

T.C.
BURSA TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

$Z_{cs}(3985)$ EGZOTİK MEZONUNUN ELEKTROMANYETİK FORM
FAKTÖRLERİNİN İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Aynur AKBARLI
(21409732006)
ORCID: 0000-0001-6217-7424

Fizik Anabilim Dalı
Fizik Tezli Yüksek Lisans Programı
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin DAĞ
ORCID: 0000-0001-9301-007X

EKİM 2024

BTÜ, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü'nün 21409732006 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi Aynur AKBARLI , ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı " Z_{cs} (3985) EGZOTİK MEZONUNUN ELEKTROMANYETİK FORM FAKTÖRLERİNİN İNCELENMESİ " başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin DAĞ
Bursa Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri: Dr. Öğr. Üyesi Zerrin KIRCA
Bursa Uludağ Üniversitesi

Prof. Dr. Mehmet BÜYÜKYILDIZ
Bursa Teknik Üniversitesi

Teslim Tarihi :
Savunma Tarihi : 9 Ekim 2024



20.04.2016 tarihli Resmi Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, Bursa Teknik Üniversitesi’nin aboneli olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

Bu tez, 122F118 numaralı Tübitak Araştırma projesi ile desteklenmiştir.

İNTİHAL BEYANI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belgelediğimi, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim.

Öğrencinin Adı Soyadı: Aynur AKBARLI

İmzası:

X X X X X

ÖNSÖZ

Her şeyden önce, bu çalışmanın gerçekleşmesine vesile olan Rabbime sonsuz hamd ü senalar olsun. O'nun izni ve lütfu olmadan bu araştırmayı tamamlamak mümkün olamazdı. Bu çalışmanın gerçekleştirilmesi sürecinde desteklerini esirgemeyen Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na, çalışmanın her aşamasında değerli rehberliği ve bilgi birikimi ile yol gösteren kıymetli tez danışmanım Hüseyin DAĞ'a şükranlarımı sunarım. Çalışmanın bilimsel gelişimine katkı sağlayan, bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan saygıdeğer hocam Elif ŞENSOY'a da teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca, bu süreçte manevi destekleriyle yanımda olan değerli aileme ve arkadaşlarıma da sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım. Onların sevgisi, sabrı ve duaları, bu çalışmayı başarıyla tamamlamamda en büyük güç kaynağı olmuştur.

Ekim 2024

Aynur AKBARLI

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖNSÖZ.....	v
İÇİNDEKİLER	vi
KISALTMALAR	vii
SEMBOLLER	viii
ÇİZELGE LİSTESİ.....	x
ŞEKİL LİSTESİ.....	xi
ÖZET.....	xii
SUMMARY	xiii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TEORİK ALTYAPI	3
2.1 Kuantum Elektrodinamiği.....	5
2.1.1 Pertürbasyon teorisi.....	5
2.1.2 KED lagranjiyeni	6
2.2 Kuantum Renk Dinamiği	7
2.2.1 Asimptotik özgürlük ve hapsolme	8
2.2.2 KRD lagranjiyeni	9
2.3 Kuark Model	10
2.4 Egzotik Hadronlar	12
3. KRD TOPLAM KURALLARI VE UYGULAMALARI	15
3.1 İki Nokta KRD Toplam Kuralları	16
3.1.1 Korelasyon fonksiyonu	16
3.1.2 Fenomenolojik kısım.....	20
3.1.3 Kuramsal kısım	21
3.2 Üç Nokta KRD Toplam Kuralları	25
4. $Z_{cs}(3985)$ EGZOTİK DURUMUNUN KRD TOPLAM KURALLARINDA İNCELENMESİ.....	28
4.1 $Z_{cs}(3985)$ Mezonu İçin İki Nokta KRD Toplam Kuralları.....	29
4.2 $Z_{cs}(3985)$ Mezonu İçin Üç Nokta KRD Toplam Kuralları	31
4.2.1 Akımlar ve form faktörlerin tanımları	31
4.2.2 Fenomenolojik kısım.....	32
4.2.3 Kuramsal kısım	34
4.2.4 KRD toplam kurallarının eldesi	38
4.2.5 Nümerik analiz	39
5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	46
KAYNAKLAR	48
EKLER.....	56
ÖZGEÇMİŞ.....	84

KISALTMALAR

BNL	: Brookhaven Ulusal Laboratuvarı (Brookhaven National Laboratory)
CERN	: Avrupa Nükleer Araştırma Merkezi (Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire)
KED	: Kuantum Elektrodinami
KRD	: Kuantum Renk Dinamiği
OPE	: Operatör Çarpım Açılımı



SEMBOLLER

$\mathbb{1}$	: Birim operatörü
A_μ	: Ayar alanı
α	: İnce yapı sabiti
$\alpha_s(q)$	: Çiftlenim sabiti
a, b, c	: Renk indisleri
B_μ	: Dış alan
C	: Yük konjugasyonu
C_I^{AB}, C_n^{AB}	: Wilson katsayıları
$\mathcal{D}$	: Kovaryant türev
f^{abc}	: $SU(3)_C$ yapı sabiti
f_H	: Leptonik bozunma sabiti
F_C	: Yük form faktörü
F_D	: Kuadrupole form faktörü
F_M	: Manyetik form faktörü
$F_{\mu\nu}$	: Elektromanyetik alan tensörü
G	: Parite numarası
G_1, G_2, G_3	: Kovaryant form faktörleri
$G_a^\mu(x)$	: Ayar bozonları
$G_{\mu\nu}^a, G_a^{\mu\nu}$	: Gluon alan gerilim tensörleri
g_s	: Güçlü bağlaşım sabiti
Γ_i	: Lorentz indisleri
$\Gamma(x)$	: Gamma fonksiyonu
I	: Özdeşlik işlemcisi
i, j, k	: Kuark çeşnilerini
J	: Toplam açısal momentum
J_α	: İnterpolasyon akımı
$J_\mu^{el}(x)$	: Elektromanyetik akım

$\mathbf{L}$	: Yörünge açısal momentumu
λ_a	: $SU(3)$ Gell-Mann renk mantrisleri
$\mathcal{L}$	: Lagranjiyen
m_q	: Kuark kütlesi
(μ^-)	: Müon
n	: Radyal kuantum sayısı
O_n	: Alan işlemcisi
P	: Parite numarası
$\Pi(q^2)$	: Korelasyon fonksiyonu
q	: Kuark
$q = u, s, c$	: Kuark tipleri
S	: Spin
$S_c^{ij}(x)$	: Ağır kuark propagatörü
$S_q^{ij}(x)$	: Hafif kuark propagatörü
$\sum$	: Toplam
$\mathcal{T}$	: Zaman düzenleme işlemcisi
$u^{(s)}(p)$	: Dirac spin matrisi

ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 2.1: Parçacık nesilleri	4
Çizelge 2.2: Temel bozonlar.....	4
Çizelge 2.3: Bazı egzotik mezonların deneysel durumu.	13
Çizelge 2.4: Pentakuarkların deneysel durumu.	14
Çizelge 3.1: Tetrakuark yapılar için ara kesit akımları.....	17
Çizelge 3.2: Tetrakuark yapılar için ara kesit akımları.....	18
Çizelge 3.3: Pentakuark yapılar için ara kesit akımları.	18
Çizelge 4.1: Analizlerde kullanılan girdi parametreleri.	40
Çizelge 4.2: $Z_{cs}(3985)$ için elde edilen yük yarıçapı değerleri ve literatür karşılaştırması.	45

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1: KRD’de $\alpha_s(Q)$ etkin çiftlenim sabiti ölçümlerinin özeti [23].....	9
Şekil 3.1: Elektron saçılma süreçlerinde kuark-antikuarkın oluşum ve yok oluşu....	19
Şekil 3.2: Değişken $q^2 = z$ düzlemindeki konturlar. C_I konturu, OPE’nin uygulandığı $q^2 < 0$ referans noktasını temsil eder. $q^2 > t_m$ durumunda ise, noktalarla belirtilen gerçek hadronik durumlar ortaya çıkar.....	23
Şekil 4.1: $g_{\alpha\beta} p_\mu$ yapısının çarpanı olan Γ_1^{pert} , in M^2 ve M'^2 ile değişimi.....	40
Şekil 4.2: $g_{\alpha\mu} p_\beta$ yapısının çarpanı olan Γ_3^{pert} , in M^2 ve M'^2 ile değişimi.	41
Şekil 4.3: $p'_\alpha p_\beta p'_\mu$ yapısının çarpanı olan Γ_8^{pert} , in M^2 ve M'^2 ile değişimi	41
Şekil 4.4: Farklı süreklilik eşiği değerleri için Γ_1^{pert} , in M^2 ve M'^2 ile değişimi.	42
Şekil 4.5: Farklı süreklilik eşiği değerleri için Γ_3^{pert} , in M^2 ve M'^2 ile değişimi.	42
Şekil 4.6: Farklı süreklilik eşiği değerleri için Γ_8^{pert} , in M^2 ve M'^2 ile değişimi	42
Şekil 4.7: Kovaryant form faktörlerin Q^2 bağılılığı.	43
Şekil 4.8: Yük form faktörü $F_c(Q^2)$ ’nin Q^2 bağılılığı.	44

$Z_{cs}(3985)$ EGZOTİK MEZONUNUN ELEKTROMANYETİK FORM FAKTÖRLERİNİN İNCELENMESİ

ÖZET

Son yıllarda 50'den fazla egzotik hadronun keşfi, parçacık fiziği alanında önemli bir gelişme olarak kabul edilmiştir. Bu egzotik rezonanslar birçok deneyde tespit edilmiş ve kütleleri, bozunma genişlikleri, kuark içerikleri ve kuantum numaraları gibi fiziksel özellikleri ayrıntılı bir şekilde ölçülmüştür. Ancak, bu parçacıkların iç yapıları büyük ölçüde bilinmemektedir.

Bu tez çalışması, birçok hadronu başarıyla açıklayan ve onları mezonlar ve baryonlar olarak iki aileye ayıran kuark modelinde mevcut olmayan kuantum sayılarına sahip egzotik mezonların yapısını anlamaya ve form faktörlerinin incelenmesine odaklanmıştır. Özellikle, 2021 yılında elektron-pozitron çarpışmalarında D^- , D_s^- ve K^- mezonlarının üretimi ($e^+e^- \rightarrow K^+(D_s^-D^0 + D_s^-D^0)$) incelenerek BESIII ekibi tarafından gözlemlenen, yüklü gizli-tılsımlı (hidden-charm), $c\bar{c}s\bar{u}$ kuark yapısına, $J^{PC} = 1^{+-}$ kuantum sayısına sahip ve yaklaşık olarak 4.681 GeV'lik kütle, 12.8 MeV'lik bir bozunma genişliğindeki egzotik $Z_{cs}^+(3985)$ parçacığı örneği üzerinden ayrıntılı bir hesaplama gerçekleştirilmiştir.

Yöntem olarak üç nokta KRD toplam kuralları kullanılmış ve $Z_{cs}(3985)$ parçacığının elektromanyetik form faktörleri hesaplanmıştır. Çalışmanın sonuçları, nümerik analizlerle sunulmuştur. Ayrıca, $Z_{cs}^+(3985)$ parçacığının elektrik yük yarıçapı da hesaplanmış ve bu da parçacığın yapısının daha ayrıntılı bir şekilde anlaşılmasına katkıda bulunmuştur.

Bu çalışma, egzotik hadronların yapısına dair yeni bilgiler sunarak, KRD parçacıklarının oluşumları hakkında bilgi vermeyi amaçlamaktadır. Elde edilen bulgular, egzotik mezonların ve genel olarak hadronik yapıların daha iyi anlaşılması için önemli bir adım olarak değerlendirilebilir. Bu çalışma, kuark modelinin ötesindeki fiziksel süreçlerin keşfi ve bu süreçlerin anlaşılması için yeni yollar açabilir.

Anahtar kelimeler: KRD toplam kuralları, Egzotik mezonlar, KRD fenomenolojisi, Tetrakuarklar, Elektromanyetik form faktörleri.

INVESTIGATION OF ELECTROMAGNETIC FORM FACTORS OF $Z_{cs}(3985)$ EXOTIC MESON

SUMMARY

In recent years, the discovery of more than 50 exotic hadrons has been regarded as a significant development in the field of particle physics. These exotic resonances have been detected in numerous experiments, and their physical properties, such as masses, decay widths, quark content, and quantum numbers, have been measured in detail. However, the internal structures of these particles remain largely unknown.

This thesis focuses on understanding the structure of exotic mesons, which possess quantum numbers not found in the quark model that successfully explains many hadrons and classifies them into two families: mesons and baryons. Specifically, a detailed calculation has been carried out on the example of the charged hidden-charm $Z_{cs}^+(3985)$ particle, observed by the BESIII collaboration in 2021 during electron-positron collisions through the process $(e^+e^- \rightarrow K^+(D_s^- D^0 + D_s^- D^0))$. This particle has a quark structure of $c\bar{c}s\bar{u}$, quantum numbers of $J^{PC} = 1^{+-}$, a mass of approximately 4.681 GeV , and a decay width of 12.8 MeV .

Three-point QCD sum rules were used as the method, and calculations were performed on the electromagnetic form factors of the $Z_{cs}(3985)$ particle. The results are presented through numerical analyses. Additionally, the electric charge radius of the $Z_{cs}^+(3985)$ particle was calculated, contributing to a more detailed understanding of the particle's structure.

This study aims to shed light on new approaches that may go beyond the limits of current particle physics theories by providing new insights into the structure of exotic hadrons. The findings can be considered an important step toward better understanding exotic mesons and hadronic structures in general. This work may open new paths for the discovery and understanding of physical processes beyond the quark model.

Keywords: QCD sum Rules, Exotic mesons, QCD phenomenology, Tetraquarks, Electromagnetic form factors.

1. GİRİŞ

Parçacık fiziği, temel parçacıkların yapılarını, özelliklerini ve etkileşimlerini anlamak ve sınıflandırmak amacıyla kullanılan bir bilim dalıdır. Bu alanda temel bir teori olan Standart Model, bilinen temel parçacıklar ve bunların etkileşimleri hakkında kapsamlı bir açıklama sunar. Bu modeli kullanarak, parçacıkların elektrozayıf etkileşimlerini açıklamak için Kuantum Elektrodinamiği (KED) ve kuarklar ile gluonların etkileşimlerini açıklamak için Kuantum Renk Dinamiği (KRD) kullanılır.

Diğer taraftan, bu temel parçacıklardan kuarklar ve gluonlar, tam spinli ya da buçuklu spinli hadronları oluşturur. Temelde bu parçacıklar kuark model ile açıklanabilir. Kuark modeli ilk kez 1960'larda Murray Gell-Mann [1] ve diğerleri [2, 3] tarafından öne sürüldüğünde, o zamanlar var olduğu bilinen durumları anlamlı bir şekilde organize etme amacı taşıyordu. Sonraki on yılda kuantum renk dinamiği geliştikçe, yalnızca üç kuark ve kuark-antikuark kombinasyonlarının var olabilmesi için hiçbir neden olmadığı ortaya çıktı. Gerçekten de, Gell-Mann'ın 1964 tarihli orijinal makalesi, egzotik hadronların olasılığından bahsetmektedir [1].

Egzotik hadronlar, kuarklardan ve gluonlardan oluşan atom altı parçacıklardır; ancak protonlar, nötronlar ve mezonlar gibi "iyi bilinen" hadronların aksine, üçten fazla değerlik kuarktan oluşurlar. Buna karşılık "sıradan" hadronlar yalnızca iki veya üç kuark içerir. Örneğin, iki kuark ve iki antikuarkın oluşturduğu tetrakuark yapıları ve iki mezonun bağlı durumu olan mezon molekülleri egzotik mezon örnekleridir. 2003 yılındaki ilk egzotik mezon $\chi_{c1}(3872)$ gözleminin ardından [4], değişik kuark bileşenlerine ve kuantum sayılarına sahip 40'a yakın dörtlü kuark, ve 2 adet beşli kuark yapısı deneysel olarak gözlemlenmiştir [5]. Tüm bu gözlemlere rağmen egzotik mezonların kütleleri, bozunma genişlikleri, kuark içerikleri ve kuantum sayıları gibi bazı fiziksel özellikleri belirlenmiş olsa da, kuarkların hangi şekilde bir araya gelerek egzotik mezonları oluşturdıkları henüz tam olarak anlaşılamamıştır. Bu sebeple, yapılan çalışmada, egzotik mezonların elektromanyetik form faktörlerini ve yapılarını anlamak için özellikle, eg-

egzotik $Z_{cs}(3985)$ parçacığı örneği üzerinden ayrıntılı bir hesaplama gerçekleştirilmiştir. Bu tez kapsamında, temel parçacıkların teorik temelleri, bu parçacıkların etkileşimlerini büyük ölçüde açıklayan Standart Model, bu modelin kapsadığı Kuantum Elektrodinamiği, Kuantum Renk Dinamiği ve Kuark Modeli ile KRD Toplam Kuralları ve egzotik hadron yapılarına uygulamaları ele alınacaktır. Ardından, Bölüm 4'te örnek olarak seçilen egzotik $Z_{cs}(3985)$ mezonunun elektromanyetik form faktörleri, üç nokta KRD Toplam Kuralları yöntemi kullanılarak incelenecektir. Bu hesaplama yönteminde hadronlar, enterpolasyonlu kuark akımları ile temsil edilir ve bu sebeple de, ilgili mezona uygun bir korelasyon fonksiyonu seçilecektir. KRD toplam kuralları metoduna göre bu korelasyon fonksiyonu, kuarklar ve gluonlar (kuramsal kısım) ve hadronlar (fenomenolojik kısım) cinsinden hesaplanacaktır. Çalışmanın sonuçları, Bölüm 4.2.5'te nümerik analizlerle sunulacaktır. Bu çalışma, temel parçacıkların ve onların etkileşimlerinin karmaşıklığını anlamamıza katkıda bulunacaktır.

2. TEMEL TEORİK ALTYAPI

Doğanın temel yapı taşlarını anlama çabası tarih boyunca süregelmiştir ve maddenin ne şekilde ve hangi unsurlardan meydana geldiği hep merak konusu olmuştur. Madde-nin gerçek doğasına dair ilk önemli felsefi düşünce, antik Yunan filozofu Demokritos'a dayanmaktadır. Ona göre, evrende var olan her şey, boşluk ve bölünemez bir yapı olan "atom" adı verilen parçacıklardan oluşuyordu. Ancak 1897'de J.J. Thomson'un elekt-ronu keşfetmesiyle [6] atomun bölünebilir olduğu ve dolayısıyla atomların temel par-çacıklar olmadığı ortaya çıktı. Bununla birlikte, elektronların çekilemeyip veya dışarı atılamaması nedeniyle, bunlar da temel varlıklar gibi algılanmaya başlandı.

1911 yılında Ernest Rutherford'un laboratuvarında atom çekirdeklerinin keşfedilme-siyle [7], bazı radyoaktif çekirdeklerin elektronlar ve diğer parçacıklar yaydığı bilini-yordu. Bu nedenle, atom çekirdeklerinin elektrik yükü ve kütlesiyle ilgili olarak temel olmadığı düşünüldü. Bu da maddenin temel bileşenleri ve bu bileşenler arasındaki et-kileşimlerle ilgilenen "Temel Parçacık Fiziği"nin ortaya çıkmasına neden oldu.

1937'de, doğaları daha sonra anlaşılrsa da, müonlar listeye eklenmiş, daha sonra pion-lar ve tuhaf parçacıklar da eklenmiştir. 1946'da H. Yukawa tarafından pi-mezonu ola-rak adlandırılan müonun (μ^-) gözlenmesiyle [8] lepton kavramı şekillenmeye başla-mıştır. 1950'lerin sonlarında İsviçre'deki Avrupa Nükleer Araştırma Merkezi (CERN) ve Amerika'daki Brookhaven Ulusal Laboratuvarı'nda (BNL) parçacık hızlandırıcıları ve kabarcık odalarını kullanarak [9] yapılan deneylerde, yunanca ağır anlamına gelen hadron adı verilen parçacıklar keşfedilmiş ve çeşitli yük ve gariplik değerlerine sahip birçok yeni parçacık nesli ortaya çıkmıştır.

Keşfedilen temel parçacıkları ve bunların etkileşimlerinde önemli olan üç temel kuv-veti açıklayan "Standart Model" teorisi [10], maddeyi leptonlar, kuarklar ve araçlar olmak üzere üç temel parçacık türüne ayırır. Şu anda Standart Modelde 12 lepton, 36 kuark, 12 ara parçacık ve Glashaw-Weinberg-Salam teorisinin Higgs bozonu [11] dahil olmak üzere en az 61 temel parçacık mevcuttur [12]. Tüm temel parçacıklar spinlerine

göre bozon veya fermiyon olarak sınıflandırılır. Yarım tam sayı spini olan ve madde ile ilişkilendirilen parçacıklar fermiyon, tam sayı spini olan ve temel kuvvetlerle ilişkili olan parçacıklar ise bozondur. 12 temel fermiyonik çeşni mevcuttur ve bunlar Çizelge 2.1'de gösterildiği üzere her birinde dört parçacık bulunan üç nesile ayrılır. Bu parçacıkların altısı kuark, geriye kalan altı parçacık ise leptondur. Bu 12 parçacığa karşı-

Çizelge 2.1 : Parçacık nesilleri.

Leptonlar		
Birinci nesil	İkinci nesil	Üçüncü nesil
elektron (e^-)	müon (μ^-)	tau (τ^-)
elektron nötrino (ν_e)	müon nötrino (ν_μ)	tau nötrino (ν_τ)
Kuarklar		
Birinci nesil	İkinci nesil	Üçüncü nesil
yukarı kuark (u)	tılsım kuark (c)	üst kuark (t)
aşağı kuark (d)	garip kuark (s)	alt kuark (b)

lık gelen 12 temel fermiyonik antiparçacık da mevcuttur. Bozonlar ise Çizelge 2.2'de yer almaktadır. Kütlesiz foton, elektromanyetik etkileşimin; Z^0 , W^+ ve W^- ise üç

Çizelge 2.2 : Temel bozonlar.

Parçacık	spin	elektrik yükü
Foton (γ)	1	0
Z^0 – Bozon	1	0
W^+ – Bozon	1	1
W^- – Bozon	1	-1
Gluon (g)	1	0

zayıf ayar bozonu olarak zayıf etkileşimin; gluonlar ise güçlü etkileşimin aracıdır. Standart Model ise, doğadaki dört temel etkileşimden (kuvvetten) bu üçünü - zayıf, elektromanyetik ve güçlü kuvvetleri - açıklar, ancak kütle-çekim kuvvetini açıklayamaz. Ek olarak Standart Model, yüklü parçacıklar arasındaki etkileşimleri tanımlayan Kuantum Elektrodinamiğini, renk yükü taşıyan parçacıkların etkileşimlerini tanımlayan Kuantum Renk Dinamiğini ve zayıf etkileşimleri açıklayan Elektrozayıf Kuantum alan teorilerini içermektedir. Bu kuantum alan teorileri kısaca ele alınacak ve açıklanacaktır.

2.1 Kuantum Elektrodinamiği

1928'de İngiliz fizikçi P.A.M. Dirac, elektronların hareketini ve dönüşünü tanımlayan ve kuantum elektrodinamiğinin temellerini atan bir dalga denklemi keşfetti. Bu denklem, kuantum mekaniği ile özel görelilik teorisini birleştirdi. 1940'ların sonlarında, Richard P. Feynman, Julian S. Schwinger ve Tomonaga Shin'ichirō tarafından geliştirilen KED, yüklü parçacıkların elektromanyetik etkileşimini açıklayan başarılı bir kuantum alan kuramı olarak kabul edildi. Bu etkileşim süreci, grafiksel olarak "Feynman diyagramları" adı verilen araçlar aracılığıyla temsil edilebilir.

KED teorisine göre, bir sürecin karmaşıklığı arttıkça (yani süreçteki parçacık sayısı arttıkça), bu sürecin gerçekleşme olasılığının azaldığı belirtilir [13]. Her karmaşıklık seviyesi için, sürecin katkısı α^2 ile azalır; burada α ince yapı sabiti olarak adlandırılan boyutsuz bir değerdir ve

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \sim \frac{1}{137} , \quad (2.1)$$

şeklinde yazılır. Bu sebepten dolayı, birkaç seviye sonrasında katkı ihmal edilebilir düzeydedir. İnce yapı sabitinin küçüklüğü ve buna bağlı olarak yüksek dereceli katkıların boyutunun azalması nedeniyle, KED sıklıkla pertürbasyon teorisi olarak adlandırılır [14, 15].

2.1.1 Pertürbasyon teorisi

Pertürbasyon teorisi, matematiksel yöntemleri içeren bir yaklaşımı ifade eder ve tam olarak çözülemeyen bir problem için kullanılır. Bu yaklaşım, belirli bir problem için kesin bir çözümün mümkün olmadığı durumlarda, yaklaşık bir çözüm elde etmeyi amaçlar [16, 17]. Bu teknik, sorunu "çözülebilir" ve "pertürbatif, yani etkileyici" parçalara ayıran bir ara adımı temel alır [18]. Pertürbasyon teorisine göre iki çeşit çözüm yöntemi vardır. İlk çözüm, bir güç serisi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a^1(x-c) + a_2(x_c)^2 + \dots , \quad (2.2)$$

şeklinde yazılır. Burada a_n , n 'inci terimin katsayısı, c bir sabit ve x de c etrafında değerler alan bir değişkendir. İkinci çözümde, her dereceden türev alabilen, gerçel ya da karmaşık bir $f(x)$ fonksiyonunun a gerçel ya da karmaşık bir sayı olmak üzere

$(a - r, a + r)$ aralığında Taylor serisi

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \end{aligned} \quad (2.3)$$

olarak ifade edilir. Burada $f^{(n)}(a)$, f fonksiyonunun n . dereceden türevinin a noktasındaki değerini ifade etmektedir. Fonksiyon f 'in birinci dereceden türevi f 'in kendisi olarak tanımlanmıştır ve $(x-a)^0$ ile $0!$ her ikisi de 1 olarak kabul edilmiştir.

Pertürbasyon çözümü, bu yaklaşım serilerini belirli bir noktada keserek gerçekleştirilir. Serinin ilk terimi problemin bilinen bir çözümü olup, ardından sistematik bir prosedürle tekrarlanarak elde edilen ve küçülme eğiliminde olan terimleri içerir. Tipik olarak çözüm, başlangıç terimleri koruyarak serinin devamının kesilmesiyle elde edilir. İlk iki terimde kesilmişse, bu birinci dereceden pertürbasyon düzeltmesi olarak adlandırılır.

2.1.2 KED lagranjyeni

Yüklü spin-1/2 alanları arasındaki etkileşimi sağlayan ayar(gauge) alanı elektromanyetik alandır. Kütleli m olan sistem için KED Lagranjyenin spin-1/2 alanının doğal birimlerdeki elektromanyetik alanla etkileşimi

$$S_{KED} = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m) \psi(x) \right], \quad (2.4)$$

eyleme yol açar [19]. Burada $F_{\mu\nu}$ elektromanyetik alan tensörü, $\psi(x)$ spin-1/2 parçacıklarının bispinor¹ alanı, γ^μ Dirac matrisleridir. $\mathcal{D}_\mu$ ise koordinat sistemlerinin kendi aralarında nasıl değişebileceğini göstererek, alanların bir yerden diğerine nasıl değiştiğini tanımlamak için kullanılan yöntem olan ayar kovaryant türevidir ve

$$\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu + ieB_\mu, \quad (2.5)$$

şeklinde ifade edilir. Burada e , bispinör alanının elektrik yüküne denk gelen çiftlenim sabiti, A_μ ayar alanı ve B_μ dış kaynak tarafından uygulanan dış alan olarak belirlen-

¹Özel görelilik prensiplerine uygun olarak özel olarak yapılmış bir spinörün özel bir düzenlemesi anlamına gelir.

miştir. Basitlik amacıyla dış B alanı sıfır kabul edildiğinde, kovaryant türev

$$\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu , \quad (2.6)$$

şeklini alır. Bu durumda, KED Lagranjiyenin yeni formu

$$\mathcal{L}_{KED} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) - ej^\mu A_\mu , \quad (2.7)$$

şeklinde olur. Burada j^μ , Noether teoreminden kaynaklanan korunan $U(1)$ akımıdır ve

$$j^\mu = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) , \quad (2.8)$$

eşittir. Denklem 2.7'deki ifade

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{KED} &= -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) - ej^\mu A_\mu \\ &= -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu A_\mu\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) , \end{aligned} \quad (2.9)$$

olur. Böylelikle, basit bir ayar simetri gereksiniminden hareketle, çok başarılı bir kuantum alan teorisine yol açan doğru KED Lagranjiyeni ortaya çıkmış oldu.

İncelenenlere göre, kuantum elektrodinamiği, sonraki tüm kuantum alan teorileri için bir prototip ve model olarak kullanılmıştır. Daha sonraki benzer bir teori, 1960'ların başında başlayan ve 1970'lerde "güçlü alanın" kaynağı olarak renk kavramının, fizikçiler Harald Fritzsch ve Heinrich Leutwyler ile fizikçi Murray Gell-Mann tarafından dönüştürüldüğü Kuantum Renk Dinamiğidir [20].

