyutsuz frekansları

η	Mod	$p = 0.01$	$p = 0.1$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 10$
0	1	9.7906	9.4690	7.5688	6.9059	6.3745
	2	38.6826	37.4211	29.9405	27.3075	25.1364
	3	85.3405	82.5873	66.1789	60.3228	55.2899
	4	147.8358	143.1312	114.9170	104.6714	95.4279
	5	223.9614	216.9447	174.5687	158.8772	143.9841
0.1	1	9.3405	9.0337	7.2208	6.5884	6.0815
	2	32.7538	31.6856	25.3516	23.1222	21.2838
	3	62.1046	60.1010	48.1602	43.8986	40.2360
	4	92.0540	89.1245	71.5562	65.1765	59.4208
	5	120.2738	116.5056	93.7485	85.3217	77.3237
0.2	1	8.2900	8.0178	6.4087	5.8474	5.3975
	2	24.0868	23.3012	18.6433	17.0038	15.6518
	3	39.9948	38.7045	31.0147	28.2703	25.9116
	4	54.6546	52.9153	42.4846	38.6968	35.2795
	5	67.9307	65.8025	52.9492	48.1898	43.6725

Çizelge 4.8. İki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre tarafsız eksen göz önüne alınarak hesaplanan ilk beş mod boyutsuz frekanslarının geometrik eksen göz önüne alınarak hesaplanan boyutsuz frekanslardan sapma yüzdeleri

η	Mod	$p = 0.01$	$p = 0.1$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 10$
0	1	0.0020	0.2223	8.2102	12.6543	6.6308
	2	0.0023	0.2184	8.0962	12.4793	6.5176
	3	0.0023	0.2128	7.9186	12.2060	6.3437
	4	0.0023	0.2057	7.6928	11.8592	6.1246
	5	0.0021	0.1975	7.4343	11.4632	5.8765
0.1	1	0.0021	0.2231	8.2106	12.6554	6.6295
	2	0.0024	0.2185	8.0964	12.4792	6.5176
	3	0.0024	0.2129	7.9185	12.2060	6.3436
	4	0.0022	0.2057	7.6928	11.8592	6.1246
	5	0.0022	0.1975	7.4343	11.4633	5.8765
0.2	1	0.0024	0.2215	8.2111	12.6550	6.6306
	2	0.0021	0.2188	8.0963	12.4792	6.5179
	3	0.0025	0.2130	7.9185	12.2059	6.3437
	4	0.0022	0.2058	7.6927	11.8592	6.1246
	5	0.0022	0.1975	7.4344	11.4632	5.8764

İki ucu basit mesnetli ve KDFD nanokirişlerin ilk beş mod boyutsuz frekans parametreleri, farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre geometrik eksen düşünülerek Çizelge 4.6’da ve tarafsız eksen düşünülerek Çizelge 4.7’de sunulmakta olup, bunların arasındaki sapma yüzdeleri gösteren sonuçlar da Çizelge 4.8’de verilmektedir. Buna göre sapma yüzdeleri şu şekilde hesaplanmaktadır:

$$D_{\omega,E} = \frac{\overline{\omega_{GE}} - \overline{\omega_{TE}}}{\overline{\omega_{GE}}} \times 100\% \quad (4.5)$$

burada $\overline{\omega_{GE}}$ ve $\overline{\omega_{TE}}$ sırayla geometrik ve tarafsız eksenler göz önüne alınarak hesaplanan boyutsuz frekans parametreleridir. Tartışmalar sapma yüzdeleri göz önüne alınarak yapılmaktadır. Buna göre, sapma yüzdesinin güç indeksinin $p = 0.01-2$ aralığındaki değerleri için sürekli arttığı, bu aralıktan sonra $p = 10$ değeri için azaldığı anlaşılmıştır. Ayrıca yüksek modlarda sapma yüzdeleri daha düşüktür. Yerel olmayan parametrenin sapma yüzdeleri üzerinde bir etkisi olmadığı da varılan başka bir çıkarımdır. Sonuçlar genel olarak fonksiyonel derecelendirilmiş nanoyapılarda tarafsız eksenin göz önüne alınması gerektiğini bir kez daha ifade etmektedir.

Çizelge 4.9. Çift parametrelili elastik zemine oturan iki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin farklı boyutsuz elastik zemin parametresi, boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre temel mod boyutsuz frekansları

K_W	K_P	η	$p = 0$	$p = 0.01$	$p = 0.1$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 10$
0	0	0	9.8281	9.7906	9.4690	7.5688	6.9059	6.3745
		0.1	9.3763	9.3405	9.0337	7.2208	6.5884	6.0815
		0.2	8.3218	8.2900	8.0178	6.4087	5.8474	5.3975
	1	0	10.3171	10.2828	9.9903	8.3063	7.7577	13.1380
		0.1	9.8876	9.8552	9.5787	7.9905	7.4765	12.9739
		0.2	8.8939	8.8659	8.6271	7.2649	6.8326	12.6138
	10	0	13.9674	13.9521	13.8235	13.2047	13.1380	13.3821
		0.1	13.6533	13.6401	13.5290	13.0084	12.9739	13.2450
		0.2	12.9518	12.9434	12.8729	12.5757	12.6138	12.9452
1	0	0	9.8788	9.8416	9.5232	7.6467	6.9969	6.4836
		0.1	9.4294	9.3939	9.0904	7.3025	6.6837	6.1957
		0.2	8.3815	8.3502	8.0816	6.5006	5.9547	5.5259
	1	0	10.3653	10.3314	10.0416	8.3774	7.8389	7.4754
		0.1	9.9379	9.9059	9.6322	8.0644	7.5607	7.2271
		0.2	8.9499	8.9222	8.6865	7.3461	6.9246	6.6619
	10	0	14.0031	13.9880	13.8606	13.2495	13.1861	13.4344
		0.1	13.6898	13.6767	13.5670	13.0539	13.0226	13.2978
		0.2	12.9902	12.9820	12.9127	12.6228	12.6639	12.9993
100	0	0	14.0139	13.9988	13.8719	13.2631	13.2007	13.4502
		0.1	13.7008	13.6878	13.5785	13.0677	13.0374	13.3139
		0.2	13.0019	12.9937	12.9248	12.6371	12.6791	13.0157
	1	0	14.3610	14.3474	14.2328	13.6974	13.6656	13.9554
		0.1	14.0557	14.0441	13.9470	13.5082	13.5080	13.8240
		0.2	13.3753	13.3685	13.3114	13.0921	13.1625	13.5371
	10	0	17.1722	17.1690	17.1422	17.1169	17.2967	17.8705
		0.1	16.9177	16.9164	16.9057	16.9659	17.1724	17.7681
		0.2	16.3568	16.3598	16.3853	16.6365	16.9019	17.5457

Çizelge 4.9’da iki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin yerel olmayan boyutsuz frekansları üzerinde çift parametrelili elastik zemin etkisi listelenmektedir. Öncelikle elastik zemin parametrelerinin boyutsuz frekans değerlerini yükseltmekte olduğu rahatlıkla ifade edilebilir. Ayrıca, elastik zemin parametrelerinin frekansları yükselten etkisi yüksek güç indeksine sahip nanokirişlerde daha fazladır. Çizelgenin en üstünde yer alan ve elastik zemine oturmayan nanokirişleri ilgilendiren sonuçlardan genel olarak boyutsuz yerel olmayan parametrenin frekans indirgeme etkisinin elastik zemin parametreleri arttıkça azaldığı sonucuna varılır. Son olarak, Pasternak zeminin boyutsuz frekanslar üzerindeki etkisinin Winkler zeminine göre daha yüksek olduğu da çizelgedeki neticelerden anlaşılabılır.

Çizelge 4.10. İki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin farklı ortam sıcaklık değişimi, boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre temel mod boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması ($L = 10$ nm, $h = 0.5$ nm)

$(e_0 a)^2$ (nm ²)	p	$\Delta T = 10$ K		$\Delta T = 30$ K	
		Ebrahimi ve Salari (2015b)	Bu Tez	Ebrahimi ve Salari (2015b)	Bu Tez
0	0.2	7.7964	7.7812	7.6211	7.4997
	1	5.7717	5.7264	5.6105	5.4622
	5	4.6925	4.5906	4.5363	4.3427
2	0.2	7.0932	7.0860	6.8996	6.7757
	1	5.2445	5.2098	5.0654	4.9179
	5	4.2593	4.1734	4.0852	3.8990
4	0.2	6.5427	6.5423	6.6319	6.2048
	1	4.8313	4.8054	4.6354	4.4873
	5	3.9193	3.8465	3.7283	3.5469

Sıcaklık değişimi etkisi altındaki iki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin farklı ortam sıcaklığı değerlerine göre temel mod boyutsuz frekansları Ebrahimi ve Salari (2015b) tarafından verilen sonuçlar ile Çizelge 4.10'da karşılaştırılmaktadır. Referansta KDFD nanokirişin alt ve üst yüzeyi sırasıyla paslanmaz çelik (SUS304) ve silisyum nitrit (Si_3N_4) olarak seçilmiştir ve bunların elastisite modülleri $E_A = 201.04$ GPa ve $E_U = 348.43$ GPa, Poisson oranları $\nu_A = 0.3262$ ve $\nu_U = 0.24$ (böylece kayma modülleri $G_A = E_A/2(1 + \nu_A) = 75.7955$ GPa ve $G_U = E_U/2(1 + \nu_U) = 140.4960$ GPa), birim hacim ağırlıkları $\rho_A = 8166$ kg/m³ ve $\rho_U = 2370$ kg/m³ ve termal genleşme katsayıları $\alpha_A = 1.233 \times 10^{-5}$ K⁻¹ ve $\alpha_U = 5.8723 \times 10^{-6}$ K⁻¹ olarak verilmektedir. Referans çalışmada kiriş kinematiği olarak her ne kadar Timoshenko kiriş teorisi gözetilse de sıcaklık değişimi bu tezdten farklı olarak Touloukian (1967) tarafından formüle edilen ortam sıcaklığının lineer olmayan bir fonksiyonuna ve Kiani ve Eslami (2013) tarafından belirtilen ve $p = 1$ için klasik karışım kuralına uyan bir lineer sıcaklık dağılımına dayanmaktadır. Bu nedenle mukayese edilen sonuçlar arasında bir farklılık oluşacaktır. Sonuçlar genel olarak değerlendirildiğinde farklılığın düşük bir düzeyde olduğu belirtilebilir. Ancak atomik parametre ve sıcaklık değişiminin artışı ile farklılık yükselmektedir.

Çizelge 4.11'de Winkler zeminine oturan iki ucu basit mesnetli KDFD nanokiriş yapısının yerel olmayan boyutsuz frekans parametreleri üzerinde zemin rijitliği, ortam sıcaklığı değişimi ve güç indeksinin etkisi verilmektedir. Elastik zeminin ihmal edildiği sonuçlara göre ortam sıcaklığının nanokirişin frekanslarını düşürdüğü, sıcaklık arttıkça frekanslardaki düşüş oranının daha fazla olduğu ve sıcaklık yükseldikçe yerel olmayan parametrenin frekansları daha fazla düşürdüğü tespit edilmiştir. Ayrıca, yüksek sıcaklık değişimi değerlerinde güç indeksi değişiminin frekansların azalması üzerindeki etkisi daha büyüktür. Dahası, $\Delta T = 100$ K sıcaklık değişimi için $p = 1$ ve daha büyük güç indeksi değerlerine sahip nanokirişlerin düşük boyutsuz atomik parametre durumunda boyutsuz frekansları yoktur yani nanokiriş temel modda titreşim hareketi gösterememiştir. Bu sonuçların fonksiyonel derecelendirilmiş nanoyapıların dış çevreyle etkileşimi açısından dikkat çekici olduğu belirtilebilir. Öte yandan, boyutsuz elastik zemin parametresi arttıkça boyutsuz atomik parametre ve güç indeksine ek olarak sıcaklığın da frekansların azalması üzerindeki etkisi azalmıştır.

Çizelge 4.11. Winkler zeminine oturan ve sıcaklık etkisi altındaki iki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin farklı boyutsuz elastik zemin parametresi, ortam sıcaklık değişimi, boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre temel mod boyutsuz frekansları

K_W	ΔT (K)	η	$p = 0$	$p = 0.01$	$p = 0.1$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 10$
0	25	0	9.4085	9.3614	8.9673	6.8111	6.1134	5.6764
		0.1	8.9355	8.8896	8.5063	6.4223	5.7523	5.3452
		0.2	7.8218	7.7785	7.4185	5.4934	4.8862	4.5520
	50	0	8.9693	8.9116	8.4357	5.9580	5.2015	4.8794
		0.1	8.4719	8.4146	7.9440	5.5092	4.7720	4.4899
		0.2	7.2876	7.2308	6.7663	4.3912	3.6820	3.5082
	100	0	8.0191	7.9358	7.2567	3.7025	2.5339	2.6426
		0.1	7.4585	7.3734	6.6787	2.9262	1.4617	1.8257
		0.2	6.0800	5.9872	5.2232	0.0000	0.0000	0.0000
1	25	0	9.4614	9.4147	9.0244	6.8977	6.2160	5.7987
		0.1	8.9912	8.9457	8.5665	6.5140	5.8613	5.4749
		0.2	7.8854	7.8426	7.4874	5.6003	5.0140	4.7035
	50	0	9.0248	8.9676	8.4964	6.0567	5.3218	5.0211
		0.1	8.5306	8.4739	8.0084	5.6158	4.9028	4.6434
		0.2	7.3558	7.2997	6.8418	4.5243	3.8500	3.7028
	100	0	8.0811	7.9986	7.3272	3.8594	2.7724	2.8959
		0.1	7.5251	7.4409	6.7552	3.1223	1.8445	2.1762
		0.2	6.1615	6.0702	5.3206	0.0000	0.0000	0.0000
100	25	0	13.7229	13.7021	13.5344	12.8459	12.8039	13.1338
		0.1	13.4030	13.3842	13.2335	12.6440	12.6355	12.9941
		0.2	12.6877	12.6735	12.5619	12.1984	12.2655	12.6884
	50	0	13.4256	13.3988	13.1882	12.4146	12.3945	12.8095
		0.1	13.0985	13.0736	12.8792	12.2056	12.2204	12.6662
		0.2	12.3656	12.3449	12.1881	11.7434	11.8374	12.3524
	100	0	12.8103	12.7707	12.4670	11.5036	11.5320	12.1350
		0.1	12.4670	12.4290	12.1397	11.2777	11.3447	11.9836
		0.2	11.6946	11.6601	11.4039	10.7758	10.9311	11.6515

Çizelge 4.12. İki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin yerel olmayan serbest titreşimi için farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre ilk beş mod kritik sıcaklıkları (K)

η	Mod	$p = 0.01$	$p = 0.1$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 10$
0	1	291.5488	242.3125	131.4576	115.5574	120.7524
	2	1144.3703	951.5334	517.4914	454.8068	472.5420
	3	2496.9508	2077.6548	1134.3730	996.6401	1026.1556
	4	4258.6834	3546.8073	1946.4906	1709.4203	1739.3872
	5	6323.8743	5272.4620	2911.1522	2555.2928	2564.3705
0.1	1	265.3589	220.5456	119.6487	105.1769	109.9052
	2	820.4640	682.2083	371.0190	326.0768	338.7922
	3	1322.3523	1100.2987	600.7490	527.8075	543.4385
	4	1651.2050	1375.1917	754.7063	662.7878	674.4068
	5	1823.8081	1520.5803	839.5776	736.9476	739.5656
0.2	1	209.0279	173.7276	94.2494	82.8497	86.5743
	2	443.7028	368.9348	200.6452	176.3407	183.2171
	3	548.4119	456.3208	249.1453	218.8947	225.3772
	4	582.0619	484.7652	266.0395	233.6376	237.7334
	5	581.7943	485.0648	267.8250	235.0861	235.9212

Çizelge 4.12’de iki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin yerel olmayan serbest titreşiminin ilk beş modu için kritik sıcaklık değerleri hesaplanmaktadır. Katı mekaniğinde temel olarak bilinmektedir ki ortam sıcaklığının artışı yapının mekanik dayanımını düşürdüğünden yapının titreşim frekansları azalır. Benzer şekilde yapının burkulma yükü değerleri de azalırken yapacağı deformasyonlar yükselir. Bu tez çalışması da dahil olmak üzere, nanokiriş yapılarında yerel olmayan parametrenin varlığı altında aynı sıcaklık değişimi için klasik elastisite teorisine kıyasla çok daha düşük bir doğal frekans elde edilir (Pradhan ve Mandal 2013; Ebrahimi ve Salari 2015a, 2015b; Ebrahimi ve Barati 2016; Demir ve Civalek 2017; Numanoğlu 2019, 2020; Numanoğlu vd. 2021; Numanoğlu vd. 2022). Klasik kiriş titreşiminde olduğu gibi yerel olmayan kiriş titreşim analizinde de sıcaklık değişiminin öyle bir değeri vardır ki, o değer altında doğal frekans sıfıra eşittir. İşte bu değer kritik sıcaklık değişimini ifade eder. Kritik değerden itibaren daha yüksek sıcaklık değişimleri için doğal frekanslar reel sayı olmaktan çıkar, reel kısmı sıfıra eşit ve imajiner kısmı sıfırdan farklı bir kompleks sayı olarak hesaplanır. Sıcaklık değişimi yükseldikçe imajiner kısım artar ancak tabii ki de reel sayı olmayan frekansların mekanik bir anlamı yoktur. Hatırlanacak olursa fonksiyonel derecelendirilmiş Timoshenko nanokirişlerinin i . modunun doğal frekansları şu şekilde hesaplanır:

$$\omega_i = \sqrt{\frac{-C_2 + \sqrt{C_2^2 - 4C_1C_3}}{2C_1}} \quad (4.6)$$

burada C_1 , C_2 ve C_3 Denklemler (3.105) ve (3.106) ile belirlenmektedir. Buna göre doğal frekansın sıfıra eşit olması için

$$C_1C_3 = 0 \quad (4.7)$$

eşitliği gerçekleşmelidir. Böylece

$$C_1 = 0 \text{ ve/veya } C_3 = 0. \quad (4.8)$$

durumlarına ulaşılır. Burada $C_1 = 0$ durumu hem doğal frekansı tanımsız hale getireceğinden hem de Denklem (3.106) nedeniyle sıfıra eşit olamayacak olan kütle ataletlerini içerdiğinden uygun değildir. O halde geriye kalan $C_3 = 0$ durumu incelenmelidir. Buna göre Denklem (3.106)’da görülen ifadeler $C_3 = 0$ denkleminde yerine yazıldıktan sonra buradan i . modun kritik sıcaklık değişimi aşağıdaki şekilde elde edilebilir:

$$(\Delta T_{cr})_i = \frac{H_1\alpha_i^6 + H_2\alpha_i^4 + H_3\alpha_i^2 + H_4}{H_5\alpha_i^6 + H_6\alpha_i^4 + H_7\alpha_i^2} \quad (4.9)$$

burada iki ucu basit mesnetli KDFD nanokiriş için aşağıdaki tanımlar geçerlidir:

$$\begin{aligned}
H_1 &= \frac{(e_0 a)^2 k_p B}{kS}, \quad H_2 = \left[1 + \frac{1}{kS} (k_p + (e_0 a)^2 k_w) \right] B + (e_0 a)^2 k_p, \\
H_3 &= \frac{k_w B}{kS} + (e_0 a)^2 k_w + k_p, \quad H_4 = k_w, \quad H_5 = \frac{(e_0 a)^2 D_T B}{kS}, \\
H_6 &= \left(\frac{B}{kS} + (e_0 a)^2 \right) D_T, \quad H_7 = D_T, \quad \alpha_i = \frac{i\pi}{L}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Çizelge 4.12'deki değerler hesaplanırken elastik zemin ihmal edilmektedir. Sonuçların incelenmesine gelince, öncelikle yüksek modlarda daha yüksek bir kritik sıcaklık değişimi elde edilir. Boyutsuz yerel olmayan parametrenin kritik sıcaklık değişimlerini düşürmekte olduğu da anlaşılmıştır. Ek olarak, boyutsuz yerel olmayan parametre, yüksek modların kritik sıcaklık değişimini daha fazla etkilemektedir. Öte yandan, güç indeksi yükseldikçe, kritik sıcaklık değişimi değerlerinin azaldığı sonucuna varılır. Sonuç olarak yüksek güç indeksine sahip fonksiyonel derecelendirilmiş yerel olmayan nanokirişlerin sıcaklığa karşı dayanımları homojen nanokirişlere göre daha düşüktür ve yerel olmayan parametre arttıkça bu dayanım daha da düşer.

Çizelge 4.13. İki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile hesaplanan temel mod boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması

$(e_0 a)^2$ ($10^6 \times \text{nm}^2$)	p	Rahmani ve Pedram (2014)	Ebrahimi ve Salari (2015b)	Uzun (2023)	Bu Tez (Analitik)	Bu Tez (NL-FEM)		
						$n = 15$	$n = 10$	$n = 5$
0	1	6.9917	6.99174004	6.99172	6.9917	6.9917	6.9918	6.9925
	5	5.9389	5.93894397	5.93893	5.9389	5.9390	5.9390	5.9396
2	1	6.3895	6.38950303	6.38949	6.3895	6.3895	6.3895	6.3902
	5	5.4274	5.42739007	5.42738	5.4274	5.4274	5.4274	5.4280
4	1	5.9201	5.92013713	5.92012	5.9201	5.9201	5.9202	5.9208
	5	5.0287	5.02869994	5.02869	5.0287	5.0287	5.0287	5.0292

Yerel olmayan KDFD nanokirişlerin serbest titreşim analizi için tez kapsamında geliştirilen yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonunun (NL-FEM) uygulamaları Çizelgeler 4.13-4.21 ile sunulmaktadır. İlk olarak iki ucu basit mesnetli nanokirişlerin temel mod boyutsuz frekansları için yerel olmayan parametrenin ve güç indeksinin farklı değerlerine göre üç farklı referans baz alınarak bir karşılaştırma çalışması Çizelge 4.13 ile verilmektedir. İlgili referanslardan Rahmani ve Pedram (2014) düşünülerek, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemenin özellikleri, alt ve üst yüzey malzemesi sırayla çelik ve alümina oksit olmak üzere, bunların elastisite modülleri $E_A = 210$ GPa ve $E_U = 390$ GPa, Poisson oranları $\nu_A = 0.30$ ve $\nu_U = 0.24$ (böylece kayma modülleri $G_A = E_A/2(1 + \nu_A) = 80.7692$ GPa ve $G_U = E_U/2(1 + \nu_U) = 157.2581$ GPa), birim hacim ağırlıkları $\rho_A = 7800$ kg/m³ ve $\rho_U = 3960$ kg/m³ ve kayma deformasyonlu nanokirişin boyutları, uzunluk $L = 10000$ nm, kalınlık $b = 1000$ nm ve yükseklik $h = 200$ nm olarak seçilmiştir. Öncelikle, tez kapsamında yapılan analitik hesaplamalarının yazarlarla birebir aynı olduğu, özellikle $n = 15$ adet eleman için yerel olmayan sonlu eleman sonuçlarının oldukça yüksek bir yakınsaklığa sahip olduğu neticesine varılır. Yalnız bu noktada önemli bir hususa değinilmelidir. Tez kapsamında elde edilen sonuçlarda fonksiyonel

derecelendirilmiş malzemenin tarafsız eksenine dikkate alınmıştır. Ancak, Rahmani ve Pedram (2014) ve Ebrahimi ve Salari (2015b)'de sunulan teorik altyapının dikkatlice incelenmesine rağmen, titreşim analizinin kesitin geometrik eksenine göre açıklandığı, tarafsız eksen ve bunun fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeye etkisinden bahsedilmediği gözlemlenmektedir. Öte yandan Uzun (2023) tarafından gerçekleştirilen çalışmada malzeme tarafsız eksenini göz önünde bulundurulmuştur. Yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonunun KDFD nanokirişlerin titreşim analizindeki başarısı hakkındaki detaylı tartışmaların izleyen çizelgelere konu olması tercih edilmiştir.

Çizelge 4.14. İki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile hesaplanan ilk beş mod boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması

p	Mod	$\eta = 0$				$\eta = 0.2$			
		Analitik	NL-FEM Sonuçları			Analitik	NL-FEM Sonuçları		
			$n = 15$	$n = 10$	$n = 5$		$n = 15$	$n = 10$	$n = 5$
0.1	1	9.4690	9.4691	9.4691	9.4701	8.0178	8.0178	8.0178	8.0186
	2	37.4211	37.4219	37.4251	37.4830	23.3012	23.3017	23.3037	23.3383
	3	82.5873	82.5961	82.6314	83.2408	38.7045	38.7084	38.7238	38.9806
	4	143.1312	143.1792	143.3680	146.3995	52.9153	52.9311	52.9922	53.9108
	5	216.9447	217.1206	217.7986	240.6699	65.8025	65.8469	66.0139	71.4699
1	1	7.5688	7.5688	7.5688	7.5696	6.4087	6.4087	6.4088	6.4094
	2	29.9405	29.9412	29.9438	29.9901	18.6433	18.6437	18.6452	18.6730
	3	66.1789	66.1860	66.2142	66.7028	31.0147	31.0178	31.0302	31.2369
	4	114.9170	114.9556	115.1072	117.5430	42.4846	42.4974	42.5468	43.2906
	5	174.5687	174.7102	175.2560	193.6701	52.9492	52.9854	53.1215	57.5737
2	1	6.9059	6.9059	6.9059	6.9066	5.8474	5.8474	5.8475	5.8480
	2	27.3075	27.3081	27.3104	27.3527	17.0038	17.0041	17.0055	17.0308
	3	60.3228	60.3293	60.3551	60.8003	28.2703	28.2732	28.2844	28.4725
	4	104.6714	104.7065	104.8446	107.0630	38.6968	38.7084	38.7533	39.4287
	5	158.8772	159.0061	159.5030	176.2663	48.1898	48.2226	48.3459	52.3785

İki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin ilk beş mod boyutsuz frekanslarının karşılaştırılmaları Çizelge 4.14'te belirtilmektedir. Buna göre, ilk olarak sonlu eleman sayısının artışı ile elde edilen boyutsuz frekansların analitik sonuçlara oldukça yakın olduğu anlaşılmaktadır. Yakınsaklık yüksek modlarda daha fazladır. Ayrıca, sonlu elemanlar formülasyonunun kullanımında, yerel olmayan elastisite ($\eta = 0.2$) için elde edilen sonuçların klasik elastisiteye ($\eta = 0$) kıyasla analitik sonuçlara daha yakın sonuçlar verdiği gözlemlenir ve bilimsel literatürde konuyla ilgili çalışmalardan da bu çıkarım yapılabilmektedir (Pradhan 2012; Demir ve Civalek 2013; Numanoğlu 2019; Numanoğlu ve Civalek 2019a, 2020, 2022; Numanoğlu vd. 2021; Numanoğlu vd. 2022). Sonuç olarak atomik ölçekli kirişlerin yerel olmayan serbest titreşim analizi için sonlu eleman yaklaşımının kullanımı önemli bir fayda ortaya koymaktadır. Ayrıca, sonuçlardaki sapmanın daha da düşürülmesi yüksek sayıda sonlu eleman kullanımı ile mümkün olmaktadır ancak belirtilmelidir ki tez kapsamında nanokirişler için geliştirilen yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonuna dayalı program kodlarının çalışma süreleri, özellikle 15 elemanda sonra oldukça yükselmektedir. Bunun nedeninin Denklem (3.243)'te de görüldüğü üzere, kayma deformasyonlu kiriş teorisinden kaynaklanan ve yüksek mertebeden kütleleri teşkil eden bileşenlere bağlı olarak frekansın dördüncü mertebelerini içeren bir özdeğer probleminin çözülmekte olması düşünülmektedir. Numanoğlu (2019) tarafından yapılan çalışmada yüksek mertebeden kütle ihmal edildiğinden çok yüksek sayıda sonlu eleman için kayma deformasyonlu homojen

nanokirişlerin frekansları elde edilebilmiş ve sonuçlarda genel olarak problemlili bir durum tespit edilmemiştir. Çizelge 4.14’te listelenen sonuçlar bir bütün olarak değerlendirilecek olursa, yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile serbest titreşim analizi için çok yüksek modlar araştırılmadığı sürece 15 eleman kullanımının gayet başarılı olduğu ifade edilebilir. Bu nedenle yerel olmayan sonlu eleman analizleri genel olarak 15 elemanla yürütülmüş olup izleyen çizelgeler çoğunlukla bu bilgiyle sunulmaktadır.

Çizelge 4.15. Çift parametrelili elastik zemine oturan ve sıcaklık etkisi altındaki iki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin farklı termo-elastik ortam parametreleri, boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile hesaplanan ilk üç mod boyutsuz frekansları ($n = 15$)

η	p	Mod	$K_W = 1, K_P = 0$		$K_W = 100, K_P = 0$		$K_W = 100, K_P = 10$	
			$\Delta T = 0$ K	$\Delta T = 100$ K	$\Delta T = 0$ K	$\Delta T = 100$ K	$\Delta T = 0$ K	$\Delta T = 100$ K
0	0.1	1	9.5232	7.3272	13.8719	12.4670	17.1422	16.0266
		2	37.4355	35.4154	38.7631	36.8159	43.6573	41.9380
		3	82.6022	80.5906	83.2071	81.2104	88.4492	86.5735
	1	1	7.6467	3.8594	13.2631	11.5036	17.1169	15.7928
		2	29.9609	26.9152	31.8490	29.0023	38.4677	36.1460
		3	66.1948	63.2113	67.0623	64.1192	74.3950	71.7533
	2	1	6.9969	2.7724	13.2006	11.5320	17.2967	16.0594
		2	27.3311	24.1460	29.5201	26.5985	36.9825	34.6951
		3	60.3396	57.2342	61.3517	58.3003	69.7792	67.1121
0.2	0.1	1	8.0816	5.3176	12.9248	11.4025	16.3834	15.2133
		2	23.3236	19.8938	25.3998	22.2918	32.3491	30.0053
		3	38.7215	34.1260	39.9955	35.5651	49.8647	46.5247
	1	1	6.5006	0.0000	12.6371	10.7706	16.6344	15.2696
		2	18.6753	13.1054	21.5748	16.9841	30.4714	27.5027
		3	31.0367	23.5276	32.8463	25.8679	45.8419	41.5001
	2	1	5.9547	0.0000	12.6791	10.9212	16.8995	15.6319
		2	17.0410	10.9178	20.3678	15.6086	30.1389	27.3042
		3	28.2951	19.7464	30.3937	22.6486	44.8543	40.6649

Termo-elastik çevrede yer alan iki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin ilk üç mod boyutsuz frekansları yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile hesaplanmış olup bunlar Çizelge 4.15’te verilmektedir. Buradaki sonuçlardan sadece temel mod boyutsuz frekanslarının mukayesesi için Çizelgeler 4.9 ve 4.11’deki ilgili kısımlar incelenebilir. Elastik zeminin göz önüne alındığı ve ortam sıcaklığı değişiminin ihmal edildiği analizlerde 15 eleman kullanımı ile analitik sonuçlarla birebir aynı değerler elde edilmiştir. Buna ek olarak, sıcaklık değişimi altında klasik titreşim sonuçları da analitik sonuçlarla birebir aynı iken yerel olmayan titreşim sonuçlarının analitik neticelerin bir miktar altına düştüğü belirtilebilir. Tabi hesaplamalarda göz önüne alınan fonksiyonel derecelendirilmiş malzemenin termal genleşme katsayılarının yüksek değerlere sahip olması ve seçilen sıcaklık değişiminin yüksek bir değer olması nedenleriyle, yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonunun oluşturduğu analitik değerlerin altında sonuçtan doğan miktar olarak oldukça az bir sapma ihmal edilebilir düzeydedir. Boyutsuz elastik zemin parametrelerinin $K_W = 1$ ve $K_P = 0$ değerleri için $\Delta T = 100$ K değerinde bir sıcaklık değişimi altında yüksek güç indeksine sahip nanokirişlerin temel mod boyutsuz frekanslarının bulunmadığı da tartışmaya eklenebilir.

Çizelge 4.16. Farklı sınır şartlı KDFD nanokirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerlerine göre yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile hesaplanan ilk üç mod boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması ($p = 2$)

Sınır Şart	η	1. Mod			2. Mod			3. Mod		
		$n = 15$	$n = 10$	$n = 5$	$n = 15$	$n = 10$	$n = 5$	$n = 15$	$n = 10$	$n = 5$
S-S	0	6.9058	6.9059	6.9066	27.3081	27.3104	27.3527	60.3292	60.3551	60.8003
	0.1	6.5884	6.5884	6.5891	23.1226	23.1246	23.1598	43.9031	43.9211	44.2259
	0.2	5.8474	5.8475	5.8480	17.0041	17.0055	17.0308	28.2731	28.2844	28.4725
C-F	0	2.4653	2.4653	2.4653	15.2822	15.2825	15.2895	42.0725	42.0806	42.2147
	0.1	2.4098	2.4098	2.4098	13.2938	13.2941	13.2986	31.8672	31.8720	31.9509
	0.2	2.2620	2.2620	2.2620	10.1497	10.1499	10.1526	21.5651	21.5683	21.6228
C-S	0	10.7814	10.7815	10.7842	34.5186	34.5232	34.6082	70.6807	70.7221	71.4200
	0.1	10.2047	10.2048	10.2074	28.8232	28.8273	28.8974	50.5576	50.5870	51.0538
	0.2	8.9023	8.9025	8.9047	20.8815	20.8846	20.9383	32.2675	32.2872	32.5921
C-C	0	15.6402	15.6407	15.6487	42.5591	42.5680	42.7258	81.8463	81.9108	82.9390
	0.1	14.7381	14.7384	14.7461	35.0252	35.0329	35.1613	57.5195	57.5661	58.2184
	0.2	12.7381	12.7386	12.7462	24.9142	24.9206	25.0236	36.3903	36.4234	36.8722
S-G	0	1.7315	1.7315	1.7316	15.4633	15.4633	15.4714	42.3137	42.3137	42.4782
	0.1	1.7106	1.7106	1.7106	13.9880	13.9883	13.9883	33.2771	33.2839	33.2839
	0.2	1.6519	1.6519	1.6519	11.2531	11.2534	11.2534	22.7237	22.7282	22.7282
C-G	0	3.9242	3.9243	3.9244	21.0273	21.0283	21.0477	51.1223	51.1378	51.4093
	0.1	3.8649	3.8649	3.8650	18.8082	18.8092	18.8266	39.5711	39.5832	39.7864
	0.2	3.7013	3.7014	3.7014	14.8726	14.8734	14.8880	26.7048	26.7135	26.8561

Çizelge 4.16’da güç indeksinin $p = 2$ değeri göz önüne alınarak farklı sınır şartlı KDFD nanokirişlerin ilk üç mod boyutsuz frekansları yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile hesaplanmıştır. Buradaki değerlerden temel moda ait olanlar Çizelge 4.5’te verilen ilgili değerlerle mukayese edilebilir. Mukayeseler genel olarak yerel olmayan sonlu eleman analizinin uygun neticeler verdiğini gösterir. Yakınsaklık temel modda yüksek iken yüksek modlarda azalır. Ayrıca yerel olmayan parametre arttıkça sapmanın azaldığı gözlemlenmiştir. Yeri gelmişken, C-F nanokirişinin yerel olmayan elastisite için bir paradoksa sahip olduğu bu noktada hatırlatılabilir. C-F nanokirişinin temel modu için yerel olmayan sonlu eleman sonuçlarının paradoksun aksine beklenen bir davranışı sergilediği anlaşılmıştır. Numanoğlu (2019) tarafından yapılan çalışmada, kayma deformasyonsuz homojen C-F nanokirişlerinin yerel olmayan sonlu elemanlar sonuçlarının, Challamel vd. (2014)’nin paradoksu çözen bir yerel olmayan elastisite yaklaşımını kullanarak elde ettiği sonuçlarla doğrulandığı, bu nedenle yerel olmayan sonlu elemanlar sonuçlarının güvenilir neticeler verdiğinden bir kez daha söz edilebilir.

Öte yandan, yine bu altı farklı sınır şartlı KDFD nanokirişlerin temel, ikinci ve üçüncü mod boyutsuz yerel olmayan frekansları üzerinde güç indeksinin etkisi sırayla Çizelgeler 4.17-4.19 ile ele alınmaktadır. Öncelikle, KDFD nanokirişlerde güç indeksinin frekansları düşürme oranı hem klasik hem de yerel olmayan elastisitede genel olarak aynıdır. Güç indeksi artışı nedeniyle boyutsuz frekans azalması genelde C-C nanokirişleri için en fazla olarak hesaplanır. Benzer şekilde güç indeksinin her değerinde yerel olmayan parametre C-C nanokirişinin frekanslarını diğer sınır şartlara kıyasla daha fazla indirmektedir. Bu sonuçlar atomik parametre ve fonksiyonel derecelendirilmenin en fazla C-C nanokirişleri üzerinde etkili olduğunu gösterir. Nano-elektro-mekanik sistemlerde iki ucu ankastre bağlantı modellemesi bilinen bir uygulama olduğundan (Maeashi vd. 2007; Lupan vd. 2007; Lassagne vd. 2008; Khaderbad vd. 2011; Chen vd.

2011; Gutruf vd. 2015; Kambali vd. 2017; Numanoğlu vd. 2018; Numanoğlu ve Civalek 2019a; Cai ve Xu 2022; Abouelregal vd. 2023) bu sonuç dikkat çekicidir.

Çizelge 4.17. Farklı sınır şartlı KDFD nanokirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile hesaplanan temel mod boyutsuz frekansları ($n = 15$)

Sınır Şart	η	$p = 0.01$	$p = 0.1$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 10$
S-S	0	9.7906	9.4691	7.5688	6.9059	6.3745
	0.1	9.3405	9.0337	7.2208	6.5884	6.0815
	0.2	8.2900	8.0178	6.4087	5.8474	5.3975
C-F	0	3.4956	3.3807	2.7017	2.4653	2.2768
	0.1	3.4169	3.3046	2.6409	2.4098	2.2255
	0.2	3.2074	3.1019	2.4790	2.2620	2.0891
C-S	0	15.2843	14.7825	11.8165	10.7813	9.9503
	0.1	14.4664	13.9916	11.1847	10.2047	9.4172
	0.2	12.6194	12.2054	9.7574	8.9023	8.2138
C-C	0	22.1719	21.4442	17.1421	15.6402	14.4336
	0.1	20.8911	20.2060	16.1540	14.7381	13.5969
	0.2	18.0531	17.4619	13.9631	12.7381	11.7447
S-G	0	2.4554	2.3746	1.8976	1.7315	1.5995
	0.1	2.4256	2.3458	1.8745	1.7106	1.5801
	0.2	2.3425	2.2654	1.8103	1.6519	1.5259
C-G	0	5.5646	5.3815	4.3005	3.9242	3.6247
	0.1	5.4804	5.3001	4.2355	3.8649	3.5698
	0.2	5.2484	5.0758	4.0563	3.7013	3.4186

Çizelge 4.18. Farklı sınır şartlı KDFD nanokirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile hesaplanan ikinci mod boyutsuz frekansları ($n = 15$)

Sınır Şart	η	$p = 0.01$	$p = 0.1$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 10$
S-S	0	38.6834	37.4219	29.9412	27.3081	25.1369
	0.1	32.7545	31.6863	25.3522	23.1226	21.2842
	0.2	24.0872	23.3017	18.6436	17.0041	15.6522
C-F	0	21.6522	20.9449	16.7542	15.2822	14.0760
	0.1	18.8372	18.2213	14.5735	13.2938	12.2495
	0.2	14.3845	13.9135	11.1258	10.1497	9.3578
C-S	0	48.8928	47.2996	37.8484	34.5186	31.7646
	0.1	40.8209	39.4920	31.6056	28.8233	26.5126
	0.2	29.5694	28.6079	22.8987	20.8815	19.1988
C-C	0	60.2765	58.3135	46.6662	42.5591	39.1532
	0.1	49.5908	47.9801	38.4111	35.0252	32.1882
	0.2	35.2643	34.1219	27.3266	24.9142	22.872
S-G	0	21.9150	21.1974	16.9505	15.4633	14.2567
	0.1	19.8241	19.1750	15.3332	13.9880	12.8965
	0.2	15.9481	15.4259	12.3353	11.2531	10.3750
C-G	0	29.7983	28.8232	23.0503	21.0273	19.3820
	0.1	26.6519	25.7802	20.6184	18.8082	17.3326
	0.2	21.0728	20.3842	16.3048	14.8725	13.7011

Çizelge 4.19. Farklı sınır şartlı KDFD nanokirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile hesaplanan üçüncü mod boyutsuz frekansları ($n = 15$)

Sınır Şart	η	$p = 0.01$	$p = 0.1$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 10$
S-S	0	85.3497	82.5961	66.1859	60.3293	55.2959
	0.1	62.1110	60.1072	48.1651	43.9031	40.2401
	0.2	39.9988	38.7084	31.0178	28.2731	25.9142
C-F	0	59.5388	57.6134	46.1512	42.0725	38.5960
	0.1	45.1127	43.6494	34.9506	31.8672	29.2704
	0.2	30.5340	29.5421	23.6496	21.5651	19.8198
C-S	0	99.9808	96.7584	77.5460	70.6807	64.7583
	0.1	71.4976	69.1982	55.4752	50.5576	46.2814
	0.2	45.6242	44.1591	35.4088	32.2675	29.5217
C-C	0	115.7606	112.0329	89.7998	81.8463	74.9620
	0.1	81.3059	78.7008	63.1268	57.5195	52.5778
	0.2	51.4200	49.7776	39.9445	36.3903	33.2241
S-G	0	59.904	57.9603	46.4066	42.3137	38.8726
	0.1	47.1110	45.5822	36.4959	33.2771	30.5709
	0.2	32.1703	31.1263	24.9217	22.7237	20.8757
C-G	0	72.3665	70.0202	56.0697	51.1223	46.9483
	0.1	56.0046	54.1917	43.4046	39.5711	36.3171
	0.2	37.7891	36.5675	29.2941	26.7048	24.4959

Çizelge 4.20. Winkler zeminine oturan farklı sınır şartlı KDFD nanokirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre, boyutsuz elastik zemin parametresi ve güç indeksi değerlerine göre yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile hesaplanan temel mod boyutsuz frekansları ($n = 15$)

Sınır Şart	η	$p = 0.1$		$p = 1$		$p = 10$	
		$K_W = 10$	$K_W = 100$	$K_W = 10$	$K_W = 100$	$K_W = 10$	$K_W = 100$
S-S	0	9.9970	13.8719	8.3156	13.2631	7.3934	13.4502
	0.1	9.5857	13.5785	8.0001	13.0677	7.1423	13.3139
	0.2	8.6349	12.9248	7.2756	12.6371	6.5697	13.0157
C-F	0	4.6601	10.6913	4.3790	11.2276	4.3850	12.0678
	0.1	4.6052	10.6676	4.3417	11.2132	4.3587	12.0583
	0.2	4.4621	10.6067	4.2452	11.1764	4.2907	12.0341
C-S	0	15.1260	17.9236	12.3081	16.0691	10.6316	15.4671
	0.1	14.3540	17.2765	11.7027	15.6095	10.1343	15.1286
	0.2	12.6190	15.8633	10.3469	14.6190	9.0265	14.4080
C-C	0	21.6824	23.7169	17.4845	20.3081	14.9114	18.6690
	0.1	20.4584	22.6039	16.5166	19.4791	14.1026	18.0270
	0.2	17.7530	20.1853	14.3806	17.7001	12.3259	16.6683
S-G	0	3.9133	10.4192	3.9348	11.0643	4.0756	11.9616
	0.1	3.9743	10.4127	3.9237	11.0604	4.0680	11.9591
	0.2	3.9274	10.3949	3.8935	11.0497	4.0473	11.9520
C-G	0	6.2651	11.4835	5.5113	11.7174	5.2143	12.3952
	0.1	6.1953	11.4453	5.4607	11.6934	5.1762	12.3790
	0.2	6.0043	11.3264	5.3228	11.6291	5.0729	12.3554

Çizelge 4.20’de Winkler zemine oturan farklı sınır şartlı KDFD nanokirişlerin zemin rijitliğinin farklı boyutsuz değerlerine ve güç indeksinin artışına göre temel mod boyutsuz frekans parametreleri listelenmektedir. Temel mod sonuçlarının doğruluğu için Çizelge 4.9’a göz atılabilir. Buna göre, yerel olmayan sonlu eleman sonuçlarının analitik sonuçlar ile birebir aynı elde edildiği anlaşılr. Ayrıca, buradaki değerler incelendiğinde sınır şartların tamamında elastik zemin parametresi arttıkça yerel olmayan parametre ve güç indeksinin frekanslar üzerindeki etkilerinin azaldığı söylenebilir. Özellikle güç indeksi ve elastik zeminin rijitliği değerleri yükseldikçe, sınır şartlar arasındaki frekans farklılığı azalır. Yani elastik zeminin genel olarak düşük rijitliğe sahip nanokirişler üzerinde daha fazla etkili olduğu gözlemlenir. Uçları ankastre veya basit gibi sınır şartlarından oluşan nanokirişlere kıyasla düşük rijitlikli nanokirişlerden olan C-F nanokirişinin nanoteknolojideki uygulamaları (Drechsler 2003; Wojcikiewicz vd. 2004; Li vd. 2007; Seo ve Jhe 2008; Kacem vd. 2010; Michels ve Rangelow 2014; Alsteens vd. 2017; Numanoğlu vd. 2018; Setiono vd. 2019; Numanoğlu ve Civalek 2019a; Civalek ve Numanoğlu 2020) göz önüne alındığında bu sonucun dikkat çektiği belirtilmelidir.

