



T.C.

TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

UYGULAMALI MATEMATİK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

**DAĞITILMIŞ SAPMA ARGÜMENTLİ KANONİK OLMAYAN İKİNCİ
BASAMAKTAN NEUTRAL DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN
SALINIMLILIĞI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kaşif BAŞ

Danışman: Prof. Dr. Ercan TUNÇ

TOKAT- 2024

JÜRİ KABUL VE ONAY

Kaşif BAŞ tarafından hazırlanan “**Dağıtılmış Sapma Argümentli Kanonik Olmayan İkinci Basamaktan Neutral Diferensiyel Denklemlerin Salınımlılığı**” adlı tez çalışmasının savunma sınavı **26.08.2024** tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen Jüri tarafından Oy Birliği ile Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**’nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmzası

Üye : Prof. Dr. Ercan TUNÇ
Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi
(Danışman)

.....

Üye : Doç. Dr. Orhan ÖZDEMİR
Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi

.....

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Serpil ŞAHİN
Amasya Üniversitesi

.....

ONAY

...../...../.....

Doç. Dr. Yusuf TEMÜR
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlâk kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Kaşif BAŞ

26.08.2024

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DAĞITILMIŞ SAPMA ARGÜMENTLİ KANONİK OLMAYAN İKİNCİ BASAMAKTAN NEUTRAL DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMLILIĞI

Kaşif BAŞ

Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman : Prof. Dr. Ercan TUNÇ
Ağustos 2024, 47 sayfa

Bu tezde, ilk önce fonksiyonel diferensiyel denklemlerin tanımı, sınıflandırılması ve bunlara ilişkin örnekler üzerinde durulmuştur. Daha sonra, literatürde ele alınan dağıtılmış sapma argümentli neutral diferensiyel denklemlerin bazı sınıflarına yer verilmiştir. Literatürdeki çalışmalardan hareketle dağıtılmış sapma argumentli bir neutral diferensiyel denklem sınıfı ele alınıp çözümlerinin salınımlılığına ilişkin yeni yeter şartlar verilmiştir. Son olarak da elde edilen sonuçları açıklayan örnekler verilmiş ve literatüre katkı sağlaması açısından bazı önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Salınımlılık, Dağıtılmış sapma argümenti, İkinci basamak, Kanonik olmayan neutral diferensiyel denklemler.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

OSCILLATION OF SECOND-ORDER NONCANONICAL NEUTRAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DISTRIBUTED DEVIATING ARGUMENTS

Kaşif BAŞ

Tokat Gaziosmanpaşa University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor : Prof. Dr. Ercan TUNÇ
August, 2024, 47 pages

In this thesis, we first focus on the definition, classification and examples of functional differential equations. Then, some classes of neutral differential equations with distributed deviating arguments discussed in the literature are included. Based on the studies in the literature, a class of neutral differential equations with distributed deviating arguments is considered and new sufficient conditions for the oscillation of solutions of the equation considered are given. Finally, examples explaining the results obtained are given and some suggestions are proposed to contribute to the literature.

Keywords: Oscillation, Distributed deviating arguments, Second-order, Noncanonical neutral differential equations.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iv
SİMGE ve KISALTMALAR	v
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	5
2.1. Adi ve Fonksiyonel Diferensiyel Denklemlerin Tanımı	5
2.2. Fonksiyonel Diferensiyel Denklemlerin Sınıflandırılması	5
2.3. Salınım(Oscillation) Tanımı	7
2.4. Sapma Argümentinin Salınıma Etkisi	8
2.5. Dağıtılmış Sapma Argümentli Fonksiyonel Diferensiyel Denklemlerin Bazı Sınıfları	12
3. BULGULAR	18
4. TARTIŞMA VE SONUÇ	32
KAYNAKLAR	34
ÖZGEÇMİŞ	39

ÖNSÖZ

Bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım tez danışmanım, değerli hocam Prof. Dr. Ercan TUNÇ'a teşekkürlerimi sunarım.

Önemli tavsiyeleri ile destek olan değerli hocam Doç. Dr. Orhan ÖZDEMİR'e teşekkür ederim.

Kaşif BAŞ
Ağustos 2024

SİMGE VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}$: Reel Sayılar Kümesi

$\mathbb{R}^+$: Pozitif Reel Sayılar Kümesi

α : Alfa

β : Beta

γ : Gama

ϵ : Epsilon

κ : Kapa

μ : Mü

π : Pi

σ : Sigma

τ : To

Ψ : Psi

ϕ : Fi

1. GİRİŞ

Diferensiyel denklemlerin genel bir tipi olan fonksiyonel diferensiyel denklemler, bilinmeyen fonksiyon ve bu fonksiyonun türevlerinin bağımsız değişkeninin farklı değerleriyle ortaya çıktığı denklemlerdir ve Rus literatüründe sapma argümentli diferensiyel denklemler olarak da adlandırılmaktadır(Zafer, 1992).

Bu tipten denklemler ilk önce Bernoulli, Euler, Lagrange, Laplace, Poisson gibi matematikçiler tarafından 18. yüzyılda göz önüne alınmıştır(Kolmanovskii ve Nosov, 1991).

Bu dönemde Johann Bernoulli'nin 1727 yılında titreşen kablolarla ilgili spesifik bir yayılım problemini incelediği çalışmasında

$$y'(t) = y(t - 1)$$

fonksiyonel diferensiyel denklemini gözönüne almıştır ve bu bilinen ilk fonksiyonel diferensiyel denklemdir(Räsvan, 2006).

Fonksiyonel diferensiyel denklemler, 18 ve 19. yüzyılda nadiren kullanılmış olsa da bu denklemler çeşitli geometrik problemleri ihtiva etmekteydi. Bu durum 20. yüzyılın başlarında, 1930'lu yıllar itibariyle radikal bir değişime uğramıştır. Bu yıllarda farklı zaman gecikmeleri, var olan bir kaç tane bilimsel ve teknik problemin tanımlanmasına yani matematiksel modellenmesine ihtiyaç duymuştur. Bu türden ilk problemler; Volterra tarafından 1909'da göz önüne alınan ve bir malzemenin zamanla değişen davranışlarını tanımlamak için kullanılan viskoelastisite probleminde ve 1928-1931 yılları arasında çalıştığı bir av türü ile onu avlayan bir avcı türü arasındaki ilişkiyi analiz etmek için kullanılan avcı-av modellerinde, Kostyzin'in 1934'teki matematiksel biyoloji problemleri çalışmasında, Minorsky'nin 1942'deki gemi stabilizasyon problemi çalışmasında ele alınmıştır (Kolmanovskii ve Nosov, 1991).

Belirli formdaki denklemler hariç, genelde diferensiyel denklemlerin açık çözümleri elde edilememektedir. Bir çok sürecin matematiksel modeli bir diferensiyel denklem

olarak ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle diferensiyel denklemlerin çözümlerinin bilinmesi önemlidir. Yukarıda da belirtildiği gibi her zaman açık çözümleri elde etmek mümkün olmadığı için bu da araştırmacıları diferensiyel denklemleri çözmeden çözümlerinin davranışlarını araştırmaya yöneltmiştir. Bu yaklaşım, ele alınan diferensiyel denklemin açık çözümleriyle uğraşmak yerine denklemin katsayıları ve/veya katsayı fonksiyonları aracılığıyla denklemin çözümlerinin davranışları hakkında bilgi edinmeyi sağlamakta olup literatürde nitel(kalitatif) teori olarak bilinmektedir. Henri Poincare ve Alexandr M. Lyapunov diferensiyel denklemlerde oldukça önemli olan bu teoremin gelişmesine katkı sağlayan öncüler kabul edilmektedir (Mawhin, 1996).

Neutral fonksiyonel diferensiyel denklemler, kısaca neutral diferensiyel denklemler, en yüksek basamaktan (mertebeden) türevin hem sapma argümentine bağlı olarak, hem de sapma argümentine bağlı olmadan ortaya çıktığı diferensiyel denklemlerdir (Chuanxi ve Ladas, 1990; Wang, 1989; Zafer, 1992).

Birinci ve daha yüksek basamaktan neutral diferensiyel denklemlerin çözümlerinin kalitatif özellikleri son yıllarda birçok yazar tarafından incelenmiştir. Neutral diferansiyel denklemler hem teorik hem de pratik açıdan ilgi çekici olmuştur. Bu türden denklemlerin kayıpsız iletim hatları içeren ağların incelenmesinde ortaya çıktığını görmekteyiz. Bu tür ağlar, anahtarlama devrelerini birbirine bağlamak için kayıpsız iletim hatlarının kullanıldığı yüksek hızlı bilgisayarlarda ortaya çıkmaktadır (Brayton ve Willoughby, 1967; Hale, 1977; Slemrod ve Infante, 1972; Snow, 1965; Wang, 1989; Zafer, 1992). Bununla beraber, elastik bir çubuğa bağlı titreşen kütlelerin incelenmesinde, bazı varyasyonel problemlerde Euler denklemi olarak, otomatik kontrol teorisinde, eylemsizliğin önemli bir rol oynadığı nöromekanik sistemlerde bu türden denklemlere rastlamaktayız (Brayton ve Willoughby, 1967; Driver, 1984; Hale, 1977; Kubiacyk ve Saker, 2002).

Literatür araştırmalarından da anlaşıldığı üzere neutral diferensiyel denklemlerin salınımlılığı ile ilgili ilk çalışma A. I. Zahariev ve D. D. Bainov makalesinde 1980 tarihinde rastlanmaktadır(Ayrıca (Karakostas ve Staikos, 1984) makalesine bakılabilir). Bu konuya daha sonra 1986 yılında Ladas ve Sficas "Oscillation of

neutral delay differential equations, Canad. Math. Bull. 29, 438-445" makalesiyle katkı sunmuştur. Bu konuya olan ilgi (Bellman ve Cooke, 1963), (Snow, 1965), (Brayton ve Willoughby, 1967), (Hale, 1977), (Driver, 1984, 1985), (Zhang, 1989), (Wang, 2004), (Chuanxi ve Ladas, 1990), (Xu ve Meng, 2006), (Gui ve Xu, 2007), (Saker ve ark., 2007), (Xu ve Weng, 2007), (Zhao ve Meng, 2008), (Thandapani ve Piramanantham, 2010), (Dong, 2010), (Candan, 2011, 2015), (Li ve Thandapani, 2011), (Li ve ark., 2013), (Qi ve Yu, 2015), (Tunç ve Graef, 2014), (Li ve Rogovchenko, 2015), (Agarwal ve ark., 2014, 2016), (Yang ve ark., 2016), (Tamilvanan ve ark., 2017), (Tripathy ve Santra, 2021), (Sui ve Han, 2018), (Bohner ve ark., 2017, 2019, 2020), (Grace ve Graef, 2018), (Grace ve ark., 2018, 2021, 2014, 2017, 2022), (Jadlovská, 2021), (Sethi ve Tripathy, 2021) ve daha bir çok makale ile kitaplara yansıtılmıştır.

Bu tezin konusu, diferensiyel denklemlerin kalitatif teorisinde aktif bir şekilde çalışılan ve fonksiyonel diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınım davranışı konusunun alt başlıklarından biri olan dağıtılmış sapma argümentli kanonik olmayan ikinci basamaktan neutral diferensiyel denklem sınıflarının salınımlılığı üzerinedir.