2.2 Kuantum Renk Dinamiği

1970'lerin başlarına kadar, $SU(3)$ simetrisinin güçlü etkileşimin temelini oluşturduğuna inanılıyordu. Ancak daha sonra, güçlü etkileşimin renk kavramıyla ilişkilendirilen başka bir kuark kuantum sayısı ile bağlantılı olduğu geniş çapta kabul edilmeye başlandı. Bugün, kuarklar arasındaki güçlü etkileşimi açıklayan kuantum alan teorisi, temel renk yükü taşıyan parçacıklar olarak bilinen kuarklar arasındaki etkileşimleri

kapsar ve bu teoriye kuantum renk dinamiği denir. Kuantum Renk Dinamiği'nde, her bir kuark türü üç farklı renge sahiptir: q_α , $\alpha = 1, 2, 3$ (kırmızı, sarı, mavi).

Bu bağlamda, baryonlar (qqq) üçlü kuark kombinasyonları ve mezonlar ($q\bar{q}$) ise bir kuark ve bir anti-kuarktan oluşan renksiz kombinasyonlarıyla

$$B = \frac{1}{\sqrt{6}} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} |q_\alpha q_\beta q_\gamma\rangle, \quad M = \frac{1}{\sqrt{3}} \delta^{\alpha\beta} |q_\alpha \bar{q}_\beta\rangle, \quad (2.10)$$

tanımlanır [21]. Gözlenemeyen ekstra durumları önlemek için, tüm asimptotik durumların renksiz olduğu ve dolayısıyla renk uzayında rotasyonlar altında tekli olduğu varsayılır. Bu varsayım hapsolma hipotezi olarak bilinir. Böylece, Kuantum Renk Dinamiği gibi yerel ayar simetrisine sahip teorilerde bulunmayan asimptotik özgürlük ve hapsolma gibi farklı yeni özellikler ortaya çıkar.

2.2.1 Asimptotik özgürlük ve hapsolma

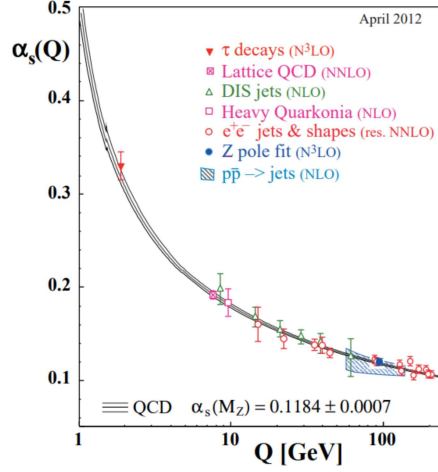
Gluonlar renk yükü taşıdıklarından diğer gluonlar ile etkileşme özelliğine sahiptir. Kuarkın diğer bir kuark ile etkileşmesini sağlamak için çevresini saran gluonlar, taşıdıkları özellikler sayesinde etkileşim kuvvetinin belirlenmesinde önemli bir rol oynarlar. KRD için kuark ve gluon arasındaki etkileşimin etkin çiftlenim sabiti, q momentumuna bağlı olarak

$$\alpha_s(|q^2|) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + (\alpha_s(\mu^2)/12\pi)(11n - 2f)\ln(|q^2|/\mu^2)}, \quad (|q^2| \gg \mu^2), \quad (2.11)$$

ifade edilir [22] ve bu ifade, q^2 'nin büyüklüğü, μ^2 'den çok daha büyük olduğunda geçerlidir. Burada, n ve f standart modele göre üç olan renk yükünü ve altı olan çeşni sayısını ifade eder.

Kuarklar arasındaki mesafe yüksek momentumda azaldıkça, yani kuarkın çevresindeki gluon bulutuna doğru yaklaştıkça, gluonların etkisi azalır ve dolayısıyla etkileşim kuvveti de azalır. Bu durumda, kuarklar serbest parçacıklar gibi davranır ve kuantum renk dinamiğinde bu durum asimptotik özgürlük olarak tanımlanır. Etkin çiftlenim sabitinin momentuma göre değişimi Parçacık Veri Grubunun 2012 Parçacık Fiziği İncelemesinin KRD inceleme bölümünde yer alan Şekil 2.1'de gösterilmektedir [23].

Asimptotik özgürlük, belirli ayar teorilerinde, enerji seviyesi arttıkça ve aynı zamanda uzunluk ölçeği azaldıkça parçacıklar arasındaki etkileşimlerin asimptotik olarak za-



Şekil 2.1 : KRD’de $\alpha_s(Q)$ etkin çiftlenim sabiti ölçümlerinin özeti [23].

yıfladığı bir özelliiktir. Bu özellik, David Gross ve Frank Wilczek [24] tarafından 1973 yılında keşfedilmiş ve aynı yıl David Politzer [25] tarafından da bağımsız olarak ortaya konmuştur. Bu çalışmaları nedeniyle, 2004 Nobel Fizik Ödülü’nü paylaşmışlardır. Yüksek momentum alanında, KRD’nin asimptotik özgürlük özelliği sayesinde kuarklar neredeyse serbestçe hareket eder, bu da etkin etkileşim sabiti α_s ’ye bağlı olarak pertürbatif bir genişleme yapılabileceği ve pertürbasyon teorisinin geçerli olduğu anlamına gelir. Düşük momentumlarda (uzun mesafelerde), kuarklar arasındaki etkileşim kuvveti, onları çevreleyen gluon bulutu nedeniyle etkileşme sabiti artacağından büyür. Kuarklar arasındaki etkileşim alanında bulunan parçacık bulutu, etkileşen kuarkları ayırmak için harcanan enerjiyle yeni kuark-anti kuark çifti oluşturur; bu çiftler, kuarkların bulunduğu hadron içindeki diğer kuark ve anti kuarklarla bir araya gelerek yeni parçacıklar oluşturur. Bu nedenle, bir kuarkın serbest halde gözlemlenmesi mümkün değildir ve bu durum hapsolma olarak adlandırılır. Serbest bir kuarkın deneylerde gözlenememesinin nedeni de kuarkların hapsedilmesidir. Şekil 2.1’de görüldüğü gibi küçük momentumlarda hapsolma özelliği nedeniyle etkin çiftlenim sabiti azalır.

2.2.2 KRD lagranjiyeni

Kuarkların ve gluonların etkileşimleri, $SU(3)_C$ ayar grubu altında değişmez olan Kuantum Renk Dinamiği Lagranjiyeni ile belirlenir. Bu Lagranjiyen kuark çeşnileri üzerinden bir toplam ile kuark kinetik ve kütle terimlerinin yanı sıra ayar alanlarının kendileriyle etkileşimlerini veren bir terim içerir. m_f kütesine sahip bir kuark için KRD

Lagranjiyeni

$$\mathcal{L}_{KRD} = \sum_f \bar{q}_f (i\gamma^\mu D_\mu - m_f) q_f - \frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a, \quad (2.12)$$

eşittir. Burada, f çeşnili bir kuark alanı q_f olarak kabul edilmiş ve denklemleri basitleştirmek için renk uzayında $q_f \equiv \text{sütun}(q_f^1, q_f^2, q_f^3)$ olan bir vektör gösterimi kullanılmıştır. γ^μ Lorentz grubunun vektör gösterimine bağlı spinor gösterimini ifade eden gama matrisleri, D_μ ayar kovaryant türevidir. $G_a^{\mu\nu}$ ve $G_{\mu\nu}^a$ ise değişmez gluon alan gerilim tensörlerini temsil eder ve

$$\begin{aligned} G_a^{\mu\nu} &= \partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu + g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu, \\ G_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c, \end{aligned} \quad (2.13)$$

şeklinde gösterilir. Burada, $G_a^\mu(x)$ ayar bozonları olup, 1'den 8'e kadar uzanan a , b ve c ile indekslenmiştir. f^{abc} gerçek ve tamamen antisimetrik olan $SU(3)_C$ yapı sabitleri, g_s ise güçlü bağlaşım sabitidir. Denklem 2.13'deki gluon alan gerilim tensörlerini Denklem 2.14'de yerine yatarak

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{KRD} &= \sum_f \bar{q}_f (i\gamma^\mu D_\mu - m_f) q_f - \frac{1}{4} (\partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu) (\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a) \\ &\quad - \frac{g_s}{2} f^{abc} (\partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu) G_\mu^b G_\nu^c - \frac{g_s^2}{4} f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e, \end{aligned} \quad (2.14)$$

denklemine erişilir. Kuark ve gluonları açıklamak için günümüzde kuantum renk dinamiği teorisine uygun olarak kuark modeli gibi farklı yaklaşımlar da mevcuttur.

2.3 Kuark Model

Gell-Mann [1] ve Zweig [2, 3] tarafından 1964 yılında oluşturulan Kuark Modeli, bugüne kadar gözlemlenen neredeyse tüm hadronları başarılı bir biçimde kategorize etmektedir. Kuarklar, deneylerde tek başlarına veya izole olarak gözlenemediği için, bu model aynı zamanda "Bileşen (Constituent) Kuark Modeli" adıyla da bilinir [26]. Kuark kütlelerinin tahmin edilebilir olduğu birçok hadronu başarıyla açıklayan ve onları mezonlar ve baryonlar olarak iki aileye ayıran bu model, parçacıkların kuantum sayılarını da başarılı bir şekilde hesaplamıştır. Bu hesaplamalara örnek olarak şu kuantum

sayıları listelenebilir.

$$S = S_{q'} + S_{\bar{q}} : \text{ spin ,}$$

$$L : \text{ yörünge açısal momentumu ,}$$

$$J = L + S : \text{ toplam açısal momentum ,}$$

$$n : \text{ radyal kuantum sayısı ,}$$

$$P \rightarrow (1)^{L+1} : \text{ parite numarası (mezonlar için) ,}$$

$$C \rightarrow (1)^{L+S} : \text{ yük konjugasyonu (nötr mezonlar için) ,}$$

$$G \rightarrow (1)^{L+S} C = (1)^{L+S+I} : \text{ G-parite numarası ,}$$

Parite sayısı, mezonun uzaysal dalga fonksiyonu ve dolayısıyla yörüngesel açısal momentumu ile ilişkilidir ve parite sayısının tanımındaki $(-1)^{+1}$ kuark-kuark karşıtı çiftin içsel özelliklerinden kaynaklanır; bu özellik, Dirac denkleminin dolaylı zıt içsel paritelere sahip olmaları gerektiği anlamına gelir. Listedeki C yük eşleniği, I ise izospin anlamına gelir. Eğer $P = (-1)^J$ ise, o zaman $S = 1$ olduğundan, dolayısıyla $PC = 1$ olur. Bu kuantum sayılarına sahip durumlar doğal parite durumları olarak adlandırılırken, diğer tüm kuantum sayıları egzotik olarak adlandırılır (örneğin $J^{PC} = 0^{--}$, egzotik bir durumdur).

Tüm kuarkların baryon sayısı $1/3$ 'tür. Yukarı, tılsım ve üst kuarkların elektrik yükü $+2/3$, aşağı, garip ve alt kuarkların elektrik yükü ise $-1/3$ 'tür. Antikuarklar, bu kuarkların zıt kuantum sayılarına sahiptir. Kuarklar spini $1/2$ olan parçacıklardır ve bu nedenle fermiyon olarak sınıflandırılırlar.

Mezonlar, baryon sayısı sıfır olan hadronlardır. Eğer bir kuark-antikuark çiftinin yörüngesel açısal momentumu L ve spin değeri S ise, o zaman J^P notasyonu açısından, mezonlar kuark modeline göre

$$0^+ : \text{ skaler mezonlar,}$$

$$0^- : \text{ psödaskaler mezonlar,}$$

$$1^- : \text{ vektör mezonları,}$$

$$1^+ : \text{ aksiyel vektör mezonları,}$$

$$2^- : \text{ psödotesör mezonlar}$$

olarak sınıflandırılır. Kuark modeli kuantum renk dinamiği teorisinden türetilse de, hadronların yapısı bu modelin izin verdiğiinden daha karmaşıktır. Bu nedenle kuark modelinin dışında kalan hadronlar olabilir. Son yıllarda, farklı yapıdaki hadronların varlığının öne sürüldüğü, çeşitli kuark ve gluon birleşimlerinden oluşabileceği belirtilmiştir ve bunların bazıları da deneysel olarak gözlemlenmiştir. Güçlü etkileşimlerin temel teorisi olarak kabul edilmekte olan Kuantum Renk Dinamiği, geleneksel kuark modelinde bulunmayan hadron durumlarının varlığını engellemez; tam tersine, sıradan baryonlar ve mezonlardan farklı olarak, daha geniş ve çeşitli bir hadron spektrumunun varlığını öngörür. Standart olmayan doğalarından dolayı mevcut kuark modelinin dışında kalan hadronlara "egzotik hadron" adı verilmektedir.

2.4 Egzotik Hadronlar

Egzotik hadronlar, kuarklar ve gluonlardan oluşan, ancak tipik hadronlardan farklı olarak iki veya üç kuarktan fazlasını içeren atom altı parçacıklardır. Standart hadronlarla uyumlu bir şekilde, egzotik hadronlar da sınıflandırılabilir. Bu sınıflandırma şemasına göre, dört valans kuark içeren tetrakuarklar egzotik mezon olarak adlandırılırken, beş valans kuark içeren pentakuarklar egzotik baryon olarak adlandırılır. Altı valans kuark içeren heksakuarklar henüz gözlemlenmemiş olup, kuark sayısına göre dibaryon veya üçlü mezon olabilir [26, 27, 28, 29, 30, 31].

Tetrakuarklar (dörtkuarklar), bir kuark çifti ve onun rengini nötr hale getiren antikuark çiftinden meydana gelen yapıları ifade eder. Bu kapsamda, iki mezonun bir araya gelerek oluşturduğu bağlı durumlar olan mezon molekülleri de tetrakuarklar sınıfına dahil edilir. Bu yapı ile ilgili olarak, ilk olarak 2003 yılında Japonya'da gerçekleştirilen Belle deneyi sırasında gözlemlenen ve $X(3872)$ olarak adlandırılan parçacığın, bir tetrakuark adayı olarak öne sürüldüğü belirtilmiştir [32, 33]. Haziran 2013'te, Çin'deki BES III deneyi ile Japonya'daki Belle deneyi, benzer şekilde tetrakuark adayı olarak gösterilen beş parçacığın ardından yaptıkları bağımsız açıklamalarda, $Z_c(3900)$ parçacığını ilk dört kuarklı durum olarak ilan etmişlerdir [34].

2014'te, Büyük Hadron Çarpıştırıcısı'nda yapılan deneyde, $Z(4430)$ durumunun varlığı $13,9\sigma$ üzerinde bir değerle doğrulanmıştır [35, 36]. 2016'da ise $X(5568)$, $X(4274)$,

X(4500) ve X(4700) adlı parçacıkların tetrakuark adayı oldukları açıklanmıştır [37, 38]. Bir diğer tetrakuark adayı ise 2021 yılında elektron-pozitron çarpışmalarında BE-SIII ekibi tarafından gözlemlenen $Z_{cs}^+(3985)$ parçacığıdır [39]. Bazı egzotik mezonlarla ilgili çeşitli deneysel özellikler, bozunum modları ve gözlemlendikleri deneyler Çizelge 2.3’de özetlenmiştir [40].

Çizelge 2.3 : Bazı egzotik mezonların deneysel durumu.

Parçacık	M[MeV]	Γ [MeV]	Bozunum modları	Gözlemlenmesi
$X_0(2900)$	2866 ± 7	57 ± 12	$D^- K^+$	LHCB 2020 [41]
$X_1(2900)$	2904 ± 5	110 ± 11	$D^- K^+$	LHCB 2020 [41]
$T_{c\bar{s}0}^*(2900)$	2892 ± 21	119 ± 29	$D_s^+ \pi^-, D_s^+ \pi^+$	LHCB 2023 [42]
$T_{cc}(3875)$	3874.83 ± 0.11	0.410 ± 0.165	$D^0 D^0 \pi^+$	LHCB 2022 [43]
$Z_c(3900)$	3887.1 ± 2.6	28.4 ± 2.6	$(D\bar{D}^*)^\pm, J/\psi \pi$	BES3 2013 [44] BELL 2013 [45]
$Z_{cs}(4000)$	3980 - 4010	13 ± 4	$D_s^+ \bar{D}^{*0}, D_s^{*+} \bar{D}^0, J/\psi K^+$	LHCB 2021 [46] BES3 2021 [47] BES3 2022 [48] BES3 2013 [49]
$X(4020)^\pm$	4024.1 ± 1.9	13 ± 5	$h_c(1P)\pi, D^* \bar{D}^*$	BES3 2014 [50] BES3 2015 [51]
$X(4050)^\pm$	4051^{+24}_{-40}	82^{+21+47}_{-17-22}	$\pi^+ \chi_{c1}(1P)$	BELL 2008 [52]
$X(4055)^\pm$	4054 ± 3.2	45 ± 13	$\pi^+ \psi(2S)$	BELL 2015 [53]
$X(4100)^\pm$	4096 ± 28	152 ± 58	$\eta_c(1S)\pi^-$	LHCB 2018 [54] BELL 2014 [55]
$Z_c(4200)$	4196^{+35}_{-32}	370 ± 70	$J/\psi \pi^+$	LHCB 2019 [56]
$Z_{cs}(4220)$	4216^{+50}_{-40}	233 ± 52	$J/\psi K^+$	LHCB 2021 [46]
$R_{c0}(4240)$	4239^{+50}_{-21}	220 ± 47	$\pi^- \psi(2S)$	LHCB 2014 [57]
$X(4250)^\pm$	4248^{+190}_{-50}	177^{+54}_{-39}	$\pi^+ \chi_{c1}(1P)$	BELL 2008 [52] BELL 2009
$Z_c(4430)$	4478^{+15}_{-18}	181 ± 31	$\pi^+ \psi(2S), \pi^+ J\psi$	BELL 2014 [55] LHCB 2014 [57]
$X(5568)^\pm$	5566.9 ± 3.3	19^{+9}_{-7}	$B_s \pi^\pm$	D0 2016 [58] D0 2018 [54]
$X(6900)$	6886 ± 16	168 ± 33	$J/\psi J/\psi$	LHCB 2020 [59]
$Z_b(10610)$	10607.2 ± 2.0	18.4 ± 2.4	$v(1S)\pi^+, v(2S)\pi^0$	BELL 2012 [60]
			$v(3S)\pi^0$	BELL 2015 [61]
$Z_b(10650)$	10652.2 ± 1.5	11.5 ± 2.2	$v(1S)\pi^+, h_b(1P)\pi^+$	BELL 2012 [60]
			$B^{*+} \bar{B}^{*0}$	BELL 2015 [61]

Pentakuarklar (beşkuarklar), dört kuark ve bir antikuarkın bir araya gelmesi veya onların moleküler yapılarından türemiş atomaltı parçacıklardır. Beş kuarklı parçacıkların var olabileceğine dair ilk iddialar 1964’te, kuark modelini oluşturan Murray Gell-Mann tarafından ortaya atılmıştır [62]. Pentakuark adı ise ilk olarak Claude Gignoux ve mes-

lektaşları [63] ile Harry J. Lipkin [64] tarafından 1987 yılında kullanılmıştır.

İlk kez fiziksel olarak pentakuarkların keşfedildiğine dair iddia, 2003 yılında Japonya’da gerçekleştirilen bir deney sırasında ortaya atılmıştır [65]. Ancak, sonraki iddialar, veri ve istatistiksel analizlerin yetersizliği nedeniyle kabul görmemiştir [66]. 2015 yılında CERN’de yapılan bir deneyde ise kararlı pentakuark durumlarının keşfedildiği ve bu yapıya sahip olan $P_c^+(4380)$ ve $P_c^+(4450)$ adlı egzotik parçacıkların gözlemlendiği rapor edilmiştir [67]. Pentakuarklarla ilgili deneysel özellikler, bozunum modları ve gözlemlendikleri deneyler ise Çizelge 2.4’de özetlenmiştir [40].

Çizelge 2.4 : Pentakuarkların deneysel durumu.

Parçacık	M[MeV]	Γ [MeV]	Bozunum modları	Gözlemlenmesi
$P_c(4312)^+$	4311.9 ± 0.7	9.8 ± 2.7	$J/\psi p$	LHCB 2019 [68]
$P_{c\bar{c}s}(4338)^0$	4338.2 ± 0.8	7.0 ± 1.8	$J/\psi \Lambda$	LHCB 2023 [69]
$P_c(4380)^+$	4380 ± 30	205 ± 90	$J/\psi p$	LHCB 2015 [70]
$P_c(4440)^+$	4440^{+4}_{-5}	20.6 ± 4.9	$J/\psi p$	LHCB 2019 [68] D0 2021 [71]
$P_c(4457)^+$	$4457.3^{+4.0}_{-1.8}$	$6.4^{+0}_{-2.8}$	$J/\psi p$	LHCB 2015 [70] LHCB 2019 [68] D0 2021 [71]

Son yıllarda, egzotik parçacıklarla ilgili yapılan deneysel ve teorik araştırmalar büyük bir ilgi uyandırmaktadır. Bu çalışmalar, evrende bulunan maddenin bir arada tutulmasına yardımcı olan güçlü kuvvet hakkındaki bilgileri genişleterek, kuark modelinin ötesindeki hadron durumlarının keşfi sayesinde katkı sağlamaktadır. Ayrıca, KRD’nin perturbatif olmayan dinamikleri üzerine ışık tutmaktadır [72, 73, 74, 75]. Geliştirilmiş birçok perturbatif olmayan KRD yöntemi arasında, en başarılılarından biri KRD toplam kuralları yöntemidir [76].

3. KRD TOPLAM KURALLARI VE UYGULAMALARI

KRD toplam kuralları, ilk olarak 1979 yılında M. Shifman, A. Vainshtein ve V. Zakharov (SVZ) [77] tarafından mezonlar için geliştirilmiş, ardından 1981 yılında B. L. Ioffe [78] tarafından baryonlara genişletilmiş ve hadronların spektral özelliklerini araştırmak için kullanılan güçlü bir teoridir [79, 80, 81, 82, 83]. Bu yöntem günümüze kadar yaklaşık 5000 defa uygulanmış olup, elde edilen sonuçlardaki hatalar genellikle %20 ile %30 arasında değişmektedir.

KRD toplam kuralları, hadronların kütleleri, bozunum sabitleri, güçlü etkileşimlerini temsil eden kuplaj (çiftlenim) sabitleri gibi çeşitli fiziksel özellikleri, onların elektromanyetik ve yarıleptonik bozunumlarını temsil eden yapı faktörleri gibi çeşitli fiziksel parametreleri KRD parametreleri cinsinden ifade etmek için kullanılan bir hesaplama yöntemidir. Diğer pertürbatif olmayan yöntemler arasında, KRD toplam kuralları yaklaşımının temel gücü yöntemlerinin analitik olmasıdır. Bu yöntemde düşük enerji süreçleri ile kuark, kuark-gluon, gluon ve diğer yüksek dereceli kondensatlar aracılığıyla önemsiz olmayan KRD vakumu arasında bir bağlantı kurulur. Bu parametreleri ilişkilendirmek için, kuark ve gluon dinamiğinin pertürbatif hesaplarının geçerli olduğu yüksek enerjiden (kısa mesafelerden) başlayarak, pertürbatif olmayan etkilerin görüldüğü düşük enerjiye (uzun mesafelere) doğru adım adım yaklaşılır. Bu yaklaşım sürecinde, asimptotik özgürlük durumu bozulmaya başlar ve hadronlar içinde hapsedilen bağlı kuark durumlarına karşılık gelen rezonanslar ortaya çıkar. Bu pertürbatif olmayan etkiler, KRD boşluğunda sıfırdan farklı değere sahip kuark-gluon yoğunlaşma işlemcilerini temsil eder.

KRD toplam kuralları yaklaşımında, hadronlar, enterpolasyonlu kuark akımlarıyla temsil edilir. Bu yaklaşımın temel amacı, bu enterpolasyon akımlarının korelasyonunu belirlemektir. Yani, bu yöntemin temel noktası, hesaplanacak fiziksel parametreye uygun bir korelasyon fonksiyonunun seçilmesidir. Eğer değerlendirilmesi gereken fiziksel bir parametre, parçacığa ait spektroskopik özellikler gibi hadronların kütlesi veya

bozunma sabiti ise, kullanılacak korelasyon fonksiyonu iki nokta korelasyon fonksiyonudur. Bu fonksiyon, hadronik özelliklerin yanı sıra kuark-gluon etkileşimlerinin kısa ve uzun mesafeli bileşenlerini ayırmak için operatör çarpım açılımı kullanılarak hesaplanır.

3.1 İki Nokta KRD Toplam Kuralları

3.1.1 Korelasyon fonksiyonu

Kuarkların özelliklerini araştırmak için, KRD boşluğunda süreçler, başlangıç ve son hadronlar olmadan ele alınır. Yani, kuarklar $x = 0$ uzay-zaman noktasında KRD vakumuna enjekte edilir ve bu noktadan itibaren zaman içindeki gelişimleri incelenir. Bu durum, KRD toplam kuralları yönteminin temelini oluşturan korelasyon fonksiyonu

$$\Pi(q^2) = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | \mathcal{T} \{ j(x) \bar{j}(0) \} | 0 \rangle , \quad (3.1)$$

olarak tanımlanır. Burada q kuarkların toplam momentumu, $|0\rangle$ taban durumu, $\mathcal{T}$ sağdan sola doğru zamana ait argümanlar artacak şekilde çarpanların düzenlendiği zaman düzenleme işlemcisidir ve

$$\mathcal{T}[j(x)\bar{j}(0)] = \Theta(x-0)j(x)\bar{j}(0) + C\Theta(0-x)\bar{j}(0)j(x) , \quad (3.2)$$

şeklinde yazılmaktadır. $j(x)$ ise kuarkları x noktasındaki KRD vakumuna enjekte edilen kuark akımıdır. Bu akım, gerekli hadronun kuantum sayıları göz önünde bulundurularak ve kuark alanları kullanılarak oluşturulur. Mezonlar için, akım ifadesi

$$j(x) = \bar{q}_i(x) \Gamma q_j(x) , \quad (3.3)$$

şeklinde dir. Baryonlar için ise, akım ifadesi

$$j(x) = \epsilon_{abc} (q_i^a(x) \Gamma_1 q_j^b(x) \Gamma_2 q_k^c(x)) , \quad (3.4)$$

şeklinde dir ve i, j, k kuark çeşnilerini, a, b, c renk indislerini, Γ 'lar ise akımın ya da mezonun yapısını ve kuantum sayılarını tanımlayan Lorentz yapılarını belirtir. Dört kuark

içeren tetrakuark yapılarının ara kesit akımları için, dikuark-antidikuark $(qq)(\bar{q}\bar{q})$ ve molekül tipi $(q\bar{q})(q\bar{q})$ oluşumları düşünülebilir. Farklı kuantum sayıları için $QQ(\bar{q}\bar{q})$ tetrakuark yapılarının kesit akımları, Çizelge 3.1 ve 3.2’de belirtildiği gibi ifade edilebilir [84].

Çizelge 3.1 : Tetrakuark yapılar için ara kesit akımları.

$J^P = 0^-$	$J_1 = Q_a^T C Q_b [\bar{q}_a \gamma_5 C \bar{q}_b^T + \bar{q}_b \gamma_5 C \bar{q}_a^T]$
	$J_2 = Q_a^T C \gamma_5 Q_b [\bar{q}_a C \bar{q}_b^T + \bar{q}_b C \bar{q}_a^T]$
	$J_3 = Q_a^T C \sigma_{\mu\nu} Q_b [\bar{q}_a \sigma^{\mu\nu} \gamma_5 C \bar{q}_b^T - \bar{q}_b \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 C \bar{q}_a^T]$
	$J_4 = Q_a^T C \gamma_\mu Q_b [\bar{q}_a \gamma^\mu \gamma_5 C \bar{q}_b^T - \bar{q}_b \gamma^\mu \gamma_5 C \bar{q}_a^T]$
	$J_5 = Q_a^T C \gamma_\mu \gamma_5 Q_b [\bar{q}_a \gamma^\mu C \bar{q}_b^T - \bar{q}_b \gamma^\mu C \bar{q}_a^T]$
$J^P = 0^+$	$J_1 = Q_a^T C Q_b [\bar{q}_a C \bar{q}_b^T + \bar{q}_b C \bar{q}_a^T]$
	$J_2 = Q_a^T C \gamma_5 Q_b [\bar{q}_a \gamma_5 C \bar{q}_b^T + \bar{q}_b \gamma_5 C \bar{q}_a^T]$
	$J_3 = Q_a^T C \gamma_\mu Q_b [\bar{q}_a \gamma^\mu C \bar{q}_b^T - \bar{q}_b \gamma^\mu C \bar{q}_a^T]$
	$J_4 = Q_a^T C \gamma_\mu \gamma_5 Q_b [\bar{q}_a \gamma^\mu \gamma_5 C \bar{q}_b^T - \bar{q}_b \gamma^\mu \gamma_5 C \bar{q}_a^T]$
	$J_5 = Q_a^T C \sigma_{\mu\nu} Q_b [\bar{q}_a \sigma^{\mu\nu} C \bar{q}_b^T - \bar{q}_b \sigma_{\mu\nu} C \bar{q}_a^T]$
$J^P = 1^-$	$J_1 = Q_a^T C \gamma_\mu \gamma_5 Q_b [\bar{q}_a \gamma_5 C \bar{q}_b^T + \bar{q}_b \gamma_5 C \bar{q}_a^T]$
	$J_2 = Q_a^T C \gamma_5 Q_b [\bar{q}_a \gamma_\mu \gamma_5 C \bar{q}_b^T + \bar{q}_b \gamma_\mu \gamma_5 C \bar{q}_a^T]$
	$J_3 = Q_a^T C \sigma_{\mu\nu} Q_b [\bar{q}_a \gamma^\nu C \bar{q}_b^T - \bar{q}_b \gamma^\nu C \bar{q}_a^T]$
	$J_4 = Q_a^T C \gamma^\nu Q_b [\bar{q}_a \sigma_{\mu\nu} C \bar{q}_b^T - \bar{q}_b \sigma_{\mu\nu} C \bar{q}_a^T]$
	$J_5 = Q_a^T C \gamma_\mu Q_b [\bar{q}_a C \bar{q}_b^T - \bar{q}_b C \bar{q}_a^T]$
	$J_6 = Q_a^T C Q_b [\bar{q}_a \gamma_\mu C \bar{q}_b^T + \bar{q}_b \gamma_\mu C \bar{q}_a^T]$
	$J_7 = Q_a^T C \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 Q_b [\bar{q}_a \gamma^\nu \gamma_5 C \bar{q}_b^T - \bar{q}_b \gamma^\nu \gamma_5 C \bar{q}_a^T]$
	$J_8 = Q_a^T C \gamma^\nu \gamma_5 Q_b [\bar{q}_a \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 C \bar{q}_b^T + \bar{q}_b \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 C \bar{q}_a^T]$

Çizelge 3.2 : Tetrakuark yapılar için ara kesit akımları.