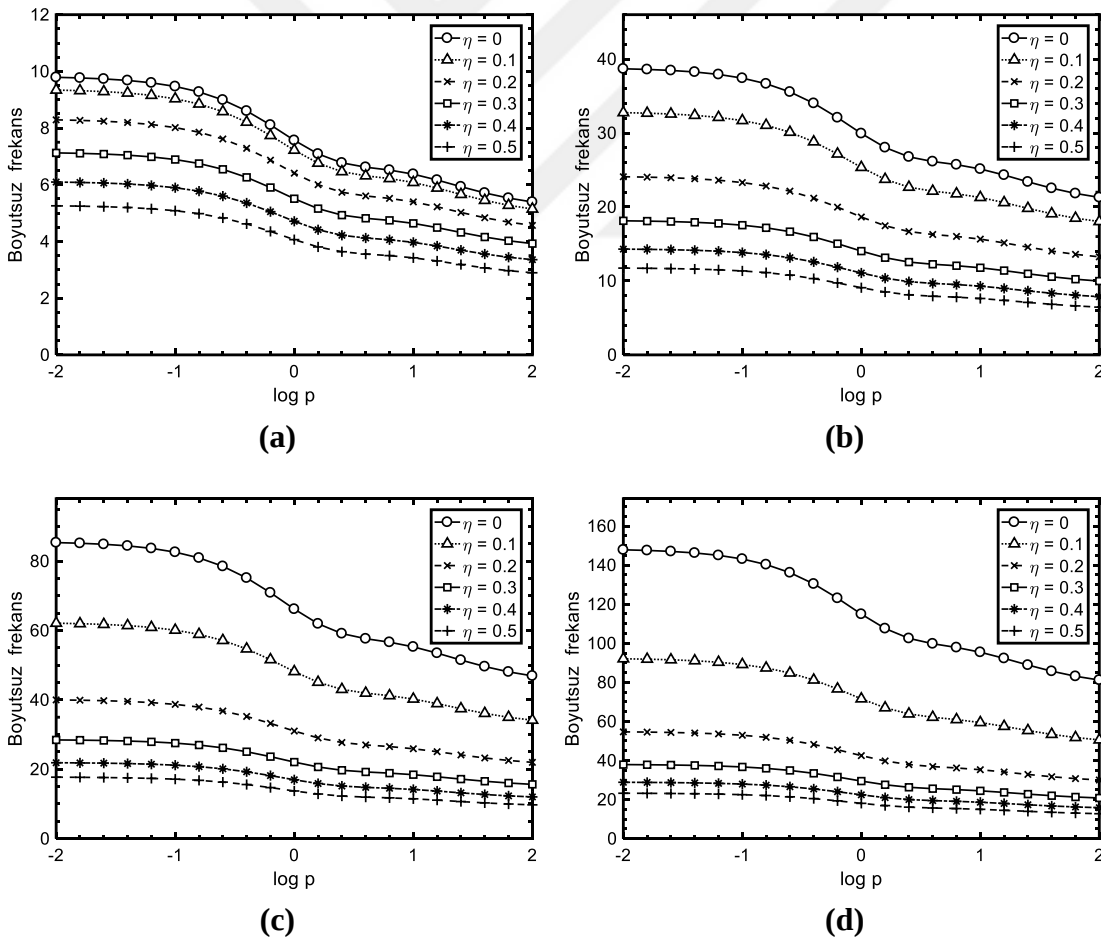
Çizelge 4.21. Sıcaklık etkisi altında farklı sınır şartlı KDFD nanokirişlerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre, ortam sıcaklık değişimi ve güç indeksi değerlerine göre yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile hesaplanan temel mod boyutsuz frekansları ($n = 15$)

Sınır Şart	η	$p = 0.1$		$p = 1$		$p = 10$	
		$\Delta T = 50$ K	$\Delta T = 100$ K	$\Delta T = 50$ K	$\Delta T = 100$ K	$\Delta T = 50$ K	$\Delta T = 100$ K
S-S	0	8.4357	7.2567	5.9580	3.7025	4.8794	2.6427
	0.1	7.9440	6.6786	5.5092	2.9257	4.4898	1.8244
	0.2	6.7659	5.2201	4.3899	0.0000	3.5050	0.0000
C-F	0	1.4757	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.1	1.3551	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.2	0.9927	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
C-S	0	14.0277	13.2271	10.6773	9.3912	8.8981	7.6934
	0.1	13.1222	12.1882	9.8654	8.3302	8.1971	6.7494
	0.2	11.0330	9.7126	7.9437	5.5143	6.5235	0.5283
C-C	0	20.8890	20.3173	16.3160	15.4415	13.6696	12.8560
	0.1	19.4627	18.6883	15.0427	13.8378	12.5677	11.4404
	0.2	13.2367	14.8968	12.0969	9.7919	9.9977	3.3814
S-G	0	1.0031	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.1	0.9330	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.2	0.7069	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
C-G	0	4.8095	4.1516	3.4059	2.1318	2.7931	1.5248
	0.1	4.6750	3.9441	3.2509	1.7399	2.6528	1.0875
	0.2	4.2952	3.3261	2.7948	0.0000	2.2343	0.0000

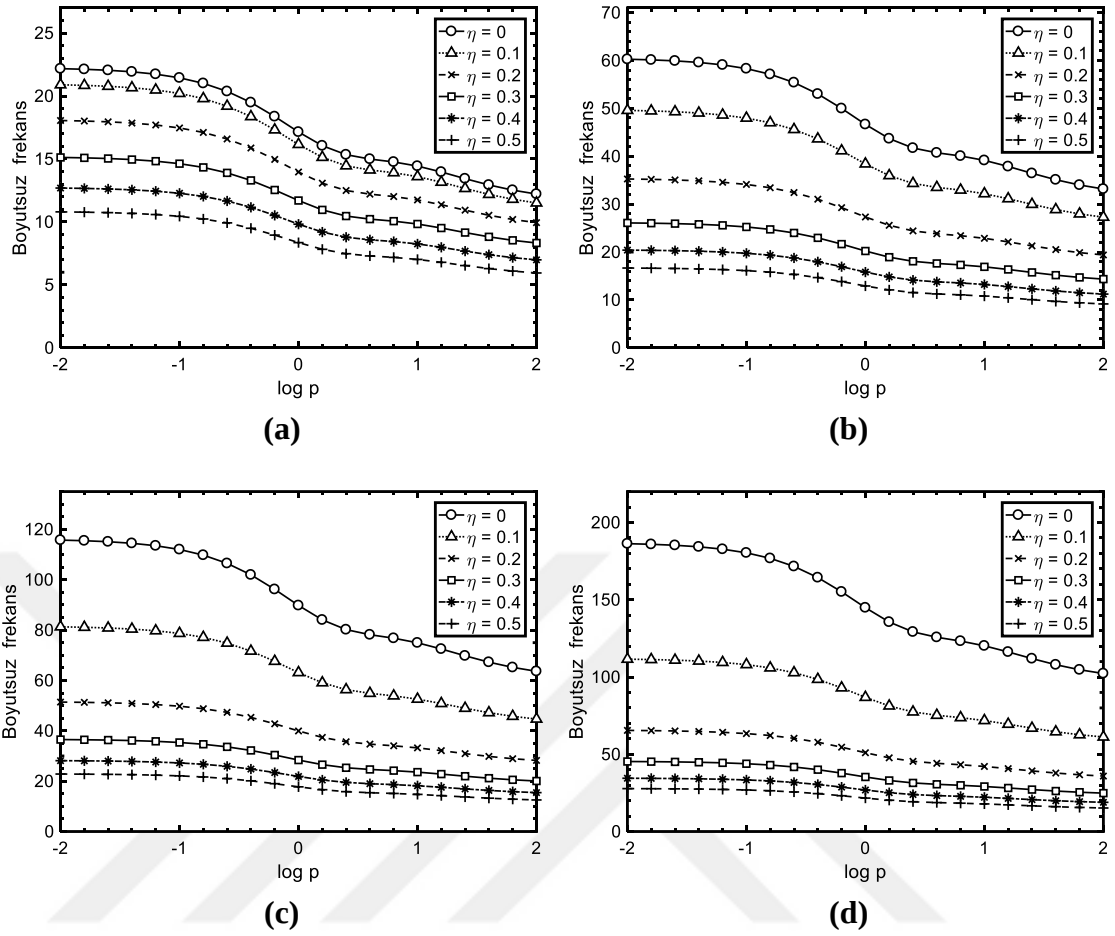
Sıcaklık değişimi etkisindeki KDFD nanokirişlerin atomik boyut etkili serbest titreşimi üzerinde yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonunun uygulamaları Çizelge 4.21 ile ele alınmaktadır. Buradaki sonuçlardan iki ucu basit mesnetli nanokirişlerin temel modu için kıyaslamalar Çizelge 4.11’deki ilgili kısım baz alınarak yapılabilir. Genel olarak klasik elastisite ve çok düşük atomik parametre için sonuçların uyumlu olduğu, ancak yüksek sıcaklık ve düşük atomik parametre değeri için sonuçların analitik neticelerin biraz altına indiği anlaşılmıştır. Bunların haricinde, sınır şartlar bakımından

rijitliği düşük olan sistemlerin yerel olmayan parametre, ortam sıcaklık değişimi veya güç indeksi gibi parametrelerin değerlerinin yükselmesi durumunda titreşim hareketi gösteremediği de varılan bir diğer sonuçtur.

Buradan itibaren tez konusu olan kayma deformasyonlu fonksiyonel derecelendirilmiş nanoyapıların boyutsuz frekans hesapları için çeşitli grafiksel sonuçlara değinilecektir ama tartışmalara geçmeden önce önemli bir bilgi verilmelidir. Grafiksel sonuçlar çoğunlukla güç indeksinin artışı konu almaktadır. Ancak, güç indeksinin artışıyla esasen güç indeksi p 'nin kendisinin değil, 10 tabanındaki logaritması için seçilmiş $\log p = -2, 2$ değerleri ve bunların arasındaki artışı göz önüne alınmaktadır. Güç indeksinin aritmetik artışının yerel olmayan davranışın doğru yorumlanmasını zorlaştırdığı düşünülmektedir çünkü güç indeksinin ondalıklı sayıların farklı mertebeleri arasındaki artışlarının boyutsuz frekanslar üzerindeki etkileri farklı olmaktadır. Tabi grafiksel sonuçlardaki bu tercih homojen nanoyapıları barındıramaz ancak güç indeksi için seçilen minimum değer olan $p = 0.01$ değerinin sonuçları çoğunlukla homojen nanoyapıların sonuçlarına oldukça yakın hesaplanmaktadır. Bu nedenle homojen nanoyapıların sonuçlarının ihmal edilmesinde bir sakınca bulunmadığı mutlaka belirtilmelidir.

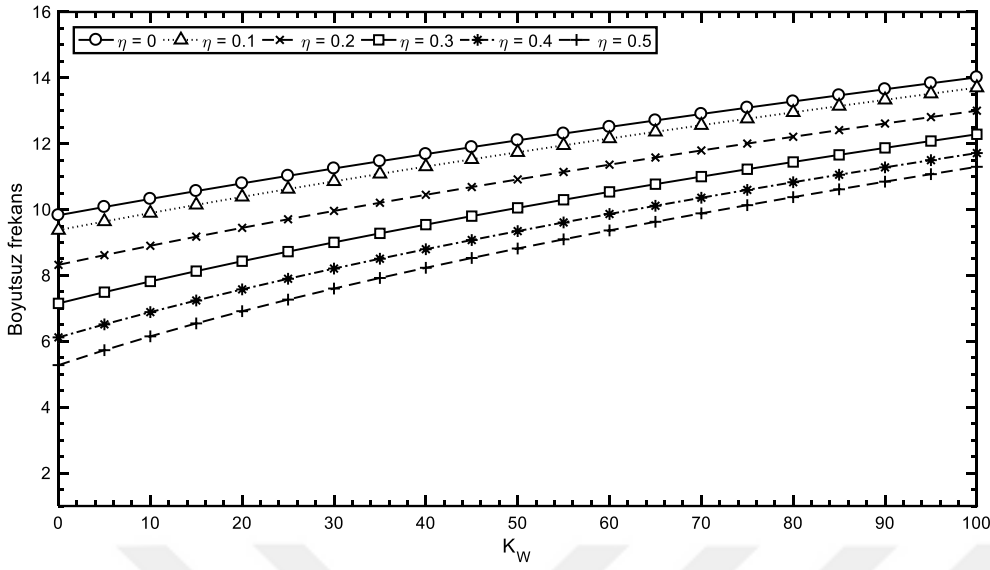


Şekil 4.1. İki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin güç indeksinin artışına göre boyutsuz frekanslarının değişimi; **a)** 1. Mod; **b)** 2. Mod; **c)** 3. Mod; **d)** 4. Mod

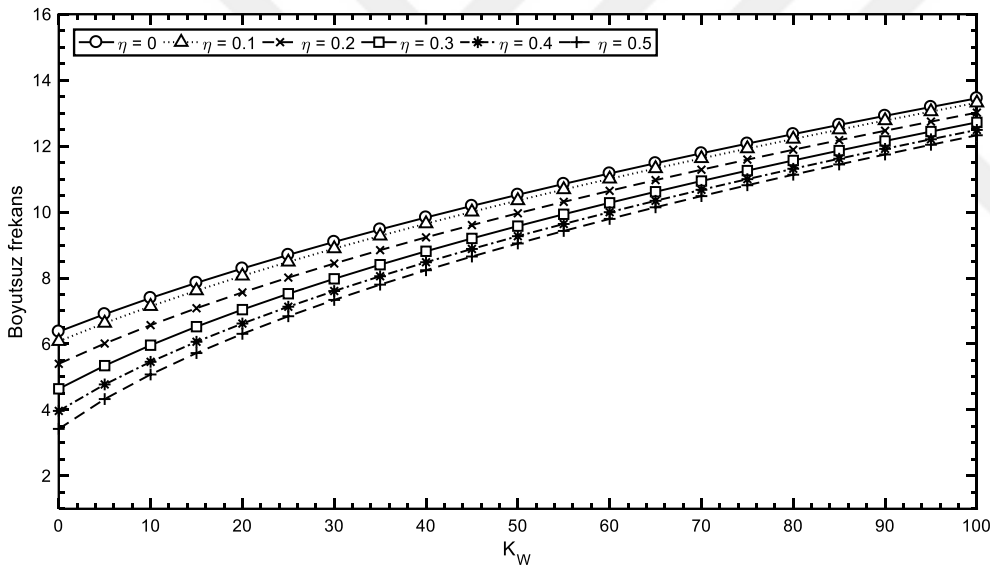


Şekil 4.2. İki ucu ankastre mesnetli KDFD nanokirişlerin güç indeksinin artışına göre boyutsuz frekanslarının değişimi; **a)** 1. Mod; **b)** 2. Mod; **c)** 3. Mod; **d)** 4. Mod

Kayma deformasyonlu fonksiyonel derecelendirilmiş nanokirişlerin ilk dört mod yerel olmayan boyutsuz frekanslarının güç indeksinin artışına göre değişimleri iki ucu basit mesnetli nanokirişler için Şekil 4.1 ve iki ucu ankastre mesnetli nanokirişler için Şekil 4.2 ile verilmektedir. Güç indeksinin boyutsuz frekansları sürekli olarak azalttığı ilk olarak gözlemlenmektedir. Hem klasik hem de yerel olmayan titreşim durumunda, genellikle güç indeksinin $p = 0.01 - 1$ aralığında daha etkin olduğu ifade edilebilir. Yerel olmayan parametre de frekansların düşüşü konusunda bu aralıkta daha hâkimdir. Güç indeksinin $p = 1 - 10$ aralığında etkinliği oldukça azalsa bile $p = 10 - 100$ aralığı arasında güç indeksi frekanslar düşüşünde biraz daha etkin olmaktadır. Öte yandan, güç indeksinin frekanslar üzerindeki etkisi boyutsuz atomik parametre arttıkça azalmaktadır. Ek olarak, iki sınır şartta da boyutsuz frekansların güç indeksi nedeniyle düşüş oranları yaklaşık olarak aynı görünmektedir. Sonuçlar düşük güç indeksine sahip nanoyapılarda yerel olmayan elastisitenin daha etkin olduğunu vurgulamaktadır ancak güç indeksinin yüksek değerlerinde de frekansların atomik parametre tarafından kayda değer bir seviyede azaldığı kesinlikle göz ardı edilemeyecek bir çıkarımdır.



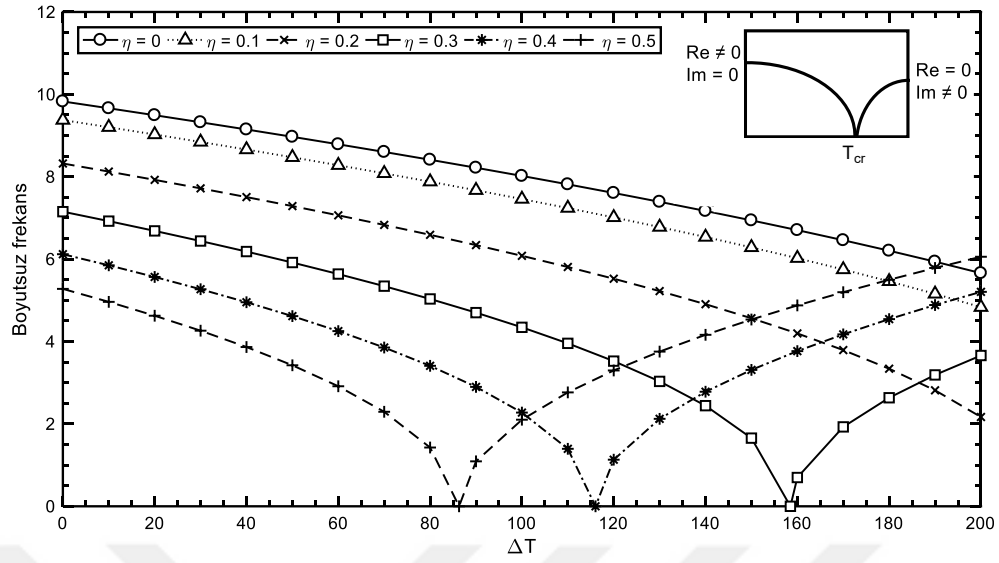
(a)



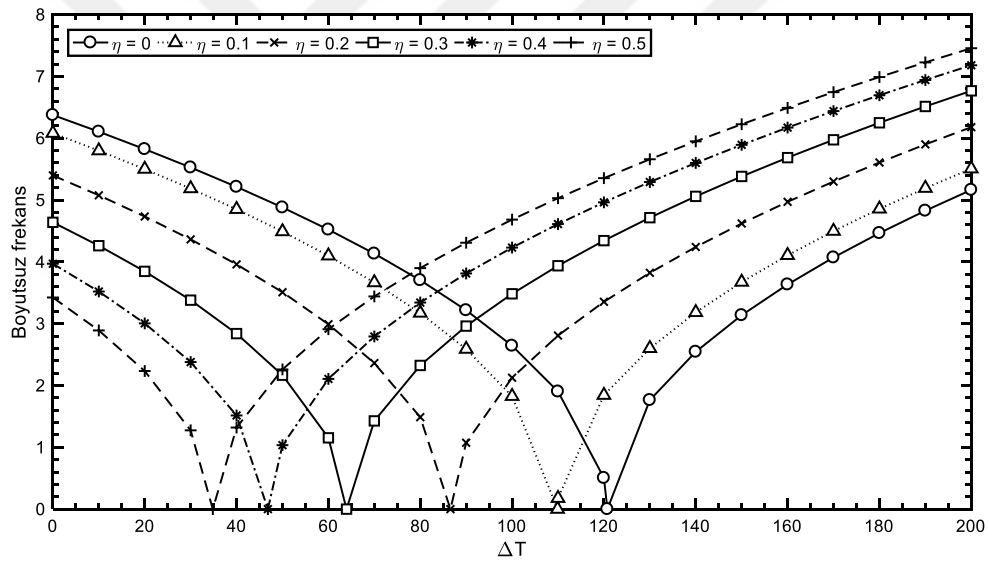
(b)

Şekil 4.3. Winkler zeminine oturan iki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin boyutsuz zemin rijitliğinin artışına göre temel mod boyutsuz frekanslarının değişimi; **a)** $p = 0$; **b)** $p = 10$

İki ucu basit mesnetli kayma deformasyonlu nanokirişlerin yerel olmayan temel mod boyutsuz frekansları üzerinde Winkler zeminin etkisi Şekil 4.3 ile sunulmaktadır. Burada homojen ve fonksiyonel derecelendirilmiş nanokirişler ayrı ayrı ele alınmaktadır. Winkler zemininin boyutsuz frekansları artıran bir etmen olduğu anlaşılmaktadır. Gerek homojen, gerekse kompozit nanoyapılarda Winkler zemin parametresi arttıkça yerel olmayan elastisitenin frekanslar üzerindeki etkisi azalmaktadır. Winkler zemininin yerel olmayan KDFD nanokirişler üzerinde daha fazla bir etkiye sahip olduğu da söylenebilir.



(a)



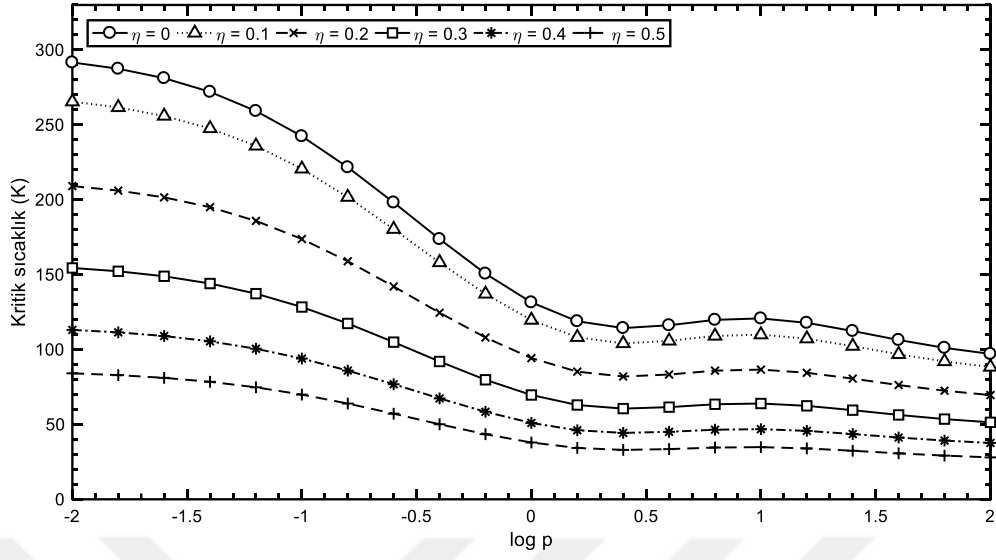
(b)

Şekil 4.4. Sıcaklık etkisi altındaki iki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin ortam sıcaklığının artışına göre temel mod boyutsuz frekanslarının değişimi; **a)** $p = 0$; **b)** $p = 10$

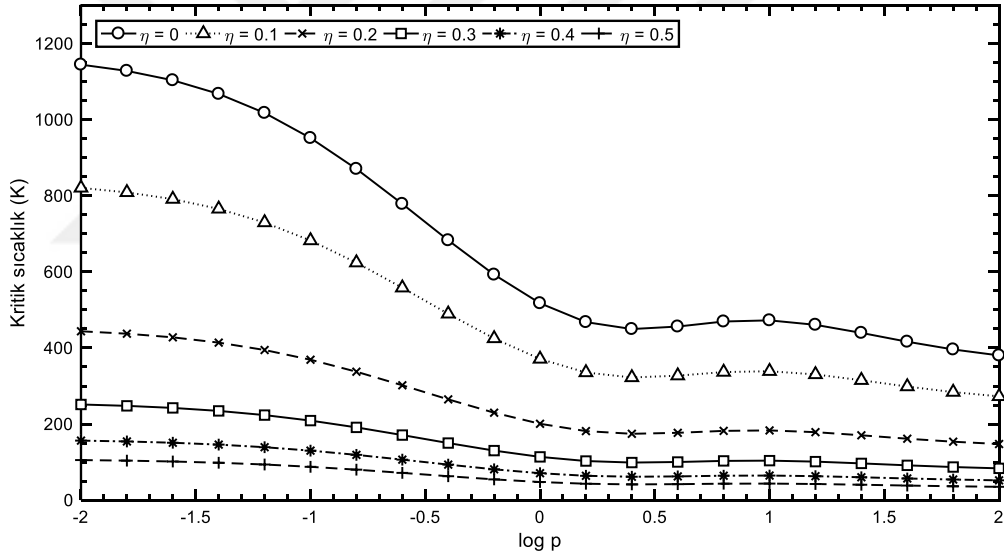
Şekil 4.4'te, iki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin ortam sıcaklığının artışı altında yerel olmayan temel mod boyutsuz frekanslarının değişimleri gösterilmektedir. Öncelikle, Şekil 4.4(a)'da resmedilen kılavuzdan da anlaşılacağı üzere, boyutsuz frekansların azaldıktan sonra yatay ekseninde değiştiği sıfır noktasının kritik sıcaklık olduğu, kritik sıcaklığa kadarki boyutsuz frekansların reel ve kritik sıcaklıktan sonraki boyutsuz frekansların kompleks sayı olarak hesaplandığı, kompleks sayı olarak hesaplanan boyutsuz frekansların reel kısmının olmadığı mutlaka ifade edilmelidir. Elbette kompleks sayı olarak hesaplanan boyutsuz frekansların fiziksel bir anlamı bulunmamaktadır ancak bunlar en azından yerel olmayan parametre ve güç indeksinin etkinliği açısından kısaca ele alınacaktır. İlk olarak homojen nanokirişlerde reel kısmın tartışılmasına bakılacak

olursa, ortam sıcaklığı arttıkça boyutsuz frekansların daha fazla azaldığı açıkça gözlemlenmektedir. Dahası, yerel olmayan parametrenin yüksek sıcaklıklarda daha fazla etkin olduğu, bu etkinliğin yerel olmayan parametrenin artışıyla daha da belirginleştiği kesinlikle ifade edilebilir. Orta değerli yerel olmayan parametreye kadar kritik sıcaklık eşiği görülmezken, bu seviyedeki yerel olmayan parametrelerden itibaren verilen analizlerde atomik parametre arttıkça düşen bir kritik sıcaklık eşiği mevcuttur. Kritik sıcaklık değerlerinden itibaren hesaplanan kompleks değerli boyutsuz frekanslara gelince, atomik parametrenin bu bölgede artışına karşılık etkinliğinin azaldığı anlaşılmaktadır. Öte yandan, kayma deformasyonlu nanokirişlerde klasik elastisite de dahil olmak üzere bütün analizlerde kritik bir sıcaklık eşiği elde edilmekte, dahası bu kritik sıcaklık eşikleri homojen nanoyapıya göre daha da azalmaktadır. Tam da bu noktada kritik sıcaklıklar hakkında daha detaylı bir tartışmaya girilmektedir. Buna göre Şekil 4.5'te iki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin yerel olmayan termal serbest titreşimi için güç indeksinin artışına karşılık kritik sıcaklık eşiklerinin değişimleri ilk iki mod için çizdirilmektedir. Buna göre, ilk olarak güç indeksinin çoğunlukla kritik sıcaklık eşiklerini düşürdüğü anlaşılar ancak bu düşüş güç indeksinin yüzde birler mertebesi kısmında sürekli olarak gözlemlenmektedir. Bu aralık sona erdikten sonra kritik sıcaklık eşikleri yüksek ve çok yüksek değerli boyutsuz yerel olmayan parametre hariç az da olsa bir miktar yükselmekte ve daha sonra yine azalmaktadır. Öte yandan, yerel olmayan parametrenin kritik sıcaklık eşiklerini daha da azalttığı mutlaka söylenmelidir. Yerel olmayan parametrenin güç indeksi düşük KDFD nanokirişlerin kritik sıcaklıklarını daha fazla azalttığı görülmektedir. Son olarak, yüksek modda kritik sıcaklık değerlerinin arttığı ve yerel olmayan parametrenin bu modda daha etkin olduğu da eklenebilir.

İki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin güç indeksinin artışı altında boyutsuz frekanslarının dördüncü kesitin farklı eksenlerine göre değerlerinin sapma yüzdeleri için Şekil 4.6'da sunulmaktadır. Burada boyutsuz frekansların ilgili sapma yüzdesiyle kastedilen tanım Denklem (4.5) ile verilmekte olup, bununla ilgili bazı çizelge sonuçlar da sunularak tartışılmıştır. Hatırlatılacak olursa, sapma yüzdesi geometrik eksen baz alınarak hesaplanan boyutsuz frekansların tarafsız eksen baz alınarak hesaplanan boyutsuz frekanslardan yüzdesel olarak uzaklaşma miktarını ifade etmektedir. Öncelikle, yerel olmayan boyutsuz parametrenin sapma yüzdeleri hiçbir şekilde değiştirmedeği muhakkak belirtilmelidir. Güç indeksinin yüzde birler mertebesinde sapma yüzdeleri oldukça düşük iken onda birler mertebesinde sapma yüzdeleri giderek yükseldiği ve onlar mertebesindeki aralıkta sapmanın en yüksek değerine ulaştığı gözlemlenir. Yani bu değer aralığında fonksiyonel derecelendirilmiş nanoyapıda tarafsız eksenin önemi çok büyüktür ve tarafsız eksen yerel olmayan titreşim analizinde mutlaka göz önüne alınmalıdır. Güç indeksinin onlar mertebesinde itibaren sapma yüzdeleri giderek azalır. Ayrıca, sapma yüzdeleri yüksek modda genel olarak azalmıştır. Bir titreşim analizinde ilk gözlemlenecek olan temel mod öncelikli olarak öneme sahip olduğundan, burada elde edilen sonuçların yerel olmayan davranış için dikkat çektiği ifade edilebilir.

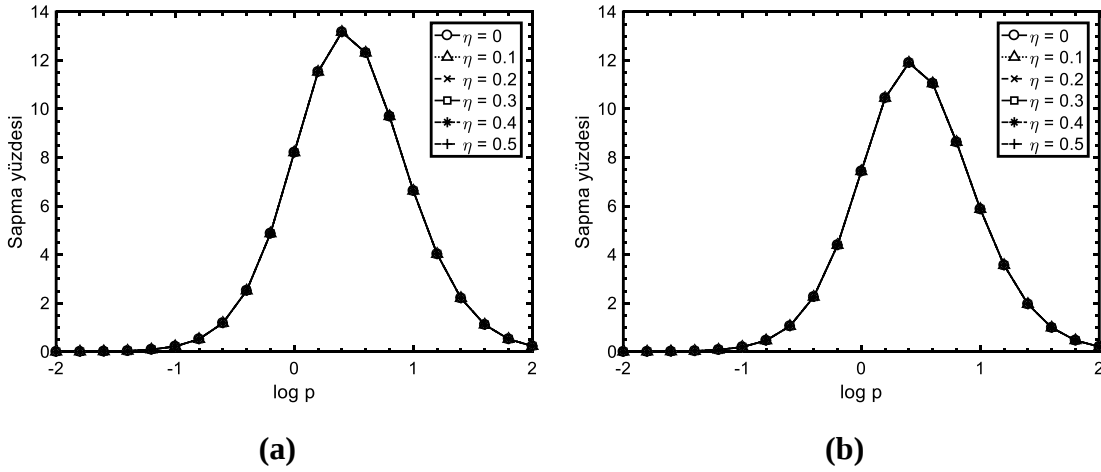


(a)



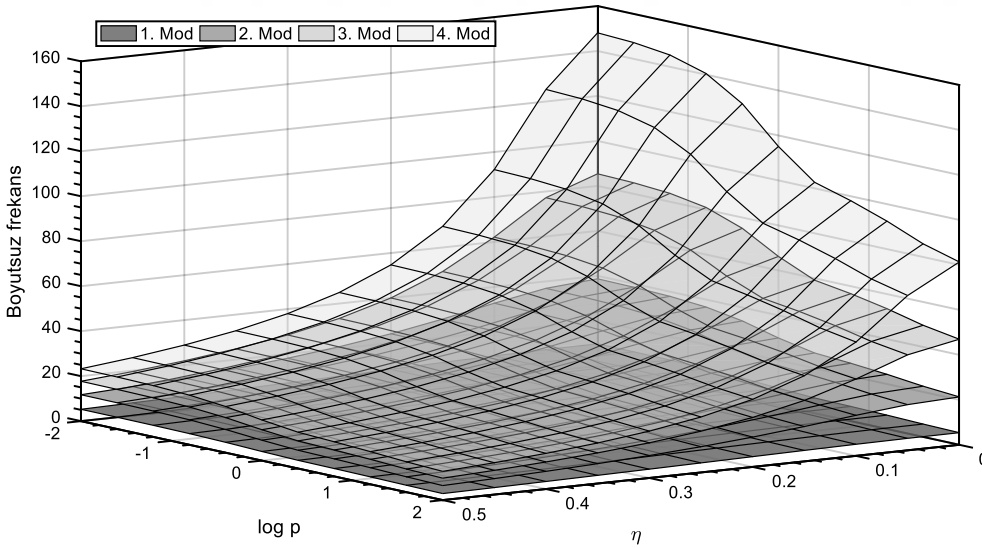
(b)

Şekil 4.5. İki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin güç indeksinin artışına göre temel mod kritik sıcaklıklarının değişimi; **a)** 1. Mod; **b)** 2. Mod



Şekil 4.6. İki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin güç indeksinin artışına göre tarafsız eksen göz önüne alınarak hesaplanan frekanslarının geometrik eksen göz önüne alınarak hesaplanan frekanslardan sapma yüzdelерinin değışimi; **a)** 1. Mod; **b)** 5. Mod

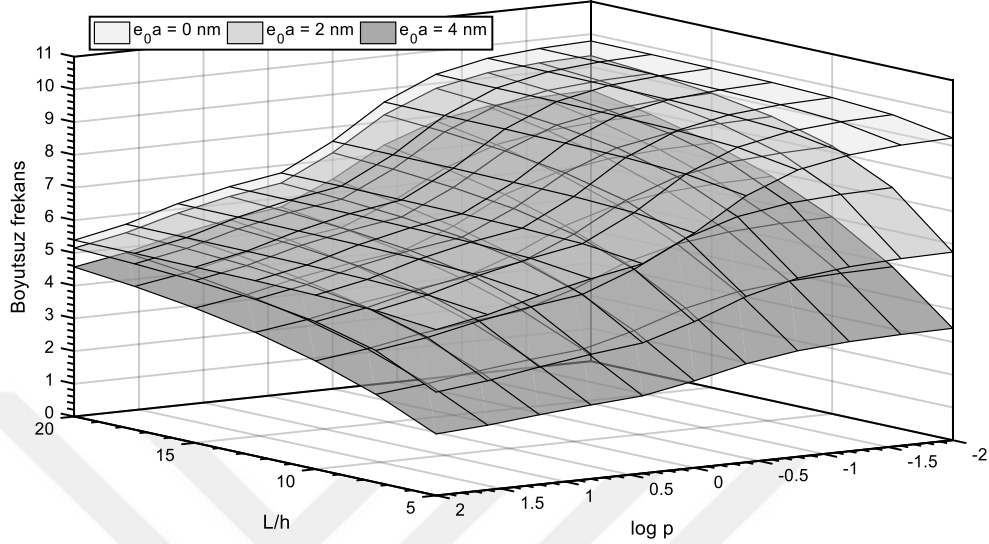
KDFD nanokirişlerin yerel olmayan serbest titreşim analizleri buradan itibaren daha kapsamlı gerçekleştirileceğinden, ilgili analizlerin yerel olmayan sonlu elemanlar metodu ile hesaplanması tercih edilmiştir. Yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonunun uygulamaları hakkında Çizelgeler 4.13 ve 4.14'teki analizlerde 10 sonlu elemanın gayet yeter doğrulukta sonuçlar verdiği düşünülerek, KDFD nanokirişlerin buradan itibaren yapılan analizlerinde 10 sonlu eleman kullanılmıştır.



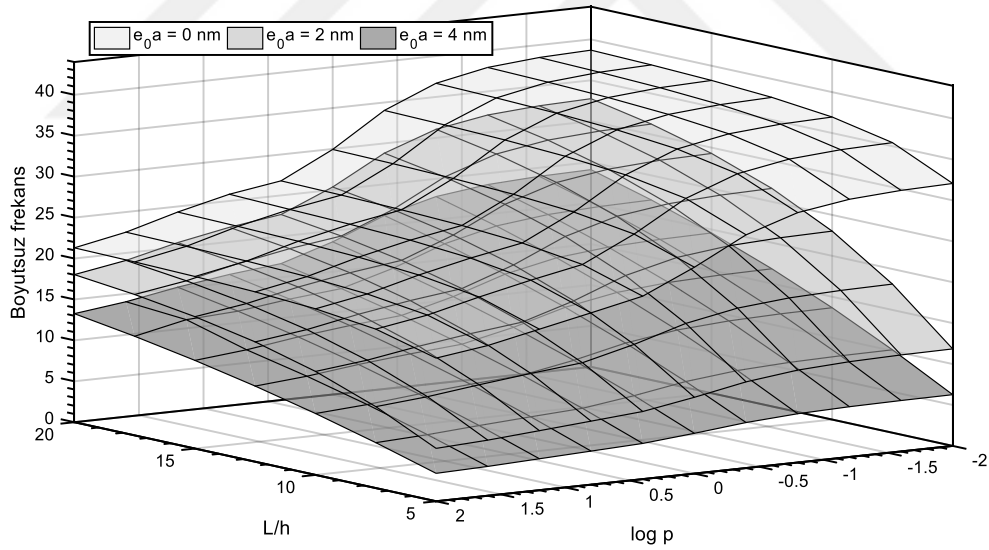
Şekil 4.7. İki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin güç indeksi ve boyutsuz atomik parametre değерlerinin artışına göre ilk dört boyutsuz frekanslarının değışimi

İki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin ilk dört mod boyutsuz frekanslarının değışimleri üzerinde güç indeksinin ve boyutsuz atomik parametrenin artışını inceleyen yüzeyler Şekil 4.7 ile tasvir edilmektedir. Güç indeksinin atomik parametrenin düşük

değerlerinde ve yüksek modlarda frekansların düşmesi için daha büyük bir etkiye sahip olduğu gözlemlenmektedir. Tabi düşük güç indeksi değerlerinde frekansların daha fazla azaldığı yine anlaşılmaktadır.