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde fonksiyonel diferensiyel denklemlerin kısa bir tarihsel süreci ve fonksiyonel diferensiyel denklemlerin salınımlılığına katkıda bulunan bazı klasik çalışmalara yer verilmiştir.

İkinci bölümde fonksiyonel diferensiyel denklem tanımı verilmiş ve bu türden denklemlerin sınıflandırılmaları üzerinde durulmuştur. Daha sonra salınım tanımı verilerek bazı somut örneklerle salınım kavramı açıklanmaya çalışılmıştır. Fonksiyonel diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılığını ele alan bazı çalışmalara atıfta bulunulmuş ve özellikle de ele alacağımız denklem sınıfına ilişkin literatürde yapılan dağıtılmış sapma argümentli bazı çalışmalar üzerinde detaylı durulmuştur.

Üçüncü bölümde, $t \geq t_0 > 0$, $0 < a < b < \infty$, $0 < \beta \leq 1$ olacak şekilde β pozitif tek tam sayıların bir oranı olmak üzere,

$$\left[a(t) (x(t) + p(t)x(\tau(t)))' \right]' + \int_a^b q(t, \mu) x^\beta(\phi(t, \mu)) d\mu = 0 \quad (1.0.1)$$

sapma argümentli neutral diferensiyel denklem sınıfının çözümlerinin salınımlılığına ilişkin bazı teoremler verilmiştir, bu denklemin çözümlerinin salınımlılık davranışını incelemek için aşağıda belirtilen şartların sağlandığı kabul edilmiştir:

- (i) $a \in C([t_0, \infty), (0, \infty))$ ve $p(t) \geq \ell > 1$ olacak şekilde, $p \in C([t_0, \infty), \mathbb{R})$;
- (ii) $q \in C([t_0, \infty) \times [a, b], [0, \infty))$ ve $[t_u, \infty) \times [a, b]$, $t_u \geq t_0$ formundaki herhangi bir aralık üzerinde $q(t, \mu) \not\equiv 0$;
- (iii) $\tau \in C([t_0, \infty), \mathbb{R})$ kesin artan bir fonksiyon, $\tau(t) \leq t$, ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t) = \infty$;
- (iv) $\phi \in C([t_0, \infty) \times [a, b], \mathbb{R})$ olacak şekilde ϕ 'nin ikinci değişkenine göre artmayan ve birinci değişkenine göre azalmayan, ve $\mu \in [a, b]$ için, $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, \mu) = \infty$.

Elde edilen orijinal sonuçlar bazı örneklerle açıklanmıştır.

Dördüncü bölümde, elde edilen sonuçların n-inci mertebeden bir diferensiyel denklem sınıfına genişletilebileceğine dikkat çekilmiştir. Son olarak da, $p(t) \geq \ell > 1$ durumu için elde edilen sonuçların $p(t) \not\equiv -1$ olmak üzere $p(t) \leq -1$ durumu için araştırılmasının ilginç bir durum olacağı vurgulanmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Adi ve Fonksiyonel Diferensiyel Denklemlerin Tanımı

Adi diferensiyel denklemlerin bir ve aynı argüment değeri için bilinmeyen fonksiyon ve onun bazı türevlerini ihtiva eden denklemler olduğu bilinmektedir. Örneğin;

$$x'(t) - 2x(t) = 0, \quad (2.1.2)$$

$$x''(t) + x'(t) + 7x(t) = 0 \quad (2.1.3)$$

denklemleri sırasıyla birinci ve ikinci mertebeden adi diferensiyel denklemlere örneklerdir.

Bir adi diferensiyel denklem, bilinmeyen fonksiyon ve denklemdeki türevlerinin aynı t anındaki değerlerini içeren bir denklem olmasına karşın; fonksiyonel diferensiyel denklemler, bilinmeyen fonksiyon ve türevlerinin bağımsız değişkenin farklı değerleriyle verildiği denklemlerdir. Bu anlamda fonksiyonel diferensiyel denklemler adi diferensiyel denklemlerin bir genelleştirmesidir. Literatürde bu denklemler aynı zamanda sapma (deviating) argümentli diferensiyel denklemler olarak da adlandırılmaktadır (Zafer, 1992). Örneğin;

$$x'(t) = -x(t + 12) + tx(t + \sqrt{17t}) + t, \quad (2.1.4)$$

$$x''(t) = x'(t + 21)x(t) + tx(t - 11) \quad (2.1.5)$$

denklemleri sırasıyla birinci ve ikinci mertebeden fonksiyonel diferensiyel denklemlerdir.

2.2. Fonksiyonel Diferensiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

Uygulamalarda ortaya çıkan bir çok fonksiyonel diferensiyel denklem türü bulunmaktadır. Bu denklem türlerine göre sapma argümenti fonksiyon veya türevlerinde ortaya çıkmaktadır. Dolayısıyla fonksiyonel diferensiyel denklemler

üzerinde yapılan çalışmaların denklem türlerine göre farklılık göstermesi fonksiyonel diferensiyel denklemlerin doğru şekilde sınıflandırılmasının gerekliliğini göstermektedir. Fonksiyonel diferensiyel denklemler değişken ve türevlerindeki değişken sapmalarına göre farklı tiplerde isimlendirilir. Buna göre:

Bir gecikmeli fonksiyonel diferensiyel denklem (delay functional differential equation), bilinmeyen fonksiyonun en yüksek mertebeden türevinin bağımsız değişkenin (argüment) sadece bir değerine bağlı olduğu ve en yüksek mertebeden türevde görülen bu argümentin, bilinmeyen fonksiyonun ve türevlerinin denklemde görülen tüm argümentlerinden daha küçük olmadığı bir diferensiyel denklemdir (Zafer, 1992). Örneğin;

$$x'(t) = 2x(t-1) + tx(t/3) + 1, \quad (2.2.6)$$

$$x''(t) = x'(t-5) + tx(t-1) \quad (2.2.7)$$

denklemleri gecikmeli diferensiyel denklemdir.

Bir ileri fonksiyonel diferensiyel denklem (advanced functional differential equation), bilinmeyen fonksiyonun en yüksek mertebeden türevinin bağımsız değişkenin sadece bir değerine bağlı olduğu ve en yüksek mertebeden türevde görülen bu argümentin, bilinmeyen fonksiyonun ve türevlerinin denklemde görülen tüm argümentlerinden daha büyük olmadığı bir diferensiyel denklemdir (Zafer, 1992). Örneğin,

$$x''(t) = -x'(t+2) + tx(t+\sqrt{t}) + t \quad (2.2.8)$$

denklemleri ileri tipten fonksiyonel diferensiyel denklemdir.

Bir karma fonksiyonel diferensiyel denklem (mixed functional differential equation), bilinmeyen fonksiyonun en yüksek mertebeden türevinin bağımsız değişkenin sadece bir değerine bağlı olduğu ve denklemde en yüksek mertebeden türevde görülen bu argümentten, daha küçük ve daha büyük argümentlerin bulunduğu bir diferensiyel

denklemdir (Zafer, 1992). Örneğin;

$$x'(t) = 2x(t-3) - 2x(t+2) + 1, \quad (2.2.9)$$

$$x''(t) = x'(t+1)x(t) + tx(t-1) \quad (2.2.10)$$

denklemleri karma diferensiyel denklemdir.

Bir neutral fonksiyonel diferensiyel denklem (neutral functional differential equation), bilinmeyen fonksiyonun denklemde görülen en yüksek mertebeden türevinin hem sapma argümentine bağlı hem de sapma argümentine bağlı olmadan görüldüğü bir diferensiyel denklemdir (Zafer, 1992). Örneğin;

$$x''(t) + x''(t+1) + 3tx'(t-1) + 6t^2x(t) = 0 \quad (2.2.11)$$

$$x'(t) + \frac{t}{t+1}x'(t/2) = x(t-2) + \cos t \quad (2.2.12)$$

denklemleri neutral diferensiyel denklemdir.

Bir diferensiyel denklemin t 'nin bazı değerleri için yukarıda belirtilen denklem türlerinden birisine, t 'nin farklı bazı değerleri için farklı bir türe ait olması da mümkündür (Zafer, 1992). Örneğin,

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t + \sin t)) \quad (2.2.13)$$

denklemini, $\sin t < 0$ şartının sağlandığı aralıklarda gecikmeli, $\sin t > 0$ şartının sağlandığı aralıklarda ileri tipten diferensiyel denklemdir.

2.3. Salınım(Oscillation) Tanımı

Kalitatif teoremin önemli bir konusu olan salınım(oscillation) teorisinin temeli Jacques Charles François Sturm tarafından yayınlanan, kendine eşlenik ikinci mertebeden diferensiyel denklemlerin çözümlerinin sıfırlarıyla ilgili iyi bilinen sonuçlara dayanmaktadır. O zamandan beri farklı sınıftaki lineer ve lineer olmayan diferensiyel

denklemlerin çözümlerinin salınım davranışı farklı yöntemlerle araştırılmış ve araştırılmaya devam edilmektedir(Sturm, 1836).

Genel olarak, bir diferensiyel denklemin aşıkâr olmayan bir çözümü, keyfî sayıda yeterince büyük sıfırlara sahipse (yani sıfırlarının kümesi üstten sınırlı değilse) bu çözüme salınımlıdır, aksi takdirde salınımsızdır denir (Erbe ve ark., 1995; Ladde ve ark., 1987).

2.4. Sapma Argümentinin Salınıma Etkisi

Adi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılığı hakkında yapılan çalışmaların büyük çoğunluğu ikinci ya da daha yüksek basamaktan (mertebeden) diferensiyel denklemleri kapsamaktadır. Çünkü birinci basamaktan lineer homojen adi diferensiyel denklemlerin çözümleri salınımlı değildir. Ancak birinci basamaktan fonksiyonel diferensiyel denklemler için durum oldukça farklıdır. Zira bu denklemler salınımlı çözümlere sahip olabilir. Örneğin;

$$x'(t) + x(t) = 0$$

birinci basamaktan adi diferensiyel denklemini salınımlı çözümlere sahip değildir. Ancak

$$x'(t) + x\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

ve

$$x'(t) - x\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

birinci basamaktan fonksiyonel diferensiyel denklemleri $x_1 = \sin t$ ve $x_2 = \cos t$ salınımlı çözümlere sahiptir (Ladde ve ark., 1987). Diğer yandan,

$$x'(t) + \frac{3\pi}{2}x(t+1) = 0$$

ileri tipten diferensiyel denklemi $x_1(t) = \cos \frac{3\pi t}{2} + \sin \frac{3\pi t}{2}$ salınımlı çözümüne ve A bir sabit ve $s + \frac{3\pi}{2}e^s = 0$ denkleminin bir kökü s olmak üzere $x_2(t) = Ae^{st}$ salınımsız çözümüne sahiptir.

İkinci basamaktan lineer homojen diferensiyel denklemlerin bütün çözümlerinin ya salınımlı ya da salınımsız olduğu Sturm Ayırma Teoreminden bilinmektedir. Örneğin,

$$x''(t) + x(t) = 0$$

denkleminin bütün çözümleri salınımlı,

$$x''(t) - x(t) = 0 \quad (2.4.14)$$

denkleminin bütün çözümleri salınımsızdır. Ancak (2.4.14) denklemi salınımsız olmasına rağmen,

$$x''(t) - x(t - \pi) = 0$$

fonksiyonel diferensiyel denkleminin $x_1 = \sin t$ ve $x_2 = \cos t$ salınımlı çözümleri vardır. Ayrıca,

$$x''(t) + x(\pi - t) = 0$$

denklemi hem $x_1 = \sin t$ şeklinde bir salınımlı çözüme hem de $x_2 = e^t - e^{\pi-t}$ şeklinde bir salınımsız çözüme sahiptir (Ladde ve ark., 1987).