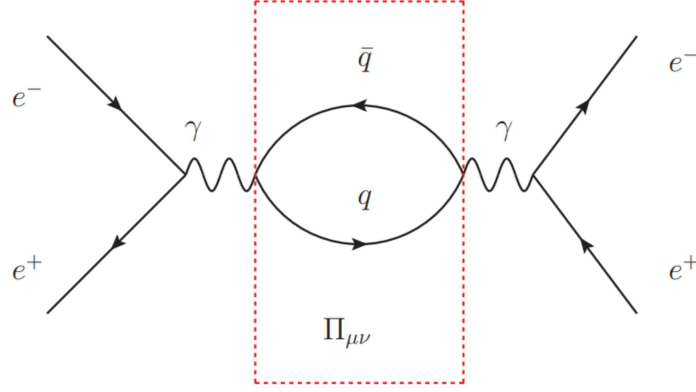
$J^P = 1^+$	$J_1 = Q_a^T C \gamma_\mu \gamma_5 Q_b [\bar{q}_a C \bar{q}_b^T + \bar{q}_b C \bar{q}_a^T]$
	$J_2 = Q_a^T C Q_b [\bar{q}_a \gamma_\mu \gamma_5 C \bar{q}_b^T + \bar{q}_b \gamma_\mu \gamma_5 C \bar{q}_a^T]$
	$J_3 = Q_a^T C \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 Q_b [\bar{q}_a \gamma^\nu C \bar{q}_b^T - \bar{q}_b \gamma^\nu C \bar{q}_a^T]$
	$J_4 = Q_a^T C \gamma^\nu Q_b [\bar{q}_a \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 C \bar{q}_b^T - \bar{q}_b \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 C \bar{q}_a^T]$
	$J_5 = Q_a^T C \gamma_\mu Q_b [\bar{q}_a \gamma_5 C \bar{q}_b^T - \bar{q}_b \gamma_5 C \bar{q}_a^T]$
	$J_6 = Q_a^T \gamma_5 C Q_b [\bar{q}_a \gamma_\mu C \bar{q}_b^T + \bar{q}_b \gamma_\mu C \bar{q}_a^T]$
	$J_7 = Q_a^T C \sigma_{\mu\nu} Q_b [\bar{q}_a \gamma^\nu \gamma_5 C \bar{q}_b^T - \bar{q}_b \gamma^\nu \gamma_5 C \bar{q}_a^T]$
	$J_8 = Q_a^T C \gamma^\nu \gamma_5 Q_b [\bar{q}_a \sigma_{\mu\nu} C \bar{q}_b^T + \bar{q}_b \sigma_{\mu\nu} C \bar{q}_a^T]$

Hafif u, d, c kuarklarını içerip dörtkuark ve bir antikuarkın birleşmesinden oluşan pentakuark yapıların ara kesit akımları, Çizelge 3.3'te gösterildiği şekilde ifade edilebilir.

Çizelge 3.3 : Pentakuark yapılar için ara kesit akımları.

$J^P = \frac{3}{2}^-$	$J_\mu^{\bar{D}^* \Sigma_c} = [\bar{c}_d \gamma_\mu d_d] [\epsilon_{abc} (u_a^T C \gamma_\theta u_b) \gamma^\theta \gamma_5 c_c]$
$J^P = \frac{5}{2}^+$	$J_{\mu\nu}^{\bar{D} \Sigma_c^*} = [\bar{c}_d \gamma_\mu \gamma_5 d_d] [\epsilon_{abc} (u_a^T C \gamma_\nu u_b) c_c] + (\mu \leftrightarrow \nu)$
	$J_{\mu\nu}^{\bar{D}^* \Sigma_c} = [\bar{c}_d \gamma_\mu u_d] [\epsilon_{abc} (u_a^T C \gamma_\nu \gamma_5 d_b) c_c] + (\mu \leftrightarrow \nu)$

Korelasyon fonksiyonları tamamen varsayımsal konfigürasyonlar değildir. Doğada bir kuark-antikuark çifti üretildiğinde ve harici bir kaynak tarafından absorbe edildiğinde gerçekleşir [81]. Örneğin, bir elektron saçılma sürecinde, bu tür kuark antikuark çiftleri sanal bir foton tarafından üretilir ve emilir. Kuark antikuark çiftinin ara yayılımı, Şekil 3.1'deki gibi ayrı ayrı ele alındığında korelasyon fonksiyonu olarak düşünülebilir. Bu durumda korelasyon fonksiyonu gelen ve giden sanal fotonun Lorentz indislerini taşımalıdır. KRD toplam kurallarının korelasyon fonksiyonu iki farklı şekilde yazılmaktadır. Denklem 3.1'deki korelasyon fonksiyonu, q^2 'nin hem pozitif(zamana benzer) hem de negatif(uzaya benzer) değerlerinde tanımlanan analitik bir fonksiyonudur. $q^2 > 0$ için kuarklar daha büyük uzaysal mesafelere hareket eder ve yeterince büyük pozitif



Şekil 3.1 : Elektron saçılma süreçlerinde kuark-antikuarkın oluşum ve yok oluşu. Kırmızı kesik çizgiler ile gösterilen kısım korrelasyon fonksiyonuna benzetilebilir.

değerleri için hadronlar oluşturmaya başlarlar. Bu zaman Denklem 3.1'deki korelatör hadron dili cinsinden hesaplanır. Fermiyon ileticilerine benzer terimler ve yüksek enerji uyarılmalarından gelen katkıların oluşturduğu çift dağılım bağıntısı ile betimlenen hadronik kısımda $j(x)$ alanı spinörler ile betimlenmektedir. Bu hesaplamalara KRD toplam kurallarının fenomenolojik veya fiziksel kısmı denir.

q^2 'nin negatif değerleri için, $\Pi_{KRD} \ll Q^2 \equiv -q^2$, korelatöre ana katkı kısa uzaysal mesafelerden ve kısa sürelerden gelir. Bu durumda $j(x)$ 'in kuark yapısı kullanılarak ilişkilendirici fonksiyonu, KRD vakumu, ve bu vakum ile etkileşime giren kuarklar ve gluonlar cinsinden hesaplanabilir. Bu hesaplamalara ise korelasyon fonksiyonunun kuramsal kısmı denir [81].

Genel olarak korelasyon fonksiyonunun hesaplanmasındaki her iki temsilin sonuçları dağılım ilişkisi yoluyla, ya da bir dispersiyon bağıntısı ile eşitlenerek istenilen fiziksel büyüklük için KRD toplam kuralları elde edilir. Seçilen akımlar ile etkileşebilen yüksek enerjili kuantum durumlarından ve hadronik süreklilikten gelen katkıları basılamak için her iki kısma Borel dönüşümü yapılır. Belli bir süreklilik eşiği üzerinde, ilişkilendirici fonksiyonunun her iki temsilinin de aynı sonuçları verdiği varsayılarak (Kuark-Hadron dualitesi), süreklilik çıkarımı (continuum subtraction) uygulanır. Sonuçta elde edilen bu toplam kurallarından hadronların form faktörleri, bozunum sabitleri ve kütleleri gibi fiziksel miktarları elde edilebilir.

3.1.2 Fenomenolojik kısım

Fenomenolojik veya fiziksel kısımda KRD toplam kurallarının korelasyon fonksiyonuna hadronik durumlar cinsinden hesaplandığı için enterpolasyon akımlarının kuantum sayıları aynı olan hadronik durumların tam seti eklenmektedir.

Bu zaman korelasyon fonksiyonu

$$\Pi(q^2) = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | \mathcal{T} \{ j(x) \mathbb{1} \bar{j}(0) \} | 0 \rangle , \quad (3.5)$$

şekinde yazılır. Burada $\mathbb{1}$ birim operatördür ve

$$\mathbb{1} = \sum_h |h\rangle \langle h| = |0\rangle \langle 0| + \sum_h \int \frac{d^4k}{2\pi^4} 2\pi\delta(k^2 - m_h^2) |h(k)\rangle \langle h(k)| + \text{diğer terimler} , \quad (3.6)$$

şeklindedir. Burada $h(k)$, m_h kütleli ve k momentumlu hadrondur. Denklem 3.6'ü Denklem 3.5'de yerine yazarsak, korelasyon fonksiyonu

$$\begin{aligned} \Pi(q^2) &= i \int d^4x e^{iq \cdot x} \\ &\quad * [\langle 0 | j(x) | 0 \rangle \langle 0 | \bar{j}(0) | 0 \rangle \Theta(x_0) + \langle 0 | \bar{j}(0) | 0 \rangle \langle 0 | j(x) | 0 \rangle \Theta(-x_0)] \\ &\quad + \int \frac{d^4k}{2\pi^4} \sum_h \Theta(k_0) 2\pi\delta(k^2 - m_h^2) \\ &\quad * [j(x) | h(k) \rangle \langle h(k) | \bar{j}(0) | \Theta(x_0) + \bar{j}(0) | h(k) \rangle \langle h(k) | j(x) | \Theta(-x_0)] \\ &= \sum_h \frac{[\langle 0 | j(0) | h(q) \rangle]^2}{q^2 - m_h^2} + \dots , \end{aligned} \quad (3.7)$$

şeklini alacaktır. Denklem 3.7'deki toplam, tüm olası hadronik durumları kapsar ve her bir h durumu, korelasyon fonksiyonuna katkıda bulunur. Bu durumlar açısından daha kompakt ve kullanışlı bir gösterim

$$\Pi(q^2) = \frac{f_H^2}{q^2 - m_H^2} + \Pi^h(q^2) + \dots , \quad (3.8)$$

şeklinde yazılabilir. Burada H temel durum hadronu (veya j akımı tarafından oluşturulabilecek en küçük kütleyle sahip hadron), f_H leptonik bozunma sabitidir ve

$$f_H = \langle 0 | j(0) | H(q) \rangle , \quad (3.9)$$

şeklinde tanımlanır. $\Pi^h(q^2)$ temel durum dışındaki daha yüksek durumların ve sürekliliğin katkılarını belirten terimdir.

3.1.3 Kuramsal kısım

Yüksek enerjilerde Denklem 3.1'deki korelasyon fonksiyonu farklı noktalardaki iki akımın zaman sıralı çarpımının uzay zaman katsayılarına sahip yerel operatörler ve Wilson katsayılarının toplamı olarak genişletilebileceğini belirten operatör çarpım açılımı(OPE) cinsinden yazılır. OPE iki ya da üç işlemcinin zaman sıralı çarpımının açılımıdır. Operatör çarpım açılımı genel olarak

$$i \int d^4x e^{iq \cdot x} T(A(x), B(0)) = C_I^{AB} I + \sum_n C_n^{AB}(x) O_n(0) , \quad (3.10)$$

şeklinde yazılır. Burada I özdeşlik işlemcisi, C_I^{AB} ve C_n^{AB} Wilson katsayıları, O_n ise alan işlemcileridir.

Wilson katsayılarına gelen katkılar kısa mesafeli etkileşimlerden ve pertürbatif olarak hesaplanır. Pertürbatif olmayan uzun mesafe etkileşimleri ise farklı kütle boyutlarına sahip yerel operatörlerle

$$T\{J(x)J(0)\} = \sum_d C_d(x^2) O_d , \quad (3.11)$$

şeklinde temsil edilir. Burada C_d Wilson katsayılarını, O_d ise yerel operatörleri temsil eder. KRD vakumu renksiz olduğundan operatörler $d = 0, 3, 4, 5, 6, \dots$ şeklinde yazılabilir.

$$\begin{array}{ll} d = 0 & O_1 = \mathbb{1} \\ d = 3 & O_3 = \bar{\psi}\psi \\ d = 4 & O_4 = G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \\ d = 5 & O_5 = \bar{\psi}\sigma_{\mu\nu} \frac{\lambda_a}{2} G^{a\mu\nu} \psi \\ d = 6 & O_6^\psi = (\bar{\psi}\Gamma\psi)(\bar{\psi}\Gamma\psi) \\ d = 6 & O_6^G = f^{abc} G_{\mu\nu}^a G_{\rho}^{b\nu} G^{c\rho\mu} \end{array} \quad (3.12)$$

Burada λ_a , $SU(3)$ Gell-Mann renk mantrisleri olup, $\sigma_{\mu\nu}$ Dirac matrisleri cinsinden

$$\sigma_{\mu\nu} = i\frac{1}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] , \quad (3.13)$$

şeklinde yazılır. Ayrıca f^{abc} yapı sabiti olup, $G_{\mu\nu}^a$ gluon alan şiddet tensörüdür. $d = 0$ durumu perturbatif katkıyı temsil ederken, daha yüksek boyutlu operatörler perturbatif olmayan katkıya karşılık gelir.

Korelasyon fonksiyonundaki zaman sıralı çarpım OPE yöntemiyle hesaplanırsa

$$\Pi^{KRD}(q^2) = \sum_d C_d(x^2) \langle O_d \rangle , \quad (3.14)$$

eşitliği elde edilir. Burada $\langle O_d \rangle$ KRD operatörlerinin vakum beklenen değeridir ve kondensat olarak adlandırılır. $d = 0$ için, $C_0(x^2)$ katsayısı korelatöre yapılan perturbatif katkılarla ilişkilidir. $d = 3, 4, \dots$ için $\langle O_d \rangle \equiv \langle 0|O_d|0 \rangle$ operatörleri, perturbatif olmayan etkileri parametreleyen bir dizi vakum yoğunlaşması oluşturur. Seçilen interpolasyon akımının dahil edilmesiyle Denklem 3.1'deki korelasyon fonksiyonu

$$\Pi^{KRD}(q^2) = -i \int d^4x e^{iq \cdot x} Tr[\Gamma S_q(x) \Gamma S_{q'}(-x)] , \quad (3.15)$$

şeklinde yazılabilir. Denklem 3.15'de kolaylık açısından renk indislerine yer verilmiştir. İlişkilendirici fonksiyonu tedirgemeli(perturbative) ve tedirgemesiz(non-perturbative) katkılar cinsinden yazıldığında ise

$$\Pi^{KRD}(q^2) = \Pi^{KRD(pert)}(q^2) + \Pi^{KRD(np)}(q^2) , \quad (3.16)$$

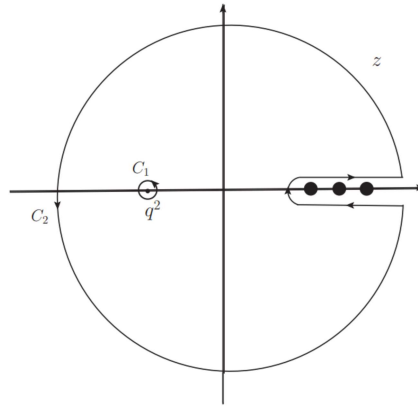
şeklinde tanımlanabilir. Burada amaç, ilişkilendirici fonksiyonunu, Lorentz çarpanları ve analitik katsayılar cinsinden çarpanlara ayırmak ve bu çarpanlara tedirgemeli ve tedirgemesiz hesaplamalardan gelen katkıları belirleyebilmektir.

Bu noktaya kadar, Denklem 3.1'deki korelasyon fonksiyonu, hadronlar için $q^2 > 0$ bölgesinde (Denklem 3.5) ve ayrıca kuarklar ve gluonlar için $q^2 \gg \lambda_{KRD}^2$ bölgesinde hesaplanmıştır (Denklem 3.16). İlişkilendirici fonksiyonunun ($\Pi(q^2)$), pozitif q^2 bölgesindeki değerlerini, negatif q^2 bölgesindeki değerleri ile ilişkilendirerek, fiziksel özellikler için çıkarımlarda bulunulur. Bu amaçla, analitik fonksiyonlar için Cauchy

formülü kullanılarak, Şekil 3.2’te gösterilen konturlar için

$$\begin{aligned}\Pi(q^2) &= \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_1} dz \frac{\Pi(z)}{z - q^2} = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_2} dz \frac{\Pi(z)}{z - q^2} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=R} dz \frac{\Pi(z)}{z - q^2} + \frac{1}{2i\pi} \int_{t_m}^R dz \frac{\Pi(z + i\epsilon) - \Pi(z - i\epsilon)}{z - q^2}, \quad (3.17)\end{aligned}$$

ifadesi yazılabilir. Burada C_2 konturunun dairesel kısmının yarıçapı $R \rightarrow \infty$ ve t_m ise gerçek durumların oluşması için eşik değeridir.



Şekil 3.2 : Değişken $q^2 = z$ düzlemindeki konturlar. C_1 konturu, OPE’nin uygulandığı $q^2 < 0$ referans noktasını temsil eder. $q^2 > t_m$ durumunda ise, noktalarla belirtilen gerçek hadronik durumlar ortaya çıkar.

Şekil 3.2’te, gösterilen kompleks integral için, $|z| \rightarrow \infty$ noktasından yeterince hızlı bir şekilde sifıra inerse, C_2 konturunun dairesel kısmı üzerindeki $\Pi(z)$ integrali de sıfır olur. Aksi halde, payda q^2/z cinsinden genişleterek,

$$\frac{\Pi(z)}{z - q^2} = \frac{\Pi(z)}{z} \left(1 - \frac{q^2}{z} + \dots\right) \quad (3.18)$$

olarak yazılabilir. Ve sonunda, genişlemedeki bir n' kuvveti için, $\Pi(q^2)/z^{n'}$ yeterince hızlı bir şekilde sifıra iner ve kalan terimler ($n \geq n'$) katkıda bulunmaz. Bu durumda, $n < n'$ olan terimler, $R \rightarrow \infty$ limitinde q^2 ’de bir polinoma indirgenir. Bu nedenle, $R \rightarrow \infty$ limitinde, Denklem 3.17,

$$\Pi(q^2) = \frac{1}{2i\pi} \int_{t_m}^{\infty} dz \frac{\Pi(z + i\epsilon) - \Pi(z - i\epsilon)}{z - q^2} + \mathcal{P}^s(q^2), \quad (3.19)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\mathcal{P}^s(q^2)$, q^2 cinsinden bir polinomdur. Schwartz yansıma

ilkesi de kullanıldığında Denklem 3.19,

$$\Pi(q^2) = \int_{t_m}^{\infty} ds \frac{\rho(s)}{s - q^2} + \mathcal{P}^s(q^2), \quad (3.20)$$

olarak yazılabilir. Burada ρ spektral yoğunluk olup,

$$\rho = \frac{Im\Pi(q^2)}{\pi} = f_H^2 \delta(q^2 - m_H^2) + \rho^h(q^2), \quad (3.21)$$

şeklinde ifade edilir. Bu eşitlik Denklem 3.20’de yerine yazıldığında ve kuark hadron dualitesi yaklaşımı kullanıldığında, dağılım ilişkisi için

$$\int_0^{s_0} ds \frac{\rho^{OPE}(s)}{s - q^2} = \frac{f_H^2}{q^2 - m_H^2} + \mathcal{P}^s(q^2), \quad (3.22)$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitliğe Borel dönüşümü uyguladıktan sonra,

$$f_H^2 e^{-\frac{m_H^2}{M^2}} = \int_{s_m}^{s_0} ds \rho^{OPE}(s) e^{-\frac{s}{M^2}}, \quad (3.23)$$

toplam kuralları elde edilir. Borel dönüşümü

$$\mathcal{B}_{M^2} f(q^2) = \lim_{Q^2, n \rightarrow \infty} \frac{Q^2}{n} = M^2 \frac{(-q^2)^n}{(n-1)!} \left(\frac{d}{dq^2} \right)^{n-1} f(q^2), \quad (3.24)$$

olarak tanımlanır. Burada M^2 , kütle boyutlarına sahip Borel dönüşüm parametresidir ve genellikle Borel kütlesi olarak adlandırılır. Herhangi bir polinom Borel dönüşümünden sonra sıfır verir. Denklem 3.23’te integralin alt sınırı $s_m = (m_q + m_{q'})^2$ ’dir. Bu adımlar izlendiğinde, korelasyon fonksiyonunun iki farklı gösterimde hesaplanmış sonuçları elde edilmiş olacaktır. Bunlardan biri Wilson katsayılarını içeren kuramsal kısım ve diğeri genel çift dağılım bağıntısını içeren fiziksel veya fenomenolojik kısımdır. Bu iki farklı gösterim birbirlerine eşitlenerek

$$\Pi^{Phen} = \Pi^{KRD}, \quad (3.25)$$

ortaya çıkan sonuçla istenilen fiziksel nicelikler hesaplanabilir.

Bu kısımda özetlenen iki noktalı KRD veya kütle toplamı kuralları ve onların uygulanmasıyla belirli bir H hadronun kütle ve leptonik bozunum sabiti bulunabilir. Ancak,

hadronların geçiş form faktörleri, geçiş genlikleri, bozunum genişlikleri ve dallanma oranları gibi diğ er özelliklerini incelemek ve elde etmek için, elektromanyetik ve zayıf geçişlerin hadronik matris elemanlarını hesaplamak amacıyla kütle toplamı kurallarının genelleştirilmesi gerekir. Bu durumda üç noktalı korelatöre gereksinim duyulur ve çift dağılım ilişkisi kullanılır.

İki nokta toplam kuralları ile ilgili detaylı hesaplamalar birçok örnekle açıklanabilir [85]. Ancak bu tezde, üç nokta toplam kuralları kullanılarak yapılacak hesaplamalar ele alındığı için, iki nokta toplam kurallarıyla yapılan hesaplamalar sadece özetlenmiştir.

3.2 Üç Nokta KRD Toplam Kuralları

Hadronların geçiş form faktörleri, geçiş genlikleri, bozunum genişlikleri ve dallanma oranları gibi diğ er özelliklerini incelemek ve elde etmek için üç noktalı korelasyon fonksiyonu ile başlanır ve çift dağılım ilişkisi kullanılır. Üç noktalı korelasyon fonksiyonu

$$\Pi(p^2, p'^2; q^2) = i^2 \int d^4x d^4y e^{-ipx} e^{ip'y} \langle 0 | \mathcal{T} \{ j_2(y) j_3(0) j_1^\dagger(x) \} | 0 \rangle, \quad (3.26)$$

şeklinde yazılabilir. Burada j_1 ve j_2 enterpolasyon akımları, j_3 ise geçişten sorumlu akımdır. $p^2 \ll 0$ ve $p'^2 \ll 0$ olduğunda, korelasyon fonksiyonu pertürbatif ve pertürbatif olmayan kısımlar cinsinden hesaplanabilir. Pertürbatif kısım Γ_i Lorentz indislerinin de dahil edilmesiyle

$$\Pi^{KRD(p)}(p^2, p'^2; q^2) = i^2 \int d^4x d^4y e^{-ipx} e^{ip'y} \text{Tr} \{ \Gamma_1 S_q^0(x-y) \Gamma_2 S_{q'}^0(y) \Gamma_3 S_Q^0(-x) \}, \quad (3.27)$$

şeklinde yazılabilir. Perturbatif ve perturbatif olmayan katkılar hesaplandıktan sonra derin Öklid bölgesindeki genel korelasyon fonksiyonu

$$\begin{aligned} \Pi^{KRD}(p^2, p'^2; q^2) &= \Pi^{KRD(p)}(p^2, p'^2; q^2) + \Pi^{KRD(n_1)}(p^2, p'^2; q^2) \\ &+ \Pi^{KRD(n_2)}(p^2, p'^2; q^2), \end{aligned} \quad (3.28)$$

şeklinde bulunur. Korelasyon fonksiyonunun fenomenolojik ve kuramsal kısmı hesaplandıktan sonra dağılım ilişkisi

$$\begin{aligned} \int_0^\infty ds \int_0^\infty ds' \frac{\rho^{KRD}(s, s'; q^2)}{(s - m_{H_1}^2)(s' - m_{H_2}^2)} &= \frac{f_1^\dagger f_2 \langle H_1(p) | J_2(0) | H_2(p') \rangle}{(p^2 - m_{H_1}^2)(p'^2 - m_{H_2}^2)} \\ &+ \int_{s_0^h}^\infty ds \int_{s_0'^h}^\infty ds' \frac{\rho^h(s, s'; q^2)}{(s - m_{H_1}^2)(s' - m_{H_2}^2)} \\ &+ \mathcal{P}^s(p^2, p'^2), \end{aligned} \quad (3.29)$$

şeklinde elde edilir. Burada spektral yoğunluk

$$\rho^{KRD}(s, s'; q^2) = \frac{\text{Im}_s \text{Im}_{s'} \Pi(s, s'; q^2)}{\pi^2}, \quad (3.30)$$

şekilde tanımlanmıştır. Kuark hadron ikili yaklaşımı kullanılarak ve çift Borel dönüşümü uygulanarak

$$\begin{aligned} f_1^\dagger f_2 \langle H_1(p) | J_2(0) | H_2(p') \rangle &= e^{\frac{m_{H_1}^2}{M^2}} e^{\frac{m_{H_2}^2}{M'^2}} \\ &\int_{s_m}^{s_0} ds \int_{s'_m}^{s'_0} ds' \rho^{KRD}(s, s'; q^2) e^{-\frac{s}{M^2}} e^{-\frac{s'}{M'^2}}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

şeklindeki toplam kuralları elde edilir. Burada s_0, s'_0 süreklilik eşikleri, M^2 ve M'^2 Borel kütle parametreleri olmak üzere dört yardımcı parametre bulunmaktadır. Denklem 3.31, ilgili Lorentz yapılarının toplamı olarak

$$f_1^\dagger f_2 \langle H_1(p) | J_2(0) | H_2(p') \rangle = \sum_i \Gamma_i T_i, \quad (3.32)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada T_i Lorentz yapıları ve Γ_i ise bu Lorentz yapılarının katsayılarını içeren ifadelerdir. Toplam kurallarında ilişkilendirici fonksiyonunun kuramsal ve fenomenolojik kısımları eşitlenir iken, Γ_i katsayı fonksiyonları da eşitlenebilir.

Üç nokta KRD toplam kuralları uygulanmasındaki esas problem, Denklem 3.27'de $\Pi^{KRD}(p^2, p'^2; q^2)$ hesaplanırken korelatör fonksiyonuna pertürbatif katkıların hesaplanmasında ortaya çıkmaktadır. $\Pi^{KRD}(p^2, p'^2; q^2)$ (veya $\rho^{KRD}(s^2, s'^2; q^2)$) hesaplanır-

ken

$$I_0(p^2, p'^2; q^2) = i \int d^4k \frac{1}{(2\pi)^4((k-p)^2 - m_Q^2)((k-p')^2 - m_{q'}^2)(k^2 - m_q^2)} , \quad (3.33)$$

integralin hesaplanması gerekir. Burada $m_Q, m_{q'}$ ve m_q kuark kütleleridir ve paydadaki terimler ise kuark propagatörlerinden gelir. Cutkovsky kurallarını uygulandığında, Denklem 3.33

$$I_0(p^2, p'^2; q^2 \leq 0) = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (2\pi i)^3 \delta((k-p)^2 - m_Q^2) \delta((k-p')^2 - m_{q'}^2) \delta(k^2 - m_q^2) , \quad (3.34)$$

şeklinde yazılır. Ancak toplam kurallarının sonuçlarına $q^2 > 0$ bölgesinde ihtiyaç vardır. Bu sorunu çözenin alternatif yollarından biri ise korelasyon fonksiyonunun analitikliğini kullanmaktır. $0 < q^2 < q_c^2$ bölgesinde bir spektral yoğunluk fonksiyonu bulmak yerine, toplam kurallarının sonuçları $q^2 < 0$ bölgesinde çizilebilir ve Denklem 3.34'deki integrale hiçbir ek katkının olmadığı durumda toplam kuralları sonuçlarıyla örtüşen bir spektral yoğunluk fonksiyonu bulunabilir. Daha sonra bu uyum fonksiyonu fiziksel bölge için elde edilen hesaplamalar ile karşılaştırılır ve aranan fiziksel özellik tahmin edilmiş olur.

4. $Z_{cs}(3985)$ EGZOTİK DURUMUNUN KRD TOPLAM KURALLARINDA İNCELENMESİ

2003 yılından beri deneysel olarak keşfedilen egzotik mezonların doğası, yapısı ve kuantum sayıları üzerinde yapılan araştırmalar büyük ilgi görmüştür. Bu egzotik mezonlardan biri, 2021 yılında elektron-pozitron çarpışmasında D^- , D_s^- ve K^- mezon üretimi ($e^+e^- \rightarrow K^+(D_s^- D^{*0} + D_s^{*-} D^0)$) incelenerek, BESIII ekibi tarafından $D_s^- D^{*0}$ ve $D_s^{*-} D^0$ 'ın değişmez kütle spektrumunda, yaklaşık olarak $3.9825_{-2.6}^{+1.8} GeV$ 'lik kütle ve $12.8 MeV$ 'lik bir bozunma genişliği ile $Z_{cs}^+(3985)$ parçacığı olarak tanımlanmıştır [39]. $D_s^- D^{*0} + D_s^{*-} D^0$ eşiğinin yaklaşık $9, 5 \pm 3, 7 MeV$ üzerindedir [40]. $Z_{cs}(3985)$, $c\bar{c}q\bar{u}$ ($q = d$ veya s) kuark yapısına sahiptir ve yüklü gizli-tılsımlı (hidden-charm) egzotik hadronların ilk adayıdır. Bu keşif, hemen ardından birçok teorik çalışmanın ortaya çıkmasına neden olmuştur [86, 87, 85, 88, 89, 90].

