

R-Cebroidlerin 2-Çaprazlanmış Modülleri ve İlişkili Yapılar

Işinsu Yalğın

DOKTORA TEZİ

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Haziran 2024



2-Crossed Modules of R-Algebroids and Related Structures

İşinsu Yalğın

DOCTORAL DISSERTATION

Department of Mathematics-Computer

June 2024

R-Cebroidlerin 2-Çaprazlanmış Modülleri ve İlişkili Yapılar

İşinsu Yalğın

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği Uyarınca

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Topoloji Bilim Dalında

DOKTORA TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. İ. İlker Akça

Haziran 2024

ONAY

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı DOKTORA öğrencisi Işinsu Yalğın'nın DOKTORA tezi olarak hazırladığı “**R-Cebroidlerin 2-Çaprazlanmış Modülleri ve İlişkili Yapılar**” başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. İ. İlker Akça

İkinci Danışman : -

Doktora Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. İ. İlker Akça

Üye : Prof. Dr. Zekeriya Arvasi

Üye : Prof. Dr. Erdal Ulualan

Üye : Prof. Dr. Ummahan Ege Arslan

Üye : Doç. Dr. Koray Yılmaz

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Fatma TÖMSEK
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. İ. İlker Akça danışmanlığında hazırlamış olduğum “**R-Cebiroidlerin 2-Çaprazlanmış Modülleri ve İlişkili Yapılar**” başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 13/06/2024

Işinsu Yalğın

ÖZET

Çalışma dört ana bölüm içermektedir. Tezin ilk bölümünde tez içerisinde sıklıkla kullanılan kavramlar yer almaktadır. Grup, cebir, Lie cebiri gibi tek objeli olarak ele alınan kategoriksel yapılar üzerinde tanımlı 2-çaprazlanmış modül kavramı çok objeli bir kategoriksel yapı olan gruboidler üzerine genelleştirilmiştir. Tezin ikinci bölümünde, çok objeli bir cebir olarak ele alınabilen R-cebiroidler üzerinde 2-çaprazlanmış modül tanımlanmış ve simplisel R-cebiroidler ile ilişkisi incelenmiştir. Yani R-cebiroidlerin 2-çaprazlanmış modülleri kategorisi ile simplisel R-cebiroidler kategorisi arasında bir denklik inşa edilmiştir. Üçüncü bölümde ise R-cebiroidlerin çaprazlanmış karesi tanımlanmıştır. Ayrıca çaprazlanmış karelerin kategorisinden simplisel R-cebiroidlerin kategorisine bir fonktor ile tersine simplisel R-cebiroidlerin kategorisinden çaprazlanmış karelerin kategorisine fonktor tanımlanmıştır. Amaç bu fonktorları kullanarak kategoriler arasında denklik inşa etmektir. Son bölümde önceki bölümlerde tanımlanmış olan R-cebiroidlerin 2-çaprazlanmış modül kategorisi ile çaprazlanmış karelerin kategorisi arasında fonktorlar tanımlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: R-cebiroid, Simplisel Cebiroid, 2-Çaprazlanmış Modül, Kategorilerin Denkliği

SUMMARY

This study consists of four chapters. In the first chapter, concepts frequently used in the thesis are presented. The concept of a 2-crossed module defined on categorical structures considered as single objects, such as group, algebra, and Lie algebra, has been generalized to groupoids, which are a multi-object categorical structure. In the second chapter, a 2-crossed module defined on R-algebroids, which can be considered a multi-object algebra, has been investigated alongside its relationship with simplicial R-algebroids. That is, an equivalence has been established between the category of 2-crossed modules of R-algebroids and the category of simplicial R-algebroids. In the third chapter, the crossed square of R-algebroids has been defined. Additionally, a functor has been defined from the category of crossed squares to the category of simplicial R-algebroids, as well as a functor from the category of simplicial R-algebroids to the category of crossed squares. The aim is to establish an equivalence between categories using these functors. In the last chapter, functors have been defined between the category of 2-crossed modules of R-algebroids defined in the previous chapters and the category of crossed squares.

Key Words: R-algebroid, Simplicial R-algebroid, 2-Crossed Module, Categorical Equivalence

TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitim hayatında bir öğrenci için en önemli unsur danışmandır, saygı değer danışmanım **Prof. Dr. İ. İlker Akça** ile çalışmak benim için büyük bir şanstır. Kendisine, bana tüm bilgi birikimi ve tecrübesi ile yol gösterdiği, özveri ile çalışmalarına destek olduğu için çok teşekkür ederim. Hayatımın her anında tüm kalbiyle bana inanan sevgili eşim **Erkan Yalğın'a**, inancıyla tüm zorluklar ve engeller karşısında içimde umut ve çalışma azmi bulmamı sağladığı için çok teşekkür ederim.

Bu tez babama adanmıştır.

Eskişehir, 2024 Işinsu Yalğın

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	vi
SUMMARY	vii
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
1. GİRİŞ VE AMAÇ	1
2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI	4
3. TEMEL KAVRAMLAR	7
4. R-CEBİROİDLERİN 2-ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLÜ	15
4.1. R-Cebiroidler için 2-Çaprazlanmış Modül	15
4.1.1. R-Cebiroidler için 2-Çaprazlanmış Modül Morfizmi	16
4.1.2. Denkliğin İnşası	25
5. R-CEBİROİDLERİN ÇAPRAZLANMIŞ KARESİ	30
5.1. R-Cebiroidler için Çaprazlanmış Kare	31
5.1.1. R-Cebiroidler için Çaprazlanmış Kare Morfizmi	33
6. 2-ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER VE ÇAPRAZLANMIŞ KARELER ARASINDA Kİ İLİŞKİ	47
7. SONUÇ VE ÖNERİLER	59
KAYNAKLAR DİZİNİ	61

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Birden daha çok objesi olan bir kategoride çalışmanın, tek objesi olan bir kategoride çalışmaya göre daha avantajlı olduğu inkar edilemez bir gerçektir. Bunun çeşitli sebepleri bulunmaktadır. Örneğin, çok objeli durumunda elde edilen sonuçlar genellikle tek objeli durumuna aktarılabılırken, bunun tersi her zaman mümkün değildir. Bir diğer sebep ise çok objeli versiyonlarının genellikle daha kategoriksel olarak tercih edilen özelliklere sahip olmasıdır. Örneğin, R-cebiroidlerin kategorisi monoidal olarak kapalıdır, bu ise (Mosa, 1986) da kanıtlanmıştır, oysa ki birleşmeli R- cebirlerin kategorisi bu özelliğe sahip değildir. Bu nedenle, gruplar üzerindeki birçok kategoriksel yapı, gruplara değil de grupoidlere genelleştirilmiştir. Ancak, birleşmeli cebirlerin cebiroidlere genelleştirilmesi konusundaki çalışmalar halen yetersiz kalmaktadır. Özellikle, R-cebiroidlerin (ön) çaprazlanmış modüllerinin birçok kategoriksel özellikleri henüz detaylı bir şekilde incelenmemiştir. Ayrıca R-cebiroidler üzerinde 2-çaprazlanmış modül, çaprazlanmış kare gibi yapıların çalışılmadığı tespit edilmiştir. Bu bağlamda, cebirlerin 2-çaprazlanmış modüllerinin ve çaprazlanmış karelerinin R-cebiroidlerin 2-çaprazlanmış modüllerine ve çaprazlanmış karelerine genelleştirilmesi ve burada elde edilen denklikler büyük önem taşımaktadır. Çok objeli kategoriksel yapılar, çeşitli matematiksel ve teorik fiziksel uygulamalarda önemli avantajlar sunar. Özellikle, monoidal kapalı kategoriler gibi daha karmaşık ve yapılandırılmış kategoriler, teori geliştirme ve soyutlamada kritik rol oynar. Bu yapılar, matematiksel yapılar arasındaki ilişkileri daha iyi anlamamıza ve bu ilişkileri daha genelleştirilmiş ve kapsayıcı bir çerçevede ifade etmemize olanak tanır. Cebiroidler ve cebirler arasındaki bu farklılıkların anlaşılması, kategori teorisi ve ilgili alanlardaki gelişmeler için önemlidir. Cebiroidler kapalı olma gibi yapısal özellikleri, daha esnek ve güçlü matematiksel modeller geliştirmeye olanak tanır. Bu nedenle, cebiroidlere yönelik çalışmaların artması ve bu yapıların daha geniş bir çerçevede incelenmesi, matematiksel araştırmaların derinleşmesine katkı sağlayacaktır. Grupların çaprazlanmış modülü, matematiksel olarak önemli bir yapı olup, homotopi teorisinin bazı ileri düzey kavramlarını modellemek için kullanılır. Bir çaprazlanmış modül, bir grup homomorfizmi ve bir grubun diğeri üzerine etkisi ile tanımlanır.

Grupların çaprazlanmış modülleri ilk olarak John Henry Constantine Whitehead (1941; 1946) tarafından tanıtılmıştır ve homotopi 2-tipleri için cebirsel modeller olarak bilinir. Homotopi kategorisi bağlamında, grup çaprazlanmış modüllerinin model kategorisinin homotopi kategorisi, noktalı 2-tiplerin model kategorisinin homotopi kategorisine denktir. Noktalı 2-tipler, homotopi gruplarının $i(i > 3)$ durumunda sıfır olduğu

noktalı ve bağlantılı uzaylardır. Ayrıca, çaprazlanmış modüller basit homotopi teorisinde de doğal olarak ortaya çıkar ve çaprazlanmış modüller ile grupoidlerin çaprazlanmış modülleri, uzunluğu bir olan Moore kompleksine sahip simplisel gruplara denktir. Grup çaprazlanmış modüllerinin, Moore kompleks uzunluğu bir olan simplisel gruplarla denk olduğu gösterilmiştir (Conduche, 1984) ve bu durum benzer şekilde grupoid çaprazlanmış modülleri için de geçerlidir (Mutlu ve Porter, 1998). Whitehead, çaprazlanmış modül morfizmleri arasındaki homotopi bağıntısını "homotopi sistemleri" bağlamında tanıtmıştır, bu sistemler günümüzde serbest çaprazlanmış kompleksler olarak bilinir. Çaprazlanmış kompleksler üzerine monoidal kapalı yapı ve bir interval nesnesi kavramı kullanılarak homotopi araştırmaları yapılmıştır. Huebschmann (1980) da çaprazlanmış kompleksler için homotopi kavramını geliştirmiştir. Conduche (1984) çalışmasında grupların 2-çaprazlanmış modülü fikrini ele almış ve grupların 2-çaprazlanmış modüller kategorisinin, Moore kompleks uzunluğu iki olan simplisel gruplar kategorisine denk olduğunu göstermiştir. Mitchell'in (1972; 1985) çalışmaları ve sonrasında Amgott'un (1986) çalışmaları, R bir değişmeli halka olmak üzere R -cebiroid kavramını ele almıştır. Mitchell, R -cebiroidleri kategorik olarak tanımlamıştır. Bu temele dayanarak, Mosa, R -cebiroidlerin çaprazlanmış modüllerini, birleşmeli R -cebirlerin çaprazlanmış modüllerinin bir genellemesi olarak tanıtmıştır. Tezinde Mosa (1986), R -cebiroidlerin çaprazlanmış modüllerinin bağlantılı double R -cebiroide denk olduğunu göstermiştir. Ayrıca, (Gürmen ve Ulualan, 2020) çalışmasında, Moore kompleks uzunluğu bir olan simplisel R -cebiroidler kategorisi ile R -cebiroidlerin kategorisindeki internal kategoriler arasında yakın bir ilişki olduğu belirtilmiştir.

Homotopi 3-tiplerinin diğer önemli bir cebirsel modeli, çaprazlanmış karelerdir ve cat 2-gruplar ile eşdeğerdir. Bu yapı, homotopi 3-tipleri için bir model olarak kullanılabilir. Çaprazlanmış kareler, noktalanmış uzayların kategorisinden çaprazlanmış karelerin kategorisine temel bir çaprazlanmış kare fonksiyonu oluşturur. Sonuç olarak, hem 2-çaprazlanmış modüller hem de çaprazlanmış kareler, homotopi teorisinin önemli yapı taşlarıdır. Homotopi tiplerini modellemek ve incelemek için güçlü araçlar sunarlar. Guin-Walery ve Loday (1981) çalışmasında, homotopi 3-tipi bağlantılı uzaylar için bir cebirsel model olarak çaprazlanmış kareleri tanımlamışlardır. Bu nedenle, çaprazlanmış kareler, boyutları üçten büyük olan homotopi tiplerini modellemektedir. Daha sonra Ellis (1988) çalışmasında, çaprazlanmış karelerin değişmeli cebir versiyonunu tanımlamıştır. 2-çaprazlanmış modüller ve kuadratik modüller de homotopi 3-tipleri için modellerdir. Kuadratik modüller Baues (1991) tarafından ve 2-çaprazlanmış modüller Conduche tarafından tanımlanmıştır. Kuadratik modüllerin ve 2-çaprazlanmış modüllerin değişmeli cebir versiyonları sırasıyla (Arvasi ve Ulualan, 2007) ve (Grandjean ve Vale, 1986) çalışmalarında ele alınmıştır. Ayrıca Conduche (1984) çalışmasında, bir çaprazlanmış kareden 2-çaprazlanmış modül elde edildiğini göstermiştir. Çaprazlanmış kareler ve

2-Çaprazlanmış modüller arasındaki bu ilişki, homotopi teorisinin daha karmaşık yapılarını anlamak için önemli bir köprü olmaktadır. Çaprazlanmış karelerin ve 2-çaprazlanmış modüllerin homotopi 3-tiplerini modellemedeki rolleri, cebirsel topolojinin bu alandaki araştırmalarının temelini oluşturmaktadır. Ellis'in değişmeli cebir versiyonu, çaprazlanmış karelerin homotopi teorisindeki uygulamalarını genişletmiş ve bu yapıların daha geniş bir alanda kullanılabilmesini sağlamıştır. Conduche'nin çalışmaları, çaprazlanmış karelerin ve 2-çaprazlanmış modüllerin bağlantısını açıklığa kavuşturmakta ve bu yapıların homotopi tiplerinin daha derinlemesine incelenmesine olanak tanımaktadır. Sonuç olarak, çaprazlanmış kareler, 2-çaprazlanmış modüller ve simplisel yapılar, homotopi teorisindeki karmaşık yapıların modellenmesinde ve incelenmesinde önemli araçlardır. Bu yapıların değişmeli cebir versiyonları, homotopi teorisinin daha geniş uygulama alanlarında kullanılabilmesini mümkün kılmaktadır ve bu da, bu alandaki araştırmaların derinliğini ve kapsamını arttırmaktadır. Bu çalışmada, birleşmeli cebirlerin 2-çaprazlanmış modülünün bir genellemesi olarak R- cebiroidlerin 2-çaprazlanmış modülü tanımlanacaktır. Ardından, R-cebroidlerin 2-çaprazlanmış modülleri kategorisi ile Moore kompleksinin uzunluğu iki olan simplisel R-cebroidler kategorisi arasında bir kategori denkliği inşaa edilecektir. Bu genelleme ve sonuçta ortaya çıkan denkliğe benzer şekilde farklı kategorik yapılar arasındaki ilişkiler de incelenebilecektir.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

John Henry Constantine Whitehead (1941; 1946) çalışmalarında grupların çaprazlanmış modüllerini ilk kez tanıtmıştır. Grupların çaprazlanmış modüllerinin, Moore kompleks uzunluğu bir olan simplisel gruplarla denk olduğu gösterilmiştir (Conduche, 1984) ve benzer şekildeki denklik grupoid çaprazlanmış modülleri için de geçerlidir (Mutlu ve Porter, 1998). Conduche (1984), grupların 2-çaprazlanmış modülü fikrini ele almış ve çalışmasında grupların 2-çaprazlanmış modüller kategorisinin, Moore kompleks uzunluğu iki olan simplisel gruplar kategorisine denk olduğunu göstermiştir. Arvasi ve Ulualan (2006) çalışmasında Moore kompleks uzunluğu iki olan simplisel gruplar, çaprazlanmış kareler, kuadratik modüller ve 2-çaprazlanmış modüller arasındaki ilişkileri araştırmışlardır. Bu çalışmalar, bu cebirsel yapılar arasındaki yapısal bağlantıların daha derin bir şekilde anlaşılmasına katkıda bulunmuştur. Cebirlerin çaprazlanmış modüllerinin ve 2-çaprazlanmış modüllerinin tanımları (Arvasi ve Porter, 1996; Porter, 1986), çalışmalarında görüldüğü gibi gruplardakine benzer şekilde verilmiştir. Temel farklılık grup etkisi otomorfizm ile belirlenirken cebir etkisi çarpanlar ile tanımlanır. Cebir 2-çaprazlanmış modülleri ve simplisel cebirler arasındaki ilişki, gruplardaki ile benzer şekildedir (Conduche, 1984; Mutlu ve Porter, 1998 a; Mutlu ve Porter, 1998 b). Özellikle, bir simplisel cebir, Moore kompleks uzunluğu 2 ise, ondan bir 2-çaprazlanmış modül türetilir. Moore kompleks uzunluğu 2 olan simplisel cebirler kategorisi ile cebir çaprazlanmış modülleri kategorisi arasındaki ilişki (Porter, 1986; Arvasi, 1997; Grandjean ve Vale, 1986) çalışmalarında incelenmiş ve bu kategoriler arasında denklik kurulmuştur.

Birden daha çok objesi olan bir kategoride çalışmanın, tek objesi olan bir kategoride çalışmaya göre daha avantajlı olduğu inkar edilemez bir gerçektir. Bunun çeşitli sebepleri bulunmaktadır. Örneğin, çok objeli durumunda elde edilen sonuçlar genellikle tek objeli durumuna aktarılabilirken, bunun tersi her zaman mümkün değildir. Bir diğer sebep ise çok objeli versiyonlarının genellikle daha kategoriksel olarak tercih edilen özelliklere sahip olmasıdır. Örneğin, R-cebiroidlerin kategorisi monoidal olarak kapalıdır, bu ise (Mosa, 1986) da kanıtlanmıştır, oysa ki birleşmeli R-cebirlerin kategorisi bu özelliğe sahip değildir. Bu nedenle, gruplar üzerindeki birçok kategoriksel yapı, gruplara değil de grupoidlere genelleştirilmiştir. Ancak, birleşmeli cebirlerin R-cebiroidlere genelleştirilmesi konusundaki çalışmalar halen yetersiz kalmaktadır. Özellikle, R-cebiroidlerin (ön) çaprazlanmış modüllerinin birçok kategoriksel özellikleri henüz detaylı bir şekilde incelenmemiştir. Ayrıca R-cebiroidler üzerinde 2-çaprazlanmış modül, çaprazlanmış kare gibi yapıların çalışılmadığı tespit edilmiştir. Bu bağlamda, cebirlerin 2-çaprazlanmış

modüllerinin ve çaprazlanmış karelerinin R-cebroidlerin 2-çaprazlanmış modüllerine ve çaprazlanmış karelerine genelleştirilmesi ve burada elde edilen denklikler büyük önem taşımaktadır. Çok objeli kategoriksel yapılar, çeşitli matematiksel ve teorik fiziksel uygulamalarda önemli avantajlar sunar. Özellikle, monoidal kapalı kategoriler gibi daha karmaşık ve yapılandırılmış kategoriler, teori geliştirme ve soyutlamada kritik rol oynar. Bu yapılar, matematiksel yapılar arasındaki ilişkileri daha iyi anlamamıza ve bu ilişkileri daha genelleştirilmiş ve kapsayıcı bir çerçevede ifade etmemize olanak tanır.

Grupların daha genel halinin grupoid olması gibi R-cebroidler de cebirlerin genelleştirilmiş halidir. Bir R-cebroid birden daha fazla objesi olan bir R-cebir gibi ele alınabilir. Kategoriksel anlamda R-cebroid kavramını ilk kez Mitchell (1972, 1985) tanımlamış ve ilginç sonuçlar elde edilmiştir. Tezinde Mosa (1986), çaprazlanmış modül kavramını R-cebroidler üzerinde tanımlamış, birkaç özelliğini incelemiş ve R-cebroidler üzerindeki çaprazlanmış modüller ile double R-cebroidler arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Ayrıca, (Gürmen ve Ulualan, 2020) çalışmasında, Moore kompleks uzunluğu bir olan simplisel R-cebroidler kategorisi ile R-cebroidlerin kategorisindeki içsel kategoriler arasında yakın bir ilişki olduğu belirtilmiştir.

Homotopi 3-tiplerinin diğer önemli bir cebirsel modeli, çaprazlanmış karelerdir ve cat 2-gruplar ile eşdeğerdir. Bu yapı, homotopi 3-tipleri için bir model olarak kullanılabilir. Çaprazlanmış kareler, noktalanmış uzayların kategorisinden çaprazlanmış karelerin kategorisine temel bir çaprazlanmış kare fonksiyonu oluşturur. Sonuç olarak, hem 2-çaprazlanmış modüller hem de çaprazlanmış kareler, homotopi teorisinin önemli yapı taşlarıdır. Homotopi tiplerini modellemek ve incelemek için güçlü araçlar sunarlar. Guin-Walery ve Loday (1981) çalışmasında, homotopi 3-tipi bağlantılı uzaylar için bir cebirsel model olarak çaprazlanmış kareleri tanımlamışlardır. Bu nedenle, çaprazlanmış kareler, boyutları 3'ten büyük olan homotopi tiplerini modellemektedir. Daha sonra Ellis (1988) çalışmasında çaprazlanmış karelerin değişmeli cebir versiyonunu tanımlamıştır. 2-çaprazlanmış modüller ve kuadratik modüller de homotopi 3-tipleri için modellerdir. Kuadratik modüller Baues (1991) tarafından, 2-çaprazlanmış modüller Conduche tarafından tanımlanmıştır. Kuadratik modüllerin ve 2-çaprazlanmış modüllerin değişmeli cebir versiyonları sırasıyla (Arvasi ve Ulualan, 2007) ve (Grandjean ve Vale, 1986) çalışmalarında ele alınmıştır. Ayrıca Conduche (1984) çalışmasında, bir çaprazlanmış kareden 2-çaprazlanmış modül elde edildiğini göstermiştir. Çaprazlanmış kareler ve 2-çaprazlanmış modüller arasındaki bu ilişki, homotopi teorisinin daha karmaşık yapılarını anlamak için önemli bir köprü oluşturmaktadır. Çaprazlanmış karelerin ve 2-çaprazlanmış modüllerin homotopi 3-tiplerini modellemedeki rolleri, cebirsel topolojinin bu alandaki araştırmalarının temelini oluşturmaktadır. Ellis'in değişmeli cebir versiyonu, çaprazlanmış karelerin homotopi teorisindeki uygulamalarını genişletmiş ve bu yapıların daha geniş bir

alanda kullanılabilmesini sağlamıştır. Conduche'nin çalışmaları, çaprazlanmış karelerin ve 2-çaprazlanmış modüllerin bağlantısını açıklığa kavuşturmakta ve bu yapıların homotopi tiplerinin daha derinlemesine incelenmesine olanak tanımaktadır. Sonuç olarak, çaprazlanmış kareler, 2-çaprazlanmış modüller ve simplisel yapılar, homotopi teorisindeki karmaşık yapıların modellenmesinde ve incelenmesinde önemli araçlardır. Bu yapıların değişmeli cebir versiyonları, homotopi teorisinin daha geniş uygulama alanlarında kullanılabilmesini mümkün kılmaktadır, bu da, bu alandaki araştırmaların derinliğini ve kapsamını arttırmaktadır.

Bu çalışmada, birleşmeli cebirlerin 2-çaprazlanmış modülünün bir genellemesi olarak R- cebroidlerin 2-çaprazlanmış modülü tanımlanacaktır. Ardından, R-cebroidlerin 2-çaprazlanmış modülleri kategorisi ile Moore kompleks uzunluğu iki olan simplisel R-cebroidler kategorisi arasında bir kategori denkliği elde edilecektir. Ayrıca R-cebroidlerin çaprazlanmış karesi de tanımlanarak 2-çaprazlanmış modüller ve simplisel R-cebroidler ile ilişkileri incelenecektir. Bu genelleme ve sonuçta ortaya çıkan denklikler, R-cebroidler bağlamında kategoriksel yapılar ve bunların ilişkileri hakkında daha derin bir anlayışa katkıda bulunacaktır.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Cebroidler ve cebirler arasındaki farklılıkların anlaşılması, kategori teorisi ve ilgili alanlardaki gelişmeler için önemlidir. Cebroidlerin kapalı olma gibi yapısal özellikleri, daha esnek ve güçlü matematiksel modeller geliştirmeye olanak tanır. Bu nedenle, cebroidlere yönelik çalışmaların artması ve bu yapıların daha geniş bir çerçevede incelenmesi, matematiksel araştırmaların derinleşmesine katkı sağlayacaktır.