Bir diferensiyel denklemde neutral terimin varlığı salınımına neden olabileceği gibi, denklemin salınım özelliklerini yok da edebilir. Örneğin,

$$(e^{2t}x'(t))' + \left(e^{2t} + \frac{e^{2t+2}}{2}\right)x(t) = 0$$

ikinci basamaktan diferensiyel denklemi ve

$$\left(e^{2t} \left(x(t) + \frac{1}{2e^4}x(t-2)\right)\right)' + \left(e^{2t} + \frac{e^{2t+2}}{2}\right)x(t) = 0$$

ikinci basamaktan neutral diferensiyel denklemi salınımlıdır. Ancak,

$$\left(e^{2t} \left(x(t) + \frac{1}{2}x(t-2) \right) \right)' + \left(e^{2t} + \frac{e^{2t+2}}{2} \right) x(t) = 0$$

denkleminin salınımlı olmayan $x(t) = e^{-t}$ çözümü vardır. Bu durum, neutral terimin farklı seçimlerinden kaynaklanmaktadır (Agarwal ve ark., 2014). Ayrıca,

$$x'(t) + x\left(t - \frac{1}{e}\right) = 0$$

diferensiyel denklemi salınımsız çözümlere sahip olmasına rağmen, $p \in (0, 1)$ reel bir sabit olmak üzere olmak üzere

$$(x(t) + px(t-1))' + x\left(t - \frac{1}{e}\right) = 0$$

denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır (Erbe ve ark., 1995).

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2x(t) - y(t) \\ y'(t) &= x(t) + y(t) \end{aligned}$$

diferensiyel denklem sistemini göz önüne alalım. Bu denkleme ait karakteristik denklemin analizinden, her $(x(t), y(t))$ çözümünün salınımlı olduğu bilinmektedir. Ancak

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2x(t) - y\left(t - \frac{1}{3} \ln 4\right) \\ y'(t) &= x\left(t - \frac{1}{3} \ln 4\right) + y(t) \end{aligned}$$

gecikmeli fonksiyonel diferensiyel denklem sistemi, salınımsız $x(t) = \exp\left(\frac{3t}{2}\right)$, $y(t) = \exp\left(\frac{3t}{2}\right)$ çözümüne sahiptir (Erbe ve ark., 1995).

Üçüncü basamaktan diferensiyel denklemlerde ise çözümlerin salınımlı ya da salınımsız olduğunun incelenmesi, birinci ve ikinci basamaktan denklemlerden daha kompleks yapılara sahiptir. Örneğin en basit olarak, a, b ve c reel sabitler olmak

üzere, üçüncü basamaktan sabit katsayılı lineer homojen

$$x'''(t) + ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0 \quad (2.4.15)$$

diferensiyel denklemini göz önüne alalım. (2.4.15) denkleminin karşılık gelen karakteristik denklem en az bir reel köke sahip olacağından bu denklemin en az bir $x_3 = e^{r_3 t}$ şeklinde salınımsız bir çözümü vardır. Yani ikinci basamaktan lineer homojen diferensiyel denklemler için geçerli olan çözümlerin tamamının salınımlı ya da tamamının salınımsız olması durumu üçüncü basamaktan denklemler için geçerli değildir. Ancak bütün çözümleri salınımlı olan ve hem salınımlı hem de salınımsız çözümlere sahip olan üçüncü basamaktan fonksiyonel diferensiyel denklemler mevcuttur. Örneğin,

$$x'''(t) + x(t - \tau) = 0 \quad (2.4.16)$$

denkleminin bütün çözümleri, $\tau > \frac{3}{e}$ gerek ve yeter şartı altında salınımlıdır (Ladas ve ark., 1984). Ancak (2.4.16) denkleminin karşılık gelen

$$x'''(t) + x(t) = 0$$

adi diferensiyel denklemini $x_1 = e^{-t}$ şeklinde bir salınımsız çözüme, $x_2 = e^{\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t$ ve $x_3 = e^{\frac{t}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t$ şeklinde salınımlı çözümlere sahiptir. Diğer yandan,

$$x'''(t) + 2x'(t) + x\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

denklemini, $x_1 = \sin t$ salınımlı çözümüne ve λ karakteristik denklemin sıfırdan farklı bir kökü olmak üzere $x_2 = e^{\lambda t}$ salınımsız çözümüne sahiptir (Pathi ve Pati, 2014).

2.5. Dağıtılmış Sapma Argümentli Fonksiyonel Diferensiyel Denklemlerin Bazı Sınıfları

Bu bölümde tez çalışmamıza ilham olan ve literatürde oldukça atıf alan dağıtılmış sapma argumentli kanonik ve kanonik olmayan neutral diferensiyel denklemlerinin bazı sınıflarını ifade edeceğiz. $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ve

$$I(t) = \int_t^\infty \frac{1}{a^{1/\alpha}(s)} ds, \quad t \geq t_0 \quad (2.5.17)$$

olmak üzere

$$I(t_0) < \infty \quad (2.5.18)$$

şartı sağlanıyor ise gözönüne alınan diferensiyel denkleme kanonik olmayan formdadır;

$$I(t_0) = \infty \quad (2.5.19)$$

şartı sağlanıyor ise gözönüne alınan diferensiyel denkleme kanonik formdadır denir. Neutral diferensiyel denklemler, teorik açıdan araştırmacıların dikkatini çekmesinin yanı sıra doğal bilimler ve teknolojiye de uygulama alanlarına sahip olması nedeniyle araştırmacıların ilgisini çekmeye devam etmektedir. Neutral diferensiyel denklemlerin doğal bilimler, fen ve mühendislikteki uygulama alanlarına ilgi duyan araştırmacılar (Györi ve Ladas, 1991) ve (Hale, 1977) kitaplarında ve (Brayton ve Willoughby, 1967) makalesinde ilginç örnekler bulabilir.

Dağıtılmış sapma argümentsiz ikinci basamaktan neutral diferensiyel denklemlerin değişik sınıfları için yeni salınım kriterlerini belirleme problemi bir çok araştırmacının ilgisini çekmiş, bu konuya olan ilgilerini aşağıdaki makalelerde ve o makalelerde ihtiva edilen referanslarda ilginç sonuçlarıyla yansıtmışlardır.

(Agarwal ve ark., 2014, 2016), (Bohner ve ark., 2017, 2019, 2020), (Dong, 2010), (Grace ve ark., 2018, 2021), (Grace ve Graef, 2018), (Jadlovská, 2021), (Li ve ark., 2013), (Li ve Rogovchenko, 2015), (Prabaharan ve ark., 2019), (Saker ve ark., 2007),

(Sethi ve Tripathy, 2021), (Sui ve Han, 2018), (Tamilvanan ve ark., 2017), (Tripathy ve Santra, 2021), (Xu ve Meng, 2006).

Ancak, bu konuya ilişkin literatür incelendiğinde dağıtılmış sapma argümentli ikinci basamaktan neutral diferensiyel denklemlerin salınım davranışı hakkında nispeten daha az sonuçla karşılaşılmaktadır. Dağıtılmış sapma argümentli ikinci basamaktan neutral diferensiyel denklemlerin değişik sınıfları için bazı ilginç sonuçlar aşağıdaki çalışmalarda bulunmaktadır.

(Candan, 2011), (Candan, 2015), (Grace ve ark., 2014, 2017), (Grace ve ark., 2022), (Gui ve Xu, 2007), (Li ve Thandapani, 2011), (Qi ve Yu, 2015), (Thandapani ve Piramanantham, 2010), (Tunç ve Graef, 2014), (Wang, 2004), (Xu ve Weng, 2007), (Yang ve ark., 2016), (Zhao ve Meng, 2008).

Bu tezde elde edilen sonuçların ayırt edici özelliklerinin açık bir şekilde ortaya konulması amacıyla şu ana kadar literatürde ele alınan dağıtılmış sapma argümentli ikinci basamaktan neutral diferensiyel denklemlerin değişik sınıflarının bir özetini sunmanın ve bu türden denklemlerin salınım özellikleriyle ilgilenen okuyucuların kolaylıkla erişebileceği bir literatür oluşturmamızın faydalı olacağı kanaatindeyiz.

Bu bağlamda, P. Wang, 2004 yılında Comput. Math. Appl. 47, 1935-1946 'da "Oscillation criteria for second-order neutral equations with distributed deviating arguments" adıyla yayımladığı makalede,

$$[a(t)(x(t) + p(t)x(t - \tau))']' + \int_a^b q(t, \mu)x(\phi(t, \mu))d\sigma(\mu) = 0 \quad (2.5.20)$$

diferensiyel denklemini göz önüne almış ve buna ilişkin salınım sonuçlarını τ sıfırdan büyük bir sabit ve $0 \leq p(t) < 1$ olmak üzere (2.5.19) şartı (yani kanonik formda) altında sunmuştur (Wang, 2004).

E. Thandapani ve V. Piramanantham 2010 yılında yayımlanan Electron. J. Qual. Theory. Differ. Equ. , No. 61, 1-15' te "Oscillation criteria of second order neutral delay dynamic equations with distributed deviating arguments" adlı makalesinde,

$$[a(t)(x(t) + p(t)x(t - \tau))']' + \int_a^b q(t, \mu)f(x(\phi(t, \mu)))d\mu = 0, \quad (2.5.21)$$

denkleminin tüm çözümlerinin salınımlılığını kanonik ve kanonik olmayan formda incelemiştir, burada τ sıfırdan büyük bir sabit, $0 \leq p(t) < 1$, $u \neq 0$ için $uf(u) > 0$ ve $f(-u) = -f(u)$ olacak şekilde $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ fonksiyonunu tanımlamıştır (Thandapani ve Piramanantham, 2010).

G. Gui ve Z. Xu, 2007 yılında Electron. J. Differ. Equ. No. 10, 1-11 'da yayımlanan "Oscillation criteria for second-order neutral differential equations with distributed deviating arguments" adlı makalesinde; Z. Xu ve P. Weng, 2007 yılında J. Comput. Appl. Math. 202 'da yayımlanan "Oscillation of second order neutral equations with distributed deviating argument" adlı makalesinde; J. Zhao ve F. Meng, 2008 yılında Appl. Math. Comput. 206 'da yayımlanan "Oscillation criteria for second-order neutral equations with distributed deviating argument" adlı makalesinde,

$$[a(t)\psi(x(t))(x(t) + p(t)x(t - \tau))']' + \int_a^b q(t, \mu)f(x(\phi(t, \mu)))d\sigma(\mu) = 0, \quad (2.5.22)$$

kanonik formdaki denkleminin τ sıfırdan büyük bir sabit, $0 \leq p(t) < 1$, $x \neq 0$ için $\psi(x) > 0$ olacak şekilde $\psi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $u \neq 0$ için $uf(u) > 0$ olacak şekilde $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ve f fonksiyonu $L > 0$ olduğunda $f(x)/x \geq L$ ya da $M > 0$ olduğunda $f'(x) \geq M$ şartları altındaki salınımlılığını ele almışlardır (Gui ve Xu, 2007; Xu ve Weng, 2007; Zhao ve Meng, 2008).