Burada [87]'te, yine elektron-pozitron çarpışmasında keşfedilen [44] ve egzotik parçacıklardan biri olan $Z_c(3900)$ 'ün U-spin partneri ¹ olarak $Z_{cs}(3985)$ durumu alınmış ve $SU(3)_F$ simetrisi ve ağır kuark simetrisindeki diğer durumların etkisine bakılmıştır. $Z_{cs}(3985)$ durumunun yüklü $Z_c(3900)$ 'ün rezonans olarak U/V-spin partneri olduğunu güçlü bir şekilde destekleyen deneysel sonuçlarla uyumlu veriler elde edilmiştir [87]. Benzer bir çalışmada $Z_{cs}(3985)$ aksiyel vektör tetrakuark durumu olarak ele alınıp analizi yapılmıştır [88]. Bu çalışmada, $c\bar{c}u\bar{s}$ skaler ve aksiyelvektör diquark operatörleri (antitriplet renkte) ve antidikuark (triplet renkte) operatörleri, dört kuark akımlarını oluşturmak için temel alınmış ve diquark-antidikuark tipi aksiyelvektör tetrakuark durumları KRD toplam kuralları ile incelenmiştir. Çalışmada, 10. boyuttaki vakum kondensatlarına kadar operatör çarpım açılımı kullanılmıştır. Tahmin edilen tetrakuark kütlesi ile BESIII ekibinden elde edilen deneysel değer arasında iyi bir uyum gözlenmiştir. Bu durum, $Z_{cs}(3985)$ 'in $J^{PC} = 1^{+-}$ kuantum sayılarıyla $Z_c(3900)$ 'ün partneri

¹ Z_{cs} durumları, U/V spin rotasyon uzayında Z_c durumları ile ilişkilidir. U-spin ve V-spin $SU(3)$ grubunun $SU(2)$ alt grubudur ve bu gruplar için $SU(2)$ çiftlileri, $u, d(I)$; $d, s(U)$; $u, s(V)$ olarak tanımlıdır.

olarak tanımlanmasını desteklemiştir.

Spektroskopik özelliklerin yanı sıra, hadronların elektromanyetik form faktörleri ve çok kutuplu momentleri de hadronların doğası, altyapısı ve kuantum sayıları hakkında bilgi sağlayan önemli nicelikler olduğundan $Z_{cs}(3985)$ 'in elektromanyetik özelliklerini incelemek için manyetik dipol momentine de bakılmıştır [91]. Çalışmada, Z_{cs} durumunun elektromanyetik form faktörleri, hem kompakt diquark-antidiquark hem de moleküler yapılarda ışık konisi KRD toplam kuralları kullanılarak hesaplanmıştır. Bu form faktörler için statik sınır alınmış ve incelenen rezonansın manyetik dipol momentini belirlenmiştir. Küçük hatalarla, diquark-antidiquarkın iki kompakt tetrakuarkı ve molekül yapıları, Z_{cs} 'nin manyetik dipol momentleri açısından benzer sonuçlar verdiği gözlenmiştir.

Tez kapsamında yapılan çalışmada ise, yine $Z_{cs}(3985)$ parçacığının form faktörleri incelenecektir. Ancak önceki çalışmalardan farklı olarak hesaplamalar için ışık konisi KRD toplam kuralları değil, üç-nokta KRD toplam kuralları kullanılacaktır. Bölüm 4.2.1'de form faktörlerini KRD toplam kuralları çerçevesinde hesaplamak için gerekli akımlar ve elektromanyetik form faktörleri tanımlanacak, Bölüm 4.2.2'de ilişkilendirme fonksiyonunun fenomenolojik kısmı, Bölüm 4.2.3'de ise kuramsal kısmı hesaplanacaktır.

4.1 $Z_{cs}^+(3985)$ Mezonu İçin İki Nokta KRD Toplam Kuralları

KRD toplam kurallarında Z_{cs}^+ 'i değerlendirmek için, duruma uygun bir akım kuplajı oluşturmak gerekir. 1^+ yüklü charmonyum benzeri garip moleküler halin en düşük dereceden olası interpolasyon akımları dört formda

$$\begin{aligned} j_\mu^{\bar{D}^{*0}D_s^+} &= i[\bar{c}_a\gamma_\mu u_a][\bar{s}_b\gamma_5 c_b], \\ j_\mu^{\bar{D}^0D_s^{*+}} &= i[\bar{c}_a\gamma_5 u_a][\bar{s}_b\gamma_\mu c_b], \\ j_\mu^{J/\psi K^+} &= i[\bar{c}_a\gamma_\mu c_a][\bar{s}_b\gamma_5 u_b], \\ j_\mu^{\bar{D}^0D_s^{*+}} &= i[\bar{c}_a\gamma_5 c_a][\bar{s}_b\gamma_\mu u_b], \end{aligned} \quad (4.1)$$

seçilmiştir [85]. Burada a ve b renk indislerini, μ Lorentz indisini gösterir. 4.1'deki dört akımın hepsi Z_{cs}^+ durumuna bağlı olduğundan, $[1_c] \otimes [1_c]$ konfigürasyonundaki gerçek

enterpolasyon akımı bunların bir karışımı olma eğilimindedir ve

$$j_{1\mu} = A_1 j_{\mu}^{\bar{D}^{*0} D_s^+} + B_1 j_{\mu}^{\bar{D}^0 D_s^{*+}} + C_1 j_{\mu}^{J/\psi K^+} + D_1 j_{\mu}^{\bar{D}^0 D_s^{*+}}, \quad (4.2)$$

şeklinde gösterilir. Öte yandan, olası tetrakuark enterpolasyon akımları

$$\begin{aligned} j_{\mu}^A &= i\epsilon_{abc}\epsilon_{dec}[u_a^T C \gamma_5 c_b][\bar{s}_d \gamma_{\mu} C \bar{c}_e^T], \\ j_{\mu}^B &= i\epsilon_{abc}\epsilon_{dec}[u_a^T C \gamma_{\mu} c_b][\bar{s}_d \gamma_5 C \bar{c}_e^T], \\ j_{\mu}^C &= i\epsilon_{abc}\epsilon_{dec}[u_a^T C c_b][\bar{s}_d \gamma_{\mu} \gamma_5 C \bar{c}_e^T], \\ j_{\mu}^D &= i\epsilon_{abc}\epsilon_{dec}[u_a^T C \gamma_m u \gamma_5 c_b][\bar{s}_d C \bar{c}_e^T], \end{aligned} \quad (4.3)$$

şeklinde ortaya çıkmaktadır. Burada A, B, C ve D üst simgeleri sırasıyla $0^+ \otimes 1^+, 1^+ \otimes 0^+, 0^- \otimes 1^-$ ve $1^- \otimes 0^-$ 'den oluşan akımları belirtir. Benzer şekilde, Z_{cs}^+ durumu için $[3_c] \otimes [\bar{3}_c]$ konfigürasyonundaki enterpolasyon akımı 4.3'deki dört akımın karışımı olabilir, yani

$$j_{2\mu} = A_2 j_{\mu}^A + B_2 j_{\mu}^B + C_2 j_{\mu}^C + D_2 j_{\mu}^D, \quad (4.4)$$

Denklem 4.2 ve 4.4'deki akımlar ile iki nokta KRD toplam kuralları için korelasyon fonksiyonu kolaylıkla elde edilebilir, yani

$$\Pi_{\mu\nu} = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | \mathcal{T} \{ j_{\mu}(x), j_{\nu}(0)^{\dagger} \} | 0 \rangle, \quad (4.5)$$

olur. Buradan da $Z_{cs}^+(3980)$ 'in kütle ve bağlanma sabitini moleküler ve tetrakuark durumları için katsayılar ile değerlendirilmiş [85] ve sonuç olarak

$$\begin{aligned} M_1^{Z_{cs}^+} &= (3.98 \pm 0.14) GeV, & \lambda_1^{Z_{cs}^+} &= (1.81 \pm 0.12) \times 10^{-2} GeV^5, \\ M_2^{Z_{cs}^+} &= (3.98 \pm 0.08) GeV, & \lambda_2^{Z_{cs}^+} &= (1.29 \pm 0.10) \times 10^{-2} GeV^5, \end{aligned}$$

olarak hesaplanmıştır.

4.2 $Z_{cs}^+(3985)$ Mezonu İçin Üç Nokta KRD Toplam Kuralları Uygulaması

4.2.1 Akımlar ve form faktörlerin tanımları

Tezde elektromanyetik form faktörler hesaplanacağı için, elektromanyetik vektör akımın incelenecek parçacığın yaratma ve yok etme akımları arasına konulduğu üç nokta toplam kuralları yöntemi izlenmiştir. Burada korelasyon fonksiyonu

$$\Pi_{\mu\alpha\beta} = i^2 \int d^4x d^4y e^{i(p'x - py)} \langle 0 | \mathcal{T} \{ J_{\beta}^{Z_{cs}\dagger}(x) J_{\mu}^{el}(0) J_{\alpha}^{Z_{cs}}(y) \} | 0 \rangle , \quad (4.6)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $J_{\alpha(\beta)}$, kuantum sayıları $J^{PC} = 1^{+-}$ 'ye karşılık gelen ve izospin üçlüsü ($I = 1$) durumlarından biri olan $Z_{cs}(3985)$ parçacığının interpolasyon akımı

$$\begin{aligned} J_{\alpha}^{Z_{cs}}(x) = & i \frac{\epsilon \tilde{\epsilon}}{\sqrt{2}} \{ [u_a^T(x) C \gamma_5 c_b(x)] [\bar{s}_d(x) \gamma_{\alpha} C \bar{c}_e^T(x)] \\ & - [u_a^T(x) C \gamma_{\alpha} c_b(x)] [\bar{s}_d(x) \gamma_5 C \bar{c}_e^T(x)] \} , \end{aligned} \quad (4.7)$$

şeklinde tanımlıdır [92]. Burada, $\epsilon = \epsilon_{abc}$, $\tilde{\epsilon} = \tilde{\epsilon}_{dec}$ şeklinde yazılır. Parite $\hat{P}$ ve yük konjugasyonu $\hat{C}$ altında bu akımın dönüşüm özellikleri

$$\begin{aligned} \hat{P} J_{\alpha}^{Z_{cs}}(x) \hat{P}^{-1} &= -J_{Z_{cs}}^{\alpha}(\tilde{x}) \quad \{x^{\mu} = (t, \vec{x}) , \quad \tilde{x}^{\mu} = (t, -\vec{x})\} , \\ \hat{C} J_{\alpha}^{Z_{cs}^+}(x) \hat{C}^{-1} &= -J_{\alpha}^{Z_{cs}^+}(x)|_{u \leftrightarrow d} , \end{aligned} \quad (4.8)$$

şeklindedir. Elektromanyetik akım ise

$$J_{\mu}^{el}(x) = \sum_q e_q [\bar{q}_i(x) \gamma_{\mu} q_i(x)] , \quad (4.9)$$

olarak verilir. Bu denklemde $q = u, s, c$ 'dir.

Kuantum renk dinamiği toplam kuralları metoduna göre Denklem 4.6'de verilen korelasyon fonksiyonu iki farklı yolla hesaplanır. Bunlardan birinde serbestlik dereceleri, KRD'nin tedirgemesiz vakumunda etkileşen kuark ve gluonlar (kuramsal kısım), diğesinde ise interpolasyon akımlarıyla aynı kuantum sayılarına sahip olan hadronlardır (fenomenolojik kısım). Yukarıda da bahsedildiği gibi, korelasyon fonksiyonunda iki

akım arasına aşağıdaki birim operatör yerleştirilirse

$$\mathbb{1} = |0\rangle\langle 0| + \sum_{Z_{cs}^{i(f)}} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Theta(k^0) 2\pi\delta(k^2 - m_{Z_{cs}}^2) |Z_{cs}(k)\rangle\langle Z_{cs}(k)| + \dots, \quad (4.10)$$

ve temel durum mezonu izole edilirse hadronik kısım için korelasyon fonksiyonu matris elemanları cinsinden

$$\Pi_{\mu\alpha\beta} = \frac{\langle 0|J_\alpha|Z_{cs}(p)\rangle\langle Z_{cs}(p)|J_\mu^{el}|Z_{cs}(p')\rangle\langle Z_{cs}(p')|J_\beta^\dagger|0\rangle}{(p^2 - m_{Z_{cs}}^2)(p'^2 - m_{Z_{cs}}^2)} + \dots, \quad (4.11)$$

olarak elde edilir. Burada, $p' = p+q$ ve q fotonun momentumudur. Yazılmayan terimler ise süreklilik ve daha yüksek mertebeden durumlara karşılık gelir.

4.2.2 Fenomenolojik kısım

Fenomenolojik kısmı hesaplamak için gerekli matris elemanları

$$\begin{aligned} \langle 0|J_\alpha|Z_{cs}(p)\rangle &= f_{Z_{cs}} m_{Z_{cs}} \epsilon_\alpha^r, \\ \langle Z_{cs}(p)|J_\mu^{el}|Z_{cs}(p')\rangle &= -(\epsilon^r)^\rho (\epsilon^{*r'})^\xi \{G_1(Q^2) g_{\rho\xi} (p+p')_\mu + G_2(Q^2) (g_{\mu\xi} q_\rho - g_{\mu\rho} q_\xi) \\ &\quad - \frac{G_3(Q^2)}{2m_{Z_{cs}}^2} q_\rho q_\xi (p+p')_\mu\}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

şeklinde verilir [93]. Burada $(\epsilon^r)^\rho$ ve $(\epsilon^{*r'})^\xi$ başlangıç durumundaki ve son durumdaki aksiyal vektör mezonların polarizasyon vektörlerine karşılık gelir. G_1 , G_2 ve G_3 kovaryant form faktörleri yük, manyetik ve kuadrupole form faktörleri cinsinden

$$\begin{aligned} F_C &= G_1(Q^2) + \frac{2}{3}\eta F_D, \\ F_M &= G_2(Q^2), \\ F_D &= G_1(Q^2) - G_2(Q^2) + (1 + \eta)G_3(Q^2), \end{aligned} \quad (4.13)$$

şeklinde ifade edilebilir [94]. Burada $\eta = Q^2/4m_{Z_{cs}}^2$ olarak tanımlıdır. Bu matris elemanları Denklem 4.11'e yerleştirilerek korelasyon fonksiyonunun fenomenolojik

kısmı

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\alpha\beta}^{Phen} = & - \frac{f_{Z_{cs}}^2 m_{Z_{cs}}^2}{(p^2 - m_{Z_{cs}}^2)(p'^2 - m_{Z_{cs}}^2)} \left\{ G_1(Q^2)(p + p')_\mu \left[g_{\alpha\beta} - \frac{1}{m_{Z_{cs}}^2} (p'_\alpha p'_\beta \right. \right. \\
& + p_\alpha p_\beta) + \frac{1}{m_{Z_{cs}}^4} p_\alpha p'_\beta (2m_{Z_{cs}}^2 + Q^2) \left. \right] + G_2(Q^2) \left[q_\alpha g_{\mu\beta} - q_\beta g_{\mu\alpha} - \frac{p'_\beta}{m_{Z_{cs}}^2} \right. \\
& (q_\alpha p'_\mu + g_{\mu\alpha} \frac{Q^2}{2}) + \frac{p_\alpha}{m_{Z_{cs}}^2} (q_\beta p_\mu - g_{\mu\beta} \frac{Q^2}{2}) + \frac{p_\mu p_\alpha p'_\beta}{m_{Z_{cs}}^4} Q^2 + \frac{q_\mu p_\alpha p'_\beta}{2m_{Z_{cs}}^4} Q^2 \left. \right] \\
& - \frac{G_3(Q^2)}{2m_{Z_{cs}}^2} (p + p')_\mu \left[q_\alpha q_\beta + \frac{q_\alpha p'_\beta}{2m_{Z_{cs}}^2} Q^2 - \frac{p_\alpha q_\beta}{2m_{Z_{cs}}^2} Q^2 - \frac{p_\alpha p'_\beta}{4m_{Z_{cs}}^4} Q^4 \right] \left. \right\} \quad (4.14)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu denklem açılarak Lorentz yapılarına göre

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\alpha\beta}^{Phen} = & \Gamma_1^{Phen} p_\mu g_{\alpha\beta} + \Gamma_2^{Phen} p'_\mu g_{\alpha\beta} + \Gamma_3^{Phen} p_\beta g_{\mu\alpha} + \Gamma_4^{Phen} p'_\beta g_{\mu\alpha} \\
& + \Gamma_5^{Phen} p_\alpha g_{\mu\beta} + \Gamma_6^{Phen} p'_\alpha g_{\mu\beta} + \Gamma_7^{Phen} p'_\mu p'_\alpha p'_\beta + \Gamma_8^{Phen} p'_\mu p'_\alpha p_\beta \\
& + \Gamma_9^{Phen} p'_\mu p_\alpha p'_\beta + \Gamma_{10}^{Phen} p'_\mu p_\alpha p_\beta + \Gamma_{11}^{Phen} p_\mu p'_\alpha p'_\beta + \Gamma_{12}^{Phen} p_\mu p'_\alpha p_\beta \\
& + \Gamma_{13}^{Phen} p_\mu p_\alpha p'_\beta + \Gamma_{14}^{Phen} p_\mu p_\alpha p_\beta, \quad (4.15)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Diğer terimler için

$$\begin{aligned}
\Gamma_1^{Phen} &= AG_1(Q^2), \\
\Gamma_2^{Phen} &= AG_1(Q^2), \\
\Gamma_3^{Phen} &= -AG_2(Q^2), \\
\Gamma_4^{Phen} &= A(G_2(Q^2) - \frac{G_2(Q^2)Q^2}{2m_{Z_{cs}}^2}), \\
\Gamma_5^{Phen} &= AG_2(Q^2), \\
\Gamma_6^{Phen} &= -A(G_2(Q^2) + \frac{G_2(Q^2)Q^2}{2m_{Z_{cs}}^2}), \\
\Gamma_7^{Phen} &= -A(\frac{G_1(Q^2)}{m_{Z_{cs}}^2} - \frac{G_2(Q^2)}{m_{Z_{cs}}^2} + \frac{G_3(Q^2)}{2m_{Z_{cs}}^2} - \frac{G_3(Q^2)Q^2}{4m_{Z_{cs}}^4}), \\
\Gamma_8^{Phen} &= A\frac{G_3(Q^2)}{2m_{Z_{cs}}^2}, \\
\Gamma_9^{Phen} &= A(\frac{2G_1(Q^2)}{m_{Z_{cs}}^2} + \frac{G_1(Q^2)Q^2}{m_{Z_{cs}}^4} - \frac{G_2(Q^2)}{m_{Z_{cs}}^2} - \frac{G_2(Q^2)Q^2}{2m_{Z_{cs}}^4} + \frac{G_3(Q^2)}{2m_{Z_{cs}}^2} \\
& - \frac{G_3(Q^2)Q^2}{2m_{Z_{cs}}^4} + \frac{G_3(Q^2)Q^4}{8m_{Z_{cs}}^6}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{10}^{Phen} &= -A \left(\frac{G_1(Q^2)}{m_{Z_{cs}}^2} + \frac{G_3(Q^2)}{2m_{Z_{cs}}^2} - \frac{G_3(Q^2)Q^2}{4m_{Z_{cs}}^4} \right), \\
\Gamma_{11}^{Phen} &= -A \left(\frac{G_1(Q^2)}{m_{Z_{cs}}^2} + \frac{G_3(Q^2)}{2m_{Z_{cs}}^2} - \frac{G_3(Q^2)Q^2}{4m_{Z_{cs}}^4} \right), \\
\Gamma_{12}^{Phen} &= A \frac{G_3(Q^2)}{2m_{Z_{cs}}^2}, \\
\Gamma_{13}^{Phen} &= A \left(\frac{2G_1(Q^2)}{m_{Z_{cs}}^2} + \frac{G_1(Q^2)Q^2}{m_{Z_{cs}}^4} - \frac{G_2(Q^2)}{m_{Z_{cs}}^2} + \frac{3G_2(Q^2)Q^2}{2m_{Z_{cs}}^4} + \frac{G_3(Q^2)}{2m_{Z_{cs}}^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{G_3(Q^2)Q^2}{2m_{Z_{cs}}^4} + \frac{G_3(Q^2)Q^4}{8m_{Z_{cs}}^6} \right), \\
\Gamma_{14}^{Phen} &= -A \left(\frac{G_1(Q^2)}{m_{Z_{cs}}^2} - \frac{G_2(Q^2)}{m_{Z_{cs}}^2} + \frac{G_3(Q^2)}{2m_{Z_{cs}}^2} - \frac{G_3(Q^2)Q^2}{4m_{Z_{cs}}^4} \right), \tag{4.16}
\end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. Burada

$$A = -\frac{f_{Z_{cs}}^2 m_{Z_{cs}}^2}{(p^2 - m_{Z_{cs}}^2)(p'^2 - m_{Z_{cs}}^2)}, \tag{4.17}$$

olarak tanımlanmıştır. Esasında her bir Lorentz yapısı için ayrı bir toplam kuralı vardır. Dolayısıyla her biri için uygun boyuta kadar hesap yapılmalıdır. Nümerik analiz kısmında toplam kuralları sınırlandırmaları kullanılarak bazı Lorentz yapıları seçilerek form faktörler elde edilebilir.

4.2.3 Kuramsal kısım

Diğer taraftan, korelasyon fonksiyonunu kuark ve gluon serbestlik dereceleri cinsinden hesaplamak için, Denklem 4.7 ve 4.9'deki akımlar Denklem 4.6'de yerine yerleştirilir ve

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\alpha\beta}^{KRD} &= \frac{\epsilon\epsilon'\epsilon'}{2} \int d^4x d^4y e^{i(p'x - py)} \\
&\left\{ e_u \left[\text{Tr} \left[\tilde{S}_c^{en}(x-y) \gamma_\beta S_s^{dm}(x-y) \gamma_\alpha \right] \text{Tr} \left[\tilde{S}_u^{ia}(-x) \gamma_\mu \tilde{S}_u^{fi}(y) \gamma_5 S_c^{hb}(y-x) \gamma_5 \right] \right. \right. \\
&\quad - \text{Tr} \left[\tilde{S}_c^{en}(x-y) \gamma_\beta S_s^{dm}(x-y) \gamma_5 \right] \text{Tr} \left[\tilde{S}_u^{ia}(-x) \gamma_\mu \tilde{S}_u^{fi}(y) \gamma_5 S_c^{hb}(y-x) \gamma_\alpha \right] \\
&\quad - \text{Tr} \left[\tilde{S}_c^{en}(x-y) \gamma_5 S_s^{dm}(x-y) \gamma_\alpha \right] \text{Tr} \left[\tilde{S}_u^{ia}(-x) \gamma_\mu \tilde{S}_u^{fi}(y) \gamma_5 S_c^{hb}(y-x) \gamma_\beta \right] \\
&\quad \left. \left. + \text{Tr} \left[\tilde{S}_c^{en}(x-y) \gamma_5 S_s^{dm}(x-y) \gamma_5 \right] \text{Tr} \left[\tilde{S}_u^{ia}(-x) \gamma_\mu \tilde{S}_u^{fi}(y) \gamma_\alpha S_c^{hb}(y-x) \gamma_\beta \right] \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -e_s \left[\text{Tr} \left[\tilde{S}_c^{en}(x-y) \gamma_\beta S_s^{di}(x) \gamma_\mu S_s^{im}(-y) \gamma_\alpha \right] \text{Tr} \left[\tilde{S}_u^{af}(y-x) \gamma_5 S_c^{hb}(y-x) \gamma_5 \right] \right. \\
& - \text{Tr} \left[\tilde{S}_c^{en}(x-y) \gamma_\beta S_s^{di}(x) \gamma_\mu S_s^{im}(-y) \gamma_5 \right] \text{Tr} \left[\tilde{S}_u^{af}(y-x) \gamma_\alpha S_c^{hb}(y-x) \gamma_5 \right] \\
& - \text{Tr} \left[\tilde{S}_c^{en}(x-y) \gamma_5 S_s^{di}(x) \gamma_\mu S_s^{im}(-y) \gamma_\alpha \right] \text{Tr} \left[\tilde{S}_u^{af}(y-x) \gamma_5 S_c^{hb}(y-x) \gamma_\beta \right] \\
& \left. + \text{Tr} \left[\tilde{S}_c^{en}(x-y) \gamma_5 S_s^{di}(x) \gamma_\mu S_s^{im}(-y) \gamma_5 \right] \text{Tr} \left[\tilde{S}_u^{af}(y-x) \gamma_\alpha S_c^{hb}(y-x) \gamma_\beta \right] \right] \\
& -e_c \left[\text{Tr} \left[\tilde{S}_c^{en}(x-y) \gamma_\beta S_s^{dm}(x-y) \gamma_\alpha \right] \text{Tr} \left[\gamma_5 \tilde{S}_u^{af}(y-x) \gamma_5 S_c^{hi}(y) \gamma_\mu S_c^{ib}(-x) \right] \right. \\
& - \text{Tr} \left[\tilde{S}_c^{en}(x-y) \gamma_\beta S_s^{dm}(x-y) \gamma_5 \right] \text{Tr} \left[\gamma_5 \tilde{S}_u^{af}(y-x) \gamma_\alpha S_c^{hi}(y) \gamma_\mu S_c^{ib}(-x) \right] \\
& - \text{Tr} \left[\tilde{S}_c^{en}(x-y) \gamma_5 S_s^{dm}(x-y) \gamma_\alpha \right] \text{Tr} \left[\gamma_\beta \tilde{S}_u^{af}(y-x) \gamma_5 S_c^{hi}(y) \gamma_\mu S_c^{ib}(-x) \right] \\
& \left. + \text{Tr} \left[\tilde{S}_c^{en}(x-y) \gamma_5 S_s^{dm}(x-y) \gamma_5 \right] \text{Tr} \left[\gamma_\beta \tilde{S}_u^{af}(y-x) \gamma_\alpha S_c^{hi}(y) \gamma_\mu S_c^{ib}(-x) \right] \right] \Bigg\}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

eşitliği elde edilir. Burada $S_{q(c)}^{ijT}(x)$ kuark propagatörü olup, $\tilde{S}$ ise

$$\tilde{S}_{q(c)}^{ij}(x) = C S_{q(c)}^{ijT}(x) C, \tag{4.19}$$

ifadesi ile verilir. Burada hafif kuark propagatörü

$$\begin{aligned}
S_q^{ij}(x) &= i \frac{\not{x}}{2\pi^2 x^4} \delta_{ij} - \frac{m_q}{4\pi^2 x^2} \delta_{ij} - \frac{\langle q\bar{q} \rangle}{12} \left(1 - i \frac{m_q}{4} \not{x} \right) \delta_{ij} \\
&- \frac{x^2}{192} m_0^2 \langle q\bar{q} \rangle \left(1 - i \frac{m_q}{6} \not{x} \right) \delta_{ij} - i \frac{g G_{ij}^{\alpha\beta}}{32\pi^2 x^2} [\sigma_{\alpha\beta} \not{x} + \not{x} \sigma_{\alpha\beta}] + \dots, \tag{4.20}
\end{aligned}$$

ile verilirken, ağır kuark propagatörü de

$$\begin{aligned}
S_c^{ij}(x) &= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi^4)} e^{-ikx} \left[\frac{\delta_{ij}(\not{k} + m_c)}{k^2 - m_c^2} - \frac{g G_{ij}^{\alpha\beta}}{4} \frac{\sigma_{\alpha\beta}(\not{k} + m_c) + (\not{k} + m_c) \sigma_{\alpha\beta}}{(k^2 - m_c^2)^2} \right. \\
&\left. + \frac{g^2}{12} G_{\alpha\beta}^A G^{A\alpha\beta} \delta_{ij} m_c \frac{k^2 + m_c \not{k}}{(k^2 - m_c^2)^4} + \dots \right]
\end{aligned} \tag{4.21}$$

şeklinde yazılabilir. Gluon alanı

$$G_{ij}^{\alpha\beta} \equiv G_A^{\alpha\beta} t_{ij}^A, \quad A = 1, 2, \dots, 8, \quad (4.22)$$

olarak tanımlıdır. i, j renk indisleridir ve t^A Gell-Mann matrisleri cinsinden $t^A = \lambda^A/2$ ile ifade edilir. Gluon alanları ile ilişkili terimler pertürbatif olmayan katkılara karşılık gelmektedir ve hesaplamalar sırasında $G_{\alpha\beta}^A \equiv G_{\alpha\beta}^A(0)$ olarak alınmıştır.