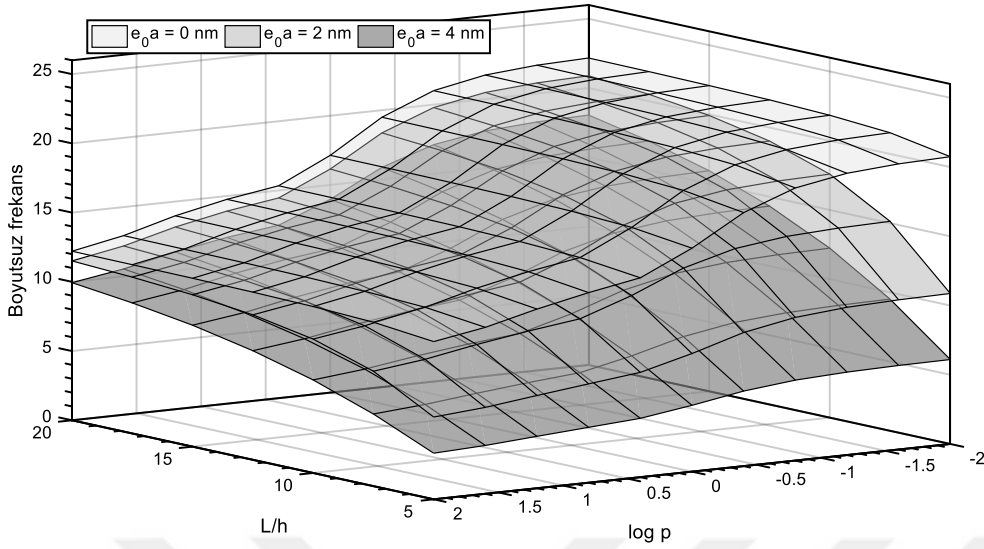


(a)

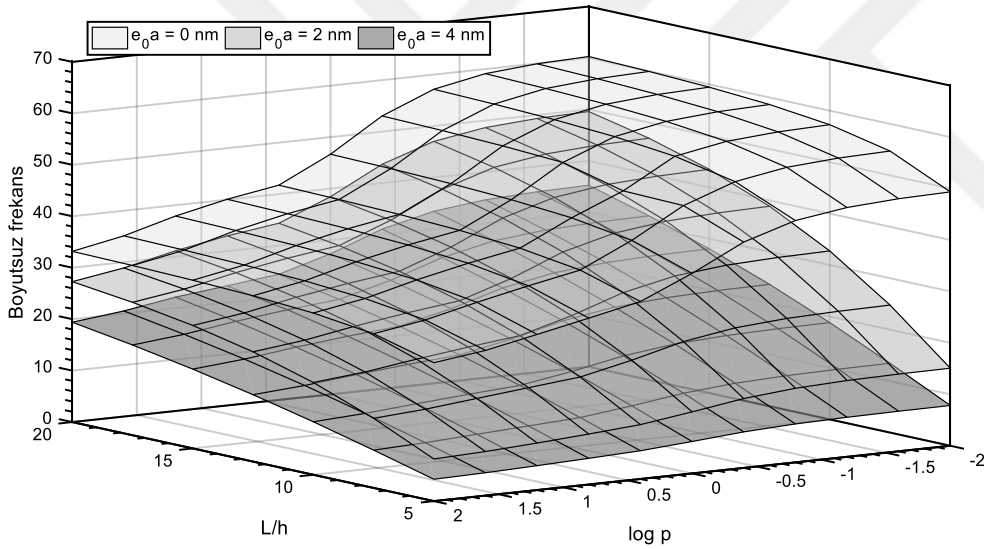


(b)

Şekil 4.8. İki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin güç indeksi ve uzunluk/yükseklik oranı değerlerinin artışına göre boyutsuz frekanslarının değişimi; **a)** 1. Mod; **b)** 2. Mod



(a)

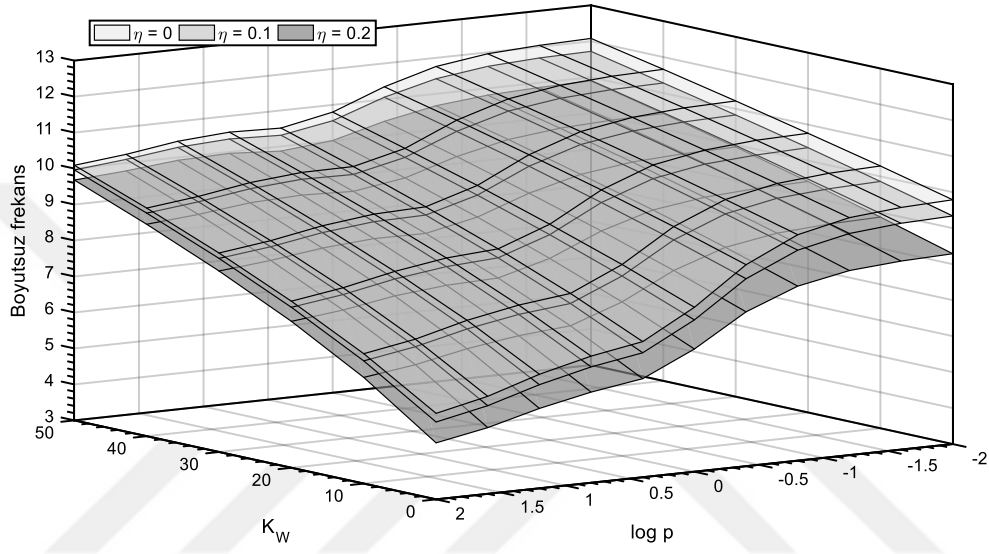


(b)

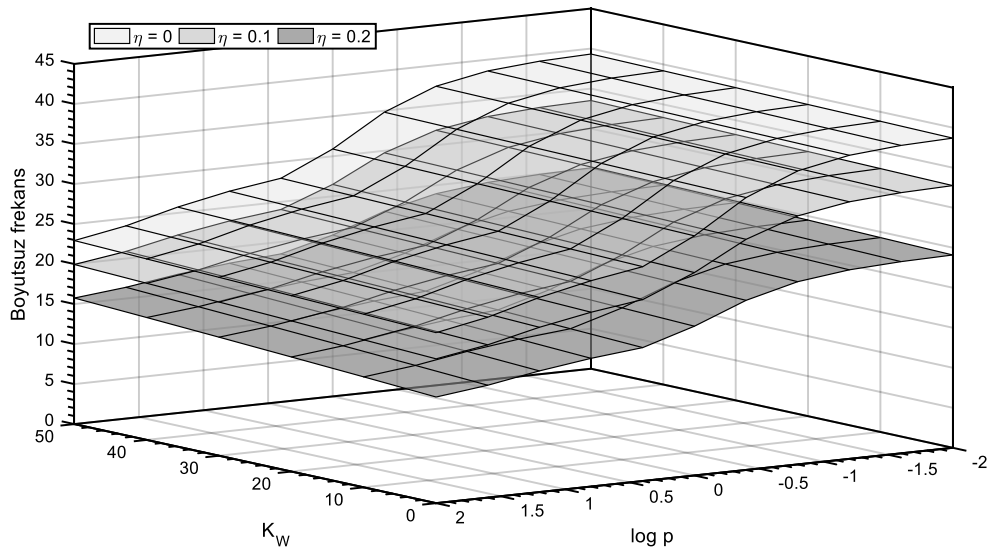
Şekil 4.9. İki ucu ankastre mesnetli KDFD nanokirişlerin güç indeksi ve uzunluk/yükseklik oranı değerlerinin artışına göre boyutsuz frekanslarının değişimi; **a)** 1. Mod; **b)** 2. Mod

İki ucu basit ve iki ucu ankastre mesnetli KDFD nanokirişlerin güç indeksi uzunluk/yükseklik oranı (veya “narinlik oranı” olarak da zikredilebilir) parametrelerinin artışına göre ilk iki mod boyutsuz frekanslarının değişimleri sırayla Şekiller 4.8 ve 4.9 ile verilmektedir. Öncelikle analizlerde dikdörtgen kesit yüksekliğinin sabit ve $h = 1$ nm alındığı bildirilmektedir. Dolayısı ile nanokiriş dış karakteristik uzunluğu değişkenlik göstermekte, klasiğe ek olarak seçilmiş iki farklı iç karakteristik uzunluk değeri göz önüne alınarak boyutsuz frekans değişim yüzeyleri elde edilmektedir. Buna göre, narinlik oranı arttıkça frekanslar yükselmektedir. Bilindiği üzere, dinamik analizde kayma deformasyonlu kiriş teorilerinin kayma deformasyonsuz teorilerle arasındaki en belirgin

ayrım kısa nanokirişlerde gözlemlenir. Ayrıca, kayma deformasyonsuz nanokirişlerin boyutsuz frekansları, narinlik oranından etkilenmez. Nanokiriş uzunluğu arttıkça boyutsuz frekanslar yükselir ve bu yükselme sonucunda boyutsuz frekanslar kayma deformasyonsuz kiriş teorisi ile elde edilen boyutsuz frekans değerlerine yakınsar (Numanoğlu 2019; Numanoğlu vd. 2022). Küçük uzunluklu kirişlerin yerel olmayan boyutsuz frekans yüzeyleri arasındaki farklılıklar dikkate alındığında, kayma deformasyonunun yerel olmayan nanokirişlerin mekanik davranışı için oldukça önemli olduğu anlaşılır. Öte yandan, güç indeksinin de düşük uzunluklu nanokirişler üzerinde daha fazla etkili olduğu anlaşılır ancak bu etki atomik uzunluk arttıkça azalır.

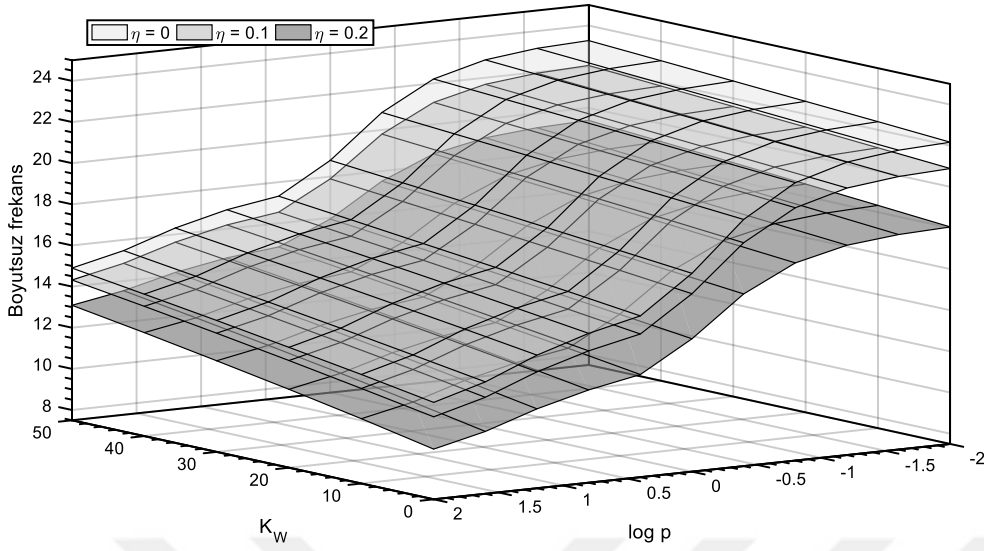


(a)

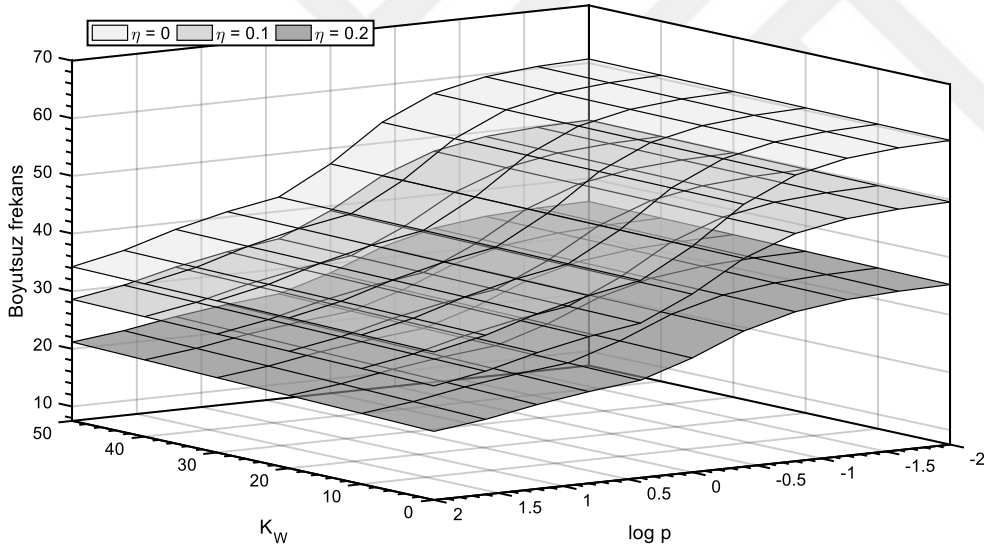


(b)

Şekil 4.10. Winkler zeminine oturan iki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin güç indeksi ve boyutsuz zemin rijitliği değerlerinin artışına göre boyutsuz frekanslarının değişimi; **a)** 1. Mod; **b)** 2. Mod



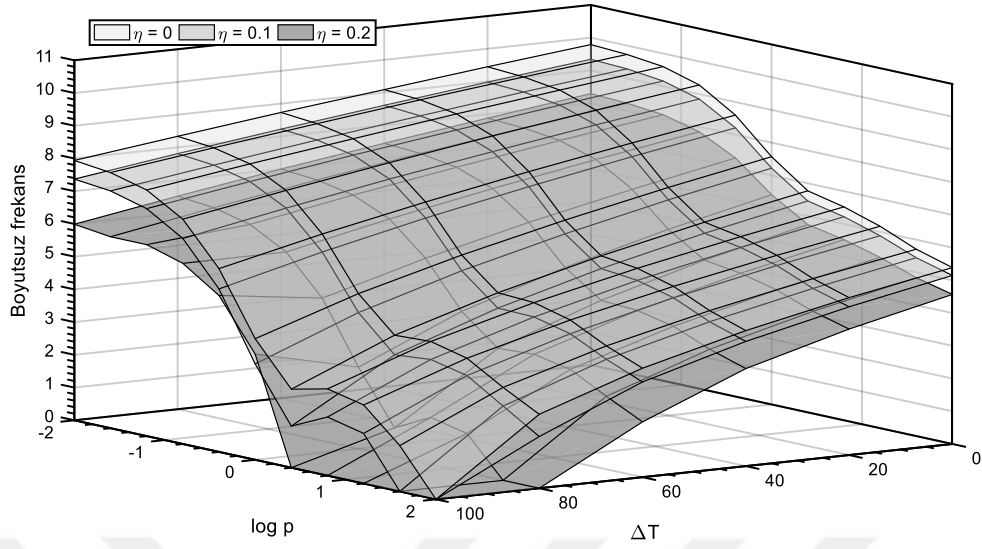
(a)



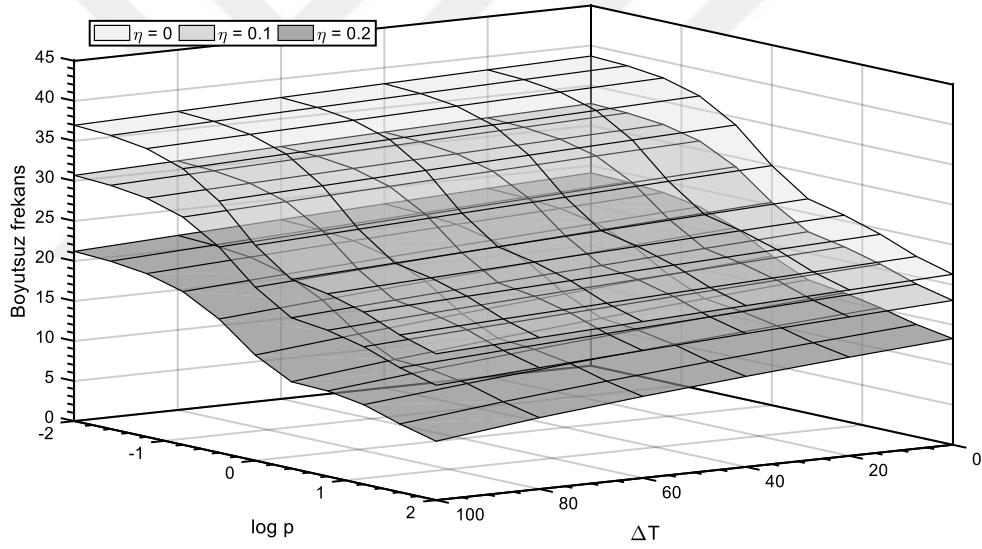
(b)

Şekil 4.11. Winkler zeminine oturan iki ucu ankastre mesnetli KDFD nanokirişlerin güç indeksi ve boyutsuz zemin rijitliği değerlerinin artışına göre boyutsuz frekanslarının değişimi; **a)** 1. Mod; **b)** 2. Mod

Şekiller 4.10 ve 4.11’de elastik zemine oturan sırayla iki ucu basit ve iki ucu ankastre mesnetli KDFD nanokirişlerin boyutsuz frekansları üzerinde güç indeksi ve boyutsuz Winkler zemini rijitliğinin etkileri sunulmaktadır. Genel olarak güç indeksi yükseldikçe Winkler zemininin frekanslar üzerinde daha etkin olduğu görülür. Dahası, bu etki yerel olmayan parametrenin değeri yükseldikçe daha da artar. Öte yandan, Winkler zemininin frekans yükseltme etkisi iki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişler için iki ucu ankastre mesnetliye göre daha fazladır.

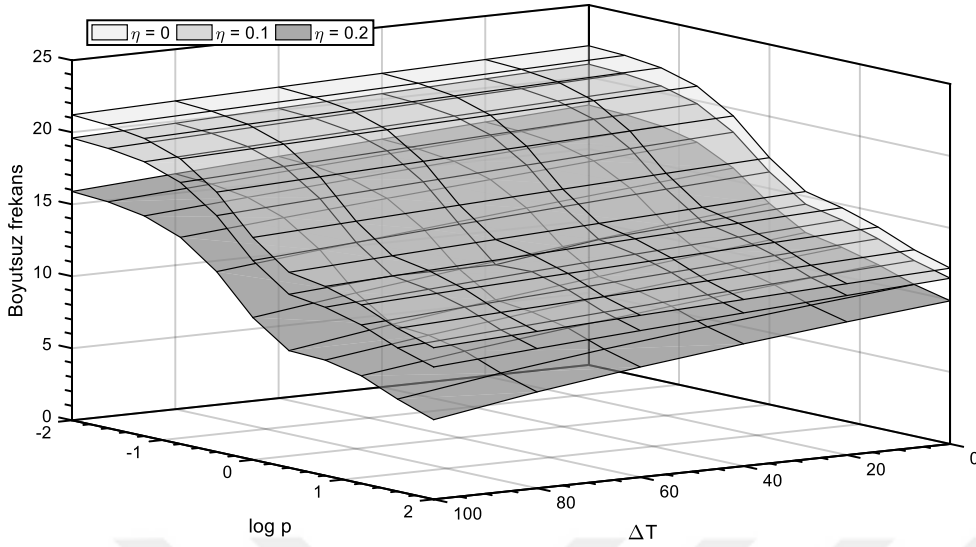


(a)

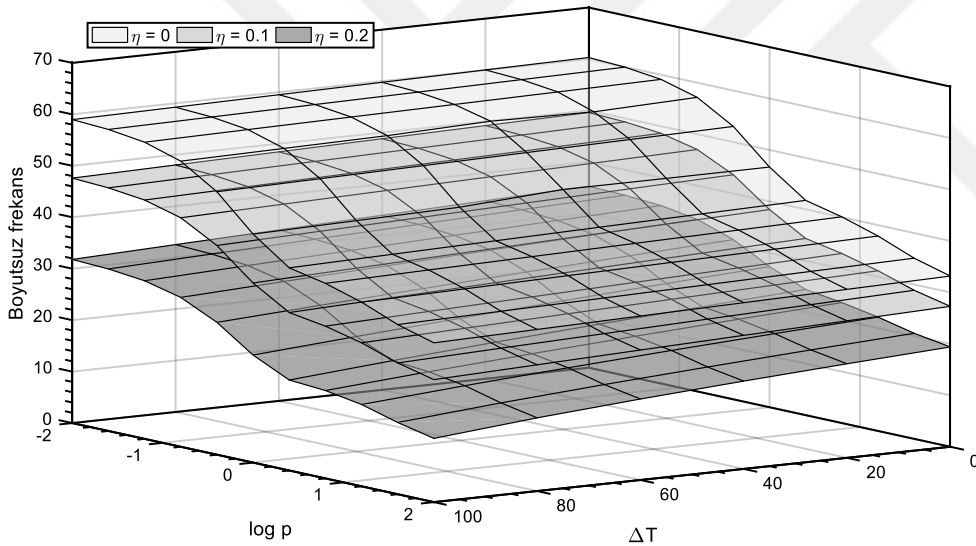


(b)

Şekil 4.12. Sıcaklık etkisi altındaki iki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin güç indeksi ve ortam sıcaklığı değerlerinin artışına göre boyutsuz frekanslarının değişimi; **a)** 1. Mod; **b)** 2. Mod



(a)



(b)

Şekil 4.13. Sıcaklık etkisi altındaki iki ucu ankastre mesnetli KDFD nanokirişlerin güç indeksi ve ortam sıcaklığı değerlerinin artışına göre boyutsuz frekanslarının değişimi; **a)** 1. Mod; **b)** 2. Mod

Sıcaklık etkisi altındaki iki ucu basit mesnetli ve iki ucu ankastre mesnetli KDFD nanokirişlerin güç indeksi ve ortam sıcaklığı değişiminin artışına göre boyutsuz frekans değişim yüzeyleri sırayla Şekiller 4.12 ve 4.13'te betimlenmektedir. Öncelikle, iki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişin temel modunda, güç indeksinin seçilmiş aralığının en yüksek kısmı olan yüzler mertebesinde ve oldukça yüksek ortam sıcaklığı değerlerinde yerel olmayan bazı boyutsuz frekansların reel sayı olarak hesaplanmadığı, bunların davranışının imajiner değerler üzerinden verilmesinin grafikte karmaşaya sebebiyet vereceği düşüncesiyle bu durumların boyutsuz frekansı sıfır olarak gösterilmiştir. Sıcaklık etkisi, güç indeksi yüksek nanokirişlerde daha fazla olmaktadır ve bu etki yerel

olmayan parametre arttıkça şiddetlenmektedir. Winkler zemininde olduğu gibi, ortam sıcaklığı artışı da iki ucu basit mesnetli KDFD nanokirişlerin boyutsuz frekansları üzerinde iki ucu ankastre mesnetliye göre daha etkili olmaktadır.

Kayma deformasyonlu fonksiyonel derecelendirilmiş eksenel nanoçubukların yerel olmayan serbest titreşim davranışı hakkındaki araştırmalar Çizelgeler 4.22-4.37 ve Şekiller 4.14-4.24 ve bunların tartışmaları ile yapılmaktadır.

Çizelge 4.22. Farklı sınır şartlı KDH nanoçubukların farklı narinlik oranı değerlerine göre ilk üç mod boyutsuz frekans oranları için bir karşılaştırma çalışması ($\eta = 0.1$)

r_g	Mod	C-F		C-C	
		Li vd. (2017)	Bu Tez	Li vd. (2017)	Bu Tez
0.01	1	0.9832	0.9832	0.9373	0.9373
	2	0.8734	0.8734	0.8025	0.8025
	3	0.7325	0.7325	0.6676	0.6676
0.1	1	0.9829	0.9829	0.9363	0.9363
	2	0.8714	0.8714	0.7995	0.7995
	3	0.7285	0.7285	0.6627	0.6627
0.3	1	0.9807	0.9807	0.9285	0.9285
	2	0.8565	0.8565	0.7778	0.7778
	3	0.7011	0.7011	0.6309	0.6309

Çizelge 4.22’de, Li vd. (2017) tarafından Love-Bishop nanoçubuğunun boyut etkili serbest titreşim ve dalga yayılım analizi için geliştirilen hibrit bir yerel olmayan süreklilik teorisinin (yerel olmayan şekil değiştirme değişimi elastisite teorisi) uygulama sonuçları kapsamında, yazarların nanoçubuğun geometrik parametrelerini kullanarak

tanımladıkları $r_g = \sqrt{I_p/AL^2} = D/2\sqrt{2}L$ şeklindeki bir narinlik oranının değişimine göre nanoçubuğun yerel olmayan boyutsuz frekans oranı olarak tanımlanan $\bar{\omega}_i/\psi_i$ parametrelerinin karşılaştırılması verilmiştir. Burada D içi dolu daire kesitin çapı olmak üzere $I_p = \pi D^4/32$ ve $A = \pi D^2/4$ ifadeleri nanoçubuk kesitinin sırayla polar atalet momentini ve kesit alanını tanımlar. Yazarlar tarafından frekans oranı olarak tanımlanan parametrede ise $\bar{\omega}_i$, i . modun boyutsuz frekansı iken iki ucu tutulu çubuk için $\psi_i = i\pi$ ve bir ucu tutulu diğer ucu serbest çubuk için $\psi_i = (2i - 1)\pi/2$ olarak göz önüne alınmıştır. Ayrıca, yazarlar söz konusu analizde boyut etkisini sadece yerel olmayan elastisite teorisi ile $\eta = 0.1$ olarak düşünmüşlerdir yani hibrit süreklilik teorisinden kaynaklanan diğer boyut ölçek parametresi ihmal edilmiştir. Frekans oranının paydasında yer alan ψ_i parametresi, sadece, bir tam sayı olan mod numarasından etkilendiğinden, dolayısıyla yazarlara göre bir değişiklik göstermediğinden ve çizelgenin genelinde elde edilen sonuçlar yazarlarla birebir aynı olduğundan tez kapsamında elde edilen analitik frekans hesabının homojen nanoçubuklar için doğru olduğu neticesine varılır. Bu arada nanoçubuk kesitinin çapı, nanoçubuk uzunluğu L ve narinlik oranı r_g ’ye bağlı olarak seçilirse, nanoçubuk uzunluğunun artışının sonuçları değiştirmedeği belirtilmelidir. Çünkü teorik altyapı aktarılırken açıklanan iki ucu tutulu nanoçubuk için $R_i = i\pi/L$ ve bir ucu tutulu diğer ucu serbest nanoçubuk için $R_i = (2i - 1)\pi/2L$ çarpanları aynı oranda azalsa bile buna karşılık olarak atalet momenti ve kesit alanı aynı oranda artış göstermektedir.

Tabi sonuçların mekanik anlamda da bir tartışması yapılmalıdır. Ancak burada yerel olmayan parametrenin farklı değerleri analizde gözetilmediğinden detaylı bir tartışma yapılamaz, sadece kayma deformasyonunun önemi vurgulanabilir. Buna göre İlgili narinlik oranı parametresinin artışı, sabit dış karakteristik uzunluk için kesit çapının artışı veya sabit kesit çapı için uzunluğun azalması anlamına gelmektedir. Bu belirtilen iki durum nanoyapılarda zaten kayma deformasyonunu önemli hale getirmektedir. Dolayısı ile kesit yüksekliği veya çapının artışı veya bunlar sabitken nanoçubuk uzunluğunun azalması frekansları düşüren bir faktördür. Sonuç olarak çizelgede frekansların narinlik oranının artışı altında azalması bu nedenledir. Kayma deformasyonunun daha rijit sistemlerde daha fazla etkili olduğu da yerel olmayan nanokirişlerle ilgili tartışmada ifade edilmişti. Buna paralel olarak narinlik oranı iki ucu tutulu kayma deformasyonlu nanoçubuklarda daha etkili olmaktadır.

Tez konusuyla ilgili olarak bilimsel literatür üzerinde yapılan araştırmalar sonucunda, eksenel nanoçubukların fonksiyonel derecelendirilmesini göz önüne alan çalışmaların çoğunluğunda fonksiyonel derecelendirilmenin eksenel yön olarak göz önüne alındığı (Şimşek 2012; Nazemnezhad ve Kamali 2018b; Bahrami vd. 2019; Arda 2021; Arda vd. 2024), buna ek olarak Love-Bishop çubuğunun Mori-Tanaka karışım kuralı göz önüne alınarak fonksiyonel derecelendirildiği (Mohammadian ve Hosseini 2022) ve bunların haricinde eksenel çubukların kesit yüksekliği doğrultusunda klasik karışım kuralına göre fonksiyonel derecelendirildiği çok az sayıda çalışmanın (Arefi 2016; Arefi ve Zenkour 2017b; Uzun ve Yaylı 2020) bulunduğu anlaşılmıştır. Arefi (2016) ve Arefi ve Zenkour (2017b) tarafından verilen çalışmalar her ne kadar yapı kinematikını Love-Bishop teorisine de dayandırsa da bu çalışmalar esasen nanoyapının dalga yayılımı üzerinde manyetik, elektrik ve piezo gibi dış çevresel olguların etkilerini konu edinmiştir. Dolayısı ile, kesit kalınlığı doğrultusunda klasik karışım kuralına göre fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden imal edilen nanoçubuklarda kesme etkisi hakkında bu tez kapsamında verilen bütün sonuçların bilimsel literatür için bir yenilik olduğu kesinlikle ifade edilmelidir.

Çizelge 4.23. Farklı sınır şartlı KDH nanoçubukların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerlerine göre ilk beş mod boyutsuz frekansları

Sınır Şart	Mod	$\eta = 0$	$\eta = 0.05$	$\eta = 0.1$	$\eta = 0.15$	$\eta = 0.2$
C-F	1	1.5707	1.5630	1.5406	1.5053	1.4597
	2	4.7094	4.5133	4.0457	3.5113	3.0272
	3	7.8401	7.0230	5.5649	4.3719	3.5277
	4	10.9576	9.0023	6.4055	4.7444	3.7139
	5	14.0569	10.4951	6.8790	4.9253	3.7974
C-C	1	3.1407	3.0805	2.9188	2.6979	2.4589
	2	6.2761	5.8330	4.9146	4.0350	3.3437
	3	9.4008	8.0783	6.0470	4.5938	3.6407
	4	12.5098	9.8039	6.6746	4.8497	3.7631
	5	15.5983	11.0892	7.0363	4.9808	3.8218

İki farklı sınır şartlı kayma deformasyonlu homojen nanoçubukların beş farklı boyutsuz yerel olmayan parametre altında ilk beş mod boyutsuz frekansları Çizelge 4.23'te gösterilmektedir. Öncelikle, daha rijit olduğundan her iki ucu tutulu (C-C) nanoçubukların boyutsuz frekansların bir ucu tutulu diğer ucu serbest (C-F) nanoçubuklara göre daha yüksek olduğu gözlemlenir. Atomik boyut etkili mekanik

açısından, nanokirişlerde olduğu gibi nanoçubuklarda da yerel olmayan parametrenin frekansları azalttığı ve bu azalmanın oransal olarak mod sayısının yükselmesiyle yükseldiği belirtilebilir. Dahası, C-C nanoçubuğunun boyutsuz frekanslarının C-F nanoçubuğuna göre daha fazla azaldığı gözlemlenmiştir yani yerel olmayan parametre yine daha rijit sistemlerin frekanslarının azalmasında daha fazla etkindir. Netice olarak elde edilen değerler eksenel nanoçubukların titreşim davranışı üzerinde yerel olmayan elastisitenin göz ardı edilemez bir gerçek olduğunu gösterir. Tezin konusu gereği nanoçubuklar için fonksiyonel derecelendirilme hali gözetileceğinden homojen nanoyapı hakkındaki bu sonuçlar üzerinde tartışmanın daha fazla genişletilmemesi tercih edilmiştir.

Çizelge 4.24. Bir ucu tutulu diğer ucu serbest KDFD nanoçubukların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre ilk beş mod boyutsuz frekansları

η	Mod	$p = 0.01$	$p = 0.1$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 10$
0	1	1.5668	1.5336	1.3178	1.1949	0.9467
	2	4.6977	4.5983	3.9511	3.5825	2.8386
	3	7.8207	7.6551	6.5778	5.9642	4.7257
	4	10.9305	10.6991	9.1934	8.3359	6.6051
	5	14.0221	13.7253	11.7937	10.6938	8.4739
0.1	1	1.5368	1.5042	1.2925	1.1719	0.9286
	2	4.0356	3.9502	3.3943	3.0776	2.4385
	3	5.5511	5.4336	4.6689	4.2334	3.3543
	4	6.3897	6.2544	5.3742	4.8730	3.8612
	5	6.8620	6.7167	5.7715	5.2333	4.1470
0.2	1	1.4561	1.4252	1.2247	1.1104	0.8798
	2	3.0197	2.9558	2.5398	2.3029	1.8247
	3	3.5189	3.4444	2.9597	2.6836	2.1264
	4	3.7047	3.6262	3.1159	2.8253	2.2387
	5	3.7880	3.7078	3.1860	2.8889	2.2892

Çizelge 4.25. İki ucu tutulu KDFD nanoçubukların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre ilk beş mod boyutsuz frekansları

η	Mod	$p = 0.01$	$p = 0.1$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 10$
0	1	3.1329	3.0666	2.6350	2.3892	1.8930
	2	6.2605	6.1280	5.2656	4.7744	3.7829
	3	9.3775	9.1790	7.8872	7.1515	5.6666
	4	12.4789	12.2147	10.4957	9.5168	7.5410
	5	15.5597	15.2303	13.0869	11.8665	9.4034
0.1	1	2.9115	2.8499	2.4488	2.2204	1.7593
	2	4.9024	4.7987	4.1233	3.7387	2.9623
	3	6.0321	5.9044	5.0734	4.6002	3.6450
	4	6.6581	6.5171	5.6000	5.0777	4.0236
	5	7.0189	6.8702	5.9034	5.3530	4.2419
0.2	1	2.4528	2.4009	2.0630	1.8705	1.4821
	2	3.3354	3.2648	2.8053	2.5436	2.0154
	3	3.6317	3.5548	3.0546	2.7697	2.1946
	4	3.7538	3.6743	3.1572	2.8628	2.2685
	5	3.8124	3.7316	3.2065	2.9076	2.3041

Fonksiyonel derecelendirilmiş Love-Bishop nanoçubuklarının güç indeksinin farklı değerlerine göre ilk beş mod boyutsuz frekans parametreleri, C-F ve C-C

nanoçubukları için sırayla Çizelgeler 4.24 ve 4.25 ile sunulmaktadır. Güç indeksinin nanoçubukların boyutsuz frekanslarını azaltmakta olduğu ilk gözlemlenendir. Yerel olmayan parametre arttıkça nanoçubuklar arasındaki frekans farklılığı azalmaktadır. Yüksek güç indeksinde bir de yerel olmayan parametre nedeniyle frekansların azalması nanokirişlerde olduğu gibi nanoçubuklarda da fonksiyonel derecelenmenin önemli olduğunu ortaya koyar. Kayma deformasyonlu nanokirişlerin yerel olmayan titreşim hesaplamaları tartışılırken özellikle iki ucu ankastre ve bir ucu ankastre diğer ucu serbest nanokirişlerin nanoteknolojideki birçok uygulamaya mekanik model olabileceği vurgusu ile, başta yerel olmayan parametre ve fonksiyonel derecelendirilme gibi nanoyapıların dinamik dayanımını düşüren faktörlerin önemli olduğu neticesine varılmıştı. Nanoyapıların mekanik modelinde sadece enine titreşim değil eksenel titreşim olgusu da düşünüldüğünde, C-C ve C-F nanoçubuklarında yerel olmayan parametre ve fonksiyonel derecelendirilmenin dinamik davranış açısından öneme sahip olduğu kesinlikle söylenmelidir.

Çizelge 4.26. Elastik ortama gömülü KDFD nanoçubukların farklı boyutsuz elastik ortam parametresi, boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre ilk üç mod boyutsuz frekansları

Sınır Şart	K_M	η	1. Mod			2. Mod			3. Mod		
			$p = 0$	$p = 0.01$	$p = 10$	$p = 0$	$p = 0.01$	$p = 10$	$p = 0$	$p = 0.01$	$p = 10$
C-F	0	0	1.5707	1.5668	0.9467	4.7094	4.6977	2.8386	7.8401	7.8207	4.7257
		0.1	1.5406	1.5368	0.9286	4.0457	4.0356	2.4385	5.5649	5.5511	3.3543
		0.2	1.4597	1.4561	0.8798	3.0272	3.0197	1.8247	3.5277	3.5189	2.1264
	1	0	1.8619	1.8595	1.5172	4.8142	4.8031	3.0758	7.9032	7.8842	4.8714
		0.1	1.8327	1.8304	1.4993	4.1554	4.1460	2.6855	5.6372	5.6238	3.5200
		0.2	1.7548	1.7526	1.4519	3.1532	3.1464	2.1034	3.6252	3.6170	2.3458
	10	0	3.5305	3.5333	3.8670	5.6708	5.6639	4.6999	8.4504	8.4342	6.0259
		0.1	3.4970	3.4997	3.8366	5.0366	5.0314	4.3129	6.2504	6.2402	4.7581
		0.2	3.4084	3.4112	3.7567	4.1171	4.1145	3.7785	4.4073	4.4028	3.7861
C-C	0	0	3.1407	3.1329	1.8930	6.2761	6.2605	3.7829	9.4008	9.3775	5.6666
		0.1	2.9188	2.9115	1.7593	4.9146	4.9024	2.9623	6.0470	6.0321	3.6450
		0.2	2.4589	2.4528	1.4821	3.3437	3.3354	2.0154	3.6407	3.6317	2.1946
	1	0	3.2959	3.2890	2.2335	6.3549	6.3398	3.9637	9.4534	9.4304	5.7883
		0.1	3.0769	3.0705	2.1043	5.0005	4.9889	3.1581	6.1108	6.0961	3.7915
		0.2	2.6269	2.6217	1.8432	3.4510	3.4433	2.2555	3.7326	3.7241	2.4017
	10	0	4.4559	4.4539	4.1989	7.0251	7.0135	5.3215	9.9143	9.8938	6.7863
		0.1	4.2426	4.2411	4.0527	5.7162	5.7081	4.5559	6.6570	6.6452	4.9174
		0.2	3.8194	3.8190	3.7691	4.2981	4.2943	3.7838	4.4752	4.4703	3.7866

Çizelge 4.26’da eksenel elastik ortama gömülü iki farklı sınır şartlı KDFD eksenel nanoçubukların ilk üç mod boyutsuz frekansları, boyutsuz atomik parametre, güç indeksi ve boyutsuz elastik ortam parametresinin farklı değerlerine göre hesaplanmaktadır. Buna göre, elastik ortamın çubuk rijitliğini artırdığından frekanslar üzerinde artırıcı bir etkisi bulunmaktadır. Ek olarak, elastik ortam parametresinin daha az rijit olan C-F nanoçubuklarının frekanslarını daha fazla yükselttiği görülmüştür. Çok önemli bir çıkarıma göre, elastik ortam parametresi yükseldikçe yerel olmayan parametrenin ve güç indeksinin frekanslar üzerindeki düşürücü etkisi azalmaktadır. Burada elde edilen sonuçlar genel olarak nanokirişlerdeki çıkarımlarla paralellik göstermektedir. Nano-elektro-mekanik sistem uygulamalarında yer alan ve C-C, C-F gibi sınır şartlarla ve kiriş/çubuk gibi mekanik yapı elemanı ile modellenen nanoyapının oturduğu veya gömüldüğü bölgenin elastik zemin veya ortam gibi modellenebileceği (Numanoğlu 2019, Numanoğlu ve Civalek 2019a, Civalek ve Numanoğlu 2020) düşünüldüğünde, burada

elde edilen sonuçlar nano yapıların dinamik karakteristiklerini anlayabilmek açısından dikkat çekicidir.

Çizelge 4.27. İki ucu tutulu KDFD nanoçubukların yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile hesaplanan ilk beş mod boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması ($p = 1$)

η	Mod	Analitik	NL-FEM Sonuçları			D_{ω} (%)		
			$n = 15$	$n = 10$	$n = 5$	$n = 15$	$n = 10$	$n = 5$
0	1	2.6350	2.6350	2.6350	2.6353	0.0000	0.0000	0.0114
	2	5.2656	5.2653	5.2659	5.2737	-0.0057	0.0057	0.1538
	3	7.8872	7.8867	7.8903	7.9436	-0.0063	0.0393	0.7151
	4	10.4957	10.4957	10.5092	10.7031	0.0000	0.1286	1.9760
	5	13.0869	13.0895	13.1273	13.1836	0.0199	0.3087	0.7389
0.1	1	2.4488	2.4488	2.4488	2.4490	0.0000	0.0000	0.0082
	2	4.1233	4.1233	4.1236	4.1273	0.0000	0.0073	0.0970
	3	5.0734	5.0736	5.0745	5.0887	0.0039	0.0217	0.3016
	4	5.6000	5.6004	5.6026	5.6319	0.0071	0.0464	0.5696
	5	5.9034	5.9037	5.9081	5.9095	0.0051	0.0796	0.1033
0.2	1	2.0630	2.0630	2.0630	2.0631	0.0000	0.0000	0.0048
	2	2.8053	2.8053	2.8054	2.8066	0.0000	0.0036	0.0463
	3	3.0546	3.0541	3.0547	3.0581	-0.0164	0.0033	0.1146
	4	3.1572	3.1539	3.1570	3.1633	-0.1045	-0.0063	0.1932
	5	3.2065	3.1943	3.2050	3.2062	-0.3805	-0.0468	-0.0094
0.5	1	1.1848	1.1848	1.1848	1.1848	0.0000	0.0000	0.0000
	2	1.2858	1.2840	1.2856	1.2859	-0.1400	-0.0156	0.0078
	3	1.3069	1.2901	1.3043	1.3071	-1.2855	-0.1989	0.0153
	4	1.3138	1.2903	1.3071	1.3139	-1.7887	-0.5100	0.0076
	5	1.3162	1.2904	1.3076	1.3156	-1.9602	-0.6534	-0.0456

İki ucu tutulu KDFD nanoçubukların seçilmiş bir güç indeksi değeri için ilk beş mod yerel olmayan boyutsuz frekanslarının yerel olmayan sonlu elemanlar metodu ile hesaplanan değerlerle karşılaştırılması Çizelge 4.27 ile sunulmaktadır. Klasik elastisite ile çok düşük ve düşük boyutsuz yerel olmayan parametre değerleri için boyutsuz frekans değerleri Çizelge 4.25 ile verilmişti. Öncelikle bu değerler hakkındaki karşılaştırmalar ele alınacaktır. $n = 5$ gibi düşük sonlu eleman sayısı ile analizdeki sonuçların çoğunlukla uygun olduğu ve atomik parametre arttıkça sapmanın düşmekte olduğu ifade edilebilir. Ancak burada düşük bir boyutsuz atomik parametre değeri olarak tanımlanan $\eta = 0.2$ için beşinci modun yakınsaklığı negatif bir değer olarak elde edilmiştir. Nanokirişlerde negatif yakınsaklık, termal çevreden kaynaklanan oldukça yüksek sıcaklıkların ekstrem bir durum olması nedeniyle göz ardı edilmişti. Ancak burada dış ortamsız yani esasında temel bir mekanik davranışın incelenmesi söz konusudur. Temel bir mekanik davranışın sayısal yöntemlerle incelenmesi esnasında elde edilen ve soruna sebebiyet verecek sonuçlar davranışın doğru olarak öğrenilmesini kesinlikle engeller. Düşük boyutsuz yerel olmayan parametre altında diğer yüksek modlar ve düşük modlarda değeri yükselen boyutsuz yerel olmayan parametre gibi durumlar altında sonlu eleman analizi ile yine sorunlu sonuçların elde edileceği kuvvetle muhtemeldir. Ayrıca, bu durumlar düşünülmesine bile, çizelgede tanımlanan durumlarda sonlu eleman sayısının artışı olan $n = 10$ için negatif hata mutlak değerce artmakta ve negatif hata düşük modlara sirayet etmektedir. Dahası, hatanın vaziyetini kapsamlı olarak görebilmek için Çizelge 4.25'ten farklı olarak burada verilen ve bir ekstrem durum olan çok yüksek boyutsuz atomik parametre değeri olarak tanımlanan $\eta = 0.5$ değeri için elde edilen sapmalar temel mod

hariç çoğunlukla uygun görünmemektedir. Ek olarak belirtilmelidir ki, daha yüksek modlarda negatif sapmanın mutlak değerce giderek artacağı barizdir. Burada ele alınan temel nanomekanik analiz belki elle çözülebildiğinden sonlu eleman sonuçları dikkate alınmayabilir ancak el çözümüne müsait olmayan ve elektronik ortamda sembolik programlamayla dahi analitik çözümünün neticelerine ulaşamayan, sonuç olarak yaklaşık yöntemlere ihtiyaç duyulan bir mekanik analizde bu durum ciddi bir problemi ortaya çıkaracaktır. Bu nedenle nanomekanik davranışın öğrenilebilmesi adına sayısal sonuçların kapsamlı tartışmasından önce yerel olmayan sonlu elemanlar metodundaki problemleri sonuçların kaynağına inilmelidir. Buradaki araştırmaların, mekanik açıdan da anlamlı olarak adım adım yapılması gerektiği düşünüldüğünden ilk olarak kayma deformasyonlu homojen çubuklar ele alınacaktır ve bu konudaki sonuçlar izleyen çizelge ile verilmektedir.

Çizelge 4.28. İki ucu tutulu KDH eksenel nanoçubukların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerlerine göre yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile hesaplanan ilk beş mod boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması

η	Mod	Analitik	NL-FEM Sonuçları			$D_{\bar{\omega}}$ (%)		
			$n = 15$	$n = 10$	$n = 5$	$n = 15$	$n = 10$	$n = 5$
0	1	3.1407	3.1407	3.1407	3.1410	0.0000	0.0000	0.0096
	2	6.2761	6.2758	6.2765	6.2857	-0.0048	0.0064	0.1530
	3	9.4008	9.4002	9.4045	9.4679	-0.0064	0.0394	0.7138
	4	12.5098	12.5098	12.5259	12.7570	0.0000	0.1287	1.9761
	5	15.5983	15.6014	15.6465	15.7136	0.0199	0.3090	0.7392
0.1	1	2.9188	2.9187	2.9188	2.9190	-0.0034	0.0000	0.0069
	2	4.9146	4.9146	4.9149	4.9193	0.0000	0.0061	0.0956
	3	6.0470	6.0473	6.0483	6.0653	0.0050	0.0215	0.3026
	4	6.6746	6.6752	6.6777	6.7126	0.0090	0.0464	0.5693
	5	7.0363	7.0366	7.0419	7.0435	0.0043	0.0796	0.1023
0.2	1	2.4589	2.4589	2.4589	2.4591	0.0000	0.0000	0.0081
	2	3.3437	3.3437	3.3438	3.3452	0.0000	0.0030	0.0449
	3	3.6407	3.6402	3.6409	3.6450	-0.0137	0.0055	0.1181
	4	3.7631	3.7592	3.7628	3.7703	-0.1036	-0.0080	0.1913
	5	3.8218	3.8073	3.8201	3.8214	-0.3794	-0.0445	-0.0105
0.5	1	1.4121	1.4121	1.4121	1.4122	0.0000	0.0000	0.0071
	2	1.5326	1.5304	1.5323	1.5327	-0.1435	-0.0196	0.0065
	3	1.5577	1.5376	1.5546	1.5579	-1.2904	-0.1990	0.0128
	4	1.5659	1.5379	1.5579	1.5660	-1.7881	-0.5109	0.0064
	5	1.5688	1.5380	1.5586	1.5680	-1.9633	-0.6502	-0.0510

Çizelge 4.28’de, iki ucu tutulu ve KDH eksenel nanoçubukların farklı boyutsuz atomik parametre altında yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu kullanılarak hesaplanan ilk beş mod boyutsuz frekans değerlerinin analitik değerlere yakınsama çalışması verilmektedir. Sapma yüzdeleri göz önüne alındığında, bunların genellikle mutlak değerce oldukça düşük olduğu görülmektedir. Ancak, açıkçası yaklaşık metotlarla bir mekanik problemin analizinde mutlak değerce sapma yüzdeleri mühendislik yorumu açısından yeterli bir gösterge değildir. Dolayısıyla daha detaylı bir inceleme yapılmalıdır. Buna göre, formülasyon Çizelge 4.27’nin tartışmaları esnasında da değinildiği gibi bazı durumlarda oldukça başarılı olmaktadır ancak negatif sapma yüzdelerinin hesaplandığı durumlarda başarının düştüğü ifade edilmelidir. 5 ve 10 eleman kullanılarak yapılan analizlerde, çok düşük ve düşük boyutsuz atomik parametre değerleri için analiz

sonuçlarında genel olarak önemli bir başarının sağlandığı yine ifade edilebilir. Bu kısım ele alınacak olursa, genel olarak sonlu eleman sayısının artışı ile analitik sonuca yakınsaklık artmıştır. Ancak mod sayısı yükseldikçe yakınsaklığın azaldığı gözlemlenmektedir. Ek olarak, boyutsuz yerel olmayan parametre arttıkça yakınsaklık her modda artmıştır. Yerel olmayan analizde bir başarının yakalandığı yine ilk olarak akla gelebilir ancak yüksek boyutsuz yerel olmayan parametre değeri ile hesaplamada yakınsaklık oranı negatife dönmüştür yani sonlu elemanlar sonucu analitik sonucun altına düşmüştür. Ayrıca, mod sayısı arttıkça analitik sonuçların zaten altında olan değerler giderek analitik sonuçtan uzaklaşmaktadır. Bu sonuçlar, sonlu elemanlar analizinin kayma deformasyonlu nanoçubuklarda yerel olmayan parametre için bir şüphe barındırdığını göstermektedir. Bir şüphenin olduğundan kesin biçimde emin olmak amacıyla incelenmiş olan daha yüksek sayıda elemanlı yani 15 elemanlı analizler çok daha başarısız değerler vermektedir. Burada temel modda bile negatif sapma yüzdesinin elde edildiği bir durum gözlemlenmektedir. Ayrıca, 15 elemanlı analizlerde daha klasik elastisitede bile dikkat çeken negatif sapma değerleri mevcuttur. Bir ilave inceleme yapılarak 20 elemanın kullanıldığı analizlerde klasik temel mod frekansları da analitik neticelerin altına inmiştir ancak tartışmayı kalabalıklaştırmamak için bunun detayı verilmeyecektir. Sonuç olarak sonlu eleman analizindeki problem dikkate değerdir. Çizelgeler 4.27 ve 4.28 göstermiştir ki, sonlu eleman sayısının daha da yükseltilmesi durumunda, yüksek olmayan değerli boyutsuz yerel olmayan parametrelerde bile oldukça başarısız sonuçlar alınacağı düşünülmektedir. Sorunun çözümü için formülasyonda bir düzenlemeye gidilerek sonuçların karşılaştırılması bu çalışmanın kapsamındadır ancak şu aşamada sorunun kökenine inilmediği hatırlatılmalıdır. Şimdi buna uğraşılacaktır.

Yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonunda yapılacak düzenlemenin ilk adımı şüphelerin eksiksiz olarak tespit edilmesidir. Buraya kadar yapılan tartışmada yüksek sonlu eleman sayılarıyla klasik sonlu eleman analizinden düşük modlar için negatif sapma elde edildiği görülmüş, sonlu eleman sayısı daha da yükseltilirse temel modun bile negatif sapma verdiği açıklanmıştı. Bilindiği üzere tez çalışmasının eksenel çubuklarla ilgili kısmı kayma deformasyonlu eksenel çubuk kuramını yani yerel olmayan Love-Bishop çubuk teorisini ele almıştır. Bu konuda, yerel olmayan sonlu eleman analizi çerçevesinde yapılan çalışmalarda (Demir ve Civalek 2013; Numanoğlu ve Civalek 2022), kayma deformasyonunun (veya yanıl deformasyon, Poisson etkisi) ihmal edildiği kuram olan basit çubuk formülasyonuna dayalı yerel olmayan serbest titreşimde yüksek sonlu eleman için formülasyondan beklenen başarının yakalandığı ifade edilmelidir. Yani klasik elastisitede temel modda ve özellikle yüksek boyutsuz yerel olmayan parametre değeri altında özellikle yüksek modlarda da sapmaların uygun olması ve sonlu eleman sayısının artışı için yüksek yakınsaklığın genel olarak sağlanması bu ifade edilende kastedilmektedir. Sonuç olarak ilk şüpheler, kayma deformasyonlu homojen çubukların klasik serbest titreşimi üzerindedir. Şüphelerin kesinleştirilmesi amacıyla, homojen ve kayma deformasyonsuz eksenel nanoçubukların klasik ve yerel olmayan serbest titreşim analizlerinde sonlu eleman formülasyonunun yakınsaklıkları hesaplanmış olup bunlar izleyen çizelgede verilmektedir.

Çizelge 4.29. İki ucu tutulu kayma deformasyonsuz homojen eksenel nanoçubukların farklı boyutsuz atomik parametre değerlerine göre yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile hesaplanan ilk beş mod boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması

η	Mod	Analitik	NL-FEM Sonuçları			D_{ω} (%)		
			$n = 15$	$n = 10$	$n = 5$	$n = 15$	$n = 10$	$n = 5$
0	1	3.1416	3.1416	3.1416	3.1419	0.0000	0.0000	0.0095
	2	6.2832	6.2833	6.2839	6.2932	0.0016	0.0111	0.1592
	3	9.4248	9.4258	9.4297	9.4947	0.0106	0.0520	0.7417
	4	12.5664	12.5705	12.5865	12.8242	0.0326	0.1600	2.0515
	5	15.7080	15.7204	15.7669	15.8114	0.0789	0.3750	0.6583
0.1	1	2.9972	2.9972	2.9972	2.9975	0.0000	0.0000	0.0100
	2	5.3202	5.3203	5.3206	5.3263	0.0019	0.0075	0.1147
	3	6.8587	6.8591	6.8606	6.8855	0.0058	0.0277	0.3907
	4	7.8248	7.8258	7.8296	7.8859	0.0128	0.0613	0.7809
	5	8.4356	8.4376	8.4447	8.4515	0.0237	0.1079	0.1885
0.2	1	2.6601	2.6601	2.6601	2.6603	0.0000	0.0000	0.0075
	2	3.9124	3.9124	3.9126	3.9148	0.0000	0.0051	0.0613
	3	4.4169	4.4170	4.4174	4.4241	0.0023	0.0113	0.1630
	4	4.6458	4.6460	4.6468	4.6584	0.0043	0.0215	0.2712
	5	4.7645	4.7648	4.7661	4.7673	0.0063	0.0336	0.0588
0.5	1	1.6871	1.6871	1.6871	1.6872	0.0000	0.0000	0.0059
	2	1.9058	1.9058	1.9058	1.9061	0.0000	0.0000	0.0157
	3	1.9564	1.9564	1.9565	1.9571	0.0000	0.0051	0.0358
	4	1.9751	1.9752	1.9752	1.9761	0.0051	0.0051	0.0506
	5	1.9840	1.9840	1.9841	1.9842	0.0000	0.0050	0.0101

Yerel olmayan basit çubuk teorisine (Aydoğdu 2008, 2012) göre formüle edilen yani kayma deformasyonsuz iki ucu tutulu nanoçubuğun Çizelge 4.29'daki sonuçları yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonundan beklenen davranışı ve formülasyonun kullanım faydalarını fazlasıyla ortaya koymaktadır. Bu analiz tez kapsamına girmediği için kısaca bahsetmek adına, genel olarak formülasyonun çok yüksek bir yakınsaklık sağlama başarısına sahip olduğu ifade edilebilir. Tabi yüksek modlarda sapma yüzdesi artmaktadır. Artan sapmayı düşürmek sonlu eleman sayısının yükseltilmesiyle mümkün olmuştur. Öte yandan, yerel olmayan parametre yükseldikçe sapma yüzdeleri düşmüştür. Bu durum, sonlu elemanlar formülasyonunun yerel olmayan mekanik analiz problemlerinde kesinlikle bir yarar sağlayacağını göstermektedir. Burada elde edilen sonuçlara istinaden, klasik teoriyle hesaplanan bazı sonuçların yakınsaklığında bile bir problem olduğundan kayma deformasyonlu homojen çubukların kayma deformasyonsuz homojen çubuklara göre ilave mekanik davranış matrisleri olan ve sırasıyla Denklemler (3.257) ve (3.262) ile tanımlanan yanal atalet K_I ve klasik kütle ataleti $M_{I,c}$ matrislerinden şüphelenilmektedir. Bunlara ek olarak, düşük ve yüksek değerli boyutsuz yerel olmayan parametrenin yüksek modlarında sapma yüzdelerinin negatif olması ve mod sayısı arttıkça negatif sapmaların mutlak değerce yükselmesi nedeniyle Denklem (3.263) ile formüle edilen ve yerel olmayan kütle ataleti matrisini tanımlayan $M_{I,nl}$ ifadesi de şüpheli durumdadır. Kayma deformasyonsuz yerel olmayan eksenel nanoçubukların serbest titreşiminin sonlu eleman analizlerinde herhangi bir problemlili sonuç tespit edilmediği yukarıda belirtildiğinden, yerel olmayan kütle matrisi M_{nl} ifadesi üzerinde herhangi bir düzenleme işlemine gerek yoktur. Ayrıca, ilgili analizde elastik ortam ihmal edildiğinden bununla ilgili şu aşamada bir fikir yürütülmeyecektir.

Yerel olmayan sonlu eleman formülasyonunda söz konusu şüpheyeye yol açan durum, olması gerekenden daha düşük hesaplanan sayısal değerlerdir. Söz konusu şüpheyeye istinaden, sonlu elemanlar formülasyonunun sembolize edilmiş genel denklemi olan $(K - \omega^2 M) = 0$ denkleminde indirgenmiş küresel rijitlik matrisi K 'nin olması gerekenden düşük veya indirgenmiş küresel kütle matrisi M 'nin olması gerekenden fazla olduğu, ya da ikisinin birlikte bulunduğu anlaşılmaktadır. İki durumun bir arada bulunduğu düşünülerek, şüpheli durumdaki matrislerden ilk olarak klasik olanlar yani sırasıyla Denklemler (3.257) ve (3.262) ile formüle edilen yanal atalet rijitliği K_I ve klasik yanal kütle ataleti $M_{I,c}$ matrisleri üzerinde bir düzenleme önerilmektedir. Buna göre, olması gerekenden yüksek veya düşük olan matrisleri olması gereken düzeye yakınlştırabilmek suretiyle,

$$\beta = \frac{n}{n+1} \quad (4.11)$$

ile verilen bir parametre doğrultusunda, yanal atalet rijitliği ve klasik kütle ataleti matrislerinin aşağıdaki gibi değiştirilerek Denklem (3.266)'da verilen sonlu eleman analizine tekrar girmesi yani teknik tabirle sonlu elemanlar analizinin modifiye edilmesi sayısal analizler kapsamında ele alınacaktır:

$$K_I^* = (1 + \beta) K_I = (1 + \beta) \frac{S_r}{l_e^3} \begin{bmatrix} 16 & -32 & 16 \\ -32 & 64 & -32 \\ 16 & -32 & 16 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$M_{I,c}^* = (1 - \beta) M_{I,c} = (1 - \beta) \frac{I_S}{3l_e} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Denklem (4.11)'de β değiştirme (modifikasyon) parametresi olarak tanımlanır ve n sonlu eleman sayısıdır.

Buradan itibaren, yukarıda anlatıldığı üzere ve bundan sonra modifiye edilmiş yerel olmayan sonlu elemanlar metodu olarak anılacak yeni bir çözümün kayma deformasyonlu çubuklar üzerindeki uygulamaları verilmektedir.

Çizelge 4.30. İki ucu tutulu KDH nanoçubukların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerlerine göre modifiye edilmiş (ilk defa) yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile hesaplanan ilk beş mod boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması

η	Mod	NL-FEM Sonuçları			D_{ω} (%)		
		$n = 15$	$n = 10$	$n = 5$	$n = 15$	$n = 10$	$n = 5$
0	1	3.1424	3.1425	3.1427	0.0541	0.0573	0.0637
	2	6.2898	6.2905	6.2988	0.2183	0.2294	0.3617
	3	9.4475	9.4517	9.5119	0.4968	0.5414	1.1818
	4	12.6214	12.6371	12.8636	0.8921	1.0176	2.8282
	5	15.8180	15.8624	15.9363	1.4085	1.6931	2.1669
0.1	1	2.9202	2.9202	2.9204	0.0480	0.0480	0.0548
	2	4.9224	4.9227	4.9266	0.1587	0.1648	0.2442
	3	6.0642	6.0654	6.0809	0.2844	0.3043	0.5606
	4	6.7026	6.7053	6.7377	0.4195	0.4600	0.9454
	5	7.0765	7.0809	7.0884	0.5713	0.6339	0.7404
0.2	1	2.4599	2.4599	2.4600	0.0407	0.0407	0.0447
	2	3.3472	3.3473	3.3485	0.1047	0.1077	0.1436
	3	3.6475	3.6479	3.6511	0.1868	0.1978	0.2857
	4	3.7739	3.7746	3.7801	0.2870	0.3056	0.4518
	5	3.8374	3.8386	3.8406	0.4082	0.4396	0.4919
0.5	1	1.4125	1.4125	1.4125	0.0283	0.0283	0.0283
	2	1.5336	1.5336	1.5337	0.0652	0.0652	0.0718
	3	1.5597	1.5599	1.5601	0.1284	0.1412	0.1541
	4	1.5692	1.5695	1.5700	0.2107	0.2299	0.2618
	5	1.5737	1.5741	1.5751	0.3123	0.3378	0.4016

İlk olarak kayma deformasyonlu homojen çubuklar hakkında modifiye edilmiş yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu kullanılarak yapılan analiz sonuçları Çizelge 4.30’da sunulmaktadır. Yeni elde edilen sonuçların, Çizelge 4.28’de detaylı olarak bahsedilen bütün problemleri kaldırdığı şeklinde bir öngöründe bulunulabilir. Buna göre çoğu durumda karşı karşıya kalınan negatif sapmalar ortadan kaldırılmakta, sonlu elemanlar prosedürünün genel karakteristikleri yeni sonuçlarda da gözlemlenmektedir. Genel olarak, yüksek modlarda yakınsaklık düşmekte, yerel olmayan parametre arttıkça yakınsaklık artmaktadır. Ancak, modifiye edilmiş yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonuna göre temel modda daha yüksek bir sapma yüzdesi elde edilmektedir. Sapma yüzdeleri burada bir bütün olarak incelenecek olursa sonuçların oldukça uygun olduğu ifade edilebilir. Normalde, şu aşamada Çizelge 4.29 tartışılırken şüpheli durumda olduğu ifade edilen yerel olmayan kütle ataleti matrisi $M_{I,nl}$ üzerinde bir düzeltmeye gerek kalmadığı düşünülebilir. Ancak, tez kapsamında elastik ortama gömülü iki ucu tutulu fonksiyonel derecelendirilmiş kayma deformasyonlu nanoçubukların Denklemler (4.11)-(4.13)’e dayanılarak modifiye edilen formülasyon kullanılarak $\eta = 0.2$, $K_M = 10$ ve $p = 10$ değerleri altındaki analizinde üçüncü modda dikkate değer negatif sapmalar hesaplanmıştır ve bunun atomik parametre, mod sayısı ve sonlu eleman sayısının yükselmesi durumunda daha büyük sorunlara sebebiyet vereceği düşünülmektedir. Söz konusu analiz sonuçları Çizelge 4.31’in orta bölümünde verilmekte olup, analizde seçilen mekanik parametrelerin ekstrem değil, aksine gayet olağan seviyelerde olduğu ifade edilmelidir. Sonuç olarak önerilen formülasyonun başarısı kısıtlı kalmış olup, önerilen formülasyon davranışı anlamak için yeterli olmayacaktır. Bu nedenle, yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu, Denklemler

(4.11)-(4.13)'e ek olarak, Denklem (3.263) ile tanıtilan yerel olmayan yanal kütle ataleti matrisi $M_{I,nl}$ 'nin aşağıdaki şekilde düzenlenmesi suretiyle ikinci defa modifiye edilecektir:

$$M_{I,nl}^* = (1 - \beta) M_{I,nl} = (1 - \beta) \frac{(e_0 a)^2 I_S}{L_e^3} \begin{bmatrix} 16 & -32 & 16 \\ -32 & 64 & -32 \\ 16 & -32 & 16 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

İkinci kez modifiye edilmiş formülasyonun uygulaması Çizelge 4.31'in alt bölümünde verilmektedir.

Çizelge 4.31. Elastik ortama gömülü iki ucu tutulu KDFD nanoçubukların yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile hesaplanan ilk beş mod boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması ($\eta = 0.2$, $K_M = 10$, $p = 10$)

İşlem	Mod	NL-FEM Sonuçları			$D_{\bar{\omega}}$ (%)		
		$n = 15$	$n = 10$	$n = 5$	$n = 15$	$n = 10$	$n = 5$
Modifikasyon	1	3.6011	3.7060	3.7682	-4.4573	-1.6741	-0.0239
Önerisiz (Orijinal Formülasyon)	2	3.6013	3.7062	3.7737	-4.8232	-2.0508	-0.2669
	3	3.6014	3.7062	3.7741	-4.8909	-2.1233	-0.3301
	4	3.6014	3.7062	3.7742	-4.8256	-2.0560	-0.2590
	5	3.6015	3.7062	3.7742	-4.6794	-1.9083	-0.1085
İlk Defa Modifikasyon	1	3.6685	3.7379	3.7699	-2.6691	-0.8278	0.0212
	2	3.6687	3.7379	3.7816	-3.0419	-1.2131	-0.0581
	3	3.6687	3.7379	3.7827	-3.1136	-1.2861	-0.1030
	4	3.6687	3.7379	3.7830	-3.0470	-1.2183	-0.0264
	5	3.6687	3.7379	3.7830	-2.9008	-1.0693	0.1244
İkinci Defa Modifikasyon	1	3.7705	3.7705	3.7705	0.0371	0.0371	0.0371
	2	3.7881	3.7882	3.7884	0.1136	0.1163	0.1216
	3	3.7953	3.7955	3.7959	0.2298	0.2350	0.2456
	4	3.7985	3.7987	3.7992	0.3832	0.3885	0.4017
	5	3.8001	3.8003	3.8092	0.5770	0.5823	0.8178
		1. Mod	2. Mod	3. Mod	4. Mod	5. Mod	
Analitik		3.7691	3.7838	3.7866	3.7840	3.7783	

Fonksiyonel derecelendirilmiş Love-Bishop nanoçubuklarının serbest eksenel titreşim davranışını mümkün olduğunca doğru anlamak maksadıyla, ilk defa modifiye edilmiş yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonunun sonuçlarını mantıksız bir duruma düşürdüğü Çizelge 4.30 tartışılırken ifade edilen mekanik parametreler altında, ikinci kez modifiye edilmiş yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonunun sonuçları Çizelge 4.31 ile sunulmaktadır. Öncelikle yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu üzerinde bir değiştirme işlemine olan ihtiyacı bir kez daha vurgulamak için çizelgenin üst bölümündeki sonuçlar verilmektedir. Gerek negatif sapma değerlerinin elde edilmesi, gerek sonlu eleman sayısı arttıkça sapmanın büyümesi, gerekse mod sayısına göre frekansların değişmemesi nedeniyle (çizelgenin en altındaki analitik sonuçlarda böyle bir durum olmadığı gözlemlenmektedir) sonuçlardan nanomekanik davranış hakkında hiçbir şey öğrenilemeyeceği ve bu mekanik analiz probleminde söz konusu sayısal yaklaşımın kullanılamayacağı gayet açıktır. İlk defa modifiye edilmiş formülasyonun başarılı olduğu her ne kadar Çizelge 4.30'daki analizlerde gözlemlense bile incelenen problemin bu

boyutunda önerilen formülasyon orijinal formülasyon gibi davranmış olup netice itibariyle maalesef başarısız kalmıştır. Bu nedenle yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu üzerinde ilkinde ek olarak ikinci bir modifikasyon yapılmış olup, nihayetiyle bu şekilde önerilen formülasyon kullanılarak elde edilen sonuçlar oldukça uygun görünmektedir. Tam bu noktada önemli bir parantez açılması oldukça elzemdir. İlk defa modifiye edilmiş formülasyonun kullanılamayacağını anlaşıldığı bu analiz önceki sonlu eleman analizlerinden farklı olarak bir dış etmeni, elastik ortam rijitliğini içerir. Bu aşamada, modifikasyonu ilk defa önerilen formülasyonun elastik ortam nedeniyle sorunlu bir hal alabileceği, bu nedenle orijinal çözüm prosedürüne sırasıyla Denklemler (3.258) ve (3.259) ile katılan elastik ortamın klasik ve yerel olmayan rijitlikleri olan $K_{M,c}$ ve $K_{M,nl}$ matrislerinin bir sorun oluşturabileceği şüphesi akla gelmektedir. Elastik ortamla ilgili bir fikir yürütülmeyeceği burada tekrar belirtilmektedir. Bunun birinci sebebi, Numanoğlu (2019) tarafından sunulan yüksek lisans tez çalışmasında incelenen kayma deformasyonsuz homojen nanoçubuklarda elastik ortam altındaki sonlu eleman analizlerinde hiçbir sorun olmaması, ikincisi ise elastik ortamın gözetildiği Çizelgeler 4.33-4.35 ile verilen sonuçlardan ikinci kez modifiye edilmek suretiyle nihai halini almış yeni yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonunun kullanılabilirliğinin görülecek olmasıdır.

Öte yandan, Çizelge 4.31’de analitik değerlerden beşinci modun boyutsuz frekansının dördüncü moddan ve dördüncü modun boyutsuz frekansının üçüncü moddan düşük olduğu gözlemlenmiştir. Denklem (3.175) ile hesaplanan doğal frekansın pay ve paydasında, sınır şarta bağlı olarak Fourier serilerinden gelen çarpanlar ve titreşim analizine dahil olan parametrelerin ekstrem durumlarının bir arada bulunması nedeniyle böyle bir durum gerçekleşebilmektedir. Hatta, analizdeki mekanik parametreler öyle ekstrem düzeylerde olabilir ki henüz temel moddan itibaren mod sayısı arttıkça frekans düşebilir. Dahası, mekanik parametrelerin bazı ekstrem durumlarında C-F nanoçubuğunun yüksek mod frekanslarının C-C nanoçubuğunun yüksek modlarını geçtiği bile literatürdeki bazı hesapların sonucudur (Civalek ve Numanoğlu 2020). Bir titreşim probleminin sonlu eleman analizinde standart özdeğer çözümünün vereceği değerler (doğal frekanslar) temel moddan itibaren sıralandığında bir modun doğal frekansı önceki modun çoğunlukla üstünde hesaplanır, yani frekanslar önceki modun kesinlikle altına düşmez ve bu durum sonlu eleman çözümünün değişmez bir karakteristiğidir. Artık nihayet düzenleme sürecinin sonuna getirilebilmiş olan yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonunun başarısının bu paragrafta açıklandığı gibi zuhur edebilen durumlardan muaf tutulması gerektiği düşünülmektedir.

Kayma deformasyonlu homojen nanoçubukların yerel olmayan serbest titreşim analizi için, sonlu eleman formülasyonundaki modifikasyon süreci nedeniyle Çizelge 4.30’da verilen sonuçlar geçersiz olduğundan ikinci kez modifikasyon işleminin sonuçları Çizelge 4.32’de verilmektedir. Burada genel olarak sapma değerleri Çizelge 4.30’da görülenlerden yüksektir ancak oluşan farklılık dikkate değer bir düzeyde değildir. Her ne kadar tez konusu olmasa da kayma deformasyonsuz homojen nanoçubukların yerel olmayan sonlu eleman analizi hakkında Çizelge 4.29’da yapılan mekanik davranışın sayısal metotlarla tartışılması sonucundaki çıkarımların hepsinin Love-Bishop nanoçubukları için de geçerli olduğu rahatlıkla ifade edilebilir.

Çizelge 4.32. İki ucu tutulu KDH nanoçubukların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerlerine göre modifiye edilmiş (ikinci defa) yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile hesaplanan ilk beş mod boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması

η	Mod	NL-FEM Sonuçları			D_{ω} (%)		
		$n = 15$	$n = 10$	$n = 5$	$n = 15$	$n = 10$	$n = 5$
0.1	1	2.9203	2.9203	2.9205	0.0514	0.0514	0.0582
	2	4.9237	4.9243	4.9283	0.1852	0.1974	0.2788
	3	6.0690	6.0716	6.0873	0.3638	0.4068	0.6664
	4	6.7125	6.7188	6.7525	0.5678	0.6622	1.1671
	5	7.0914	7.1029	7.1297	0.7831	0.9465	1.3274
0.2	1	2.4600	2.4601	2.4602	0.0447	0.0488	0.0529
	2	3.3484	3.3491	3.3505	0.1406	0.1615	0.2034
	3	3.6500	3.6520	3.6563	0.2554	0.3104	0.4285
	4	3.7771	3.7807	3.7891	0.3720	0.4677	0.6909
	5	3.8408	3.8459	3.8669	0.4971	0.6306	1.1801
0.5	1	1.4126	1.4127	1.4127	0.0354	0.0425	0.0425
	2	1.5338	1.5342	1.5347	0.0783	0.1044	0.1370
	3	1.5599	1.5605	1.5618	0.1412	0.1798	0.2632
	4	1.5694	1.5700	1.5716	0.2235	0.2618	0.3640
	5	1.5738	1.5745	1.5865	0.3187	0.3633	1.1283

Sonlu eleman analizi hakkında henüz ilk tartışmalardan itibaren ifade edildiği üzere (yani henüz modifikasyon önerileri ele alınmamışken), analizde sonlu eleman sayısı arttıkça negatif sapma yüzdelерinin giderek yükselmesi, karşılaştırmalı sonuçlarda göze çarpan bir diğer başarısızlık durumuydu. Bu nedenle önerilen nihai yaklaşımın kullanılabilirliğini incelemek amacıyla, Çizelge 4.32’deki boyutsuz atomik parametreler altında 50 elemanın kullanıldığı bir ilave analiz daha gerçekleştirilmiş olup, herhangi bir sorun gözlemlenmemiş, sonuçlar doğal olarak biraz daha yakınsak elde edilmiştir. Sayısal sonuçlar ve tartışma bölümünün kalabalıklaşacağı düşüncesiyle ilave analiz sonuçlarının burada verilmemesi tercih edilmiştir.

Buradan itibaren yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonun modifikasyon süreci hakkında “ilk defa” veya “ikinci defa” ifadeleri zikredilmeyecek olup, önerilen yaklaşım tekrardan “modifiye edilmiş sonlu elemanlar formülasyonu” ismiyle anılacaktır.

Çizelge 4.33. Elastik ortama gömülü iki ucu tutulu KDH nanoçubukların farklı boyutsuz elastik ortam rijitliği değerlerine göre modifiye edilmiş yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile hesaplanan ilk beş mod klasik boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması

K_M	Mod	Analitik	NL-FEM Sonuçları		
			$n = 15$	$n = 10$	$n = 5$
1	1	3.2959	3.2977	3.2977	3.2979
	2	6.3549	6.3688	6.3695	6.3777
	3	9.4534	9.5003	9.5045	9.5643
	4	12.5492	12.6609	12.6766	12.9023
	5	15.6296	15.8495	15.8938	15.9675
10	1	4.4559	4.4580	4.4581	4.4581
	2	7.0251	7.0399	7.0404	7.0476
	3	9.9143	9.9625	9.9663	10.0231
	4	12.8977	13.0111	13.0263	13.2456
	5	15.9085	16.1306	16.1739	16.2458

Çizelge 4.34. Elastik ortama gömülü iki ucu tutulu KDH nanoçubukların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve boyutsuz elastik ortam rijitliği değerlerine göre modifiye edilmiş yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile hesaplanan ilk beş mod boyutsuz yerel olmayan frekanslarının karşılaştırılması

K_M	Mod	$\eta = 0.1$				$\eta = 0.2$			
		Analitik	NL-FEM Sonuçları			Analitik	NL-FEM Sonuçları		
			$n = 15$	$n = 10$	$n = 5$		$n = 15$	$n = 10$	$n = 5$
1	1	3.0769	3.0784	3.0785	3.0786	2.6269	2.6280	2.6281	2.6282
	2	5.0005	5.0097	5.0103	5.0142	3.4510	3.4559	3.4565	3.4578
	3	6.1108	6.1329	6.1355	6.1509	3.7326	3.7420	3.7440	3.7481
	4	6.7286	6.7667	6.7729	6.8061	3.8488	3.8632	3.8667	3.8748
	5	7.0851	7.1406	7.1519	7.1785	3.9044	3.9240	3.9289	3.9494
10	1	4.2426	4.2445	4.2445	4.2446	3.8194	3.8209	3.8209	3.8209
	2	5.7162	5.7261	5.7266	5.7296	4.2981	4.3038	4.3043	4.3050
	3	6.6570	6.6803	6.6826	6.6957	4.4752	4.4863	4.4879	4.4906
	4	7.1962	7.2361	7.2418	7.2709	4.5481	4.5656	4.5683	4.5740
	5	7.5104	7.5683	7.5789	7.6033	4.5809	4.6057	4.6094	4.6265

Çizelge 4.35. Elastik ortama gömülü iki ucu tutulu KDH nanoçubukların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve boyutsuz elastik ortam rijitliği değerlerine göre modifiye edilmiş yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile hesaplanan ilk beş mod boyutsuz frekanslarının sapma yüzdeleri

K_M	Mod	$\eta = 0$			$\eta = 0.1$			$\eta = 0.2$		
		$n = 15$	$n = 10$	$n = 5$	$n = 15$	$n = 10$	$n = 5$	$n = 15$	$n = 10$	$n = 5$
1	1	0.0546	0.0546	0.0607	0.0488	0.0520	0.0553	0.0419	0.0457	0.0495
	2	0.2187	0.2297	0.3588	0.1840	0.1960	0.2740	0.1420	0.1594	0.1970
	3	0.4961	0.5405	1.1731	0.3617	0.4042	0.6562	0.2518	0.3054	0.4153
	4	0.8901	1.0152	2.8137	0.5662	0.6584	1.1518	0.3741	0.4651	0.6755
	5	1.4069	1.6904	2.1619	0.7833	0.9428	1.3183	0.5020	0.6275	1.1525
10	1	0.0471	0.0494	0.0494	0.0448	0.0448	0.0471	0.0393	0.0393	0.0393
	2	0.2107	0.2178	0.3203	0.1732	0.1819	0.2344	0.1326	0.1442	0.1605
	3	0.4862	0.5245	1.0974	0.3500	0.3846	0.5813	0.2480	0.2838	0.3441
	4	0.8792	0.9971	2.6974	0.5545	0.6337	1.0380	0.3848	0.4441	0.5695
	5	1.3961	1.6683	2.1203	0.7709	0.9121	1.2370	0.5414	0.6221	0.9954

Elastik ortama gömülü KDH çubukların boyutsuz elastik ortam rijitliğinin farklı değerleri için modifiye edilmiş yerel olmayan sonlu eleman formülasyonu ile analizleri Çizelgeler 4.33-4.35 ile verilmektedir. Buna göre nanoçubukların ilk beş mod frekanslarının klasik elastisiteye göre yakınsama çalışmaları Çizelge 4.33'te, yerel olmayan elastisiteye göre yakınsama çalışmaları Çizelge 4.34'te ve bu iki analizin sapma yüzdeleri toplu olarak Çizelge 4.35'te listelenmektedir. Bu analizlerin öncelikli amacı önerilen sonlu eleman formülasyonunun elastik rijit ortamın dahil olduğu yerel olmayan serbest eksenel titreşim probleminde kullanılabilirliğinin vurgulanmasıdır. Sapma yüzdeleri elastik ortama gömülü çubuklarda formülasyonun kullanılabileceğini açık bir şekilde göstermektedir. Dolayısı ile sırasıyla Denklemler (3.258) ve (3.259) ile ifade edilen klasik ve yerel olmayan elastik ortam rijitliği matrislerinin kayma deformasyonlu yerel olmayan nanoçubukların sonlu eleman analizinde olduğu gibi kullanılabileceği anlaşılmıştır. Elastik ortam parametresi arttıkça sonlu eleman analizinin yakınsaklığının

yükseldiği ve bu yakınsaklığın yerel olmayan parametre arttıkça arttığı gözlemlenir. Bu sonuçlar önerilen formülasyonun oldukça başarılı olduğunu ortaya koyar.

Çizelge 4.36. İki ucu tutulu KDFD nanoçubukların farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre modifiye edilmiş yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile hesaplanan ilk beş mod boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması

p	Mod	$\eta = 0.1$				$\eta = 0.2$			
		Analitik	NL-FEM Sonuçları			Analitik	NL-FEM Sonuçları		
			$n = 15$	$n = 10$	$n = 5$		$n = 15$	$n = 10$	$n = 5$
0.01	1	2.9115	2.9130	2.9131	2.9133	2.4528	2.4539	2.4540	2.4541
	2	4.9024	4.9115	4.9121	4.9160	3.3354	3.3401	3.3408	3.3422
	3	6.0321	6.0540	6.0566	6.0722	3.6317	3.6409	3.6429	3.6472
	4	6.6581	6.6959	6.7021	6.7357	3.7538	3.7677	3.7714	3.7798
	5	7.0189	7.0739	7.0853	7.1120	3.8124	3.8313	3.8363	3.8573
1	1	2.4488	2.4501	2.4501	2.4503	2.0630	2.0640	2.0640	2.0641
	2	4.1233	4.1309	4.1315	4.1348	2.8053	2.8093	2.8098	2.8110
	3	5.0734	5.0919	5.0941	5.1072	3.0546	3.0623	3.0640	3.0676
	4	5.6000	5.6317	5.6370	5.6653	3.1572	3.1689	3.1720	3.1791
	5	5.9034	5.9497	5.9593	5.9818	3.2065	3.2224	3.2267	3.2443
10	1	1.7593	1.7602	1.7602	1.7603	1.4821	1.4828	1.4828	1.4829
	2	2.9623	2.9678	2.9683	2.9707	2.0154	2.0183	2.0187	2.0196
	3	3.6450	3.6584	3.6601	3.6696	2.1946	2.2001	2.2013	2.2041
	4	4.0236	4.0464	4.0505	4.0710	2.2685	2.2767	2.2790	2.2843
	5	4.2419	4.2749	4.2823	4.3000	2.3041	2.3150	2.3182	2.3322

İki ucu tutulu KDFD nanoçubukların ilk beş mod boyutsuz frekans parametreleri, yerel olmayan boyutsuz parametre ve güç indeksinin farklı değerlerine göre analitik ve sonlu eleman çözümleri ile hesaplanmış olup bunlar Çizelge 4.36’da karşılaştırılmaktadır. Sonuçlara bütün olarak göz atıldığında sonlu eleman sonuçlarının oldukça uygun olduğu gözlemlenir. Dolayısı ile yerel olmayan Love-Bishop çubuklarının serbest eksenel titreşimi hakkında önerilen formülasyonun fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden imal edilen nanoçubuklar için de kullanılabilir olduğu sonucuna varılır.

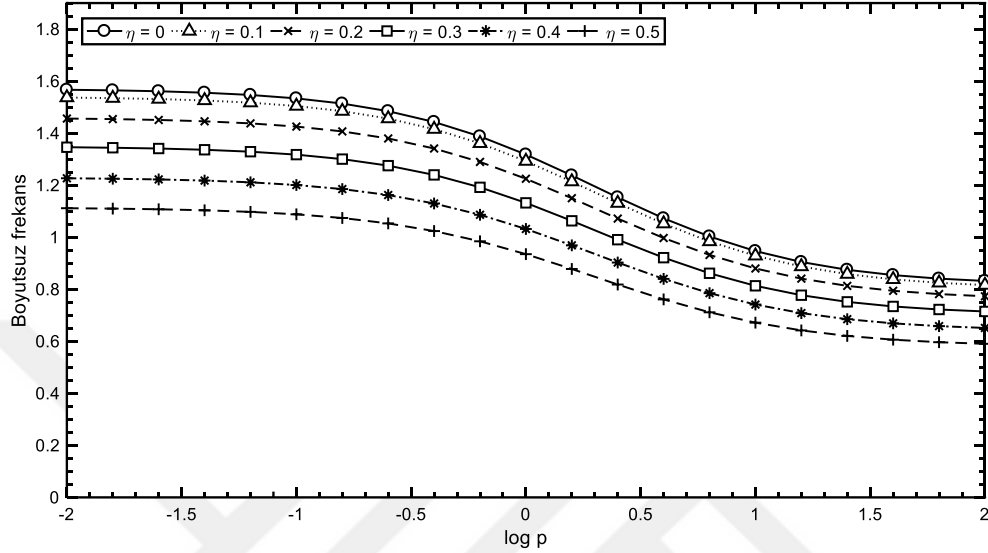
Çizelge 4.37. Elastik ortama gömülü KDFD nanoçubukların farklı boyutsuz elastik ortam parametresi, boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre modifiye edilmiş yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile hesaplanan ilk üç mod boyutsuz frekansları ($n = 15$)

Sınır Şart	K_M	η	1. Mod			2. Mod			3. Mod		
			$p = 0$	$p = 0.01$	$p = 10$	$p = 0$	$p = 0.01$	$p = 10$	$p = 0$	$p = 0.01$	$p = 10$
C-F	0	0	1.5709	1.5670	0.9468	4.7152	4.7035	2.8421	7.8670	7.8475	4.7422
		0.1	1.5408	1.5370	0.9287	4.0501	4.0401	2.4412	5.5799	5.5661	3.3635
		0.2	1.4599	1.4562	0.8799	3.0300	3.0225	1.8263	3.5346	3.5258	2.1305
	1	0	1.8622	1.8597	1.5174	4.8200	4.8089	3.0795	7.9303	7.9112	4.8882
		0.1	1.8330	1.8306	1.4995	4.1599	4.1505	2.6884	5.6523	5.6389	3.5294
		0.2	1.7550	1.7528	1.4520	3.1560	3.1492	2.1052	3.6323	3.6241	2.3503
	10	0	3.5309	3.5337	3.8674	5.6773	5.6704	4.7049	8.4786	8.4624	6.0452
		0.1	3.4973	3.5001	3.8370	5.0417	5.0365	4.3170	6.2665	6.2563	4.7696
		0.2	3.4088	3.4116	3.7571	4.1205	4.1179	3.7812	4.4155	4.4110	3.7925
C-C	0	0	3.1424	3.1346	1.8941	6.2898	6.2742	3.7913	9.4475	9.4241	5.6952
		0.1	2.9203	2.9130	1.7602	4.9237	4.9115	2.9678	6.0690	6.0540	3.6584
		0.2	2.4600	2.4539	1.4828	3.3484	3.3401	2.0183	3.6500	3.6409	2.2001
	1	0	3.2977	3.2907	2.2346	6.3688	6.3537	3.9724	9.5003	9.4772	5.8172
		0.1	3.0784	3.0721	2.1053	5.0097	4.9980	3.1638	6.1329	6.1182	3.8052
		0.2	2.6280	2.6228	1.8440	3.4559	3.4481	2.2586	3.7420	3.7335	2.4077
	10	0	4.4580	4.4561	4.2009	7.0399	7.0282	5.3321	9.9625	9.9418	6.8182
		0.1	4.2445	4.2431	4.0545	5.7261	5.7180	4.5633	6.6803	6.6685	4.9336
		0.2	3.8209	3.8205	3.7705	4.3038	4.3000	3.7881	4.4863	4.4814	3.7953

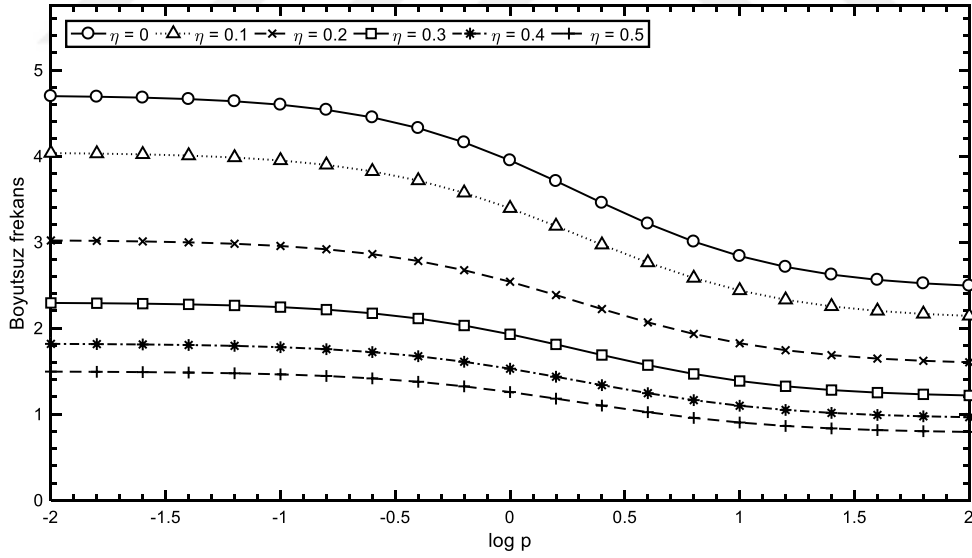
KDFD nanoçubukların yerel olmayan eksenel serbest titreşim analizleri için son olarak elastik ortama gömülü çubuklar üzerinde sonlu eleman formülasyonunun uygulamaları Çizelge 4.35 ile sunulmaktadır. Burada boyutsuz elastik ortam rijitliği, boyutsuz atomik parametre ve güç indeksinin farklı değerleri için ilk üç mod boyutsuz frekans parametreleri listelenmektedir. Sonuçların mukayesesi için Çizelge 4.26 incelenmelidir. Buna göre analitik sonuçlar, önerilen sonlu eleman çözümü ile oldukça yüksek bir uyuma sahiptir. Bu arada, tez kapsamında ele alınmış olan yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonunun modifikasyon sürecinde ilk defa modifiye edilmiş formülasyon son olarak bu çizelgeye uygulandığında, Çizelge 4.31'in de işleme sebebi olan $\eta = 0.2$, $K_M = 10$ ve $p = 10$ parametreleri altında iki sınır şartın sonuçları analitik sonuçların altındaydı ve negatif sapma ihmal edilemez bir düzeydeydi. Atomik parametrenin değerinin yükselmesi veya yüksek sonlu eleman sayıları ile analizde sorunun giderek büyüyeceğinden gayet tabii olarak şüphelenilmiştir. Bu nedenle yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu hakkında ikinci bir modifikasyon sürecine gidilmiş olup, nihai formülasyon kayma deformasyonlu fonksiyonel derecelendirilmiş nanoçubukların yerel olmayan eksenel serbest titreşim analizi için büyük bir alternatif çözüm olabileceğini çeşitli analizlerdeki başarısı ile göstermiştir.

Buradan itibaren KDFD eksenel nanoçubukların yerel olmayan serbest titreşimi hakkında grafiksel sonuçlar ve tartışmaları sunulmaktadır. İlk olarak, güç indeksinin artışına göre ilk iki mod boyutsuz frekansların değişimi bir ucu tutulu diğer ucu serbest nanoçubuk için Şekil 4.14'te ve iki ucu tutulu nanoçubuk için Şekil 4.15'te verilmektedir. KDFD nanokirişlerin sonuçlarına benzer olarak, güç indeksinin boyutsuz frekansları azalttığı gözlemlenir. Güç indeksinin yüzde birler mertebesindeki artışı için frekanslar çok fazla etkilenmezken bu mertebe sona erdikten sonra güç indeksinin artışı için frekanslar daha fazla azalır ve onlar mertebesinin sonunda frekanslardaki azalmanın şiddeti azalır. Güç indeksinin frekanslar üzerindeki etkisi yerel olmayan parametre

azaldıkça azalmaktadır. Ayrıca, güç indeksinin yüksek modda daha fazla etkili olduğu gözlemlenmiştir. Öte yandan, özellikle yerel olmayan analizde, güç indeksi bir ucu tutulu diğer ucu serbest nanoçubukta iki ucu tutulu nanoçubuğa göre daha etkindir. Elde edilen değerler, kompozit nanoçubukların mekanik davranışında boyut etkisinin mutlaka göz önüne alınması gerektiğini vurgular.