T. Li ve E. Thandapani, 2011 yılında J. Nonlinear Sci. Appl. 4'de yayımlanan "Oscillation of second-order quasi-linear neutral functional dynamic equations with distributed deviating arguments" adlı çalışmada,

$$[a(t)((x(t) + p(t)x(\tau(t)))')^\alpha] + \int_a^b q(t, \mu)x^\alpha(\phi(t, \mu))d\mu = 0, \quad (2.5.23)$$

denkleminin $\alpha \geq 1$ tek pozitif tam sayıların bir oranı olduğunda

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{a^{1/\alpha}(s)}ds = \infty, \quad (2.5.24)$$

şartını sağladığı ve a_0 bir sabit olacak şekilde $0 \leq p(t) < a_0$ ve $\tau \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R})$, $\tau' \geq \tau_0 > 0$, $\tau([t_0, \infty)) = [\tau(t_0), \infty)$, ve $\tau[\phi(t, \mu)] = \phi[\tau(t), \mu]$ şartları altındaki tüm çözümlerinin salınımlılık davranışını belirlemişlerdir(Li ve Thandapani, 2011).

T. Candan, 2011 yılında Comput. Math. Appl. 62 , 4118–4125’ da "Oscillation of second-order nonlinear neutral dynamic equations on time scales with distributed deviating arguments" adlı çalışmasında; Q. Yang, Z. Xu ve P. Long, 2016 yılında Electron. J. Qual. Theory. Differ. Equ. 2016, No. 42, 1-13 ’da yayımlanan "Oscillation of second order neutral dynamic equations with distributed delay" adlı çalışmasında,

$$\left[a(t) \left((x(t) + p(t)x(\tau(t)))' \right)^\alpha \right]' + \int_a^b f(t, x(\phi(t, \mu))) d\mu = 0 \quad (2.5.25)$$

denkleminin α tek pozitif tamsayıların bir bölümü olduğunda

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{a^{1/\alpha}(s)} ds = \infty, \quad (2.5.26)$$

şartını sağladığı ve $0 \leq p(t) < 1$, $u \neq 0$ için $uf(t, u) > 0$ olacak şekilde $f \in C([t_0, \infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ şartları altındaki salınımlılığını incelemişlerdir. Burada Candan’ ın çalışmasında β tek tamsayıların bir oranı olacak şekilde $|f(t, u)| \geq q(t)|u^\beta|$ eşitsizliğinde $q \in C([t_0, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonu vardır. Yang ve ark. çalışmasında $|f(t, u)| \geq q(t, \mu)|u^\alpha|$ olacak şekilde bir $q(t, \mu) \in ([t_0, \infty) \times [a, b], \mathbb{R})$ fonksiyonu vardır(Candan, 2011; Yang ve ark., 2016).

Q. Yang, B. Jia ve Z. Zu, 2016 yılında Math. Meth. Appl. Sci. 39, 202-213 ’da yayımlanan "Nonlinear oscillation of second-order neutral dynamic equations with distributed delay" adlı çalışmada,

$$\left[a(t) |z'(t)|^{\alpha-1} z'(t) \right]' + \int_a^b q(t, \mu) |x(\phi(t, \mu))|^{\beta-1} x(\phi(t, \mu)) d\mu = 0 \quad (2.5.27)$$

denklemini

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{a^{1/\alpha}(s)} ds = \infty \quad (2.5.28)$$

şartı, α ve β pozitif sabitler ve $0 \leq p(t) < 1$ olacak şekilde $z(t) = x(t) + p(t)x(\tau(t))$ sağlandığındaki şartlar altında araştırmışlardır.

E. Tunç ve J. R. Graef, 2014 yılında *Dynam. Systems Appl.* **23** (2014), 289-303 'da yayımlanan "Oscillation results for second order neutral dynamic equations with distributed deviating arguments" adlı çalışmada,

$$[a(t)|z'(t)|^{\alpha-1}z'(t)]' + \int_a^b f(t, x(\phi(t, \mu))) d\mu = 0 \quad (2.5.29)$$

denklemini

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{a^{1/\alpha}(s)} ds = \infty \quad (2.5.30)$$

ve

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{a^{1/\alpha}(s)} ds < \infty$$

şartı ile $z(t) = x(t) + p(t)x(\tau(t))$, $\alpha \geq 1$ bir sabit, $0 \leq p(t) < 1$, $u \neq 0$ için $uf(t, u) > 0$ olacak şekilde $f \in C([t_0, \infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ ve pozitif tek tam sayıların oranı olan $\beta \in (0, 1)$ 'ya sahip $|f(t, u)| \geq q(t)|u^\beta|$ eşitsizliğini sağlayan bir $q \in C([t_0, \infty), \mathbb{R})$ fonksiyonu vardır, şartları ile salınımlılık ve asimptotik davranışlarını incelemişlerdir.

Yukarıda belirtilen gözlemler ışığında, verilen çalışmalar $p(t)$ fonksiyonunun sınırlı olduğu durumlarda göz önüne alınmıştır. Öyleyse bu çalışmalar, $p(t) \rightarrow \infty$ olduğunda $t \rightarrow \infty$ olduğu durumu için uygulanamazdır. Bu gerçekliğe dayanarak, bu çalışmadaki amacımız, sadece $t \rightarrow \infty$ iken $p(t) \rightarrow \infty$ durumu için değil aynı zamanda $p(t)$ sınırlı fonksiyon olduğu zaman da uygulanabilir bazı yeni salınım kriterleri oluşturmaktır. Ayrıca burada verilecek sonuçlar $\beta = 1$ olması durumunda yeni sonuçlardır. Bunun yanında τ pozitif sabitine sahip $\tau(t) = t - \tau$ gecikme sabiti olması da yeni bir sonuçtur. Bununla beraber bizim sonuçlarımız $0 \leq p(t) < 1$ olduğu durumda uygulanamaz ve bu sonuçlarımızın şimdilik zayıf tarafı olarak kalır. Burada bulunan sonuçlar daha çok (Grace ve ark., 2022) ve (Koplatadze ve ark., 1999)'nın çalışmalarında ortaya konulan fikirlerden hareket ederek elde edilmiştir. Yukarıda belirtilen denklem türlerinden de görüleceği gibi sonuçlarımızı daha genel denklemlere genişletmek mümkün olabilir. Ayrıca yeterince büyük tüm t 'ler için bütün fonksiyonel eşitsizliklerin sağlandığı kabul edilmektedir. Genelliği

kaybetmeden (1.0.1) denkleminin sadece pozitif çözümleri gözönüne alınacaktır. Çünkü $x(t)$, (1.0.1) denkleminin bir çözümü ise $-x(t)$ de denklemin bir çözümüdür.



3. BULGULAR

Bu bölümde $t \geq t_0 > 0$, $0 < a < b < \infty$ ve $\beta \in (0, 1]$ pozitif tek tam sayıların bir oranı olmak üzere

$$\left[a(t) (x(t) + p(t)x(\tau(t)))' \right]' + \int_a^b q(t, \mu) x^\beta(\phi(t, \mu)) d\mu = 0 \quad (3.0.1)$$

sapma argümentli neutral diferensiyel denklem sınıfının çözümlerinin salınımlılığına ilişkin bazı teoremler ve örnekler verilecektir. Bu bölüm boyunca aşağıdaki şartların sağlandığı tekrar ifade edilmeksizin kabul edilecektir.

- (i) $a \in C([t_0, \infty), (0, \infty))$, $p \in C([t_0, \infty), \mathbb{R})$ ve $p(t) \geq \ell > 1$;
- (ii) $q \in C([t_0, \infty) \times [a, b], [0, \infty))$ ve $[t_u, \infty) \times [a, b]$, $t_u \geq t_0$ formundaki herhangi bir aralık üzerinde $q(t, \mu) \not\equiv 0$;
- (iii) $\tau \in C([t_0, \infty), \mathbb{R})$ kesin artan bir fonksiyon, $\tau(t) \leq t$, ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t) = \infty$;
- (iv) $\phi \in C([t_0, \infty) \times [a, b], \mathbb{R})$ olmak üzere ϕ 'nin ikinci değişkenine göre artmayan ve birinci değişkenine göre azalmayan bir fonksiyon ve $\mu \in [a, b]$ için, $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, \mu) = \infty$.

Aynı zamanda,

$$I(t) = \int_t^\infty \frac{1}{a^{1/\alpha}(s)} ds, \quad t \geq t_0 \quad (3.0.2)$$

olmak üzere

$$I(t_0) < \infty \quad (3.0.3)$$

olduğu kabul edilecektir; yani (3.0.1) denkleminin salınımlılığı kanonik olmayan formda incelenecektir.

$t_x \geq t_0$ için,

$$x \in C([t_x, \infty), \mathbb{R}),$$

$$x(t) + p(t)x(\tau(t)) \in C^1([t_x, \infty), \mathbb{R}),$$

$$a(t)(x(t) + p(t)x(\tau(t)))' \in C^1([t_x, \infty), \mathbb{R})$$

özelliklerine sahip ve (3.0.1) denklemini sağlayan bir x fonksiyonuna (3.0.1) denkleminin bir çözümü denir. Çözümlerin sadece salınımlılık davranışıyla incelendiği için (3.0.1) denkleminin her $x(t)$ çözümünün sürdürülebilir ve aşıkâr olmayan olduğu kabul edilecektir. Yani $x(t)$, bir $t_x \geq t_0$ için $[t_x, \infty)$ üzerinde tanımlıdır ve herhangi bir $t_1 \geq t_x$ için

$$\sup \{|x(t)| : t_1 \leq t < \infty\} > 0$$

şartının sağlandığı kabul edilecektir. Ayrıca (3.0.1) denkleminin böyle çözümlere sahip olduğu kabul edilecektir.

(3.0.1) denkleminin böyle bir $x(t)$ çözümü, eğer keyfi sayıda yeterince büyük sıfırlara sahip (yani sıfırlarının kümesi üstten sınırlı değil) ise salınımlıdır, aksi taktirde salınımsızdır denir. Eğer (3.0.1) denkleminin tüm aşıkâr olmayan sürdürülebilir çözümleri salınımlı ise (3.0.1) denkleminin salınımlıdır denir.

Okuyucuya kolaylık olması açısından τ 'nın ters fonksiyonu τ^{-1} olmak üzere aşağıdaki notasyonlardan faydalanılacaktır:

$$z(t) := x(t) + p(t)x(\tau(t)), \quad A(t) := \int_{t_*}^t \frac{1}{a(s)} ds, \quad t \geq t_* \geq t_0,$$

$$\phi_1(t) := \phi(t, b), \quad \phi_2(t) := \phi(t, a), \quad g(t) := \tau^{-1}(\phi_1(t)), \quad h(t) := \tau^{-1}(\phi_2(t)),$$

$$\pi(t) := \frac{1}{p(\tau^{-1}(t))} \left[1 - \frac{1}{p(\tau^{-1}(\tau^{-1}(t)))} \right],$$

$$q_1(t) := \int_a^b q(t, \mu) p^{-\beta}(\tau^{-1}(\phi(t, \mu))) d\mu, \quad \text{ve} \quad q_2(t) := \int_a^b q(t, \mu) \pi^\beta(\phi(t, \mu)) d\mu.$$

Teorem 3.0.1. $I(t_0) < \infty$ ve $\phi_2(t) \leq \tau(t)$ olsun. Eğer,

$$\int_{t_0}^{\infty} I(s) q_1(s) ds = \infty \tag{3.0.4}$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \left(I(t) \int_{t_0}^t q_2(s) ds + I^{-\beta}(h(t)) \int_t^\infty I(s) q_2(s) I^\beta(h(s)) ds \right) > \begin{cases} 1; & \beta = 1 \text{ ise,} \\ 0; & 0 < \beta < 1 \text{ ise,} \end{cases} \quad (3.0.5)$$

ise, bu taktirde (3.0.1) denklemini salınımlıdır.