Mitchell'in (1972; 1985) çalışmaları ve sonrasında Amgott'un (1986) çalışmaları, R bir değişmeli halka olmak üzere R-cebroid kavramını ele almıştır. Mitchell, R-cebroidleri kategorik olarak tanımlamıştır. Bu temele dayanarak, Mosa, R-cebroidlerin çaprazlanmış modüllerini, birleşmeli R-cebirlerin çaprazlanmış modüllerinin bir genellemesi olarak tanıtmıştır. Tezinde Mosa (1986), R-cebroidlerin çaprazlanmış modüllerinin bağlantılı double R-cebroidde denk olduğunu göstermiştir. Ayrıca, (Gürmen ve Ulualan, 2020) çalışmasında, Moore kompleks uzunluğu bir olan simplisel R-cebroidler kategorisi ile R-cebroidlerin kategorisindeki internal kategoriler arasında yakın bir ilişki olduğu belirtilmiştir.

Bu kısımda, tezde kullanılacak olan temel kavramlara yer verilmiştir. Bunun için yukarıdaki kaynaklardan yararlanılmıştır.

Kategori: Bir kategori obje sınıfı ile morfizmlerin kümesinden oluşan bir sistem olarak ifade edilir. Daha ayrıntılı olarak; \mathcal{U} kategorisi, obje sınıfı olarak isimlendirilen ve $Ob(\mathcal{U}) = U_0$ ile gösterilen bir sınıftan, U_0 sınıfına ait her a, b için a dan b ye morfizmler kümesi denen $\mathcal{U}(a, b)$ kümelerinden ve $Ob(\mathcal{U})$ ya ait her a, b, c için kompozisyon adı verilen

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(a, b) \times \mathcal{U}(b, c) &\rightarrow \mathcal{U}(a, c) \\ (u, u') &\mapsto uu' \end{aligned} \quad (3.1)$$

şeklindeki bir fonksiyondan oluşur ve aşağıdaki aksiyomlar sağlanır.

i) Her $u \in \mathcal{U}(a, b)$, $u' \in \mathcal{U}(b, c)$ ve $u'' \in \mathcal{U}(c, d)$ için $u(u'u'') = (uu')u''$ dır.

ii) U_0 a ait her a için $\mathcal{U}(a, a)$ ya ait bir 1_a elemanı her $u \in \mathcal{U}(c, a)$ ve $u' \in \mathcal{U}(a, b)$ için $u1_a = u$ ve $1_a u' = u'$ olacak şekilde vardır.

Burada a, b objeleri için $\mathcal{U}(a, b)$ kümesine \mathcal{U} nun bir homseti (morfizm kümesi) denir. \mathcal{U} daki tüm morfizm kümelerinin (homsetlerin) birleşimi \mathcal{U} nun morfizmlerinin kümesini

oluşturur ve $Mor(\mathcal{U})$ olarak gösterilir. Bir \mathcal{U} kategorisi $\mathcal{U} = (U = Mor(\mathcal{U}), U_0 = Ob(\mathcal{U}))$ ile gösterilir. $u \in \mathcal{U}(a, b)$ için a ya u nun kaynağı denir ve $s(u) = a$ şeklinde gösterilir, b ye ise u nun hedefi denir ve $t(u) = b$ olarak gösterilir ve böylece

$$s, t = Mor(\mathcal{U}) \rightarrow Ob(\mathcal{U})$$

olarak iki morfizm bulunur. $Mor(\mathcal{U})$ ya ait u ve u' morfizmlerinin uu' kompozisyonunun oluşturulabilmesi için $t(u) = s(u')$ eşitliğinin sağlanması gerekir. Bu şarta morfizmlerin hedef kaynak uyumluluk şartı denir.

NOT: Tezin sonraki kısımlarında kompozisyonda ve etkiye gerekli yerlerde hedef kaynak uyumluluk şartının sağlandığı ifade edilerek incelemeler yapılacaktır.

Küçük Kategori: Bir $\mathcal{U} = (Mor(\mathcal{U}), Ob(\mathcal{U}))$ kategorisinde $Ob(\mathcal{U})$ bir küme oluyorsa yani obje sınıfı bir küme ise \mathcal{U} kategorisine küçük kategori denir.

Funktor: \mathcal{U} ve \mathcal{V} iki kategori olsun. Bir $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$, \mathcal{U} daki her a objesini \mathcal{V} deki bir $F(a)$ objesine taşıyan ve \mathcal{U} daki her $u : a \rightarrow b$ morfizmini de \mathcal{V} deki $F(u) : F(a) \rightarrow F(b)$ morfizmine taşıyan dönüşümü için

$$i) \text{ Her } a \in Ob(\mathcal{U}) \text{ için } F(1_a) = 1_{F(a)}$$

ii) Hedef kaynak uyumluluk şartını sağlayan her u, u' morfizmi için $F(uu') = F(u)F(u')$ şartları sağlanıyorsa F ye \mathcal{U} dan \mathcal{V} ye bir funktor denir.

R-Kategori: R birimli değişmeli halka olmak üzere, kompozisyonu R -bilineer olan ve her morfizm kümesi R -modül olan kategoriye R -kategori denir. Yani \mathcal{U} nun her a, b objesi için $\mathcal{U}(a, b)$ bir R -modüldür; R nin $\mathcal{U}(a, b)$ üzerine

$$\begin{aligned} i) \quad r.(u_1 + u_2) &= r.u_1 + r.u_2 \\ ii) \quad (r_1 + r_2).u &= r_1.u + r_2.u \\ iii) \quad (r_1 r_2).u &= (r_1).(r_2.u) \\ iv) \quad (1_R).u &= u \end{aligned} \tag{3.2}$$

şartlarını sağlayan bir etkisi vardır. Burada her $u \in \mathcal{U}(a, b)$ için $u + 0_{ab} = 0_{ab} + u = u$ olacak şekilde bir $0_{ab} \in \mathcal{U}(a, b)$ mevcuttur. Ayrıca \mathcal{U} dan hedef kaynak uyumluluk şartını sağlayacak şekilde alınan morfizmler ve $r \in R$ için \mathcal{U} nun kompozisyonu

$$\begin{aligned} i) \quad (u_1 + u_2)u' &= u_1u' + u_2u' \\ ii) \quad u(u'_1 + u'_2) &= uu'_1 + uu'_2 \\ iii) \quad r.(uu') &= (r.u)u' = u(r.u') \end{aligned} \tag{3.3}$$

şartlarını sağlar.

İki R-kategori arasındaki bir R-bilineer fonktor, R-funktordur. Öyleyse \mathcal{U} ve \mathcal{V} iki R-kategori ve $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ R-functor olmak üzere hedef kaynak uyumluluğunun sağlanması durumunda

$$\begin{aligned} F(u_1 + u_2) &= F(u_1) + F(u_2) \\ F(r.u) &= r.F(u) \\ F(uu') &= F(u)F(u') \end{aligned}$$

dir. Böylece tüm R-kategoriler R-funktorlar ile birlikte bir kategori oluşturur ve **Cat(R)** şeklinde gösterilir.

NOT: Her $a, b, c \in U_0$, her $u \in \mathcal{U}(a, b)$ ve her $u' \in \mathcal{U}(b, c)$ için

$$u0_{bc} = 0_{ab}u' = 0_{ac}$$

dir. Tezin bundan sonraki kısımlarında kategorideki sıfır morfizmleri hedef kaynak uyumluluk şartını sağlayacak şekilde **0** ile gösterilecektir.

R-Cebiroid: \mathcal{U} bir kategori olsun. Eğer \mathcal{U} kategorisi küçük bir R- kategori ise \mathcal{U} ya R-cebiroid denir. R- cebiroidlerin birimi olmayabilir. Bir R-cebiroid tek objeye sahip ise buna R-cebir denir.

R-Cebiroid Etkisi: (Mosa, 1986) \mathcal{U} ve \mathcal{V} aynı obje kümesine sahip iki R-cebiroid yani $U_0 = V_0$ olmak üzere, her $a, b, c \in U_0$, $u, u', u_1, u_2 \in U$, $v, v', v_1, v_2 \in V$, $r \in R$ için morfizmlerin hedef kaynak uyumluluk şartını sağlaması durumunda

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(a, b) \times \mathcal{U}(b, c) &\rightarrow \mathcal{V}(a, c) \\ (v, u) &\mapsto v^u \end{aligned} \tag{3.4}$$

dönüşümlerinin ailesi için

$$\begin{aligned} 1) \quad v^{u_1+u_2} &= v^{u_1} + v^{u_2} \\ 2) \quad (v_1 + v_2)^u &= v_1^u + v_2^u \\ 3) \quad (v^u)^{u'} &= v^{uu'} \\ 4) \quad (v'v)^u &= v'v^u \\ 5) \quad r \cdot v^u &= (r \cdot v)^u = v^{r \cdot u} \\ 6) \quad v^{1 \cdot v} &= v \end{aligned} \tag{3.5}$$

şartları sağlanıyorsa, \mathcal{V} üzerine \mathcal{U} nun sağ etkisi olarak adlandırılır. \mathcal{V} üzerine \mathcal{U} nun sol etkisi de benzer şekilde tanımlıdır. Eğer \mathcal{U} nun \mathcal{V} üzerine her iki etkisinin de mevcut olması halinde u, v, u' hedef kaynak uyumluluk şartının sağlanması durumunda

$$({}^u v)^{u'} = {}^u (v^{u'})$$

şartı da sağlanıyorsa \mathcal{U} nun \mathcal{V} üzerine asosyatif etkisi vardır denir.

NOT: Tezin bundan sonraki kısmında bir R-cebiroidin kendi üzerine etkisi kendi kompozisyonu olarak alınacaktır.

R-Cebiroid Morfizmi: Bir R-cebiroid morfizmi, R-cebiroidler arasındaki R-funktor olarak tanımlanır. Öyleyse \mathcal{U} ve \mathcal{V} iki R-cebiroid ve $T : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ R-cebiroid morfizmi için

$$\begin{aligned} 1) \quad & T(u_1 u_2) = T(u_1) T(u_2) \\ 2) \quad & T(r.u) = r.T(u) \end{aligned} \quad (3.6)$$

dır.

Bu morfizm ile tüm R-cebiroidlerin kategorisi **Alg(R)** oluşturulur.

\mathcal{U} dan \mathcal{V} ye tanımlı tüm R-cebiroid morfizmlerinin kümesi $Hom_R(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ ile gösterilir.

R-Cebiroid Morfizminin Çekirdeği: $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ bir R-cebiroid morfizmi olsun. Bu R-cebiroid f morfizminin çekirdeği

$$ker f = \{u \in \mathcal{U} : f(u) = 0_{s(f(u))t(f(u))}\}$$

şeklinde tanımlanır.

Altcebiroid: (Mosa, 1986) \mathcal{U} ve \mathcal{V} birer R-cebiroid olsun. Eğer, \mathcal{U} nun her objesi \mathcal{V} nin de bir objesi, her $a, b \in U_0$ için $\mathcal{U}(a, b)$, $\mathcal{V}(a, b)$ nin bir R-altmodülü, \mathcal{U} daki morfizmlerin kompozisyonu \mathcal{V} dekilerle aynı ve \mathcal{V} birimli iken \mathcal{U} da birimli olup, \mathcal{U} nun her a objesi için \mathcal{U} R-cebiroidindeki a dan a ya giden morfizmlerin kümesindeki birim, \mathcal{V} R-cebiroidindeki a dan a ya giden morfizmler kümesinin birimi oluyorsa \mathcal{U} ya \mathcal{V} nin altcebiroidi denir.

R-Cebiroidlerin İki Yönlü İdeali: (Mosa, 1986) \mathcal{U} bir R-cebiroid ve $I = \{I(a, b) \subseteq \mathcal{U}(a, b) : a, b \in U_0\}$, \mathcal{U} nun bir R-altmodüller ailesi olsun. Eğer \mathcal{U} R-cebiroidinde a objesinden b objesine giden u' morfizmi, c objesinden d objesine giden u'' morfizmi ve I ya ait b objesinden c objesine giden u morfizmi için $u'u$ kompozisyonu I da a objesinden c objesine bir morfizm oluyorsa I ya \mathcal{U} nun sağ ideali, uu'' kompozisyonu ise I da b objesinden d objesine bir morfizm oluyorsa I ya \mathcal{U} nun sol ideali denir. I , \mathcal{U} nun hem sağ hem sol ideali ise I ya \mathcal{U} nun iki yönlü ideali denir. I , \mathcal{U} nun iki yönlü ideali ise I da bir R-cebiroiddir, \mathcal{U} birimsiz ise I , \mathcal{U} nun bir R-altcebiroididir, U birimli ve I , \mathcal{U} nun tüm birimlerini içeriyorsa $I = \mathcal{U}$ dur.

Bölüm R-Cebiroidleri: (Mosa, 1986) \mathcal{U} bir R-cebiroid ve I , \mathcal{U} nun iki yönlü ideali olsun. Her $a, b \in U_0$ için $\mathcal{U}(a, b)/I(a, b)$ bölüm R-modülleri arasında her $a, b, c \in U_0$ için

$$\begin{aligned} (\mathcal{U}(a, b)/I(a, b)) \times (\mathcal{U}(b, c)/I(b, c)) &\rightarrow \mathcal{U}(a, c)/I(a, c) \\ ((u + I(a, b)), (u' + I(b, c))) &\mapsto (u + I(a, b))(u' + I(b, c)) = uu' + I(a, c) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan kompozisyon asosyatif ve R-bilineerdir. Böylece bu kompozisyon ile

$$\mathcal{U}/I = \{\mathcal{U}(a, b)/I(a, b) | a, b \in U_0\}$$

ailesi bir R-cebiroid olur ve bu R-cebiroide bölüm cebrioidi denir.

NOT: Tezin bundan sonraki kısımlarında bir $\mathcal{U} = (U, U_0)$ cebrioidinden bahsederken sadece U alınacak ve U cebrioidi şeklinde ifade edilecektir.

R-Cebrioidlerin Çaprazlanmış Modülü: (Mosa, 1986) U ve V aynı U_0 obje kümesine sahip R-cebrioidler ve U nun V üzerine asosyatif etkisi var olsun. U_0 kümesi üzerinde birim olan bir $\kappa : V \rightarrow U$ cebrioid morfizmi, hedef kaynak uyumluluk şartının sağlanması durumunda

$$\begin{aligned} CM1) \quad \kappa(uv) &= u\kappa(v) \\ \kappa(vu') &= \kappa(v)u' \end{aligned} \tag{3.7}$$

şartlarını sağlıyorsa $\kappa : V \rightarrow U$ ya bir R-cebrioid ön çaprazlanmış modülü denir. Ek olarak

$$CM2) \quad v^{\kappa(v')} = vv' = \kappa(v)v' \tag{3.8}$$

şartı da sağlanıyorsa $\kappa : V \rightarrow U$ ya bir R-cebrioid çaprazlanmış modülü denir.

R-Cebrioidler için Çaprazlanmış Modül Morfizmi: $C = (\kappa : V \rightarrow U)$ ve $C' = (\kappa' : Z \rightarrow Y)$ iki R-cebrioid (ön-)çaprazlanmış modül olsun. $f_1 : U \rightarrow Y$ ile $f_2 : V \rightarrow Z$ R-cebrioid morfizmleri için;

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\kappa} & U \\ f_2 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ Z & \xrightarrow{\kappa'} & Y \end{array}$$

diyagramı değişmeli ve bu morfizmler altında mevcut tüm etkiler korunuyorsa, yani hedef kaynak uyumluluk şartının sağlanması durumunda

$$\begin{aligned} 1) \quad f_2(uv) &= f_1(u)(f_2(v)) \\ f_2(vu') &= (f_2(v))f_1(u) \\ 2) \quad \kappa'f_2(v) &= f_1\kappa(v) \end{aligned}$$

şartları sağlanıyorsa $f = (f_2, f_1) : C \rightarrow C'$ morfizmine (ön-)çaprazlanmış modül morfizmi denir.

Böylece tüm R-cebiroid ön-çaprazlanmış modülleri ve yukarıda ifade edilen ön-çaprazlanmış modül morfizmleri bir kategori oluşturur ve $PXAlg(R)$ ile gösterilir. Ayrıca tüm R-cebiroid çaprazlanmış modülleri ve çaprazlanmış modül morfizmleri bir kategori oluşturur ve $XAlg(R)$ ile gösterilir. $XAlg(R)$ kategorisi $PXAlg(R)$ nin bir dolu alt kategorisidir.

Teorem 1. (Mosa, 1986) $C = (\kappa : V \rightarrow U)$ bir R-cebiroid çaprazlanmış modülü ise $GörC = \{\kappa(v) : v \in V\}$, U nun bir çift yönlü idealidir.

Ayrıca $kerC$ de V nin bir iki yönlü idealidir.

Uyumlu etki: U, V, Z aynı obje kümesi U_0 a sahip olan birer R-cebiroid ve $C = (\kappa : Z \rightarrow V)$ ile $C' = (\kappa' : V \rightarrow U)$ birer çaprazlanmış modül olsun. Eğer U nun Z üzerine

$$\begin{aligned}\kappa({}^u z) &= {}^u \kappa(z), \quad \kappa(z^{u'}) = \kappa(z)^u \\ z^{v'} &= z^{\kappa'(v')}, \quad v_z = \kappa'(v)z\end{aligned}$$

eşitliklerini sağlayan bir asosyatif etkisi varsa, bu etkiye U nun Z üzerine V ile uyumlu etkisi denir.

R-Cebiroidler için Yarı-Direkt Çarpım: R bir değişmeli halka V ve Y aynı U_0 obje kümesine sahip iki R-cebiroid ve Y nin V üzerine sağ ve sol etkileri var olsun. Burada $v \in V$, $y \in Y$ olmak üzere $s(v, y) = s(v) = s(y)$ ve $t(v, y) = t(v) = t(y)$ olarak tanımlanan (v, y) ikililerinin kümesi $V \rtimes Y$ ile gösterilsin. $s(v, y) = s(v', y')$, $t(v, y) = t(v', y')$, $t(v, u) = s(v'', y'')$ olacak şekildeki $V \rtimes Y$ nin elemanları ve $r \in R$ için

$$\begin{aligned}1) \quad (v, y) + (v', y') &= (v + v', y + y') \\ 2) \quad R \times (V \rtimes Y) &\rightarrow V \rtimes Y \\ &(r, (v, y)) \quad r(v, y) = ({}^r v, {}^r y) \\ 3) \quad ((v, y)(v'', y'')) &= (v v'' + v y'' + {}^y v'', y y'')\end{aligned} \tag{3.9}$$

şartları ile birlikte $V \rtimes Y$ kümesi U_0 obje kümesi üzerinde bir R-cebiroid olur. Bu R-cebiroide V ve Y nin yarı-direkt çarpım R-cebiroidi denir.

Simplisel R-Cebiroid: $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$, obje kümeleri aynı olan R-cebiroidler ailesi ve obje kümesi üzerinde birim olan $(0 \leq i, j \leq n \neq 0)$ olmak üzere $d_i : E_n \rightarrow E_{n-1}$ ile $s_j : E_n \rightarrow E_{n+1}$ dönüşümleri, simplisel özdeşlikler olarak bilinen aşağıdaki özellikleri sağlayacak şekildeki R-cebiroid morfizmleri olsun.

$$\begin{aligned}
1) \quad & d_i^{n-1} d_j^n = d_{j-1}^{n-1} d_j^n \quad , \quad 0 \leq i < j \leq n \\
2) \quad & s_i^{n+1} s_j^n = s_{j+1}^{n+1} s_i^n \quad , \quad 0 \leq i \leq j \leq n \\
3) \quad & d_i^{n+1} s_j^n = s_{j-1}^{n-1} d_i^n \quad , \quad 0 \leq i < j \leq n \\
4) \quad & d_i^{n+1} s_j^n = Id \quad , \quad i = j \text{ ya da } i = j + 1 \\
5) \quad & d_i^{n+1} s_j^n = s_j^{n-1} d_{i-1}^n \quad , \quad 0 \leq j < i - 1 \leq n
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Bu durumda d_i^n ve s_j^n R-cebiroid morfizmleri ile birlikte $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ R-cebiroidler ailesine bir simplisel R-cebiroid denir, $\mathbf{E} = (E_n, d_i^n, s_j^n)$ ile gösterilir ve kısaca grafik olarak

$$\mathbf{E} = \cdots \cdots \cdots E_3 \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} E_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_2} \\ \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} E_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} E_0$$

biçiminde olur. Aslında bir simplisel R-cebiroid, $\Delta^{opp}[n]$ kategorisinden $\mathbf{Alg}(\mathbf{R})$ kategorisine bir funktordur. $\mathbf{E} = (E_n, d_i^n, s_j^n)$ ve $\mathbf{F} = (F_n, \delta_i^n, \sigma_j^n)$ iki simplisel R-cebiroid olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n = E_n \rightarrow F_n$ R-cebiroid morfizmleri $\delta_i^n f_n = f_{n-1} d_i^n$ ve $f_n s_j^{n-1} = \sigma_j^{n-1} f_{n-1}$ şartlarını sağlıyorsa $\mathbf{f} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ ailesine \mathbf{E} den \mathbf{F} ye bir simplisel R-cebiroid morfizmi denir. Böylece simplisel R-cebiroidler kategorisini tanımlayabiliriz. Bu kategoriyi **Simp.R-Alg.** ile göstereceğiz.

\mathbf{E} bir simplisel R-cebiroid olsun. $NE_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker d_i^n$ ve $\partial_n : NE_n \rightarrow NE_{n-1}$ diferansiyelleri herbir adımda d_n^n nin kısıtlaması olmak üzere,

$$\cdots \rightarrow NE_2 \xrightarrow{d_2^2} NE_1 \xrightarrow{d_1^1} E_0 = E_0$$

zincir kompleksine \mathbf{E} nin Moore kompleksi denir ve (\mathbf{NE}, ∂) şeklinde gösterilir. Eğer her $n \geq k + 1$ için $NE_n = 0$ ise \mathbf{E} simplisel R-cebiroidinin Moore kompleksinin uzunluğu k dır denir ve Moore kompleksinin uzunluğu k olan simplisel R-cebiroidlerin kategorisi **Simp.R-Alg.** _{$\leq k$} şeklinde gösterilir.

Cebirlerin 2-Çaprazlanmış Modülü: (Grandjean ve Vale, 1986) R birimli değişmeli halka olmak üzere P , E ve L değişmeli R-cebirleri ve ∂_1, ∂_2 cebir morfizmleri için :

$$L \xrightarrow{\partial_2} E \xrightarrow{\partial_1} P$$

bir zincir kompleksi olsun ve P nin kendi üzerine etkisi çarpım işlemi ile tanımlı olmak üzere P nin E , L üzerine etkileri mevcut olsun. Ayrıca Peiffer lifting olarak adlandırılan

$$\{.\} : E \times E \rightarrow L \tag{3.11}$$

P-bilineer fonksiyonu için $l, l' \in L, e, e', e'' \in E$ ve $p \in P$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}
 CM_1) \quad \partial_2\{e, e'\} &= ee' - \partial_1(e')e, \\
 CM_2) \quad \{\partial_2(l), \partial_2(l')\} &= ll', \\
 CM_3) \quad \{e, e'e''\} &= \{ee', e''\} + \partial_1(e'')\{e, e'\}, \\
 CM_4) \quad \{\partial_2(l), e\} &= {}^e l - \partial_1(e)l, \\
 CM_5) \quad \{e, \partial_2(l)\} &= {}^e l \\
 CM_6) \quad {}^p\{e, e'\} &= \{{}^p e, e'\} = \{e, {}^p e'\}
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

şartları sağlansın. Bu durumda

$$L \xrightarrow{\partial_2} E \xrightarrow{\partial_1} P$$

zincir kompleksine değişmeli cebirlerin 2-çaprazlanmış modülü denir ve $(L, E, P, \partial_1, \partial_2, \{.\})$ şeklinde gösterilir.

NOT: Burada $L \xrightarrow{\partial_2} E$ morfizmi, E nin L üzerine ;

$${}^e l = \{e, \partial_2(l)\} \tag{3.13}$$

etkisi ile birlikte bir çaprazlanmış modüldür. Fakat genel olarak $E \xrightarrow{\partial_1} P$ kısmı sadece bir ön çaprazlanmış modüldür. Peiffer elemanının ∂_2 altındaki görüntüsü 2-çaprazlanmış modül ise $E \xrightarrow{\partial_1} P$ in çaprazlanmış modül olması için gerekli olan cebirsel farkı verir.