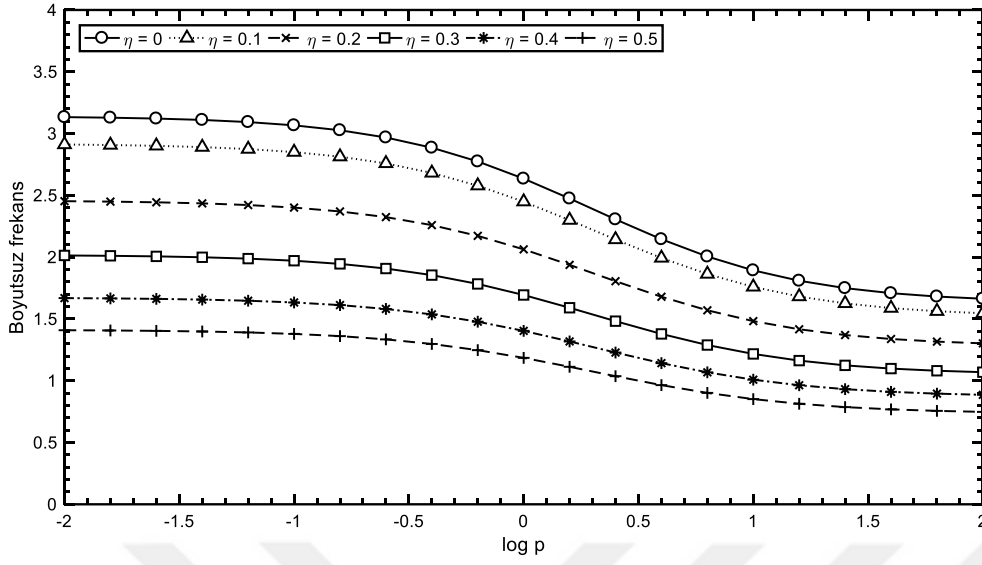


(a)

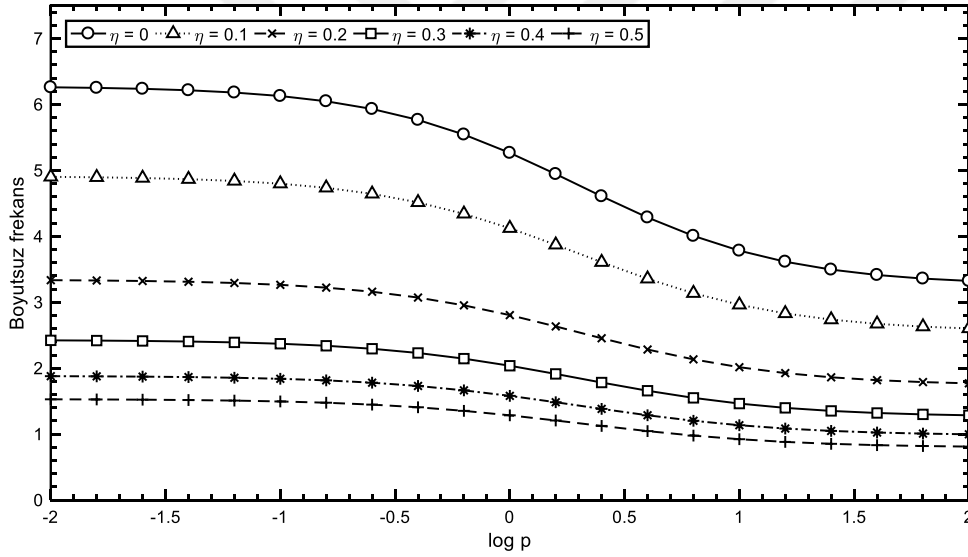


(b)

Şekil 4.14. Bir ucu tutulu diğer ucu serbest KDFD nanoçubukların güç indeksinin artışına göre boyutsuz frekanslarının değişimi; **a)** 1. Mod; **b)** 2. Mod

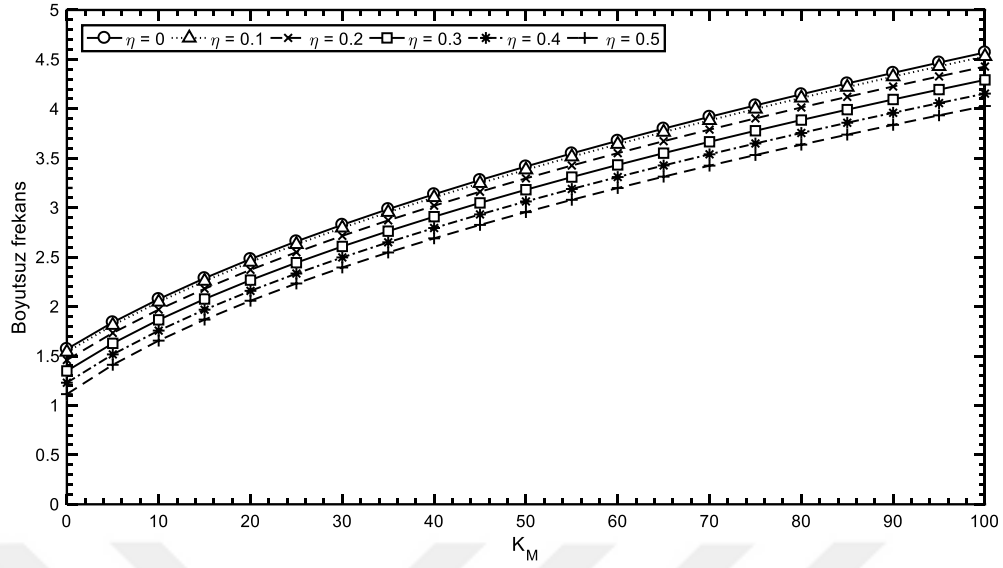


(a)

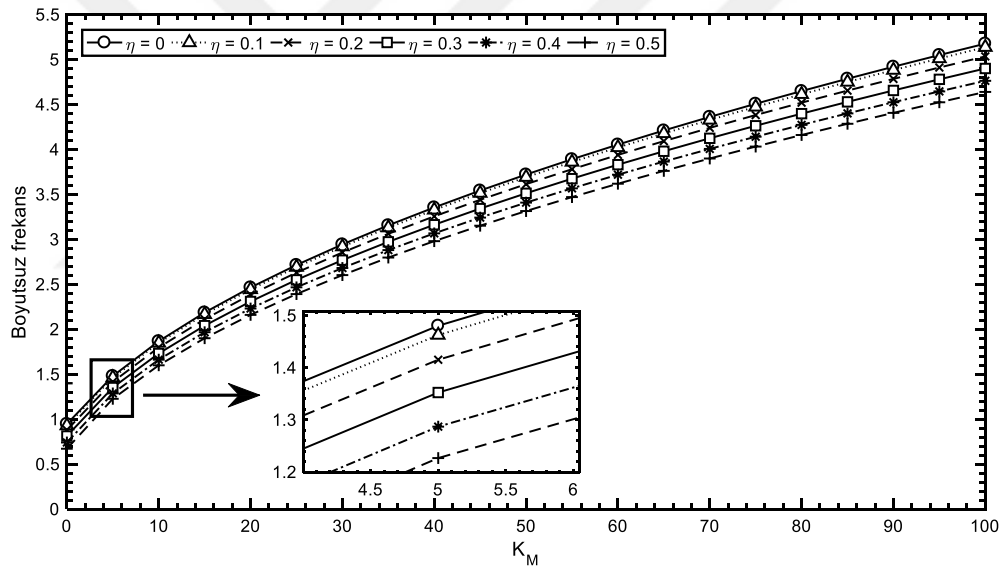


(b)

Şekil 4.15. İki ucu tutulu KDFD nanoçubukların güç indeksinin artışına göre boyutsuz frekanslarının değişimi; **a)** 1. Mod; **b)** 2. Mod

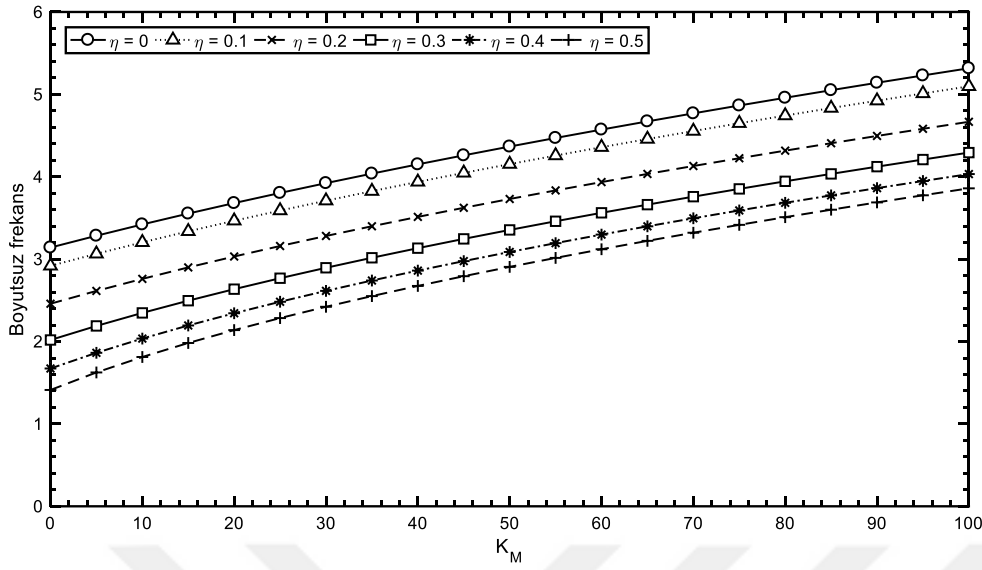


(a)

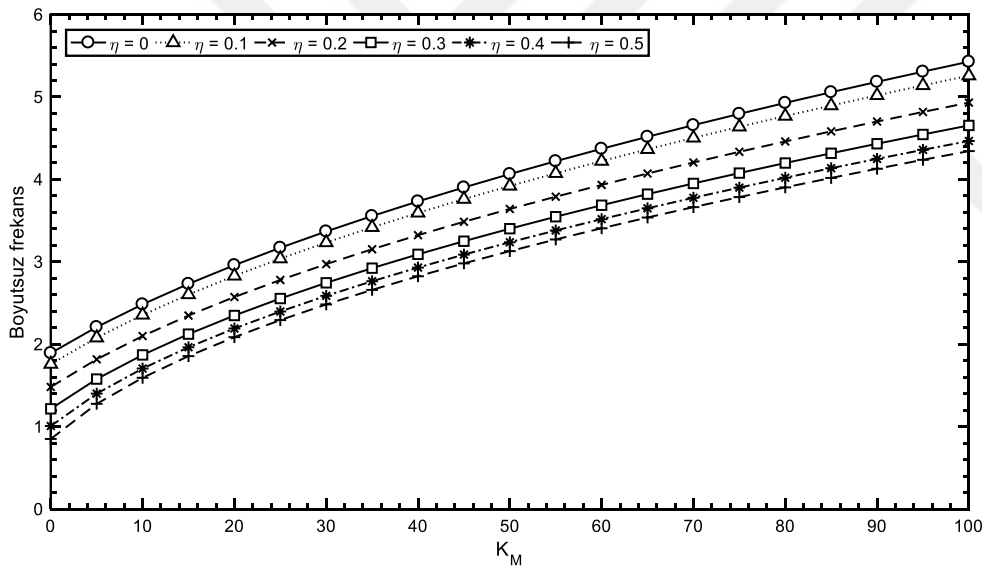


(b)

Şekil 4.16. Elastik ortama gömülü bir ucu tutulu diğer ucu serbest KDFD nanoçubukların boyutsuz elastik ortam rijitliğinin artışına göre temel mod boyutsuz frekanslarının değişimi; **a)** $p = 0$; **b)** $p = 10$



(a)

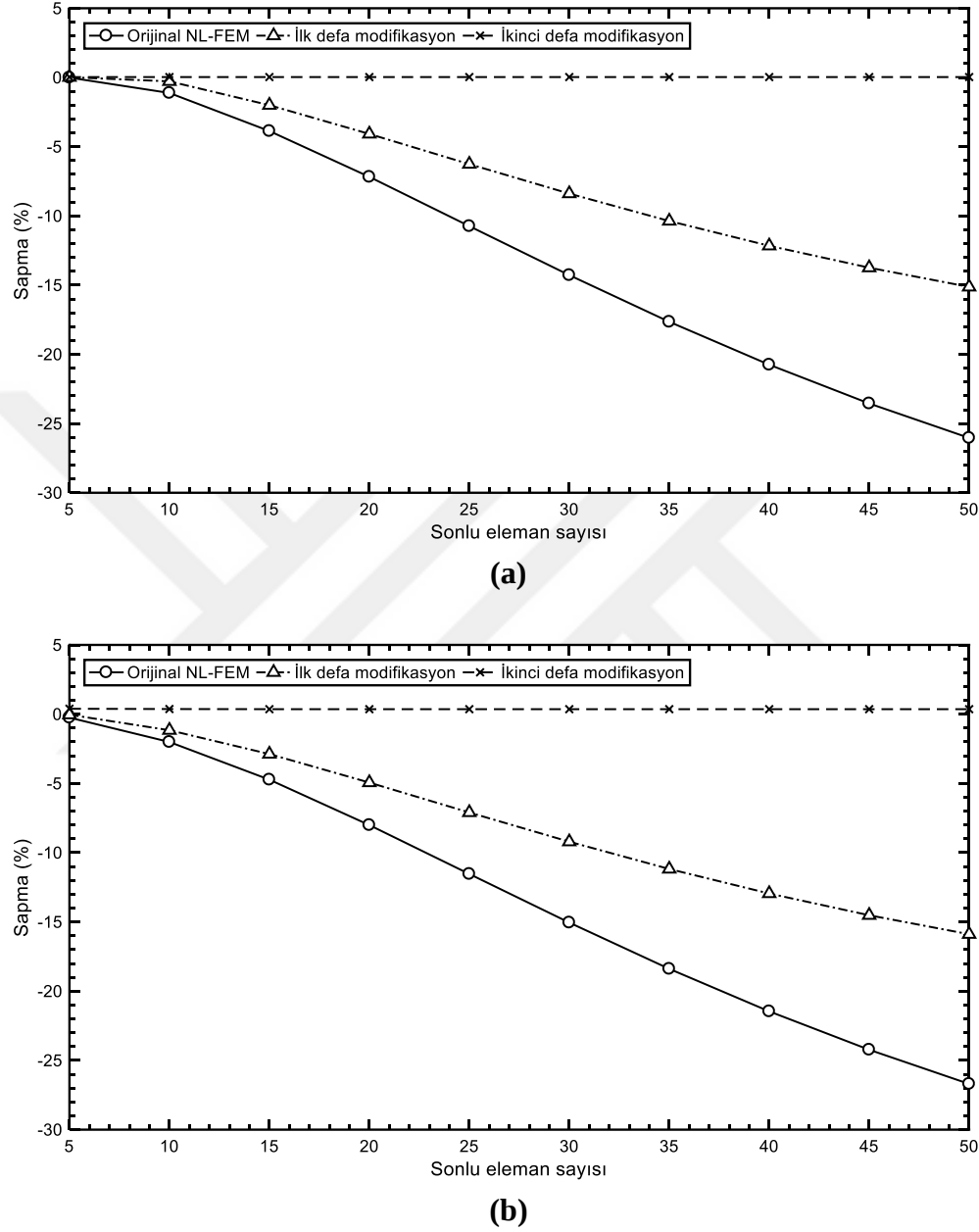


(b)

Şekil 4.17. Elastik ortama gömülü iki ucu tutulu KDFD nanoçubukların boyutsuz elastik ortam rijitliğinin artışına göre temel mod boyutsuz frekanslarının değişimi; **a)** $p = 0$; **b)** $p = 10$

Şekiller 4.16 ve 4.17’de, eksenel tam elastik ortama gömülü sırayla bir ucu tutulu diğer ucu serbest ve iki ucu tutulu kayma deformasyonlu nanoçubukların boyutsuz elastik ortam rijitliğinin artışına karşılık boyutsuz frekanslarının değişimleri homojen ve fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme için ayrı ayrı resmedilmektedir. Buna göre, ilk olarak elastik ortamın frekansları yükseltmekte olan bir faktör olduğu gözlemlenmiştir. Elastik ortam genel olarak bir ucu tutulu diğer ucu serbest nanoçubuğun frekanslarını daha fazla artırmakta, dahası yerel olmayan parametre arttıkça elastik ortamın frekans yükseltme kabiliyeti artmaktadır. KDFD nanoçubukta, boyutsuz frekanslar arasındaki farklılık elastik ortam rijitliğinin yüksek değerlerinde belirginleşirken homojen

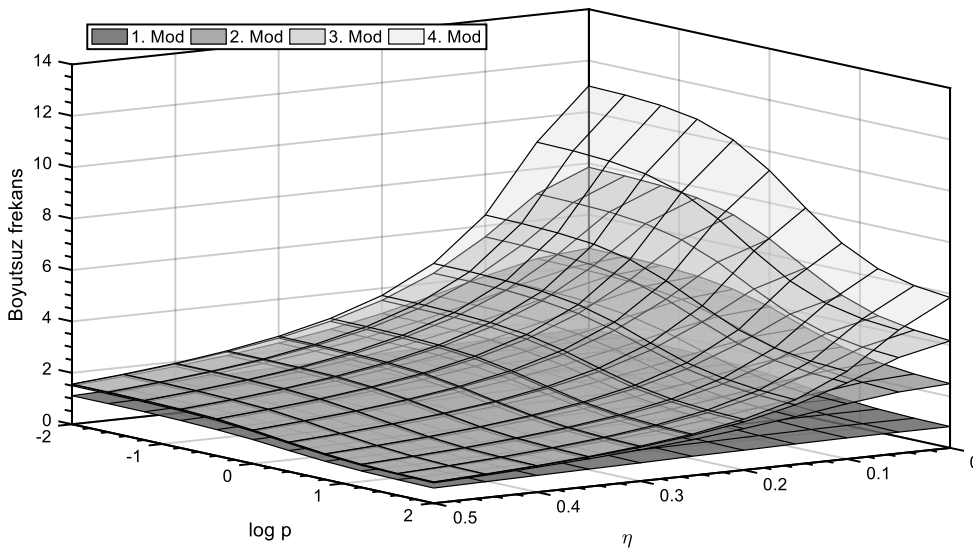
nanoçubuk için böyle bir çıkarım yapılamaz. Bu sonuçlar, KDFD nanoçubukların bulunabileceği elastik ortamın da atomik boyut etkili mekanik davranış üzerinde önemli bir etkisinin olduğunu ortaya koyar.



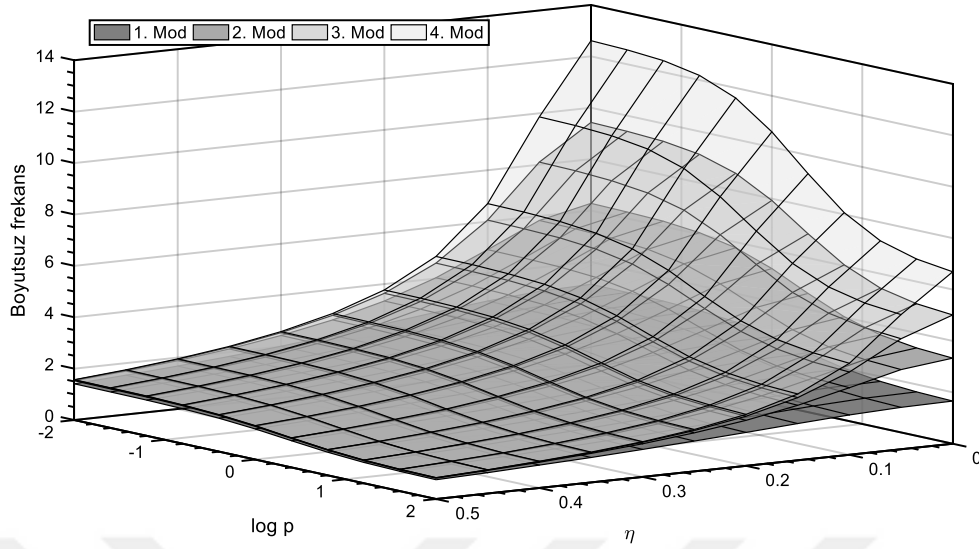
Şekil 4.18. Elastik ortama gömülü iki ucu tutulu KDFD nanoçubukların sonlu eleman sayısının artışına göre boyutsuz frekanslarının sapma yüzdelerinin değişimi ($\eta = 0.3$, $K_M = 5$, $p = 5$); **a)** 1. Mod; **b)** 4. Mod

Buradan itibaren verilen grafik sonuçlarda KDFD eksenel nanoçubukların yerel olmayan serbest titreşim analizleri yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu ile yürütülmüş olup, analizlerde 10 eleman kullanılmıştır. Hatırlatılacak olursa, yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonunun kayma deformasyonlu homojen eksenel nanoçubukların serbest titreşim analizlerinde birtakım başarısız sonuçlar verdiği tespit

edildiğinden, Çizelgeler 4.27-4.35 üzerinden, belirli bir teknik izlenmek suretiyle çeşitli araştırmalar yapılarak KDFD eksenel nanoçubuklar için kullanışlılığı mümkün olduğunca yüksek bir formülasyonun eldesine uğraşılmıştı. Bu kapsamda modifiye edilmiş nihai yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonunun sonuçları verilerek yaklaşımın kullanılabilirliği gösterilmişti. Bu defa, modifiye edilmiş yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu hakkında, seçilmiş bir boyutsuz yerel olmayan parametre ($\eta = 0.3$), boyutsuz elastik ortam rijitliği ($K_M = 5$) ve güç indeksi ($p = 5$) değerleri düşünülerek formülasyonun analitik neticelerden sapma yüzdelerini gösteren bir çalışma Şekil 4.18 ile verilmektedir. Buna göre, formülasyonda herhangi bir düzeltme işlemi bulunmayan (orijinal formülasyon), Denklemler (4.11)-(4.13) üzerinden ilk defa modifiye edilen ve bu denklemlere ek olarak Denklem (4.14) üzerinden ikinci defa modifiye edilerek nihai haline kavuşturulan üç farklı yerel olmayan sonlu eleman analizi gözetilerek, sonlu eleman sayısının artışına göre hesaplanan sapma yüzdelerinin değişimleri temel ve dördüncü mod için verilmektedir. Burada formülasyonun başarısının tespiti açısından yüksek bir modun verilmesi tercih edilmiştir. Sonuçların incelenmesine gelince, görüldüğü üzere sonlu eleman sayısı arttıkça, orijinal formülasyonun negatif sapmalar nedeniyle giderek artan bir başarısızlığı mevcuttur. İlk defa modifiye edilen formülasyonun söz konusu mekanik analizde negatif sapmaları düşürdüğü, ancak bu sapmaların sonlu eleman sayısı arttıkça arttığı yine gözlemlenmiştir. Son olarak, nihai halini almış formülasyonun sıfıra oldukça yakın sapma değerleri sunduğu rahatlıkla ifade edilebilir. Tabi, güç indeksi ve elastik ortam parametrelerinin yüksek veya ekstrem değerleri altında önerilen formülasyonun başarısının düşebileceği not edilmelidir. Yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonunun modifiye edilerek bir nevi rehabilite edilmesi sürecindeki esas amacın, mümkün olduğunca düşük hata içerisinde, KDFD eksenel nanoçubukların analitik çözümü zor hatta imkânsız mekanik analizleri için başvurulabilecek ve mekanik davranışının doğru anlaşılmasına aracı olabilecek bir yaklaşımın elde edilmesi olduğu vurgulanmalıdır.



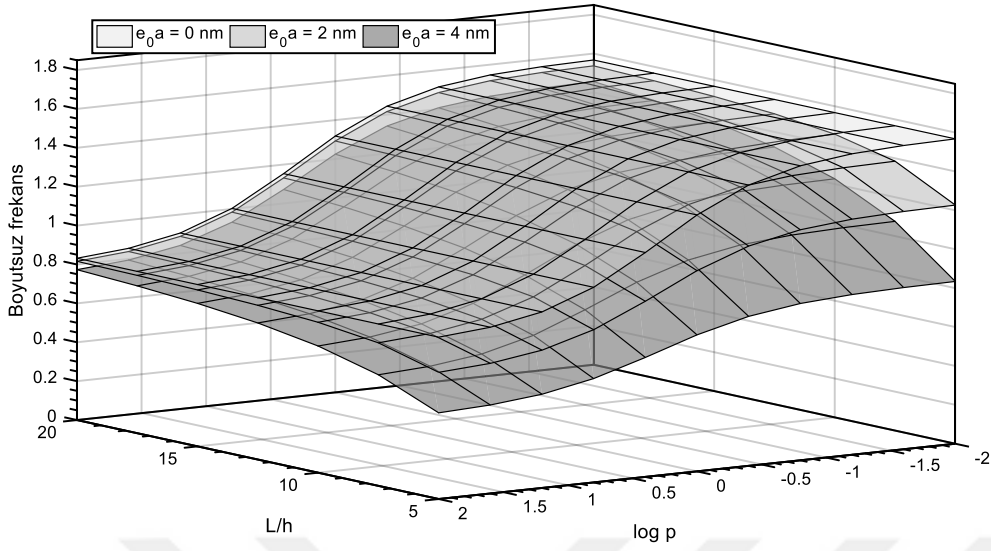
Şekil 4.19. Bir ucu tutulu diğer ucu serbest KDFD nanoçubukların güç indeksi ve boyutsuz atomik parametre değerlerinin artışına göre ilk dört mod boyutsuz frekanslarının değişimi



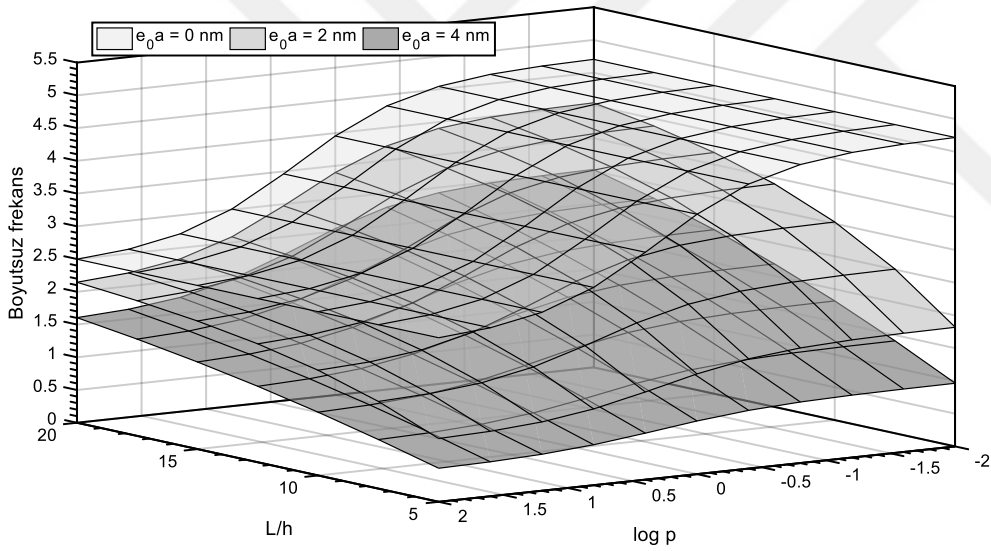
Şekil 4.20. İki ucu tutulu KDFD nanoçubukların güç indeksi ve boyutsuz atomik parametre değerlerinin artışına göre ilk dört mod boyutsuz frekanslarının değişimi

Yerel olmayan boyutsuz parametre ve güç indeksinin artışına karşılık bir ucu tutulu diğer ucu serbest ve iki ucu tutulu KDFD nanoçubukların boyutsuz frekanslarının değişim yüzeyleri ilk dört mod için sırasıyla Şekiller 4.19 ve 4.20’de betimlenmektedir. Yüksek modlara ait yüzeylerden daha belirgin görüleceği üzere, güç indeksi genellikle klasik nanoçubuk üzerinde daha etkili olmakta ve bu etki yerel olmayan parametrenin artışı ile azalmaktadır. Ayrıca yerel olmayan parametre gibi güç indeksi de iki ucu tutulu nanoçubukların boyutsuz frekanslarını bir ucu tutulu diğer ucu serbest nanoçubuğa göre daha fazla indirmektedir.

Şekiller 4.21 ve 4.22’de, sırasıyla bir ucu tutulu diğer ucu serbest ve iki ucu tutulu KDFD nanoçubukların ilk iki mod boyutsuz frekanslarının narinlik oranı ve güç indeksinin artışı altında değişimlerini ifade eden yüzeyler çizdirilmektedir. Nanokirişlerin ilgili analizlerinde olduğu gibi bu analizlerde de kesit yüksekliği sabit ve $h = 1$ nm olarak düşünülmüştür. Narinlik oranının genellikle klasik boyutsuz frekansları etkilemediği anlaşılmaktadır. Yerel olmayan nanoçubuklarda ise, narinlik oranı arttıkça frekansların yükseldiği gözlemlenir. Frekansların bu artışı, güç indeksi arttıkça azalır. Tabi boyutsuz frekanslardaki yükselme narinlik oranı arttıkça azalır çünkü daha yüksek artışlar için boyutsuz frekanslar üzerinde nanoçubuğun kayma deformasyonunun (veya yanal atalet veya Poisson etkisi) etkisi azalır. Bu durumda davranış basit (kayma deformasyonsuz) çubuk teorisine yakınsamaktadır. Bunların haricinde, düşük uzunluklu nanoçubuklarda klasiğe göre frekans azalması daha fazladır çünkü iç karakteristik uzunluk dış karakteristik uzunluğa oldukça yakındır. Ayrıca, güç indeksinin frekans düşürme etkisi yüksek uzunluklu nanoçubuklarda daha fazla olarak gözlemlenmektedir.

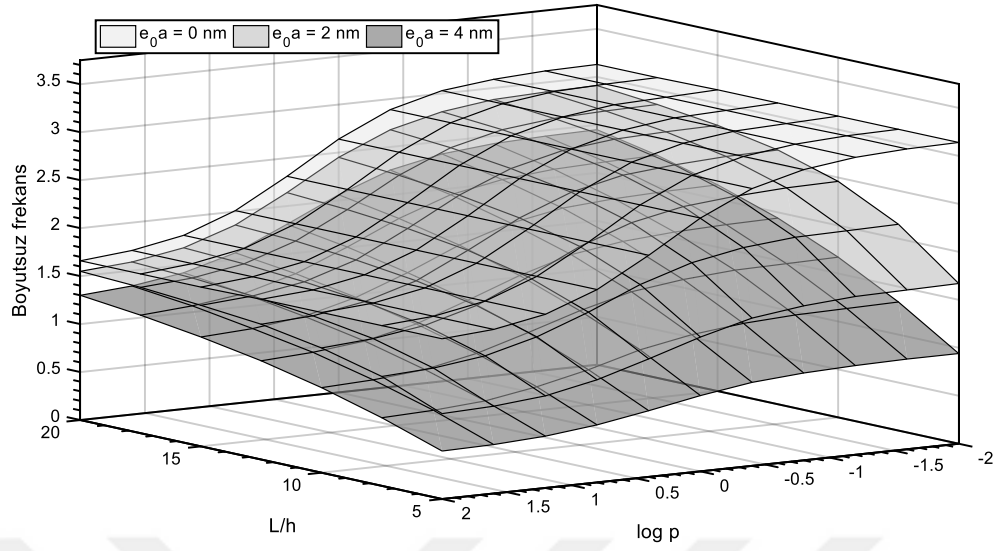


(a)

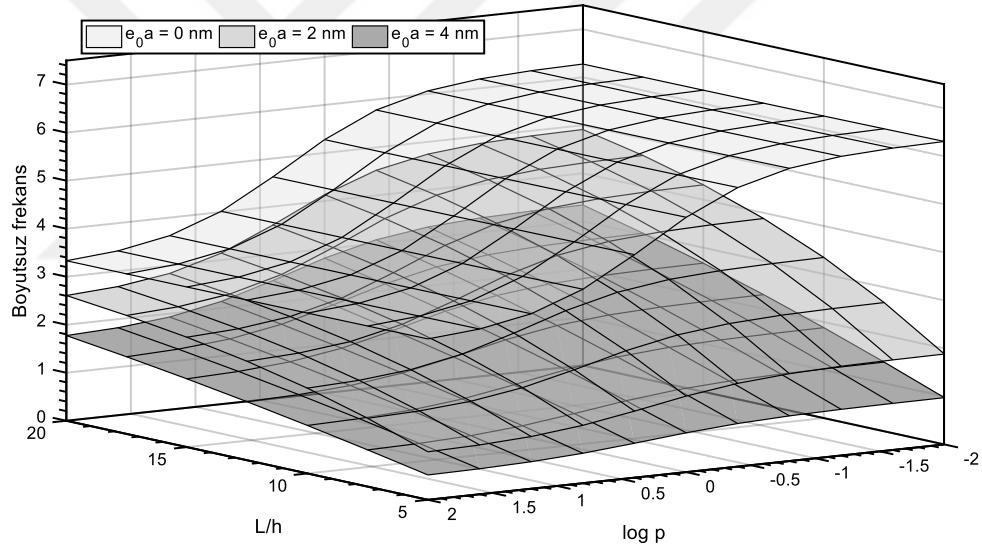


(b)

Şekil 4.21. Bir ucu tutulu diğer ucu serbest KDFD nanoçubukların güç indeksi ve uzunluk/yükseklik oranı değerlerinin artışına göre boyutsuz frekanslarının değişimi; **a)** 1. Mod; **b)** 2. Mod

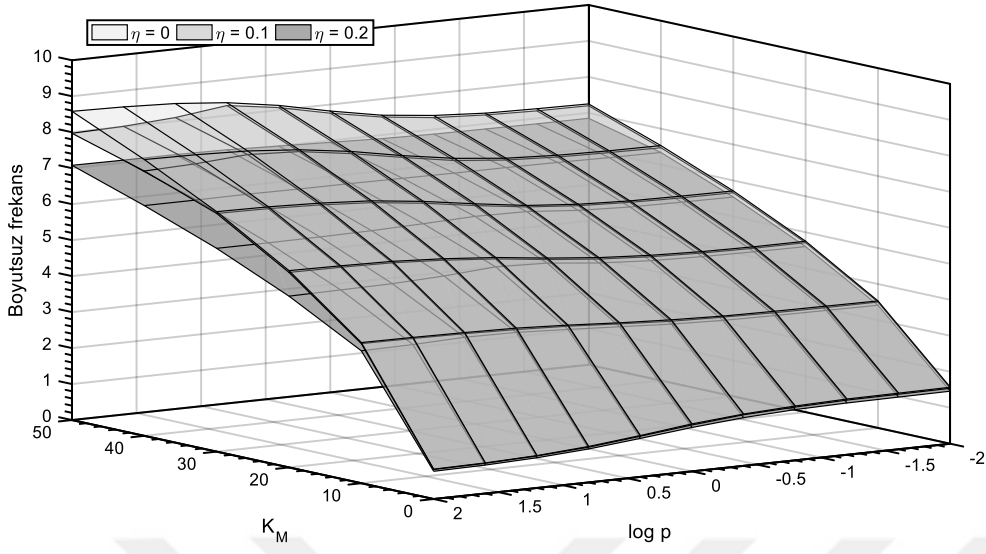


(a)

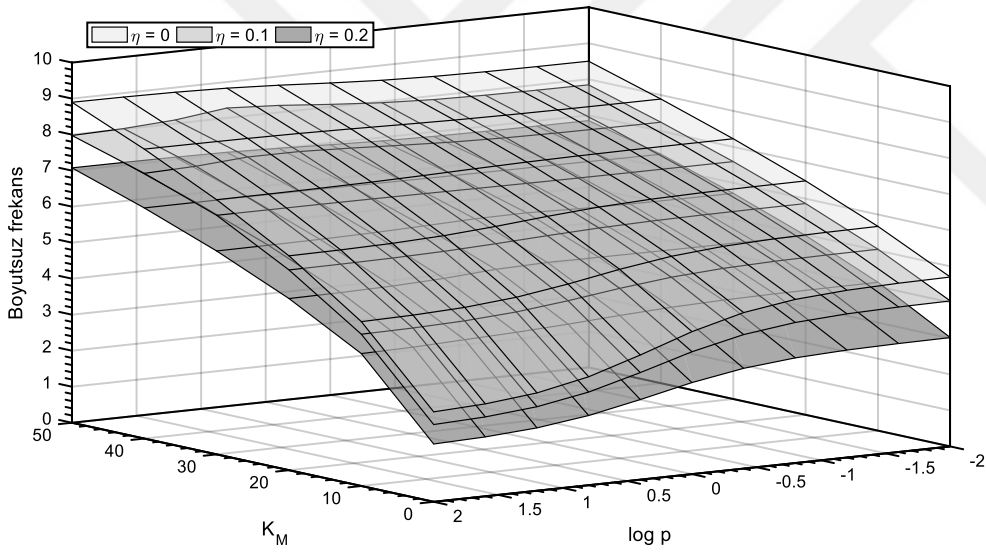


(b)

Şekil 4.22. İki ucu tutulu KDFD nanoçubukların güç indeksi ve uzunluk/yükseklik oranı değerlerinin artışına göre boyutsuz frekanslarının değişimi; **a)** 1. Mod; **b)** 2. Mod

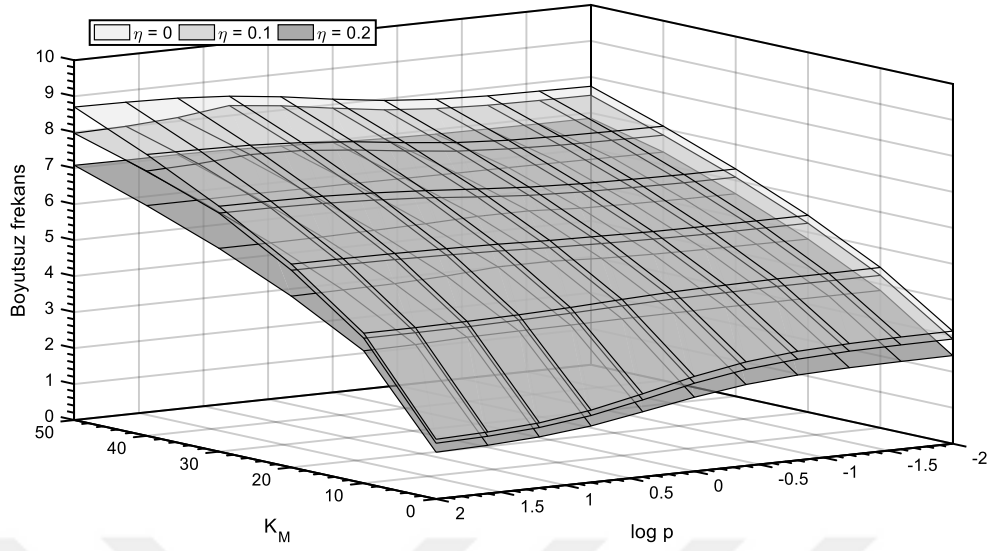


(a)

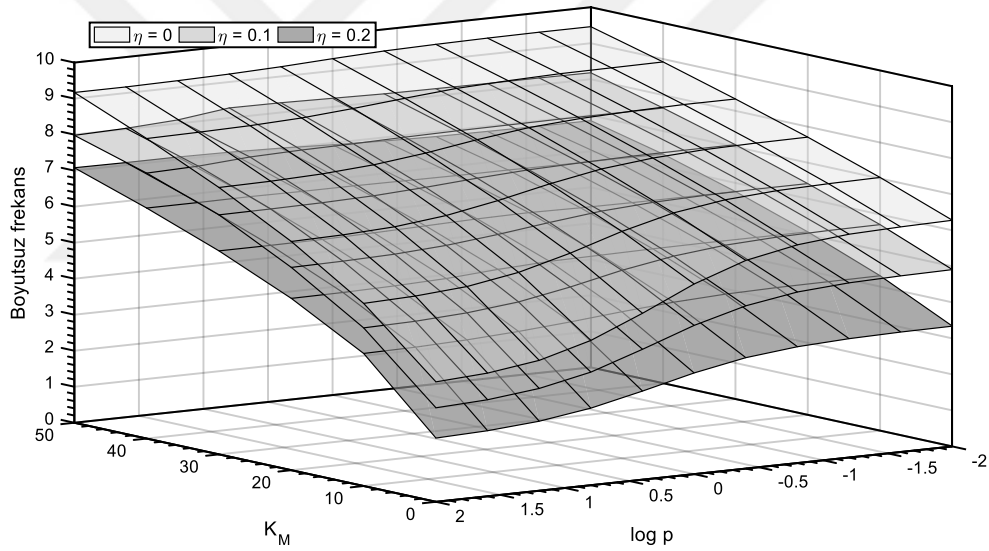


(b)

Şekil 4.23. Elastik ortama gömülü bir ucu tutulu diğer ucu serbest KDFD nanoçubukların güç indeksi ve boyutsuz elastik ortam rijitliği değerlerinin artışına göre boyutsuz frekanslarının değişimi; **a)** 1. Mod; **b)** 2. Mod



(a)



(b)

Şekil 4.24. Elastik ortama gömülü iki ucu tutulu KDFD nanoçubukların güç indeksi ve boyutsuz elastik ortam rijitliği değerlerinin artışına göre boyutsuz frekanslarının değişimi; **a)** 1. Mod; **b)** 2. Mod

KDFD eksenel nanoçubukların atomik boyut etkili serbest titreşim davranışları hakkındaki son araştırmalar, elastik ortama gömülü bir ucu tutulu diğer ucu serbest ve iki ucu tutulu sınır şartları için sırasıyla Şekiller 4.23 ve 4.24'te verilen ve boyutsuz frekanslar üzerinde boyutsuz elastik ortam parametresi ve güç indeksinin artışlarının etkisinin ele alınması üzerinedir. Öncelikle, elastik ortam parametresinin çok düşük değer aralığındaki bir artışa karşılık frekansların daha fazla yükseldiği ve bu durumun yüksek güç indeksine sahip nanoçubuklarda daha belirgin olduğu gözlemlenir. Elastik ortam parametresi ve güç indeksi yükseldikçe yerel olmayan parametre boyutsuz frekansları daha fazla azaltmaktadır. Ayrıca, çok yüksek elastik ortam parametreleri için güç

indeksinin artışına karşılık frekansların çoğunlukla yükseldiği ilgi çeken bir sonuçtur. Ek olarak, boyutsuz atomik parametrenin $\eta = 0.1$ değerinde, güç indeksinin onlar mertebesine kadar yükselen frekansların bu mertebede tekrar azaldığı gözlemlenir. Son olarak, elastik ortamın bir ucu tutulu diğer ucu serbest nanoçubuğu, güç indeksinin iki ucu tutulu nanoçubuğu daha fazla etkilediği bir kez daha anlaşılır.

Son olarak, bu bölümün kalan kısmı kayma deformasyonuna sahip ve fonksiyonel derecelendirilmiş ayrık eğilme yapılarının (nanoçerçevelerin) serbest titreşim analizi hakkındaki sayısal sonuçlar ve bunların tartışmaları üzerine olacaktır.