İspat. $x(t)$, (3.0.1) denkleminin salınımsız bir çözümü olsun. Bu taktirde, genelliği bozmaksızın öyle bir $t_1 \geq t_0$ vardır ki, her $t \geq t_1$ için $x(t) > 0$, $x(\tau(t)) > 0$ ve $(t, \mu) \in [t_1, \infty) \times [a, b]$ için $x(\phi(t, \mu)) > 0$ olduğunu kabul edebiliriz. $z(t) := x(t) + p(t)x(\tau(t))$ olduğundan

$$0 < x(t) \leq z(t)$$

ve

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{p(\tau^{-1}(t))} [z(\tau^{-1}(t)) - x(\tau^{-1}(t))] \\ &\geq \frac{z(\tau^{-1}(t))}{p(\tau^{-1}(t))} - \frac{z(\tau^{-1}(\tau^{-1}(t)))}{p(\tau^{-1}(t))p(\tau^{-1}(\tau^{-1}(t)))} \end{aligned} \quad (3.0.6)$$

olduğunu görülür. $\tau \in C([t_0, \infty), \mathbb{R})$ kesin artan, $\tau(t) \leq t$, ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t) = \infty$ olduğundan τ^{-1} artandır ve dolayısıyla $t \leq \tau^{-1}(t)$ 'dir. Bu yüzden

$$\tau^{-1}(t) \leq \tau^{-1}(\tau^{-1}(t)) \quad (3.0.7)$$

$t \geq t_1$ için (3.0.1)'den

$$(a(t)z'(t))' = - \int_a^b q(t, \mu) x^\beta(\phi(t, \mu)) d\mu \leq 0 \quad (3.0.8)$$

olduğu sonucuna ulaşılır. Buradan da $a(t)z'(t)$ 'nin artmayan olduğu ve neticede pozitif veya negatif olduğu sonucuna ulaşılır. Yani bir $t_2 \geq t_1$ vardır, öyle ki, $t \geq t_2$ için

$$(\mathcal{N}_1) \quad z(t) > 0, \quad z'(t) > 0, \quad (a(t)z'(t))' \leq 0; \quad \text{ya da}$$

$$(\mathcal{N}_0) \quad z(t) > 0, \quad z'(t) < 0, \quad (a(t)z'(t))' \leq 0$$

durumları söz konusudur.

Şimdi $(\mathcal{N}_1)$ durumunu gözönüne alalım. Bu taktirde $t \geq t_3$ ve $t_3 > t_2$ için

$$z(t) \geq \int_{t_2}^t \frac{a(s)z'(s)}{a(s)} ds \geq \left(\int_{t_2}^t \frac{1}{a(s)} ds \right) a(t)z'(t) = A(t)a(t)z'(t)$$

elde edilir ve buradan da

$$\left(\frac{z(t)}{A(t)} \right)' = \frac{a(t)A(t)z'(t) - z(t)}{a(t)A^2(t)} \leq 0$$

sonucuna varılır. Yani, $z(t)/A(t)$ artmayandır. $z(t)/A(t)$ 'nin artmayanlığı ve $\tau^{-1}(t) \leq \tau^{-1}(\tau^{-1}(t))$ durumu birlikte değerlendirildiğinde

$$z(\tau^{-1}(\tau^{-1}(t))) \leq \frac{A(\tau^{-1}(\tau^{-1}(t)))z(\tau^{-1}(t))}{A(\tau^{-1}(t))} \quad (3.0.9)$$

ifadesine varılır. (3.0.9) ifadesini (3.0.6) eşitsizliğinde kullanırsak $t \geq t_3$ için

$$x(t) \geq \frac{z(\tau^{-1}(t))}{p(\tau^{-1}(t))} \left[1 - \frac{A(\tau^{-1}(\tau^{-1}(t)))}{A(\tau^{-1}(t))} \frac{1}{p(\tau^{-1}(\tau^{-1}(t)))} \right] \quad (3.0.10)$$

eşitsizliğine varılır. Diğer taraftan

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(\tau^{-1}(t))}{A(t)} = 1$$

olduğunu kullanarak ve $p(t) \geq \ell > 1$ olduğu da gözönüne alındığında öyle bir $t_3 \geq t_2$ vardır ki, her bir $\epsilon \in (0, \ell - 1)$ için

$$\frac{A(\tau^{-1}(\tau^{-1}(t)))}{A(\tau^{-1}(t))} \frac{1}{p(\tau^{-1}(\tau^{-1}(t)))} \leq \frac{1 + \epsilon}{\ell}$$

eşitsizliği $t \geq t_3$ için sağlanır. Bunu (3.0.10) eşitsizliğinde kullanarak $d = 1 - (1 + \epsilon)/\ell > 0$ olmak üzere $t \geq t_3$ için

$$x(t) \geq d \frac{z(\tau^{-1}(t))}{p(\tau^{-1}(t))} \quad (3.0.11)$$

elde edilir. $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, \mu) = \infty$ olduğundan tüm $t \geq t_4$ için $\phi(t, \mu) \geq t_3$ olacak şekilde $t_4 \geq t_3$ seçebiliriz. Dolayısıyla (3.0.11) ifadesinden $t \geq t_4$ için

$$x(\phi(t, \mu)) \geq d \frac{z(\tau^{-1}(\phi(t, \mu)))}{p(\tau^{-1}(\phi(t, \mu)))} \quad (3.0.12)$$

elde edilir. (3.0.12) ifadesi (3.0.1) denkleminde kullanılırsa

$$(a(t)z'(t))' + d^\beta \int_a^b q(t, \mu) p^{-\beta}(\tau^{-1}(\phi(t, \mu))) z^\beta(\tau^{-1}(\phi(t, \mu))) d\mu \leq 0 \quad (3.0.13)$$

eşitsizliğine ulaşılır. τ ve z artan ve ϕ , μ 'ye göre artmayan olduğundan (3.0.13) ifadesinden

$$(a(t)z'(t))' + d^\beta \left(\int_a^b q(t, \mu) p^{-\beta}(\tau^{-1}(\phi(t, \mu))) d\mu \right) z^\beta(\tau^{-1}(\phi_1(t))) \leq 0$$

eşitsizliği ya da $t \geq t_4$ için

$$(a(t)z'(t))' + d^\beta q_1(t) z^\beta(g(t)) \leq 0 \quad (3.0.14)$$

eşitsizliğine ulaşılır. $z(t) > 0$ ve $z'(t) > 0$ olduğundan bir $c > 0$ ve $t \geq t_4$ için $z(t) \geq c > 0$ olur ve dolayısıyla (3.0.14) eşitsizliği bir $t_5 \geq t_4$ ve her $t \geq t_5$ için

$$(a(t)z'(t))' + c^\beta d^\beta q_1(t) \leq 0 \quad (3.0.15)$$

formuna dönüşür. (3.0.15) eşitsizliğinin iki kez integrali alınıp ve $I(t_0) < \infty$ ve (3.0.4) şartları gözönüne alındığında $t \rightarrow \infty$ için

$$z(t) \leq z(t_5) + \int_{t_5}^t \frac{a(t_5)z'(t_5)}{a(s)} ds - c^\beta d^\beta \int_{t_5}^t \frac{1}{a(u)} \int_{t_5}^u q_1(s) ds du \rightarrow -\infty$$

olduğu görülür. Bu da $z(t)$ 'nin pozitifliğiyle çelişir.

Şimdi de $(\mathcal{N}_0)$ durumunu gözönüne alalım. $z'(t) < 0$ olduğundan (3.0.7) ifadesinden

$$z(\tau^{-1}(t)) \geq z(\tau^{-1}(\tau^{-1}(t))) \quad (3.0.16)$$

sonucuna varılır. (3.0.16) ifadesi (3.0.6) eşitsizliğinde kullanılırsa $t \geq t_2$ için

$$x(t) \geq \frac{1}{p(\tau^{-1}(t))} \left[1 - \frac{1}{p(\tau^{-1}(\tau^{-1}(t)))} \right] z(\tau^{-1}(t)) \quad (3.0.17)$$

ifadesi elde edilir. $p(t) \geq \ell > 1$ şartından ve $b = 1 - 1/\ell > 0$ olmak üzere (3.0.17) ifadesinden her $t \geq t_2$ için

$$x(t) \geq b \frac{z(\tau^{-1}(t))}{p(\tau^{-1}(t))} \quad (3.0.18)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Ayrıca (iv) şartından dolayı öyle bir $t_3 \geq t_2$ vardır ki, her $t \geq t_3$ için

$$x(\phi(t, \mu)) \geq b \frac{z(\tau^{-1}(\phi(t, \mu)))}{p(\tau^{-1}(\phi(t, \mu)))} \quad (3.0.19)$$

kalır. (3.0.19) ifadesini (3.0.1) eşitsizliğinde yerine yazarsak

$$(a(t)z'(t))' + b^\beta \int_a^b q(t, \mu) p^{-\beta}(\tau^{-1}(\phi(t, \mu))) z^\beta(\tau^{-1}(\phi(t, \mu))) d\mu \leq 0 \quad (3.0.20)$$

elde edilir. τ artan ve z azalan ve ϕ, μ 'ye göre artmayan olduğundan (3.0.20) eşitsizliğinden

$$(a(t)z'(t))' + b^\beta \left(\int_a^b q(t, \mu) p^{-\beta}(\tau^{-1}(\phi(t, \mu))) d\mu \right) z^\beta(\tau^{-1}(\phi_2(t))) \leq 0$$

ifadesi ya da $t \geq t_3$ için

$$(a(t)z'(t))' + b^\beta q_1(t) z^\beta(h(t)) \leq 0 \quad (3.0.21)$$

eşitsizliği bulunur. z pozitif ve azalan olduğundan

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \kappa$$

olacak şekilde bir $\kappa \in [0, \infty)$ sabiti vardır.

Burada iddia ediyoruz ki $\kappa = 0$ dır.

Aksine $\kappa > 0$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde, bir $t_4 \geq t_3$ vardır öyleki her $t \geq t_4$ için

$$z(t) > \kappa \quad (3.0.22)$$

kalır. (3.0.22) ifadesi (3.0.21) eşitsizliğinde kullanılırsa bir $t_5 \geq t_4$ ve tüm $t \geq t_5$ için

$$(a(t)z'(t))' + b^\beta \kappa^\beta q_1(t) \leq 0 \quad (3.0.23)$$

olduğu görülür. (3.0.23) eşitsizliğinin t_5 'ten t 'ye integrali alınır

$$-a(t)z'(t) \geq b^\beta \kappa^\beta \int_{t_5}^t q_1(s)ds \quad (3.0.24)$$

elde edilir. (3.0.24) eşitsizliği t_5 'ten t 'ye integralleyerek ve (3.0.4) şartı da gözönüne alınır

$$z(t_5) \geq b^\beta \kappa^\beta \int_{t_5}^t \frac{1}{a(u)} \int_{t_5}^u q_1(s)dsdu \geq b^\beta \kappa^\beta \int_{t_5}^t \int_s^t \frac{1}{a(u)} q_1(s)duds$$

olduğunu görürüz. Son eşitsizlikte $t \rightarrow \infty$ limiti alındığında (3.0.4) şartıyla çelişkiye düşmüş oluruz. Bu da iddiamızın doğru, yani $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$ olduğunu gösterir.