4. R-CEBİROİDLERİN 2-ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLÜ

Gruplar üzerindeki çaprazlanmış modülleri ilk kez Whitehead (1941; 1946) çalışmalarında tanımlamıştır. Gruplar üzerinde çaprazlanmış modüllerin, Moore kompleksi 1 uzunlukta olan simplisel gruplarla eşdeğer olduğu gösterilmiştir (Conduche, 1984) ve bu durum benzer şekilde grupoid çaprazlanmış modülleri için de geçerlidir (Mutlu ve Porter, 1998 a). Conduche grupların 2-çaprazlanmış modülü fikrini ele almış ve (1984) çalışmasında grupların 2-çaprazlanmış modüller kategorisinin, Moore kompleks uzunluğu 2 olan simplisel gruplar kategorisine eşdeğer olduğunu göstermiştir. Arvasi ve Ulualan (2006) çalışmasında Moore kompleks uzunluğu 2 olan simplisel gruplar, çaprazlanmış kareler, kuadratik modüller ve 2-çaprazlanmış modüller arasındaki ilişkileri araştırmışlardır. Bu çalışmalar, bu cebirsel yapılar arasındaki yapısal bağlantıların daha derin bir şekilde anlaşılmasına katkıda bulunmuştur. Cebirlerin çaprazlanmış modüllerinin ve 2-çaprazlanmış modüllerinin tanımları (Arvasi ve Porter, 1996; Porter, 1986), çalışmalarında görüldüğü gibi gruplardakine benzer şekilde verilmiştir. Temel farklılık grup etkisi otomorfizm ile belirlenirken cebir etkisi çarpanlar ile tanımlanır. Cebir 2-çaprazlanmış modülleri ve simplisel cebirler arasındaki ilişki, gruplardaki ile benzer şekildedir (Conduche, 1984; Mutlu ve Porter, 1998 a; Mutlu ve Porter, 1998 b). Özellikle, bir simplisel cebir, Moore kompleks uzunluğu 2 ise, ondan bir 2-çaprazlanmış modül türetilir. Moore kompleks uzunluğu 2 olan simplisel cebirler kategorisi ile cebir çaprazlanmış modülleri kategorisi arasındaki ilişki (Porter, 1986; Arvasi, 1997; Grandjean ve Vale, 1986) çalışmalarında incelenmiş ve bu kategoriler arasında denklik kurulmuştur.

Bu bölümde 2-çaprazlanmış modül kavramı R-cebiroidler üzerinde tanımlanmıştır ve sonrasında R-cebiroidlerin 2-çaprazlanmış modüllerinin kategorisi ile Moore kompleksinin uzunluğu iki olan simplisel R-cebiroidlerin kategorisinin denkliği oluşturulmuştur.

4.1 R-Cebiroidler için 2-Çaprazlanmış Modül

P , N ve L obje kümeleri (U_0) olan R-cebiroidler olsun ve P nin L ve N üzerine etkileri asosyatif olacak şekilde var olsun. Ayrıca P nin kendisi üzerine de etkisi kendi kompozisyon işlemi ile verilsin. ∂_1, ∂_2 obje kümesi üzerinde birim olacak şekildeki R-cebiroid morfizmleri için :

$$L \xrightarrow{\partial_2} N \xrightarrow{\partial_1} P$$

R-cebiroidlerin bir zincir kompleksi olsun ve N ye ait, n morfizminin hedefi n' morfizminin kaynağına eşit olacak şekildeki (n, n') ikililerinin kümesi $N_{t \times s}$ ile

gösterilsin. Peiffer liftingleri olarak adlandırılan

$$\{.\}_1 : N \times_s N \rightarrow L \quad (4.1)$$

$$\{.\}_2 : N \times_s N \rightarrow L \quad (4.2)$$

dönüşümleri için $s(\{n, n'\}_{1,2}) = s(n)$ ve $t(\{n, n'\}_{1,2}) = t(n')$ olmak üzere, morfizmlerin hedef kaynak uyumluluk şartını sağlaması durumunda

$$\begin{aligned} CM1) \quad \partial_2\{n, n'\}_1 &= nn' - n^{\partial_1(n')}, \\ &\partial_2\{n, n'\}_2 = nn' - \partial_1(n)n', \\ CM2) \quad \{\partial_2(l), \partial_2(l')\}_{1,2} &= ll', \\ CM3) \quad \{n, n'n''\}_1 &= \{nn', n''\}_1 + \{n, n'\}_1^{\partial_1(n'')}, \\ &\{n, n'n''\}_2 = \{nn', n''\}_2 - \partial_1(n)\{n', n''\}_2, \\ CM4) \quad \{\partial_2(l), n'\}_1 &= l^{n'} - l^{\partial_1(n')}, \\ &\{\partial_2(l), n'\}_2 = l^{n'}, \\ CM5) \quad \{n, \partial_2(l')\}_1 &= n^{l'} \\ &\{n, \partial_2(l')\}_2 = n^{l'} - \partial_1(n)l' \\ CM6) \quad {}^p\{n', n''\}_{1,2} &= \{pn', n''\}_{1,2} \\ &\{n', n''\}_{1,2}^q = \{n', n''^q\}_{1,2} \end{aligned} \quad (4.3)$$

şartlarını sağlıyorsa. R-cebiroidlerin

$$L \xrightarrow{\partial_2} N \xrightarrow{\partial_1} P$$

zincir kompleksine R-cebiroidlerin 2-çaprazlanmış modülü denir ve $(L, N, P, \partial_1, \partial_2, \{.\}_{1,2})$ şeklinde gösterilir.

NOT: Burada $L \xrightarrow{\partial_2} N$ morfizmi, N nin L üzerine sağ ve sol etkileri ile birlikte bir çaprazlanmış modüldür ve $N \xrightarrow{\partial_1} P$ ise P nin N üzerine sağ ve sol etkileri ile birlikte bir ön-çaprazlanmış modüldür. Ayrıca

$$\{n, n'\}_{1,2}\{m, m'\}_{1,2} = \{n^{-\partial_1(n')+n'}, m^{-\partial_1(m')+m'}\}_{1,2} \quad (4.4)$$

eşitlikleri sağlar.

4.1.1 R-Cebiroidler için 2-Çaprazlanmış Modül Morfizmi

$C = (L, N, P, \partial_1, \partial_2, \{.\}_{1,2})$ ve $C' = (L', N', P', \partial'_1, \partial'_2, \{.\}'_{1,2})$ birer R-cebiroidler üzerinde 2-çaprazlanmış modül olsun.

$f_0 : P \rightarrow P'$, $f_1 : N \rightarrow N'$, $f_2 : L \rightarrow L'$ cebiroid morfizmleri için;

$$\begin{array}{ccccc} L & \xrightarrow{\partial_2} & N & \xrightarrow{\partial_1} & P \\ \downarrow f_2 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 \\ L' & \xrightarrow{\partial'_2} & N' & \xrightarrow{\partial'_1} & P' \end{array}$$

diyagramı değişmeli ve bu morfizmler altında tüm mevcut etkiler korunuyor ise, yani

$$\begin{aligned} 1) \quad f_1({}^p n) &= f_0({}^p) f_1(n) \\ f_1(n)^{{}^p} &= f_1(n) f_0({}^p) \\ 2) \quad f_2({}^p l) &= f_0({}^p) f_2(l) \\ f_2(l)^{{}^p} &= f_2(l) f_0({}^p) \\ 3) \quad f_2\{n, n'\}_{1,2} &= \{f_1(n), f_1(n')\}_{1,2} \end{aligned} \quad (4.5)$$

şartları sağlanıyorsa $f = (f_2, f_1, f_0) : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}'$ dönüşümüne 2- çaprazlanmış modül morfizmi denir. Böylece objeleri R- cebiroidlerin 2- çaprazlanmış modülleri ve morfizmleri 2- çaprazlanmış modül morfizmleri olan bir **2XMod** kategorisi elde edilir.

Teorem 2. Moore kompleks uzunluğu 2 olan bir simplisel R-cebiroidden, R-cebiroidlerin 2-çaprazlanmış modülü elde edilebilir.

Kanıt. $\mathbf{E} = (E_n, d_i^n, s_j^n)$, Moore kompleks uzunluğu 2 olan bir simplisel R-cebiroid olsun. Buna göre

$$\mathbf{E} = \cdots \xrightarrow{\quad} E_3 \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} E_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_2} \\ \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} E_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} E_0$$

$\xleftarrow{s_0} \quad \xleftarrow{s_1}$

simplisel cebiroidi için Moore kompleks ,

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow NE_2 \xrightarrow{d_2^2} NE_1 \xrightarrow{d_1^1} NE_0 = E_0$$

şeklindedir. Burada $NE_2 = \ker d_0^2 \cap \ker d_1^2$, $NE_1 = \ker d_0^1$ ve $NE_0 = 0$ dir. Şimdi $L = NE_2$, $N = NE_1$, $P = E_0$ ve $\partial_1 = d_1^1|_{NE_1}$, $\partial_2 = d_2^2|_{NE_2}$ olarak

$$L \xrightarrow{\partial_2} N \xrightarrow{\partial_1} P$$

zincir kompleksi oluşturulsun.

P nin N ve L üzerine sağ ve sol etkileri, morfizmlerin hedef kaynak uyumluluk şartını sağlaması durumunda ${}^p n = s_0^0(p)n$, $n^{{}^p} = n s_0^0({}^p)$ ve ${}^p l = s_0^1 s_0^0({}^p)l$, $l^{{}^p} = l s_0^1 s_0^0({}^p)$ biçiminde tanımlansın. Ayrıca

$$\begin{aligned} \{\cdot\}_1 : N \times_s N &\rightarrow L \\ (n, n') &\mapsto \{n, n'\}_1 = s_1^1(n)[s_1^1(n') - s_0^1(n')] \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \{\cdot\}_2 : N \times_s N &\rightarrow L \\ (n, n') &\mapsto \{n, n'\}_2 = [s_1^1(n) - s_0^1(n)]s_1^1(n') \end{aligned} \quad (4.7)$$

olacak şekilde Peiffer lifting dönüşümleri tanımlansın. Bütün bu tanımlamalar gözönüne alındığında $(L, N, P, \partial_1, \partial_2, \{\cdot\}_{1,2})$ bir 2-çaprazlanmış modüldür. Şimdi Peiffer lifting aksiyomlarının sağlandığı gösterilsin.

$$\begin{aligned} CM1) \quad \partial_2\{n, n'\}_1 &= d_2^2 (s_1^1(n)[s_1^1(n') - s_0^1(n')]) \\ &= d_2^2 s_1^1(n) (d_2^2 s_1^1(n') - d_2^2 s_0^1(n')) \\ &= n (n' - s_0^0 d_1^1(n')) \\ &= nn' - ns_0^0 (d_1^1(n')) \\ &= nn' - n^{\partial_1(n')} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_2\{n, n'\}_2 &= d_2^2 ([s_1^1(n) - s_0^1(n)] s_1^1(n')) \\ &= [d_2^2 s_1^1(n) - d_2^2 s_0^1(n)] d_2^2 s_1^1(n') \\ &= (n - s_0^0 d_1^1(n)) n' \\ &= nn' - s_0^0 (d_1^1(n)) n' \\ &= nn' - \partial_1(n) n' \end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} CM2) \quad \{\partial_2(l), \partial_2(l')\}_1 &= s_1^1 d_2^2(l) [s_1^1 d_2^2(l') - s_0^1 d_2^2(l')] \\ &= d_3^3 s_1^2(l) [d_3^3 s_1^2(l') - d_3^3 s_0^2(l')] - ll' + ll' \\ &= d_3^3 s_1^2(l) [d_3^3 s_1^2(l') - d_3^3 s_0^2(l')] - d_3^3 s_2^2(ll') + ll' \\ &= d_3^3 \underbrace{[s_1^2(l) (s_1^2(l') - s_0^2(l')) - s_2^2(ll')]}_{\in NE_3} + ll' \\ &= \mathbf{0} + ll' \\ &= ll' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\partial_2(l), \partial_2(l')\}_2 &= [s_1^1 d_2^2(l) - s_0^1 d_2^2(l)] s_1^1 d_2^2(l') \\ &= [d_3^3 s_1^2(l) - d_3^3 s_0^2(l)] d_3^3 s_1^2(l') - ll' + ll' \\ &= [d_3^3 s_1^2(l) - d_3^3 s_0^2(l)] d_3^3 s_1^2(l') - d_3^3 s_2^2(ll') + ll' \\ &= d_3^3 \underbrace{[(s_1^2(l) - s_0^2(l)) s_1^2(l') - s_2^2(ll')]}_{\in NE_3} + ll' \\ &= \mathbf{0} + ll' \\ &= ll' \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}
CM3) \quad \{n, n'n''\}_1 &= s_1^1(n) [s_1^1(n'n'') - s_0^1(n'n'')] \\
&= s_1^1(n) [s_1^1(n')s_1^1(n'') - s_0^1(n')s_0^1(n'')] \\
&= s_1^1(n)[s_1^1(n')s_1^1(n'') - s_1^1(n')s_0^1(n'') + s_1^1(n')s_0^1(n'') \\
&\quad - s_0^1(n')s_0^1(n'')] \\
&= s_1^1(n) [s_1^1(n') (s_1^1(n'') - s_0^1(n'')) + (s_1^1(n') - s_0^1(n')) s_0^1(n'')] \\
&= s_1^1(n)s_1^1(n') [s_1^1(n'') - s_0^1(n'')] + s_1^1(n) [s_1^1(n') - s_0^1(n')] s_0^1(n'') \\
&= \{nn', n''\}_1 + \{n, n'\}_1 s_0^1(n'') \\
&= \{nn', n''\}_1 + \{n, n'\}_1 s_0^1(n'') \\
&\quad - \{n, n'\}_1 s_1^1 s_0^0 d_1^1(n'') + \{n, n'\}_1 s_1^1 s_0^0 d_1^1(n'') \\
&= \{nn', n''\}_1 + \{n, n'\}_1 [s_0^1(n'') - s_1^1 s_0^0 d_1^1(n'')] + \{n, n'\}_1^{\partial_1(n'')} \\
&= \{nn', n''\}_1 + s_1^1(n) [s_1^1(n') - s_0^1(n')] [s_0^1(n'') - s_1^1 s_0^0 d_1^1(n'')] \\
&\quad + \{n, n'\}_1^{\partial_1(n'')} \\
&= \{nn', n''\}_1 + s_1^1(n) [s_1^1(n') - s_0^1(n')] [s_0^1(n'') - d_3^3 s_1^2 s_0^1(n'')] \\
&\quad + \{n, n'\}_1^{\partial_1(n'')} \\
&= \{nn', n''\}_1 + d_3^3 \underbrace{[s_2^2 s_1^1(n) [s_2^2 s_1^1(n') - s_2^2 s_0^1(n')] [s_2^2 s_0^1(n'') - s_1^2 s_0^1(n'')]]}_{\in NE_3} \\
&\quad + \{n, n'\}_1^{\partial_1(n'')} \\
&= \{nn', n''\}_1 + \{n, n'\}_1^{\partial_1(n'')}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{n, n'n''\}_2 &= [s_1^1(n) - s_0^1(n)] s_1^1(n') s_1^1(n'') \\
&= [s_1^1(n) s_1^1(n') - s_0^1(n) s_1^1(n')] s_1^1(n'') \\
&= [s_1^1(n) s_1^1(n') - s_0^1(n) s_0^1(n') + s_0^1(n) s_0^1(n') - s_0^1(n) s_1^1(n')] s_1^1(n'') \\
&= [[s_1^1(nn') - s_0^1(nn')] + s_0^1(n) [s_0^1(n') - s_1^1(n')]] s_1^1(n'') \\
&= [s_1^1(nn') - s_0^1(nn')] s_1^1(n'') + s_0^1(n) [s_0^1(n') - s_1^1(n')] s_1^1(n'') \\
&= \{nn', n''\}_2 - s_0^1(n) [s_1^1(n') - s_0^1(n')] s_1^1(n'') \\
&= \{nn', n''\}_2 - s_0^1(n) \{n', n''\}_2 \\
&= \{nn', n''\}_2 - s_0^1(n) \{n', n''\}_2 + s_0^1 s_0^0 d_1^1(n) \{n', n''\}_2 \\
&\quad - s_0^1 s_0^0 d_1^1(n) \{n', n''\}_2 \\
&= \{nn', n''\}_2 (-s_0^1(n) + s_0^1 s_0^0 d_1^1(n)) \{n', n''\}_2 - \partial_1(n) \{n', n''\}_2 \\
&= \{nn', n''\}_2 (-s_0^1(n) + s_0^1 s_0^0 d_1^1(n)) [s_1^1(n') - s_0^1(n')] s_1^1(n'') \\
&\quad - \partial_1(n) \{n', n''\}_2 \\
&= \{nn', n''\}_2 (-s_0^1(n) + d_3^3 s_0^2 s_0^1(n)) [s_1^1(n') - s_0^1(n')] s_1^1(n'') \\
&\quad - \partial_1(n) \{n', n''\}_2 \\
&= \{nn', n''\}_2 d_3^3 \underbrace{[(-s_2^2 s_0^1(n) + s_0^2 s_0^1(n)) [s_2^2 s_1^1(n') - s_2^2 s_0^1(n')] s_2^2 s_1^1(n'')]}_{\in NE_3} \\
&\quad - \partial_1(n) \{n', n''\}_2 \\
&= \{nn', n''\}_2 - \partial_1(n) \{n', n''\}_2
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
CM4) \quad \{\partial_2(l), n'\}_1 &= s_1^1 d_2^2(l) [s_1^1(n') - s_0^1(n')] \\
&= s_1^1 d_2^2(l) [s_1^1(n') - s_0^1(n')] - l s_1^1(n') + l s_1^1(n') \\
&\quad + l s_0^1 s_0^0 d_1^1(n') - l s_0^1 s_0^0 d_1^1(n') \\
&= d_3^3 s_1^2(l) [d_3^3 s_2^2 s_1^1(n') - d_3^3 s_2^2 s_0^1(n')] - d_3^3 s_2^2(l) d_3^3 s_2^2 s_1^1(n') + l s_1^1(n') \\
&\quad + d_3^3 s_2^2(l) d_3^3 s_2^2 s_0^1(n') - l s_0^1 s_0^0 d_1^1(n') \\
&= d_3^3 \underbrace{[s_1^2(l) [s_2^2 s_1^1(n') - s_2^2 s_0^1(n')] - s_2^2(l) s_2^2 s_1^1(n') + s_2^2(l) s_2^2 s_0^1(n')]}_{\in NE_3} \\
&\quad + l s_1^1(n') - l s_0^1 s_0^0 d_1^1(n') \\
&= \mathbf{0} + l n' - l \partial_1(n') \\
&= l n' - l \partial_1(n') \\
\{\partial_2(l), n'\}_2 &= [s_1^1 d_2^2(l) - s_0^1 d_2^2(l)] s_1^1(n') \\
&= [s_1^1 d_2^2(l) - s_0^1 d_2^2(l) - l + l] s_1^1(n') \\
&= [d_3^3 s_1^2(l) - d_3^3 s_0^2(l) - d_3^3 s_2^2(l) + l] d_3^3 s_2^2 s_1^1(n') \\
&= d_3^3 \underbrace{[[s_1^2(l) - s_0^2(l) - s_2^2(l)] s_2^2 s_1^1(n')]}_{\in NE_3} + l s_1^1(n') \\
&= \mathbf{0} + l n' \\
&= l n'
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
CM5) \quad \{n, \partial_2(l)\}_1 &= s_1^1(n) [s_1^1 d_2^2(l) - s_0^1 d_2^2(l)] \\
&= s_1^1(n) [d_3^3 s_1^2(l) - d_3^3 s_0^2(l)] \\
&= d_3^3 s_2^2 s_1^1(n) [d_3^3 s_1^2(l) - d_3^3 s_0^2(l) - d_3^3 s_2^2(l) + l] \\
&= d_3^3 s_2^2 s_1^1(n) [d_3^3 s_1^2(l) - d_3^3 s_0^2(l) - d_3^3 s_2^2(l)] + d_3^3 s_2^2 s_1^1(n) l \\
&= d_3^3 \underbrace{[s_2^2 s_1^1(n) [s_1^2(l) - s_0^2(l) - s_2^2(l)]]}_{\in NE_3} + d_3^3 s_2^2 s_1^1(n) l \\
&= \mathbf{0} + s_1^1(n) l \\
&= n l \\
\{n, \partial_2(l)\}_2 &= [s_1^1(n) - s_0^1(n)] s_1^1 d_2^2(l) \\
&= [s_1^1(n) - s_0^1(n)] s_1^1 d_2^2(l) - s_1^1(n) l + s_1^1(n) l \\
&\quad - s_0^1 s_0^0 d_1^1(n) l + s_0^1 s_0^0 d_1^1(n) l \\
&= [d_3^3 s_2^2 s_1^1(n) - d_3^3 s_2^2 s_0^1(n)] d_3^3 s_1^2(l) - d_3^3 s_2^2 s_1^1(n) d_3^3 s_2^2(l) + s_1^1(n) l \\
&\quad - s_0^1 s_0^0 d_1^1(n) l + d_3^3 s_2^2 s_0^1(n) d_3^3 s_2^2(l) \\
&= d_3^3 \underbrace{[[s_2^2 s_1^1(n) - s_2^2 s_0^1(n)] s_1^2(l) - s_2^2 s_1^1(n) s_2^2(l) + s_2^2 s_0^1(n) s_2^2(l)]}_{\in NE_3} \\
&\quad + s_1^1(n) l - s_0^1 s_0^0 d_1^1(n) l \\
&= \mathbf{0} + n l - \partial_1(n) l \\
&= n l - \partial_1(n) l
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
 CM6) \quad {}^p\{n, n'\}_1 &= s_0^1 s_0^0(p) s_1^1(n) [s_1^1(n') - s_0^1(n')] \\
 &= s_1^1 s_0^0(p) s_1^1(n) [s_1^1(n') - s_0^1(n')] \\
 &= s_1^1 (s_0^0(p)(n)) [s_1^1(n') - s_0^1(n')] \\
 &= s_1^1({}^p n') [s_1^1(n') - s_0^1(n')] \\
 &= \{{}^p n, n'\}_1 \\
 \{n, n'\}_2^q &= [s_1^1(n) - s_0^1(n)] s_1^1(n') s_0^1 s_0^0(q) \\
 &= [s_1^1(n) - s_0^1(n)] s_1^1(n') s_1^1 s_0^0(q) \\
 &= [s_1^1(n) - s_0^1(n)] s_1^1((n') s_0^0(q)) \\
 &= [s_1^1(n) - s_0^1(n)] s_1^1(n'^q) \\
 &= \{n, n'^q\}_2
 \end{aligned}$$

Böylece tüm 2-çaprazlanmış modül şartlarının sağlandığı gösterilmiş olur. \square

$\mathbf{E} = (E_n, d_i^n, s_j^n)$ ve $\mathbf{E}' = (E_n, \delta_i^n, \sigma_j^n)$ Moore kompleksinin uzunluğu 2 olan simplisel R-cebiroidler olsun.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \xrightarrow{d_2^2} & & \xrightarrow{d_1^1} & & \\
 & & \xrightarrow{d_1^2} & & \xrightarrow{d_0^1} & & \\
 \mathbf{E} = \dots & E_2 & \xrightarrow{d_0^2} & E_1 & \xrightarrow{d_0^1} & E_0 & \\
 & \xleftarrow{s_1^1} & & \xleftarrow{s_0^1} & & & \\
 & \downarrow f_2 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & \\
 & & \xrightarrow{\delta_2^2} & & \xrightarrow{\delta_1^1} & & \\
 \mathbf{E}' = \dots & E'_2 & \xrightarrow{\delta_0^2} & E'_1 & \xrightarrow{\delta_0^1} & E'_0 & \\
 & \xleftarrow{\sigma_1^1} & & \xleftarrow{\sigma_0^1} & & & \\
 & & \xrightarrow{\sigma_0^1} & & & &
 \end{array}$$

$\mathbf{f} = (\dots, f_2, f_1, f_0)$ ise $\mathbf{E} = (E_n, d_i^n, s_j^n)$ den $\mathbf{E}' = (E'_n, \delta_i^n, \sigma_j^n)$ ne bir simplisel R-cebiroid morfizmi olsun. \mathbf{E} ve \mathbf{E}' den elde edilen 2-çaprazlanmış modüller $(L, N, P, \partial_1, \partial_2, \{\cdot\}_{1,2})$ ve $(L', N', P', \partial'_1, \partial'_2, \{\cdot\}'_{1,2})$ olsun. Buna göre

$$\begin{array}{ccccc}
 L & \xrightarrow{\partial_2} & N & \xrightarrow{\partial_1} & P \\
 \downarrow \bar{f}_2 & & \downarrow \bar{f}_1 & & \downarrow \bar{f}_0 \\
 L' & \xrightarrow{\partial'_2} & N' & \xrightarrow{\partial'_1} & P'
 \end{array}$$

için $\bar{f}_0 = f_0, \bar{f}_1 = f_1|_{NE_1}, \bar{f}_2 = f_2|_{NE_2}$ olarak alınırsa $(\bar{f}_2, \bar{f}_1, \bar{f}_0)$ için, morfizmlerin hedef kaynak uyumluluk şartını sağlaması durumunda

$$\begin{aligned}
1) \quad \bar{f}_1(pn) &= f_1(s_0^0(p)n) \\
&= f_1 s_0^0(p) f_1(n) \\
&= \sigma_0^0 f_0(p) f_1(n) \\
&= \bar{f}_0(p) \bar{f}_1(n) \\
\bar{f}_1(n^{p'}) &= f_1(n s_0^0(p')) \\
&= f_1(n) f_1 s_0^0(p') \\
&= f_1(n) \sigma_0^0 f_0(p') \\
&= \bar{f}_1(n) \bar{f}_0(p') \\
2) \quad \bar{f}_2(pl) &= f_2(s_0^1 s_0^0(p)l) \\
&= f_2 s_0^1 s_0^0(p) f_2(l) \\
&= \sigma_1^0 f_1 \sigma_0^0(p) f_2(l) \\
&= \sigma_1^0 \sigma_0^0 f_0(p) f_2(l) \\
&= \bar{f}_0(p) \bar{f}_2(l) \\
\bar{f}_2(l^{p'}) &= f_2(l s_0^1 s_0^0(p')) \\
&= f_2(l) f_2 s_0^1 s_0^0(p') \\
&= f_2(l) \sigma_1^0 f_1 \sigma_0^0(p') \\
&= f_2(l) \sigma_1^0 \sigma_0^0 f_0(p') \\
&= \bar{f}_2(l) \bar{f}_0(p') \\
3) \quad \bar{f}_2\{n, n'\}_1 &= f_2(s_1^1(n)[s_1^1(n')s_0^1(n')]) \\
&= f_2 s_1^1(n)[f_2 s_1^1(n') f_2 s_0^1(n')] \\
&= \sigma_1^1 f_1(n)[\sigma_1^1 f_1(n') \sigma_0^1 f_1(n')] \\
&= \{\bar{f}_1(n), \bar{f}_1(n')\}_1 \\
\bar{f}_2\{n, n'\}_2 &= f_2([s_1^1(n)s_0^1(n)]s_1^1(n')) \\
&= [f_2 s_1^1(n) f_2 s_0^1(n)] f_2 s_1^1(n') \\
&= [\sigma_1^1 f_1(n) \sigma_0^1 f_1(n)] \sigma_1^1 f_1(n') \\
&= \{\bar{f}_1(n), \bar{f}_1(n')\}_2
\end{aligned} \tag{4.8}$$

olup $(\bar{f}_2, \bar{f}_1, \bar{f}_0)$ \mathbf{E} ile \mathbf{E}' den elde edilen 2-çaprazlanmış modüller arasında bir morfizm olur. Böylece $\mathbf{Simp.R-Alg}_{\leq 2}$ kategorisinden $\mathbf{2XMod}$ kategorisine bir fonktor elde edilir. Bu fonktor $\mathbf{F} : \mathbf{Simp.R-Alg}_{\leq 2} \rightarrow \mathbf{2XMod}$ biçiminde gösterilir. Burada

$$\mathbf{E} = \cdots \cdots \cdots E_3 \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} E_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_2} \\ \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} E_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} E_0$$

bir Moore kompleks uzunluğu 2 olan simplisel R-cebiroid ise $L = NE_2, N = NE_1, P = NE_0, \partial_1 = d_1^1|_{NE_1}, \partial_2 = d_2^2|_{NE_2}$ ve yukarıdaki gibi tanımlanan $\{.\}_1$ ve $\{.\}_2$ için $\mathbf{F}(\mathbf{E}) =$

$(L, N, P, \partial_1, \partial_2, \{.\}_{1,2})$ bir 2-çaprazlanmış modül olur ve $\mathbf{f} : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}'$ simplisel R-cebiroid morfizmi ise $\mathbf{F}(\mathbf{f}) = (\bar{f}_2, \bar{f}_1, \bar{f}_0)$, $\mathbf{F}(\mathbf{E})$ den $\mathbf{F}(\mathbf{E}')$ ne bir 2-çaprazlanmış modül morfizmi olur.