Çizelge 4.38. II-Tipteki çerçevelerin klasik serbest titreşiminin ilk üç mod doğal frekansları (Hz) için bir yakınsama çalışması

Mod	Mei (2012)	Bu Tez (FEM)				
		$n = 15$	$n = 12$	$n = 9$	$n = 6$	$n = 3$
1	93.8	93.9413	93.941	93.9435	93.9523	94.0519
2	275.2	275.7400	275.8276	276.1414	277.8348	350.7990
3	611.5	613.3124	613.7613	615.3430	626.2932	832.8680

Çizelge 4.39. Γ 1-Tipteki çerçevelerin klasik serbest titreşiminin ilk beş mod doğal frekansları (Hz) için bir yakınsama çalışması

Mod	Mustapha (2020)	Mei (2012)	Bu Tez (FEM)				
			$n = 10$	$n = 8$	$n = 6$	$n = 4$	$n = 2$
1	14.05	14.1	14.0514	14.0515	14.0515	14.0519	14.0570
2	38.24	38.3	38.2584	38.2588	38.2602	38.2682	38.3678
3	188.46	188.5	188.4361	188.5018	188.7243	189.7280	226.0899
4	275.51	275.5	276.0980	276.2985	276.9747	279.2162	584.5972
5	599.60	599.6	600.8070	602.7060	607.9055	681.7369	2248.3749

II ve Γ 1 isimleri ile sembolize edilen düzlem çerçeve yapıların doğal frekansları bilimsel literatürden bulunmuş bazı çalışmalarla mukayese edilmiş olup bunlar sırasıyla Çizelgeler 4.38 ve 4.39 ile sunulmaktadır. Burada mukayeselerin amacı nanoçerçevelerin serbest titreşim analizi için hazırlanmış yerel olmayan sonlu eleman formülasyonunun klasik kısmının doğruluğunun kontrol edilmesidir. Mukayeselere konu referans çalışmalar kısaca şu şekilde özetlenmektedir: Mei (2012), düşey elemanı ankastre mesnetli-yatay elemanı serbest uçlu bir Γ -tipi çerçevenin ve düşey elemanları ankastre mesnetli bir II-tipi yani portal çerçevenin dinamik analizlerini bir dalga yayılımı, yansıma ve iletim modeli üzerinden gerçekleştirmiştir. Buna ek olarak, Mustapha (2020), mikrokiriş ve mikroçubuk modellerinin yanı sıra birisi de Mei (2012)'de ele alınan Γ -tipi olmak üzere çeşitli düzlem mikroçerçevelerin değiştirilmiş şekil değiştirme elastisite teorisine (Lam vd. 2003; Kong vd. 2009) dayanan serbest titreşimi için bir sonlu eleman çözümünü geliştirmiştir. İki referansta da Timoshenko kiriş teorisine dayanan kayma deformasyonları hesaba katılmıştır. Mei (2012) çerçevenin eksenel yöndeki davranışını kayma deformasyonsuz (basit, temel veya Poisson etkisiz) teori ile düşünürken Mustapha (2020) eksenel titreşimi Rayleigh teorisine dayanarak incelemiştir. Hatırlatılacak olursa eksenel titreşimde Rayleigh teorisinin Love-Bishop teorisinden farkı Rayleigh teorisinin yanal atalet rijitliğini ($v^2 GI_P$) ihmal etmesidir, bu ataletten kaynaklı kütle ($v^2 \rho I_P$) ve yerel olmayan kütle ($(e_0 a)^2 v^2 \rho I_P$) iki formülasyonda da geçerlidir. Tabi tez kapsamında nanoçerçeveler için geliştirilen yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonunda eksenel serbestlikler için basit çubuk kinematığı düşünülmüştü. Bunun nedeni olarak kayma deformasyonunu düşünen yüksek mertebeli eksenel çubuk teorilerinin asgari üç düğümlü

elemana ihtiyaç duyuyor olması gösterilmişti. Bunların haricinde, referans çalışmalardan alınan geometrik ve mekanik parametreler, iki çerçeve tipi için de geçerli olmak suretiyle, yapı üyelerinin elastisite modülleri eşit ve $E = 206$ GPa, Poisson oranları eşit ve $\nu = 0.29$ (böylece kayma modülleri eşit ve $G = E/2(1 + \nu) = 79.8450$ GPa), birim hacim ağırlıkları eşit ve $\rho = 7800$ kg/m³, üyeler kare kesitli ve kesit boyutları $b = h = 1.27$ cm ve kayma düzeltme katsayısı $k = (10 + 10\nu)/(12 + 11\nu) = 0.8492$, II-tipindeki çerçevenin yatay üye uzunluğu $L_h = 0.4$ m, düşey üye uzunlukları eşit ve $L_v = 0.3$ m, Γ -tipindeki çerçevenin üye uzunlukları eşit ve $L_v = L_h = 0.5$ m olarak düşünülmüştür. Sonuçları incelemeden önce sonlu eleman analizleri hakkında bir bilgi verilmelidir. Analizde bütün üyeler eşit sayıda elemana bölünmekte olup, çizelgelerin yakınsama sonuçlarında yer alan sonlu eleman sayıları nanoyapıdaki toplam sonlu eleman sayısıdır. Örneğin her üye tek sonlu eleman olarak belirlenmişse bunlar Çizelge 4.38 ve 4.39'da sırasıyla $n = 3$ ve $n = 2$ olarak verilir. Sonuçlar toplu değerlendirilecek olursa, özellikle yüksek sonlu elemana bölünmüş çerçevelerin doğal frekansları referans sonuçlarla çok büyük bir uyum göstermektedir. Düşük sonlu eleman sayılarında yüksek modların referanslarla farklılığı çok yüksek bir düzeydedir ve sonlu eleman sayısının artışı ile yüksek modlar referans çalışmalara çok hızlı yakınsamaktadır. Bunların haricinde, Çizelge 4.39'daki sonuçlar Mustapha (2020)'nin çalışmasında gözetilen eksenel çubuk kinematığı ile bu tezde gözetilenin farklılığının açıkçası önemsiz olduğunu gösterir. Yani çerçevelerin analizinde eğilme titreşiminin baskın geldiği düşünülebilir. Nihayetinde, tezde formüle edilmiş yerel olmayan sonlu elemanlar çözümünün şimdilik klasik elastisite için doğru olduğu görülür ama analizlerin her üyenin en azından iki veya üç elemana bölünmesi suretiyle gerçekleştirilmesinin atomik ölçekli mekanik davranışın anlaşılabilmesi için daha sağlıklı olacağı da mutlaka not edilmelidir.

Üç farklı tip nanoçerçevenin homojen malzemeden olma durumu için ilk üç mod boyutsuz frekansları Çizelge 4.40'ta karşılaştırılmaktadır. Öncelikle, referans çalışmada nanoçerçevenin eğilme formülasyonunun kayma deformasyonlarını ihmal eden Euler-Bernoulli kiriş teorisine (EBBT) göre yapılandırıldığı, tezde ise eğilme serbestlikleri için temel kayma deformasyonlu kiriş teorisi olan Timoshenko kiriş teorisi (TBT) göz önüne alındığından sonuçların arasında bir farklılık oluşmasının beklendiği belirtilmelidir. Ayrıca, referansta üç çerçeve tipi için de geçerli olmak suretiyle, çerçeve üye uzunlukları eşit ve $L = 20$ nm ve üyelerin kesiti içi dolu daire ve kesit çapı $D = 5$ nm olarak düşünülmüştür. Daire kesit kullanıldığından analizde bu durum kesme düzeltme katsayısı $k = 0.877$ (Reddy ve Pang 2008) ile göz önüne alınmıştır. Ek olarak, yine yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonunu kullanan referans çalışmada her nanoçerçevede bütün üyeler tek başına sonlu eleman olarak düşünülmüştür. Açıkçası, ayrık nanosistemlerin mekanik davranışları üzerine bilimsel literatürde halen çok büyük boşluklar mevcuttur. Kayma deformasyonlu atomik ölçekli çerçevelerin başka bir metodoloji kullanılarak dinamik analizi hakkında bilimsel literatürde çalışma tespit edilemediğinden burada mukayeseler doğrudan değil dolaylı olarak yapılabilmektedir. Dolayısıyla bu teze konu formülasyonun ürettiği sonuçların en azından mantıklı bir konumda olup olmadığını anlamak açısından böyle bir mukayese tercih edilmiştir. Bilindiği üzere, kayma deformasyonlu titreşim analizinde frekansların kayma deformasyonunu ihmal eden analize göre daha düşük hesaplanması beklenir. Gerek bu bilginin analizler sonucunda referansa göre doğrulanması, gerekse atomik parametre arttıkça boyutsuz frekansların düşmesi nedeniyle formülasyonun uygun olduğu ifade edilebilir. Mekaniksel tartışmalar ise izleyen çizelgelerin konusu olacaktır.

Çizelge 4.40. Farklı tipteki kayma deformasyonsuz ve kayma deformasyonlu homojen nanoçerçevelerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre değerlerine göre ilk üç mod boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması

Çerçeve	η	Mod	EBBT (Numanoğlu ve Civallek 2019)	TBT (Bu Tez)
Π	0	1	3.17908	3.1470
		2	12.89036	12.4401
		3	22.02454	21.4796
	0.05	1	3.17344	3.1410
		2	12.80304	12.3302
		3	21.86525	21.3221
	0.15	1	3.12934	3.0940
		2	12.12118	11.4961
		3	20.70377	20.1279
Λ ($\alpha = 45^\circ$)	0	1	16.96067	16.4209
		2	19.50052	19.3413
		3	30.12516	26.9431
	0.05	1	16.84658	16.2553
		2	19.42487	19.2622
		3	29.37241	26.3484
	0.15	1	15.94442	14.9769
		2	18.84978	18.6639
		3	25.11296	23.0736
ΓI ($\alpha = 90^\circ$)	0	1	1.20664	1.1536
		2	3.30368	3.1183
		3	17.10463	14.6451
	0.05	1	1.20340	1.1506
		2	3.29167	3.1085
		3	16.74960	14.3515
	0.15	1	1.17289	1.1281
		2	3.20116	3.0338
		3	14.30896	12.4314

Buradan itibaren görülen çizelgelerde kayma deformasyonlu fonksiyonel derecelendirilmiş nanoçerçeve yapılarının boyutsuz frekansları verilmektedir. Analize konu nanoçerçevenin bütün üyelerinin üçer sonlu elemana bölünmesi suretiyle hesaplamalar gerçekleştirilmiştir. Ayrıca, üyelerin alt yüzey malzemelerinin yapının sınırlandırdığı bölgeye doğru yani yapının içine doğru baktığı mutlaka belirtilmelidir.

Çizelge 4.41. Farklı tipteki KDFD nanoçerçevelerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre ilk üç mod boyutsuz frekansları

Çerçeve	η	Mod	$p = 0.01$	$p = 0.1$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 10$
Π	0	1	3.1887	3.0838	2.4643	2.2488	2.0771
		2	12.5033	12.0941	9.6730	8.8253	8.1345
		3	20.4579	19.7873	15.8206	14.4337	13.3132
	0.1	1	3.1664	3.0622	2.4471	2.2331	2.0626
		2	11.8924	11.5030	9.1993	8.3931	7.7379
		3	18.9717	18.3500	14.6720	13.3855	12.3450
	0.2	1	3.1022	3.0002	2.3976	2.1878	2.0208
		2	10.4821	10.1386	8.1068	7.3964	6.8215
		3	15.8978	15.3771	12.2958	11.2173	10.3432
Λ ($\alpha = 45^\circ$)	0	1	15.2680	14.7678	11.8095	10.7747	9.9349
		2	22.0569	21.3378	17.0785	15.5807	14.3365
		3	49.1440	47.5586	38.1259	34.7670	31.8524
	0.1	1	14.4615	13.9877	11.1849	10.2047	9.4106
		2	20.8220	20.1427	16.1193	14.7053	13.5354
		3	41.2573	39.9200	31.9731	29.1566	26.7696
	0.2	1	12.6311	12.2170	9.7682	8.9120	8.2199
		2	18.0581	17.4685	13.9760	12.7493	11.7402
		3	29.9979	29.0237	23.2365	21.1890	19.4714
Γ_2 ($\alpha = 45^\circ$)	0	1	15.3063	14.8040	11.8345	10.7977	9.9638
		2	21.0485	20.3864	16.4234	14.9753	13.5711
		3	49.6367	48.0219	38.4386	35.0559	31.2114
	0.1	1	14.4889	14.0135	11.2027	10.2212	9.4313
		2	20.0556	19.4199	15.6233	14.2469	12.9515
		3	41.4364	40.0886	32.0876	29.2623	26.9071
	0.2	1	12.6424	12.2277	9.7755	8.9188	8.2285
		2	17.6772	17.1095	13.7307	12.5227	11.4485
		3	30.0301	29.0540	23.2573	21.2081	19.4958

Üye ayakları ankastre mesnetli olan üç farklı tipteki kayma deformasyonlu fonksiyonel derecelendirilmiş nanoçerçevelerin ilk üç mod yerel olmayan boyutsuz frekans parametreleri, güç indeksinin farklı değerlerine göre hesaplanmış olup bunlar Çizelge 4.41’de listelenmektedir. Bu ve kalan analizlerin tamamı bu şekilde bir yapılandırmayı göz önünde bulunduracaktır. Sonuçlara göre, boyutsuz frekansların yerel olmayan parametre değerleri altında azalmakta olduğu ve bu azalmanın yüksek modlarda daha fazla olduğu gözlemlenir. Öte yandan, fonksiyonel derecelendirilme güç indeksi arttıkça boyutsuz frekansların düşmekte olduğu, güç indeksi arttıkça bu düşüşün şiddetlendiği de bir diğer çıkarımdır. Ayrıca, aynı uzunluk ve kesite sahip daha fazla üyesi bulunduğu en düşük boyutsuz frekanslar portal çerçevede elde edilir çünkü sistemin ağırlık artışı rijitlik artışına göre baskın geldiğinden frekanslar düşer. Bu çerçevede yatay üyenin mesnetli olmadığı da hatırlanmalıdır. Öte yandan, çok büyük bir farklılık olmamakla beraber Γ -tip çerçevenin boyutsuz frekanslarının Λ -tip çerçevelerden yüksek hesaplandığı görülür. Bunun sebebinin Γ -tip çerçevede bir üye yatayken Λ -tip çerçevede bir üyenin daha yataya göre yönelimli olması olduğu belirtilebilir çünkü yönelim nedeniyle rijitlik az da olsa bir miktar azalmaktadır. Ayrıca yerel olmayan parametre portaldan daha rijit olan bu iki sistemi portal çerçeveye göre daha fazla etkilemiştir. Sonuçlar nanoçerçevelerde atomik boyut etkisinin mutlaka hesaba katılması gerektiğini belirttiği gibi, fonksiyonel derecelendirilmiş sistemlerde güç indeksinin de önemli bir etmen olduğunu ortaya koyar.

Çizelge 4.42. Γ -Tipteki farklı sınır şartlı KDFD nanoçerçevelerin farklı boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre temel mod boyutsuz frekansları ($\alpha = 90^\circ$)

Çerçeve	η	$p = 0.01$	$p = 0.1$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 10$
$\Gamma 1$	0	1.1662	1.1278	0.9012	0.8224	0.7597
	0.1	1.1543	1.1163	0.8921	0.8140	0.7520
	0.2	1.1205	1.0837	0.8660	0.7902	0.7300
$\Gamma 2$	0	15.2679	14.7678	11.8095	10.7747	9.9349
	0.1	14.4615	13.9876	11.1849	10.2047	9.4106
	0.2	12.6311	12.2170	9.7682	8.9120	8.2199
$\Gamma 3$	0	11.3991	11.0256	8.8164	8.0439	7.4181
	0.1	10.8560	10.5001	8.3958	7.6602	7.0651
	0.2	9.5966	9.2819	7.4210	6.7708	6.2462
$\Gamma 4$	0	2.2823	2.2072	1.7637	1.6095	1.4868
	0.1	2.2713	2.1965	1.7552	1.6017	1.4797
	0.2	2.2391	2.1654	1.7304	1.5790	1.4587
$\Gamma 5$	0	2.4521	2.3714	1.8954	1.7294	1.5970
	0.1	2.4078	2.3286	1.8611	1.6982	1.5681
	0.2	2.2874	2.2122	1.7681	1.6133	1.4898
$\Gamma 6$	0	2.3852	2.3067	1.8433	1.6820	1.5538
	0.1	2.3744	2.2963	1.8350	1.6745	1.5468
	0.2	2.3427	2.2656	1.8105	1.6521	1.5262
$\Gamma 7$	0	4.0925	3.9580	3.1636	2.8867	2.6652
	0.1	4.0373	3.9046	3.1209	2.8478	2.6293
	0.2	3.8841	3.7565	3.0024	2.7397	2.5296

Γ -Tipteki KDFD nanoçerçevelerin yatay elemanının boş ucundan yedi farklı mesnetlenme durumu için yerel olmayan temel mod boyutsuz frekans parametreleri Çizelge 4.42 ile verilmektedir. Burada iki üyesi de ankastre mesnetlendiğinden en rijit sistem olan $\Gamma 2$ 'nin boyutsuz frekansları atomik parametre tarafından oransal olarak daha fazla indirgenir ve güç indeksi bu sistemlerin frekansını fark olarak daha fazla azaltır. Öte yandan $\Gamma 4$ - $\Gamma 5$ ve $\Gamma 6$ - $\Gamma 7$ nanoçerçeveleri kendi içlerinde kıyaslandıklarında, eksenel hareketi engellenmiş uca sahip sistemlerin frekanslarının daha yüksek hesaplandığı gözlemlenir. $\Gamma 7$ nanoçerçevesinin yatay üyesinin ucunun dönmesi engellenmişken $\Gamma 5$ nanoçerçevesinde söz konusu mesnetlenme durumu için bu geçerli değildir. Bu nedenle $\Gamma 7$ 'nin boyutsuz frekansları $\Gamma 5$ 'ten yüksektir ve böylece bu sistemlerin atomik parametreden daha fazla etkilediği sonucuna varılır.

Çizelge 4.43'te, Λ -Tipteki KDFD nanoçerçevelerin üyelerinin farklı yönelimleri için yerel olmayan temel mod boyutsuz frekansları üzerinde güç indeksinin etkisi sunulmaktadır. Öncelikle, yönelim açısının boyutsuz frekansları az da olsa düşürdüğü gözlemlenir. Güç indeksi arttıkça yönelim açısının boyutsuz frekanslar üzerinde etkisi azalır. Ek olarak, yönelim açısı arttıkça atomik parametrenin boyutsuz frekanslar üzerinde biraz daha fazla önem kazandığı da anlaşılmaktadır.

Γ -Tipteki KDFD nanoçerçevelerin düşey üyelerinin farklı yönelim açıları ve güç indeksi değerlerine göre temel mod boyutsuz frekans parametreleri, yatay üye ucunun boşta olması durumu için Çizelge 4.44'te, ankastre mesnetli olması durumu için Çizelge 4.45'te ve sabit mesnetli olma durumu için Çizelge 4.46'da verilmektedir. Yerel olmayan

parametrenin Γ_2 nanoçerçevesinde daha fazla etkili olmasına ek olarak, yönelim açısı ve güç indeksi gibi parametreler de bu sistemlerin frekanslarının daha fazla azalmasına sebep olmaktadır.

Çizelge 4.43. Λ -Tipteki KDFD nanoçerçevelerin farklı yönelim açısı, boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre temel mod boyutsuz frekansları

α (°)	η	$p = 0.01$	$p = 0.1$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 10$
15	0	15.3109	14.8083	11.8375	10.8004	9.9672
	0.1	14.4921	14.0166	11.2049	10.2232	9.4337
	0.2	12.6437	12.2290	9.7764	8.9196	8.2295
30	0	15.2987	14.7969	11.8296	10.7932	9.9581
	0.1	14.4835	14.0084	11.1993	10.2180	9.4272
	0.2	12.6402	12.2256	9.7741	8.9175	8.2268
45	0	15.2680	14.7678	11.8095	10.7747	9.9349
	0.1	14.4615	13.9877	11.1849	10.2047	9.4106
	0.2	12.6311	12.2170	9.7682	8.9120	8.2199
60	0	15.1754	14.6805	11.7492	10.7189	9.8649
	0.1	14.3950	13.9249	11.1416	10.1647	9.3603
	0.2	12.6034	12.1909	9.7501	8.8953	8.1990
75	0	14.6688	14.2021	11.4185	10.4134	9.4821
	0.1	14.0217	13.5726	10.8991	9.9406	9.0768
	0.2	12.4415	12.0384	9.6458	8.7989	8.0751

Çizelge 4.44. Γ_1 -Tipteki KDFD nanoçerçevelerin farklı yönelim açısı, boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre temel mod boyutsuz frekansları

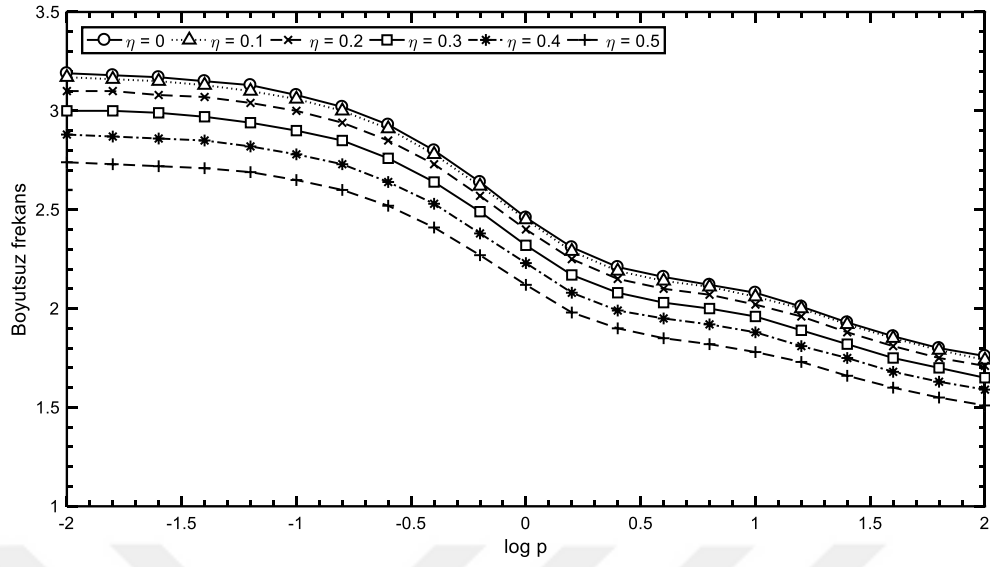
α (°)	η	$p = 0.01$	$p = 0.1$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 10$
15	0	0.8818	0.8528	0.6814	0.6218	0.5745
	0.1	0.8766	0.8478	0.6774	0.6182	0.5711
	0.2	0.8616	0.8333	0.6659	0.6076	0.5613
30	0	0.9020	0.8723	0.6970	0.6361	0.5876
	0.1	0.8965	0.8670	0.6928	0.6322	0.5840
	0.2	0.8805	0.8515	0.6804	0.6209	0.5736
45	0	0.9372	0.9064	0.7243	0.6609	0.6106
	0.1	0.9310	0.9004	0.7195	0.6565	0.6065
	0.2	0.9131	0.8831	0.7056	0.6439	0.5949
60	0	0.9900	0.9574	0.7650	0.6981	0.6449
	0.1	0.9827	0.9503	0.7594	0.6930	0.6402
	0.2	0.9617	0.9300	0.7432	0.6782	0.6265
75	0	1.0643	1.0293	0.8225	0.7505	0.6933
	0.1	1.0552	1.0205	0.8155	0.7442	0.6874
	0.2	1.0293	0.9954	0.7955	0.7259	0.6705
90	0	1.1662	1.1278	0.9012	0.8224	0.7597
	0.1	1.1543	1.1163	0.8921	0.8140	0.7520
	0.2	1.1205	1.0837	0.8660	0.7902	0.7300

Çizelge 4.45. Γ_2 -Tipteki KDFD nanoçerçevelerin farklı yönelim açısı, boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre temel mod boyutsuz frekansları

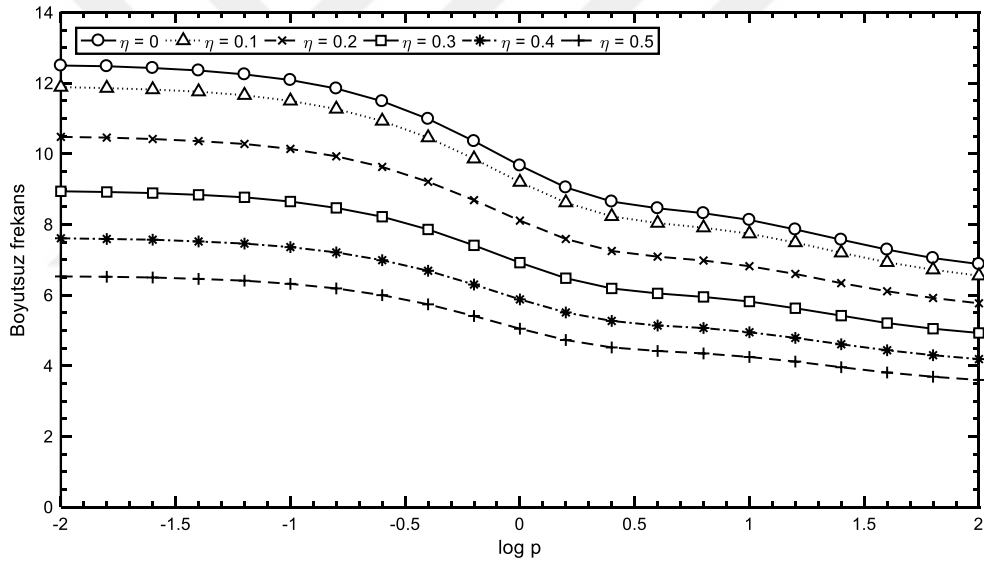
α (°)	η	$p = 0.01$	$p = 0.1$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 10$
15	0	13.8932	13.5398	11.3220	10.2907	8.6198
	0.1	13.6737	13.3243	11.1322	10.1190	8.4886
	0.2	12.6445	12.2297	9.7769	8.9201	8.1239
30	0	15.3109	14.8083	11.8375	10.8004	9.9673
	0.1	14.4921	14.0166	11.2049	10.2231	9.4337
	0.2	12.6437	12.2290	9.7764	8.9196	8.2295
45	0	15.3063	14.8040	11.8345	10.7977	9.9638
	0.1	14.4889	14.0135	11.2028	10.2212	9.4313
	0.2	12.6424	12.2277	9.7755	8.9188	8.2285
60	0	15.2988	14.7969	11.8296	10.7932	9.9581
	0.1	14.4835	14.0084	11.1993	10.2180	9.4272
	0.2	12.6402	12.2256	9.7741	8.9175	8.2268
75	0	15.2870	14.7858	11.8219	10.7861	9.9492
	0.1	14.4751	14.0004	11.1938	10.2129	9.4209
	0.2	12.6367	12.2223	9.7718	8.9154	8.2242
90	0	15.2679	14.7678	11.8095	10.7747	9.9349
	0.1	14.4615	13.9877	11.1849	10.2047	9.4106
	0.2	12.6311	12.2170	9.7682	8.9120	8.2199

Çizelge 4.46. Γ_3 -Tipteki KDFD nanoçerçevelerin farklı yönelim açısı, boyutsuz yerel olmayan parametre ve güç indeksi değerlerine göre temel mod boyutsuz frekansları

α (°)	η	$p = 0.01$	$p = 0.1$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 10$
15	0	10.3097	10.0052	8.1451	7.4210	6.5546
	0.1	9.9536	9.6554	7.8410	7.1453	6.3464
	0.2	9.0286	8.7502	7.0713	6.4464	5.7922
30	0	11.2402	10.8761	8.7153	7.9503	7.2947
	0.1	10.7217	10.3738	8.3102	7.5809	6.9611
	0.2	9.5067	9.1972	7.3633	6.7175	6.1769
45	0	11.3548	10.9838	8.7879	8.0176	7.3841
	0.1	10.8174	10.4638	8.3709	7.6372	7.0355
	0.2	9.5689	9.2558	7.4031	6.7543	6.2250
60	0	11.3882	11.0153	8.8094	8.0375	7.0498
	0.1	10.8457	10.4904	8.3892	7.6541	7.0572
	0.2	9.5880	9.2738	7.4154	6.7657	6.2396
75	0	11.3992	11.0256	8.8165	8.0440	7.4181
	0.1	10.8553	10.4995	8.3954	7.6598	7.0646
	0.2	9.5951	9.2805	7.4200	6.7699	6.2450
90	0	11.3991	11.0256	8.8164	8.0439	7.4181
	0.1	10.8560	10.5001	8.3958	7.6602	7.0651
	0.2	9.5966	9.2819	7.4210	6.7708	6.2462

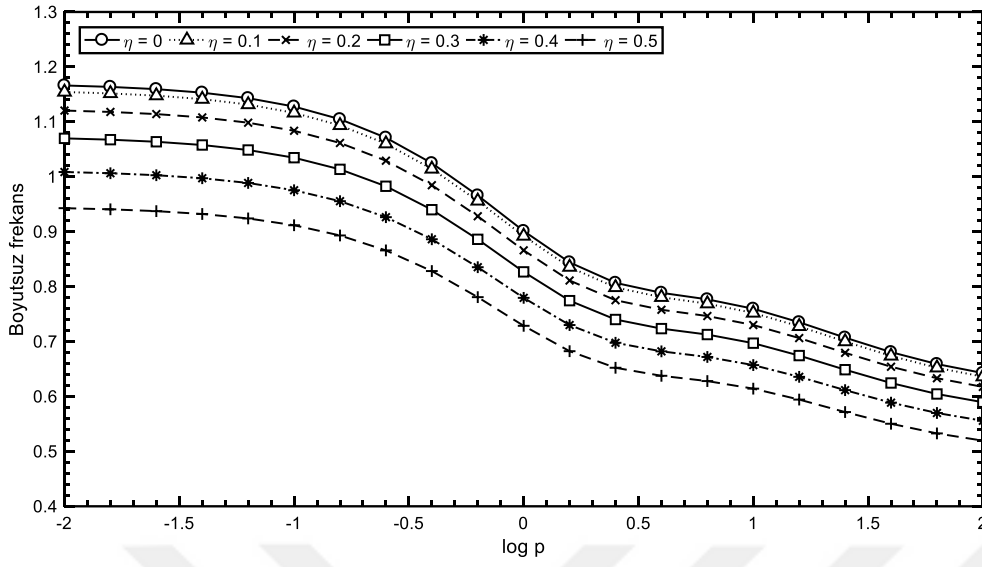


(a)

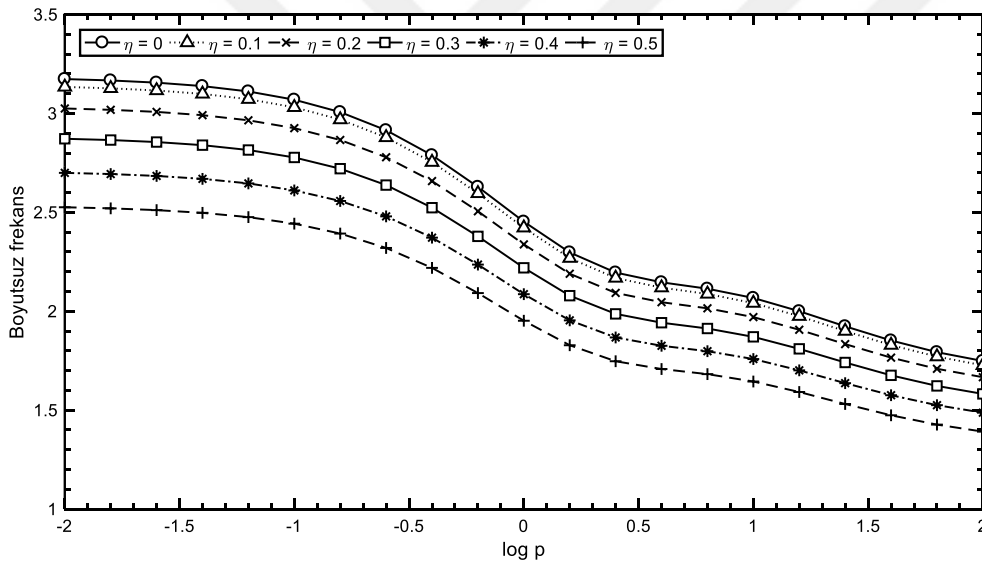


(b)

Şekil 4.25. II-Tipteki KDFD nanoçerçevelerin güç indeksinin artışına göre boyutsuz frekanslarının değişimi; **a)** 1. Mod; **b)** 2. Mod

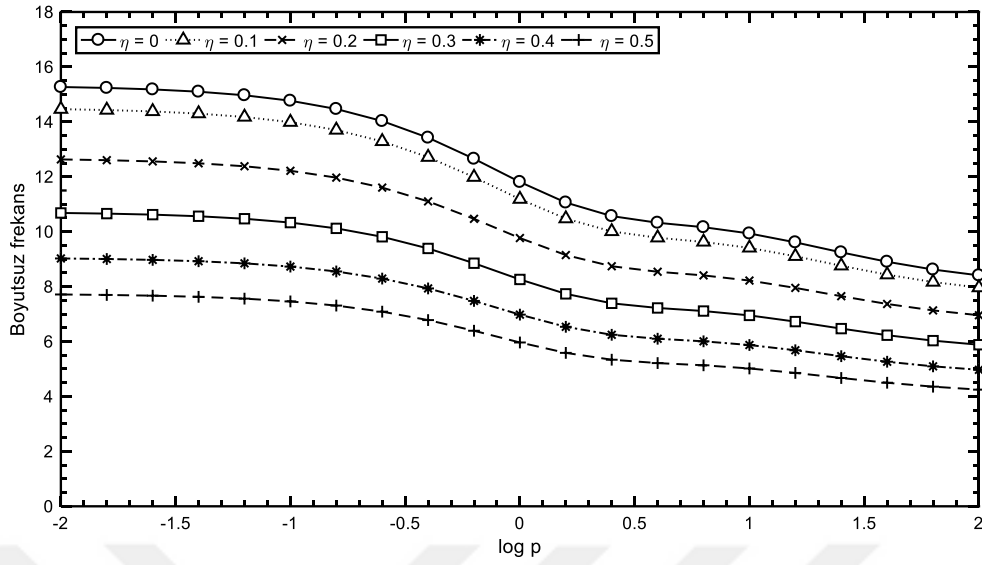


(a)

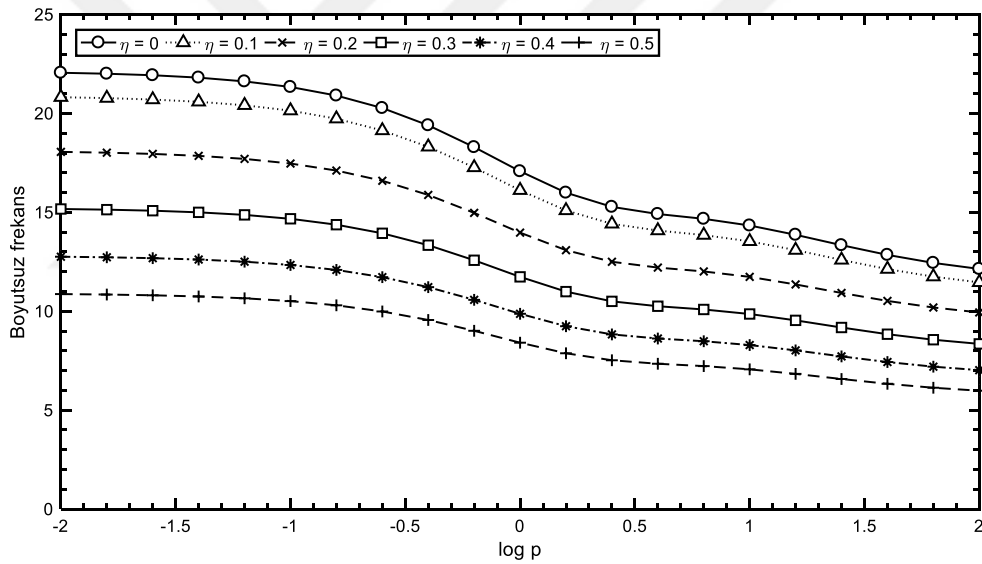


(b)

Şekil 4.26. Γ_1 -Tipteki KDFD nanoçerçevelerin güç indeksinin artışına göre boyutsuz frekanslarının değişimi ($\alpha = 90^\circ$); **a)** 1. Mod; **b)** 2. Mod



(a)

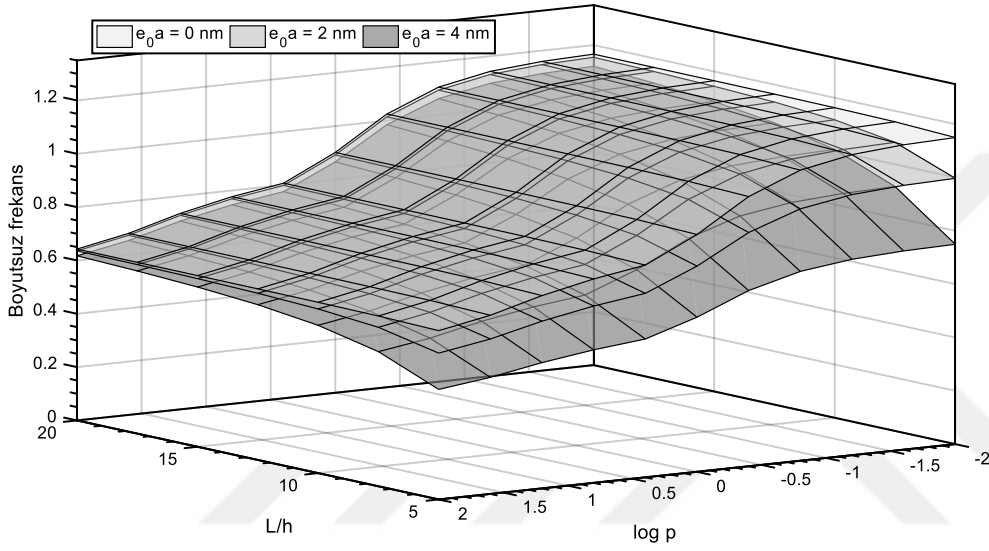


(b)

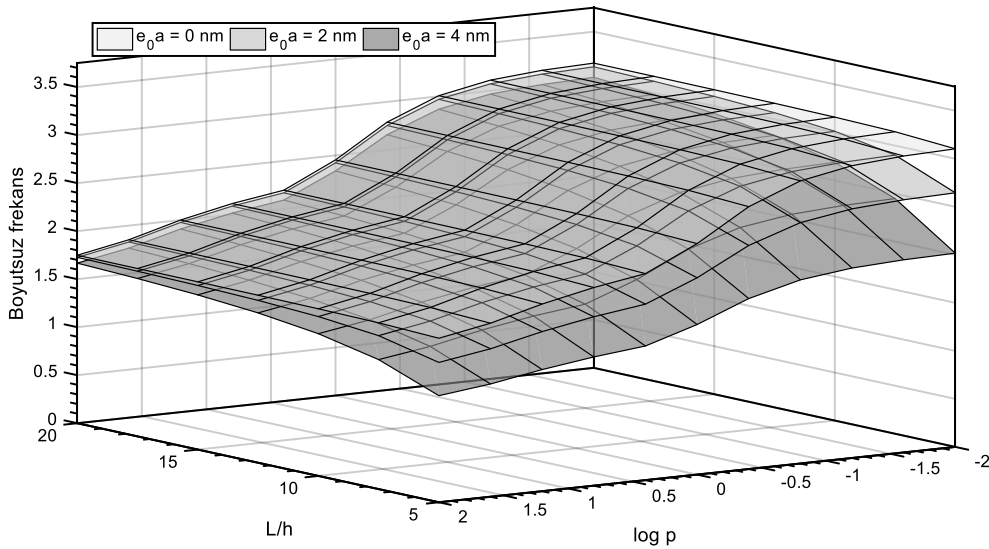
Şekil 4.27. $\Gamma 3$ -Tipteki KDFD nanoçerçevelerin güç indeksinin artışına göre boyutsuz frekanslarının değişimi ($\alpha = 90^\circ$); **a)** 1. Mod; **b)** 2. Mod

Bu bölümün kalan kısmında, seçilmiş birkaç tipteki KDFD nanoçerçevelerin yerel olmayan serbest titreşim sonuçları ve tartışmaları grafikler vasıtasıyla verilmektedir. Π -, $\Gamma 1$ - ve $\Gamma 3$ -Tipteki ($\alpha = 90^\circ$) nanoçerçeve yapıları analizlere konu olup, bunların bütün üyeleri bu analizlerde de üç sonlu elemana bölünmüştür. İlk olarak, güç indeksinin artışına göre nanoçerçevelerin ilk iki mod yerel olmayan boyutsuz frekanslarının değişimi Şekiller 4.25-4.27’de resmedilmektedir. Nanokiriş ve nanoçubuklarda olduğu gibi nanoçerçeve yapılarında da güç indeksinin artışı altında boyutsuz frekanslar düşmektedir. Genel olarak boyutsuz frekanslar güç indeksinin yüzde birler mertebesindeki artışları için daha düşük oranda azalmakta ancak onda birler mertebesindeki artışlar için bunların düşüşü hızlanmakta, güç indeksinin yüzler mertebesindeki artışları için düşüş oranı yine

azalmaktadır. Tabi yerel olmayan parametre güç indeksinin yüzde birler ve onda birler mertebesinde biraz daha etkin olmaktadır. Genel yorumlardan yapı özelindeki yorumlara geçilecek olursa, ikisinin de mesnetleri ankastre olan yapılardan daha fazla üyeye sahip Π -tipdeki nanoçerçevenin boyutsuz frekansları $\Gamma 3$ -tipinden düşüktür çünkü hatırlanacak olursa $\Gamma 3$ -tipinin iki üyesi vardır ve mesnetlenmemiş elemanı yoktur, Π -tipinin üç üyesi vardır yani sisteme $\Gamma 3$ -tipine göre ilave bir kütle getirmektedir ve üyelerden yatay olanı mesnetsizdir. $\Gamma 3$ -Tipinin iki mesnedi ankastre, $\Gamma 1$ -tipinin düşey üyesi ankastre ve yatay üyesi boş uçlu olduğundan $\Gamma 3$ -tipinin frekansları $\Gamma 1$ tipinden yüksektir. Bu yapılar içinde atomik parametrenin yanı sıra güç indeksinin de $\Gamma 3$ -tipinde en etkin olduğu söylenebilir ancak güç indeksinin etkinliği atomik parametrenin azalmasıyla azalmaktadır.