Diğer taraftan, $(\mathcal{N}_0)$ durumundan dolayı $t \geq t_2$ için

$$z(t) \geq - \int_t^\infty \frac{a(s)z'(s)}{a(s)}ds \geq - \left(\int_t^\infty \frac{1}{a(s)}ds \right) a(t)z'(t) = -I(t)a(t)z'(t)$$

elde edilir ve bu yüzden

$$z(t) + I(t)a(t)z'(t) \geq 0 \quad (3.0.25)$$

eşitsizliğine varılır. (3.0.25) ifadesinden

$$\left(\frac{z(t)}{I(t)} \right)' = \frac{a(t)I(t)z'(t) + z(t)}{a(t)I^2(t)} \geq 0$$

olduğu görülür. Yani öyle bir $t_3 \geq t_2$ vardır ki $t \geq t_3$ için, $z(t)/I(t)$, eventually(nihai) azalmayandır. (3.0.17) ve (3.0.1) eşitsizliklerinden $t \geq t_3$ için

$$(a(t)z'(t))' + q_2(t)z^\beta(h(t)) \leq 0 \quad (3.0.26)$$

eşitsizliği gözlemlenir ve bu eşitsizlik

$$(a(t)z'(t)I(t) + z(t))' + I(t)q_2(t)z^\beta(h(t)) \leq 0 \quad (3.0.27)$$

formunda da ifade edilebilir. (3.0.27) eşitsizliğinin $t \geq t_3$ 'ten u 'ya integrali alınarak, $u \rightarrow \infty$ alarak ve (3.0.25) eşitsizliğini kullanarak

$$a(t)z'(t)I(t) + z(t) \geq \int_t^\infty I(s)q_2(s)z^\beta(h(s))ds \quad (3.0.28)$$

ifadesine ulaşırız. (3.0.26) eşitsizliğini $t \geq t_3$ 'ten t 'ye integrali alınıp ve daha sonra $I(t)$ ile çarpıldığında

$$-a(t)z'(t)I(t) \geq I(t) \int_{t_3}^t q_2(s)z^\beta(h(s))ds \quad (3.0.29)$$

ifadesine ulaşılır. Dolayısıyla (3.0.28) ve (3.0.29) ifadelerinden

$$z(t) \geq I(t) \int_{t_3}^t q_2(s)z^\beta(h(s))ds + \int_t^\infty I(s)q_2(s)z^\beta(h(s))ds \quad (3.0.30)$$

sonucuna varılır. h fonksiyonunun artanlığı ve z fonksiyonunun azalanlığı birlikte değerlendirildiğinden $s \leq t$ için $h(s) \leq h(t) \leq t$ olduğu görülür ve bu yüzden de $t \geq t_3$ için $z(h(s)) \geq z(h(t)) \geq z(t)$ elde edilir. Bunlardan dolayı

$$\int_{t_3}^t q_2(s)z^\beta(h(s))ds \geq \left(\int_{t_3}^t q_2(s)ds \right) z^\beta(t) \quad (3.0.31)$$

ifadesi elde edilir. Diğer taraftan, $s > t$ için $h(s) > h(t)$ ve $h(t) \leq t$ elde ederiz. $z(t)/I(t)$ 'nin azalmayan olduğunu gözönünde bulundurarak

$$\frac{z^\beta(h(s))}{I^\beta(h(s))} \geq \frac{z^\beta(h(t))}{I^\beta(h(t))} \geq \frac{z^\beta(t)}{I^\beta(h(t))}$$

elde edilir. Bu yüzden

$$\begin{aligned} \int_t^\infty I(s)q_2(s)z^\beta(h(s))ds &\geq \int_t^\infty I(s)q_2(s)I^\beta(h(s))\frac{z^\beta(h(s))}{I^\beta(h(s))}ds \\ &\geq \left(\frac{1}{I^\beta(h(t))} \int_t^\infty I(s)q_2(s)I^\beta(h(s))ds\right) z^\beta(t) \quad (3.0.32) \end{aligned}$$

eşitsizliğine varılır. (3.0.31) ve (3.0.32) ifadelerini (3.0.30) eşitsizliğinde yerine yazarak

$$z(t) \geq \left(I(t) \int_{t_3}^t q_2(s)ds\right) z^\beta(t) + \left(\frac{1}{I^\beta(h(t))} \int_t^\infty I(s)q_2(s)I^\beta(h(s))ds\right) z^\beta(t)$$

sonucuna ulaşırız. Bu son eşitsizlikte $t \rightarrow \infty$ için lim sup alındığında (3.0.5) şartı ile çelişkiye düşülmüş olur. Bu da teoremin ispatını tamamlar. Yani (3.0.1) denklemini salınımlıdır.

Teorem 3.0.2. $I(t_0) < \infty$ ve (3.0.4) sağlansın ve $\phi_2(t) \leq \tau(t)$ olsun. Eğer,

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \left(I(h(t)) \int_{t_0}^{h(t)} q_2(s)ds + \int_{h(t)}^t I(s)q_2(s)ds \right. \\ \left. + I^{-\beta}(h(t)) \int_t^\infty I(s)q_2(s)I^\beta(h(s))ds \right) > \begin{cases} 1; & \beta = 1 \text{ ise,} \\ 0; & 0 < \beta < 1 \text{ ise,} \end{cases} \quad (3.0.33) \end{aligned}$$

ise bu taktirde (3.0.1) salınımlıdır.

İspat. $x(t)$, (3.0.1) denkleminin salınımsız bir çözümü olsun. Bu taktirde, genelliği bozmaksızın öyle bir $t_1 \geq t_0$ vardır ki her $t \geq t_1$ için $x(t) > 0$, $x(\tau(t)) > 0$ ve $(t, \mu) \in [t_1, \infty) \times [a, b]$ için $x(\phi(t, \mu)) > 0$ olduğunu kabul edebiliriz.

Teorem 3.0.1'in ispatındaki işlemlerin aynısı kullanılarak (3.0.30) eşitsizliğine ulaşırız ve (3.0.30) eşitsizliği

$$\begin{aligned} z(h(t)) &\geq I(h(t)) \int_{t_3}^{h(t)} q_2(s)z^\beta(h(s))ds + \int_{h(t)}^t I(s)q_2(s)z^\beta(h(s))ds \\ &\quad + \int_t^\infty I(s)q_2(s)z^\beta(h(s))ds \end{aligned}$$

biçiminde de ifade edilebilir. İspatın geri kalan kısmı Teorem 3.0.1'in ispatına benzer bir şekilde devam ettiğinden dolayı detaylara yer verilmemiştir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 3.0.3. $I(t_0) < \infty$ ve (3.0.4) sağlansın ve $\phi_2(t) \leq \tau(t)$ olsun. Eğer,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{h(t)}^t I(s)q_2(s)ds \begin{cases} 1; & \beta = 1 \text{ ise} \\ 0; & \beta \in (0, 1) \text{ ise} \end{cases} \quad (3.0.34)$$

ise, bu taktirde (3.0.1) denklemini salınımlıdır.

İspat. $x(t)$, (3.0.1) denkleminin salınımsız bir çözümü olsun. Bu taktirde, genelliği bozmaksızın öyle bir $t_1 \geq t_0$ vardır ki her $t \geq t_1$ için $x(t) > 0$, $x(\tau(t)) > 0$ ve $(t, \mu) \in [t_1, \infty) \times [a, b]$ için $x(\phi(t, \mu)) > 0$ olduğunu kabul edebiliriz.

Teorem 3.0.1'in ispat yönteminden hareketle tekrardan (3.0.25) ve (3.0.27) eşitsizliklerine ulaşılır.

$$y(t) := z(t) + I(t)a(t)z'(t)$$

olsun. Bu taktirde $0 \leq y(t) \leq z(t)$ olup ve bu yüzden (3.0.27) eşitsizliğinden

$$y'(t) + I(t)q_2(t)y^\beta(h(t)) \leq 0$$

ifadesine varılır. Bu son eşitsizliğin $h(t)$ 'den t 'ye integrali alındığında

$$y(h(t)) \geq \int_{h(t)}^t I(s)q_2(s)y^\beta(h(s))ds \geq y^\beta(h(t)) \int_{h(t)}^t I(s)q_2(s)ds$$

ifadesine ulaşılır ve buradan da

$$y^{1-\beta}(h(t)) \geq \int_{h(t)}^t I(s)q_2(s)ds$$

olduğu görülür. Bu son eşitsizliğin her iki tarafının $t \rightarrow \infty$ için lim sup'unu alırsak, (3.0.34) şartı ile çelişkiye düşülmüş olur ve bu da teoremin ispatını tamamlar.

Şimdi de $\phi_1(t) \geq \tau(t)$ durumu için, yani h ileri (advanced) argüment olduğu durum için (3.0.1) denkleminin ilişkin salınım sonuçlarını vereceğiz.

Teorem 3.0.4. Kabul edelim ki $I(t_0) < \infty$ ve (3.0.4) sağlansın ve $\phi_1(t) \geq \tau(t)$ olsun. Eğer

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{I^\beta(h(t))}{I^{\beta-1}(t)} \int_{t_0}^t q_2(s) ds + \frac{1}{I^\beta(t)} \int_t^\infty I(s) q_2(s) I^\beta(h(s)) ds \right) > \begin{cases} 1; & \beta = 1 \text{ ise,} \\ 0; & 0 < \beta < 1 \text{ ise,} \end{cases} \quad (3.0.35)$$

şartı sağlanırsa (3.0.1) denklemi salınımlıdır.

İspat. $x(t)$, (3.0.1) denkleminin salınımsız bir çözümü olsun. Bu taktirde, genelliği bozmaksızın öyle bir $t_1 \geq t_0$ vardır ki her $t \geq t_1$ için $x(t) > 0$, $x(\tau(t)) > 0$ ve $(t, \mu) \in [t_1, \infty) \times [a, b]$ için $x(\phi(t, \mu)) > 0$ olduğunu kabul edebiliriz.