Teorem 3. *R-cebiroidlerin 2-çaprazlanmış modülünden, Moore kompleks uzunluğu 2 olan bir simplisel R-cebiroid elde edilebilir.*

Kanıt. $L \xrightarrow{\partial_2} N \xrightarrow{\partial_1} P$ bir R-cebiroidlerin bir 2-çaprazlanmış modülü olsun. Öyleyse P nin L ve N üzerine asosyatif etkileri mevcuttur. Ayrıca N nin L üzerine de asosyatif etkisi mevcuttur. Buradan yola çıkarak sırasıyla E_0, E_1, E_2 ve E_3 oluşturulup simplisel özdeşlikleri sağlayacak şekilde cebroid morfizmleri tanımlansın.

1) $E_0 = P$ olsun.

2) P nin N üzerine sağ ve sol etkilerinin yardımıyla $N \rtimes P$ oluşturulabilir. $E_1 = N \rtimes P$ olsun ve morfizmlerde;

$$\begin{aligned} & \bullet d_0^1 : E_1 \rightarrow E_0 \quad , \quad d_0^1(n, p) = p \\ & \bullet d_1^1 : E_1 \rightarrow E_0 \quad , \quad d_1^1(n, p) = \partial_1(n) + p \\ & \bullet s_0^0 : E_0 \rightarrow E_1 \quad , \quad s_0^0(p) = (\mathbf{0}, p) \end{aligned} \quad (4.9)$$

şeklinde tanımlansın.

3) N nin L üzerine ${}^n l = \{n, \partial_2(l)\}_1$ ve $l^{n'} = \{\partial_2(l), n'\}_2$ şeklindeki sol ve sağ etkilerinin yardımıyla $L \rtimes N$ oluşturulabilir. Ayrıca $(n', p), (k, m)$ morfizmlerinin ve $(l, n), (m', q)$ morfizmlerinin hedef kaynak uyumluluk şartını sağlaması durumunda E_1 in $L \rtimes N$ üzerine ${}^{(n',p)}(k, m) = (\partial_1(n')k + {}^p k - \{n', m\}_2, {}^p m + n'm)$ ve $(l, n)^{(m',q)} = (l^{\partial_1(n')} + l^q - \{n, m'\}_1, n^q + nm')$ şeklindeki sol ve sağ etkilerinin yardımıyla da $E_2 = (L \rtimes N) \rtimes (N \rtimes P)$ oluşturulabilir ve $d_0^2, d_1^2, d_2^2 : E_2 \rightarrow E_1$ morfizmleri E_2 ye ait (l, n, n', p) elemanını sırasıyla E_1 e ait $(n', p), (n + n', p), (\partial_2(l) + n, \partial_1(n') + p)$ elemanlarına, $s_0^1, s_1^1 : E_1 \rightarrow E_2$ morfizmleri de E_1 e ait (n, p) elemanını sırasıyla E_2 ye ait $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, n, p), (\mathbf{0}, n, \mathbf{0}, p)$ elemanlarına taşıyacak şekilde tanımlansın.

4) $(L \rtimes N)$ nin L üzerine ${}^{(l,n)}l' = (ll' + {}^n l')$ ve $l'^{(l',n')} = (ll' + l^{n'})$ sağ ve sol R-cebiroid etkilerinin yardımıyla $D = L \rtimes (L \rtimes N)$ oluşturulabilir. Ayrıca E_2 nin D üzerine

$$\begin{aligned} & ((l'', n'), (n'', p))(k, (k', m)) = \\ & (\partial_1(n')k + \partial_1(n')k' + \partial_1(n'')k + {}^p k - \{n', m\}_2 - \{n', \partial_2(k')\}_1 - l''k' - \{\partial_2(l''), m\}_2, \\ & \partial_1(n'')k' + {}^p k' - \{n'', m\}_2 + \{n', \partial_2(k')\}_1 + \{\partial_2(l''), m\}_2 + l''k', n'm + n''m + {}^p m) \end{aligned}$$

$(l, (l', n))^{((k'', m'), (m'', q))} =$
 $(l^{\partial_1(m')} + l'^{\partial_1(m')} + l^{\partial_1(m'')} + l^q - \{n, m'\}_1 - \{n, \partial_2(k'')\}_1 - \{\partial_2(l'), m'\}_2 - l'k'',$
 $l'^{\partial_1(m'')} + l^q - \{n, m''\}_1 + \{n, \partial_2(k'')\}_1 + \{\partial_2(l'), m'\}_2 + l'k'', nm' + nm'' + n^q)$ biçiminde
 sağ ve sol etkilerinin yardımıyla da $E_3 = (L \times (L \times N)) \times ((L \times N) \times (N \times P))$
 oluşturulabilir ve $d_0^3, d_1^3, d_2^3, d_3^3 E :_3 \rightarrow E_2$ morfizmleri E_3 e ait $(l, l', n, l'', n', n'', p)$ elemanını
 sırasıyla E_2 ye ait (l'', n', n'', p) , $(l' + l'', n + n', n'', p)$, $(l + l', n, n' + n'', p)$,
 $(l, \partial_2(l') + n, \partial_2(l'') + n', \partial_1(n'') + p)$ elemanlarına ve $s_0^2, s_1^2, s_2^2 : E_2 \rightarrow E_3$ morfizmleride
 E_2 ye ait (l, n, l', p) elemanını sırasıyla E_3 e ait $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, l, n, n', p)$, $(\mathbf{0}, l, n, \mathbf{0}, \mathbf{0}, n', p)$,
 $(l, \mathbf{0}, n, \mathbf{0}, \mathbf{0}, n', p)$ biçimindeki elemanlara taşıyacak şekilde tanımlansın. Burada

$$\begin{aligned}
 \ker d_0^3 &= \{(l, l', n, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) | l, l' \in L, n \in N\} \\
 \ker d_1^3 &= \{(l, -l'', -n', l'', n', \mathbf{0}, \mathbf{0}) | l, l'' \in L, n' \in N\} \\
 \ker d_2^3 &= \{(-l', l', \mathbf{0}, l'', -n'', n'', \mathbf{0}) | l', l'' \in L, n'' \in N\} \\
 \ker d_0^3 \cap \ker d_1^3 \cap \ker d_2^3 &= \{(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})\} = NE_3
 \end{aligned}$$

dır.

Sonuç olarak tüm bu tanımlamalarla Moore kompleks uzunluğu 2 olan bir simplisel R-cebiroid elde edilmiş olur.

□

$\mathbf{C} = (L, N, P, \partial_1, \partial_2), \{\cdot\}_{1,2}$ ve $\mathbf{C}' = (L', N', P', \partial'_1, \partial'_2, \{\cdot\}'_{1,2})$ birer 2-çaprazlanmış modül olsun.

$$\begin{array}{ccccc}
 L & \xrightarrow{d_2} & N & \xrightarrow{d_1} & P \\
 \downarrow f_2 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 \\
 L' & \xrightarrow{d'_2} & N' & \xrightarrow{d'_1} & P'
 \end{array}$$

(f_2, f_1, f_0) ise \mathbf{C} den \mathbf{C}' ne bir 2-çaprazlanmış modül morfizmi olsun. \mathbf{C} ve \mathbf{C}' den elde edilen simplisel R-cebiroidler

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbf{E} & = & \cdots & E_3 & \xrightarrow{\quad} & E_2 & \xrightarrow{\quad} & E_1 & \xrightarrow{\quad} & E_0 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & & \\
 \mathbf{E}' & = & \cdots & E'_3 & \xrightarrow{\quad} & E'_2 & \xrightarrow{\quad} & E'_1 & \xrightarrow{\quad} & E'_0
 \end{array}$$

olsun. Buna göre

$$\begin{array}{ccccc}
& & \xrightarrow{d_2^2} & & \\
& & \xrightarrow{d_1^2} & & \\
\mathbf{E} = \dots & E_2 & \xrightarrow{d_0^2} & E_1 & \xrightarrow{d_1^1} & E_0 \\
& \xleftarrow{s_1^1} & & \xleftarrow{s_0^0} & & \\
& \xleftarrow{s_0^1} & & & & \\
& \downarrow f_2' & & \downarrow f_1' & & \downarrow f_0' \\
& & \xrightarrow{\delta_2^2} & & \xrightarrow{\delta_1^1} & \\
\mathbf{E}' = \dots & E_2' & \xrightarrow{\delta_0^2} & E_1' & \xrightarrow{\delta_1^1} & E_0' \\
& \xleftarrow{\sigma_1^1} & & \xleftarrow{\sigma_0^0} & & \\
& \xleftarrow{\sigma_0^1} & & & &
\end{array}$$

için $f'_0 = (f_0)$, $f'_1 = (f_1, f_0)$, $f'_2 = (f_2, f_1, f_1, f_0)$ olarak alınırsa her biri komütatifliği sağlar ve $\mathbf{f} = (\dots, f'_2, f'_1, f'_0)$ bir simplisel R-cebiroid morfizmi olur.

Böylece $\mathbf{2XMod}$ kategorisinden $\mathbf{Simp.R-Alg}_{\leq 2}$ kategorisine bir fonktor elde edilir. Bu fonktor $\mathbf{G} : \mathbf{2XMod} \rightarrow \mathbf{Simp.R-Alg}_{\leq 2}$ şeklinde gösterilir. Burada $\mathbf{C} = (L, N, P, \partial_1, \partial_2, \{\cdot\}_{1,2})$ bir 2-çaprazlanmış modül ise yukarıdaki gibi tanımlanan E_0, E_1, E_2, E_3 ve d_i^n, s_j^n dönüşümleri için $\mathbf{G}(\mathbf{C}) = \mathbf{E} = (E_n, d_i^n, s_j^n)$ bir Moore kompleks uzunluğu 2 olan simplisel R-cebiroid olur ve \mathbf{C} den \mathbf{C}' ne tanımlı (f_2, f_1, f_0) 2-çaprazlanmış modül morfizmi için

$\mathbf{G}((f_2, f_1, f_0)) = \mathbf{f} = (\dots, (f_2, f_1, f_1, f_0), (f_1, f_0), f_0) : \mathbf{G}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{G}(\mathbf{C}')$ bir simplisel R-cebiroid morfizmi olur.

4.1.2 Denkliğin İnşaası

$\mathbf{C} = (L, N, P, \partial_1, \partial_2, \{\cdot\}_{1,2})$ bir 2-çaprazlanmış modül olsun. Yukarıda elde edilen $\mathbf{G} : \mathbf{2XMod} \rightarrow \mathbf{Simp.R-Alg}_{\leq 2}$ ve $\mathbf{F} : \mathbf{Simp.R-Alg}_{\leq 2} \rightarrow \mathbf{2XMod}$ fonktorları için ;

$$\mathbf{G}(\mathbf{C}) = \dots \dots (L \times N) \times (N \times P) \begin{array}{c} \xrightarrow{d_2} \\ \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} (N \times P) \begin{array}{c} \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} P \\
\begin{array}{c} \xleftarrow{s_1} \\ \xleftarrow{s_0} \end{array}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{FG}(\mathbf{C}) &= N((L \times N) \times (N \times P)) \xrightarrow{d_2^2} N((N \times P)) \xrightarrow{d_1^1} P \\
&= \{(l, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) : l \in L\} \xrightarrow{d_2^2} \{(n, \mathbf{0}) : n \in N\} \xrightarrow{d_1^1} P
\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada L deki bir l morfizmi, N deki bir n morfizmi ve P deki bir p morfizmi için C 2-çaprazlanmış modülünün (l, n, p) biçiminde gösterilen bir elemanı için

$$\alpha_C = (f_2, f_1, f_0) : \quad C \rightarrow FG(C)$$

$$(l, n, p) \mapsto \alpha_C(l, n, p) = (f_2(l), f_1(n), f_0(p)) = ((l, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}), (n, \mathbf{0}), p)$$

$$\beta_C = (g_2, g_1, g_0) : \quad FG(C) \rightarrow C$$

$$((l, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}), (n, \mathbf{0}), p) \mapsto \beta_C(FG(C)) = (g_2(l, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}), g_1(n, \mathbf{0}), g_0(p)) = (l, n, p)$$

biçiminde α_C ve β_C morfizmleri tanımlansın.

Yardımcı Teorem 1. $\alpha_C : C \rightarrow FG(C)$ morfizmi bir 2-çaprazlanmış modül morfizmidir.

Kanıt. Morfizmlerin hedef kaynak uyumluluk şartını sağlaması durumunda

$$\begin{aligned} 1) \quad f_1(pn) &= (pn, \mathbf{0}) \\ &= {}^p(n, \mathbf{0}) \\ &= {}^p f_1(n) \\ &= f_0(p) f_1(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1(n^{p'}) &= (n^{p'}, \mathbf{0}) \\ &= (n, \mathbf{0})^{p'} \\ &= f_1(n)^{p'} \\ &= f_1(n)^{f_0(p')} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad f_2(pl) &= (pl, \mathbf{0}) \\ &= {}^p(l, \mathbf{0}) \\ &= {}^p f_2(l) \\ &= f_0(p) f_2(l) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(l^{p'}) &= (l^{p'}, \mathbf{0}) \\ &= (l, \mathbf{0})^{p'} \\ &= f_2(l)^{p'} \\ &= f_2(l)^{f_0(p')} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3) \quad \{f_1(n), f_1(n')\}_1 &= \{(n, \mathbf{0}), (n', \mathbf{0})\}_1 \\
&= s_1^1(n, \mathbf{0})[s_1^1(n', \mathbf{0}) - s_0^1(n', \mathbf{0})] \\
&= (\mathbf{0}, n, \mathbf{0}, \mathbf{0})[(\mathbf{0}, n', \mathbf{0}, \mathbf{0}) - (\mathbf{0}, \mathbf{0}, n', \mathbf{0})] \\
&= (\mathbf{0}, n, \mathbf{0}, \mathbf{0})(\mathbf{0}, n', -n', \mathbf{0}) \\
&= {}^{(\mathbf{0}, \mathbf{0})}(\mathbf{0}, n') + (\mathbf{0}, n)^{(-n', \mathbf{0})} + (\mathbf{0}, n)(\mathbf{0}, n'), (\mathbf{0}, \mathbf{0})(-n', \mathbf{0}) \\
&= (\mathbf{0} + \mathbf{0} + \{\mathbf{0}, n'\}_1, \mathbf{0}) + \\
&\quad (\mathbf{0} + \mathbf{0} - \{n, -n'\}_1, -nn') + (\mathbf{0}, nn'), (\mathbf{0}, \mathbf{0}) \\
&= (\{n, n'\}_1 - nn' + nn', \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\
&= (\{n, n'\}_1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\
&= f_2(\{n, n'\}_1)
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla $\alpha_C = (f_2, f_1, f_0) : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{FG}(\mathbf{C})$ bir 2-çaprazlanmış modül morfizmidir. \square

Yardımcı Teorem 2. $\beta_C : \mathbf{FG}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{C}$ morfizmi bir 2-çaprazlanmış modül morfizmidir.

Kanıt. Morfizmlerin hedef kaynak uyumluluk şartını sağlaması durumunda

$$\begin{aligned}
1) \quad g_1({}^p(n, \mathbf{0})) &= g_1({}^p n, \mathbf{0}) \\
&= {}^p n \\
&= g_0({}^p)g_1(n, \mathbf{0}) \\
g_1((n, \mathbf{0})^{p'}) &= g_1(n^{p'}, \mathbf{0}) \\
&= m^{p'} \\
&= g_1(n, \mathbf{0})g_0({}^{p'}) \\
2) \quad g_2({}^p(l, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})) &= g_2({}^p l, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\
&= {}^p l \\
&= g_0({}^p)g_2(l, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\
g_2((l, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})^{p'}) &= g_2(l^{p'}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\
&= l^{p'} \\
&= g_2(l, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})g_0({}^{p'}) \\
3) \quad g_2\{(n, \mathbf{0}), (n', \mathbf{0})\}_1 &= g_2(s_1^1(n, \mathbf{0})[s_1^1(n', \mathbf{0}) - s_0^1(n', \mathbf{0})]) \\
&= g_2((\mathbf{0}, n, \mathbf{0}, \mathbf{0})[(\mathbf{0}, n', \mathbf{0}, \mathbf{0}) - (\mathbf{0}, \mathbf{0}, n', \mathbf{0})]) \\
&= g_2((\mathbf{0}, n, \mathbf{0}, \mathbf{0})(\mathbf{0}, n', -n', \mathbf{0})) \\
&= g_2({}^{(\mathbf{0}, \mathbf{0})}(\mathbf{0}, n') + (\mathbf{0}, n)^{(-n', \mathbf{0})} + (\mathbf{0}, n)(\mathbf{0}, n'), (\mathbf{0}, \mathbf{0})(-n', \mathbf{0})) \\
&= g_2(\{n, n'\}_1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\
&= \{g_1(n, \mathbf{0}), g_1(n', \mathbf{0})\}_1
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\beta_C = (g_2, g_1, g_0) : \mathbf{FG}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{C}$ bir 2-çaprazlanmış modül morfizmidir. \square

Buraya kadar verilen bir \mathbf{C} 2-çaprazlanmış modülü için \mathbf{C} den $\mathbf{FG}(\mathbf{C})$ ye $\alpha_{\mathbf{C}}$ ve ters yönde $\beta_{\mathbf{C}}$ 2-çaprazlanmış modül morfizmleri tanımlandı. Şimdi aynı iş simplisel R-cebiroidlerin kategorisinde ele alınacaktır.

$\mathbf{E} = (E_n, d_i^m, s_j^n)$ Moore kompleks uzunluğu 2 olan simplisel R-cebiroid olsun. Yukarıda elde edilen $\mathbf{F} : \mathbf{Simp.R-Alg}_{\leq 2} \rightarrow \mathbf{2XMod}$ ve $\mathbf{G} : \mathbf{2XMod} \rightarrow \mathbf{Simp.R-Alg}_{\leq 2}$ fonktörleri için ;

$$\mathbf{F}(\mathbf{E}) = NE_2 \xrightarrow{d_2^2|_{NE_2}} NE_1 \xrightarrow{d_1^1|_{NE_1}} NE_0$$

$$\mathbf{GF}(\mathbf{E}) = \dots \times (NE_2 \times NE_1) \times (NE_1 \times NE_0) \xrightarrow{d_2} \xrightarrow{d_1} \xrightarrow{d_0} (NE_1 \times NE_0) \xrightarrow{d_1} \xrightarrow{d_0} NE_0$$

$\xleftarrow{s_0} \xleftarrow{s_1}$

şeklindedir. Burada \mathbf{E} simplisel R-cebiroidinin (\dots, e_2, e_1, e_0) biçiminde gösterilen bir elemanı için

$$\begin{aligned} \rho_E : \quad \mathbf{E} &\rightarrow \mathbf{GF}(\mathbf{E}) \\ (\dots, e_2, e_1, e_0) &\mapsto \rho_E(\dots, e_2, e_1, e_0) = (\dots, (e_2, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}), (e_1, \mathbf{0}), e_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_E : \quad \mathbf{GF}(\mathbf{E}) &\rightarrow \mathbf{E} \\ (\dots, (e_2, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}), (e_1, \mathbf{0}), e_0) &\mapsto \gamma_E(\dots, (e_2, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}), (e_1, \mathbf{0}), e_0) = (\dots, e_2, e_1, e_0) \end{aligned}$$

biçiminde ρ_E ve γ_E morfizmleri tanımlansın. Bu morfizmler birer simplisel R-cebiroid morfizmleridir.

Teorem 4. \mathbf{F} ve \mathbf{G} fonktörleri $\mathbf{2XMod}$ ve $\mathbf{Simp.R-Alg}_{\leq 2}$ kategorilerinin denkleğini verir.

Kanıt. $\alpha_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{FG}(\mathbf{C})$ ve $\beta_{\mathbf{C}} : \mathbf{FG}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{C}$ morfizmleri için

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathbf{C}}\beta_{\mathbf{C}}((l, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}), (n, \mathbf{0}), p) &= \alpha_{\mathbf{C}}(l, n, p) \\ &= ((l, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}), (n, \mathbf{0}), p) \\ \beta_{\mathbf{C}}\alpha_{\mathbf{C}}(l, n, p) &= \beta_{\mathbf{C}}((l, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}), (n, \mathbf{0}), p) \\ &= (l, n, p) \end{aligned}$$

olup $\alpha_{\mathbf{C}}, \beta_{\mathbf{C}}$ izomorfizmdir.

$$\begin{array}{ccc} C = (L, N, P) & \xrightarrow{\alpha_C} & FG(C) \\ \downarrow f' = (f'_2, f'_1, f'_0) & & \downarrow FG(f') = ((f'_2, f'_1, f'_1, f'_0), (f'_1, f'_0), f'_0) \\ C' = (L', N', P') & \xrightarrow{\alpha_{C'}} & FG(C') \end{array}$$

diyagramı komütatiftir. Böylece $\alpha = \{\alpha_C : C \in 2XMod\}$ ailesi birim fonktor I_{2XMod} ile **FG** fonktoru arasında doğal izomorfizmdir.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{E} = (E_n, d_i^n, s_j^n) & \xrightarrow{\rho_E} & GF(E) \\
 f=(\dots, f_2, f_1, f_0) \downarrow & & \downarrow GF(f)=((f_2|_{NE_2}, f_1|_{NE_1}, f_1|_{NE_1}, f_0|_{NE_0}), (f_1|_{NE_1}, f_0|_{NE_0}), f_0|_{NE_0}) \\
 \mathbf{E}' = (E'_n, \delta_i^n, \sigma_j^n) & \xrightarrow{\rho'_E} & GF(E)'
 \end{array}$$

diyagramı komütatiftir. Böylece $\rho = \{\rho_E : E \in Simp.R - Alg_{\leq 2}\}$ ailesi birim fonktor $I_{Simp.R-Alg_{\leq 2}}$ ile **GF** fonktoru arasında doğal izomorfizmdir. \square

Sonuç olarak **FG** $\cong I_{2XMod}$ ve **GF** $\cong I_{Simp.R-Alg_{\leq 2}}$ olduğu gösterilmiş olup **2XMod** kategorisi ile **Simp.R-Alg_{≤2}** kategorisinin denkliği sağlanır.