Denklem A.14'de verilen korelasyon fonksiyonunu Denklem 4.9'da verilen elektromanyetik akıma katkı veren kuark operatörleri cinsinden

$$\Pi_{\mu\alpha\beta}^{KRD} = \sum \Pi_{\mu\alpha\beta, q}^{KRD}, \quad (4.23)$$

şeklinde yazılır. u hafif kuarkı için korelasyon fonksiyonu

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\alpha\beta, u}^{KRD} = & \frac{\epsilon\bar{\epsilon}\epsilon'\bar{\epsilon}'}{2} \int d^4x d^4y e^{i(p'x - py)} e_u \\ & \left[\text{Tr} \left[\tilde{S}_c^{en}(x-y) \gamma_\beta S_s^{dm}(x-y) \gamma_\alpha \right] \text{Tr} \left[\tilde{S}_u^{ia}(-x) \gamma_\mu \tilde{S}_u^{fi}(y) \gamma_5 S_c^{hb}(y-x) \gamma_5 \right] \right. \\ & - \text{Tr} \left[\tilde{S}_c^{en}(x-y) \gamma_\beta S_s^{dm}(x-y) \gamma_5 \right] \text{Tr} \left[\tilde{S}_u^{ia}(-x) \gamma_\mu \tilde{S}_u^{fi}(y) \gamma_5 S_c^{hb}(y-x) \gamma_\alpha \right] \\ & - \text{Tr} \left[\tilde{S}_c^{en}(x-y) \gamma_5 S_s^{dm}(x-y) \gamma_\alpha \right] \text{Tr} \left[\tilde{S}_u^{ia}(-x) \gamma_\mu \tilde{S}_u^{fi}(y) \gamma_5 S_c^{hb}(y-x) \gamma_\beta \right] \\ & \left. + \text{Tr} \left[\tilde{S}_c^{en}(x-y) \gamma_5 S_s^{dm}(x-y) \gamma_5 \right] \text{Tr} \left[\tilde{S}_u^{ia}(-x) \gamma_\mu \tilde{S}_u^{fi}(y) \gamma_\alpha S_c^{hb}(y-x) \gamma_\beta \right] \right], \end{aligned} \quad (4.24)$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde hafif s kuarkı için korelasyon fonksiyonu

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\alpha\beta, s}^{KRD} = & \frac{\epsilon\bar{\epsilon}\epsilon'\bar{\epsilon}'}{2} \int d^4x d^4y e^{i(p'x - py)} e_s \\ & \left[\text{Tr} \left[\tilde{S}_c^{en}(x-y) \gamma_\beta S_s^{di}(x) \gamma_\mu S_s^{im}(-y) \gamma_\alpha \right] \text{Tr} \left[\tilde{S}_u^{af}(y-x) \gamma_5 S_c^{hb}(y-x) \gamma_5 \right] \right. \\ & \left. - \text{Tr} \left[\tilde{S}_c^{en}(x-y) \gamma_\beta S_s^{di}(x) \gamma_\mu S_s^{im}(-y) \gamma_5 \right] \text{Tr} \left[\tilde{S}_u^{af}(y-x) \gamma_\alpha S_c^{hb}(y-x) \gamma_5 \right] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \text{Tr} \left[\tilde{S}_c^{en}(x-y) \gamma_5 S_s^{di}(x) \gamma_\mu S_s^{im}(-y) \gamma_\alpha \right] \text{Tr} \left[\tilde{S}_u^{af}(y-x) \gamma_5 S_c^{hb}(y-x) \gamma_\beta \right] \\
& + \text{Tr} \left[\tilde{S}_c^{en}(x-y) \gamma_5 S_s^{di}(x) \gamma_\mu S_s^{im}(-y) \gamma_5 \right] \text{Tr} \left[\tilde{S}_u^{af}(y-x) \gamma_\alpha S_c^{hb}(y-x) \gamma_\beta \right],
\end{aligned} \tag{4.25}$$

olur. Ağır c kuarkı için ise korelasyon fonksiyonu

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\alpha\beta,c}^{KRD} = & \frac{\epsilon\bar{\epsilon}\epsilon'\bar{\epsilon}'}{2} \int d^4x d^4y e^{i(p'x-py)} e_c \\
& \left[\text{Tr} \left[\tilde{S}_c^{en}(x-y) \gamma_\beta S_s^{dm}(x-y) \gamma_\alpha \right] \text{Tr} \left[\gamma_5 \tilde{S}_u^{af}(y-x) \gamma_5 S_c^{hi}(y) \gamma_\mu S_c^{ib}(-x) \right] \right. \\
& - \text{Tr} \left[\tilde{S}_c^{en}(x-y) \gamma_\beta S_s^{dm}(x-y) \gamma_5 \right] \text{Tr} \left[\gamma_5 \tilde{S}_u^{af}(y-x) \gamma_\alpha S_c^{hi}(y) \gamma_\mu S_c^{ib}(-x) \right] \\
& - \text{Tr} \left[\tilde{S}_c^{en}(x-y) \gamma_5 S_s^{dm}(x-y) \gamma_\alpha \right] \text{Tr} \left[\gamma_\beta \tilde{S}_u^{af}(y-x) \gamma_5 S_c^{hi}(y) \gamma_\mu S_c^{ib}(-x) \right] \\
& \left. + \text{Tr} \left[\tilde{S}_c^{en}(x-y) \gamma_5 S_s^{dm}(x-y) \gamma_5 \right] \text{Tr} \left[\gamma_\beta \tilde{S}_u^{af}(y-x) \gamma_\alpha S_c^{hi}(y) \gamma_\mu S_c^{ib}(-x) \right] \right],
\end{aligned} \tag{4.26}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Denklem 4.16'da fenomenolojik hesapla elde edilen Γ_i^{Phen} katsayıları gibi, Γ_i^{KRD} katsayıları da Lorentz yapılarına göre

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\alpha\beta}^{KRD} = & \Gamma_1^{KRD} p_\mu g_{\alpha\beta} + \Gamma_2^{KRD} p'_\mu g_{\alpha\beta} + \Gamma_3^{KRD} p_\beta g_{\mu\alpha} + \Gamma_4^{KRD} p'_\beta g_{\mu\alpha} \\
& + \Gamma_5^{KRD} p_\alpha g_{\mu\beta} + \Gamma_6^{KRD} p'_\alpha g_{\mu\beta} + \Gamma_7^{KRD} p'_\mu p'_\alpha p'_\beta + \Gamma_8^{KRD} p'_\mu p'_\alpha p_\beta \\
& + \Gamma_9^{KRD} p'_\mu p_\alpha p'_\beta + \Gamma_{10}^{KRD} p'_\mu p_\alpha p_\beta + \Gamma_{11}^{KRD} p_\mu p'_\alpha p'_\beta + \Gamma_{12}^{KRD} p_\mu p'_\alpha p_\beta \\
& + \Gamma_{13}^{KRD} p_\mu p_\alpha p'_\beta + \Gamma_{14}^{KRD} p_\mu p_\alpha p_\beta,
\end{aligned} \tag{4.27}$$

şeklinde yazılabilir.

Aynı zamanda korelasyon fonksiyonunun kuramsal kısmı, tedirgemeli ve tedirgemesiz katkılar açısından

$$\Pi_{\mu\alpha\beta}^{KRD} = \Pi_{\mu\alpha\beta}^{pert} + \Pi_{\mu\alpha\beta}^{np}, \tag{4.28}$$

şeklinde yazılabilir. Bu tez çalışmasında yalnızca $\Pi_{\mu\alpha\beta}^{pert}$ tedirgemeli katkılar dikkate alınarak hesaplamalar yapılmıştır.

4.2.4 KRD toplam kurallarının eldesi

Sonuçta elimizde korelasyon fonksiyonunun iki farklı gösterimde hesaplanmış sonuçları var. Bunlardan biri hadronik durumlar cinsinden hesaplanan fenomenolojik kısım ve diğeri kuarklar ve gluonların serbestlik dereceleri cinsinden hesaplanan kuramsal kısımdır. Bu iki farklı gösterim birbirlerine eşitlenerek

$$\Pi_{\mu\alpha\beta}^{Phen} = \Pi_{\mu\alpha\beta}^{KRD} , \quad (4.29)$$

gerekli fiziksel nicelikler hesaplanabilir. Bu eşitlik korelasyon fonksiyonunun tamamı için geçerli olduğu kadar, lineer olarak bağımsız olan Lorentz yapılarının katsayıları için de

$$\Gamma_i^{Phen} = \Gamma_i^{KRD} , \quad (4.30)$$

geçerli kalacaktır. Burada verilen kuramsal Lorentz yapılarının katsayıları da

$$\Gamma_i^{KRD} = \Gamma_i^{pert} + \Gamma_i^{np} , \quad (4.31)$$

tedirgemeli ve tedirgemesiz katkılar cinsinden yazılabilir. Korelasyon fonksiyonunda olduğu gibi burada da Γ_i^{pert} şeklinde tedirgemeli hesaptan gelen katkılar dikkate alınmıştır. Γ_i^{pert} katsayıları ise Denklem 4.23'teki kuark katkıları cinsinden

$$\Gamma_i^{pert} = \sum_q \Gamma_i^{pert,q} , \quad (4.32)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\sum_q \Gamma_i^{pert,q}$ ifadeleri q içeren elektromanyetik akımdan ilişkilendirici fonksiyona gelen ve Γ_i katsayısına eklenen kısmı ifade etmektedir. Aynı zamanda korelasyon fonksiyonunun bu katsayıları için Denklem 3.30'de verilen spektral yoğunluk

$$\rho_i^{pert,q}(s, s'; q^2) = \frac{\text{Im}_s \text{Im}_{s'} \Gamma_i^{pert,q}(s, s'; q^2)}{\pi^2} , \quad (4.33)$$

şekilde yazılabilir. Korelasyon fonksiyonunun kuramsal ya da KRD kısmından elde edilen tedirgemeli katkıların $\rho_i^{pert,q}(s, s'; q^2)$ spektral yoğunluğu çok uzun ifadeler olduğundan tez çalışmasının Ek-A kısmında verilmiştir.

4.2.5 Nümerik analiz

Kovaryant form faktörlerini hesaplamak için, üç ayrı Lorentz yapısı seçilmiştir. Bunlar: $g_{\alpha\beta}p_\mu$, $g_{\alpha\mu}p_\beta$ ve $p'_\alpha p_\beta p'_\mu$ şeklindedir. Bu yapılar analiz edilerek sırasıyla $G_1(Q^2)$, $G_2(Q^2)$ ve $G_3(Q^2)$ belirlenebilir. Form faktörler bu yapıların çarpımı olan katsayılar cinsinden

$$G_1(Q^2) = \frac{-e^{\frac{m_{Z_{cs}}^2}{M'^2}} e^{\frac{m_{Z_{cs}}^2}{M^2}} \Gamma_1^{KRD}}{\lambda_{Z_{cs}}^2}, \quad (4.34)$$

$$G_2(Q^2) = \frac{-e^{\frac{m_{Z_{cs}}^2}{M'^2}} e^{\frac{m_{Z_{cs}}^2}{M^2}} \Gamma_3^{KRD}}{\lambda_{Z_{cs}}^2}, \quad (4.35)$$

$$G_3(Q^2) = d \frac{-e^{\frac{m_{Z_{cs}}^2}{M'^2}} e^{\frac{m_{Z_{cs}}^2}{M^2}} \Gamma_8^{KRD}}{\lambda_{Z_{cs}}^2}, \quad (4.36)$$

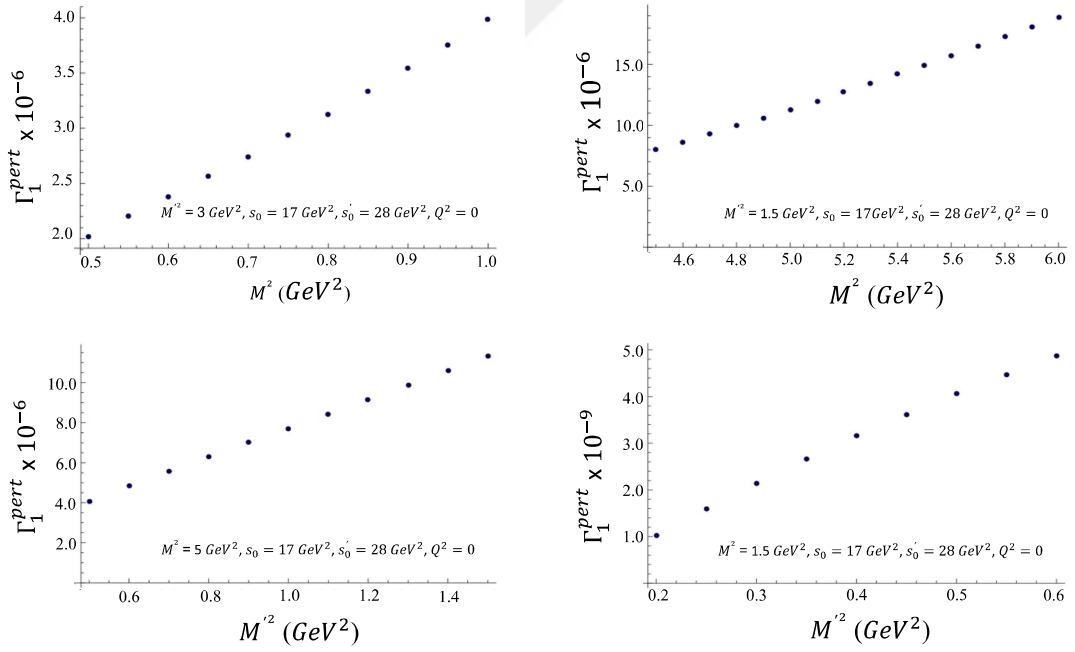
şeklinde elde edilir. Burada $m_{Z_{cs}}$, $Z_{cs}(3985)$ parçacığının kütlesi ve $\lambda_{Z_{cs}}$ parçacığın akım bağlaşım sabitidir. Γ_1^{KRD} , Γ_3^{KRD} ve Γ_8^{KRD} fonksiyonları süreklilik eşikleri s_0 , s'_0 ve Borel kütlelerine bağlıdır. Ancak, fiziksel nicelikler bu parametrelerin seçimi ile ilişkili rezidüel etkiler içermemelidir. Toplam kurallarında, Borel parametreleri M^2 ve M'^2 operatör çarpım açılımının (OPE) yakınsaklığı ve tekillik katkısının (PC) domnansı ile sınırlandırılır. Bu sınırlandırmalar

$$PC = \frac{\Pi(M^2, s_0)}{\Pi(M^2, \infty)}, \quad R = \frac{\Pi^{\text{DimN}}(M^2, s_0)}{\Pi(M^2, s_0)}, \quad (4.37)$$

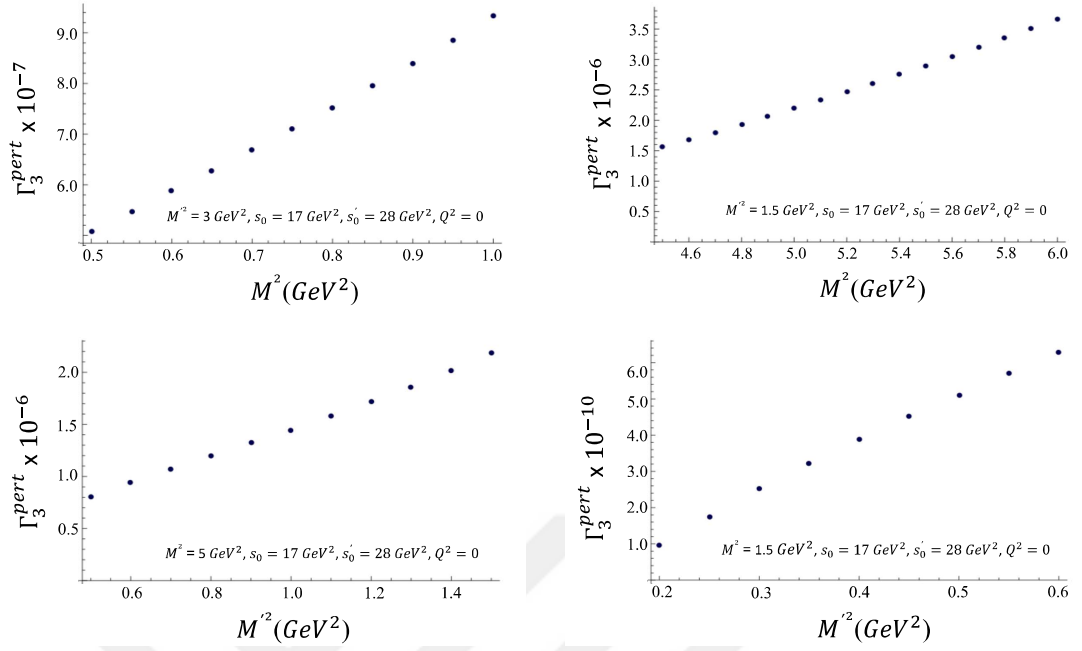
olarak kabul edilmişlerdir ve bu özellikleri sağlayan Borel kütle parametreleri ve süreklilik eşiği değerleri, KRD toplam kurallarının çalışma aralıklarını verir. Burada $\Pi^{\text{DimN}}(M^2, s_0)$, OPE'de son üç terimin toplamına karşılık gelir. Bu çalışmada yalnızca pertürbatif katkılar incelendiğinden, bu çalışma aralıklarının eldesine değinilmemiştir. Ancak pertürbatif katkılar için seçilen parametreler doğrultusunda her bir Lorentz yapısına tekillik katkısı sırasıyla yaklaşık %56, %92, %83 olarak gözlemlenmiştir. Şekiller 4.1, 4.2 ve 4.3'te Γ_1^{KRD} , Γ_3^{KRD} ve Γ_8^{KRD} için pertürbatif katkılarının Borel parametrelerine göre değişim grafikleri verilmiştir. Analizlerde kullanılan girdi parametreleri [95] Çizelge 4.1'de mevcuttur.

Çizelge 4.1 : Analizlerde kullanılan girdi parametreleri.

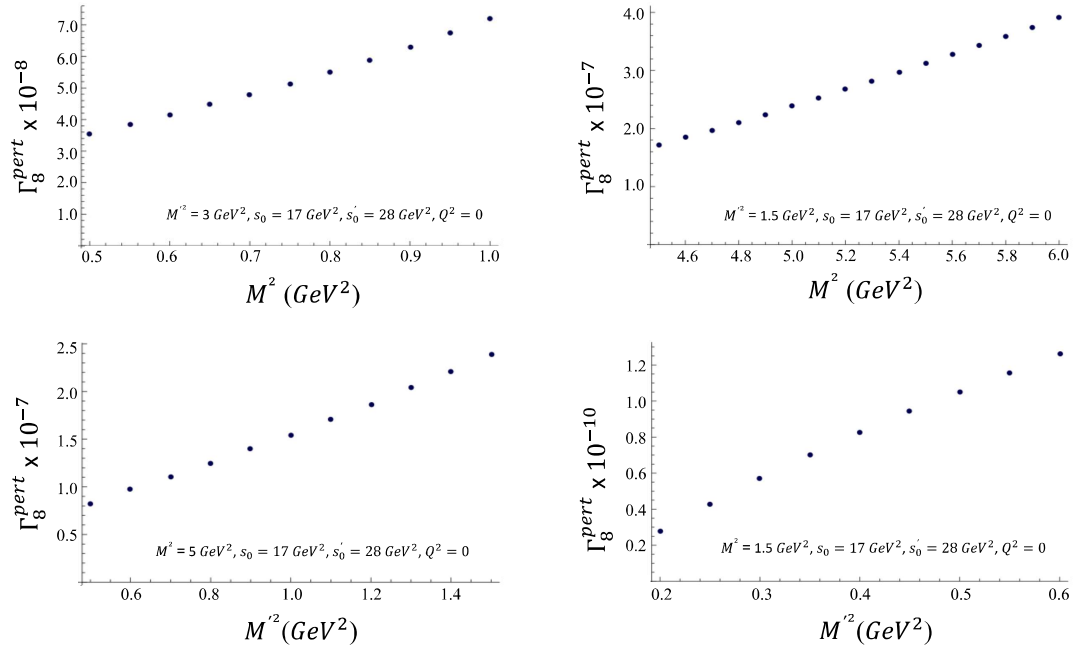
Parametreler	Değerleri	Birimleri
$\langle \bar{q}q \rangle$	$(0.241)^3$	$[\text{GeV}]^3$
$\langle \frac{\alpha_s G^2}{\pi} \rangle$	0.012	$[\text{GeV}]^4$
m_0^2	0.8	$[\text{GeV}]^3$
α_s	0.118	-
$m_{Z_{cs}}$	3.9825	$[\text{GeV}]^2$
$\lambda_{Z_{cs}}$	2.15×10^{-2}	$[\text{GeV}]^5$



Şekil 4.1 : $g_{\alpha\beta}p_\mu$ yapısının çarpanı olan Γ_1^{pert} 'in M^2 ve M'^2 ile değişimi.

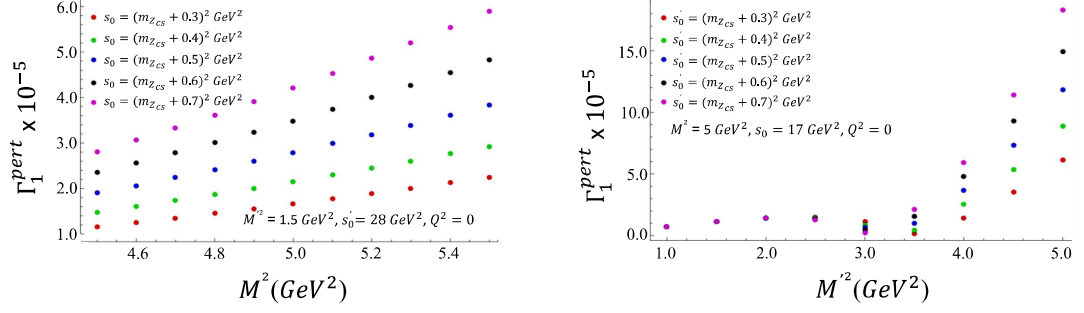


Şekil 4.2 : $g_{\alpha\mu}p_{\beta}$ yapısının çarpanı olan Γ_3^{pert} 'in M^2 ve M'^2 ile değişimi.

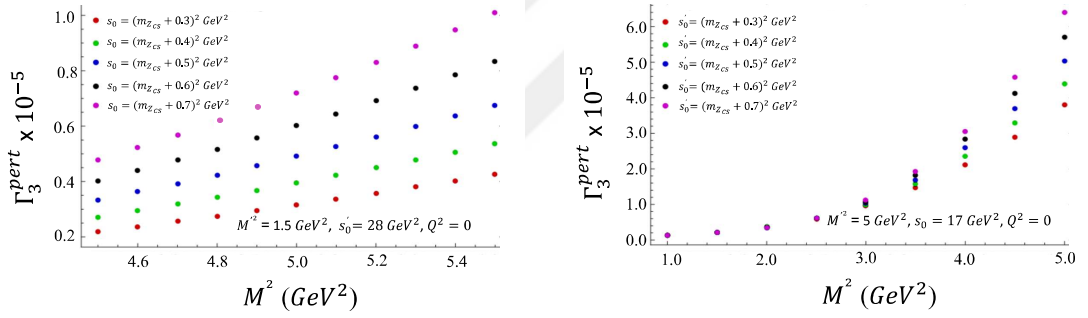


Şekil 4.3 : $p'_{\alpha}p_{\beta}p'_{\mu}$ yapısının çarpanı olan Γ_8^{pert} 'in M^2 ve M'^2 ile değişimi.

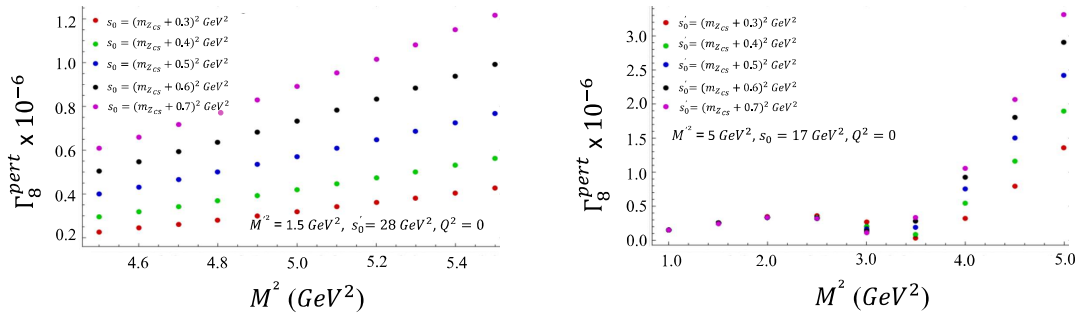
Farklı süreklilik eşiği (s_0, s'_0) değerleri için Γ_1^{pert} , Γ_3^{pert} ve Γ_8^{pert} 'in M^2 ve M'^2 ile değişimleri Şekil 4.4, 4.5 ve 4.6'da verilmiştir.



Şekil 4.4 : Farklı süreklilik eşiği değerleri için Γ_1^{pert} 'in M^2 ve M'^2 ile değişimi.

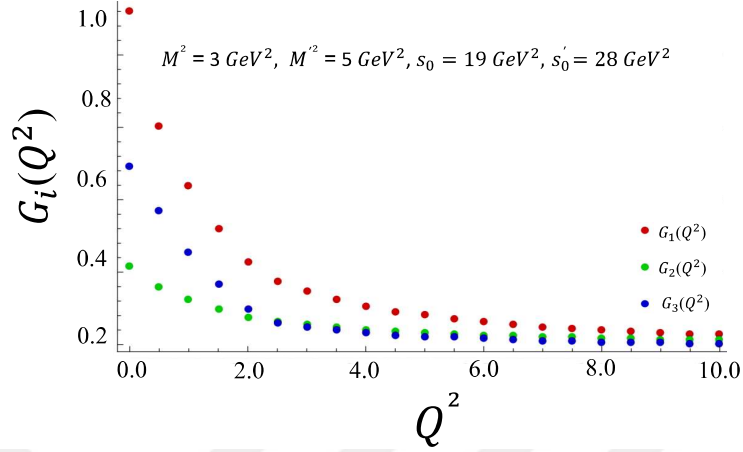


Şekil 4.5 : Farklı süreklilik eşiği değerleri için Γ_3^{pert} 'in M^2 ve M'^2 ile değişimi.



Şekil 4.6 : Farklı süreklilik eşiği değerleri için Γ_8^{pert} 'in M^2 ve M'^2 ile değişimi.

G_1 , G_2 ve G_3 kovaryant form faktörlerinin Q^2 bağımlılığı da Şekil 4.7’de gösterilmiştir.



Şekil 4.7 : Kovaryant form faktörlerin Q^2 bağımlılığı.

G_1 , G_2 ve G_3 kovaryant form faktörleri yük, manyetik ve kuadrupole form faktörleri ile Denklem 4.13’de gösterildiği gibi ilişkilidir.

Yük form faktörü $F_c(Q^2)$ ’nin $M^2 = 3 \text{ GeV}^2$, $M'^2 = 5 \text{ GeV}^2$, $s_0 = 19 \text{ GeV}^2$ ve $s'_0 = 28 \text{ GeV}^2$ için Q^2 ile değişimleri Şekil 4.8’de gösterilmiştir. Şekil 4.8’de elde edilen mavi noktalar toplam kuralları sonuçlarını göstermekte olup, yük form faktörünün tüm Q^2 değerlerinde analitik olarak hesaplanabilmesi için

$$f_{dipol}(Q^2) = \frac{A_1}{(1 + \frac{Q^2}{A_2^2})^2}, \quad (4.38)$$

şeklinde dipol formülü bir fit fonksiyonu seçilmiştir [96]. Bu fit fonksiyonu, protonun elektromanyetik form faktörlerinin deneysel sonuçları ile uyumludur. Elde edilen veriye genetik algoritma yaklaşımı ile gerçekleştirilen fit fonksiyonu Şekil 4.8’de veri ile birlikte çizdirilmiş olup, fit parametreleri

$$A_1 = 0.029, \quad A_2 = 2.3, \quad R_{dipol}^2 = 0.9979, \quad (4.39)$$

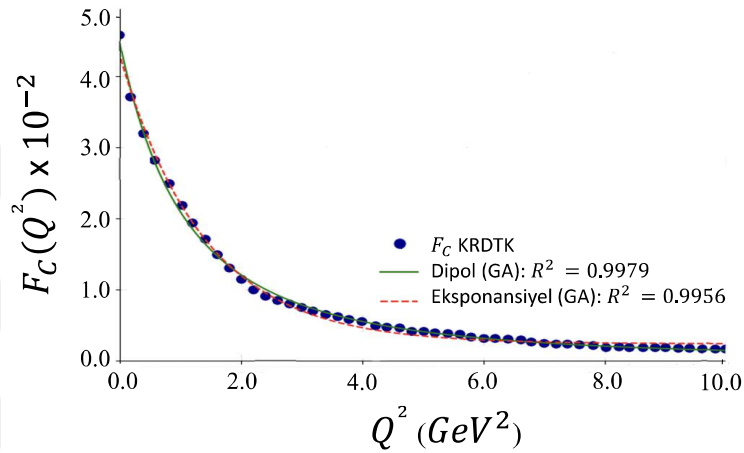
olarak bulunmuştur. Denklem 4.38’te verilen fit fonksiyonuna ek olarak

$$f_{exp} = B_1 + B_2 e^{B_3 Q^2}, \quad (4.40)$$

formunda eksponansiyel bir fit fonksiyonu da literatür ile karşılaştırmalarda bulunabilmek için ayrıca seçilmiştir. Eksponansiyel fit fonksiyonunun parametreleri

$$B_1 = 0.0023, \quad B_2 = 0.0408, \quad B_3 = -0.7225, \quad R_{\text{exp}}^2 = 0.9956, \quad (4.41)$$

olarak bulunmuştur. Bu iki fit fonksiyonu için Genetik Algoritma yöntemi, ilgili paketler yardımı ile Python desteği ile koşturulmuştur.



Şekil 4.8 : Yük form faktörü $F_C(Q^2)$ 'nin Q^2 bağıllığı.