(Teorem 3.0.1)'in ispatına benzer şekilde ilerleyerek (3.0.30) eşitsizliği tekrar elde edilmiş olur. h artan ve bir advanced argüman olduğundan $h(t) \geq t$ ve $s \leq t$ için $s \leq h(s) \leq h(t)$ olduğu görülür. Böylece, z' nin azalan olduğu gözönüne alındığında

$$z(h(s)) \geq z(h(t))$$

ifadesi elde edilir. $z(t)/I(t)$ azalmayan fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} \int_{t_3}^t q_2(s) z^\beta(h(s)) ds &\geq \left(\int_{t_3}^t q_2(s) ds \right) I^\beta(h(t)) \frac{z^\beta(h(t))}{I^\beta(h(t))} \\ &\geq \left(\int_{t_3}^t q_2(s) ds \right) \left(\frac{I^\beta(h(t))}{I^\beta(t)} \right) z^\beta(t) \end{aligned} \quad (3.0.36)$$

elde edilir. Aynı zamanda, $s > t$ ise $h(s) \geq h(t)$ olup ve bu yüzden

$$\frac{z^\beta(h(s))}{I^\beta(h(s))} \geq \frac{z^\beta(h(t))}{I^\beta(h(t))} \geq \frac{z^\beta(t)}{I^\beta(t)}$$

ifadesi elde edilmiş olur. Böylece

$$\begin{aligned} \int_t^\infty I(s) q_2(s) z^\beta(h(s)) ds &\geq \int_t^\infty I(s) q_2(s) I^\beta(h(s)) \frac{z^\beta(t)}{I^\beta(t)} ds \\ &\geq \left(\frac{1}{I^\beta(t)} \int_t^\infty I(s) q_2(s) I^\beta(h(s)) ds \right) z^\beta(t) \end{aligned} \quad (3.0.37)$$

olduğu görülür. (3.0.36) ve (3.0.37) ifadeleri (3.0.30) ifadesinde kullanıldığında

$$z^{1-\beta}(t) \geq \frac{I^\beta(h(t))}{I^{\beta-1}(t)} \int_{t_3}^t q_2(s)ds + \frac{1}{I^\beta(t)} \int_t^\infty I(s)q_2(s)I^\beta(h(s))ds$$

eşitsizliği elde edilir. İspatın geriye kalan kısmı (Teorem 3.0.1)'in ispatına benzer olduğundan detaylara yer verilmemiştir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmıştır.

Teorem 3.0.5. Kabul edelim ki $I(t_0) < \infty$ ve (3.0.4) sağlansın ve $\phi_1(t) \geq \tau(t)$ olsun. Eğer,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \left(I(h(t)) \int_{t_0}^t q_2(s)ds + I^{1-\beta}(h(t)) \int_t^{h(t)} I^\beta(h(s))q_2(s)ds + I^{-\beta}(h(t)) \int_{h(t)}^\infty I(s)q_2(s)I^\beta(h(s))ds \right) > \begin{cases} 1; & \beta = 1 \text{ ise,} \\ 0; & 0 < \beta < 1 \text{ ise,} \end{cases} \quad (3.0.38)$$

şartı sağlanırsa (3.0.1) denklemi salınımlıdır.

İspat. $x(t)$, (3.0.1) denkleminin salınımsız bir çözümü olsun. Bu taktirde, genelliği bozmaksızın öyle bir $t_1 \geq t_0$ vardır ki her $t \geq t_1$ için $x(t) > 0$, $x(\tau(t)) > 0$ ve $(t, \mu) \in [t_1, \infty) \times [a, b]$ için $x(\phi(t, \mu)) > 0$ olduğunu kabul edebiliriz.

Teorem 3.0.1'in ispat yönteminden hareketle tekrardan (3.0.30) eşitsizliğine varırız ve bu eşitsizlik

$$z(h(t)) \geq I(h(t)) \int_{t_3}^t q_2(s)z^\beta(h(s))ds + I(h(t)) \int_t^{h(t)} q_2(s)z^\beta(h(s))ds + \int_{h(t)}^\infty I(s)q_2(s)z^\beta(h(s))ds$$

biçiminde de ifade edilebilir. İspatın geri kalan kısmı z 'nin azalanlığı, $z(t)/I(t)$ 'nin artanlığı ve Teorem 3.0.1'in ispatındaki gibi tamamlanmış olur. Bu detaylara yer vermeyerek teoremin ispatını tamamlamış oluyoruz.

Not 3.0.6. Burada elde edilen sonuçlar, (iv) şartındaki ϕ fonksiyonunun ikinci değişkenine göre azalmayan olduğunda da geçerlidir. Bu durumu

$$\phi_1(t) := \phi(t, b) \quad \text{ile} \quad \bar{\phi}_1(t) := \phi(t, a)$$

ve

$$\phi_2(t) := \phi(t, a) \quad \text{ile} \quad \bar{\phi}_2(t) := \phi(t, b)$$

biçimindeki sembol değişimi ile elde edebiliriz.

Örnek 3.0.7.

$$\left(t^2 \left(x(t) + 2tx \left(\frac{t}{2} \right) \right)' \right)' + \int_1^2 \left(12t + \frac{12}{\mu} \right) x \left(\frac{t}{4} + \frac{1}{4\mu} \right) d\mu = 0, \quad t \geq 1 \quad (3.0.39)$$

dağıtılmış sapma argümentli ikinci basamaktan neutral diferensiyel denklemini gözönüne alalım. Burada $a(t) = t^2$, $p(t) = 2t$, $\tau(t) = t/2$, $\phi(t, \mu) = t/4 + 1/4\mu$, $\beta = 1$, $a = 1$, $b = 2$ ve $q(t, \mu) = 12t + 12/\mu$ dır. Bu taktirde

$$\tau^{-1}(t) = 2t, \quad \tau^{-1}(\tau^{-1}(t)) = 4t, \quad \phi_2(t) = (t+1)/4 \text{ ve } h(t) = (t+1)/2$$

$$I(t) = \frac{1}{t}, \quad \pi(t) \geq 7/32t, \quad q_1(t) = 12, \quad \text{ve} \quad q_2(t) \geq 21/2$$

olduğu görülür. $I(t_0) = 1$ ve

$$\int_{t_0}^{\infty} I(s)q_1(s)ds = \int_1^{\infty} \frac{12}{s}ds = \infty,$$

olduğundan $I(t_0) < \infty$ ve (3.0.4) şartları sağlanır. aynı zamanda (3.0.35) şartının da sağlandığı açıkça görülmektedir. Dolayısıyla Teorem 3.0.1'nin tüm şartları sağlanmış oldu. Bu yüzden de Teorem 3.0.1'den dolayı (3.0.39) denklemi salınımlıdır.

Örnek 3.0.8.

$$\left(t^3 \left(x(t) + 4x \left(\frac{t}{3} \right) \right)' \right)' + \int_1^2 (t + \mu) x^{1/3} (2t - \mu) d\mu = 0, \quad t \geq 5. \quad (3.0.40)$$

dağıtılmış sapma argümentli ikinci basamaktan neutral diferensiyel denklemini gözönüne alalım. Burada $a(t) = t^3$, $p(t) = 4$, $\tau(t) = t/3$, $\phi(t, \mu) = 2t - \mu$, $\beta = 1/3$, $a = 1$, $b = 2$, ve $q(t, \mu) = t + \mu$ olduğu görülmektedir. Bu taktirde,

$$\tau^{-1}(t) = 3t, \quad \tau^{-1}(\tau^{-1}(t)) = 9t, \quad \phi_2(t) = 2t - 1 \text{ ve } h(t) = 6t - 3,$$

$$I(t) = \frac{1}{2t^2}, \quad \pi(t) = 3/16, \quad q_1(t) = (2t+3)/\sqrt[3]{32}, \quad \text{ve} \quad q_2(t) = \sqrt[3]{3/128}(2t+3).$$

olduğu görülür. $I(t_0) = 1/50$ ve

$$\int_{t_0}^{\infty} I(s)q_1(s)ds = \int_5^{\infty} \frac{2s+3}{2\sqrt[3]{32}s^2}ds = \infty,$$

olduğundan, $I(t_0) < \infty$ ve (3.0.4) şartları sağlanır. Aynı zamanda (3.0.35) şartının da sağlandığı kolayca görülebilir. Dolayısıyla Teorem 3.0.4'ün tüm şartları sağlandı. Teorem 3.0.4'ten dolayı (3.0.40) denklemi salınımlıdır.



4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında ikinci basamaktan kanonik olmayan dağıtılmış sapma argümentli neutral diferensiyel denklemlerin bir sınıfı göz önüne alınmıştır. Bu sınıfa ilişkin çözümlerin salınımlı olması için yeni yeter şartlar verilmiştir. Elde edilen teorik sonuçların geçerliliği bazı örneklerle gösterilmiştir.

Bu tezde elde edilen sonuçlar daha yüksek mertebeden dağıtılmış sapma argümentli neutral diferensiyel denklemlere genişletilebilir; bunun için bir örnek aşağıdaki Not 4.0.1' de sunulmuştur. Ayrıca Not 4.0.2 'de de $p(t)$ fonksiyonu üzerine konulan şart altında hem ikinci basamaktan hem de daha yüksek basamaktan dağıtılmış sapma argümentli neutral diferensiyel denklemlerin salınımlılığının araştırılmasının ilginç olacağı kanaatine varılmıştır.

Bu tez çalışmasından elde edilen sonuçlardan hareketle farklı sınıf ve mertebedeki dağıtılmış sapma argümentli neutral diferensiyel denklemler için de bazı yeni salınım sonuçlarının verilebileceği gözlemlenmiştir. Bunların arasında aşağıdaki problemlerin araştırılmasının ilginç olacağı kanaatine varılmıştır.

Not 4.0.1. Bu tez çalışmasının sonuçları, $n \geq 2$ çift bir doğal sayı, γ tek pozitif tamsayıların bir oranı ve denklemdeki diğer fonksiyonlar üzerine konulan şartlar aynı kalmak üzere

$$\int_{t_0}^{\infty} a^{-1/\gamma}(t)dt = \infty$$

ya da

$$\int_{t_0}^{\infty} a^{-1/\gamma}(t)dt < \infty$$

şartları altında

$$\left(a(t) \left(z^{(n-1)}(t) \right)^{\gamma} \right)' + \int_a^b q(t, \mu) x^{\beta}(\phi(t, \mu)) d\mu = 0, \quad (4.0.1)$$

n -inci basamaktan dağıtılmış sapma argümentli neutral diferensiyel denklemi için değerlendirilerek daha genel salınım kriterleri verilebilir.

Not 4.0.2. Bu tez çalışmasındaki salınım sonuçları $p(t)$ neutral terimi üzerine $p(t) \geq \ell > 1$ şartı konularak elde edildi. $p(t) \leq \ell < -1$ şartı altında (3.0.1) ve (4.0.1) denklemleri için salınım sonuçları araştırmak yeni ve ilginç olacaktır. Bu durumu ilerideki çalışmalarımızda göz önüne almayı hedeflemekteyiz.