5. R-CEBİROİDLERİN ÇAPRAZLANMIŞ KARESİ

Homotopi 3-tiplerinin diğere önemli bir cebirsel modeli, çaprazlanmış karelerdir ve cat 2-gruplar ile eşdeğerdire. Bu yapı, homotopi 3-tipleri için bir model olarak kullanılabilir. Çaprazlanmış kareler, noktalanmış uzayların kategorisinden çaprazlanmış karelerin kategorisine temel bir çaprazlanmış kare fonksiyonu oluşturur. Sonuç olarak, hem 2-çaprazlanmış modüller hem de çaprazlanmış kareler, homotopi teorisinin önemli yapı taşlarıdır. Homotopi tiplerini modellemek ve incelemek için güçlü araçlar sunarlar. Guin-Walery ve Loday (1981) çalışmasında, homotopi 3-tipi bağlantılı uzaylar için bir cebirsel model olarak çaprazlanmış kareleri tanımlamışlardır. Bu nedenle, çaprazlanmış kareler, boyutları 3'ten büyük olan homotopi tiplerini modellemektedir. Daha sonra Ellis (1988) çalışmasında çaprazlanmış karelerin değışmeli cebir versiyonunu tanımlamıştır. 2-çaprazlanmış modüller ve kuadratik modüller de homotopi 3-tipleri için modellerdir. Kuadratik modüller Baues (1991) tarafından, 2-çaprazlanmış modüller Conduche tarafından tanımlanmıştır. Kuadratik modüllerin ve 2-çaprazlanmış modüllerin değışmeli cebir versiyonları sırasıyla (Arvasi ve Ulualan, 2007) ve (Grandjean ve Vale, 1986) çalışmalarında ele alınmıştır. Ayrıca Conduche (1984) çalışmasında, bir çaprazlanmış kareden 2-çaprazlanmış modül elde edildiğini göstermiştir. Çaprazlanmış kareler ve 2-çaprazlanmış modüller arasındaki bu ilişki, homotopi teorisinin daha karmaşık yapılarını anlamak için önemli bir köprü oluşturmaktadır. Çaprazlanmış karelerin ve 2-çaprazlanmış modüllerin homotopi 3-tiplerini modellemedeki rolleri, cebirsel topolojinin bu alandaki araştırmalarının temelini oluşturmaktadır. Ellis'in değışmeli cebir versiyonu, çaprazlanmış karelerin homotopi teorisindeki uygulamalarını genişletmiş ve bu yapıların daha geniş bir alanda kullanılabilmesini sağlamıştır. Conduche'nin çalışmaları, çaprazlanmış karelerin ve 2-çaprazlanmış modüllerin bağlantısını açıklığa kavuşturmakta ve bu yapıların homotopi tiplerinin daha derinlemesine incelenmesine olanak tanımaktadır. Sonuç olarak, çaprazlanmış kareler, 2-çaprazlanmış modüller ve simplisel yapılar, homotopi teorisindeki karmaşık yapıların modellenmesinde ve incelenmesinde önemli araçlardır. Bu yapıların değışmeli cebir versiyonları, homotopi teorisinin daha geniş uygulama alanlarında kullanılabilmesini mümkün kılmaktadır, bu da, bu alandaki araştırmaların derinliğini ve kapsamını arttırmaktadır.

Bu bölümde R-cebiroidler üzerinde çaprazlanmış kare tanımlanmıştır ve sonrasında R-cebiroidlerin çaprazlanmış karelerinin kategorisi ile Moore kompleksinin uzunluğu 2 olan simplisel R-cebiroidlerin kategorisinin arasındaki ilişki incelenmiştir.

5.1 R-Cebroidler için Çaprazlanmış Kare

L, M, N ve P aynı obje kümesi (U_0) üzerinde tanımlı birer R-cebroid ve P nin L, M, N üzerine asosyatif etkileri mevcut olsun. Objeye kümesi üzerinde birim olan κ, κ', ω ve ν , $\nu\kappa' = \omega\kappa$ olacak şekilde birer R-cebroid morfizmi olsun. Böylece

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\kappa} & M \\ \kappa' \downarrow & & \downarrow \omega \\ N & \xrightarrow{\nu} & P \end{array}$$

değişmeli diyagramı oluşturulabilir. Burada M R-cebroidinin L ve N R-cebroidleri üzerine ω morfizmi vasıtasıyla, N R-cebroidinin de L ve M R-cebroidleri üzerine ν morfizmi vasıtasıyla etkileri mevcuttur.

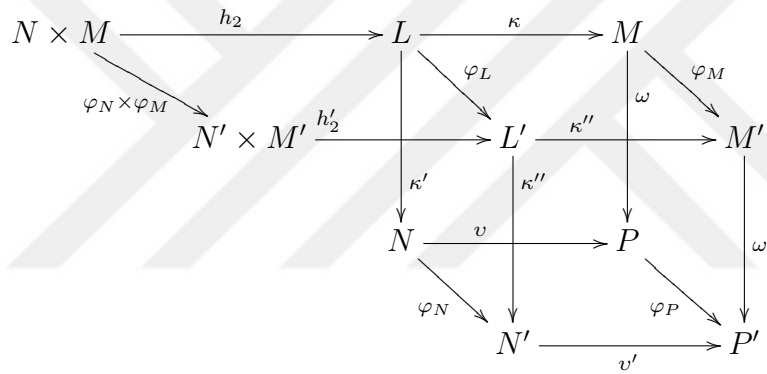
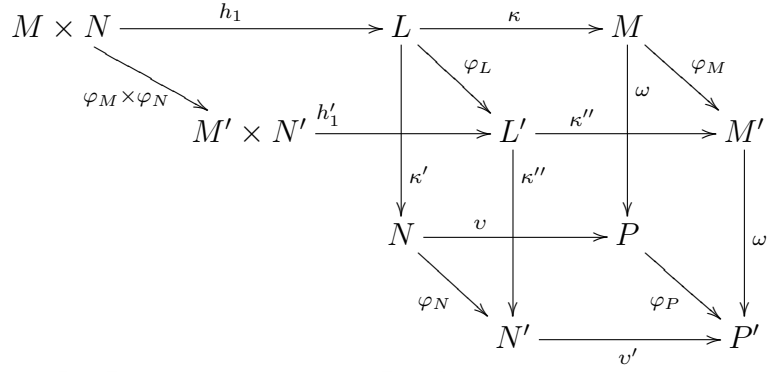
$h_1 : M_t \times_s N \rightarrow L$ ve $h_2 : N_t \times_s M \rightarrow L$ dönüşümleri, $(m, n) \in M_t \times_s N$, $(n, m) \in N_t \times_s M$ için $s(h_1(m, n)) = s(m), t(h_1(m, n)) = t(n)$ ve $s(h_2(n, m)) = s(n), t(h_2(n, m)) = t(m)$ olmak üzere, morfizmlerin hedef kaynak uyumluluğunu sağlaması durumunda aşağıdaki şartları sağlayacak şekilde mevcutsa, bu dönüşümler ile birlikte yukarıdaki diyagrama R-cebroidlerin çaprazlanmış karesi denir.

CK_1) κ, κ' morfizmleri P nin etkilerini korur, ayrıca $\kappa, \kappa', \omega, \nu$ ve $\nu\kappa'$ ve $\omega\kappa$ birer R-cebroidler üzerinde çaprazlanmış modüldür.

$$\begin{aligned}
CK_2) \quad & h_1(m + m', n) &= h_1(m, n) + h_1(m', n), \\
& h_1(m, n + n') &= h_1(m, n) + h_1(m, n'), \\
& h_2(n + n', m) &= h_2(n, m) + h_2(n', m), \\
& h_2(n, m + m') &= h_2(n, m) + h_2(n, m') \\
CK_3) \quad & r.h_1(m, n) &= h_1(r.m, n) = h_1(m, r.n), \\
& r.h_2(n, m) &= h_2(r.n, m) = h_2(n, r.m), r \in R \\
CK_4) \quad & {}^p h_1(m, n) &= h_1({}^p m, n), \\
& h_1(m, n)^q &= h_1(m, n^q), \\
& {}^p h_2(n, m) &= h_2({}^p n, m), \\
& h_2(n, m)^q &= h_2(n, m^q) \\
CK_5) \quad & h_1(mm', n) &= {}^m h_1(m', n) = h_1(m, {}^{m'} n), \\
& h_1(m', n)^{m''} &= h_1(m', n^{m''}), \\
& h_2(nn', m) &= {}^n h_2(n', m) = h_2(n, {}^{n'} m), \\
& h_2(n', m)^{n''} &= h_2(n', m^{n''}) \\
CK_6) \quad & h_1(m, nn') &= h_1(m, n)^{n'} = h_1(m^n, n'), \\
& {}^{n''} h_1(m, n) &= h_1({}^{n''} m, n), \\
& h_2(n, mm') &= h_2(n, m)^{m'} = h_2(n^m, m'), \\
& {}^{m''} h_2(n, m) &= h_2({}^{m''} n, m) \\
CK_7) \quad & \kappa(h_1(m, n)) &= m^n, \\
& \kappa(h_2(n, m)) &= {}^n m \\
CK_8) \quad & \kappa'(h_1(m, n)) &= {}^m n, \\
& \kappa'(h_2(n, m)) &= n^m \\
CK_9) \quad & h_1(\kappa l, n) &= l^n, \\
& h_2(n, \kappa l) &= {}^n l \\
CK_{10}) \quad & h_1(m, \kappa' l) &= {}^m l, \\
& h_2(\kappa' l, m) &= l^m \\
CK_{11}) \quad & h_1(m, n)h_1(m', n') &= h_1(m^n, {}^{m'} n'), \\
& h_2(n, m)h_2(n', m') &= h_2(n^m, {}^{n'} m')
\end{aligned} \tag{5.1}$$

5.1.1 R-Cebiroidler için Çaprazlanmış Kare Morfizmi

$\mathbf{K} = (L, M, N, P, \kappa, \kappa', v, \omega)$ ve $\mathbf{K}' = (L', M', N', P', \kappa'', \kappa'', v', \omega')$ aynı obje kümesi üzerinde iki R- cebiroid çaprazlanmış karesi olsun.



$\varphi_L, \varphi_M, \varphi_N$ ve φ_P obje kümesi üzerinde birim olan R- cebiroid morfizmleri için yukarıda ki diyagramlar değişmeli oluyorsa ve hedef kaynak uyumluluk şartının sağlanması durumunda

- 1) $\varphi_L(pl) = \varphi_P^{(p)}(\varphi_L(l))$
 $\varphi_L(l^{p'}) = \varphi_L(l)^{\varphi_P^{(p'')}}$
- 2) $\varphi_M(pm) = \varphi_P^{(p)}(\varphi_M(m))$
 $\varphi_M(m^{p'}) = \varphi_M(m)^{\varphi_P^{(p'')}}$
- 3) $\varphi_N(pn) = \varphi_P^{(p)}(\varphi_N(n))$
 $\varphi_N(n^{p'}) = \varphi_N(n)^{\varphi_P^{(p'')}}$

şartları sağlanıyorsa $\varphi = (\varphi_L, \varphi_M, \varphi_N, \varphi_P)$ 4-lüsüne \mathbf{K} den \mathbf{K}' ne bir çaprazlanmış kare morfizmi denir.

Böylece objeleri R-cebiroid çaprazlanmış kareleri ve morfizmleri çaprazlanmış kare morfizmi olan $\mathbf{Crs}^2(\mathbf{Alg})$ kategorisi elde edilir.

Teorem 5. Moore kompleksinin uzunluğu 2 olan bir simplisel R-cebiroidden, R-cebiroidlerin bir çaprazlanmış karesi elde edilebilir.

Kanıt. $\mathbf{E} = (E_n, d_i^n, s_j^n)$, Moore kompleks uzunluğu 2 olan bir simplisel R-cebiroid olsun. Buna göre $NE_2 = \ker d_1^2 \cap \ker d_0^2$, $NE_1 = \ker d_0^1$ dir. Burada $\overline{NE_1} = \ker d_1^1 = \{n \in N \mid d_1^1(n) = \mathbf{0}\}$ olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} NE_2 & \xrightarrow{d_2^2} & NE_1 \\ d_2^2 \downarrow & & \downarrow i \\ \overline{NE_1} & \xrightarrow{i} & E_1 \end{array}$$

diyagramı oluşturulsun.

$e, e', e'' \in E_1$, $m, m_1, m', m_2, m'', m''' \in NE_1$, $n, n_1, n', n_2, n'', n''' \in \overline{NE_1}$, $z \in NE_2$ ve $r \in R$ için hedef kaynak uyumluluk şartının sağlanması durumunda E_1 in NE_1 ve $\overline{NE_1}$ üzerine sağ ve sol etkileri;

$$\begin{aligned} \bullet E_1 \times NE_1 &\rightarrow NE_1 & \bullet NE_1 \times E_1 &\rightarrow NE_1 \\ (e, m) &\mapsto {}^e m = em & (m, e') &\mapsto m^{e'} = me' \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \bullet E_1 \times \overline{NE_1} &\rightarrow \overline{NE_1} & \bullet \overline{NE_1} \times E_1 &\rightarrow \overline{NE_1} \\ (e, n) &\mapsto {}^e n = en & (n, e') &\mapsto n^{e'} = ne' \end{aligned} \quad (5.3)$$

şeklinde E_1 de ki çarpım olarak, E_1 in NE_2 üzerine sağ ve sol etkisi;

$$\begin{aligned} \bullet E_1 \times NE_2 &\rightarrow NE_2 & \bullet NE_2 \times E_1 &\rightarrow NE_2 \\ (e, z) &\mapsto {}^e z = s_1^1(e)z & (z, e') &\mapsto z^{e'} = z s_1^1(e') \end{aligned} \quad (5.4)$$

şeklinde, NE_1 in $\overline{NE_1}$ üzerine sağ ve sol etkisi;

$$\begin{aligned} \bullet NE_1 \times \overline{NE_1} &\rightarrow \overline{NE_1} & \bullet \overline{NE_1} \times NE_1 &\rightarrow \overline{NE_1} \\ (m, n') &\mapsto {}^m n' = mn' & (n, m') &\mapsto n^{m'} = nm' \end{aligned} \quad (5.5)$$

ve $\overline{NE_1}$ in NE_1 üzerine sağ ve sol etkisi de;

$$\begin{aligned} \bullet \overline{NE_1} \times NE_1 &\rightarrow NE_1 & \bullet NE_1 \times \overline{NE_1} &\rightarrow NE_1 \\ (n, m') &\mapsto {}^n m' = nm' & (m, n') &\mapsto m^{n'} = mn' \end{aligned} \quad (5.6)$$

şeklinde yine E_1 de ki çarpım olarak tanımlansın. Ayrıca

$$\begin{aligned} h_1 : NE_1 \times_s \overline{NE_1} &\rightarrow NE_2 \\ (m, n') &\mapsto h_1(m, n') = s_1^1(m)[s_1^1(n') - s_0^1(n')] \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned}
h_2 : \overline{NE_1} \times_s NE_1 &\rightarrow NE_2 \\
(n, m') &\mapsto h_2(n, m') = [s_1^1(n) - s_0^1(n)]s_1^1(m')
\end{aligned} \tag{5.8}$$

olacak şekilde h_1, h_2 dönüşümleri tanımlansın. Şimdi tüm bu tanımlamalar gözönüne alındığında yukarıdaki diyagramın h_1, h_2 dönüşümleri ile birlikte bir çaprazlanmış kare olduğu gösterilecektir.

CK_1) Burada $i : NE_1 \rightarrow E_1$ ve $i : \overline{NE_1} \rightarrow E_1$ morfizmlerinin birer çaprazlanmış modül olduğu açıktır.