$F_C(Q^2)$ 'nin Q^2 'ye göre türevlerinin $Q^2 = 0$ 'daki değeri yük yarıçapı ile

$$\langle r^2 \rangle = -\frac{6}{F_C(0)} \frac{dF_C(Q^2)}{dQ^2} \Big|_{Q^2=0}, \quad (4.42)$$

şeklinde ilişkilidir. $Z_{cs}(3985)$ egzotik mezonu için elde edilen fit fonksiyonları Denklem 4.42'de yerine konularak $\langle r^2 \rangle_{\text{dipol}} = 5.58 \text{ fm}^2$ ve $\langle r^2 \rangle_{\text{exp}} = 3.93 \text{ fm}^2$ olarak tahmin edilmiştir ve bu sonuçlar geleneksel hadronlar ile kıyaslanabilir şekilde Çizelge 4.2'de verilmiştir.

Geleneksel hadronların yük yarıçapları $\langle r^2 \rangle \leq 1 \text{ fm}^2$ civarındadır. $Z_{cs}(3985)$ mezonunun ise geleneksel mezonlardan daha geniş bir yük dağılımına sahip olduğu görülmektedir. Moleküler hadron yapılarında yük yarıçapının $\geq 2 \text{ fm}^2$ civarında olduğu gözönüne alındığında, $Z_{cs}(3985)$ egzotik mezonunun geleneksel hadronlara göre daha geniş yük dağılımına sahip olduğu, bu nedenle yapısında dikuark-antidikuark yapısına ek olarak, moleküler katkıların olabileceği, geleneksel çarmonyum benzeri katkıların

Çizelge 4.2: $Z_{cs}(3985)$ için elde edilen yük yarıçapı değerleri ve literatür karşılaştırması.

Parçacık	$\langle r^2 \rangle$	
$Z_{cs}(3985)$	5.58 fm ²	Dipol fit
$Z_{cs}(3985)$	3.93 fm ²	Ekspansiyonel fit
proton	0.7 fm ²	[97]
nötron	-0.12 fm ²	[97]
Ω baryonu	-0.32 fm ²	[96]
K mezonu	0.39 fm ²	[98]

ise oldukça az olması gerektiği sonucuna ulaşılabilir. Ayrıca dipol ve ekspansiyonel fit fonksiyonlarının oldukça başarılı ve çok yakın R^2 değerlerine sahip olmalarına rağmen farklı yük yarıçapı değerleri tahmin etmeleri dikkat çekicidir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Egzotik $Z_{cs}(3985)$ mezonunun elektromanyetik form faktörleri üç nokta KRD toplam kuralları yöntemi kullanılarak incelenmiştir. Bu yöntemde hadronlar, enterpolasyonlu kuark akımları ile temsil edildiği için Denklem 4.6'te ilgili mezona uygun bir korelasyon fonksiyonu seçilmiştir. $Z_{cs}(3985)$ parçacığının interpolasyon akımı Denklem 4.7'te, elektromanyetik akımı ise Denklem 4.9'te gösterildiği şekilde seçilmiş ve korelasyon fonksiyonunun teorik ve fenomenolojik kısımları hesaplanmıştır. Çalışmanın sonuçları, Bölüm 4.2.5'te nümerik analizlerle sunulmuştur.

$G_1(Q^2)$, $G_2(Q^2)$ ve $G_3(Q^2)$ kovaryant form faktörlerini hesaplamak için 3 ayrı $g_{\alpha\beta}p_\mu$, $g_{\alpha\mu}p_\beta$ ve $p'_\alpha p_\beta p'_\mu$ Lorentz yapısı seçilmiştir. Form faktörler bu yapıların çarpımı olan, s_0 , s'_0 süreklilik eşikleri ve Borel kütlelerine bağlı korelasyon fonksiyonları cinsinden Denklem 4.34, 4.35 ve 4.36'te elde edilmiştir. Korelasyon fonksiyonlarındaki Lorentz katsayıları için teklik katkılarının Borel parametrelerine göre değişim grafikleri Şekiller 4.1, 4.2 ve 4.3'te verilmiştir.

Şekil 4.4, 4.5 ve 4.6'te ise kovaryant form faktörlerin farklı (s_0 ve s'_0) süreklilik eşiği değerleri için M^2 ve M'^2 ile değişimleri verilmiştir. Bu form faktörlerin Q^2 ile değişimleri incelenmiş olup, Şekil 4.7'de form faktörlerin Q^2 bağımlılığı gösterilmiştir.

Beraberinde, Denklem 4.13'da belirtilen kovaryant form faktörleri ile ilişkili F_C yük, F_M manyetik ve F_D kuadrupole form faktörlerinden yük form faktörünün Q^2 ile değişimleri incelenmiş ve Şekil 4.8'de gösterilmiştir. Ayrıca, F_C yük form faktörünün Q^2 'ye göre türevlerinin $Q^2 = 0$ 'daki değerinin yük yarıçapı ile ilişkili olduğu gözlemlenmiş ve literatürde ilk kez $Z_{cs}(3985)$ egzotik mezonu için yük yarıçapı $\langle r^2 \rangle_{dipol} = 5.58 \text{ fm}^2$ ve $\langle r^2 \rangle_{exp} = 3.93 \text{ fm}^2$ şeklinde iki farklı fit fonksiyonu ile tahmin edilmiştir. $Z_{cs}(3985)$ ve konvansiyonel hadronlar için elde edilen $\langle r^2 \rangle$ değerler Çizelge 4.2'de incelenmiş olup, $Z_{cs}(3985)$ mezonunun konvansiyonel mezon olmadığı, içerisinde iki kuarklı Çarmonyum katkılarının ihmal edilebilir olduğu, dikuark-antidikuark katkılara ek olarak moleküler katkılarının da bulunabileceği sonucuna varılmıştır. Bu çalışmada

yalnızca tedirgemeli katkılar dikkate alındığından elde edilen sonuçların tedirgemesiz katkıları da içerek şekilde revize edilmesi gerekmektedir. Ancak tedirgemesiz katkıların, tedirgemeli katkılara göre daha küçük olması olağan bir durumdur. Bu nedenle bu tez de elde edilen sonuçlar, $Z_{cs}(3985)$ mezonunda yükün oldukça geniş bir hacime dağıldığını göstermektedir.



KAYNAKLAR

- [1] **Gell-Mann, M.** (1964). A schematic model of baryons and mesons. *Physics Letters*, 8(3), 214-215.
- [2] **Zweig, G.** (1964). CERN Report No. 8182/TH. 401. *This latter work could not be published in a scientific journal, which shows that sometimes strong resistance has to be overcome before a new idea gains common acceptance.*
- [3] **Zweig, G.** (1964). An SU₃ model for strong interaction symmetry and its breaking. (Technical report CM-P00042884).
- [4] **Choi, S.-K. & Olsen, S. L.** (2003). Observation of a narrow charmoniumlike state in exclusive $B^\pm \rightarrow K^\pm \pi^+ \pi^- J/\psi$ decays. *Physical Review Letters*, 91(26), 262001. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.91.262001>.
- [5] **Brambilla, N., Eidelman, S., Hanhart, C., Nefediev, A., Shen, C. P., Thomas, C. E., Vairo, A., & Yuan, C. Z.** (2020). The XYZ states: Experimental and theoretical status and perspectives. *Physics Reports*, 873, 1–154.
- [6] **Thomson, J. J.** (1897). *Cathode rays*. 4. Academic Reprints.
- [7] **Rutherford, E.** (1911). LXXIX. The scattering of α and β particles by matter and the structure of the atom. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 21(125), 669–688.
- [8] **Yukawa, H.** (1955). Attempts at a Unified Theory of Elementary Particles. *Science*, 121(3143), 405–408.
- [9] **Weinberg, S.** (1996). What is an elementary particle. Retrieved from <http://www.slac.stanford.edu/pubs/beamline/27/1/27-1-weinberg.pdf>.
- [10] **Cottingham, W. N. & Greenwood, D. A.** (2007). *An introduction to the standard model of particle physics*. Cambridge University Press.
- [11] **Vainshtein, A. I., Zakharov, V. I., & Shifman, M. A.** (1980). Higgs particles. *Soviet Physics Uspekhi*, 23(8), 429.
- [12] **Griffiths, D.** (2020). *Introduction to elementary particles*. John Wiley & Sons.
- [13] **Editors of Encyclopaedia Britannica.** (2023, March 20). Quantum electrodynamics. *Encyclopaedia Britannica*.
- [14] **Donoghue, J. F.** (1995). Introduction to the effective field theory description of gravity. *Advanced School on Effective Theories: Almunecar, Granada, Spain*, 26, 217–240.
- [15] **Leutwyler, H.** (2012). Chiral perturbation theory. *Scholarpedia*, 7(10), 8708.
- [16] **Bender, C. M. & Orszag, S. A.** (2013). *Advanced mathematical methods for scientists and engineers I: Asymptotic methods and perturbation theory*. Springer Science & Business Media.

- [17] **Holmes, M. H.** (2012). *Introduction to perturbation methods* (Vol. 20). Springer Science & Business Media.
- [18] **Mali, M., Goyal, N., & Trivedi, H.** (2014). Geometric methods in the theory of ordinary differential equations: A review. *Int. J. Res. Sci. Innov.*, 1(4), 37–43.
- [19] **Peskin, M. E.** (2018). *An introduction to quantum field theory*. CRC Press.
- [20] **Fritzsch, H., Gell-Mann, M., & Leutwyler, H.** (1973). Advantages of the color octet gluon picture. *Physics Letters B*, 47(4), 365–368
- [21] **Pich, A.** (1995). Quantum chromodynamics. *arXiv preprint hep-ph/9505231*.
- [22] **Bethke, S.** (2000). Determination of the QCD coupling α_s . *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 26(7), R27.
- [23] **Bethke, S.** (2013). World summary of α_s (2012). *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, 234, 229–234.
- [24] **Gross, D. J. & Wilczek, F.** (1973). Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories. *Physical Review Letters*, 30(26), 1343.
- [25] **Politzer, H. D.** (1973). Reliable perturbative results for strong interactions? *Physical Review Letters*, 30(26), 1346.
- [26] **Kleiv, R.** (2014). QCD sum rule studies of heavy quarkonium-like states. *arXiv preprint arXiv:1407.2292*.
- [27] **Chow, C.-K.** (1995). From tetraquarks to hexaquarks: A systematic study of heavy exotics in the large N_c limit. *Physical Review D*, 51(11), 6327.
- [28] **Esposito, A., Pilloni, A., & Polosa, A. D.** (2017). Multiquark resonances. *Physics Reports*, 668, 1–97.
- [29] **Huang, P.-Z., Chen, H.-X., & Zhu, S.-L.** (2011). Strong decay patterns of the $1^- +$ exotic hybrid mesons. *Physical Review D*, 83(1), 014021.
- [30] **Wang, Q.** (2014). Search for $J^P C = 1^- +$ exotic state in $e^+ e^-$ annihilation. *Physical Review D*, 89(11), 114013.
- [31] **Vijande, J., Valcarce, A., & Richard, J. M.** (2012). Stability of hexaquarks in the string limit of confinement. *Physical Review D*, 85(1), 014019.
- [32] **Harris, D.** (2009). The charming case of X (3872). *Symmetry Magazine*, 13.
- [33] **Maiani, L., Piccinini, F., Polosa, A. D., & Riquer, V.** (2005). Diquark-antidiquark states with hidden or open charm and the nature of X (3872). *Physical Review D*, 71(1), 014028.
- [34] **Swanson, E.** (2013). New particle hints at four-quark matter. *Physics*, 6, 69.
- [35] **O’Luanaigh, C.** (2014). LHCb confirms existence of exotic hadrons. *CERN*. <https://home.cern/news/news/experiments/lhcb-confirms-existence-exotic-hadrons>.
- [36] **Aaij, R., Adeva, B., Adinolfi, M., Affolder, A., Ajaltouni, Z., Albrecht, J., Alessio, F., Alexander, M., & Ali, S.** (2014). Observation of the resonant character of the Z(4430)- state. *Physical Review Letters*, 112(22), 222002. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.222002>

- [37] Abazov, V. M., Abbott, B., Acharya, B., Adams, M., Adams, T., Agnew, W., Aushev, Y., & Avila, C. (2016). Evidence for a $B_s^0 \pi^\pm$ state. *Physical Review Letters*, 117(2), 022003. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.022003>
- [38] Aaij, R., Adeva, B., Adinolfi, M., Ajaltouni, Z., Akar, S., Albrecht, J., Alessio, F., & Alexander, M. (2017). Observation of $J/\psi J/\psi \phi J/\psi \phi$ structures consistent with exotic states from amplitude analysis of $B^+ \rightarrow J/\psi \phi K^+ B^+ \rightarrow J/\psi \phi K^+ B^+ \rightarrow J/\psi \phi K^+$ decays. *Physical Review Letters*, 118, 022003. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.022003>
- [39] Ablikim, M., Achasov, M. N., Adlarson, P., Ahmed, S., Albrecht, M., Aliberti, R., & Amoroso, A. (2021). Observation of a near-threshold structure in the $K^+ K^+ K^+$ recoil-mass spectra in $e^+ e^- \rightarrow K^+ (D_s^- D^{*0} + D_s^{*-} D^0) e^+ e^- \rightarrow K^+ (D_s^- D^{*0} + D_s^{*-} D^0) e^+ e^- \rightarrow K^+ (D_s^- D^{*0} + D_s^{*-} D^0)$. *Physical Review Letters*, 126(10), 102001. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.126.102001>
- [40] Workman, R. L., Burkert, V. D., Crede, V., Klempt, E., Thoma, U., Tiator, L., Agashe, K., & Aielli, G. (2022). Review of particle physics. Progress of Theoretical and Experimental Physics, 2022, 083C01. <https://doi.org/10.1093/ptep/ptac097>
- [41] Aaij, R., Abellán Beteta, C., Ackernley, T., Adeva, B., Adinolfi, M., Afsharnia, H., Aidala, C. A., & Aiola, S. (2020). Amplitude analysis of the $B^+ \rightarrow D^+ D^- K^+ B^+ \rightarrow D^+ D^- K^+ B^+ \rightarrow D^+ D^- K^+$ decay. *Physical Review D*, 102, 112003. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.102.112003>
- [42] Aaij, R., Abdelmotteleb, A. S. W., Abellán Beteta, C., Abudinén, F., Ackernley, T., Adeva, B., Adinolfi, M., & Adlarson, P. (2023). Amplitude analysis of $B^0 \rightarrow D^0 D_s^+ \pi^-$ and $B^+ \rightarrow D^- D_s^+ \pi^+$ decays. *Physical Review D*, 108(1), 012017. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.108.012017>
- [43] Aaij, R., Abdelmotteleb, A. S. W., Abellán Beteta, C., Abudinen Gallego, F. J., Ackernley, T., Adeva, B., Adinolfi, M., & Afsharnia, H. (2022). Observation of an exotic narrow doubly charmed tetraquark. *Nature Physics*, 18(7), 751–754. DOI: 10.1038/s41567-022-01614-y. arXiv: 2109.01038 [hep-ex].
- [44] Ablikim, M., Achasov, M. N., Ai, X. C., Albayrak, O., Ambrose, D. J., An, F. F., An, Q., Bai, J. Z., & Baldini Ferroli, R. (2013). Observation of a charged charmoniumlike structure in $e^+ e^- \rightarrow \pi^+ \pi^- J/\psi$ at $\sqrt{s} = 4.26$ GeV. *Physical Review Letters*, 110, 252001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.252001. arXiv: 1303.5949 [hep-ex].
- [45] Liu, Z. Q., Shen, C. P., Yuan, C. Z., Adachi, I., Aihara, H., Asner, D. M., Aulchenko, V., & Aushev, T. (2013). Study of $e^+ e^- \rightarrow \pi^+ \pi^- J/\psi$ and observation of a charged charmoniumlike state at Belle. *Physical Review Letters*, 110, 252002. [Erratum: Phys. Rev. Lett. 111, 019901 (2013)]. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.252002. arXiv: 1304.0121 [hep-ex].

- [46] Aaij, R., Abellán Beteta, C., Ackernley, T., Adeva, B., Adinolfi, M., Afsharnia, H., & Aidala, C. A. (2021). Observation of new resonances decaying to $J/\psi K^{++}$ and $J/\psi \phi$. *Physical Review Letters*, 127(8), 082001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.127.082001. arXiv: 2103.01803 [hep-ex].
- [47] Ablikim, M., Achasov, M. N., Adlarson, P., Ahmed, S., Albrecht, M., Aliberti, R., Amoroso, A., An, Q., & Anita. (2021). Observation of a near-threshold structure in the K^+ recoil-mass spectra in $e^+ e^- \rightarrow K^+(D^-_s D^0 + D^-_s D^0)$. *Physical Review Letters*, 126(10), 102001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.126.102001. arXiv: 2011.07855 [hep-ex].
- [48] Ablikim, M., Achasov, M. N., Adlarson, P., Albrecht, M., Aliberti, R., Amoroso, A., & An, M. R. (2022). Evidence for a neutral near-threshold structure in the K^0_S recoil-mass spectra in $e^+ e^- \rightarrow K^0_S D^+_{s1} D^{*-} + e^+ e^- \rightarrow K^0_S D^{*+}_{s1} D^-$. *Physical Review Letters*, 129(11), 112003. DOI: 10.1103/PhysRevLett.129.112003. arXiv: 2204.13703 [hep-ex].
- [49] Ablikim, M., Achasov, M. N., Albayrak, O., Ambrose, D. J., An, F. F., An, Q., Bai, J. Z., Baldini Ferroli, R., & Ban, Y. (2013). Observation of a charged charmoniumlike structure $Z_c(4020)$ and search for the $Z_c(3900)$ in $e^+ e^- \rightarrow h_c \pi^+ \pi^-$. *Physical Review Letters*, 111(24), 242001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.111.242001. arXiv: 1309.1896 [hep-ex].
- [50] Ablikim, M., Achasov, M. N., Albayrak, O., Ambrose, D. J., An, Q., Bai, J. Z., & Baldini Ferroli. (2014). Observation of a charged charmoniumlike structure in $e^+ e^- \rightarrow (D^* \bar{D}^*) \pm \pi^\mp$ at $\sqrt{s} = 4.26$ GeV. *Physical Review Letters*, 112(13), 132001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.132001. arXiv: 1308.2760 [hep-ex].
- [51] Ablikim, M., Achasov, M. N., Ai, X. C., Albayrak, O., Albrecht, M., Ambrose, D. J., Amoroso, A., An, F. F., & An, Q. (2015). Observation of a neutral charmoniumlike state $Z_c(4025)^0$ in $e^+ e^- \rightarrow (D^* \bar{D}^*)^0 \pi^0$. *Physical Review Letters*, 115(18), 182002. DOI: 10.1103/PhysRevLett.115.182002. arXiv: 1507.02404 [hep-ex].
- [52] Mizuk, R., Chistov, R., Adachi, I., Aihara, H., Arinstein, K., Aulchenko, V., Aushev, T., & Bakich, A. M. (2008). Observation of two resonance-like structures in the $\pi^+ \chi(c1)$ mass distribution in exclusive anti- $B^0 \rightarrow K^- \pi^+ \chi(c1)$ decays. *Physical Review D*, 78, 072004. DOI: 10.1103/PhysRevD.78.072004. arXiv: 0806.4098 [hep-ex].
- [53] Wang, X. L., Yuan, C. Z., Shen, C. P., Wang, P., Abdesselam, A., Adachi, I., Aihara, H., & Al Said, S. (2015). Measurement of $e^+ e^- \rightarrow \pi^+ \pi^- \psi(2S)$ via initial state radiation at Belle. *Physical Review D*, 91, 112007. DOI: 10.1103/PhysRevD.91.112007. arXiv: 1410.7641 [hep-ex].
- [54] Aaij, R., Abellán Beteta, C., Adeva, B., Adinolfi, M., Aidala, C. A., Ajaltouni, Z., Akar, S., & Albicocco, P. (2018). Evidence for an $\eta_c(1S) \pi^-$ resonance in $B^0 \rightarrow \eta_c(1S) K^+ \pi^-$ decays. *European Physical Journal C*, 78(12), 1019. DOI: 10.1140/epjc/s10052-018-6447-z. arXiv: 1809.07416 [hep-ex].

- [55] **Chilikin, K., Mizuk, R., Adachi, I., Aihara, H., Al Said, S., Arinstein, K., Asner, D. M., & Aulchenko, V. (2014).** (2014). Observation of a new charged charmoniumlike state in $\bar{B}^0 \rightarrow J/\psi K^- \pi^+$ decays. *Physical Review D*, 90(11), 112009. DOI: 10.1103/PhysRevD.90.112009. arXiv: 1408.6457 [hep-ex].
- [56] **Aaij, R., Abellán Beteta, C., Adeva, B., Adinolfi, M., Aidala, C. A., Ajaltouni, Z., Akar, S., Albicocco, P., & Albrecht, J. (2019).** Model-independent observation of exotic contributions to $B^0 \rightarrow J/\psi K^+ \pi^-$ decays. *Physical Review Letters*, 122(15), 152002. DOI: 10.1103/PhysRevLett.122.152002. arXiv: 1901.05745 [hep-ex].
- [57] **Aaij, R., Adeva, B., Adinolfi, M., Affolder, A., Ajaltouni, Z., Albrecht, J., Alessio, F., & Alexander, M. (2014).** Observation of the resonant character of the $Z(4430)^-$ state. *Physical Review Letters*, 112(22), 222002. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.222002. arXiv: 1404.1903 [hep-ex].
- [58] **Abazov, V. M., Abbott, B., Abolins, M., Acharya, B. S., Adams, M., Adams, T., Aguilo, E., & Ahn, S. H. (2016).** Evidence for a $B^0_s \pi^-$ state. *Physical Review Letters*, 117(2), 022003. DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.022003. arXiv: 1602.07588 [hep-ex].
- [59] **Aaij, R., Abellán Beteta, C., Ackernley, T., Adeva, B., Adinolfi, M., Afsharnia, H., Aidala, C. A., & Aiola, S. (2020).** Observation of structure in the J/ψ pair mass spectrum. *Science Bulletin*, 65(23), 1983–1993.
- [60] **Bondar, A., Garmash, A., Mizuk, R., Santel, D., Kinoshita, K., Adachi, I., Aihara, H., & Arinstein, K. (2012).** Observation of two charged bottomonium-like resonances in $Y(5S)$ decays. *Physical Review Letters*, 108, 122001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.108.122001. arXiv: 1110.2251 [hep-ex].
- [61] **Garmash, A., Bondar, A., Kuzmin, A., Abdesselam, A., Adachi, I., Aihara, H., Al Said, S., & Asner, D. M. (2015).** Amplitude analysis of $e^+ e^- \rightarrow Y(nS) \pi^+ \pi^-$ at $\sqrt{s} = 10.865$ GeV. *Physical Review D*, 91(7), 072003. DOI: 10.1103/PhysRevD.91.072003. arXiv: 1403.0992 [hep-ex].
- [62] **Aaij, R., Adeva, B., Adinolfi, M., Affolder, A., Ajaltouni, Z., Akar, S., Albrecht, J., & Alessio, F. (2021).** Observation of particles composed of five quarks, pentaquark-charmonium states, seen in $B^0 \rightarrow J/\psi p K^-$ decays.
- [63] **Gignoux, C., Silvestre-Brac, B., & Richard, J. M. (1987).** Possibility of stable multiquark baryons. *Physics Letters B*, 193(2-3), 323–326.
- [64] **Lipkin, H. J. (1987).** New possibilities for exotic hadrons—anticharmed strange baryons. *Physics Letters B*, 195(3), 484–488.
- [65] **Stepanyan, S., Hicks, K., Carman, D. S., Pasyuk, E., Schumacher, R. A., Smith, E. S., Tedeschi, D. J., & Todor, L. (2003).** Observation of an exotic $S = +1$ baryon in exclusive photoproduction from the deuteron. *Physical Review Letters*, 91(25), 252001.

- [66] Olive, K. A., Agashe, K., Amsler, C., Antonelli, M., Arguin, J.-F., & Asner, D. M. (2008). Review of particle physics. *Physics Letters B*, 667(1-5), 1–6. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2008.07.018>
- [67] Aaij, R., Adeva, B., Adinolfi, M., Affolder, A., Ajaltouni, Z., Akar, S., Albrecht, J., & Alessio, F. (2015). Observation of J/ψ p resonances consistent with pentaquark states in $\Lambda_b^0 \rightarrow J/\psi K^- p$ decays. *Physical Review Letters*, 115(7), 072001.
- [68] Aaij, R., Abellán Beteta, C., Adeva, B., Adinolfi, M., Aidala, C. A., Ajaltouni, Z., Akar, S., & Albicocco, P.. (2019). Observation of a narrow pentaquark state, $P_c(4312)^+$, and of two-peak structure of the $P_c(4450)^+$. *Physical Review Letters*, 122(22), 222001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.122.222001. arXiv: 1904.03947 [hep-ex].
- [69] Aaij, R., Abdelmotteleb, A. S. W., Abellan Beteta, C., Ackernley, T., Adeva, B., Adinolfi, M., Adlarson, P., & Afsharnia, H. (2023). Observation of a J/ψ Λ resonance consistent with a strange pentaquark candidate in $B^- \rightarrow J/\psi \Lambda p$ decays. *Physical Review Letters*, 131(3), 031901.
- [70] Aaij, R., Adeva, B., Adinolfi, M., Affolder, A., Ajaltouni, Z., Akar, S., Albrecht, J., & Alessio, F. (2015). Observation of J/ψ p resonances consistent with pentaquark states in $\Lambda_b^0 \rightarrow J/\psi K^- p$ decays. *Physical Review Letters*, 115, 072001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.115.072001. arXiv: 1507.03414 [hep-ex].
- [71] Popov, A. V. (2020). Search for and study of exotic hadrons in the Fermilab D0 experiment: Recent results. *Physics of Atomic Nuclei*, 83(9), 1383–1390. DOI: 10.1134/S1063778820090203.
- [72] Jaffe, R. J. (1977). Multiquark hadrons. I. Phenomenology of $Q^2 Q^2$ mesons. *Physical Review D*, 15(1), 267.
- [73] Jaffe, R. L. (1977). Multiquark hadrons. II. Methods. *Physical Review D*, 15(1), 281.
- [74] Jaffe, R. L. (1977). Perhaps a stable dihyperon. *Physical Review Letters*, 38(5), 195.
- [75] Li, M., Liu, X.-H., Liu, X., & Zhu, S.-L. (2014). Exotic four quark matter: $Z_c(4475)$. *Physical Review D*, 90(3), 037502.
- [76] Griffiths, D. (2020). *Introduction to elementary particles*. John Wiley & Sons, 279–296.
- [77] Shifman, M. A., Vainshtein, A. I., & Zakharov, V. I. (1979). QCD and resonance physics: The ω mixing. *Nuclear Physics B*, 147(5), 519–534.
- [78] Ioffe, B. L. (1981). Calculation of baryon masses in quantum chromodynamics. *Nuclear Physics B*, 188(2), 317–341.
- [79] Aliev, T. M., & Shifman, M. A. (1982). QCD sum rules and tensor mesons. *Yadernaya Fizika*, 36(6), 1532–1542.
- [80] Aliev, T. M., & Shifman, M. A. (1982). Old tensor mesons in QCD sum rules. *Physics Letters B*, 112(4-5), 401–405.
- [81] Colangelo, P., & Khodjamirian, A. (2001). At the Frontier of Particle Physics/Handbook of QCD vol 3, ed. M. Shifman.

- [82] **Matsui, T., & Satz, H.** (1986). J/ψ suppression by quark-gluon plasma formation. *Physics Letters B*, 178(4), 416–422.
- [83] **Reinders, L. J., Rubinstein, H., & Yazaki, S.** (1985). Hadron properties from QCD sum rules. *Physics Reports*, 127(1), 1–97.
- [84] **Barsbay, Birten.** (2017). Egzotik X (5568) ve Λ (1405) parçacıklarının incelenmesi. Yüksek Lisans Tezi. Kocaeli Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [85] **Wan, Bing-Dong, & Qiao, Cong-Feng.** (2021). About the exotic structure of Z_{cs} . *Nuclear Physics B*, 968, 115450.
- [86] **Yang, Z., Cao, X., Guo, F.-K., Nieves, J., & Pavon Valderrama, M.** (2021). Strange molecular partners of the $Z_c(3900)$ and $Z_c(4020)$. *Physical Review D*, 103(7), 074029.
- [87] **Meng, Lu, Wang, Bo, & Zhu, Shi-Lin.** (2020). $Z_{cs}(3985)$ as the U-spin partner of $Z_c(3900)$ and implication of other states in the $SU(3)_F$ symmetry and heavy quark symmetry. *Physical Review D*, 102(11), 111502.
- [88] **Wang, Zhi-Gang.** (2021). Analysis of $Z_{cs}(3985)$ as the axialvector tetraquark state. *Chinese Physics C*, 45(7), 073107.
- [89] **Ikeno, N., Molina, R., & Oset, E.** (2021). The $Z_{cs}(3985)$ as a threshold effect from the $D_s^* D^+ D_s^- D^*$ interaction. *Physics Letters B*, 814, 136120.
- [90] **Cao, Xu, Dai, Jian-Ping, & Yang, Zhi.** (2021). Photoproduction of strange hidden-charm and hidden-bottom states. *The European Physical Journal C*, 81, 1–9.
- [91] **Özdem, U., & Azizi, K.** (2021). Magnetic dipole moment of the $Z_{cs}(3985)$ state: diquark–antidiquark and molecular pictures. *The European Physical Journal Plus*, 136, 1–13.
- [92] **Wang, Zhi-Gang.** (2020). Analysis of the hidden-charm tetraquark mass spectrum with the QCD sum rules. *Physical Review D*, 102(1), 014018.
- [93] **Arnold, R. G., Carlson, C. E., & Gross, F.** (1980). Elastic electron-deuteron scattering at high energy. *Physical Review C*, 21(4), 1426.
- [94] **Arnold, R. G., Carlson, C. E., & Gross, F.** (1981). Polarization transfer in elastic electron scattering from nucleons and deuterons. *Physical Review C*, 23(1), 363.
- [95] **Wang, Zhi-Gang.** (2020). Analysis of the hidden-charm tetraquark mass spectrum with the QCD sum rules. *Physical Review D*, 102(1), 014018.
DOI: 10.1103/PhysRevD.102.014018. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.102.014018>.
- [96] **Gao, H., & Vanderhaeghen, M.** (2022). The proton charge radius. *Reviews of Modern Physics*, 94, 015002. DOI: 10.1103/RevModPhys.94.015002. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.94.015002>.
- [97] **Can, K. U., Erkol, G., Oka, M., & Takahashi, T. T.** (2015). Look inside charmed-strange baryons from lattice QCD. *Physical Review D*, 92(11), 114515.