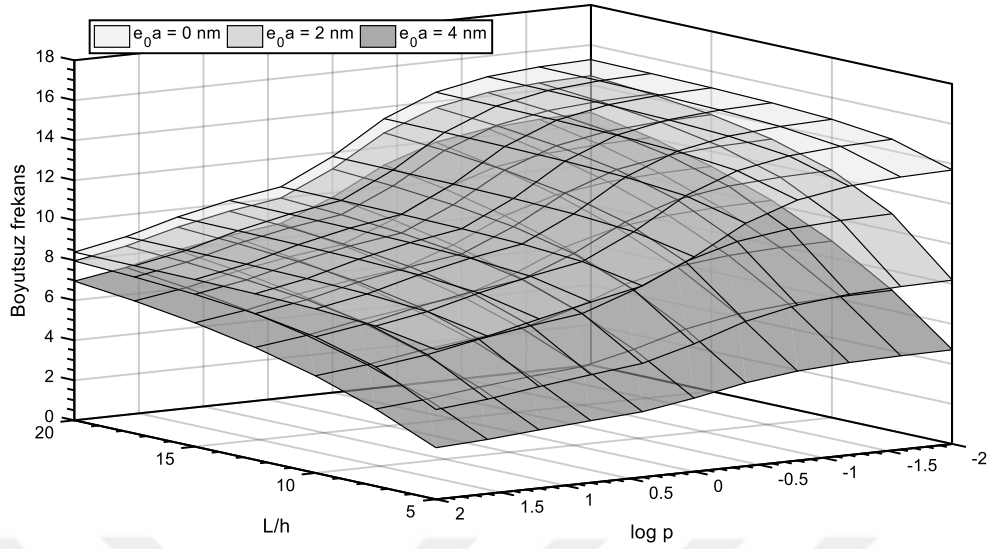


(a)

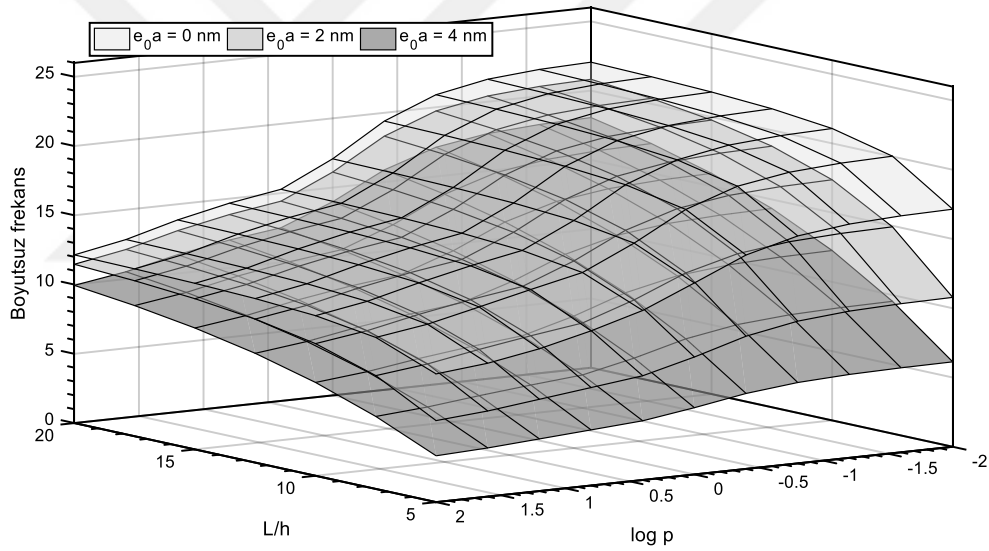


(b)

Şekil 4.28. $\Gamma 1$ -Tipteki KDFD nanoçerçeveslerin güç indeksi ve uzunluk/yükseklik oranı değerlerinin artışına göre boyutsuz frekanslarının değişimi ($\alpha = 90^\circ$); **a)** 1. Mod; **b)** 2. Mod



(a)

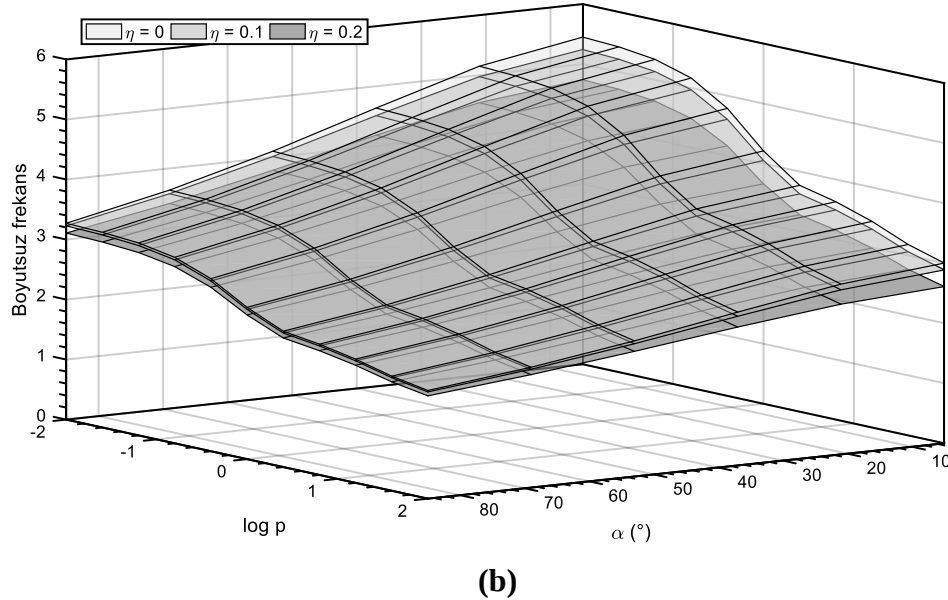
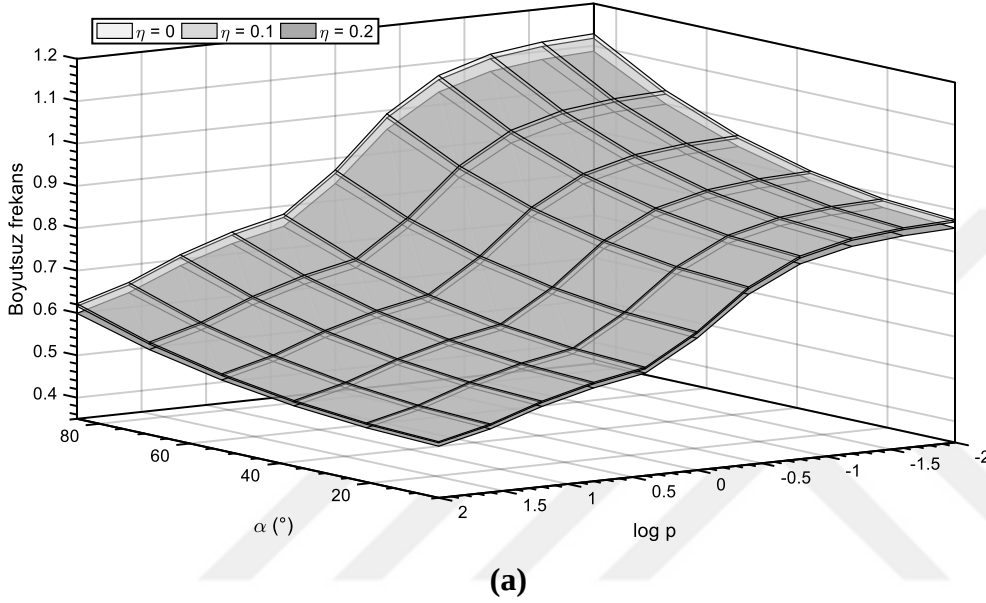


(b)

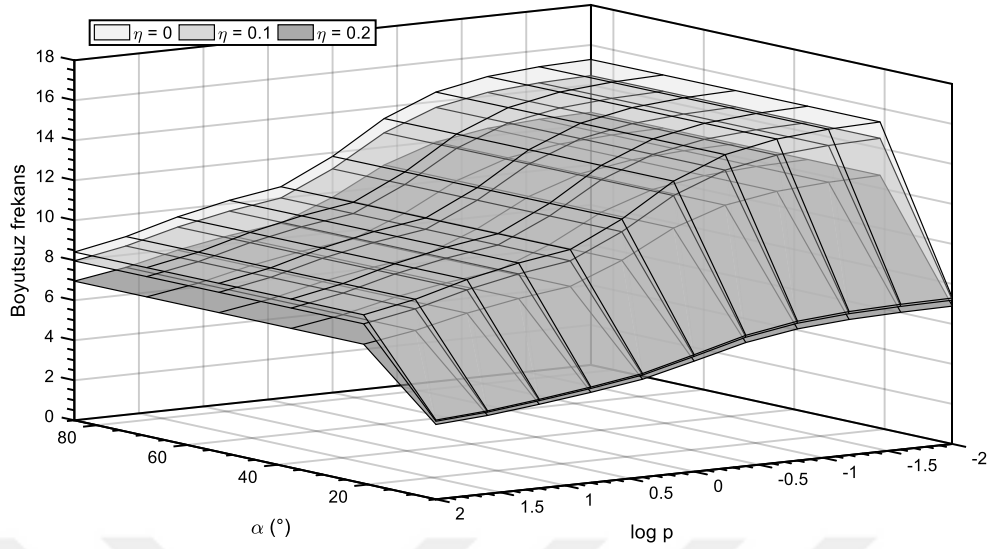
Şekil 4.29. Γ_3 -Tipteki KDFD nanoçerçevelerin güç indeksi ve uzunluk/yükseklik oranı değerlerinin artışına göre boyutsuz frekanslarının değişimi ($\alpha = 90^\circ$); **a)** 1. Mod; **b)** 2. Mod

Γ_1 - ve Γ_3 -Tipteki ($\alpha = 90^\circ$) KDFD nanoçerçevelerin narinlik oranı ve güç indeksinin artışına göre ilk iki mod boyutsuz frekansları sırasıyla Şekiller 4.28 ve 4.29 ile verilmektedir. Araştırma konusu diğer nanoyapıların narinlik oranını ilgilendiren söz konusu analizlerinde olduğu gibi burada da bütün üyelerin yüksekliği eşit ve $h = 1$ nm olarak düşünülmektedir. Dolayısı ile narinlik oranı değişiminde bütün üyelerin eşit olan uzunlukları artmaktadır. Uzunluk artışı sistemde kütle artışı oluşturduğundan doğal frekans haliyle azalır ancak boyutsuz frekans parametresinde uzunluktaki artış doğal frekanstaki azalıştan yüksek olduğundan dolayı boyutsuz frekans parametreleri yükselir. Atomik parametre diğer nanoyapılarda olduğu gibi düşük uzunluklu nanoçerçevelerin de

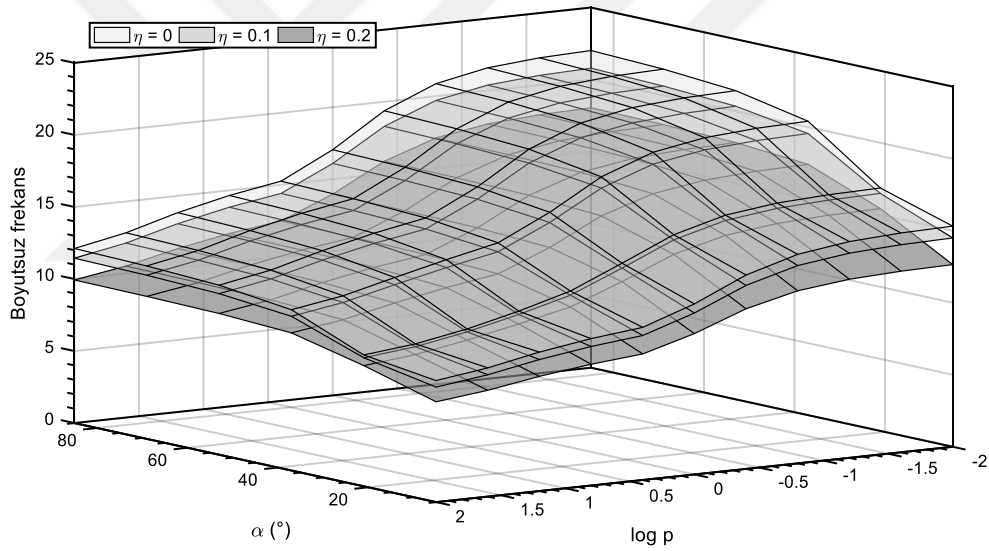
boyutsuz frekanslarını daha fazla etkiler ve atomik parametrenin genel etkisi yüksek modda daha fazla olmaktadır. Üye uzunlukları arttıkça atomik parametrenin etkisi düşer. Bu bağlamda, özellikle yüksek üye uzunluklarında ve yüksek güç indekslerinde $\Gamma 1$ -tipindeki çerçevenin frekansları birbirine oldukça yakınken $\Gamma 3$ -tipinde böyle bir çıkarımdan bahsedilemez, buna göre yerel olmayan parametrenin bu bölgedeki etkisi $\Gamma 3$ -tipinde oldukça belirgindir. Öte yandan, güç indeksi genel olarak yüksek üye uzunluklu nanoçerçeveleri daha fazla etkilemektedir. Ek olarak, yerel olmayan parametre düşük güç indeksine sahip nanoçerçevelerde daha etkin görünmektedir.



Şekil 4.30. $\Gamma 1$ -Tipteki KDFD nanoçerçevelerin güç indeksi ve yönelim açısı değerlerinin artışına göre boyutsuz frekanslarının değişimi; **a)** 1. Mod; **b)** 2. Mod



(a)



(b)

Şekil 4.31. $\Gamma 3$ -Tipteki KDFD nanoçerçevelerin güç indeksi ve yönelim açısı değerlerinin artışına göre boyutsuz frekanslarının değişimi; **a)** 1. Mod; **b)** 2. Mod

Son olarak, $\Gamma 1$ - ve $\Gamma 3$ -tipindeki KDFD nanoçerçevelerin düşey üye yönelim açısı ve güç indeksinin artışı altında elde edilen ilk iki mod boyutsuz frekans değişim yüzeyleri sırasıyla Şekiller 4.30 ve 4.31’de sunulmaktadır. Öncelikle $\Gamma 1$ -tipindeki nanoçerçevenin ikinci modunda grafiğin görüntüsünün davranışın anlaşılmasını zorlaştırması nedeniyle güç indeksi ve yönelim açısının eksenleri değiştirilmiştir. Ek olarak, yönelim açısının $\alpha = 5^\circ, 85^\circ$ ve arasındaki değerleri analize konu olmaktadır. Buna göre, yönelim açısı çoğunlukla boyutsuz frekansları yükselten bir faktör iken $\Gamma 1$ -Tipindeki nanoçerçevenin ikinci modunda tam tersi bir etki gözlemlenmektedir. $\Gamma 3$ -Tipindeki nanoçerçeveden gözlemlenebileceği üzere yönelim açısının çok düşük değerleri boyutsuz frekansları daha fazla yükseltmekte, yönelim açısının daha yüksek değerleri bu anlamda bir etkiye sahip

olmamaktadır. Güç indeksinin yüksek yönelim açısına sahip yani dik nanoçerçevelerin boyutsuz frekanslarını daha fazla indirgediğinden söz edilebilir. Ayrıca yerel olmayan parametrenin de dik nanoçerçevelerde daha etkin olduğu ifade edilmelidir.



5. SONUÇLAR

Nanoteknoloji bilimindeki hızlı gelişmeler nedeniyle bir ve iki boyutlu homojen nanomalzemelerin temel bileşen olduğu NEMS sistemlerinin mekanik analizlerinin bilim insanlarının büyük ilgisini toplamasıyla beraber, nanokompozit uygulamaları çeşitli kompozit malzeme konfigürasyonlarına sahip yapıların da mekanik modellerine bir ilginin yönelmesine sebep olmuştur. Bu kapsamda, fonksiyonel derecelendirilmiş nanoyapıların atomik boyut etkisine dayanan mekanik modelleri ve analizleri yoğun çalışılan bir konu olarak bilimsel literatürde yerini almıştır.

Bu bağlamda, FDM nanoyapıların eğilme çubuğu (kiriş), eksenel çubuk ve eğilme çerçevesi modellerinin kayma deformasyonunu içeren kinematik kuramlarla birlikte atomik boyut etkisine dayanan yüksek mertebeli sürekli ortam teorilerinden olan yerel olmayan elastisite teorisi çerçevesinde serbest titreşimleri hakkında sonlu eleman analizleri bu doktora tezi ile sunulmuştur. NEMS'lerin genel çalışma ortamı düşünülerek sıcaklık değişimi ve elastik ortam etkileri, kayma deformasyonlu yerel olmayan nanoyapı modellerinde gözetilmiştir. Buna göre, serbest titreşim analizlerinde çeşitli parametreler altında nanoyapıların boyutsuz frekansları çizelgeler ve grafiklerle verilerek bunların detaylı tartışmaları da gerçekleştirilmiştir.

Tez çalışmasını nihayetine ve amacına ulaştırabilmek maksadıyla tartışmalardan çıkarılabilecek sonuçlar ve bazı öneriler aşağıda sunulmaktadır. İlk olarak KDFD nanokiriş yapılardan bahsedilmektedir:

- Boyut etkisini ifade eden yerel olmayan parametre arttıkça nanokirişlerin frekansları azalmaktadır.
- Yerel olmayan parametre ankastre mesnetten dolayı uçları daha rijit sistemlerde frekansları azalması için daha etkindir.
- Yüksek modlarda yerel olmayan parametre frekansları daha fazla indirgemektedir.
- Fonksiyonel derecelendirilme güç indeksi arttıkça nanokiriş frekansları azalmaktadır. Genellikle güç indeksinin onda birler ve onlar mertebesindeki artışları için bu azalış diğer mertebelere göre daha hızlı olmaktadır.
- Yerel olmayan parametrenin frekanslar üzerindeki etkinliği güç indeksinin küçük değerleri için daha fazladır.
- Nanokirişlerin frekansları üzerinde nötr eksen de önemli bir etkiye sahiptir. Buna göre malzeme tarafsız eksenini hesaba katılırsa frekanslar ihmal edilemeyecek ölçüde azalır. Güç indeksinin onlar mertebesinde nötr eksen etkisi en yüksektir.
- Kayma deformasyonsuz nanokirişlerin serbest titreşim frekanslarının karakteristik dış boyutlardan etkilenmediği bilinmektedir (Reddy 2007; Pradhan 2012). Ancak kayma deformasyonlu nanokirişlerde düşük uzunluk için derin kiriş etkisi belirginleştiğinden frekanslar oldukça düşük hesaplanmıştır.
- Yerel olmayan parametre etkisi kısa nanokirişlerde yüksektir.

- Elastik zeminler nanokiriş frekanslarını artırıcı etkiye sahiptir. Elastik zemin parametreleri arttıkça yerel olmayan parametrenin frekans düşürme hızı azalır. Dahası, elastik zeminler FDM nanokirişlerin frekanslarını daha fazla yükseltir.
- Sıcaklık nanokiriş frekanslarını azaltmaktadır. Yerel olmayan parametre arttıkça frekansların düşüşü hızlanmaktadır. Bunlara ek olarak, sıcaklık arttıkça FDM nanokirişlerin frekansları daha hızlı düşer.
- Ayrıca yerel olmayan sonlu elemanlar yaklaşımının KDFD nanokiriş titreşim analizinde büyük bir başarıya sahip olduğu gözlemlenmektedir. Gerekli doğrulama çalışmalarının sonucunda yeteri yakınsaklıkların elde edildiği, özellikle termo-elastik ortam altında analitik çözümü alınamayan sınır şartlı KDFD nanokirişlerin frekanslarına ulaşılabilirdiği ve boyutsuz atomik parametre arttıkça frekanslardaki sapmaların genel olarak azaldığı tespit edilmiştir.

Öte yandan, yanal atalet etkili KDFD eksenel nanoçubukların yerel olmayan serbest titreşim analizlerinin tartışılması sonucunda aşağıdaki çıkarımlara ulaşılmaktadır.

- Boyut etkisi, eksenel nanoçubukların frekanslarını düşürmektedir. Yerel olmayan parametre nanoçubukların da yüksek modlarında daha etkindir.
- Yerel olmayan parametre, nanokirişlere benzer şekilde, daha rijit bir sistem olduğundan iki ucu tutulu nanoçubuklarda daha etkindir.
- Yine nanokirişlerde olduğu gibi güç indeksinin onda birler ve onlar mertebesindeki artışları nanoçubuk frekanslarının daha çok azalmasına sebebiyet verir.
- Ağırlıklı kalıntıya göre yapılandırılan ve nanokiriş analizlerinde hatalı sonuç vermediği anlaşılan sonlu eleman çözümünün, yanal atalet etkili eksenel nanoçubuklarda kullanımıyla bazı hatalı sonuçlara ulaşılmıştır. Bu nedenle, hatanın kaynaklandığı nedenler çeşitli sayısal uygulamalarla tespit edilerek hatayı tetikleyen sonlu eleman matematiksel bileşenleri üzerinde bir işlem yapılarak modifiye edilmiş sonlu elemanlar çözümleri sunulmuştur. İlgili yakınsaklık analizleri sonucunda önerilen yaklaşımın, probleme etkileyen parametrelerin ekstrem durumları haricinde başarılı olduğu sonucuna varılmıştır.
- Eksenel elastik ortam, nanoçubukların frekanslarını yükseltir. Nanokiriş sonuçlarına benzer şekilde elastik ortam rijitliği yükseldikçe boyutsuz atomik parametrenin etkisi azalır ve bu durumda FDM nanoçubukların frekansları daha çok artar.
- Nanokirişlere benzer biçimde, düşük uzunluklu eksenel nanoçubuklarda yerel olmayan parametre daha büyük bir etkiye sahiptir.

Bunlara ek olarak, KDFD nanoçerçeveler için yapılan çıkarımlar da aşağıdaki gibi verilebilir:

- Yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu, atomik boyut etkisi ihmal edilen çerçeveler için literatürdeki bazı çalışmalar üzerinden doğrulanmıştır.

- Yerel olmayan parametrenin varlığı altında nanoçerçevelerin de frekansları düşmektedir ve yüksek mod boyutsuz frekansları bu parametreden daha fazla oranda etkilenmektedir.
- Kayma deformasyonu, nanoçerçevelerin de frekanslarını azaltmaktadır. Düşük üye uzunluklu nanoçerçevelerde bu etki daha belirgindir ve yerel olmayan parametre düşük üye uzunluklu nanoçerçevelerde daha etkindir.
- Nanokirişlere ve nanoçubuklara benzer şekilde, güç indeksi KDFD nanoçerçevelerin frekanslarını indirmektedir. Buna göre, güç indeksinin onda birler ve onlar mertebesindeki artışları için frekans azalma hızı daha fazladır.
- Yönelim açısı arttıkça yani geometrik manada nanoyapı dikleştikçe KDFD nanoçerçevelerin frekansları artmaktadır. Genel olarak dik KDFD nanoçerçeveler güç indeksi artışından daha fazla etkilenmektedir.

Bütün bu sonuçlar, atomik ölçekli fonksiyonel derecelendirilmiş yapıların mekanik davranışları için kayma deformasyonu, boyutsuz atomik parametre, güç indeksi ve termo-elastik çevre parametrelerinin mutlaka göz önüne alınması gerektiğini ortaya koymaktadır. Ayrıca, tez kapsamında geliştirilen yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonunun, frekansları analitik çözümle hesaplanamayan nanoyapılar için bir alternatif olduğu mutlaka belirtilmelidir. Bu bağlamda, yerel olmayan sonlu eleman formülasyonları, nano-elektro-mekanik sistemlerde çeşitli görevler üstlenebilecek kompozit nanoyapıların mekanik tabanlı kesin tasarım süreçlerine yol gösterebilecektir.



6. KAYNAKLAR

- Abdi, A., et al 2022. A two-dimensional borophene supercapacitor. *ACS Materials Letters*, 4(10): 1929-1936.
- Abdullah, S.S., Hashemi, S.H., Hussein, N.A. and Nazemnezhad, R. 2023. Effect of thermal axial load on vibration of cracked single-walled carbon nanotubes modelled as Timoshenko nanobeams using nonlocal theory. *Australian Journal of Mechanical Engineering*, 21(3): 860-871.
- Abouelregal, A.E., Marin, M. and Askar, SS. 2023. Analysis of the magneto-thermoelastic vibrations of rotating Euler-Bernoulli nanobeams using the nonlocal elasticity model. *Boundary Value Problems*, 21: 2023.
- Adams, F. and Barbante, C. 2015. Nanotechnology and analytical chemistry. *Comprehensive Analytical Chemistry*, Elsevier, Chapter 4.
- Adhikari, S., Murmu, T., McCarthy, M.A. 2013a. Dynamic finite element analysis of axially vibrating nonlocal rods. *Finite Elements in Analysis in Design*, 63: 42-50.
- Adhikari, S., Murmu, T., McCarthy, M.A. 2013b. Frequency domain analysis of nonlocal rods embedded in an elastic medium. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 59: 33-40.
- Ahmad, R., Mahmoudi, T., Ahn, M.S. and Hahn, Y.B. 2018. Recent advances in nanowires-based field-effect transistors for biological sensor applications. *Biosensors and Bioelectronics*, 100: 312-325.
- Alotta, G., Failla, G. and Zingales, M. 2014. Finite element method for a nonlocal Timoshenko beam model. *Finite Elements in Analysis and Design*, 89: 77-92.
- Alshorbagy, A.E., Eltaher, M.A. and Mahmoud, F.F. 2013. Static analysis of nanobeams using nonlocal FEM. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 27: 2035-2041.
- Alsteens, D., Gaub, H.E., Newton, R., Pfreundschuh, M., Gerber, C. and Müller D.J. 2017. Atomic force microscopy-based characterization and design of biointerfaces. *Nature Reviews Materials*, 2: 17008.
- Amada, S., Munekata, T., Nagase, Y., Ichikawa, Y., Kirigai, A. and Yang, Z. 1996. The mechanical structures of bamboos in viewpoint of functionally gradient and composite materials. *Journal of Composite Materials*, 30(7): 800-819.
- Ansari, A., Gholami, R. and Rouhi, H. 2015. Size-dependent nonlinear forced vibration analysis of magneto-electro-thermo-elastic Timoshenko nanobeams based upon the nonlocal elasticity theory. *Composite Structures*, 126: 216-226.
- Ansari, R., Gholami, R. and Darabi, M.A. 2011. Thermal buckling analysis of embedded single-walled carbon nanotubes with arbitrary boundary conditions using the nonlocal Timoshenko beam theory. *Journal of Thermal Stresses*, 34: 1271-1281.
- Ansari, R., Shojari, M.F., Mohammadi, V., Gholami, R. and Rouhi, H. 2015b. Buckling and postbuckling of single-walled carbon nanotubes based on a nonlocal Timoshenko beam model. *ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 95(9): 939-951.

- Arda, M. 2021. Axial dynamics of functionally graded Rayleigh-Bishop nanorods. *Microsystem Technologies*, 27: 269-282.
- Arda, M., Majak, J. and Mehrparvar, M. 2024. Longitudinal wave propagation in axially graded Rayleigh-Bishop nanorods. *Mechanics of Composite Materials*, 59: 1109-1128.
- Arefi, M. 2016. Analysis of wave in a functionally graded magneto-electro-elastic nanorod using nonlocal elasticity model subjected to electric and magnetic potentials. *Acta Mechanica*, 227: 2529-2542.
- Arefi, M. and Zenkour, A.M. 2017a. Wave propagation analysis of a functionally graded magneto-electro-elastic nanobeam rest on Visco-Pasternak foundation. *Mechanics Research Communications*, 79: 51-62.
- Arefi, M. and Zenkour, A.M. 2017b. Employing the coupled stress components and surface elasticity for nonlocal solution of wave propagation of a functionally graded piezoelectric Love nanorod model. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 28(17): 2403-2413.
- Ari, N. and Eringen, A. C. 1983. Nonlocal stress-field at griffith crack. *Crystal Lattice Defects and Amorphous Materials*, 10(1): 33-38.
- Aria, A.I. and Friswell, M.I. 2019. A nonlocal finite element model for buckling and vibration of functionally graded nanobeams. *Composites Part B: Engineering*, 166: 233-246.
- Aria, A.I., Rabczuk, T. and Friswell, M.I. 2019. A finite element model for the thermo-elastic analysis of functionally graded porous nanobeams. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 77: 103767.
- Aydogdu, M. 2009. Axial vibration of the nanorods with the nonlocal continuum rod model. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 41(5): 861-864.
- Aydogdu, M. 2012. Axial vibration analysis of nanorods (carbon nanotubes) embedded in an elastic medium using nonlocal elasticity. *Mechanics Research Communications*, 43: 34-40.
- Bahrami, A., Zargaripoor, A., Shiri, H. and Khosravi, N. 2019. Size-dependent free vibration of axially functionally graded tapered nanorods having nonlinear spring constraint with a tip nanoparticle. *Journal of Vibration and Control*, 25(21-22): 2769-2783.
- Bai, X., Golberg, D., Bando, Y., Zhi, C., Tang, C., Mitome, M. and Kurashima, K. 2007. Deformation-driven electrical transport of individual boron nitride nanotubes. *Nano Letters*, 7(3): 632-637.
- Bargatin, I., Myers, E.B., Aldridge, J.S., Marcoux, C., Brianceau, P., Duraffourg, L., Colinet, E., Hentz, S., Andreucci, P. and Roukes, M.L. 2012. Large-scale integration of nanoelectromechanical systems for gas sensing applications. *Nano Letters*, 12(3): 1269-1274.
- Barretta, R., Feo, L., Luciano, R., de Sciarra, F.M. and Penna, R. 2016. Functionally graded Timoshenko nanobeams: A novel nonlocal gradient formulation. *Composites Part B: Engineering*, 100: 208-219.

- Bartel, D.L., Davy, D.T. and Keaveny, T.M. 2006. Orthopaedic Biomechanics. Pearson Education, Upper Saddle River, New Jersey.
- Belarbi, M.O., Houari, M.S.A., Daikh, A.A., Garg, A., Merzouki, T., Chalak, H.D. and Hirane, H. 2021. Nonlocal finite element model for the bending and buckling analysis of functionally graded nanobeams using a novel shear deformation theory. *Composite Structures*, 264: 113712.
- Benzair, A., Tounsi, A., Besseghier, A., Heireche, H., Moulay, N. and Boumia, L. 2008. The thermal effect on vibration of single-walled carbon nanotubes using nonlocal Timoshenko beam theory. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 41: 225404.
- Bethune, D.S., Kiang, C.H., de Vries, M.S., Gorman, G., Savoy, R., Vazquez, J. and Beyers, R. 1993. Cobalt-catalysed growth of carbon nanotubes with single atomic-layer walls. *Nature*, 363: 605-607.
- Bever, M.B. and Duwez, P.E. 1972. Gradients in composite materials. *Materials Science and Engineering*, 10: 1-8.
- Binnig, G., Quate, C.F. and Gerber, C. 1986, Atomic force microscopy. *Physical Review Letters*, 56: 930.
- Blanchard, C.R. 1996, Atomic force microscopy. *The Chemical Educator*, 1: 1-8.
- Bozsaky, D. 2016. Application of nanotechnology-based thermal insulation materials in building construction. *Slovak Journal of Civil Engineering*, 24(1):17-23.
- Braga, D. and Horowitz G. 2009. High-performance organic field-effect transistors. *Advanced Materials*, 21(14-15): 1473-1486.
- Bushra, K.A. and Prasad, K.S. 2022. Paper-based field-effect transistor sensors. *Talanta*, 239: 123085.
- Cai, X. and Xu, L. 2022. A piezoelectrically excited ZnO nanowire mass sensor with closed-loop detection at room temperature. *Micromachines*, 13(12): 2242.
- Ceballes, S., Saunders, B.E. and Abdelkafi, A. 2022. Nonlocal Timoshenko modeling effectiveness for carbon nanotube-based mass sensors. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 92: 104462.
- Chakraborty, A. and Luo, C. 2006. Fabrication and application of metallic nano-cantilevers. *Microelectronics Journal*, 37(11): 1306-1312.
- Chakraborty, S., Jo, B.W. and Yoon, Y.S. 2020. Development of nano cement concrete by top-down and bottom-up nanotechnology concept. In: Liew, M.S., Nguyen-Tri, P., Nguyen, T.A. and Kakooei, S. (Eds.), *Smart Nanoconcretes and Cement-Based Materials*. Elsevier, Chapter 7.
- Challamel, N., Zhang, Z., Wang, C.M., Reddy, J.N., Wang, Q., Michelitsch, T. and Collet, B. 2014. On nonconservativeness of Eringen's nonlocal elasticity in beam mechanics: correction from a discrete-based approach. *Archive of Applied Mechanics*, 84: 1275-1292.
- Chan S.H. 2001. Performance and emissions characteristics of a partially insulated gasoline engine. *International Journal of Thermal Science*, 40: 255-261.

- Chandrasekaran, S. and Hari, S. 2022. Functionally graded material and its application to marine structures. *Sustainable Marine Structures*, 4(1): 35-41.
- Chang, T.P. 2013. Axial vibration of non-uniform and non-homogeneous nanorods based on nonlocal elasticity theory. *Applied Mathematics and Computation*, 219(10): 4933-4941.
- Chaudhary, R. and Mudimela, P.R. 2022. Comprehensive review of low pull-in voltage RF NEMS switches. *Microsystem Technologies*, 29: 19-33.
- Chen, M.E. et al. 2021. Graphene-based electromechanical thermal switches. *2D Materials*, 8: 035055.
- Cheng, S., Hideshima, S., Kuroiwa, S., Nakanishi, T. and Osaka, T. 2015. Label-free detection of tumor markers using field effect transistor (FET)-based biosensors for lung cancer diagnosis. *Sensors and Actuators B: Chemical*, 212: 329-334.
- Chopra, N.G. and Zettl, A. 1997. Measurement of the elastic modulus of a multi-wall boron nitride nanotube. *Solid State Communications*, 105(5): 297-300.
- Civalek, Ö. and Demir, C. 2016. A simple mathematical model of microtubules surrounded by an elastic matrix by nonlocal finite element method. *Applied Mathematics and Computation*, 289: 335-352.
- Civalek, Ö. and Numanoglu, H.M. 2020. Nonlocal finite element analysis for axial vibration of embedded love-bishop nanorods. *International Journal of Mechanical Sciences*, 188: 105939
- Civalek, Ö., Uzun, B. and Yaylı, M.Ö. 2022. An effective analytical method for buckling solutions of a restrained FGM nonlocal beam. *Computational and Applied Mathematics*, 41: 67.
- Civalek, Ö., Uzun, B. and Yayli, M.Ö. 2022. Torsional vibrations of functionally graded restrained nanotubes. *The European Physical Journal Plus*, 137: 113.
- Cobianu, C. et al. 2009. Carbon nanotube based nanotechnology for space applications. 2009 International Conference of Semiconductor, 259-262, 12-14 October, Bucharest.
- Condon, A. 2006. Designed DNA molecules: principles and applications of molecular nanotechnology. *Nature Reviews Genetics*, 7: 566-575.
- Datar, R., Kim, J., Jeon, S., Hesketh, P., Manalis, S., Boisen, A. and Thundat, T. 2011. Cantilever sensors: Nanomechanical tools for diagnostics. *MRS Bulletin*, 34: 449-454.
- De Rosa, M.A., Lippiello, M., Babillo, E. and Ceraldi, C. 2021. Nonlocal vibration analysis of a nonuniform carbon nanotube with elastic constraints and an attached mass. *Materials*, 14: 3445.
- Demir, Ç. and Civalek, Ö. 2013. Torsional and longitudinal frequency and wave response of microtubules based on the nonlocal continuum and nonlocal discrete models. *Applied Mathematical Modelling*, 37(12): 9355-9367.
- Demir, Ç. and Civalek, Ö. 2017. A new nonlocal FEM via Hermitian cubic shape functions for thermal vibration of nano beams surrounded by an elastic matrix. *Composite Structures*, 168: 872-884.

- Demir, C., Mercan, K., Numanoglu, H.M. and Civalek, O. 2018. Bending response of nanobeams resting on elastic foundation. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 4(2): 105-114.
- Desai, A.V. and Haque, M.A. 2007. Mechanical properties of ZnO nanowires, *Sensors and Actuators A: Physical*, 134(1): 169-176.
- Dinçkal, Ç. 2016. Free vibration analysis of carbon nanotubes by using finite element method. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering*, 40: 43-55.
- Drechsler, U., Bürer, N., Despont, M., Dürig, U., Gotsmann, B., Robin, F. and Vettiger, P. 2003. Cantilevers with nano-heaters for thermomechanical storage application. *Microelectronic Engineering*, 67-68: 397-404.
- Dresselhaus, M.S., Dresselhaus, G. and Saito, R. 1995. Physics of carbon nanotubes. *Carbon*, 33(7): 883-891.
- Eaton, W.P. and Smith, J.H. 1997. Micromachined pressure sensors: Review and recent developments. *Smart Materials and Structures*, 6: 530.
- Ebrahimi, F. and Barati, M.R. 2016. Vibration analysis of nonlocal beams made of functionally graded material in thermal environment. *The European Physical Journal Plus*, 131: 279.
- Ebrahimi, F. and Salari, E. 2015a. Thermo-mechanical vibration analysis of nonlocal temperature dependent FG nanobeams with various boundary conditions. *Composites Part B: Engineering*, 78: 272-290.
- Ebrahimi, F. and Salari, E. 2015b. Thermal buckling and free vibration analysis of size dependent Timoshenko FG nanobeams in thermal environments. *Composite Structures*, 128: 363-380.
- Ebrahimi, F. and Salari, E. 2015c. Size-dependent thermo-electrical buckling analysis of functionally graded piezoelectric nanobeams. *Smart Materials and Structures*, 24: 125007.
- Ebrahimi, F. and Salari, E. 2015d. A semi-analytical method for vibrational and buckling analysis of functionally graded nanobeams considering the physical neutral axis position. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 105(2): 151-181.
- Ecsedi, I. and Baksa, A. 2017. Free axial vibration of nanorods with elastic medium interaction based on nonlocal elasticity and Rayleigh model. *Mechanics Research Communications*, 86: 1-4.
- El-Borgi, S., Fernandes, R. and Reddy, J.N. 2015. Non-local free and forced vibrations of graded nanobeams resting on a non-linear elastic foundation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 77: 348-363.
- Eltaher, M.A., Abdelrahman, A.A., Al-Nawaby, A., Khater, M. and Mansour, A. 2014a. Vibration of nonlinear graduation of nano-Timoshenko beam considering the neutral axis position. *Applied Mathematics and Computation*, 235: 512-529.
- Eltaher, M.A., Alshorbagy, A.E. and Mahmoud, F.F. 2013a. Vibration analysis of Euler-Bernoulli nanobeams by using finite element method. *Applied Mathematical Modelling*, 37(7): 4787-4797.

- Eltaher, M.A., Alshorbagy, A.E. and Mahmoud, F.F. 2013b. Determination of neutral axis position and its effect on natural frequencies of functionally graded macro/nanobeams. *Composite Structures*, 99: 193-201.
- Eltaher, M.A., Emam, S.A. and Mahmoud, F.F. 2012. Free vibration analysis of functionally graded size-dependent nanobeams. *Applied Mathematics and Computation*, 218(14): 7406-7420.
- Eltaher, M.A., Emam, S.A. and Mahmoud, F.F. 2013c. Static and stability analysis of nonlocal functionally graded nanobeams. *Composite Structures*, 96: 82-88.
- Eltaher, M.A., Khairy, A., Sadoun, A.M. and Omar, F.A. 2014b. Static and buckling analysis of functionally graded Timoshenko nanobeams. *Applied Mathematics and Computation*, 229: 283-295
- Elyassi, B., Sahimi, M. and Tsotsis, T.T. 2007. Silicon carbide membranes for gas separation applications. *Journal of Membrane Science*, 288(1-2): 290-297.
- Eptaimeros, K.G., Koutoumaris, C.C. and Tsamasphyros, G.J. 2016. Nonlocal integral approach to the dynamical response of nanobeams. *International Journal of Mechanical Sciences*, 115-116: 68-80.
- Eptaimeros, K.G., Koutsoumaris, C.C., Dernikas, I.T. and Zisis, T. 2018. Dynamical response of an embedded nanobeam by using nonlocal integral stress models. *Composites Part B: Engineering*, 150: 255-268.
- Eringen A.C. 1978. Line crack subject to shear. *International Journal of Fracture*, 14: 367-379.
- Eringen, A.C. 1972. Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves. *International Journal of Engineering Science*, 10(5): 425-435.
- Eringen, A.C. 1973. Theory of nonlocal electromagnetic elastic solids. *Journal of Mathematical Physics*, 14(6): 733-740.
- Eringen, A.C. 1977. Screw dislocation in non-local elasticity. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 10(3): 671.
- Eringen, A.C. 1983. On differential equations of non local elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *Journal of Applied Physics*, 54: 4703.
- Eringen, A.C. 1983. On differential equations of non local elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *Journal of Applied Physics*, 54: 4703
- Eringen, A.C. 1984. Plane waves in nonlocal micropolar elasticity. *International Journal of Engineering Science*, 22(8-10): 1123-1121.
- Eringen, A.C. 2002. *Nonlocal Continuum Field Theories*. Springer-Verlag, New York, 376 p.
- Eringen, A.C. and Edelen, D.G.B. 1972. On nonlocal elasticity. *International Journal of Engineering Science*, 10(3): 233-248.
- Eringen, A.C. and Kim, B.S. 1977. Relation between nonlocal elasticity an lattice dynamics. *Crystal Lattice Defects*, 7(2): 51-57.
- Faghidian, S.A., Żur, K.K., Reddy, J.N. and Ferreira, A.J.M. 2022. On the wave dispersion in functionally graded porous Timoshenko-Ehrenfest nanobeams based

- on the higher-order nonlocal gradient elasticity. *Composite Structures*, 279: 114819.
- Fakher, M. and Hosseini-Hashemi, S. 2022. Vibration of two-phase local/nonlocal Timoshenko nanobeams with an efficient shear-locking-free finite-element model and exact solution. *Engineering with Computers*, 38: 231-245.
- Fan, Z. and Lu, Z.G. 2006. Chemical sensing with ZnO nanowire field-effect transistor. *IEEE Transactions on Nanotechnology*, 5(4): 393-396.
- Fang, J., Zheng, S., Xiao, J. and Zhang, X. 2020. Vibration and thermal buckling analysis of rotating nonlocal functionally graded nanobeams in thermal environment. *Aerospace Science and Technology*, 106: 106146.
- Foo, M.E. and Gopinath, S.C.B. 2017. Feasibility of graphene in biomedical applications. *Biomedicine & Pharmacotherapy*, 94: 354-361.
- Friswell, M.I. and Adhikari, S., and Lei, Y. 2007a. Vibration analysis of beams with non-local foundations using the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 71(11): 1365-1386.
- Friswell, M.I. and Adhikari, S., and Lei, Y. 2007b. Non-local finite element analysis of damped beams. *International Journal of Solids and Structures*, 44(22-23): 7564-7576.
- Ganapathi, M., Merzouki, T. and Polit, O. 2018. Vibration study of curved nanobeams based on nonlocal higher-order shear deformation theory using finite element approach. *Composite Structures*, 184: 821-838.
- Gao, D. 2004. Silicon carbide technology for micro- and nano-electromechanical systems applications. Yüksek Lisans Tezi, University of California, Berkeley, 184 s.
- Getz, M. 1991. Storage technologies. *The Bottom Line*, 4(1): 25-31.
- Ghassemi, H.M. and Yassar, R.S. 2010. On the mechanical behavior of boron nitride nanotubes. *Applied Mechanics Reviews*, 63(2): 020804.
- Gholipour, A. and Ghayesh, M.H. 2020. A coupled nonlinear nonlocal strain gradient theory for functionally graded Timoshenko nanobeams. *Microsystem Technologies*, 26: 2053-2066.
- Giessibl, F.J. 2003. Advances in atomic force microscopy, *Reviews of Modern Physics*, 75: 949.
- Gopalakrishnan, S. and Narendar, S. 2013. Wave Propagation in Nanostructures. Springer, Cham.
- Greenwood, J.C. and Satchell, D.W. 1988. Miniature silicon resonant pressure sensor. *IEE Proceedings D (Control Theory and Applications)*, 135(5): 369-372.
- Gul, U. and Aydogdu, M. 2022. Longitudinal vibration of Bishop nanorods model based on nonlocal strain gradient theory. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 44: 377.
- Gurtin, M.E. 1965. Thermodynamics and the possibility of spatial interaction in elastic materials. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 19: 339-352.

- Gutruf, P., Zeller, E., Walia, S., Nili, H., Sriram, S. and Bhaskaran M. 2015. Stretchable and tunable microtectonic ZnO-based sensors and photonics. *Small*, 11(35): 4532-4539.
- Haberman, R. 2013. Applied Partial Differential Equations: with Fourier Series and Boundary Value Problems.
- Hamed, M.A., Eltaher, M.A., Sadoun, A.M. and Almitani, K.H. 2016. Free vibration of symmetric and sigmoid functionally graded nanobeams. *Applied Physics A*, 122: 829.
- Hanley, S.J., and Gray, D.G. 1995. Atomic force microscopy. In: Connors, T.E. and Banerjee S. (Eds.), Surface Analysis of Paper. CRC Press, Boca Raton, Chapter 14.
- Hedia, H.S. and Fouda, N. 2013. A new design of dental implant coating using functionally graded material. *Materials Testing*, 55(10): 765-771.
- Hirai, T. and Chen, L. 1999. Recent and prospective development of functionally graded materials in Japan. *Materials Science Forum*, 308-311: 509-514.
- Holm, B.A., Bergey, E.J., De, T., Rodman, D.J., Kapoor, R., Levy, L., Friend, C.S. and Prasad, P.N. 2002. Nanotechnology in biomedical applications. *Molecular Crystals and Liquid Crystals*, 374(1): 589-598.
- Hon, D.N.S. and Shirashi, N. 2000. Wood and Cellulosic Chemistry, Marcel Dekker, New York.
- Hosseini, S.A.H. and Rahmani, O. 2016. Thermomechanical vibration of curved functionally graded nanobeam based on nonlocal elasticity. *Journal of Thermal Stresses*, 39(10): 1252-1267.
- Hou, C., Tai, G., Liu, Y., Liu, R., Liang, X., Wu, Z., Wu, Z. 2022. Borophene pressure sensing for electronic skin and human-machine interface. *Nano Energy*, 97: 107189.
- Huo, S., Liao, Z., Zhao, P., Zhou, Y., Göstl, R. and Hermann, A. 2022. Mechano-nanowires for ultrasound-controlled drug activation. *Advanced Science*, 9(12): 2104696.
- Iijima, S. 1991. Helical microtubules of graphitic carbon. *Nature*, 354: 56-58.
- Iijima, S. and Ichihashi, T. 1993. Single-shell carbon nanotubes of 1-nm diameter. *Nature*, 363: 603-605.
- Ikedo, K., Kuwayama, H., Kobayashi, T., Watanabe, T., Nishikawa, T., Yoshida, T. and Harada, K. 1990. Three-dimensional micromachining of silicon pressure sensor integrating resonant strain gauge on diaphragm. *Sensors and Actuators A: Physical*, 23(1-3): 1007-1010.
- Işık, Ç. 2011. Nano ve mikro yapıların yerel olmayan elastisite teorisi ile eğilme ve titreşim hesabı. Yüksek Lisans Tezi, Akdeniz Üniversitesi, Antalya, 143 s.
- Işık, Ç. 2018. Nano ölçekli mekanik sistemlerin modellenmesinde yerel olmayan sonlu eleman formülasyonu. Doktora tezi, Akdeniz Üniversitesi, Antalya, 143 s.