$$\begin{aligned}
CK_2) \quad h_1(m + m_1, n') &= s_1^1(m + m_1)[s_1^1(n') - s_0^1(n')] \\
&= (s_1^1(m) + s_1^1(m_1)) [s_1^1(n') - s_0^1(n')] \\
&= s_1^1(m)[s_1^1(n') - s_0^1(n')] + s_1^1(m_1)[s_1^1(n') - s_0^1(n')] \\
&= h_1(m, n') + h_1(m_1, n')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_1(m, n' + n_2) &= s_1^1(m)[s_1^1(n' + n_2) - s_0^1(n' + n_2)] \\
&= s_1^1(m)[s_1^1(n') - s_0^1(m') + s_1^1(n_2) - s_0^1(n_2)] \\
&= s_1^1(m)[s_1^1(n') - s_0^1(n')] + s_1^1(m)[s_1^1(n_2) - s_0^1(n_2)] \\
&= h_1(m, n') + h_1(m, n_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_2(n + n_1, m') &= [s_1^1(n + n_1) - s_0^1(n + n_1)]s_1^1(m') \\
&= [s_1^1(n) - s_0^1(n) + s_1^1(n_1) - s_0^1(n_1)]s_1^1(m') \\
&= [s_1^1(n) - s_0^1(n)]s_1^1(m') + [s_1^1(n_1) - s_0^1(n_1)]s_1^1(m') \\
&= h_2(n, m') + h_2(n_1, m')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_2(n, m' + m_2) &= [s_1^1(n) - s_0^1(n)]s_1^1(m' + m_2) \\
&= [s_1^1(n) - s_0^1(n)]s_1^1(m') + [s_1^1(n) - s_0^1(n)]s_1^1(m_2) \\
&= h_2(n, m') + h_2(n, m_2)
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
CK_3) \quad r.h_1(m, n') &= r.s_1^1(m)[s_1^1(n') - s_0^1(n')] \\
&= (r.s_1^1(m))[s_1^1(n') - s_0^1(n')] \\
&= h_1(r.m, n') \\
&= s_1^1(m)[r.s_1^1(n') - r.s_0^1(n')] \\
&= h_1(m, r.n')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r.h_2(n, m') &= r.[s_1^1(n) - s_0^1(n)]s_1^1(m') \\
&= [r.s_1^1(n) - r.s_0^1(n)]s_1^1(m') \\
&= h_2(r.n, m') \\
&= [s_1^1(n) - s_0^1(n)]r.s_1^1(m') \\
&= h_2(n, r.m')
\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}
CK_4) \quad {}^e h_1(m, n') &= s_1^1(e)[s_1^1(m)[s_1^1(n') - s_0^1(n')]] \\
&= s_1^1(em)[s_1^1(n') - s_0^1(n')] \\
&= s_1^1({}^e m)[s_1^1(n') - s_0^1(n')] \\
&= h_1({}^e m, n')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_1(m, n')^{e''} &= s_1^1(m)[s_1^1(n') - s_0^1(y')][s_1^1(e'')] \\
&= s_1^1(m)[s_1^1(n')s_1^1(e'') - s_0^1(n)s_1^1(e'')] \\
&= s_1^1(m)[s_1^1(n')s_1^1(e'') - s_0^1(n')s_0^1(e'') + s_0^1(n')s_0^1(e'') - s_0^1(n')s_1^1(e'')] \\
&= s_1^1(m)[s_1^1(n')s_1^1(e'') - s_0^1(y')s_0^1(e'')] + s_1^1(m)[s_0^1(n')s_0^1(e'') - s_0^1(n')s_1^1(e'')] \\
&= s_1^1(m)[s_1^1(n')s_1^1(e'') - s_0^1(n')s_0^1(e'')] + s_1^1(m)s_0^1(n')[s_0^1(e'') - s_1^1(e'')] \\
&= s_1^1(x)[s_1^1(n')s_1^1(e'') - s_0^1(n')s_0^1(e'')] \\
&\quad + s_1^1(m)(s_0^1(n') - s_1^1s_0^0d_1^1(n'))[s_0^1(e'') - s_1^1(e'')] \\
&= s_1^1(m)[s_1^1(n')s_1^1(e'') - s_0^1(n')s_0^1(e'')] \\
&\quad + s_1^1(m)(s_0^1(n') - d_3^3s_1^2s_0^1(n'))[s_0^1(e'') - s_1^1(e'')] \\
&= s_1^1(m)[s_1^1(n')s_1^1(e'') - s_0^1(n')s_0^1(e'')] \\
&\quad + d_3^3 \underbrace{(s_2^2s_1^1(m)(s_2^2s_0^1(n') - s_1^2s_0^1(n'))[s_2^2s_0^1(e'') - s_2^2s_1^1(e'')])}_{\in NE_3} \\
&= s_1^1(m)[s_1^1(n'e'') - s_0^1(n'e'')] + \mathbf{0} \\
&= h_1(m, (n')^{e''})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^e h_2(n, m') &= s_1^1(e)[s_1^1(n) - s_0^1(n)]s_1^1(m') \\
&= [s_1^1(e)s_1^1(n) - s_1^1(e)s_0^1(n)]s_1^1(m') \\
&= [s_1^1(e)s_1^1(n) - s_0^1(e)s_0^1(n) + s_0^1(e)s_0^1(n) - s_1^1(e)s_0^1(n)]s_1^1(m') \\
&= [s_1^1(e)s_1^1(n) - s_0^1(e)s_0^1(n)]s_1^1(m') + [s_0^1(e)s_0^1(n) - s_1^1(e)s_0^1(n)]s_1^1(m') \\
&= [s_1^1(e)s_1^1(n) - s_0^1(e)s_0^1(n)]s_1^1(m') \\
&\quad + [s_0^1(e) - s_1^1(e)]s_0^1(n)s_1^1(m') \\
&= [s_1^1(e)s_1^1(n) - s_0^1(e)s_0^1(n)]s_1^1(m') \\
&\quad + [s_0^1(e) - s_1^1(e)](s_0^1(n) - s_1^1s_0^0d_1^1(n))s_1^1(m') \\
&= [s_1^1(e)s_1^1(n) - s_0^1(e)s_0^1(n)]s_1^1(m') \\
&\quad + [s_0^1(e) - s_1^1(e)](s_0^1(n) - d_3^3s_1^2s_0^1(n))s_1^1(m') \\
&= [s_1^1(e)s_1^1(n) - s_0^1(e)s_0^1(n)]s_1^1(m') \\
&\quad + d_3^3 \underbrace{[s_2^2s_0^1(e) - s_2^2s_1^1(e)](s_2^2s_0^1(n) - s_1^2s_0^1(n))s_2^2s_1^1(m')}_{\in NE_3} \\
&= [s_1^1(en) - s_0^1(en)] + \mathbf{0} \\
&= h_1({}^e n, m')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_2(n, m')^{e''} &= [[s_1^1(n) - s_0^1(n)]s_1^1(m')]s_1^1(e'') \\
&= [s_1^1(n) - s_0^1(n)]s_1^1(m'e'') \\
&= h_2(n, m'^{e''})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CK_5) \quad h_1(mm', n'') &= s_1^1(m)s_1^1(m')[s_1^1(n'') - s_0^1(n'')] \\
&= s_1^1(\underbrace{m}_{\in NE_1}) \underbrace{[s_1^1(m')[s_1^1(n'') - s_0^1(n'')]}_{\in NE_2} \\
&= {}^m h_1(m', n'') \\
&= s_1^1(m)[s_1^1(m')[s_1^1(n'') - s_0^1(n'')]] \\
&= s_1^1(m)s_1^1(m')[s_1^1(n'') - s_0^1(n'')] \\
&= s_1^1(m)[s_1^1(m')s_1^1(n'') - s_1^1(m')s_0^1(n'')] \\
&= s_1^1(m)[s_1^1(m')s_1^1(n'') - s_1^1(m')s_0^1(n'') + s_0^1(m')s_0^1(n'') - s_0^1(m')s_0^1(n'')] \\
&= s_1^1(m)[s_1^1(m')s_1^1(n'') - s_0^1(m')s_0^1(n'')] - s_1^1(m)[s_1^1(m') - s_0^1(m')]s_0^1(n'') \\
&= s_1^1(m)[s_1^1(m')s_1^1(n'') - s_0^1(m')s_0^1(n'')] \\
&\quad - s_1^1(m)[s_1^1(m') - s_0^1(m')][s_0^1(n'') - s_1^1s_0^0d_1^1(n'')] \\
&= s_1^1(m)[s_1^1(m')s_1^1(n'') - s_0^1(m')s_0^1(n'')] \\
&\quad - s_1^1(m)[s_1^1(m') - s_0^1(m')][s_0^1(n'') - d_3^3s_1^2s_0^1(n'')] \\
&= s_1^1(m)[s_1^1(m')s_1^1(n'') - s_0^1(m')s_0^1(n'')] \\
&\quad - d_3^3 \underbrace{(s_2^2s_1^1(m)[s_2^2s_1^1(m') - s_2^2s_0^1(m')][s_2^2s_0^1(n'') - s_2^2s_0^1(n'')])}_{\in NE_3} \\
&= s_1^1(m)[s_1^1(m'n'') - s_0^1(m'n'')] + \mathbf{0} \\
&= h_1(m, {}^m n'')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_1(m, n')^{m''} &= s_1^1(m)[s_1^1(n') - s_0^1(n')]s_1^1(m'') \\
&= s_1^1(m)[s_1^1(n')s_1^1(m'') - s_0^1(n')s_1^1(m'')] \\
&= s_1^1(m)[s_1^1(n')s_1^1(m'') - s_0^1(n')s_0^1(m'') + s_0^1(n')s_0^1(m'') - s_0^1(n')s_1^1(m'')] \\
&= s_1^1(m)[s_1^1(n')s_1^1(m'') - s_0^1(n')s_0^1(m'')] + s_1^1(m)[s_0^1(n')s_0^1(m'') - s_0^1(n')s_0^1(m'')] \\
&= s_1^1(m)[s_1^1(n')s_1^1(m'') - s_0^1(n')s_0^1(m'')] + s_1^1(m)s_0^1(n')[s_0^1(m'') - s_0^1(m'')] \\
&= s_1^1(m)[s_1^1(n')s_1^1(m'') - s_0^1(n')s_0^1(m'')] \\
&\quad + s_1^1(m)(s_0^1(n') - s_1^1s_0^0d_1^1(n'))[s_0^1(m'') - s_0^1(m'')] \\
&= s_1^1(m)[s_1^1(n')s_1^1(m'') - s_0^1(n')s_0^1(m'')] \\
&\quad + s_1^1(m)(s_0^1(n') - d_3^3s_1^2s_0^1(n'))[s_0^1(m'') - s_0^1(m'')] \\
&= s_1^1(m)[s_1^1(n')s_1^1(m'') - s_0^1(n')s_0^1(m'')] \\
&\quad + d_3^3 \underbrace{(s_2^2s_1^1(m)(s_2^2s_0^1(n') - s_2^2s_0^1(n'))[s_2^2s_0^1(m'') - s_2^2s_0^1(m'')])}_{\in NE_3} \\
&= s_1^1(m)[s_1^1(n')s_1^1(m'') - s_0^1(n')s_0^1(m'')] + \mathbf{0} \\
&= h_1(m, n')^{m''}
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
h_2(nn', m'') &= [s_1^1(nn') - s_0^1(nn')]s_1^1(m'') \\
&= s_1^1(\underbrace{n}_{\in NE_1}) \underbrace{[[s_1^1(n') - s_0^1(n')]s_1^1(m'')]}_{NE_2} \\
&= {}^n h_2(n', m'')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_2(n, {}^n m'') &= [s_1^1(n) - s_0^1(n)]s_1^1(y' m'') \\
&= [s_1^1(n)s_1^1(n') - s_0^1(n)s_1^1(n') + s_0^1(n)s_0^1(n') - s_0^1(n)s_1^1(n')]s_1^1(m'') \\
&= [s_1^1(n)s_1^1(n') - s_0^1(n)s_0^1(n')]s_1^1(m'') \\
&\quad + d_3^3 \underbrace{([s_2^2 s_0^1(n)s_0^1(n') - s_2^2 s_1^1(n')]s_2^2 s_1^1(m''))}_{\in NE_3} \\
&= [s_1^1(n)s_1^1(n') - s_0^1(n)s_0^1(n')]s_1^1(m'') + \mathbf{0} \\
&= h_2(nn', m'')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_2(n, m')^{n''} &= [s_1^1(n) - s_0^1(n)]s_1^1(m'')s_1^1(n'') \\
&= [s_1^1(n) - s_0^1(n)]s_1^1(m''n'') \\
&= h_2(n, m''^{n''})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CK_6) \quad h_1(m, n'n'') &= s_1^1(m)[s_1^1(n')s_1^1(n'') - s_0^1(n')s_0^1(n'')] \\
&= s_1^1(m)s_1^1(n')s_1^1(n'') - s_1^1(m)s_0^1(n')s_0^1(n'') \\
&\quad + s_1^1(m)s_1^1(n')s_0^1(n'') - s_1^1(m)s_0^1(n')s_1^1(n'') \\
&= s_1^1(mn')[s_1^1(n'') - s_0^1(n'')] - s_1^1(m)[s_1^1(n') - s_0^1(n')][s_0^1(n'') - s_1^1(n'')] \\
&= s_1^1(m)s_1^1(n')[s_1^1(n'') - s_0^1(n'')] - s_1^1(m)[s_1^1(n') - s_0^1(n')][s_0^1(n'') - s_1^1(n'')] \\
&= s_1^1(m)s_1^1(n')[s_1^1(n'') - s_0^1(n'')] - s_1^1(m)[s_1^1(n') - s_0^1(n')][s_0^1(n'') - d_3^3 s_1^2 s_0^1(n'')] \\
&= s_1^1(m)s_1^1(n')[s_1^1(n'') - s_0^1(n'')] \\
&\quad - d_3^3 \underbrace{(s_2^2 s_1^1(m)[s_1^1(n') - s_2^2 s_0^1(n')][s_2^2 s_0^1(n'') - s_1^2 s_0^1(n'')])}_{\in NE_3} \\
&= s_1^1(m)s_1^1(n')[s_1^1(n'') - s_0^1(n'')] + \mathbf{0} \\
&= h_1(m^{n'}, n'')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_1(m, n'n'') &= s_1^1(m)[s_1^1(n'n'') - s_0^1(n'n'')] \\
&= s_1^1(m)[s_1^1(n')s_1^1(n'') - s_0^1(n')s_0^1(n'')] \\
&= s_1^1(m)[s_1^1(n')s_1^1(n'') - s_0^1(n')s_0^1(n'')] + s_1^1(m)[s_0^1(n')s_0^1(n'') - s_0^1(n')s_1^1(n'')] \\
&= s_1^1(m)[s_1^1(n')s_1^1(n'') - s_0^1(n')s_0^1(n'')] + s_0^1(n')s_0^1(n'') - s_0^1(n')s_1^1(n'')] \\
&= s_1^1(m)[s_1^1(n')s_1^1(n'') - s_0^1(n')s_1^1(n'')] \\
&= s_1^1(m)[s_1^1(n') - s_0^1(n')][s_1^1(n'')] \\
&= h_1(m, n')^{n''}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^n h_1(m', n'') &= s_1^1(n)s_1^1(m')[s_1^1(n'') - s_0^1(n'')] \\
&= s_1^1(nm')[s_1^1(n'') - s_0^1(n'')] \\
&= h_1({}^n m', n'')
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
h_2(n, m'm'') &= [s_1^1(n) - s_0^1(n)]s_1^1(m'm'') \\
&= [s_1^1(n) - s_0^1(n)]s_1^1(m')s_1^1(m'') \\
&= h_2(n, m')^{m''}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_2(n^{m'}, m'') &= h_2(nm', m'') \\
&= [s_1^1(n)s_1^1(m') - s_0^1(n)s_0^1(m')]s_1^1(m'') \\
&= [s_1^1(n)s_1^1(m') - s_0^1(n)s_1^1(m') + s_0^1(n)s_1^1(m') - s_0^1(n)s_0^1(m')]s_1^1(m'') \\
&= [s_1^1(n)s_1^1(m') - s_0^1(n)s_1^1(m')]s_1^1(m'') \\
&\quad + d_3^3 \underbrace{([s_2^2s_0^1(n)s_1^1(m') - s_2^2s_0^1(n)s_0^1(m')]s_2^2s_1^1(m''))}_{\in NE_3} \\
&= [s_1^1(n)s_1^1(m') - s_0^1(n)s_1^1(m')]s_1^1(m'') + \mathbf{0} \\
&= [s_1^1(n) - s_0^1(n)]s_1^1(m')s_1^1(m'') \\
&= h_2(n, m'm'')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^m h_2(n', m'') &= s_1^1(m)[s_1^1(n') - s_0^1(n')]s_1^1(m'') \\
&= [s_1^1(m)s_1^1(n') - s_1^1(m)s_0^1(n')]s_1^1(m'') \\
&= [s_1^1(m)s_1^1(n') - s_0^1(m)s_0^1(n') \\
&\quad + s_0^1(m)s_0^1(n') - s_1^1(m)s_0^1(n')]s_1^1(m'') \\
&= [s_1^1(m)s_1^1(n') - s_0^1(m)s_0^1(n')]s_1^1(m'') \\
&\quad + [s_0^1(m)s_0^1(n') - s_1^1(m)s_0^1(n')]s_1^1(m'') \\
&= [s_1^1(m)s_1^1(n') - s_0^1(m)s_0^1(n')]s_1^1(m'') \\
&\quad + d_3^3 \underbrace{([s_2^2s_0^1(m)s_0^1(n') - s_2^2s_0^1(m)s_1^1(n')]s_2^2s_1^1(m''))}_{\in NE_3} \\
&= [s_1^1(m)s_1^1(n') - s_0^1(m)s_0^1(n')]s_1^1(m'') + \mathbf{0} \\
&= h_2({}^m n', m'')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CK_7) \quad d_2^2 h_1(m, n') &= d_2^2 [s_1^1(m)[s_1^1(n') - s_0^1(n')]] \\
&= d_2^2 s_1^1(m) [d_2^2 s_1^1(n') - d_2^2 s_0^1(n')] \\
&= m [n' - s_0^0 d_1^1(\underbrace{\quad}_{\in NE_1} n')] \\
&= mn' \\
&= m^{n'}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_2^2 h_2(n, m') &= d_2^2 [[s_1^1(n) - s_0^1(n)]s_1^1(m')] \\
&= [d_2^2 s_1^1(n) - d_2^2 s_0^1(n)]d_2^2 s_1^1(m') \\
&= [n - s_0^0 d_1^1(\underbrace{\quad}_{\in NE_1} n)]m' \\
&= nm' \\
&= n^{m'}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CK_8) \quad d_2^2 h_1(m, n') &= d_2^2(s_1^1(m)[s_1^1(n') - s_0^1(n')]) \\
&= d_2^2 s_1^1(m)[d_2^2 s_1^1(n') - d_2^2 s_0^1(n')] \\
&= x[n' - s_0^0 d_1^1(\underbrace{n'}_{\in NE_1})] \\
&= mn' \\
&= {}^m n'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_2^2 h_2(n, m') &= d_2^2[[s_1^1(n) - s_0^1(n)]s_1^1(m')] \\
&= [d_2^2 s_1^1(n) - d_2^2 s_0^1(n)]d_2^2 s_1^1(m') \\
&= [n - s_0^0 d_1^1(\underbrace{n}_{\in NE_1})]m' \\
&= nm' \\
&= n^{m'}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CK_9) \quad h_1(d_2^2(z), n'') &= s_1^1 d_2^2(z)[s_1^1(n'') - s_0^1(n'')] \\
&= s_1^1 d_2^2(z)[s_1^1(n'') - s_0^1(n'')] - z s_1^1(n'') + z s_1^1(n'') + z s_1^1 s_0^0 d_1^1(n'') \\
&= d_3^3 \underbrace{[s_1^1(z)(s_2^2 s_1^1(n'') - s_2^2 s_0^1(n'')) - s_2^2(z) s_2^2 s_1^1(n'') + s_2^2(z) s_1^2 s_0^1(n'')]}_{\in NE_3} + z s_1^1(n'') \\
&= z^{n''}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_2(n, d_2^2(z)) &= [s_1^1(n) - s_0^1(n)]s_1^1 d_2^2(z) \\
&= [s_1^1(n) - s_0^1(n)]s_1^1 d_2^2(z) + s_1^1(n)z - s_1^1(n)z + s_1^1 s_0^0 d_1^1(n)z \\
&= d_3^3 \underbrace{[s_2^2 s_1^1(n) - s_2^2 s_0^1(n)]s_1^1(z) - s_2^2 s_1^1(n) s_2^2(z) + s_1^2 s_0^1(n) s_2^2(z)}_{\in NE_3} + s_1^1(n)z \\
&= {}^n z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CK_{10}) \quad h_1(m, d_2^2(z)) &= s_1^1(m)[s_1^1 d_2^2(z) - s_0^1 d_2^2(z)] \\
&= s_1^1(m)[s_1^1 d_2^2(z) - s_0^1 d_2^2(z) - z + z] \\
&= d_3^3 s_2^2 s_1^1(m)[d_3^3 s_1^2(z) - d_3^3 s_0^2(z) - d_3^3 s_2^2(z)] + s_1^1(m)z \\
&= d_3^3 \underbrace{[s_2^2 s_1^1(m)[s_1^2(z) - s_0^2(z) - s_2^2(z)]]}_{\in NE_3} + s_1^1(m)z \\
&= m z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_2(d_2^2(z), m'') &= [s_1^1 d_2^2(z) - s_0^1 d_2^2(z)]s_1^1(m'') \\
&= [s_1^1 d_2^2(z) - s_0^1 d_2^2(z) - z + z]s_1^1(m'') \\
&= [d_3^3 s_1^2(z) - d_3^3 s_0^2(z) - d_3^3 s_2^2(z)]d_3^3 s_2^2 s_1^1(m'') + z s_1^1(m'') \\
&= d_3^3 \underbrace{[s_1^2(z) - s_0^2(z) - s_2^2(z)]s_2^2 s_1^1(m'')}_{\in NE_3} + z s_1^1(m'') \\
&= z m''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CK_{11}) \quad h_1(m, n')h_1(m'', n''') &= s_1^1(m)[s_1^1(n') - s_0^1(n')]s_1^1(m'')[s_1^1(n''') - s_0^1(n''')] \\
&= [s_1^1(m)s_1^1(n') - s_1^1(m)s_0^1(n')][s_1^1(m'')s_1^1(n''') - s_1^1(m'')s_0^1(n''')] \\
&= s_1^1(m)s_1^1(n')s_1^1(m'')s_1^1(n''') - s_1^1(m)s_1^1(n')s_1^1(m'')s_0^1(n''') \\
&\quad - s_1^1(m)s_0^1(n')s_1^1(m'')s_1^1(n''') - s_1^1(m)s_0^1(n')s_1^1(m'')s_0^1(n''') \\
&\quad + s_1^1(m)s_1^1(n')s_0^1(m'')s_0^1(n''') - s_1^1(m)s_1^1(n')s_0^1(m'')s_0^1(n''') \\
&= s_1^1(m)s_1^1(n')s_1^1(m'')s_1^1(n''') - s_1^1(m)s_1^1(n')s_0^1(m'')s_0^1(n''')d_3^3(A) \\
&= s_1^1(m)s_1^1(n')[s_1^1(m'')s_1^1(n''') - s_0^1(m'')s_0^1(n''')] + \mathbf{0} \\
&= s_1^1(mn')[s_1^1(m''n''') - s_0^1(m''n''')] + \mathbf{0} \\
&= h_1(mn', m''n''') \\
&= h_1(m^{n'}, m''n''')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_2(n, m')h_2(n'', m''') &= s_1^1(n)[s_1^1(m') - s_0^1(m')]s_1^1(n'')[s_1^1(m''') - s_0^1(m''')] \\
&= [s_1^1(n)s_1^1(m') - s_1^1(n)s_0^1(m')][s_1^1(n'')s_1^1(m''') - s_1^1(n'')s_0^1(m''')] \\
&= s_1^1(n)s_1^1(m')s_1^1(n'')s_1^1(m''') - s_1^1(n)s_1^1(m')s_1^1(n'')s_0^1(m''') \\
&\quad - s_1^1(n)s_0^1(m')s_1^1(n'')s_1^1(m''') - s_1^1(n)s_0^1(m')s_1^1(n'')s_0^1(m''') \\
&\quad + s_1^1(n)s_1^1(m')s_0^1(n'')s_0^1(m''') - s_1^1(n)s_1^1(m')s_0^1(n'')s_0^1(m''') \\
&= s_1^1(n)s_1^1(m')s_1^1(n'')s_1^1(m''') - s_1^1(n)s_1^1(m')s_0^1(n'')s_0^1(m''')d_3^3(B) \\
&= s_1^1(n)s_1^1(m')[s_1^1(n'')s_1^1(m''') - s_0^1(n'')s_0^1(m''')] + \mathbf{0} \\
&= s_1^1(nm'')[s_1^1(n''m''') - s_0^1(n''m''')] + \mathbf{0} \\
&= h_2(nm'', n''m''') \\
&= h_2(n^{m'}, n''m''')
\end{aligned}$$

Burada

$$A = s_2^2(-s_1^1(m)s_1^1(n')s_1^1(m'')s_0^1(n''') - s_1^1(m)s_0^1(n')s_1^1(m'')s_1^1(n'''))$$

$$s_2^2(-s_1^1(m)s_0^1(n')s_1^1(m'')s_0^1(n''') + s_1^1(m)s_1^1(n')s_0^1(m'')s_0^1(n'''))$$

$$B = s_2^2(-s_1^1(n)s_1^1(m')s_1^1(n'')s_0^1(m''') - s_1^1(n)s_0^1(m')s_1^1(n'')s_1^1(m'''))$$

$s_2^2(-s_1^1(n)s_0^1(m')s_1^1(n'')s_0^1(m''') + s_1^1(n)s_1^1(m')s_0^1(n'')s_0^1(m'''))$ dır. Böylece tüm çaprazlanmış kare şartlarının sağlandığı gösterilmiş olur.

□

$\mathbf{E} = (E_n, d_i^n, s_j^n)$ ve $\mathbf{E}' = (E_n, \delta_i^n, \sigma_j^n)$ Moore kompleksinin uzunluğu 2 olan simplisel R-cebiroidler olsun.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \xrightarrow{d_2^2} & & \\
 & & \xrightarrow{d_1^2} & & \\
 \mathbf{E} = \dots & E_2 & \xrightarrow{d_0^2} & E_1 & \xrightarrow{d_0^1} & E_0 \\
 & \xleftarrow{s_1^1} & & \xleftarrow{s_0^1} & & \\
 & \xleftarrow{s_0^1} & & & & \\
 & \downarrow f_2 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 \\
 & & \xrightarrow{\delta_2^2} & & \xrightarrow{\delta_1^1} & \\
 \mathbf{E}' = \dots & E'_2 & \xrightarrow{\delta_0^2} & E'_1 & \xrightarrow{\delta_0^1} & E'_0 \\
 & \xleftarrow{\sigma_1^1} & & \xleftarrow{\sigma_0^1} & & \\
 & \xleftarrow{\sigma_0^1} & & & &
 \end{array}$$

$\mathbf{f} = (\dots, f_2, f_1, f_0)$ ise $\mathbf{E} = (E_n, d_i^n, s_j^n)$ den $\mathbf{E}' = (E'_n, \delta_i^n, \sigma_j^n)$ ne bir simplisel R-cebiroid morfizmi olsun. \mathbf{E} ve \mathbf{E}' den elde edilen çaprazlanmış kareler $(L, M, N, P, \kappa, \kappa', v, \omega)$ ve $(L', M', N', P', \kappa', \kappa'', v', \omega')$ olsun. Buna göre $\overline{\varphi}_L = f_2|_L, \overline{\varphi}_M = f_1|_M, \overline{\varphi}_N = f_1|_N$ ve $\overline{\varphi}_P = f_1$ olarak alınırsa $\overline{\varphi} = (\overline{\varphi}_L, \overline{\varphi}_M, \overline{\varphi}_N, \overline{\varphi}_P)$ ailesi çaprazlanmış kare morfizmi olur. Böylece $\mathbf{Simp.R-Alg}_{\leq 2}$ kategorisinden $\mathbf{Crs}^2(\mathbf{Alg})$ kategorisine bir fonktor elde edilir. Bu fonktor $\mathbf{F}_1 : \mathbf{Simp.R-Alg}_{\leq 2} \rightarrow \mathbf{Crs}^2(\mathbf{Alg})$ biçiminde gösterilir. Burada $\mathbf{E} = (E_n, d_i^n, s_j^n)$ Moore kompleks uzunluğu 2 olan bir simplisel

R-cebiroid ise $L = NE_2$, $M = NE_1$, $N = \overline{NE_1} = \ker d_1^1$, $P = E_1$ ve yukarıdaki gibi tanımlanan h_1, h_2 dönüşümleri için $\mathbf{F}_1(\mathbf{E}) = (L, M, N, P, \kappa, \kappa', v, \omega)$ bir çaprazlanmış kare olur ve $\mathbf{f} : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}'$ simplisel R-cebiroid morfizmi ise $\mathbf{F}_1(\mathbf{f}) = (\overline{\varphi_L}, \overline{\varphi_M}, \overline{\varphi_N}, \overline{\varphi_P}) : \mathbf{F}_1(\mathbf{E}) \rightarrow \mathbf{F}_1(\mathbf{E}')$ bir çaprazlanmış kare morfizmi olur.

Teorem 6. *R-cebiroidlerin çaprazlanmış karesinden, Moore kompleks uzunluğu 2 olan bir simplisel R-cebiroid elde edilebilir.*

Kanıt. $\mathbf{K} = (L, M, N, P, \kappa, \kappa', v, \omega)$ R-cebiroidlerin bir çaprazlanmış karesi yani

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\kappa} & M \\ \kappa' \downarrow & & \downarrow \omega \\ N & \xrightarrow{v} & P \end{array}$$

olsun. Öyleyse P nin L, M, N üzerine asosyatif etkileri mevcuttur. Ayrıca M nin N ve L üzerine, N nin de M ve L üzerine asosyatif etkileri mevcuttur. Buradan yola çıkarak sırasıyla E_0, E_1, E_2 ve E_3 oluşturulup simplisel özdeşlikleri sağlayacak şekilde R-cebiroid morfizmleri tanımlansın. Ayrıca hedef kaynak uyumluluk şartı sağlansın.

1) $E_0 = P$ olsun.

2) N nin M üzerine ${}^n m = v^{(n)}m$ ve $m^{n'} = m^{v(n')}$ biçimindeki etkilerinin yardımıyla $M \rtimes N$ oluşturulabilir. Ayrıca P nin $M \rtimes N$ üzerine ${}^p(m, n) = ({}^p m, {}^p n)$ ve $(m, n)^{p'} = (m^{p'}, n^{p'})$ şeklindeki etkilerinin yardımıyla da $E_1 = (M \rtimes N) \rtimes P$ oluşturulabilir ve morfizmler de ;

$$\begin{aligned} \bullet & d_0^1 : E_1 \rightarrow E_0 \quad , \quad d_0^1(m, n, p) = p \\ \bullet & d_1^1 : E_1 \rightarrow E_0 \quad , \quad d_1^1(m, n, p) = \omega(m) + v(n) + p \\ \bullet & s_0^0 : E_0 \rightarrow E_1 \quad , \quad s_0^0(p) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, p) \end{aligned} \quad (5.9)$$

şeklinde tanımlansın.

3) $M \rtimes N$ nin L üzerine ${}^{(m,n)}l = h_2(-n, \kappa(l)) = -{}^n l$ ve $l^{(m',n')} = h_1(\kappa(l), n') = l^{n'}$ biçimindeki etkilerinin yardımıyla $H = L \rtimes (M \rtimes N)$ oluşturulabilir. Ayrıca E_1 in H üzerine

$${}^{((m,n),p)}(l, (m', n')) = \omega^{(m)+v(n)}l + {}^p l - h_1(-m, n'), {}^p(m', n') + (m, n)(m', n')$$

$$(l, (m' n'))^{((m'', n''), p)} = l^{\omega(m'')+v(n'')} + l^{p'} - h_2(-n', m''), (m', n')^{p'} + (m', n')(m'', n'')$$

etkilerinin yardımıyla da $E_2 = (L \rtimes (M \rtimes N)) \rtimes ((M \rtimes N) \rtimes P)$ oluşturulabilir ve morfizmler de

- $d_0^2 : E_2 \rightarrow E_1$, $d_0^2(l, m, n, m', n', p) = (m', n', p)$
- $d_1^2 : E_2 \rightarrow E_1$, $d_1^2(l, m, n, m', n', p) = (m + m', n + n', p)$
- $d_2^2 : E_2 \rightarrow E_1$, $d_2^2(l, m, n, m', n', p) = (-\kappa(l) + m, \kappa(l) + n, \omega(m') + v(n') + p)$
- $s_0^1 : E_1 \rightarrow E_2$, $s_0^1(m', n', p) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, m', n', p)$
- $s_1^1 : E_1 \rightarrow E_2$, $s_1^1(m', n', p) = (\mathbf{0}, m', n', \mathbf{0}, \mathbf{0}, p)$

(5.10)

şeklinde tanımlansın.