KAYNAKLAR

- Agarwal, R. P., Bohner, M., Li, T. ve Zhang, C., 2014. Oscillation of second-order differential equations with a sublinear neutral term, *Carpathian J. Math.* **30**, 1–6.
- Agarwal, R. P., Zhang, C. ve Li, T., 2016. Some remarks on oscillation of second order neutral differential equations, *Appl. Math. Comput.* **274**, 178–181.
- Bellman, R. ve Cooke, K. L., 1963. *Differential-Difference Equations*, Academic Press, New York.
- Bohner, M., Grace, S. R. ve Jadlovská, I., 2017. Oscillation criteria for second-order neutral delay differential equations, *Electron. J. Qual. Theory Diff. Equ.*, No. 60, 1–12.
- Bohner, M., Sudha, B., Tangavelu, K. ve Thandapani, E., 2019. Oscillation criteria for second-order differential equations with superlinear neutral term, *Nonlinear Stud.* **26**, 425–434.
- Bohner, M., Grace, S. R. ve Jadlovská, I., 2020. Sharp oscillation criteria for second-order neutral delay differential equations, *Math. Meth. Appl. Sci.* **43** 10041–10053.
- Brayton, R. K. ve Willoughby, R. A., 1967. On the numerical integration of a symmetric system of difference-differential equations of neutral type, *J. Math. Anal. Appl.* **18**, 182–189.
- Candan, T., 2011. Oscillation of second-order nonlinear neutral dynamic equations on time scales with distributed deviating arguments, *Comput. Math. Appl.* **62**, 4118–4125.
- Candan, T., 2015. Oscillatory behavior of second order nonlinear neutral differential equations with distributed deviating arguments, *Appl. Math. Appl. Comput.* **262**, 199–203.
- Chuanxi, Q. ve Ladas, G., 1990. Oscillation of first-order neutral equations with variable coefficients, *Mh. Math.* 109 , 103–111.
- Dong, J. G., 2010. Oscillation behavior of second order nonlinear neutral differential equations with deviating arguments, *Comput. Math. Appl.* **59**, 3710–3717.
- Driver, R. D., 1984. A Mixed Neutral System, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications* 8 , 155–158.
- Driver, R. D., 1985. Existence and Continuous Dependence of Solutions of a Neutral Functional-Differential Equation, *Arch. Rational Mech. Anal.* 19, 149–166.
- Erbe, L., Kong, Q. ve Zhang, B. G., 1995. *Oscillation Theory for Functional Differential Equations*. Marcel Dekker Inc., Newyork.
- Grace, S. R. ve Jadlovská, I., 2017. Oscillation criteria for second-order neutral damped differential equations with delay argument. *Dynamical Systems-Analytical and Computational Techniques*, Intech, Chapter 2, 31–53.
- Grace, S. R., Džurina, J., Jadlovská, I. ve Li, T., 2018. An improved approach for studying oscillation of second-order neutral delay differential equations, *J. Inequalities Appl.*, **23**, 1–13.

- Grace, S. R. ve Graef, J.R., 2018. Oscillatory behavior of second order nonlinear differential equations with a sublinear neutral term, *Math. Model. Anal.* **23**, 217–226.
- Grace, S. R., Graef, J. R., Li, T. ve Tunç, E., 2021. Oscillatory behavior of second-order nonlinear differential equations with mixed neutral terms, *Tatra Mt. Math. Publ.* **79**, 119–134.
- Grace, S. R., Graef, J. R., Li, T. ve Tunç, E., 2023. Oscillatory behavior of second-order nonlinear noncanonical neutral differential equations, *Acta Univ. Sapientiae ,Mathematica*, **15** , 2, 259–271.
- Grace, S. R., Akin, E. ve Dikmen, C. M., 2014. On the oscillation of second order nonlinear neutral dynamic equations with distributed deviating arguments on time-scales, *Dynam. Systems Appl.* **23**, 735–748.
- Grace, S. R., Graef, J. R. ve Tunç, E., 2017. Oscillatory behavior of second order damped neutral differential equations with distributed deviating arguments, *Miskolc Math. Notes* **18**. 759–769
- Grace, S. R., Graef, J. R. ve Tunç, E., 2022. Oscillation of second-order nonlinear noncanonical dynamic equations with deviating arguments, *Acta Math. Univ. Comenianae*, **91**, 113–120.
- Graef, J. R., Grace, S. R. ve Tunç, E., 2021. Oscillatory behavior of second-order neutral differential equations with damping and distributed deviating arguments, *Panam. Math. J.* **31**, 41–54.
- Gui, G. ve Xu, Z., 2007. Oscillation criteria for second-order neutral differential equations with distributed deviating arguments, *Electron. J. Differ. Equ.*, No.10, 1–11.
- Györi, I. ve Ladas, G., 1991. *Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications*, Clarendon Press, Oxford.
- Hale, J. K., 1977. *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York.
- Jadlovská, I., 2021. New criteria for sharp oscillation of second-order neutral delay differential equations, *Mathematics* **9**, 1–23.
- Karakostas, G. ve Staikos, V. A., 1984. μ -Like-Continuous Operators and Some Oscillation Results, University of Ioannina, TR 104, February 1984.
- Kolmanovskii, V. B. ve Nosov, V. R., 1986. *Stability of Functional Differential Equations*. Academic Press, Inc.
- Koplatadze, R., Kvinikadze, G. ve Stavroulakis, I. P., 1999. Properties A and B of n th order linear differential equations with deviating argument, *Georgian Math. J.* **6**, 553–566.
- Kubiacyk, I. ve Saker, S. H., 2002. Oscillation of solutions to neutral delay differential equations, *Mathematica Slovaca*, Vol.52, No.3, 343–359.
- Ladas, G., Sficas, Y. G. ve Stavroulakis, I. P., 1984. Necessary and sufficient conditions for oscillations of higher order delay differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **285**, 81–90.
- Ladde, G. S., Lakshmikantham, V. ve Zhang, B. G., 1987. *Oscillation Theory of Differential Equation with Deviating Arguments*. Marcel Dekker, INC. New York and Basel.

- Ladas, G. ve Sficas, Y. G., 1986. Oscillation of neutral delay differential equations, *Canad. Math. Bull.* **29**, 438–445.
- Li, T. ve Thandapani, E., 2011. Oscillation of second-order quasi-linear neutral functional dynamic equations with distributed deviating arguments, *J. Nonlinear Sci. Appl.* **4**, 180–192.
- Li, T., Rogovchenko, Y. V. ve Zhang, C., 2013. Oscillation of second-order neutral differential equations, *Funkcial. Ekvac.* **56**, 111–120.
- Li, T., Thandapani, E., Graef, J. R. ve Tung, E., 2013. Oscillation of second-order Emden-Fowler neutral differential equations, *Nonlinear Stud.* **20**, 1–8.
- Li, T. ve Rogovchenko, Y. V., 2015. Oscillation of second-order neutral differential equations, *Math. Nachr.* **288**, 1150–1162.
- Li, T. ve Rogovchenko, Y. V., 2017. Oscillation criteria for second-order superlinear Emden–Fowler neutral differential equations, *Monatsh. Math.* **184**, 489–500.
- Mawhin, J., 1996. The early reception om France pf the work of Poincaré and Lyapunov in the qualitative theory of differential equations. *Philosophia Scientiæ*, tome 1. no 4, 119–133.
- Pathi, S. ve Pati, S., 2014. *Theory of Thirth-Order Differential Equations*, Springer, New Delhi.
- Pati, S., Graef, J. R. ve Padhi, S., 2019. Positive periodic solutions to a system of nonlinear differential equations with applications to Lotka-Volterra-type ecological models with discrete and distributed delays. *J. Fixed Point Theory Appl.*
- Prabaharan, N., Dharuman, C. P., Graef, J. R. ve Thandapani, E., 2019. New oscillation criteria for second order quasi-linear differential equations with sub-linear neutral term, *Appl. Math. E-Notes* **19**, 563–574.
- Qi, Y. ve Yu, J., 2015. Oscillation of second order nonlinear mixed neutral differential equations with distributed deviating arguments, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* **38**, 543–560.
- Răsvan, V., 2006. Functional Differential Equations of Lossless Propagation and Almost Linear Behavior, *IFAC Proceedings Volumes Volume 39, Issue 10*, 138–150.
- Saker, S. H., Agarwal, R. P. ve O'Regan, D., 2007. Oscillation results for second-order nonlinear neutral delay dynamic equations on time scales, *Appl. Anal.* **86**, 1–17.
- Sethi, A. K. ve Tripathy, A. K., 2021. On oscillatory second-order differential equations with variable delays, *Palestine J. Math.* **10**, 487–501.
- Sharadha, P. ve Dharmaiah, V., 2023. The Oscillatory Criteria of First Order Neutral Delay Differential Equations with Variable Coefficients, *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*. Volume 19, Number 1, 125–134.
- Slemrod, M. ve Infante, E. F., 1972. Asymptotic Stability Criteria for Linear Systems of Difference-Differential Equations of Neutral Type and Their Discrete Analogues, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **38**, 399–415.

- Snow, W., 1965. Existence, Uniqueness, and Stability for Nonlinear Differential-Difference Equations in the Neutral Case, N.Y.U. Courant Inst. Math. Sci. Rep. IMM-NYU 328.
- Sturm, C., 1836. Sur les équations différentielles linéaires du second ordre, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, **1**, 106–186.
- Sui, Y. ve Han, Z., 2018. Oscillation of second order neutral dynamic equations with deviating arguments on time scales, Adv. Differ. Equ. **337**, 1–10.
- Tamilvanan, S., Thandapani, E. ve Džurina, J., 2017. Oscillation of second order nonlinear differential equation with sub-linear neutral term, Differ. Equ. Appl. **9**, 29–35.
- Thandapani, E. ve Piramanantham, V., 2010. Oscillation criteria of second order neutral delay dynamic equations with distributed deviating arguments, Electron. J. Qual. Theory. Differ. Equ. **2010**, No. 61, 1–15.
- Tripathy, A. K. ve Santra, S. S., 2021. Necessary and sufficient conditions for oscillation of second-order differential equations with nonpositive neutral coefficients, Math. Bohem. **146**, 185–197.
- Tunç, E. ve Graef, J. R., 2014. Oscillation results for second order neutral dynamic equations with distributed deviating arguments, Dynam. Systems Appl. **23**, 289–303.
- Tunç, E., Şahin, E., Graef, J. R. ve Pinelaas, S., 2021. New oscillation criteria for third-order differential equations with bounded and unbounded neutral coefficients, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, **46**, 1–13.
- Wang, P., 2004. Oscillation criteria for second-order neutral equations with distributed deviating arguments, Comput. Math. Appl. **47**, 1935–1946.
- Wang, Z., 1989. A necessary and sufficient condition for the oscillation of higher-order neutral equations, Tôhoku Math. J. **41**, 575–588.
- Xu, Z. ve Weng, P., 2007. Oscillation of second order neutral equations with distributed deviating argument, J. Comput. Appl. Math. **202**, 460–477.
- Xu, R. ve Meng, F., 2006. Oscillation criteria for second order quasi-linear neutral delay differential equations, Appl. Math. Comput. **182**, 797–803.
- Yang, Q. Xu, Z. ve Long, P., 2016. Oscillation of second order neutral dynamic equations with distributed delay, Electron. J. Qual. Theory. Differ. Equ., No: 42, 1–13.
- Yang, Q., Jia, B. ve Xu, Z., 2016. Nonlinear oscillation of second-order neutral dynamic equations with distributed delay, Math. Meth. Appl. Sci. **39**, 202–213.
- Zafer, A., 1992. Oscillatory and nonoscillatory properties of solutions of functional differential equations and difference equations. Ph. D. Thesis, Iowa State University, Ames, Iowa.
- Zahariev, A. I. Bainov, D. D., 1980. Oscillating properties of the solution of a class of neutral type functional differential equations, Bull. Austral. Math. Soc. **22**, 365–372.
- Zhang, B. G., 1989. Oscillation of first order neutral functional differential equations, J. Math. Anal. Appl. **139**, 311–318.

- Zhang, C., Baculíková, B., Džurina, J. ve Li, T., 2016. Oscillation results for second-order mixed neutral differential equations with distributed deviating arguments, *Math. Slovaca* 66, No. 3, 615–626.
- Zhao, J. ve Meng, F., 2008. Oscillation criteria for second-order neutral equations with distributed deviating argument, *Appl. Math. Comput.* **206**, 485–493.