- [98] **Krutov, A. F., Troitsky, S. V., & Troitsky, V. E.** (2017). The K-meson form factor and charge radius: linking low-energy data to future Jefferson Laboratory measurements. *The European Physical Journal C*, 77, 1–8.



EKLER

Ek A : KRD toplam kuralları ile elde edilen Γ_i İfadeleri:

1) $g_{\alpha\beta} p_\mu$ yapısına ait toplam kuralı

$$\begin{aligned}
 F_1^{\text{pert}, e_c} = & (e_c \Delta_{e_c}^{\text{pert}} \xi_{e_c}^{\text{pert}} (12 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} s'^2 x^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 24 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} s'^2 x^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 36 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \Delta_{e_c}^{\text{pert}} s' \\
 & x^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 6 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} s' (Q^2 + s' + s) x^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 12 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} s'^2 (x + z)^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 96 \kappa_{e_c}^{\text{pert}2} \\
 & s'^2 (x + z)^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 72 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} s'^2 (x + z)^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 12 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} s^2 (x + z)^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 12 \\
 & \delta_{e_c}^{\text{pert}2} (Q^2 + s' + s)^2 (x + z)^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 24 \kappa_{e_c}^{\text{pert}2} (Q^2 + s' + s)^2 (x + z)^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 36 \\
 & \delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} (Q^2 + s' + s)^2 (x + z)^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 12 \Delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} s' (x + z)^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 12 \Delta_{e_c}^{\text{pert}} \\
 & \kappa_{e_c}^{\text{pert}} s (x + z)^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 24 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} s' s (x + z)^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 72 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} s' s (x + z)^3 \\
 & \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 12 \Delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} (Q^2 + s' + s) (x + z)^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 24 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} s' (Q^2 + s' + s) \\
 & (x + z)^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 96 \kappa_{e_c}^{\text{pert}2} s' (Q^2 + s' + s) (x + z)^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 108 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} s' (Q^2 \\
 & + s' + s) (x + z)^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 24 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} s (Q^2 + s' + s) (x + z)^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 36 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} s (Q^2 \\
 & + s' + s) (x + z)^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 12 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} s'^2 x (x + z)^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 192 \kappa_{e_c}^{\text{pert}2} s'^2 x (x + z)^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} \\
 & + 120 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} s'^2 x (x + z)^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 6 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} (Q^2 + s' + s)^2 x (x + z)^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 12 \\
 & \delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} (Q^2 + s' + s)^2 x (x + z)^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 72 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \Delta_{e_c}^{\text{pert}} s' x (x + z)^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 240 \\
 & \Delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} s' x (x + z)^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 72 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \Delta_{e_c}^{\text{pert}} s x (x + z)^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + \dots)) / (2048 \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} \\
 & \pi^6 (\zeta_{e_c}^{\text{pert}} + x)^2 (x(y + z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x + y + z))^3)
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\rho_1^{\text{pert}, c}(s, s'; q^2) = \int_0^1 \int_0^x \int_0^y dx dy dz F_1^{\text{pert}, e_c} \theta(\Delta_{e_c}^{\text{pert}}) \tag{A.2}$$

$$F_1^{\text{pert}, e_{u,s}} = (3 \Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \eta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} yz(e_s + e_u)(\xi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} - yz(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + w))(-6 \delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}3} s'(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + 2w)$$

$$\begin{aligned}
& \left(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (-Q^2 - s + s') + w (Q^2 - s + s') \right) + 4(\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (3\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w (5(Q^2 \\
& + s) + 19s') + w^2 (-Q^2 + s + 5s') + 18\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} s') - 12\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} (-2\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} s' (-Q^2 - s \\
& + s') + \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w ((Q^2 + s)^2 + 2ss' - 3s'^2) + w^2 (s - s') (Q^2 + s + s')) + 2\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} \\
& w^2) + 6\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} s' (2\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + w) (w (Q^2 + s + s') + 2\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s') - \Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w^2) \\
& - 2\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + w) (12\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (Q^2 + s - s') + w (s - s')) + \Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (w \\
& - 5\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}}))) + 3\delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} (\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w (5(Q^2 + s) + 23s') + w^2 (-Q^2 + 5s + 11s') \\
& + 12\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} s') + 4\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s' (w^2 (3Q^2 + s + 3s') + 2\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s' + 6\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s' w) + 4\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \\
& (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (-4s' (Q^2 + s) + (Q^2 + s)^2 + 3s'^2) + w^2 (3s' - s) (Q^2 - s + s') + \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \\
& w (-Q^4 - s' (Q^2 + 8s) + Q^2 s + 2s^2 + 6s'^2))) - 2\delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (w (3\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (w \\
& (-Q^2 - s + s') + 4\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s') + 12\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} s' (w (Q^2 + s + s') + 2\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s') - 10 \\
& \Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}}) - 3\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} (13(Q^2 + s) - 33s') - 2\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w (Q^2 - 7s \\
& + 27s') + w^2 (Q^2 + s - 21s')) + 4\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} s' (3(Q^2 + s) - 7s') + \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w (-2 \\
& s' (Q^2 - s) + (Q^2 + s)^2 - 11s'^2) + w^2 (-s' (4Q^2 + s) + s (Q^2 + s) - 4s'^2))) \\
& + 12\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} (Q^2 + s - s')^2 + w^2 (s' - s) (Q^2 - s + s') + \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w (-Q^4 - s' \\
& (Q^2 + 4s) + Q^2 s + 2s^2 + 2s'^2))) / (2048\pi^6 \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} w (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + w + z)^2)
\end{aligned}
\tag{A.3}$$

$$\rho_1^{\text{pert},u}(s, s'; q^2) + \rho_1^{\text{pert},s}(s, s'; q^2) = \int_0^1 \int_0^x \int_0^y \int_0^z dx dy dz dw F_1^{\text{pert}, e_u, s} \theta \left(\Delta_{e_u, s}^{\text{pert}} \right) \quad (\text{A.4})$$

2) $g_{\alpha\beta} p'_\mu$ yapısına ait toplam kuralı

$$\begin{aligned} F_2^{\text{pert}, e_c} = & - \left((e_c \Delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (12\delta_{e_c}^{\text{pert2}} \zeta_{e_c}^{\text{pert3}} z^3 Q^4 + 12\delta_{e_c}^{\text{pert2}} x^3 z^3 Q^4 - 12\delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x^3 z^3 Q^4 \right. \\ & + 36\delta_{e_c}^{\text{pert2}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} x^2 z^3 Q^4 - 36\delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x^2 z^3 Q^4 - 12\delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert3}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} z^3 Q^4 \\ & + 36\delta_{e_c}^{\text{pert2}} \zeta_{e_c}^{\text{pert2}} x z^3 Q^4 - 36\delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert2}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x z^3 Q^4 + 6\delta_{e_c}^{\text{pert2}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} \eta_{e_c}^{\text{pert}} z (x \\ & (y + z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x + y + z))^3 Q^4 - 12\delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} \eta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} z (x(y + z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} \\ & (x + y + z))^3 Q^4 + 6\delta_{e_c}^{\text{pert2}} \eta_{e_c}^{\text{pert}} x z (x(y + z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x + y + z))^3 Q^4 - 12\delta_{e_c}^{\text{pert}} \\ & \eta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x z (x(y + z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x + y + z))^3 Q^4 + 6\delta_{e_c}^{\text{pert2}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} x^3 z^2 Q^4 \\ & - 12\delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x^3 z^2 Q^4 + 12\delta_{e_c}^{\text{pert2}} \zeta_{e_c}^{\text{pert2}} x^2 z^2 Q^4 - 24\delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert2}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x^2 z^2 Q^4 \\ & + 6\delta_{e_c}^{\text{pert2}} \zeta_{e_c}^{\text{pert3}} x z^2 Q^4 - 12\delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert3}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x z^2 Q^4 - 18\delta_{e_c}^{\text{pert2}} \zeta_{e_c}^{\text{pert2}} z^2 (x(y + z) \\ & + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x + y + z)) Q^4 - 18\delta_{e_c}^{\text{pert2}} x^2 z^2 (x(y + z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x + y + z)) Q^4 \\ & + 24\delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x^2 z^2 (x(y + z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x + y + z)) Q^4 + 24\delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert2}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} z^2 \\ & (x(y + z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x + y + z)) Q^4 - 36\delta_{e_c}^{\text{pert2}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} x z^2 (x(y + z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x \\ & + y + z)) Q^4 + 48\delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x z^2 (x(y + z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x + y + z)) Q^4 - 6 \\ & \delta_{e_c}^{\text{pert2}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} x^2 z (x(y + z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x + y + z)) Q^4 + 12\delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x^2 z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (x(y+z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}}(x+y+z)) Q^4 - 6\delta_{e_c}^{\text{pert2}} \zeta_{e_c}^{\text{pert2}} xz(x(y+z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}}(x+y \\
& +z)) Q^4 + 12\delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert2}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} xz(x(y+z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}}(x+y+z)) Q^4 + \dots))) \\
& / (2048\zeta_{e_c}^{\text{pert2}} \pi^6 (\zeta_{e_c}^{\text{pert}} + x)^2 (x(y+z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}}(x+y+z))^3)
\end{aligned} \tag{A.5}$$

$$\rho_2^{\text{pert},c}(s, s'; q^2) = \int_0^1 \int_0^x \int_0^y dx dy dz F_2^{\text{pert},e_c} \theta(\Delta_{e_c}^{\text{pert}}) \tag{A.6}$$

$$\begin{aligned}
F_2^{\text{pert},e_{u,s}} = & -((3(e_s + e_u)\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \eta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (6(-2s'(-Q^2 + s' - s)\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} + (s^2 + 3(Q^2 \\
& + s')s + 2(Q^4 - s'Q^2 - 2s'^2))w\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + (-2(Q^2 + s')^2 + s(Q^2 + s') + s^2) \\
& w^2)\delta_{e_{u,s}}^{\text{pert3}} + 3(-4\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}}(s'(Q^2 - 5s' + s)\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} + (-8s'^2 - (7Q^2 + 3s)s' + (Q^2 \\
& + s)^2)w\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} - 3(Q^2 + s')(Q^2 + s' + s)w^2) + \Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}}((-Q^2 + 25s' - s)\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} \\
& + (31Q^2 + 31s' + 21s)w\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + 2(3Q^2 + 3s' + 11s)w^2) + 4\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}}((s - 3s')(Q^2 \\
& - s' + s)\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} + (-3Q^4 + 3s'Q^2 - 3sQ^2 + 6s'^2 + 2s^2 - 8s's)w\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + (3(Q^2 \\
& + s')^2 - 4s(Q^2 + s') + s^2)w^2))\delta_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} - 2(2(2\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} - 13w\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} - 10w^2)\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} \\
& + 3\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}}(16s'\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} + 2(s' + 9(Q^2 + s))w\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} - 7(Q^2 + s' - s)w^2)\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \\
& + 12\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert2}}((s - s')(Q^2 - s' + s)\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} + (-Q^4 - sQ^2 + 2s'^2 + 2s^2 + s'(Q^2 \\
& - 4s))w\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + (Q^2 + s' - s)^2w^2) + 12\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert2}}(2\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert2}}s'^2 + 3\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}}(Q^2 + s' + s)w \\
& s' + (Q^2 + s' + s)^2w^2) - 3\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}}(\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}}((Q^2 - 31s' + 11s)\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} - 2(17Q^2 + 25s'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -5s)w\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} - (19Q^2 + 19s' + s)w^2) + 4\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (-s'(-Q^2 + 7s' - 3s)\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} + \dots)) \\
& / (2048\pi^6 \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} w(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + w + z)^2)
\end{aligned} \tag{A.7}$$

$$\rho_2^{\text{pert},u}(s, s'; q^2) + \rho_2^{\text{pert},s}(s, s'; q^2) = \int_0^1 \int_0^x \int_0^y \int_0^z dx dy dz dw F_2^{\text{pert } e_{u,s}} \theta \left(\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \right) \tag{A.8}$$

3) $g_{\alpha\mu} p_\beta$ yapısına ait toplam kuralı

$$\begin{aligned}
F_3^{\text{pert}, e_c} = & (e_c \Delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (12 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} z^3 Q^4 + 12 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} x^3 z^3 Q^4 - 12 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x^3 z^3 Q^4 \\
& + 36 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} x^2 z^3 Q^4 - 36 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x^2 z^3 Q^4 - 12 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} z^3 Q^4 \\
& + 36 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} x z^3 Q^4 - 36 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x z^3 Q^4 + 6 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} \eta_{e_c}^{\text{pert}} z (x(y \\
& + z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x + y + z))^3 Q^4 - 12 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} \eta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} z (x(y + z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x \\
& + y + z))^3 Q^4 + 6 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} \eta_{e_c}^{\text{pert}} x z (x(y + z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x + y + z))^3 Q^4 - 12 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \\
& \eta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x z (x(y + z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x + y + z))^3 Q^4 + 18 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} x^3 z^2 Q^4 \\
& - 24 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x^3 z^2 Q^4 + 36 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} x^2 z^2 Q^4 - 48 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x^2 z^2 Q^4 \\
& + 18 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} x z^2 Q^4 - 24 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x z^2 Q^4 + 6 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} x^3 z Q^4 \\
& - 12 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x^3 z Q^4 + 6 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} x^2 z Q^4 - 12 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x^2 z Q^4 \\
& - 18 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} z^2 (x(y + z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x + y + z)) Q^4 - 18 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} x^2 z^2 (x(y + z) \\
& + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x + y + z)) Q^4 + 24 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x^2 z^2 (x(y + z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x + y + z)) Q^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +24\delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert2}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} z^2 \left(x(y+z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x+y+z) \right) Q^4 - 36\delta_{e_c}^{\text{pert2}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} x z^2 \\
& \left(x(y+z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x+y+z) \right) Q^4 + 48\delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x z^2 \left(x(y+z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} \right. \\
& \left. (x+y+z) \right) Q^4 - 12\delta_{e_c}^{\text{pert2}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} x^2 z \left(x(y+z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x+y+z) Q^4 + \dots \right) \\
& / (4096 \zeta_{e_c}^{\text{pert2}} \pi^6 (\zeta_{e_c}^{\text{pert}} + x)^2 (x(y+z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x+y+z))^3)
\end{aligned} \tag{A.9}$$

$$\rho_3^{\text{pert},c}(s, s'; q^2) = \int_0^1 \int_0^x \int_0^y dx dy dz F_3^{\text{pert},e_c} \theta(\Delta_{e_c}^{\text{pert}}) \tag{A.10}$$

$$\begin{aligned}
F_3^{\text{pert}, e_{u,s}} &= (3 \Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \eta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} yz(e_s + e_u) (\xi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} - yz(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + w)) (6 \delta_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} (\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (4 \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \\
& w(Q^2 + s) + w^2(2Q^2 + 4s - 3s') + 3\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} s') + \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (-2\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s' w(s' - 2 \\
& (Q^2 + s)) + w^2(s'(s - Q^2) + (Q^2 + s)^2 - 2s'^2) + 2\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s'^2) - \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w(2Q^2 \\
& + s - s') (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (Q^2 + s - s') - w(Q^2 - s + s')))) + \delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (3\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w(5 \\
& w(Q^2 + s) + 20\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s' + 11s'w) - 4\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (Q^2 + s - s') (w^2(2Q^2 + s + 2s') \\
& + \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} s' + 4\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s'w)) + 3\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (3\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} (-Q^2 - s + s') + 2\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w \\
& (-13Q^2 - 9s + 9s') + w^2(-19Q^2 - 15s + 15s')) + 12\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} s'w(w(Q^2 + s \\
& + s') + 2\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s') + 12Q^2 \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} w(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (Q^2 + s - s') - w(Q^2 - s + s')) \\
& + 8\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} w(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + 3w)) - 4(\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (3\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w(Q^2 + s + 19s') \\
& + w^2(3(Q^2 + s) + 8s') + 9\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} s') - 6Q^2 \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} w(w(Q^2 + s + s') + 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s') + \Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} w^2) + 3\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} s' (2\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + w) + \dots)) / (2048\pi^6 \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} \\
& w(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + w + z)^2)
\end{aligned}
\tag{A.11}$$

$$\rho_3^{\text{pert},u}(s, s'; q^2) + \rho_3^{\text{pert},s}(s, s'; q^2) = \int_0^1 \int_0^x \int_0^y \int_0^z dx dy dz dw F_3^{\text{pert},e_{u,s}} \theta(\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}})
\tag{A.12}$$

4) $g_{\alpha\mu} p'_\beta$ yapısına ait toplam kuralı

$$\begin{aligned}
F_4^{\text{pert},e_c} = & -((e_c \Delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (12 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} z^3 Q^4 + 12 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} x^3 z^3 Q^4 + 24 \kappa_{e_c}^{\text{pert}2} x^3 z^3 Q^4 \\
& - 36 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x^3 z^3 Q^4 + 24 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} \kappa_{e_c}^{\text{pert}2} z^3 Q^4 + 72 \zeta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}2} x^2 z^3 Q^4 + 36 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} \\
& \zeta_{e_c}^{\text{pert}} x^2 z^3 Q^4 - 108 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x^2 z^3 Q^4 - 36 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} z^3 Q^4 + 36 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} \\
& \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} x z^3 Q^4 + 72 \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} \kappa_{e_c}^{\text{pert}2} x z^3 Q^4 - 108 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x z^3 Q^4 + 24 \zeta_{e_c}^{\text{pert}} \eta_{e_c}^{\text{pert}} \\
& \kappa_{e_c}^{\text{pert}2} x(x(y+z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}}(x+y+z))^3 Q^4 + 6 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} \eta_{e_c}^{\text{pert}} x(x(y+z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} \\
& (x+y+z))^3 Q^4 - 24 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} \eta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x(x(y+z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}}(x+y+z))^3 Q^4 \\
& + 24 \zeta_{e_c}^{\text{pert}} \eta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}2} z(x(y+z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}}(x+y+z))^3 Q^4 + 6 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} \eta_{e_c}^{\text{pert}} x z(x(y \\
& + z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}}(x+y+z))^3 Q^4 - 24 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \eta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x z(x(y+z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}}(x+y \\
& + z))^3 Q^4 + 48 \zeta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}2} x^3 z^2 Q^4 + 18 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} x^3 z^2 Q^4 - 60 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x^3 \\
& z^2 Q^4 + 36 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} x^2 z^2 Q^4 + 96 \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} \kappa_{e_c}^{\text{pert}2} x^2 z^2 Q^4 - 120 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x^2 \\
& z^2 Q^4 + 18 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} x z^2 Q^4 + 48 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} \kappa_{e_c}^{\text{pert}2} x z^2 Q^4 + \dots)) / (4096 \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} \\
& \pi^6 (\zeta_{e_c}^{\text{pert}} + x)^2 (x(y+z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}}(x+y+z))^3)
\end{aligned}$$

$$\rho_4^{\text{pert},c}(s, s'; q^2) = \int_0^1 \int_0^x \int_0^y dx dy dz F_4^{\text{pert},e_c} \theta(\Delta_{e_c}^{\text{pert},e_c})$$

$$\begin{aligned} F_4^{\text{pert},e_{u,s}} = & \left(3 \Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \eta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} yz (e_s + e_u) \left(yz (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + w) - \xi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \right) \left(3 \delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}3} (2 \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} s' (Q^2 \right. \right. \\ & + s - s') + \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w (s' (s - 2Q^2) + s (Q^2 + s) - 2s'^2) + sw^2 (-Q^2 \\ & + s - s')) - 6 \Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (13 (Q^2 + s) + s') + 12Q^2 \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}}) \\ & + 2 \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w (\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (7Q^2 + 13s + 3s') + 6Q^2 \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} + 2 \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} s') + \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \\ & w^2 (\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (Q^2 + s + s') + \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (Q^2 + 17s + s')) - 24 \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (w (Q^2 \\ & + s + s') + 2 \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s') (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (Q^2 + s) + Q^2 \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + s \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w) \\ & + 3 \delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} (\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w (3Q^2 + 9s + 11s') - w^2 (Q^2 - 9s + s') + 12 \\ & \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} s') + 2 (s \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w^2 (Q^2 + s + s') + \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} (\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s' (-Q^2 - s + 5s') \\ & + \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (2Q^4 + 3Q^2 s - 3Q^2 s' + s^2 - 2ss' + s'^2)) + \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w (3 \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s' (Q^2 \\ & + s + s') + \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (-2Q^4 - s' (Q^2 + 2s) + Q^2 s + s^2 + s'^2))) + \delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w^2 \\ & (\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (3Q^2 + s + 3s') + \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (Q^2 - s + s')) - 12 (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} (\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (-s' \\ & (5Q^2 + 3s) + (Q^2 + s)^2 + 2s'^2) + Q^2 \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} (Q^2 + s - s') + 2 \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} s'^2) \\ & + s \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w^2 (-Q^2 + s - s') + \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w (\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} s' (Q^2 + s + s') - Q^2 \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} \\ & (Q^2 - s + s') + \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (-3Q^4 - 2s' (Q^2 + s) - 2Q^2 s + s^2 + s'^2))) + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} + 2\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w + 5w^2)) + 4\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} - 4\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w \\ & - 5w^2(\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}}))) / (2048\pi^6 \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} w(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + w + z)^2) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\rho_4^{\text{pert},u}(s, s'; q^2) + \rho_4^{\text{pert},s}(s, s'; q^2) = \int_0^1 \int_0^x \int_0^y \int_0^z dx dy dz dw F_4^{\text{pert},e_{u,s}} \theta \left(\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \right)$$

5) $g_{\beta\mu}p_\alpha$ yapısına ait toplam kuralı

$$\begin{aligned} F_5^{\text{pert},e_c} = & (e_c \Delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (12\delta_{e_c}^{\text{pert}2} \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} z^3 Q^4 + 12\delta_{e_c}^{\text{pert}2} x^3 z^3 Q^4 - 12\delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x^3 z^3 Q^4 \\ & + 36\delta_{e_c}^{\text{pert}2} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} x^2 z^3 Q^4 - 36\delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x^2 z^3 Q^4 - 12\delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} x z^3 Q^4 \\ & - 36\delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x z^3 Q^4 + 6\delta_{e_c}^{\text{pert}2} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} \eta_{e_c}^{\text{pert}} x (x(y+z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x+y+z))^3 \\ & Q^4 - 12\delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} \eta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x (x(y+z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x+y+z))^3 Q^4 + 6\delta_{e_c}^{\text{pert}2} \\ & \zeta_{e_c}^{\text{pert}} \eta_{e_c}^{\text{pert}} z (x(y+z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x+y+z))^3 Q^4 - 12\delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} \eta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} z \\ & (x(y+z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x+y+z))^3 Q^4 + 6\delta_{e_c}^{\text{pert}2} \eta_{e_c}^{\text{pert}} x z (x(y+z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x \\ & + y+z))^3 Q^4 - 12\delta_{e_c}^{\text{pert}} \eta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x z (x(y+z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x+y+z))^3 Q^4 + 18 \\ & \delta_{e_c}^{\text{pert}2} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} x^3 z^2 Q^4 - 24\delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x^3 z^2 Q^4 + 36\delta_{e_c}^{\text{pert}2} \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} x^2 z^2 Q^4 \\ & - 48\delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x^2 z^2 Q^4 + 18\delta_{e_c}^{\text{pert}2} \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} x z^2 Q^4 - 24\delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x \\ & z^2 Q^4 + 6\delta_{e_c}^{\text{pert}2} \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} x^3 z Q^4 - 12\delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x^3 z Q^4 + 6\delta_{e_c}^{\text{pert}2} \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} \\ & x^2 z Q^4 - 12\delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x^2 z Q^4 - 6\delta_{e_c}^{\text{pert}2} \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} x^2 (x(y+z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} \\ & (x+y+z)) Q^4 + 12\delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x^2 (x(y+z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x+y+z)) Q^4 \\ & - 18\delta_{e_c}^{\text{pert}2} \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} z^2 (x(y+z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x+y+z)) Q^4 - 18\delta_{e_c}^{\text{pert}2} x^2 z^2 (x(y+z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x + y + z)) Q^4 + 24 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x^2 z^2 (x(y + z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x + y + z)) \\
& Q^4 + 24 \delta_{e_r}^{\text{pert}} \zeta_{e_r}^{\text{pert}2} \kappa_{e_r}^{\text{pert}} z^2 (x(y + z) + \zeta_{e_r}^{\text{pert}} (x + y + z)) Q^4 + \dots) / (4096 \\
& \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} \pi^6 (\zeta_{e_c}^{\text{pert}} + x)^2 (x(y + z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x + y + z))^3)
\end{aligned} \tag{A.15}$$

$$\rho_5^{\text{pert},c}(s, s'; q^2) = \int_0^1 \int_0^x \int_0^y dx dy dz F_5^{\text{pert},e_c} \theta(\Delta_{e_c}^{\text{pert},e_c})$$

$$\begin{aligned}
F_5^{\text{pert},e_{u,s}} = & - \left((3 \Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \eta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} y z (e_s + e_u) (y z (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + w) - \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}}) (-3 \Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (\delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \right. \\
& + w) \left(w (Q^2 + s + 11 s') + 8 \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s' \right) + \delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (-Q^2 - s + s') \\
& - 2 \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w (\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (-13 Q^2 - 5 s + 5 s') + 6 \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s') - w^2 (\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (Q^2 + s + 7 s') \\
& + \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (-23 Q^2 - 11 s + 11 s')) \Big) - 4 (2 \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w (4 \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (Q^2 + s + s') \\
& + 3 Q^2 \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}}) + w^2 (\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (6 (Q^2 + s) + s') + 6 Q^2 \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} + \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} s') \\
& + 9 \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s')) + 3 (\delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}3} s' (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + 2w) (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (-Q^2 - s + s') + w \\
& (Q^2 - s + s')) - 4 \delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s' (-Q^2 - s + s') - \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w (\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \\
& \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (-2 s' (3 Q^2 + s) + (Q^2 + s)^2 + s'^2) + Q^2 \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} (Q^2 + s - s') + 2 \\
& \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} s'^2) + w^2 (\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} (-s') (Q^2 + s + s') + \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (s' (2 Q^2 + s) + 3 \\
& Q^2 (Q^2 + s) - s'^2) + Q^2 \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} (Q^2 - s + s')) + 8 \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (w (Q^2 + s + s') \\
& + 2 \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s') (\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w (Q^2 + s) + Q^2 \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w + \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s') - 2 \delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w (\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \\
& (2 Q^4 + 3 Q^2 s - 3 Q^2 s' + s^2 - 2 s s' + s'^2) + 6 \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s'^2) + w^2 (\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s' (3 Q^2 + s
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +3s')\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s'^2)) + 4\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} (-2\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w (\delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} - 2\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}}) + w^2(2\delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} - 3\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \\
& -\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}}) + 5\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}})))/(2048\pi^6\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}}\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} w(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + w + z)^2))
\end{aligned}
\tag{A.16}$$

$$\rho_5^{\text{pert},u}(s, s'; q^2) + \rho_5^{\text{pert},s}(s, s'; q^2) = \int_0^1 \int_0^x \int_0^y \int_0^z dx dy dz dw F_5^{\text{pert},e_{u,s}} \theta \left(\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \right)$$