4) $H = L \times (M \times N)$ nin L üzerine ${}^{(l,m,n)}l' = (ll' - {}^nl')$ ve $l'^{(l'',(m',n'))} = (l'l'' + l''m')$ biçimindeki etkilerinin yardımıyla $J = L \times (L \times (M \times N))$ oluşturulabilir. Ayrıca E_2 nin J üzerine

$$\begin{aligned} & {}^{(l,m,n,m',n',p)}(l', l'', m'', n'') = \\ & (\omega(m)+v(n)l' + \omega(m')+v(n')l'' + \omega(m'')+v(n'')l''' + pl' - h_1(-m, n'') - h_2(-n, \kappa(l'')) - ll'' - \\ & h_1(-\kappa(l), n''), \\ & \omega(m'')+v(n'')l''' + pl'' - h_1(-m', n'') + h_2(-n, \kappa(l'')) + h_1(-\kappa(l), n'') + ll'', mm'' + m''m'' + \\ & n''m'' + m'm'' + m''m'' + n'm'' + pm'', nn'', n'n'', pn'') \end{aligned}$$

$(l', l'', m'', n'')^{(k,w,v,w',v',q)} =$
 $(l'^{\omega(w)+v(v)} + l''^{\omega(w)+v(v)} + l'''^{\omega(w')+v(v')} + l'^q - h_2(-n'', w) - h_2(-n'', \kappa(k)) -$
 $h_1(-\kappa(l'', v)) - l''k,$
 $l''^{\omega(w')+v(v')} + l''^q - h_2(-n'', w') + h_2(-n'', \kappa(k)) + h_1(-\kappa(l''), w) + l''k, m''w + m''v +$
 $n''w + m''w' + m''v' + n''w' + m''^q, n''v + n''v' + n''^q)$ etkilerinin yardımıyla da $E_3 = (L \times (L \times (M \times N))) \times (L \times (M \times N)) \times ((M \times N) \times P)$ oluşturulabilir ve $d_0^3, d_1^3, d_2^3, d_3^3 : E_3 \rightarrow E_2$ morfizmleri E_3 e ait $(l, l', m, n, l'', m', n', m'', n'', p)$ elemanını sırasıyla E_2 ye ait $(l'', m', n', m'', n'', p)$, $(l' + l'', m + m', n + n', m'', n'', p)$, $(l + l', m, n, m' + m'', n' + n'', p)$, $(l, -\kappa(l') + m, \kappa(l') + n, -\kappa(l'') + m', \kappa(l'') + n', \omega(m'') + v(n'') + p)$ elemanlarına ve $s_0^2, s_1^2, s_2^2 : E_2 \rightarrow E_3$ morfizmleride E_2 ye ait (l, m, n, m', n', p) elemanını sırasıyla E_3 e ait $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, l, m, n, m', n', p)$, $(\mathbf{0}, l, m, n, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, m', n', p)$, $(l, \mathbf{0}, m, n, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, m', n', p)$ elemanlarına taşıyacak şekilde tanımlansın. Burada

$$\begin{aligned} \ker d_0^3 &= \{(l, l', m, n, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) | l, l' \in L\} \\ \ker d_1^3 &= \{(l, -l'', -m', -n', l'', m', n', \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) | l, l'' \in L, m' \in M, n' \in N\} \\ \ker d_2^3 &= \{(-l', l', \mathbf{0}, \mathbf{0}, l'', -m'', -n'', m'', n'', \mathbf{0}) | l', l'' \in L, m'' \in M, n'' \in N\} \\ \ker d_0^3 \cap \ker d_1^3 \cap \ker d_2^3 &= \{(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})\} = NE_3 \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç olarak tüm bu tanımlamalarla Moore kompleks uzunluğu 2 olan bir simplisel R-cebiroid elde edilmiş olur.

□

$\mathbf{K} = (L, M, N, P, \kappa, \kappa', \nu, \omega)$ ve $\mathbf{K}' = (L', M', N', P', \kappa', \kappa'', \nu', \omega')$ iki R- cebiroid çaprazlanmış karesi olsun. $\varphi = (\varphi_L, \varphi_M, \varphi_N, \varphi_P)$ 4-lüsü ise \mathbf{K} dan \mathbf{K}' ne bir çaprazlanmış kare morfizmi olsun. \mathbf{K} ve \mathbf{K}' den elde edilen simplisel R-cebiroidler

$$\begin{array}{c} \mathbf{E} = \dots\dots\dots E_3 \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} E_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_2} \\ \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} E_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} E_0 \\ \begin{array}{c} \xleftarrow{s_0} \\ \xleftarrow{s_1} \end{array} \\ \mathbf{E}' = \dots\dots\dots E'_3 \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} E'_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta_2} \\ \xrightarrow{\delta_1} \\ \xrightarrow{\delta_0} \end{array} E'_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta_1} \\ \xrightarrow{\delta_0} \end{array} E'_0 \\ \begin{array}{c} \xleftarrow{\sigma_0} \\ \xleftarrow{\sigma_1} \end{array} \end{array}$$

olsun. Buna göre

$$\begin{array}{c} \mathbf{E} = \dots \\ \begin{array}{c} \xrightarrow{d_2} \\ \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} E_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} E_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} E_0 \\ \begin{array}{c} \xleftarrow{s_1} \\ \xleftarrow{s_0} \end{array} \\ \mathbf{E}' = \dots \\ \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta_2} \\ \xrightarrow{\delta_1} \\ \xrightarrow{\delta_0} \end{array} E'_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta_1} \\ \xrightarrow{\delta_0} \end{array} E'_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta_1} \\ \xrightarrow{\delta_0} \end{array} E'_0 \\ \begin{array}{c} \xleftarrow{\sigma_1} \\ \xleftarrow{\sigma_0} \end{array} \end{array}$$

için $f'_0 = (\varphi_P)$, $f'_1 = (\varphi_M, \varphi_N, \varphi_P)$, $f'_2 = (\varphi_L, \varphi_M, \varphi_N, \varphi_M, \varphi_N, \varphi_P)$ olarak alınırsa her biri komütatifliği sağlar ve $\mathbf{f} = (\dots, f'_2, f'_1, f'_0)$ bir simplisel R-cebiroid morfizmi olur.

Böylece $\mathbf{Crs}^2(\mathbf{Alg})$ kategorisinden $\mathbf{Simp.R-Alg}_{\leq 2}$ kategorie bir fonktor elde edilir. Bu fonktor $\mathbf{G}_1 : \mathbf{Crs}^2(\mathbf{Alg}) \rightarrow \mathbf{Simp.R-Alg}_{\leq 2}$ şeklinde gösterilir.

Burada $\mathbf{K} = (L, M, N, P, \kappa, \kappa', \nu, \omega)$ bir çaprazlanmış kare ise yukarıdaki gibi tanımlanan E_0, E_1, E_2, E_3 ve d_i^n, s_j^n dönüşümleri için $\mathbf{G}_1(\mathbf{K}) = \mathbf{E} = (E_n, d_i^n, s_j^n)$ Moore kompleks uzunluğu 2 olan bir simplisel R-cebiroid olur ve \mathbf{K} den \mathbf{K}' ne tanımlı $\varphi = (\varphi_L, \varphi_M, \varphi_N, \varphi_P)$ çaprazlanmış kare morfizmi için

$\mathbf{G}_1(\varphi) = \mathbf{f} = (\dots, (\varphi_L, \varphi_M, \varphi_N, \varphi_M, \varphi_N, \varphi_P), (\varphi_M, \varphi_N, \varphi_P), \varphi_P) : \mathbf{G}_1(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{G}_1(\mathbf{K}')$ bir simplisel R-cebiroid morfizmi olur.

6. 2-ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER VE ÇAPRAZLANMIŞ KARELER ARASINDA Kİ İLİŞKİ

Homotopi 3-tiplerinin diğer önemli bir cebirsel modeli, çaprazlanmış karelerdir ve cat 2-gruplar ile eşdeğerdir. Bu yapı, homotopi 3-tipleri için bir model olarak kullanılabilir. Çaprazlanmış kareler, noktalanmış uzayların kategorisinden çaprazlanmış karelerin kategorisine temel bir çaprazlanmış kare fonksiyonu oluşturur. Sonuç olarak, hem 2-çaprazlanmış modüller hem de çaprazlanmış kareler, homotopi teorisinin önemli yapı taşlarıdır. Homotopi tiplerini modellemek ve incelemek için güçlü araçlar sunarlar. Guin-Walery ve Loday (1981) çalışmasında, homotopi 3-tipi bağlantılı uzaylar için bir cebirsel model olarak çaprazlanmış kareleri tanımlamışlardır. Bu nedenle, çaprazlanmış kareler, boyutları 3'ten büyük olan homotopi tiplerini modellemektedir. Daha sonra Ellis (1988) çalışmasında çaprazlanmış karelerin değişmeli cebir versiyonunu tanımlamıştır. 2-çaprazlanmış modüller ve kuadratik modüller de homotopi 3-tipleri için modellerdir. Kuadratik modüller Baues (1991) tarafından, 2-çaprazlanmış modüller Conduche tarafından tanımlanmıştır. Kuadratik modüllerin ve 2-çaprazlanmış modüllerin değişmeli cebir versiyonları sırasıyla (Arvasi ve Ulualan, 2007) ve (Grandjean ve Vale, 1986) çalışmalarında ele alınmıştır. Ayrıca Conduche (1984) çalışmasında, bir çaprazlanmış kareden 2-çaprazlanmış modül elde edildiğini göstermiştir. Çaprazlanmış kareler kategorisi ile simplisel gruplar, 2-çaprazlanmış modüller gibi ilgili kategoriler arasındaki ilişkiler (Arcasi, 1997; Arvasi ve Porter, 1997; Arvasi ve Ulualan, 2007) çalışmalarında verilmiştir.

Bu bölümde, önceki bölümlerde tanımlanan R -cebiroidlerin çaprazlanmış karelerinin kategorisi ile 2-çaprazlanmış modüllerin kategorisinin arasındaki ilişki incelenmiştir.

Teorem 7. *R -cebiroidlerin çaprazlanmış karesinden, R -cebiroidler üzerinde bir 2-çaprazlanmış modül elde edilebilir.*

Kanıt.

$$\begin{array}{ccc}
 L & \xrightarrow{\kappa} & M \\
 \downarrow \kappa' & & \downarrow \omega \\
 N & \xrightarrow{\nu} & P
 \end{array}$$

çaprazlanmış karesi için L, M, N, P birer R -cebiroid $\kappa, \kappa', \omega, \nu$ ve $\nu\kappa', \omega\kappa$ birer çaprazlanmış modüldür.

Ayrıca $h_1 : M \times_s N \rightarrow L$ ve $h_2 : N \times_s M \rightarrow L$ dönüşümleri mevcuttur. Hedef kaynak uyumluluk şartının sağlanması durumunda

N nin M ve M nin N üzerine sağ ve sol etkileri; ${}^n m = v(n)m$, $m^{n'} = m^{v(n')}$ ve $m n' = \omega(m)n'$, $n^{m'} = n^{\omega(m')}$ şeklinde tanımlansın. Bu etkiler yardımıyla $M \times N$ oluşturulabilir. Ayrıca P nin $M \times N$ üzerine ${}^p(m, n) = ({}^p m, {}^p n)$ ve $(m, n)^q = (m^q, n^q)$ şeklinde sağ ve sol etkileri tanımlansın. Buna ilave olarak

$$\begin{aligned} \{.\}_1 : (M \times N) \times (M \times N) &\rightarrow L \\ ((m, n), (m', n')) &\mapsto \{(m, n), (m', n')\}_1 = h_2(-n, m') \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} \{.\}_2 : (M \times N) \times (M \times N) &\rightarrow L \\ ((m, n), (m', n')) &\mapsto \{(m, n), (m', n')\}_2 = h_1(-m, n') \end{aligned} \quad (6.2)$$

Peiffer lifting dönüşümleri tanımlansın. $\partial_1 = (\omega + v)$ ve $\partial_2 = (-\kappa, \kappa')$ olacak şekilde alınsın. Bütün bu tanımlamalar gözönüne alındığında $(L, M \times N, P, \partial_1, \partial_2, \{.\}_{1,2})$ bir 2-çaprazlanmış modüldür.

$$\begin{aligned} CM1) \quad \partial_2 \{(m, n), (m', n')\}_1 &= \partial_2(h_2(-n, m')) \\ &= (-\kappa h_2(-n, m'), \kappa' h_2(-n, m')) \\ &= (-{}^n m', -n^{m'}) \\ &= ({}^n m', -n^{m'}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (m, n)(m', n') - (m, n)^{\partial_1(m', n')} &= ({}^n m' + m^{n'} + mm', nn') - (m, n)^{\omega(m') + v(n')} \\ &= ({}^{v(n)} m' + m^{v(n')} + mm', nn') \\ &\quad - (m^{\omega(m')} + m^{v(n')}, n^{\omega(m')} + n^{v(n')}) \\ &= ({}^{v(n)} m' + m^{v(n')} + mm' - m^{\omega(m')} - m^{v(n')}, \\ &\quad nn' - n^{\omega(m')} - n^{v(n')}) \\ &= ({}^{v(n)} m' + m^{v(n')} + mm' - mm' - m^{v(n')}, \\ &\quad nn' - n^{\omega(m')} - nn') \\ &= ({}^{v(n)} m', -n^{\omega(m')}) \\ &= ({}^n m', -n^{m'}) \end{aligned}$$

olup $\partial_2\{(m, n), (m', n')\}_1 = (m, n)(m', n') - (m, n)^{\partial_1(m', n')}$ elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}\partial_2\{(m, n), (m', n')\}_2 &= \partial_2(h_1(-m, n')) \\ &= (\kappa h_1(-m, n'), \kappa' h_1(-m, n')) \\ &= (m^{n'}, -^m n')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(m, n)(m', n') - \partial_1(m, n)(m', n') &= (v^{(n)}m' + m^{v(n')} + mm', nn') \\ &\quad - (mm' + v^{(n)}m', \omega^{(m)}m', \omega^{(m)}n' + nn') \\ &= (m^{v(n')}, -\omega^{(m)}n') \\ &= (m^{n'}, -^m n')\end{aligned}$$

olup $\partial_2\{(m, n), (m', n')\}_2 = (m, n)(m', n') - \partial_1(m, n)(m', n')$ elde edilir.

$$\begin{aligned}CM2) \quad \{\partial_2(l), \partial_2(l')\}_1 &= \{(-\kappa(l), \kappa'(l)), (-\kappa(l'), \kappa'(l'))\}_1 \\ &= h_2(-\kappa'(l), -\kappa(l')) \\ &= (-\kappa'(l))(-l') \\ &= ll'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{\partial_2(l), \partial_2(l')\}_2 &= \{(-\kappa(l), \kappa'(l)), (-\kappa(l'), \kappa'(l'))\}_2 \\ &= h_1(\kappa(l), \kappa'(l')) \\ &= l\kappa'(l') \\ &= ll'\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
CM3) \quad \{(m, n), (m', n')(m'', n'')\}_1 &= \{(m, n), ({}^n m'' + m'^{n''} + m' m'', n' n'')\}_1 \\
&= h_2(-n, {}^n m'' + m'^{n''} + m' m'') \\
&= h_2(-n, {}^n m'') + h_2(-n, m'^{n''}) + h_2(-n, m' m'') \\
&= h_2(-n n', m'') + h_2(-n, m')^{n''} + h_2(-n, m')^{m''} \\
&= h_2(-n n', m'') + h_2(-n, m')^{m''} + h_2(-n, m')^{n''} \\
&= h_2(-n n', m'') + h_2(-n, m')^{\omega(m'')} + h_2(-n, m')^{n''} \\
&= \{({}^n m' + m'^{n'} + m m', n n'), (m'', n'')\}_1 \\
&\quad + h_2(-n, m')^{\omega(m'') + \nu(n'')} \\
&= \{(m, n)(m', n'), (m'', n'')\}_1 + \{(m, n), (m', n')\}_1^{\partial_1(m'', n'')} \\
\{(m, n), (m', n')(m'', n'')\}_2 &= \{(m, n), ({}^n m'' + m'^{n''} + m' m'', n' n'')\}_2 \\
&= h_1(-m, n' n'') \\
&= h_1(-m^{n'}, n'') \\
&= h_1(-m^{n'}, n'') + h_1(-m m', n'') - h_1(-m m', n'') \\
&\quad + h_1(-{}^n m', n'') - h_1(-{}^n m', n'') \\
&= h_1(-m^{n'}, n'') + h_1(-m m', n'') - {}^m h_1(-m', n'') \\
&\quad + h_1(-{}^n m', n'') - {}^n h_1(-m', n'') \\
&= h_1(-{}^n m' - m^{n'} - m m', n'') - \omega(m) h_1(-m', n'') \\
&\quad - \nu(n) h_1(-m', n'') \\
&= \{({}^n m' + m'^{n'} + m m', n n'), (m'', n'')\}_2 \\
&\quad - \omega(m) + \nu(n) h_1(-m', n'') \\
&= \{(m, n), (m', n')(m'', n'')\}_2 - \partial_1(m, n) \{(m', n'), (m'', n'')\}_2
\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}
CM4) \quad \{\partial_2(l), (m', n')\}_1 &= \{(-\kappa(l), \kappa'(l)), (m', n')\}_1 \\
&= h_2(-\kappa'(l), m') \\
&= -l^{m'}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l^{(m', n')} - l^{\partial_1(m', n')} &= l^{n'} - l^{\omega(m')} - l^{\nu(n')} \\
&= l^{n'} - l^{m'} - l^{n'} \\
&= -l^{m'}
\end{aligned}$$

olup $\{\partial_2(l), (m', n')\}_1 = l^{(m', n')} - l^{\partial_1(m', n')}$ elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\{\partial_2(l), (m', n')\}_2 &= \{(-\kappa(l), \kappa'(l)), (m', n')\}_2 \\
&= h_1(\kappa(l), n') \\
&= l^{n'} \\
&= l^{(m', n')}
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
 CM5) \quad \{(m, n), \partial_2(l')\}_1 &= \{(m, n), (-\kappa(l'), \kappa'(l'))\}_1 \\
 &= h_2(-n, -\kappa(l')) \\
 &= {}^{(-n)}(-l') \\
 &= {}^n l' \\
 &= {}^{(m, n)} l'
 \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
 \{(m, n), \partial_2(l')\}_2 &= \{(m, n), (-\kappa(l'), \kappa'(l'))\}_2 \\
 &= h_1(-m, \kappa'(l')) \\
 &= -m l'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^{(m, n)} l' - \partial_1(m, n) l' &= n l' - \omega(m) l' - v(n) l' \\
 &= n l' - m l' - n l' \\
 &= -m l'
 \end{aligned}$$

olup $\{(m, n), \partial_2(l')\}_2 = {}^{(m, n)} l' - \partial_1(m, n) l'$ eşitliği elde edilir.

$$\begin{aligned}
 CM6) \quad {}^p \{(m, n), (m', n')\}_1 &= {}^p (h_2(-n, m')) \\
 &= h_2({}^p(-n), m') \\
 &= h_2(-{}^p n, m')
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \{{}^p(m, n), (m', n')\}_1 &= \{{}^p m, {}^p n, (m', n')\}_1 \\
 &= h_2(-{}^p n, m')
 \end{aligned}$$

olup ${}^p \{(m, n), (m', n')\}_1 = \{{}^p(m, n), (m', n')\}_1$ eşitliği elde edilir.

$$\begin{aligned}
 \{(m, n), (m', n')\}_1^q &= h_2(-n, m')^q \\
 &= h_2(-n, m'^q)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \{(m, n), (m', n')^q\}_1 &= \{(m, n), (m'^q, n'^q)\}_1 \\
 &= h_2(-n, m'^q)
 \end{aligned}$$

olup $\{(m, n), (m', n')\}_1^q = \{(m, n), (m', n')^q\}_1$ eşitliği elde edilir. Peiffer lifting-2 dönüşümü içinde benzer eşitlikler sağlanır. Böylece tüm 2- çaprazlanmış modül şartlarının sağlandığı gösterilmiş olur. \square

$\mathbf{K} = (L, M, N, P, \kappa, \kappa', v, \omega)$ ve $\mathbf{K}' = (L', M', N', P', \kappa', \kappa'', v', \omega')$ iki \mathbf{R} - cebiroid çaprazlanmış karesi olsun. $\varphi = (\varphi_L, \varphi_M, \varphi_N, \varphi_P)$ ailesi ise \mathbf{K} dan \mathbf{K}' ne bir çaprazlanmış

kare morfizmi olsun. \mathbf{K} ve \mathbf{K}' den elde edilen 2- çaprazlanmış modüller $(L, M \rtimes N, P, \partial_1, \partial_2, \{\cdot\}_{1,2})$ ve $(L', M' \rtimes N', P', \partial'_1, \partial'_2, \{\cdot\}'_{1,2})$ olsun. Buna göre $\bar{f}_0 = \varphi_P$, $\bar{f}_1 = (\varphi_M, \varphi_N)$, $\bar{f}_2 = \varphi_L$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
1) \quad \bar{f}_1(p(m, n)) &= (\varphi_M, \varphi_N)(p m, p n) \\
&= (\varphi_M(p m), \varphi_N(p n)) \\
&= (\varphi^{P(p)} \varphi_M(m), \varphi^{P(p)} \varphi_N(n)) \\
&= \varphi^{P(p)} (\varphi_M, \varphi_N)(m, n) \\
&= \bar{f}_0(p) \bar{f}_1(m, n) \\
\bar{f}_1((m, n)^q) &= (\varphi_M, \varphi_N)(m^q, n^q) \\
&= (\varphi_M(m^q), \varphi_N(n^q)) \\
&= (\varphi_M(m)^{\varphi^{P(p)}}, \varphi_N(n)^{\varphi^{P(p)}}) \\
&= (\varphi_M, \varphi_N)(m, n)^{\varphi^{P(p)}} \\
&= \bar{f}_1(m, n)^{\bar{f}_0(q)} \\
2) \quad \bar{f}_2(pl) &= \varphi_L(pl) \\
&= \varphi^{P(p)} \varphi_L(l) \\
&= \bar{f}_0(p) \bar{f}_2(l) \\
\bar{f}_2(l^q) &= \varphi_L(l^q) \\
&= \varphi_L(l)^{\varphi^{P(q)}} \\
&= \bar{f}_2(l)^{\bar{f}_0(q)} \\
3) \quad \bar{f}_2\{(m, n), (m', n')\}_1 &= \varphi_L h_2(-n, m') \\
&= h'_2(\varphi_N \rtimes \varphi_M)(-n, m') \\
&= h'_2(\varphi_N(-n), \varphi_M(m')) \\
&= \{(\varphi_M(m), \varphi_N(n)), (\varphi_M(m'), \varphi_N(n'))\}_1 \\
&= \{\bar{f}_1(m, n), \bar{f}_1(m', n')\}_1 \\
\bar{f}_2\{(m, n), (m', n')\}_2 &= \varphi_L h_1(-m, n') \\
&= h'_1(\varphi_M \rtimes \varphi_N)(-m, n') \\
&= h'_1(\varphi_M(-m), \varphi_N(n')) \\
&= \{(\varphi_M(m), \varphi_N(n)), (\varphi_M(m'), \varphi_N(n'))\}_2 \\
&= \{\bar{f}_1(m, n), \bar{f}_1(m', n')\}_2
\end{aligned} \tag{6.3}$$

olup $(\bar{f}_2, \bar{f}_1, \bar{f}_0)$ \mathbf{K} ve \mathbf{K}' den elde edilen 2- çaprazlanmış modüller arasında bir morfizm olur. Böylece $\mathbf{Crs}^2(\mathbf{Alg})$ kategorisinden $\mathbf{2XMod}$ kategorisine bir fonktor elde edilir. Bu fonktor $\mathbf{F}_2 : \mathbf{Crs}^2(\mathbf{Alg}) \rightarrow \mathbf{2XMod}$ biçiminde gösterilir. Burada $\mathbf{K} = (L, M, N, P, \kappa, \kappa', \nu, \omega)$ bir çaprazlanmış kare ise yukarıdaki gibi tanımlanan ∂_1, ∂_2 ve $\{\cdot\}_1, \{\cdot\}_2$ Peiffer lifting dönüşümleri için $\mathbf{F}_2(\mathbf{K}) = (L, M \rtimes N, P, \partial_1, \partial_2, \{\cdot\}_{1,2})$ bir 2-çaprazlanmış modül olur ve $\varphi = (\varphi_L, \varphi_M, \varphi_N, \varphi_P)$ çaprazlanmış kare morfizmi için $\mathbf{F}_2(\varphi) = (\bar{f}_2, \bar{f}_1, \bar{f}_0) : \mathbf{F}_2(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{F}_2(\mathbf{K}')$ bir 2-çaprazlanmış modül morfizmi olur.

Teorem 8. *R-cebiroidlerin 2-çaprazlanmış modülünden, R-cebiroidlerin çaprazlanmış karesi elde edilebilir.*

Kanıt.

$$L \xrightarrow{\partial_2} N \xrightarrow{\partial_1} P$$

R-cebiroidlerin 2-çaprazlanmış modülü olsun. Öyleyse P nin N ve L üzerine asosyatif etkileri mevcuttur. Ayrıca N nin L üzerine de asosyatif etkileri mevcuttur.