- Jaafar, H., Beh, K.H., Yunus, N.A.M., Hasan, W.Z.W., Shafie, S. and Sidek, O. 2014. A comprehensive study on RF MEMS switch. *Microsystem Technologies*, 20: 2109-2121.
- Jalaei, M.H. and Civalek, Ö. 2019. On dynamic instability of magnetically embedded viscoelastic porous FG nanobeam. *International Journal of Engineering Science*, 143: 14-32.
- Jalaei, M.H., Arani, A.G. and Nguyen-Xuan, H. 2019. Investigation of thermal and magnetic field effects on the dynamic instability of FG Timoshenko nanobeam employing nonlocal strain gradient theory. *International Journal of Mechanical Sciences*, 161-162: 105043.
- Jhi, S.H. and Kwon, Y.K. 2004. Hydrogen adsorption on boron nitride nanotubes: A path to room-temperature hydrogen storage. *Physical Review B*, 69: 245407.
- Jousseau, V., Yeromonahos, C., El Sabahy, J., Altemus, B., Ladner, C., Benedetto, K., Ollier, E. and Faguet, J. 2018. Filament assisted chemical vapor deposited organosilicate as chemical layer for nanometric hydrocarbon gas sensors. *Sensors and Actuators B: Chemical*, 271: 271-279.
- Kacem, N., Arcamone, J., Perez-Murano, F. and Hentz, S. 2010. Dynamic range enhancement of nonlinear nanomechanical resonant cantilevers for highly sensitive NEMS gas/mass sensor applications. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 20: 045023.
- Kambali, P.N., Nikhil, V.S. and Pandey, A.K. 2017. Surface and nonlocal effects on response of linear and nonlinear NEMS devices. *Applied Mathematical Modelling*, 43: 252-267.
- Kangyin, M.A. and Bahreyni, B. 2021. Self-powered integrated opto-electro-mechanical nano-actuators. *Nano Energy*, 88: 106280.
- Karami, B., Janghorban, M. and Rabczuk, T. 2020. Dynamics of two-dimensional functionally graded tapered Timoshenko nanobeam in thermal environment using nonlocal strain gradient theory. *Composites Part B: Engineering*, 182: 107622.
- Karličić, D., Murmu, T., Adhikari, S. and McCarthy, M. 2015. *Non-local Structural Mechanics*. Iste-Wiley.
- Kausar, A., Rafique, I. and Muhammad, B. 2017. Aerospace application of polymer nanocomposite with carbon nanotube, graphite, graphene oxide, and nanoclay. *Polymer-Plastics Technology and Engineering*, 56(13): 1438-1456.
- Kawano, T., Chiamori, H.C., Suter, M., Zhou, Q., Sosnowchik, B.D. and Lin, L. 2007. An electrothermal carbon nanotube gas sensor. *Nano Letters*, 7(12): 3686-3690.
- Kazmi, S.N.R. Hafiz, M.A.A., Chappanda, K.N., Ilyas, S., Holguin, J., Costa, P.M.F.J. and Younis, M.I. 2017. Tunable nanoelectromechanical resonator for logic computations. *Nanoscale*, 9: 3449-3457.
- Ke, L.L., Xiang, Y., Yang, J. and Kitipornchai, S. 2009. Nonlinear free vibration of embedded double-walled carbon nanotubes based on nonlocal Timoshenko beam theory. *Computational Materials Science*, 47(2): 409-417.

- Khaderbad, M.A., Choi, Y., Hiralal, P., Aziz, A., Wang, N., Durkan, C., Thiruvengathan, P., Amaratunga, G.A.J., Rao, V.P., Seshia, A.A. 2011. Electrical actuation and readout in a nanoelectromechanical resonator based on a laterally suspended zinc oxide nanowire. *Nanotechnology*, 23(2): 025501.
- Khan, Z.H., Kermany, A.R., Öchsner, A. and Iacopi, F. 2017. Mechanical and electromechanical properties of graphene and their potential application in MEMS. *Journal of Physics: Applied Physics*, 50: 053003.
- Khodabakshi, P. and Reddy, J. 2015. A unified integro-differential nonlocal model. *International Journal of Engineering Science*, 94: 60-75.
- Khosravi, F., Hosseini, S.A. and Hamidi, B.A. 2020b. On torsional vibrations of triangular nanowire. *Thin-Walled Structures*, 148: 106591.
- Khosravi, F., Hosseini, S.A. and Hamidi, B.A. 2020c. Analytical investigation on free torsional vibrations of noncircular nanorods. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 42: 514.
- Khosravi, F., Hosseini, S.A., Hamidi, B.A., Dimitri, R. and Tornabene, F. 2020a. Nonlocal torsional vibration of elliptical nanorods with different boundary conditions. *Vibration*, 3(3): 189-203.
- Kiani, Y. and Eslami, M.R. 2013. An exact solution for thermal buckling of annular FGM plates on an elastic medium. *Composites Part B: Engineering*, 45: 101-110.
- Kilinc, N., Cakmak, O., Kosemen, A., Ermek, E., Ozturk, S., Yerli, Y., Ozturk, Z.Z. and Urey, H. 2014. Fabrication of 1D ZnO nanostructures on MEMS cantilever for VOC sensor application. *Sensors and Actuators B: Chemical*, 202: 357-364.
- Kinnell, P.K. and Craddock, R. 2009. Advances in silicon resonant pressure transducers. *Procedia Chemistry*, 1: 104-107.
- Koizumi, M. 1997. FGM activities in Japan. *Composites Part B: Engineering*, 28(1-2):1-4.
- Koizumi, M. and Niino, M. 1995. Overview of FGM research in Japan. *MRS Bulletin*, 20(1): 19-21.
- Kong, S., Zhou, S., Nie, Z. and Wang, K. 2009. Static and dynamic analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory. *International Journal of Engineering Science*, 47(4): 487-498.
- Krüger, M., Buitelaar, M.R., Nussbaumer, T., Schönenberger, C. and Forró, L. 2001. Electrochemical carbon nanotube field-effect transistor. *Applied Physics Letters*, 78: 1291-1293.
- Kumar, N. and Dixit, A. 2019. Nanotechnology for Defence Applications. Springer Nature, Cham.
- Kunin, I.A. 1967. The theory of elastic media with microstructure and the theory of dislocations. Symposium on The Generalized Cosserat Continuum and the Continuum Theory of Dislocations with Applications, 321-329, Freudenstadt and Stuttgart.
- Kurimoto, M., Kato, K., Hanai, M., Hoshina, Y., Takei, M. and Okubo, H. 2010. Application of functionally graded material for reducing electric field on electrode

- and spacer interface. *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, 17(1): 256-263.
- Kwon, Y. W. and Bang, H. 2000. The finite element method using MATLAB. CRC Press.
- Lal, R. and Dangi, R. 2019. Thermal vibrations of temperature-dependent functionally graded nonuniform Timoshenko nanobeam using nonlocal elasticity theory. *Materials Research Express*, 6: 075016.
- Lam, D.C.C., Yang, F., Chong, A.C.M., Wang, J. and Tong, P. 2003. Experiments and theory in strain gradient elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51(8): 1477-1508.
- Lassagne, B., Garcia-Sanchez, D., Aguasca, A. and Bachtold, A. 2008. Ultrasensitive mass sensing with a nanotube electromechanical resonator. *Nano Letters*, 8(11): 3735-3738.
- Lee, K.W., Kang, G.Y., Park, J., Kang, J.Y., Yoon, D.S., Park, J.H. and Kim, T.S. 2005. Novel electrical detection of label-free disease marker proteins using piezoresistive self-sensing micro-cantilevers. *Biosensors and Bioelectronics*, 20: 1932-1938.
- Lee, W.C. and Cho, Y.H. 2007. Bio-inspired digital nanoactuators for photon and biomaterial manipulation. *Current Applied Physics*, 7(2): 139-146.
- Lei, J., He, Y., Li, Z., Guo, S. and Liu, D. 2019. Effect of nonlocal thermoelasticity on buckling of axially functionally graded nanobeams. *Journal of Thermal Stresses*, 42(4): 526-539.
- Lei, Y., Adhikari, S. and Friswell, M.I. 2013. Vibration of nonlocal Kelvin-Voigt viscoelastic damped Timoshenko beams. *International Journal of Engineering Science*, 66-67: 1-13.
- Li, L., Hu, Y. and Xiaobai, L. 2016. Longitudinal vibration of size-dependent rods via nonlocal strain gradient theory. *International Journal of Mechanical Sciences*, 115-116: 135-144.
- Li, M., Tang, H.X. and Roukes, M.L. 2007. Ultra-sensitive NEMS-based cantilevers for sensing, scanned probe and very high-frequency applications. *Nature Nanotechnology*, 2: 114-120.
- Li, X.F., Shen, Z.B. and Lee, K.Y. 2017. Axial wave propagation and vibration of nonlocal nanorods with radial deformation and inertia. *ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 97(5): 602-616.
- Lim, C.W., Islam, M.Z. and Zhang, G. 2015. A nonlocal finite element method for torsional statics and dynamics of circular nanostructures. *International Journal of Mechanical Sciences*, 94-95: 232-243.
- Lin, H.C., Chou, T., Chung, C.C., Tsen, C.J., Huang, B.W. and Liu, C.W. 2021. RF Performance of stacked Si nanosheet nFETs. *IEEE Transactions on Electron Devices*, 68(10): 5277-5283.

- Liu, J., Raj, P.M., Iyer, M., Wang, Z. and Tummala, R.R. 2007. Label-free protein detection by ZnO nanowire based bio-sensors. 2007 Proceedings 57th Electronic Components and Technology Conference, 29 May-1 June, Reno, Nevada.
- Liu, W.K., Karpov, E.G., Zhang, S. and Park, H.S. 2004. An introduction to computational nanomechanics and materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(17-20): 1529-1578.
- Loh, O.Y. and Espinosa, H.D. 2012. Nanoelectromechanical contact switches. *Nature Nanotechnology*, 7: 283-295.
- Loiseau, A., Willaime, F., Demoncy, N., Schramenko, N., Hug, G., Colliex, C. and Pascard H. 1998. Boron nitride nanotubes. *Carbon*, 36(5-6): 743-752.
- Low, I.M. and Mahmood, U. 2004. Functionally-graded structure and properties in human teeth. Proceedings of the Fourth Asian-Australasian Conference on Composite Materials (ACCM 4), 112-117, 6-9 July, Sydney.
- Lu, S., Panchapakesan, B. 2006. Hybrid platinum/single-wall carbon nanotube nanowire actuators: metallic artificial muscles. *Nanotechnology*, 17: 888.
- Luo, Z., Chen, D., Wang, J., Li, Y. and Chen, J. 2014. High-Q resonant pressure microsensor with through glass electrical interconnections based on wafer-level MEMS vacuum packaging. *Sensors*, 14(12): 24244-24257.
- Lupan, O., Chai, G. and Chow, L. 2007. Fabrication of ZnO nanorod-based hydrogen gas nanosensor. *Microelectronics Journal*, 38(12): 1211-1216.
- Mahammood, R.S. and Akinlabi, E.T. 2017. Functionally Graded Materials. Springer, Cham.
- Mathew, J., Joy, J. and George, S.C. 2019. Potential applications of nanotechnology in transportation: A review. *Journal of King Saud University-Science*, 31(4): 586-594.
- Mehrali, M., Shirazi, F.S., Mehrali, M., Metselaar, H.S.C., Bin Kadri, N.A. and Abu Osman, N.A. 2013. Dental implants from functionally graded materials. *Journal of Biomedical Materials Research*, 101(10): 3046-3057.
- Mei, C. 2012. Wave analysis of in-plane vibrations of L-shaped and portal planar frame structures. *Journal of Vibration and Acoustics*, 134(2): 021011.
- Merlo, A., Mokkapati, V.R.S.S., Pandit, S. and Mijakovic, I. 2018. Boron nitride nanomaterials: biocompatibility and bio-applications. *Biomaterials Science*, 6: 2298-2311.
- Meyer, E. 1992. Atomic force microscopy. *Progress in Surface Science*, 41(1): 3-49.
- Meyyapan, M. 2000. Carbon nanotube based nanotechnology for space applications. Space 2000 Conference and Exposition, AIAA-2000-5346, 19-21 September, Long Beach, California.
- Michels, T. and Rangelow I.W. 2014. Review of scanning probe micromachining and its applications within nanoscience. *Microelectronic Engineering*, 126: 191-203.
- Miyamoto, M., Kaysser, W.A., Rabin, B.H., Kawasaki, A. and Ford, R.G. 1999. Functionally Graded Materials. Springer Science-Business Media, New York.

- Mohajerani, A., Burnett, L., Smith, J.V., Kurmus, H., Milas, J., Arulajah, A., Horpibulsuk, S. and Kadir, A.A. 2019. Nanoparticles in construction materials and other applications, and implications of nanoparticle use. *Materials*, 12: 3052.
- Mohammadian, M. and Hosseini, S.M. 2022. A size-dependent differential quadrature element model for vibration analysis of FG CNT reinforced composite microrods based on the higher order Love-Bishop rod model and the nonlocal strain gradient theory. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 138: 235-252.
- Mori, T. and Tanaka, K. 1973. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*, 21(5): 571-574.
- Mukhopadhyay, S., Scheicher, R.H., Pandey, R. and Karna, S.P. 2011. Sensitivity of boron nitride nanotubes toward biomolecules of different polarities. *Nanoparticles and Nanostructures*, 2: 2442-2447.
- Müller, E., Drašar, Č., Schilz, J. and Kaysser, W.A. 2003. Functionally graded materials for sensor and energy applications. *Materials Science and Engineering: A*, 362(1-2): 17-39.
- Murmu, T. and Adhikari, S. 2012. Nonlocal frequency analysis of nanoscale biosensors. *Sensors and Actuators A: Physical*, 173(1): 41-48.
- Mustapha, K. B. 2020. Free vibration of microscale frameworks using modified couple stress and a combination of Rayleigh-Love and Timoshenko theories. *Journal of Vibration and Control*, 26(13-14): 1285-1310.
- Nakano, H. and Ikuno T. 2016. Soft chemical synthesis of silicon nanosheets and their applications. *Applied Physical Reviews*, 3(4): 040803.
- Narendar, S. 2012. Spectral finite element and nonlocal continuum mechanics based formulation for torsional wave propagation in nanorods. *Finite Elements in Analysis and Design*, 62: 65-75.
- Nasrollahzadeh, M., Sajadi, S.M., Sajjadi, M. and Issaabadii, Z. 2019. An introduction to nanotechnology. In: Hubbard, A.T. (Ed.), *Interface Science and Technology*. Elsevier, Chapter 1.
- Nath, S., Das, A., Inaba, K. and Karmakar, A. 2019. Simulation of laser cutting on functionally graded material used in aviation industry. Gas Turbine India Conference, GTINDIA2019-2445, 5-6 December, Tamil Nadu.
- Nazemnezhad, R. and Hosseini-Hashemi, S. 2014. Nonlocal nonlinear free vibration of functionally graded nanobeams. *Composite Structures*, 110: 192-199.
- Nazemnezhad, R. and Kamali, K. 2018a. An analytical study on the size dependent longitudinal vibration analysis of thick nanorods. *Materials Research Express*, 5: 075016.
- Nazemnezhad, R. and Kamali, K. 2018b. Free axial vibration analysis of axially functionally graded thick nanorods using nonlocal Bishop's theory. *Steel and Composite Structures*, 28(6): 749-758.
- Nazemnezhad, R., Ashrafian, R. and Mirafzal, A. 2023. Bishop theory and longitudinal vibration of nano-beams by two-phase local/nonlocal elasticity. *Advances in Nano Research*, 15(1): 75-89.

- Niino, M., Hirai, T. and Watanabe, R. 1987. Functionally gradient material-high temperature use for space rocket, *Journal of the Japan Society of Composite Materials*, 13(6): 257-264.
- Norharsi, M.S.M., Hamidah, M.S. and Fadzil, A.M. 2017. Applications of using nano material in concrete: A review. *Construction and Building Materials*, 133: 91-97.
- Norouzzadeh, A., Ansari, R. and Rouhi, H. 2018. Nonlinear wave propagation analysis in Timoshenko nano-beams considering nonlocal and strain gradient effects. *Meccanica*, 53: 3415-3435.
- Numanoğlu, H.M. 2017. Nanoyapıların kiriş ve çubuk modellerinin yerel olmayan elastisite teorisi kullanılarak titreşim analizi. Lisans Bitirme Tezi, Akdeniz Üniversitesi (yayınlanmamış), Antalya
- Numanoğlu, H.M. 2019. Nano ölçeği sürekli ve ayırık sistemlerin yerel olmayan sonlu elemanlar formülasyonu (NL-FEM) ile dinamik analizi. Yüksek Lisans tezi, Akdeniz Üniversitesi, Antalya, 251 s.
- Numanoğlu, H.M. 2020. Thermal vibration of zinc oxide nanowires by using nonlocal finite element method. *International Journal of Engineering and Applied Sciences*, 12(3): 99-110.
- Numanoğlu, H.M. 2022. Cross-section effect on the deflections of simply supported Timoshenko nanobeams using nonlocal elasticity. *Journal of Characterization*, 2: 134-146.
- Numanoğlu, H.M. and Civalek, Ö. 2019a. On the torsional vibration of nanorods surrounded by elastic matrix via nonlocal FEM. *International Journal of Mechanical Sciences*, 161-162: 105076.
- Numanoğlu, H.M. and Civalek, Ö. 2019b. On the dynamics of small-sized structures. *International Journal of Engineering Science*, 145: 103164.
- Numanoğlu, H.M. and Civalek, Ö. 2022. Novel size-dependent finite element formulation for modal analysis of cracked nanorods. *Materials Today Communications*, 31: 103545.
- Numanoğlu, H.M. and Civalek, Ö. 2024. On shear-dependent vibration of nano frames. *International Journal of Engineering Science*, 195: 103992.
- Numanoğlu, H.M. and Şen, F. 2022. Axial dynamics of elastic deformable supported nonlocal rods using a higher-order nonlocal FEM. 2nd International Symposium on Characterization, 222-230, 22-25 Eylül 2022, Afyonkarahisar.
- Numanoğlu, H.M., Akgöz, B. and Civalek, Ö. 2018. On dynamic analysis of nanorods. *International Journal of Engineering Science*, 130: 33-50.
- Numanoğlu, H.M., Ersoy, H., Akgöz, B., Civalek, Ö. 2022. A new eigenvalue problem solver for thermo-mechanical vibration of Timoshenko nanobeams by an innovative nonlocal finite element method. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 45(5): 2592-2614.
- Numanoğlu, H.M., Ersoy, H., Civalek, O. and Ferreira, A.J.M. 2021. Derivation of nonlocal FEM formulation for thermo-elastic Timoshenko beams on elastic matrix. *Composite Structures*, 273: 114292.

- Numanoğlu, H.M., Mercan, K. and Civalek, Ö. 2019. Finite element model and size-dependent stability analysis of boron nitride and silicon carbide nanowires/nanotubes. *Scientia Iranica*, 26(4): 2079-2099.
- Parveez, B., Kittur, M.I., Badruddin, I.A., Kamangar, S., Hussien, M. and Umarfarooq, M.A. 2022. Scientific advancements in composite materials for aircraft applications: A review. *Polymers*, 14(22): 5007.
- Patino, T., Porchetta, A., Jannasch, A., Lladó, A., Stumpp, T., Schäffer, E., Ricci, F. and Sánchez, S. 2019. Self-sensing enzyme-powered micromotors equipped with pH-responsive DNA nanoswitches. *Nano Letters*, 19(6): 3440-3447.
- Peddieson, J., Buchanan, R. and McNitt, R.P. 2003. Application of nonlocal continuum models to nanotechnology. *International Journal of Engineering Science*, 41(3-5): 305-312.
- Perker, Z.S. 2010. Nanoteknoloji ve yapı malzemesi alanına etkileri. *Engineering Sciences*, 5(4): 639-648.
- Phadikar, J.K. and Pradhan, S.C. 2010. Variational formulation and finite element analysis for nonlocal elastic nanobeams and nanoplates. *Computational Materials Science*, 49(3): 492-499.
- Pham-Huu, C., Keller, N., Ehret, G. and Ledoux, M.J. 2001. The first preparation of silicon carbide nanotubes by shape memory synthesis and their catalytic potential. *Journal of Catalysis*, 200(2): 400-410.
- Polit, O., Merzouki, T. and Ganapathi, M. 2018. Elastic stability of curved nanobeam based on higher-order shear deformation theory and nonlocal analysis by finite element approach. *Finite Elements in Analysis and Design*, 146: 1-15.
- Pompe, W., Worch, H., Epple, M., Friess, W., Gelinsky, W., Greil, P., Hempel, U., Scharnweber, D. and Schulte, K. 2003. Functionally graded materials for biomedical applications. *Materials Science and Engineering: A*, 362(1-2): 40-60.
- Popov, V.N. 2004. Carbon nanotubes: properties and application. *Materials Science and Engineering R: Reports*, 43(13): 61-102.
- Pradhan, S.C. 2012. Nonlocal finite element analysis and small scale effects of CNTs with Timoshenko beam theory. *Finite Elements in Analysis and Design*, 50: 8-20.
- Pradhan, S.C. and Mandal, U. 2013. Finite element analysis of CNTs based on nonlocal elasticity and Timoshenko beam theory including thermal effect. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 53: 223-232.
- Radosavljevic, M., Appenzeller, J., Derycke, V., Martel, R. and Avouris, P. 2003. Electrical properties and transport in boron nitride nanotubes. *Applied Physics Letters*, 82(23): 4131.
- Raffaella, R.P., Landi, B.J., Harris, J.D., Bailey, S.G. and Hepp, A.F. 2005. Carbon nanotubes for power applications. *Materials Science and Engineering: B*, 116(3): 233-243.
- Rahmani, O. and Jandaghian, A.A. 2015. Buckling analysis of functionally graded nanobeams based on a nonlocal third-order shear deformation theory. *Applied Physics A*, 119: 1019-1032.

- Rahmani, O. and Pedram, O. 2014. Analysis and modeling the size effect on vibration of functionally graded nanobeams based on nonlocal Timoshenko beam theory. *International Journal of Engineering Science*, 77: 55-70.
- Ramos, A.P., Cruz, M.A.E, Tovani, C.B. and Ciancaglini, P. 2017. Biomedical applications of nanotechnology. *Biophysical Reviews*, 9: 79-89.
- Ranallo, S., Amoido, A., Idili, A., Porchetta, A. and Ricci, F. 2016. Electronic control of DNA-based nanoswitches and nanodevices. *Chemical Science*, 7: 66-71.
- Ray, A.K., Das, S.K., Mondal, S. and Ramachandrarao, P. 2004. Microstructural characterization of bamboo. *Journal of Materials Science*, 39(3): 1055-1060.
- Reddy, J.N. 2007. Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams. *International Journal of Engineering Science*, 45(2-8): 288-307.
- Reddy, J.N. and Pang, S.D. 2008. Nonlocal continuum theories of beams for the analysis of carbon nanotubes. *Journal of Applied Physics*, 103: 023511.
- Refaeinejad, V., Rahmani, O. and Hosseini, S.A.H. 2017. An analytical solution for bending, buckling, and free vibration of FG nanobeam lying on Winkler-Pasternak elastic foundation using different nonlocal higher order shear deformation beam theories. *Scientia Iranica*, 24(3): 1635-1653.
- Rueckes, T., Kim, K., Joselevich, E., Tseng, G.Y., Cheung, C.L. and Lieber, M. 2000. Carbon nanotube-based nonvolatile random access memory for molecular computing. *Science*, 289(5476): 94-97.
- Seeman, N. 1998. DNA nanotechnology: Novel DNA constructions. *Annual Review of Biophysics*, 27: 225-248.
- Seo, Y. and Jhe, W. 2007. Atomic force microscopy and spectroscopy. *Reports on Progress in Physics*, 71: 016101.
- Setiono, A., Xu, J. Fahrbach, M., Bertke, M., Nyangau, W.O., Wasisto, H.S. and Peiner, E. 2019. Real-time frequency tracking of an electro-thermal piezoresistive cantilever resonator with ZnO nanorods for chemical sensing. *Chemosensors*, 7(1): 2.
- Seyfi, A., Teimori, A. and Ebrahimi, F. 2021. Scale-dependent torsional vibration response of non-circular nanoscale auxetic rods. *Waves in Random and Complex Media*.
- Sharma, C., Gupta, M.K., Badatya, S., Srivastava, A.K. and Sathish, N. 2023. Blue light emitting piezoelectric few-layered borophene nanosheets for flexible nanogenerators. *Communications Materials*, 4: 54.
- Sharma, N.K. and Bhandari, M. 2014. Applications of functionally graded materials (FGMs). *International Journal of Engineering Research and Technology*, 2(3): 334-339.
- Sharma, P., Perruisseau-Carrier, J., Moldovan, C. and Ionescu, A.M. 2013. Electromagnetic performance of RF NEMS graphene capacitive switches. *IEEE Transactions on Nanotechnology*, 13(1): 70-79.

- She, G.L., Yan, K.M., Zhang, Y.L., Liu, H.B. and Ren, Y.R. 2018. Wave propagation of functionally graded porous nanobeams based on non-local strain gradient theory. *The European Physical Journal Plus*, 133: 368.
- Shen, H.S. 2009. Functionally Graded Materials. CRC Press, Boca Raton.
- Shen, L., Wang, P. and Ke, Y. 2021. DNA nanotechnology-based biosensors and therapeutics. *Advanced Healthcare Materials*, 10(15): 2002205.
- Shen, M. and Bever, M.B. 1972. Gradients in polymeric materials, *Journal of Materials Science*, 7: 741-746.
- Shen, Z.B., Sheng, L.P., Li, X.F. and Tang, G.J. 2012. Nonlocal Timoshenko beam theory for vibration of carbon nanotube-based biosensor. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 44(7-8): 1169-1175.
- Şimşek, M. 2012. Nonlocal effects in the free longitudinal vibration of axially functionally graded tapered nanorods. *Computational Materials Science*, 61: 257-265.
- Şimşek, M. 2016. Nonlinear free vibration of a functionally graded nanobeam using nonlocal strain gradient theory and a novel Hamiltonian approach. *International Journal of Engineering Science*, 105: 12-27.
- Şimşek, M. and Yurtcu H.H. 2013. Analytical solutions for bending and buckling of functionally graded nanobeams based on the nonlocal Timoshenko beam theory. *Composite Structures*, 97: 378-386.
- Singh, K., Jaiswal, R., Kumar, R., Singh S. and Agarwal, K. 2023. Polymer-based nanocomposites as defence material. *Bulletin of Materials Science*, 46: 79.
- Singh, N.B., Kalra M. and Saxena, S.K. 2017. Nanoscience of cement and concrete. *Materials Today: Processing*, 4(4): 5478-5487.
- Socrier, L. and Steinem, C. 2023. Photo-lipids: Light-sensitive nano-switches to control membrane properties. *Chem Plus Chem*, 88(11): e202300203.
- Sola, A., Bellucci, D. and Cannillo, V. 2016. Functionally graded materials for orthopedic applications-an update on design and manufacturing. *Biotechnology Advances*, 34(5): 504-531.
- Soltanpour, M., Ghadiri, M., Yazdi, A. and Safi, M. 2017. Free transverse vibration analysis of size dependent Timoshenko FG cracked nanobeams resting on elastic medium. *Microsystem Technologies*, 23: 1813-1830.
- Soni, R.A., Rizwan, M.A. and Singh, S. 2022. Opportunities and potential of green chemistry in nanotechnology. *Nanotechnology for Environmental Engineering*, 7: 661-673.
- Soroush, R., Koochi, A., Kazemi, A.S., Noghrehabadi, A., Haddadpour, H. and Abadyan, M. 2010. Investigating the effect of Casimir and van der Waals attractions on the electrostatic pull-in instability of nano-actuators. *Physica Scripta*, 82(4): 045801.
- Subramani, K., Elhissi, A., Subbiah, U. and Ahmed, W. 2019. Introduction to nanotechnology. In: Subramani, K. and Ahmed, W. (Eds.), *Nanobiomaterials in Clinical Dentistry*. Elsevier, Chapter 1.

- Sudak, L.J. 2003. Column buckling of multiwalled carbon nanotubes using nonlocal continuum mechanics. *Journal of Applied Physics*, 94(11): 7281-7287.
- Suresh, S. Graded materials for resistance to contact deformation and damage. *Science*, 292(5526): 2447-2451.
- Taguchi, T., Igawa, N., Yamamoto, H. and Jitsukawa, S. 2005. Synthesis of silicon carbide nanotubes. *Journal of American Ceramic Society*, 88(2): 459-461.
- Tang, H.L., Shen, Z.B. and Li, D.K. 2014. Vibration of nonuniform carbon nanotube with attached mass via nonlocal Timoshenko beam theory. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 28(9): 3741-3747.
- Tang, Y. and Qing, H. 2021. Elastic buckling and free vibration analysis of functionally graded Timoshenko beam with nonlocal strain gradient integral model. *Applied Mathematical Modelling*, 96: 657-677.
- Tepe, A. 2007. Nanoteknolojide nano ölçekteki yapıların yerel olmayan elastisite çerçevesinde incelenmesi. Doktora tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul, 100 s.
- Thang, P.T., Nguyen-Thoi, T. and Lei, J. 2021. Modeling and analysis of bi-directional functionally graded nanobeams based on nonlocal strain gradient theory. *Applied Mathematics and Computation*, 407: 126303.
- Tian, T., Harding, A., Inder, K., Plowman, S., Parton, R.G. and Hancock, J.F. 2007. Plasma membrane nanoswitches generate high-fidelity Ras signal transduction, *Nature Cell Biology*, 9: 905-914.
- Tomar, S. 2012. Innovative nanotechnology applications in automobiles. *International Journal of Engineering Research and Technology*, 1(10).
- Torabi, K. and Dastgerdi, J.N. 2012. An analytical method for free vibration analysis of Timoshenko beam theory applied to cracked nanobeams using a nonlocal elasticity model. *Thin Solid Films*, 520: 6595-6602.
- Tošić, G., Bogdanović, G., Čukanović, D. and Radaković, A. 2022. Functionally graded materials in transport vehicles-overview, fabrication, application, modelling. IX International Congress Motor Vehicles and Motors, 1271: 012014, 13-14 October, Kragujevac.
- Touloukian, Y.S. 1967. *Thermophysical Properties of High Temperature Solid Materials*. Thermophysical Properties Research Center, Macmillan.
- Touratier, M. 1991. An efficient standard plate theory. *International Journal of Engineering Science*, 29(8): 901-916.
- Trabelssi, M. and El-Borgi, S. 2022. Vibration of nonlocal strain gradient functionally graded nonlinear nanobeams using a novel locally adaptive strong quadrature element method. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part N: Journal of Nanomaterials, Nanoengineering and Nanosystems*.
- Trabelssi, M., El-Borgi, S., Fernandes, R. and Ke, L.L. 2019. Nonlocal free and forced vibration of a graded Timoshenko nanobeam resting on a nonlinear elastic foundation. *Composites Part B: Engineering*, 157: 331-349.

- Tuna, M. and Kirca, M. 2016. Exact solution of Eringen's nonlocal integral model for bending of Euler-Bernoulli and Timoshenko beams. *International Journal of Engineering Science*, 105: 80-92.
- Uzun, B. 2023. Nanokompozit yapıların genel elastik sınır koşullarında dinamik ve stabilite analizleri. Doktora tezi, Bursa Uludağ Üniversitesi, Bursa, 219 s.
- Uzun, B. and Yaylı M.Ö. 2020. A solution method for longitudinal vibrations of functionally graded nanorods. *International Journal of Engineering and Applied Sciences*, 12(2): 78-87.
- Uzun, B., Civalek, Ö. And Yaylı, M.Ö. 2023. Vibration of FG nano-sized beams embedded in Winkler elastic foundation and with various boundary conditions. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 51(1): 481-500.
- Uzun, B., Kafkas, U. and Yaylı, M.Ö. 2020. Axial dynamic analysis of a Bishop nanorod with arbitrary boundary conditions. *ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 100(12): e202000039.
- Uzun, B., Kafkas, U., Deliktaş, B. and Yaylı, M.Ö. 2023. Size-dependent vibration of porous Bishop nanorod with arbitrary boundary conditions and nonlocal elasticity effects. *Journal of Vibration Engineering and Technologies*, 11: 809-826.
- Uzun, B., Numanoğlu, H.M. and Civalek, Ö. 2018. Free vibration analysis of BNNT with different cross-Sections via nonlocal FEM. *Journal of Computational Applied Mechanics*, 49(2): 252-260.
- Wadhwa, T., Kakkar, D., Wadhwa G. and Raj, B. Recent advances and progress in development of the field effect transistor biosensor: A review. *Journal of Electronic Materials*, 48: 7635-7646.
- Wang, C. et al. 2022. Neuromorphic device based on silicon nanosheets. *Nature Communications*, 13: 5216.
- Wang, C.M., Zhang, Y.Y., Ramesh, S.S. and Kitipornchai, S. 2006. Buckling analysis of micro- and nano-rods/tubes based on nonlocal Timoshenko beam theory. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 39(17): 3904.
- Wang, D., Zhu, R., Zhou, Z. and Ye, X. 2007. Single semiconducting zinc oxide nanowire based device for thermal and airflow sensing. 2007 7th IEEE Conference on Nanotechnology, 2-5 August, Wanchai, Hong Kong.
- Wang, J. 2005. Carbon-nanotube based electrochemical biosensors: A review. *Electroanalysis*, 17(1): 7-14.
- Wang, Q. and Arash, B. 2014. A review on applications of carbon nanotubes and graphenes as nano-resonator sensors. *Computational Materials Science*, 82: 350-360.
- Wang, Q. and Liew, K.M. 2007. Application of nonlocal continuum mechanics to static analysis of micro- and nano-structures. *Physics Letters A*, 363(3): 236-242.
- Wang, Q. and Varadan, V.K. 2006. Vibration of carbon nanotubes studied using nonlocal continuum mechanics. *Smart Materials and Structures*, 15(2): 659.

- Wang, Z.L. 2004. Zinc oxide nanostructures: growth, properties and applications. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 16(25): R289.
- Watari, F., Yokoyama, A., Saso, F., Uo, M. and Kawasaki, T. 1997. Fabrication and properties of functionally graded dental implant. *Composites Part B: Engineering*, 28(1-2): 5-11.
- Wojcikiewicz, E.P., Zhang, X. and Moy, V.T. 2004. Force and compliance measurements on living cells using atomic force microscopy (AFM). *Biological Procedures Online*, 6: 1-9.
- Wośko, M., Paszkiewicz, B., Piasecki, T., Szyszka, A., Paskiewicz, R. and Tlaczala, M. 2005. Application and modeling of functionally graded materials for optoelectronic devices. Proceedings of 2005 International Students and Young Scientists Workshop Photonics and Microsystems, 7-8 July, Dresden.
- Wu, C.P. and Lai, W.W. 2015. Free vibration of an embedded single-walled carbon nanotube with various boundary conditions using the RMVT-based nonlocal Timoshenko beam theory and DQ method. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 68: 8-21.
- Wu, C.P. and Liou, J.Y. 2016. RMVT-based nonlocal Timoshenko beam theory for stability analysis of embedded single-walled carbon nanotube with various boundary conditions. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 16(10): 1550068.
- Xie, B., Xing, Y., Wang, Y., Chen, D. and Wang, J. 2015. Vacuum-packaged resonant pressure sensor with dual resonators for high sensitivity and linearity. *Procedia Engineering*, 120: 194-199.
- Xing, Y.J., Xi, Z.H., Zhang, X.D., Song, J.H., Wang, R.M., Xu, J., Xue, Z.Q. and Yu, D.P. 2005. Thermal evaporation synthesis of zinc oxide nanowires. *Applied Physics A*, 80: 1527-1530.
- Xu, T., Wu, Y.T., Luo, X. and Guo, L.Y. 2010. Plasmonic nanoresonators for high-resolution colour filtering and spectral imaging. *Nature Communications*, 1: 59.
- Yang, Z.J., Jiang, R., Zhuo, X., Xie, Y.M., Wang, J. and Lin, H.Q. 2017. Dielectric nanoresonators for light manipulation. *Physics Reports*, 701: 1-50.
- Yue, X., Yue, X. and Borjalilou, V. 2021. Generalized thermoelasticity model of nonlocal strain gradient Timoshenko nanobeams. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 21: 124.
- Zang, X., Zhou, Q., Chang, J., Liu, Y. and Lin, Y. 2015. Graphene and carbon nanotube (CNT) in MEMS/NEMS applications. *Microelectronic Engineering*, 132: 192-206.
- Zarezadeh, E., Hosseini, V. and Hadi, A. 2020. Torsional vibration of functionally graded nano-rod under magnetic field supported by a generalized torsional foundation based on nonlocal elasticity theory. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 48(4).
- Zenkour, A.M. and Abouelregal, A.E. 2016. Effect of ramp-type heating on the vibration of functionally graded microbeams without energy dissipation. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 23(5): 529-537.

- Zhang, Z., Guo, W. and Dai, Y. 2009. Stability and electronic properties of small boron nitride nanotubes. *Journal of Applied Physics*, 105(8): 084312.
- Zhao, Q.Q., Boxman, A. and Chowdhury, U. 2003. Nanotechnology in the chemical industry-opportunities and challenges. *Journal of Nanoparticle Research*, 5: 567-572.
- Zheng, M.J., Zhang, L.D., Li, G.H. and Shen, W.Z. 2002. Fabrication and optical properties of large-scale uniform zinc oxide nanowire arrays by one-step electrochemical deposition technique. *Chemical Physics Letters*, 363(1-2): 123-128.
- Zhi, C., Bando, Y., Tang, C. and Golberg, D. 2010. Boron nitride nanotubes. *Materials Science and Engineering: R: Reports*, 70(3-6): 92-111.
- Zhou, W., Apkarian, R.P., Wang, Z.L. and Joy, D. 2007. Fundamentals of scanning electron microscopy. In: Zhou, W. and Wang, Z.L. (Eds.), *Scanning Microscopy for Nanotechnology: Techniques and Applications*. Elsevier, Chapter 1.



ÖZGEÇMİŞ

Hayri Metin NUMANOĞLU

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Doktora 2020-Devam Ediyor	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, Antalya
Yüksek Lisans 2017-2019	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, Antalya
Lisans 2013-2017	Akdeniz Üniversitesi Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Antalya
Lise 2009-2013	Çağlayan Anadolu Lisesi Manavgat/Antalya

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

Araştırma Görevlisi 2019-Devam Ediyor	Giresun Üniversitesi Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Giresun
İnşaat Müh. (Proje Mühendisi) 2018-2019	TMH Mühendislik Ltd. Şti. Muratpaşa/Antalya
İnşaat Müh. (Kontrol Elemanı) 2017-2018	Kıvanç Yapı Denetim Ltd. Şti. Muratpaşa/Antalya

ESERLER

Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler

- 1- Mercan K., Numanoğlu H.M., Akgöz B., Işık Ç., Civalek Ö. (2017). Higher-order continuum theories for buckling response of silicon carbide nanowires (SiCNWs) on elastic matrix. *Archive of Applied Mechanics*, 87, 1797-1814.
Doi: 10.1007/s00419-017-1288-z
- 2- Numanoğlu H.M., Mercan K., Civalek Ö. (2017). Frequency and mode shapes of Au nanowires using the continuous beam models. *International Journal of Engineering and Applied Sciences*, 9(1), 55-61. Doi: 10.24107/ijeas.300774
- 3- Ersoy H., Numanoğlu H.M., Akgöz B., Civalek Ö. (2018). Small size and rotary inertia effects on the natural frequencies of carbon nanotubes. *Curved and Layered Structures*, 5(1), 273-279. Doi: 10.1515/cls-2018-0020
- 4- Işık Ç., Mercan K., Numanoğlu H.M., Civalek Ö. (2018). Bending response of nanobeams resting on elastic foundation. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 4(2), 105-114. Doi: 10.22055/JACM.2017.22594.1137
- 5- Numanoğlu H.M., Akgöz B., Civalek Ö. (2018). On dynamic analysis of nanorods. *International Journal of Engineering Science*, 130, 33-50, 2018.
Doi: 10.1016/j.ijengsci.2018.05.001.
- 6- Numanoğlu H.M., Civalek Ö. (2018). Elastic beam model and bending analysis of silver nanowires. *International Journal of Engineering and Applied Sciences*, 10(1), 13-20, 2018. Doi: 10.24107/ijeas.419360.
- 7- Numanoğlu H.M., Uzun B., Civalek Ö. (2018). Derivation of nonlocal finite element formulation for nano beams. *International Journal of Engineering and Applied Sciences*, 10(2), 131-139, 2018. Doi: 10.24107/ijeas.450239.
- 8- Uzun B, Numanoğlu H.M., Civalek Ö. (2018). Defination of length-scale parameter in Eringen's nonlocal elasticity via nlocal lattice and finite element formulation. *International Journal of Engineering and Applied Sciences*, 10(3), 264-275, 2018.
Doi: 10.24107/ijeas.471539.
- 9- Uzun B., Numanoğlu H.M., Civalek Ö. (2018). Free vibration analysis of BNNT with different cross-sections via nonlocal FEM. *Journal of Computational Applied Mechanics*, 49(2), 252-260. Doi: 10.22059/JCAMECH.2018.266789.328.
- 10- Numanoğlu H.M., Civalek Ö. (2019). On the dynamics of small-sized structures. *International Journal of Engineering Science*, 145, 103164.
Doi: 10.1016/j.ijengsci.2019.103164.
- 11- Numanoğlu H.M., Civalek Ö. (2019). On the torsional vibration of nanorods surrounded by elastic matrix via nonlocal FEM. *International Journal of Mechanical Sciences*, 161-162, 105076. Doi: 10.1016/j.ijmecsci.2019.105076.

- 12- Numanoglu H.M., Mercan, K., Civalek Ö. (2019). Finite element model and size dependent stability analysis of boron nitride and silicon carbide nanowires/nanotubes. *Scientia Iranica Transactions A: Civil Engineering*. 26(4), 2079-2099. Doi: 10.24200/SCI.2019.52517.2754
- 13- Civalek Ö., Numanoglu H.M. (2020). Nonlocal finite element analysis for axial vibration of embedded love–bishop nanorods. *International Journal of Mechanical Sciences*, 188, 105939. Doi: 10.1016/j.ijmecsci.2020.105939.
- 14- Numanoglu H.M. (2020). Thermal vibration of Zinc Oxide nanowires by using nonlocal finite element method. *International Journal of Engineering and Applied Sciences*, 12(3), 99-110. Doi: 10.24107/ijeas.784042.
- 15- Numanoglu H.M. (2021). Examination of how size-effect modifies the stiffness and mass matrices of nanotrusses/nanoframes. *International Journal of Engineering and Applied Sciences*, 13(4), 155-165. Doi: 10.24107/ijeas.1036574.
- 16- Numanoglu H.M., Ersoy H., Civalek O., Ferreira A.J.M. (2021). Derivation of nonlocal FEM formulation for thermo-elastic Timoshenko beams on elastic matrix. *Composite Structures*, 273, 114292. Doi: 10.1016/j.compstruct.2021.114292.
- 17- Akbas S.D., Numanoglu H.M., Akgöz, B., Civalek, Ö. (2022). Application of Newmark average acceleration and ritz methods on dynamical analysis of composite beams under a moving load. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 8(2), 764-773. Doi: 10.22055/JACM.2022.39345.3393.
- 18- Numanoglu H.M. (2022). Cross-section effect on the deflections of simply supported Timoshenko nanobeams using nonlocal elasticity. *Journal of Characterization*, 2(1), 134-146. Doi: 10.29228/JCHAR.61956.
- 19- Numanoglu H.M., Civalek Ö. (2022). Novel size-dependent finite element formulation for modal analysis of cracked nanorods. *Materials Today Communications*, 31, 103545. Doi: 10.1016/j.mtcomm.2022.103545.
- 20- Numanoglu H.M., Ersoy H., Akgöz B, Civalek Ö. (2022). A new eigenvalue problem solver for thermo-mechanical vibration of Timoshenko nanobeams by an innovative nonlocal finite element method. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 45(5), 2592-2614. Doi: 10.1002/mma.7942.
- 21- Numanoglu H.M., Civalek Ö. (2024). On shear-dependent vibration of nano frames. *International Journal of Engineering Science*, 195, 103992. Doi: 10.1016/j.ijengsci.2023.103992.

Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitaplarında basılan bildiriler

- 1- Numanoglu H.M., Şen, F. (2022). Axial dynamics of elastic deformable supported nonlocal rods using a higher-order nonlocal FEM. 2nd International Symposium on Characterization. (Tam Metin Bildiri)

2- Demir, M. Şen, F. Numanoglu, H.M. (2022). Nonlocal natural frequencies of shear deformable functionally graded nanobeams via nonlocal FEM. 2nd International Symposium on Characterization. (Tam Metin Bildiri)