P nin N üzerine sağ ve sol etkilerinin yardımıyla $N \rtimes P$ oluşturulabilir.

$$\begin{aligned} \varsigma_0 : N \rtimes P &\rightarrow P, & \varsigma_0(n, p) &= p \\ \varsigma_1 : N \rtimes P &\rightarrow P, & \varsigma_1(n, p) &= \partial_1(n) + p \end{aligned} \quad (6.4)$$

şeklinde morfizmler tanımlansın. Hedef kaynak uyumluluk şartının sağlanması durumunda

$$\begin{aligned} \bullet N \times L &\rightarrow L & \bullet L \times N &\rightarrow L \\ (n, l) &\mapsto {}^n l = \{n, \partial_2(l)\}_1 & (l, n') &\mapsto l^{n'} = \{\partial_2(l), n'\}_2 \end{aligned} \quad (6.5)$$

etkilerinin yardımıyla $L \rtimes N$ oluşturulabilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \bullet (N \rtimes P) \times (L \rtimes N) &\rightarrow (L \rtimes N) \\ ((n', p), (k, m)) &\mapsto (n', p)(k, m) = (\partial_1(n')k + {}^p k - \{n', m\}_2, {}^p m + n'm) \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} \bullet (L \rtimes N) \times (N \rtimes P) &\rightarrow (L \rtimes N) \\ ((l, n), (m', q)) &\mapsto (l, n)^{(m', q)} = (l^{\partial_1(n')} + l^q - \{n, m'\}_1, n^q + nm') \end{aligned}$$

etkilerinin yardımıyla da $(L \rtimes N) \rtimes (N \rtimes P)$ oluşturulabilir.

$$\begin{aligned} \varpi_0 : (L \rtimes N) \rtimes (N \rtimes P) &\rightarrow N \rtimes P, & \varpi_0(l, n, n', p) &= (n', p) \\ \varpi_1 : (L \rtimes N) \rtimes (N \rtimes P) &\rightarrow N \rtimes P, & \varpi_1(l, n, n', p) &= (n + n', p) \\ \varpi_2 : (L \rtimes N) \rtimes (N \rtimes P) &\rightarrow N \rtimes P, & \varpi_2(l, n, n', p) &= (\partial_2(l) + n, \partial_1(n') + p) \end{aligned} \quad (6.7)$$

şeklinde morfizmler tanımlansın.

$\overline{P} = N \rtimes P$, $\overline{N} = \ker \varsigma_1 = \{(n, -\partial_1(n)) | n \in N\}$, $\overline{M} = \ker \varsigma_0 = \{(n, \mathbf{0}) | n \in N\}$, $\overline{L} = \ker \varpi_0 \cap \ker \varpi_1 = \{(l, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) | l \in L\}$ olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} \overline{L} & \xrightarrow{\varpi_2} & \overline{M} \\ \varpi_2 \downarrow & & \downarrow i \\ \overline{N} & \xrightarrow{i} & \overline{P} \end{array}$$

diyagramı oluşturulsun. Ayrıca

$$\begin{aligned} h_1 : \overline{M} \times_t \times_s \overline{N} &\rightarrow \overline{L} \\ ((n, \mathbf{0}), (n', -\partial_1(n'))) &\mapsto h_1((n, \mathbf{0}), (n', -\partial_1(n'))) = (\{n, n'\}_1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} h_2 : \overline{N} \times_t \times_s \overline{M} &\rightarrow \overline{L} \\ ((n, -\partial_1(n)), (n', \mathbf{0})) &\mapsto h_2((n, -\partial_1(n)), (n', \mathbf{0})) = (\{n, n'\}_2, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \end{aligned} \quad (6.9)$$

olacak şekilde h_1, h_2 dönüşümleri tanımlansın. Şimdi tüm bu tanımlamalar gözönüne alındığında yukarıdaki diyagramın h_1, h_2 dönüşümleri ile birlikte bir çaprazlanmış kare olduğu gösterilecektir.

CK_1) Burada $i : \overline{M} \rightarrow \overline{P}, i : \overline{N} \rightarrow \overline{P}, \varpi_2 : \overline{L} \rightarrow \overline{M}, \varpi_2 : \overline{L} \rightarrow \overline{N}$ morfizmlerinin birer çaprazlanmış modül olduğu açıktır.

$$\begin{aligned} CK_2) \quad h_1((n, \mathbf{0}) + (n', \mathbf{0}), (n'', -\partial_1(n''))) &= h_1((n + n', \mathbf{0}), (n'', -\partial_1(n''))) \\ &= (\{n + n', n''\}_1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\ &= (\{n, n''\}_1 + \{n', n''\}_1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\ &= (\{n, n''\}_1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) + (\{n', n''\}_1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\ &= h_1((n, \mathbf{0}), (n'', -\partial_1(n''))) \\ &\quad + h_1((n', \mathbf{0}), (n'', -\partial_1(n''))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_2((n, -\partial_1(n)) + (n', -\partial_1(n')), (n'', \mathbf{0})) &= h_2((n + n', -\partial_1(n) - \partial_1(n')), (n'', \mathbf{0})) \\ &= (\{n + n', n''\}_2, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\ &= (\{n, n''\}_2 + \{n', n''\}_2, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\ &= (\{n, n''\}_2, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) + (\{n', n''\}_2, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\ &= h_2((n, -\partial_1(n)), (n'', \mathbf{0})) \\ &\quad + h_2((n', -\partial_1(n')), (n'', \mathbf{0})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CK_3) \quad r.h_1((n, \mathbf{0}), (n', -\partial_1(n'))) &= r.(\{n, n'\}_1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\ &= (r.\{n, n'\}_1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\ &= (\{r.n, n'\}_1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\ &= h_1((r.n, \mathbf{0}), (n', -\partial_1(n'))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r.h_1((n, \mathbf{0}), (n', -\partial_1(n'))) &= r.(\{n, n'\}_1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\ &= (r.\{n, n'\}_1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\ &= (\{n, r.n'\}_1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\ &= h_1((n, \mathbf{0}), (r.n', -\partial_1(r.n'))) \end{aligned}$$

olur. Benzer eşitlikler h_2 dönüşümü için de sağlanır.

$$\begin{aligned}
 CK_4) \quad {}^{(m,p)}h_1((n, \mathbf{0}), (n', -\partial_1(n'))) &= {}^{(m,p)}(\{n, n'\}_1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\
 &= ({}^m\{n, n'\}_1 + {}^p\{n, n'\}_1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\
 &= (\{{}^m n, n'\}_1 + \{{}^p n, n'\}_1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\
 &= (\{mn, n'\}_1 + \{pn, n'\}_1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\
 &= (\{mn + pn, n'\}_1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_1({}^{(m,p)}(n, \mathbf{0}), (n', -\partial_1(n'))) &= h_1((m, p)(n, \mathbf{0}), (n', -\partial_1(n'))) \\
 &= h_1(({}^p n + mn, \mathbf{0}), (n', -\partial_1(n'))) \\
 &= (\{mn + pn, n'\}_1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})
 \end{aligned}$$

olup ${}^{(m,p)}h_1((n, \mathbf{0}), (n', -\partial_1(n'))) = h_1({}^{(m,p)}(n, \mathbf{0}), (n', -\partial_1(n')))$ elde edilir. Benzer şekilde $h_1((n, \mathbf{0}), (n', -\partial_1(n')))^{(m',q)} = h_1((n, \mathbf{0}), (n', -\partial_1(n')))^{(m',q)}$ olduğu gösterilir. Benzer eşitlikler h_2 dönüşümü için de sağlanır.

$$\begin{aligned}
 CK_5) \quad h_1((n, \mathbf{0})(n', \mathbf{0}), (n'', -\partial_1(n''))) &= h_1({}^{(n,0)}(n', \mathbf{0}), (n'', -\partial_1(n''))) \\
 &= {}^{(n,0)}h_1((n', \mathbf{0}), (n'', -\partial_1(n'')))
 \end{aligned}$$

dır. Ayrıca

$$\begin{aligned}
 h_1((n, \mathbf{0})(n', \mathbf{0}), (n'', -\partial_1(n''))) &= h_1((nn', \mathbf{0}), (n'', -\partial_1(n''))) \\
 &= (\{nn', n''\}_1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\
 &= (\{n, n'n''\}_1 - \{n, n'\}_1^{\partial_1(n'')}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\
 &= (\{n, n'n''\}_1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) - (\{n, n'\}_1^{\partial_1(n'')}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\
 &= h_1((n, \mathbf{0}), (n'n'', -\partial_1(n'n''))) \\
 &\quad - h_1((n, \mathbf{0}), (n'^{\partial_1(n'')}, -\partial_1(n'^{\partial_1(n'')}))) \\
 &= h_1((n, \mathbf{0}), (n'n'', -\partial_1(n'n''))) \\
 &\quad - h_1((n, \mathbf{0}), (n'^{\partial_1(n'')}, -\partial_1(n'n''))) \\
 &= h_1((n, \mathbf{0}), (n'n'' - n'^{\partial_1(n'')}, 0)) \\
 &= h_1((n, \mathbf{0}), (n'n'' + n'^{-\partial_1(n'')}, 0)) \\
 &= h_1((n, \mathbf{0}), (n', \mathbf{0})(n'', -\partial_1(n''))) \\
 &= h_1((n, \mathbf{0}), {}^{(n',0)}(n'', -\partial_1(n'')))
 \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer eşitlikler h_2 dönüşümü için de sağlanır.

$$\begin{aligned}
 CK_6) \quad h_1((n, \mathbf{0}), (n', -\partial_1(n'))(n'', -\partial_1(n''))) &= h_1((n, \mathbf{0}), (n', -\partial_1(n'))^{(n'', -\partial_1(n''))}) \\
 &= h_1((n, \mathbf{0}), (n', -\partial_1(n'))^{(n'', -\partial_1(n''))})
 \end{aligned}$$

olur. Benzer eşitlikler h_2 dönüşümü için de sağlanır.

$$\begin{aligned}
 CK_7) \quad \varpi_2(h_1((n, \mathbf{0}), (n', -\partial_1(n')))) &= \varpi_2(\{n, n'\}_1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\
 &= (\partial_2\{n, n'\}_1, \mathbf{0}) \\
 &= (nn' - n^{\partial_1(n')}, \mathbf{0}) \\
 &= (nn' + n^{-\partial_1(n')}, \mathbf{0}) \\
 &= (n, \mathbf{0})(n', -\partial_1(n')) \\
 &= (n, \mathbf{0})^{(n', -\partial_1(n'))}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varpi_2(h_2((n, -\partial_1(n)), (n', \mathbf{0}))) &= \varpi_2(\{n, n'\}_2, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\
 &= (\partial_2\{n, n'\}_2, \mathbf{0}) \\
 &= (nn' - \partial_1(n)n', \mathbf{0}) \\
 &= (nn' + {}^{-\partial_1(n)}n', \mathbf{0}) \\
 &= (n, -\partial_1(n))(n', \mathbf{0}) \\
 &= (n, -\partial_1(n))^{(n', \mathbf{0})}
 \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
 CK_8) \quad \varpi_2(h_1((n, \mathbf{0}), (n', -\partial_1(n')))) &= \varpi_2(\{n, n'\}_1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\
 &= (\partial_2\{n, n'\}_1, \mathbf{0}) \\
 &= (nn' - n^{\partial_1(n')}, \mathbf{0}) \\
 &= (nn' + n^{-\partial_1(n')}, \mathbf{0}) \\
 &= (n, \mathbf{0})(n', -\partial_1(n')) \\
 &= (n, \mathbf{0})^{(n', -\partial_1(n'))}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varpi_2(h_2((n, -\partial_1(n)), (n', \mathbf{0}))) &= \varpi_2(\{n, n'\}_2, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\
 &= (\partial_2\{n, n'\}_2, \mathbf{0}) \\
 &= (nn' - \partial_1(n)n', \mathbf{0}) \\
 &= (nn' + {}^{-\partial_1(n)}n', \mathbf{0}) \\
 &= (n, -\partial_1(n))(n', \mathbf{0}) \\
 &= (n, -\partial_1(n))^{(n', \mathbf{0})}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CK_9) \quad h_1(\varpi_2(l, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}), (n', -\partial_1(n'))) &= h_1((\partial_2(l), \mathbf{0}), (n', -\partial_1(n'))) \\
&= (\{\partial_2(l), n'\}_1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\
&= (l^{n'} - l^{\partial_1(n')}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\
&= (l, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})^{(n', -\partial_1(n'))}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_2((n, -\partial_1(n)), \varpi_2(l, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})) &= h_2((n, -\partial_1(n)), (\partial_2(l), \mathbf{0})) \\
&= (\{n, \partial_2(l)\}_2, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\
&= ({}^n l - \partial_1(n)l, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\
&= ({}^{n, -\partial_1(n)} l, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CK_{10}) \quad h_1((n, \mathbf{0}), \varpi_2(l, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})) &= h_1((n, \mathbf{0}), (\partial_2(l), \mathbf{0})) \\
&= (\{n, \partial_2(l)\}_1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\
&= ({}^n l, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\
&= ({}^{n, \mathbf{0}} l, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_2(\varpi_2(l, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}), (n', \mathbf{0})) &= h_2((\partial_2(l), \mathbf{0}), (n', \mathbf{0})) \\
&= (\{\partial_2(l), n'\}_2, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\
&= (l^{n'}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\
&= (l, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})^{(n', \mathbf{0})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CK_{11}) \quad h_1((n, \mathbf{0}), (n', -\partial_1(n'))))h_1((m, \mathbf{0}), (m', -\partial_1(m'))) &= (\{n, n'\}_1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})(\{m, m'\}_1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\
&= (\{n, n'\}_1 \{m, m'\}_1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\
&= (\{n^{-\partial_1(n')+n'}, m^{-\partial_1(m')+m'}\}_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_1((n, \mathbf{0})^{(n', -\partial_1(n'))}, ({}^{m, \mathbf{0}}(m', -\partial_1(m')))) &= h_1((n, \mathbf{0})(n', -\partial_1(n')), (m, \mathbf{0})(m', -\partial_1(m'))) \\
&= h_1((n^{-\partial_1(n')} + nn', \mathbf{0}), (m^{-\partial_1(m')} + mm', \mathbf{0})) \\
&= h_1((n^{-\partial_1(n')} + n^{n'}, \mathbf{0}), (m^{-\partial_1(m')} + m^{m'}, \mathbf{0})) \\
&= (\{n^{-\partial_1(n')+n'}, m^{-\partial_1(m')+m'}\}_1)
\end{aligned}$$

olup

$h_1((n, \mathbf{0}), (n', -\partial_1(n'))))h_1((m, \mathbf{0}), (m', -\partial_1(m')))) = h_1((n, \mathbf{0})^{(n', -\partial_1(n'))}, ({}^{m, \mathbf{0}}(m', -\partial_1(m'))))$ elde edilir. Benzer eşitlikler h_2 dönüşümü için de sağlanır.

Böylece tüm çaprazlanmış kare şartlarının sağlandığı gösterilmiş olur. \square

$\mathbf{C} = (L, N, P, \partial_1, \partial_2), \{\cdot\}_{1,2}$ ve $\mathbf{C}' = (L', N', P', \partial'_1, \partial'_2, \{\cdot\}'_{1,2})$ birer 2-çaprazlanmış modül olsun. (f_2, f_1, f_0) ise \mathbf{C} den \mathbf{C}' ne bir 2-çaprazlanmış modül morfizmi olsun. \mathbf{C} ve \mathbf{C}' den elde edilen çaprazlanmış kareler $\mathbf{K} = (\bar{L}, \bar{M}, \bar{N}, \bar{P}, \varpi_2, \varpi_2, i, i)$ ve $\mathbf{K}' = (\bar{L}', \bar{M}', \bar{N}', \bar{P}', \varpi'_2, \varpi'_2, i, i)$ olsun. Buna göre $\bar{\varphi}_L = f_2, \bar{\varphi}_M = f_1, f_0, \bar{\varphi}_N = f_1, f_0$ ve $\bar{\varphi}_P = f_1, f_0$ olarak alınırsa $\bar{\varphi} = (\bar{\varphi}_L, \bar{\varphi}_M, \bar{\varphi}_N, \bar{\varphi}_P)$ dörtlüsü çaprazlanmış kare morfizmi olur.

Böylece $\mathbf{2XMod}$ kategorisinden $\mathbf{Crs}^2(\mathbf{Alg})$ kategorisine bir fonktor elde edilir. Bu fonktor $\mathbf{G}_2 : \mathbf{2XMod} \rightarrow \mathbf{Crs}^2(\mathbf{Alg})$ biçiminde gösterilir.

Burada $\mathbf{C} = (L, N, P, \partial_1, \partial_2), \{\cdot\}_{1,2}$ bir 2-çaprazlanmış modül ise yukarıdaki gibi tanımlanan $\bar{P}, \bar{N}, \bar{M}, \bar{L}$ ve h_1, h_2 dönüşümleri için $\mathbf{G}_2(\mathbf{C}) = (\bar{L}, \bar{M}, \bar{N}, \bar{P}, \varpi_2, \varpi_2, i, i)$ bir çaprazlanmış kare olur ve $\mathbf{G}_2(f_2, f_1, f_0) = \bar{\varphi} = (\bar{\varphi}_L, \bar{\varphi}_M, \bar{\varphi}_N, \bar{\varphi}_P)$ bir çaprazlanmış kare morfizmi olur.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Birden daha çok objesi olan bir kategoride çalışmanın, tek objesi olan bir kategoride çalışmaya göre daha avantajlı olduğu inkar edilemez bir gerçektir. Bunun çeşitli sebepleri bulunmaktadır. Örneğin, çok objeli durumunda elde edilen sonuçlar genellikle tek objeli durumuna aktarılabilirken, bunun tersi her zaman mümkün değildir. Bir diğer sebep ise çok objeli versiyonlarının genellikle daha kategoriksel olarak tercih edilen özelliklere sahip olmasıdır. Örneğin, R-cebiroidlerin kategorisi monoidal olarak kapalıdır, bu ise (Mosa, 1986) da kanıtlanmıştır, oysa ki birleşmeli R- cebirlerin kategorisi bu özelliğe sahip değildir. Bu nedenle, gruplar üzerindeki birçok kategoriksel yapı, gruplara değil de grupoidlere genelleştirilmiştir. Ancak, birleşmeli cebirlerin cebiroidlere genelleştirilmesi konusundaki çalışmalar halen yetersiz kalmaktadır. Özellikle, R-cebiroidlerin (ön) çaprazlanmış modüllerinin birçok kategoriksel özellikleri henüz detaylı bir şekilde incelenmemiştir. Ayrıca R-cebiroidler üzerinde 2-çaprazlanmış modül, çaprazlanmış kare gibi yapıların çalışılmadığı tespit edilmiştir. Bu bağlamda, cebirlerin 2-çaprazlanmış modüllerinin ve çaprazlanmış karelerinin R-cebiroidlerin 2-çaprazlanmış modüllerine ve çaprazlanmış karelerine genelleştirilmesi ve burada elde edilen denklikler büyük önem taşımaktadır. Çok objeli kategoriksel yapılar, çeşitli matematiksel ve teorik fiziksel uygulamalarda önemli avantajlar sunar. Özellikle, monoidal kapalı kategoriler gibi daha karmaşık ve yapılandırılmış kategoriler, teori geliştirme ve soyutlamada kritik rol oynar. Bu yapılar, matematiksel yapılar arasındaki ilişkileri daha iyi anlamamıza ve bu ilişkileri daha genelleştirilmiş ve kapsayıcı bir çerçevede ifade etmemize olanak tanır. 2-çaprazlanmış modül önemli bir cebirsel yapı olup gruplar başta olmak üzere cebir, Lie cebiri, gruboid gibi bir çok yapı üzerinde çalışılmıştır. Homotopi 3-tiplerinin diğer önemli bir cebirsel modeli, çaprazlanmış karelerdir ve cat 2-gruplar ile eşdeğerdir. Bu yapı, homotopi 3-tipleri için bir model olarak kullanılabilir. Çaprazlanmış kareler, noktalanmış uzayların kategorisinden çaprazlanmış karelerin kategorisine temel bir çaprazlanmış kare fonksiyonu oluşturur. Sonuç olarak, hem 2-çaprazlanmış modüller hem de çaprazlanmış kareler, homotopi teorisinin önemli yapı taşlarıdır. Homotopi tiplerini modellemek ve incelemek için güçlü araçlar sunarlar. Birleşmeli cebirlerin genelleştirilmiş hali olarak düşünülebilen R-cebiroid yapısı üzerinde çaprazlanmış modül çalışılmış ve bazı özellikleri incelenmiştir. Fakat 2-çaprazlanmış modül ve çaprazlanmış kare R-cebiroidler üzerinde incelenmemiştir. Bu tezde literatürdeki mevcut olan bu eksiklik giderilebilmesi amaçlanarak R-cebiroidler üzerinde 2-çaprazlanmış modül ve çaprazlanmış kare kavramları tanımlanmış ve bunların kategorileri elde edilmiştir. Sonrasında 2-çaprazlanmış modül, çaprazlanmış kare ve simplisel R-cebiroid kategorileri arasındaki ilişkiler ele alınmıştır. Bu tezde 2-çaprazlanmış

modüllerin kategorisinin özelliklerine yer verilmemiştir. Daha sonra yapılacak çalışmalarda R-cebiroidlerin 2-çaprazlanmış modüllerinin kategoriksel özellikleri incelenebilir. Ayrıca R-cebiroidler üzerinde kuadratik modül tanımlanarak 2-çaprazlanmış modüller ve kuadratik modüller arasındaki ilişkiler de R-cebiroidlere genelleştirilebilir.



KAYNAKLAR DİZİNİ

- Amgott, S. M. (1986). *Separable algebroids*, Journal of Pure and Applied Algebra, 40, pp.1-14.
- Arvasi, Z. (1997). *Crossed squares and 2-crossed modules of commutative algebras*, Theory Applications Categories, 3, pp.160-181.
- Arvasi, Z., Porter, T. (1996). *Simplicial and crossed resolutions of commutative algebras*, Journal of Algebra, 181(2), pp.426-448.
<https://doi.org/10.1006/jabr.1996.0128>
- Arvasi, Z., Porter, T. (1997). *Higher-dimensional Peiffer elements in simplicial commutative algebras*, Theory Applications Categories, 3(1), pp.1-23.
- Arvasi, Z., Ulualan, E. (2006). *On algebroic models for homotopy 3-types*, Journal of homotopy and related structures, 1(1), pp.1-27.
<https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0602180>
- Arvasi, Z., Ulualan, E. (2007). *Quadratic and 2-crossed modules of algebras*, Algebra Colloquium, 14, pp.669-686.
- Baues, J. H. (1991). *Combinatorial Homotopy and 4-Dimensional Complexes*. Walter De Gruyter.
<https://doi.org/10.1515/9783110854480>
- Conduche, D. (1984). *Modules croises generalises de longueur 2*, Journal of Pure and Applied Algebra, 34, pp.155-178.
[https://doi.org/10.1016/0022-4049\(84\)90034-3](https://doi.org/10.1016/0022-4049(84)90034-3)
- Ellis, G. (1988). *Higher dimensional crossed module of algebras*, Journal of Pure and Applied Algebra, 52, pp.277-282.
[https://doi.org/10.1016/0022-4049\(88\)90095-3](https://doi.org/10.1016/0022-4049(88)90095-3)

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Grandjean, A. R. & Vale, M. J. (1986). *2-Modulos Cruzados En La Cohomologia De Andre-Quillen*, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid
- Guin-Walery, D., Loday, J. L. (1981). *Obstruction a l'Excision en K-theorie algebrique*, Lecture Notes in Math., 854, pp.179-216.
- Gurmen, O., Ulualan, E. (2020). *Simplicial algebroids and internal categories within R- algebroids*, Tbilisi Math. J., 13(1), pp.113-121.
<https://doi.org/10.32513/tbilisi/1585015224>
- Huebschmann, J. (1980). *Crossed n-folds extensions of groups and cohomology*, Comment. Math. Helv., 55, pp.302-313.
- Mitchell, B. (1972). *Rings with several object*, Advances in Mathematics, 8(1), pp.1-161.
[https://doi.org/10.1016/0001-8708\(72\)90002-3](https://doi.org/10.1016/0001-8708(72)90002-3)
- Mitchell, B. (1985). *Separable algebroids*, Bull. Amer. Math. Soc., 84, pp.867-885.
- Mosa, G. H. (1986). *Higher dimensional algebroids and crossed modules* [PhD Thesis, University College of North Wales]
- Mutlu, A., Porter, T. (1998). *Freeness conditions for 2-crossed modules and complexes*, Theory Applications Categories, 4, pp.174-194.
- Mutlu, A., Porter, T. (1998). *Applications of peiffer pairings in the moore complex of a simplicial group*, Theory Applications Categories, 4, pp.148-173.
- Porter, T. (1986). *Homology of commutative algebras and an invariant of simis and vasconcelos*, Journal of Algebra, 99(2), pp. 458-465.
[https://doi.org/10.1016/0021-8693\(86\)90038-4](https://doi.org/10.1016/0021-8693(86)90038-4)

KAYNAKLAR DİZİNİ

Whitehead, J. H. C. (1941). *On adding relations to homotopy groups*, Annals of Mathematics, 42(2), pp.409-428.

<https://doi.org/10.2307/1968907>

Whitehead, J. H. C. (1946). *Note on a previous paper entitled "On adding relations to homotopy groups"*, Annals of Mathematics, 47(4), pp.806-810.

<https://doi.org/10.2307/1969237>