6) $g_{\beta\mu} p'_\alpha$ yapısına ait toplam kuralı

$$\begin{aligned}
F_6^{\text{pert},e_c} = & (e_c \Delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (-12 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} z^3 Q^4 - 12 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} x^3 z^3 Q^4 - 24 \kappa_{e_c}^{\text{pert}2} x^3 z^3 Q^4 \\
& + 36 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x^3 z^3 Q^4 - 24 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} \kappa_{e_c}^{\text{pert}2} z^3 Q^4 - 72 \zeta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}2} x^2 z^3 Q^4 - 36 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} \\
& \zeta_{e_c}^{\text{pert}} x^2 z^3 Q^4 + 108 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x^2 z^3 Q^4 + 36 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} z^3 Q^4 - 36 \\
& \delta_{e_c}^{\text{pert}2} \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} x z^3 Q^4 - 72 \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} \kappa_{e_c}^{\text{pert}2} x z^3 Q^4 + 108 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x z^3 Q^4 \\
& - 24 \zeta_{e_c}^{\text{pert}} \eta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}2} z (x(y+z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x+y+z))^3 Q^4 - 6 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} \eta_{e_c}^{\text{pert}} \\
& z (x(y+z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x+y+z))^3 Q^4 + 24 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} \eta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} z (x(y+z) \\
& + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x+y+z))^3 Q^4 - 24 \eta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}2} x z (x(y+z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x+y+z))^3 \\
& Q^4 - 6 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} \eta_{e_c}^{\text{pert}} x z (x(y+z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x+y+z))^3 Q^4 + 24 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \eta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} \\
& x z (x(y+z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x+y+z))^3 Q^4 - 48 \zeta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}2} x^3 z^2 Q^4 - 18 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} \\
& x^3 z^2 Q^4 + 60 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x^3 z^2 Q^4 - 36 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} x^2 z^2 Q^4 - 96 \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} \kappa_{e_c}^{\text{pert}2} \\
& x^2 z^2 Q^4 + 120 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x^2 z^2 Q^4 - 18 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} x z^2 Q^4 - 48 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} \\
& \kappa_{e_c}^{\text{pert}2} x z^2 Q^4 + 60 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x z^2 Q^4 - 6 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} x^3 z Q^4 - 24 \zeta_{e_c}^{\text{pert}2}
\end{aligned}$$

$$\kappa_{e_c}^{\text{pert}2} x^3 z Q^4 + 24 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x^2 z Q^4 + \dots)) / (4096 \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} \pi^6 (\zeta_{e_c}^{\text{pert}} + x)^2 (x$$

$$(y + z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x + y + z))^3)$$

(A.17)

$$\rho_6^{\text{pert},c}(s, s'; q^2) = \int_0^1 \int_0^x \int_0^y dx dy dz F_6^{\text{pert},e_c} \theta(\Delta_{e_c}^{\text{pert},e_c})$$

$$\begin{aligned} F_6^{\text{pert},e_{u,s}} = & - \left(\left(3 \Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \eta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} y z (e_s + e_u) \left(y z \left(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + w \right) - \zeta_{u,s}^{\text{pert}} \right) \left(\delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \left(3 \Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \left(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} \left(\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (-29Q^2 - 15s + 15s') + 20\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s' \right) + 2\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w \left(\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (Q^2 \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + s + 13s' \right) + \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (-11Q^2 - 9s + 9s') \right) + 3w^2 \left(\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (3Q^2 + s + 3s') \right. \right. \\ & \left. \left. + \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (Q^2 - s + s') \right) \right) + 12 \left(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} \left(\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s' (-5Q^2 - 3s + 3s') + Q^2 \right. \right. \\ & \left. \left. \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} (Q^2 + s - s') + 2\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} s'^2 \right) + \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w \left(\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} s' (Q^2 + s + s') + 2\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \right. \right. \\ & \left. \left. \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \left(s'^2 - (Q^2 + s)^2 \right) - Q^2 \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} (Q^2 - s + s') \right) + s \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w^2 (Q^2 - s \right. \\ & \left. + s') \right) + 4 \Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} (5 \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} + 14 \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w + 5w^2) - 2 \left(3 \Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \left(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \left(\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (Q^2 + s \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + 21s') - 12Q^2 \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \right) + 4 \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w \left(\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (Q^2 + 5s + 5s') - 3Q^2 \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} + \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} s' \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + 3 \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w^2 \left(\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (Q^2 + s + s') + \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (Q^2 + 5s + s') \right) \right) + 12 \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \left(w (Q^2 + s \right. \right. \\ & \left. \left. + s') + 2 \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s' \right) (Q^2 \left(-\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \right) \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + s \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w + \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s') + 2 \Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} (11 \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} \right. \\ & \left. \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + 4 \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w (3 \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + 4 \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}}) + 5w^2 (\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}})) \right) + 3 \delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}3} \left(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} (Q^2 + s \right. \\ & \left. - s')^2 + s w^2 (-Q^2 + s - s') + \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w (-Q^4 + Q^2 s + 2s^2 - 3s s' + s'^2) \right) - 3 \delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} \\ & \left. \left(\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + w) (-9 \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (Q^2 + s) + 3w (Q^2 - 3s + s') + 7 \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s') + \dots \right) \right) \end{aligned}$$

$$(2048\zeta_{e_c}^{\text{pert}2}\pi^6(\zeta_{e_c}^{\text{pert}}+x)^2(x(y+z)+\zeta_{e_c}^{\text{pert}}(x+y+z))^3) \quad (\text{A.18})$$

$$\rho_6^{\text{pert},u}(s,s';q^2)+\rho_6^{\text{pert},s}(s,s';q^2)=\int_0^1\int_0^x\int_0^y\int_0^zdx\,dy\,dz\,dw\,F_6^{\text{pert},e_u,s}\theta\left(\Delta_{e_u,s}^{\text{pert}}\right)$$

7) $p'_\alpha p'_\beta p'_\mu$ yapısına ait toplam kuralı

$$\begin{aligned} F_7^{\text{pert},e_c} = & \left(3\,e_c\Delta_{e_c}^{\text{pert}}\xi_{e_c}^{\text{pert}}z\left(-4\left(-\zeta_{e_c}^{\text{pert}}\eta_{e_c}^{\text{pert}}\left(m_c^2-Q^2-s'-s\right)\left(x+y+z\right)^3+x^2\right.\right.\right. \\ & \left.\left.\left(-\eta_{e_c}^{\text{pert}}\left(m_c^2-Q^2-s'-s\right)x\left(y+z\right)^3-z\left(\left(2y+z\right)Q^2+s'\left(z-y\right)+s\left(3y\right.\right.\right.\right. \\ & \left.\left.\left.+z\right)\right)\right)+\zeta_{e_c}^{\text{pert}}x\left(3\eta_{e_c}^{\text{pert}}Q^2xy^3-3m_c^2\eta_{e_c}^{\text{pert}}xy^3+3\eta_{e_c}^{\text{pert}}Q^2x^2y^2-3m_c^2\eta_{e_c}^{\text{pert}}x^2\right. \\ & \left.y^2+9\eta_{e_c}^{\text{pert}}Q^2xzy^2-9m_c^2\eta_{e_c}^{\text{pert}}xzy^2+9\eta_{e_c}^{\text{pert}}Q^2xz^2y-9m_c^2\eta_{e_c}^{\text{pert}}xz^2y-Q^2xy\right. \\ & \left.-4Q^2zy+6\eta_{e_c}^{\text{pert}}Q^2x^2zy-6m_c^2\eta_{e_c}^{\text{pert}}x^2zy+3\eta_{e_c}^{\text{pert}}Q^2xz^3-3m_c^2\eta_{e_c}^{\text{pert}}xz^3-2Q^2\right. \\ & \left.z^2+3\eta_{e_c}^{\text{pert}}Q^2x^2z^2-3m_c^2\eta_{e_c}^{\text{pert}}x^2z^2-2Q^2xz+s\left(3\eta_{e_c}^{\text{pert}}x^2\left(y+z\right)^2+x\left(3\eta_{e_c}^{\text{pert}}\right.\right. \\ & \left.\left.\left(y+z\right)^2-2\right)\left(y+z\right)-2z\left(3y+z\right)\right)+s'\left(3\eta_{e_c}^{\text{pert}}x^2\left(y+z\right)^2+2\left(y-z\right)z+x\left(3\eta_{e_c}^{\text{pert}}\right.\right. \\ & \left.\left.y^3+9\eta_{e_c}^{\text{pert}}zy^2+\left(9\eta_{e_c}^{\text{pert}}z^2-1\right)y+3\eta_{e_c}^{\text{pert}}z^3+z\right)\right)\right)+\zeta_{e_c}^{\text{pert}2}\left(-3m_c^2\eta_{e_c}^{\text{pert}}yx^3+3\right. \\ & \left.\eta_{e_c}^{\text{pert}}syx^3-3m_c^2\eta_{e_c}^{\text{pert}}zx^3+3\eta_{e_c}^{\text{pert}}s zx^3-6m_c^2\eta_{e_c}^{\text{pert}}y^2x^2+6\eta_{e_c}^{\text{pert}}sy^2x^2-6m_c^2\right. \\ & \left.\eta_{e_c}^{\text{pert}}z^2x^2+6\eta_{e_c}^{\text{pert}}sz^2x^2-sx^2-12m_c^2\eta_{e_c}^{\text{pert}}yzx^2+12\eta_{e_c}^{\text{pert}}syzx^2-3m_c^2\eta_{e_c}^{\text{pert}}\right. \\ & \left.\left.y^3x+3\eta_{e_c}^{\text{pert}}sy^3x+\dots\right)\right)\bigg)/\left(512\zeta_{e_c}^{\text{pert}2}\pi^6\left(\zeta_{e_c}^{\text{pert}}+x\right)\left(x\left(y+z\right)+\zeta_{e_c}^{\text{pert}}\left(x+y+z\right)\right)^3\right) \quad (\text{A.19}) \end{aligned}$$

$$\rho_7^{\text{pert},c}(s,s';q^2)=\int_0^1\int_0^x\int_0^ydx\,dy\,dz\,F_7^{\text{pert},e_c}\theta\left(\Delta_{e_c}^{\text{pert},e_c}\right)$$

$$\begin{aligned}
F_7^{\text{pert},e_{u,s}} = & - \left(\left(9 \Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \eta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} y z (e_s + e_u) \left(y z (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + w) - \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \right) (\delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}3} (2 \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (Q^2 \right. \right. \\
& + s - 2s') + w(-4Q^2 + s - 4s')) + \delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} (2 \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (-Q^2 - s + 8s') \\
& + \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (-3Q^2 - 4s + 6s')) + 6 \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w (2Q^2 + s + 2s') + 4 \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w (3Q^2 - 2s \\
& + 3s') + \Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (17 \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + 6w)) - 2 \delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (2 \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (-Q^2 - 2s + 11s') \\
& + \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} (-Q^2 - 2s + 2s') + 3 \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} s') + 2w (2 \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} (Q^2 + s + s') + \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \\
& \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (8Q^2 + s + 8s') + 2 \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} (Q^2 - s + s')) + \Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (10 \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + 22 \\
& \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} - 3 \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w + 15 \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w)) + 8 \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w (2Q^2 + s + 2s') \\
& + 2 \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w (Q^2 + s') + \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (-s \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + 3 \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s' + 3 \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s')) + 12 \Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \\
& (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (3 \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + 2 \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}}) + w (-\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} + \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + 2 \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}2}))) \\
& / (512 \pi^6 \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} w (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + w + z)^2)
\end{aligned} \tag{A.20}$$

$$\rho_7^{\text{pert},u}(s, s'; q^2) + \rho_7^{\text{pert},s}(s, s'; q^2) = \int_0^1 \int_0^x \int_0^y \int_0^z dx dy dz dw F_7^{\text{pert},e_{u,s}} \theta \left(\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \right)$$

8) $p'_\alpha p_\beta p'_\mu$ yapısına ait toplam kuralı

$$\begin{aligned}
F_8^{\text{pert},e_c} = & - \left((3 e_c \Delta_{e_c}^{\text{pert}} \xi_{e_c}^{\text{pert}} (8 (\eta_{e_c}^{\text{pert}} (x + y + z)^3 ((x + z) m_c^2 - Q^2 z - s(x + 2z)) \right. \\
& \zeta_{e_c}^{\text{pert}4} (m_c^2 (\eta_{e_c}^{\text{pert}} (3y + 4z)x^2 + 4(\eta_{e_c}^{\text{pert}} z(y + z) - 1)x - y - z)(x + y + z)^2 \\
& - s(\eta_{e_c}^{\text{pert}} (3y + 5z)x^4 + 6\eta_{e_c}^{\text{pert}} (y^2 + 4zy + 3z^2) - 1)x^3 + (3\eta_{e_c}^{\text{pert}} y^3 + 27\eta_{e_c}^{\text{pert}} zy^2 \\
& + 45\eta_{e_c}^{\text{pert}} z^2y - 2y + 21\eta_{e_c}^{\text{pert}} z^3 - 4z)x^2 + z(8\eta_{e_c}^{\text{pert}} y^3 + 24\eta_{e_c}^{\text{pert}} zy^2 + 24\eta_{e_c}^{\text{pert}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& z^2 y - 6y + 8\eta_{e_c}^{\text{pert}} z^3 - 5z)x - 2z^2(2y + z)) + z(s'y(x - 2z) - Q^2(\eta_{e_c}^{\text{pert}} \\
& x^4 + 6\eta_{e_c}^{\text{pert}}(y + z)x^3 + (9\eta_{e_c}^{\text{pert}}(y + z)^2 - 1)x^2 + 2(y + z)(2\eta_{e_c}^{\text{pert}}(y + z)^2 \\
& - 1)x - z(2y + z)))\zeta_{e_c}^{\text{pert3}} + x(3(y + z)(x + y + z)(\eta_{e_c}^{\text{pert}}(y + 2z)x^2 + (2 \\
& \eta_{e_c}^{\text{pert}} z(y + z) - 1)x - y - z)m_c^2 - s(3\eta_{e_c}^{\text{pert}}(y^2 + 4zy + 3z^2)x^3 + (3 \\
& \eta_{e_c}^{\text{pert}} y^3 + 27\eta_{e_c}^{\text{pert}} zy^2 + 45\eta_{e_c}^{\text{pert}} z^2 y - 2y + 21\eta_{e_c}^{\text{pert}} - 4z)x^2 + 2z(6\eta_{e_c}^{\text{pert}} \\
& y^3 + 18\eta_{e_c}^{\text{pert}} zy^2 + 18\eta_{e_c}^{\text{pert}} z^2 y - 6y + 6\eta_{e_c}^{\text{pert}} z^3 - 5z)x - 6z^2(2y + z)) + z(2s' \\
& y(x - 3z) - Q^2(3\eta_{e_c}^{\text{pert}}(y + z)x^3 + \dots)))/(2048\zeta_{e_c}^{\text{pert2}} \pi^6(\zeta_{e_c}^{\text{pert}} + x)^2(x(y + z) \\
& + \zeta_{e_c}^{\text{pert}}(x + y + z))^3))
\end{aligned} \tag{A.21}$$

$$\rho_8^{\text{pert},c}(s, s'; q^2) = \int_0^1 \int_0^x \int_0^y dx dy dz F_8^{\text{pert},e_c} \theta(\Delta_{e_c}^{\text{pert},e_c})$$

$$\begin{aligned}
F_8^{\text{pert},e_{u,s}} &= (9 \Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \eta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} yz (e_s + e_u)(yz(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + w) - \xi_{e_{u,s}}^{\text{pert}})(\delta_{e_{u,s}}^{\text{pert3}} (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} (Q^2 + s \\
& - 3s') + \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w (-5Q^2 - 2s + s') + w^2(4Q^2 - s + 4s')) + \delta_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} (2\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} (\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \\
& (-2Q^2 - 3s + 5s') + 3\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s') + 2\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w(3\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (Q^2 + s - 2s') + \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (8Q^2 \\
& + s - s')) - 2w^2(3\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (2Q^2 + s + 2s') + 2\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (3Q^2 - 2s + 3s')) + \Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \\
& (8\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} - 19\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w - 5w^2)) + \delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (4(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (Q^2 + 2s - 2s') - 5\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \\
& s') + \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w(4\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (-Q^2 - s + 2s') - 3Q^2 \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} + 3\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} s') + w^2(2\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} \\
& (Q^2 + s + s') + \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (8Q^2 + s + 8s') + 2\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} (Q^2 - s + s')) + \Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(-27\zeta_{e,u,s}^{\text{pert}2} \phi_{e,u,s}^{\text{pert}} + 30\zeta_{e,u,s}^{\text{pert}} w \left(\kappa_{e,u,s}^{\text{pert}} + \phi_{e,u,s}^{\text{pert}} \right) + w^2 (29\phi_{e,u,s}^{\text{pert}} - 9\kappa_{e,u,s}^{\text{pert}}) \right) - 2 \\
& \left(4\kappa_{e,u,s}^{\text{pert}} \phi_{e,u,s}^{\text{pert}} \left(\zeta_{e,u,s}^{\text{pert}} w \left(\phi_{e,u,s}^{\text{pert}} (-Q^2 - 2s + 2s') + 3\kappa_{e,u,s}^{\text{pert}} s' \right) + w^2 (\kappa_{e,u,s}^{\text{pert}} (2Q^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + s + 2s') + 2\phi_{e,u,s}^{\text{pert}} (Q^2 + s') \right) - 2\zeta_{e,u,s}^{\text{pert}2} \phi_{e,u,s}^{\text{pert}} s' \right) + \Delta_{e,u,s}^{\text{pert}} \left(\zeta_{e,u,s}^{\text{pert}2} \phi_{e,u,s}^{\text{pert}} (\kappa_{e,u,s}^{\text{pert}} \right. \\
& \left. - 12\phi_{e,u,s}^{\text{pert}}) + 22\zeta_{e,u,s}^{\text{pert}} \kappa_{e,u,s}^{\text{pert}} \phi_{e,u,s}^{\text{pert}} w + w^2 (-7\kappa_{e,u,s}^{\text{pert}2} + 5\kappa_{e,u,s}^{\text{pert}} \phi_{e,u,s}^{\text{pert}} + 12\phi_{e,u,s}^{\text{pert}2}) \right) \Big) \\
& / (1024\pi^6 \zeta_{e,u,s}^{\text{pert}} \zeta_{e,u,s}^{\text{pert}2} w (\zeta_{e,u,s}^{\text{pert}} + w + z)^2)
\end{aligned} \tag{A.22}$$

$$\rho_8^{\text{pert},u}(s, s'; q^2) + \rho_8^{\text{pert},s}(s, s'; q^2) = \int_0^1 \int_0^x \int_0^y \int_0^z dx dy dz dw F_8^{\text{pert},e,u,s} \theta \left(\Delta_{e,u,s}^{\text{pert}} \right)$$

9) $p_\alpha p'_\beta p'_\mu$ yapısına ait toplam kuralı

$$\begin{aligned}
F_9^{\text{pert}, e_c} = & - \left((3 e_c \Delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} \left(-2 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} s x^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 8 \kappa_{e_c}^{\text{pert}2} s x^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 8 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} s \right. \right. \\
& \left. \left. x^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 12 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} Q^2 z^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 8 \kappa_{e_c}^{\text{pert}2} Q^2 z^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 20 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} Q^2 z^3 \right. \right. \\
& \left. \left. \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 16 \Delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} z^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 16 \kappa_{e_c}^{\text{pert}2} s' z^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 16 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} s' z^3 \right. \right. \\
& \left. \left. \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 16 \kappa_{e_c}^{\text{pert}2} s z^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 16 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} s z^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 10 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} Q^2 x z^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} \right. \right. \\
& \left. \left. - 16 \kappa_{e_c}^{\text{pert}2} Q^2 x z^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 28 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} Q^2 x z^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 48 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \Delta_{e_c}^{\text{pert}} x z^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} \right. \right. \\
& \left. \left. - 28 \Delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x z^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 4 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} s' x z^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 8 \kappa_{e_c}^{\text{pert}2} s' x z^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 4 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \right. \right. \\
& \left. \left. \kappa_{e_c}^{\text{pert}} s' x z^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 4 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} s x z^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 40 \kappa_{e_c}^{\text{pert}2} s x z^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 28 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} \right. \right. \\
& \left. \left. s x z^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 2 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} Q^2 x^2 z \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 8 \kappa_{e_c}^{\text{pert}2} Q^2 x^2 z \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 8 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} Q^2 \right. \right. \\
& \left. \left. x^2 z \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 22 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \Delta_{e_c}^{\text{pert}} x^2 z \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 44 \Delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x^2 z \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 2 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} s' x^2 z \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \zeta_{e_c}^{\text{pert3}} - 8\kappa_{e_c}^{\text{pert2}} s' x^2 z \zeta_{e_c}^{\text{pert3}} + 8\delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} s' x^2 z \zeta_{e_c}^{\text{pert3}} - 2\delta_{e_c}^{\text{pert2}} s x^2 z \zeta_{e_c}^{\text{pert3}} \\
& - 32\kappa_{e_c}^{\text{pert2}} s x^2 z \zeta_{e_c}^{\text{pert3}} + 20\delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} s x^2 z \zeta_{e_c}^{\text{pert3}} - 16\delta_{e_c}^{\text{pert2}} Q^2 x z^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert2}} - 24\delta_{e_c}^{\text{pert2}} \\
& Q^2 x z^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert2}} + 60\delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} Q^2 x z^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert2}} + \dots) / (2048\zeta_{e_c}^{\text{pert2}} \pi^6 (\zeta_{e_c}^{\text{pert}} + x)^2 \\
& (x(y+z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x+y+z))^3)
\end{aligned} \tag{A.23}$$

$$\rho_9^{\text{pert},c}(s, s'; q^2) = \int_0^1 \int_0^x \int_0^y dx dy dz F_9^{\text{pert},e_c} \theta(\Delta_{e_c}^{\text{pert},e_c})$$

$$\begin{aligned}
F_9^{\text{pert}, e_{u,s}} = & (9 \Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \eta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} yz(e_s + e_u)(yz(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + w) - \xi_{e_{u,s}}^{\text{pert}})(\delta_{e_{u,s}}^{\text{pert3}} (- (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w(4 Q^2 \\
& + 3s - 2s') + w^2(-4Q^2 + s - 4s') + 2\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} s')) + \delta_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} (2\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} (\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \\
& (-2Q^2 - 3s + 5s') + \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s') + 2\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w(2\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (Q^2 + s) + \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (8Q^2 + s \\
& - s') - 7\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s') - 2w^2(3\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (2Q^2 + s + 2s') + 2\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (3Q^2 - 2s + 3s')) \\
& + \Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} - 26\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w - 5w^2)) + \delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (4(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (Q^2 + s - 6s') \\
& + \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (Q^2 + 2s - 2s')) + \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w(\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (-5Q^2 - 3s + 7s') - 3Q^2 \\
& \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} + 3\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} s') + w^2(2\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} (Q^2 + s + s') + \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (8Q^2 + s + 8 \\
& s') + 2\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} (Q^2 - s + s')))) + \Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (-27\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + 30\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w(\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \\
& + \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}}) + w^2(29\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} - 9\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}}))) + 8\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w(\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (Q^2 + s - 2s') \\
& + \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (Q^2 + 2s - 2s')) - w^2(\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (2Q^2 + s + 2s') + 2\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (Q^2 + s')) \\
& + 2\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} s'(\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}})) + 2\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (13\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + 12\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}}) - 8\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}}
\end{aligned}$$

$$\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w + w^2 (7\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} - 5\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} - 12\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}2})) / (1024\pi^6 \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}}$$

$$\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} w (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + w + z)^2)$$

(A.24)

$$\rho_9^{\text{pert},u}(s, s'; q^2) + \rho_9^{\text{pert},s}(s, s'; q^2) = \int_0^1 \int_0^x \int_0^y \int_0^z dx dy dz dw F_9^{\text{pert},e_{u,s}} \theta \left(\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \right)$$

10) $p_\alpha p_\beta p'_\mu$ yapısına ait toplam kuralı

$$\begin{aligned} F_{10}^{\text{pert}, e_c} = & (3e_c \Delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (-2\delta_{e_c}^{\text{pert}} \Delta_{e_c}^{\text{pert}} x^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 4\Delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 2\delta_{e_c}^{\text{pert}2} s x^3 \\ & \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 4\delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} s x^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 6\delta_{e_c}^{\text{pert}2} Q^2 z^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 4\delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} Q^2 z^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 8 \\ & \Delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} z^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 8\delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} s' z^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 8\delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} s z^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 8\delta_{e_c}^{\text{pert}2} Q^2 \\ & x z^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 8\delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} Q^2 x z^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 24\delta_{e_c}^{\text{pert}} \Delta_{e_c}^{\text{pert}} x z^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 20\Delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} \\ & x z^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 2\delta_{e_c}^{\text{pert}2} s' x z^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 4\delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} s' x z^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 2\delta_{e_c}^{\text{pert}2} s x z^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} \\ & + 20\delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} s x z^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 2\delta_{e_c}^{\text{pert}2} Q^2 x^2 z \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 4\delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} Q^2 x^2 z \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 22 \\ & \delta_{e_c}^{\text{pert}} \Delta_{e_c}^{\text{pert}} x^2 z \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 16\Delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x^2 z \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 2\delta_{e_c}^{\text{pert}2} s' x^2 z \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 4\delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} \\ & s' x^2 z \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 16\delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} s x^2 z \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 18\delta_{e_c}^{\text{pert}2} Q^2 x z^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} + 12\delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} Q^2 \\ & x z^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} + 24\Delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x z^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} - 24\delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} s' x z^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} + 24\delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} \\ & s x z^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} - 16\delta_{e_c}^{\text{pert}2} Q^2 x^2 z^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} + 16\delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} Q^2 x^2 z^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} + 48\delta_{e_c}^{\text{pert}} \\ & \Delta_{e_c}^{\text{pert}} x^2 z^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} + 40\Delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x^2 z^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} + \dots)) / (1024\zeta_{e_c}^{\text{pert}2} \pi^6 (\zeta_{e_c}^{\text{pert}} + x)^2 \\ & (x(y+z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x+y+z))^3) \end{aligned}$$

(A.25)

$$\rho_{10}^{\text{pert},c}(s, s'; q^2) = \int_0^1 \int_0^x \int_0^y dx dy dz F_{10}^{\text{pert},e_c} \theta(\Delta_{e_c}^{\text{pert},e_c})$$

$$\begin{aligned} F_{10}^{\text{pert},e_{u,s}} = & (9 \Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \eta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} yz(e_s + e_u)(yz(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + w) - \xi_{e_{u,s}}^{\text{pert}})(\delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}3} w(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}}(Q^2 + s \\ & - 5s') - w(5Q^2 + s + 5s')) + \delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} w(4\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}}(-2Q^2 - 3s + 5s') + 6\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \\ & w(Q^2 + s + s') + 4\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w(5Q^2 - 3s + 5s') + \Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}}(9\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} - 13w) + 8\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \\ & \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s') - 2\delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}}(2\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}}(Q^2(-\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}}) - 2Q^2\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} - s\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} - 4s\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \\ & + 11\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s' + 4\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s') + \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w(7Q^2 + 3s + 7s') + 4\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w(Q^2 - s + s')) + \Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \\ & (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + 28\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w + w^2(13\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} - 11\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}}))) + 4\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w(2\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}}(\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \\ & + 2\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}})(w(Q^2 + s + s') + 2\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s') + \Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}}(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}}(7\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + 12\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}}) + 3w(\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \\ & + 4\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}})))))))/(1024\pi^6 \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \xi_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} w(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + w + z)^2) \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

$$\rho_{10}^{\text{pert},u}(s, s'; q^2) + \rho_{10}^{\text{pert},s}(s, s'; q^2) = \int_0^1 \int_0^x \int_0^y \int_0^z dx dy dz dw F_{10}^{\text{pert},e_{u,s}} \theta(\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}})$$

11) $p'_\alpha p'_\beta p_\mu$ yapısına ait toplam kuralı

$$\begin{aligned} F_{11}^{\text{pert},e_c} = & (3e_c \Delta_{e_c}^{\text{pert}} \xi_{e_c}^{\text{pert}} (4(\eta_{e_c}^{\text{pert}}(Q^2 + s' + s)(x + y + z)^3(x + 2z)\zeta_{e_c}^{\text{pert}4} + ((Q^2 + s) \\ & (\eta_{e_c}^{\text{pert}}(3y + 5z)x^4 + (6\eta_{e_c}^{\text{pert}}(y^2 + 4zy + 3z^2) - 1)x^3 + (3\eta_{e_c}^{\text{pert}}y^3 + 27\eta_{e_c}^{\text{pert}}zy^2 \\ & + 45\eta_{e_c}^{\text{pert}}z^2y - y + 21\eta_{e_c}^{\text{pert}}z^3 - 4z)x^2 + z(8\eta_{e_c}^{\text{pert}}y^3 + 24\eta_{e_c}^{\text{pert}}zy^2 + 24\eta_{e_c}^{\text{pert}}z^2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -7y + 8\eta_{e_c}^{\text{pert}} z^3 - 5z)x - 2z^2(3y + z)) + s'(\eta_{e_c}^{\text{pert}}(3y + 5z)x^4 + (6\eta_{e_c}^{\text{pert}}(y^2 + 4zy \\
& + 3z^2) - 1)x^3 + (3\eta_{e_c}^{\text{pert}} y^3 + 27\eta_{e_c}^{\text{pert}} zy^2 + (45\eta_{e_c}^{\text{pert}} z^2 - 1)y + 21\eta_{e_c}^{\text{pert}} z^3)x^2 + z(8 \\
& \eta_{e_c}^{\text{pert}} y^3 + 24\eta_{e_c}^{\text{pert}} zy^2 + 24\eta_{e_c}^{\text{pert}} z^2y - 3y + 8\eta_{e_c}^{\text{pert}} z^3 - z)x + 2(y - z)z^2))\zeta_{e_c}^{\text{pert}3} \\
& + x((Q^2 + s)(3\eta_{e_c}^{\text{pert}}(y^2 + 4zy + 3z^2)x^3 + (3\eta_{e_c}^{\text{pert}} y^3 + 27\eta_{e_c}^{\text{pert}} zy^2 + 45\eta_{e_c}^{\text{pert}} z^2y - y \\
& + 21\eta_{e_c}^{\text{pert}} z^3 - 4z)x^2 + 2z(6\eta_{e_c}^{\text{pert}} y^3 + 18\eta_{e_c}^{\text{pert}} zy^2 + 18\eta_{e_c}^{\text{pert}} z^2y - 7y + 6\eta_{e_c}^{\text{pert}} z^3 \\
& - 5z)x - 6z^2(3y + z)) + s'(3\eta_{e_c}^{\text{pert}}(y^2 + 4zy + 3z^2)x^3 + (3\eta_{e_c}^{\text{pert}} y^3 + 27\eta_{e_c}^{\text{pert}} zy^2 \\
& + (45\eta_{e_c}^{\text{pert}} z^2 - 1)y + 21\eta_{e_c}^{\text{pert}} z^3)x^2 + 2z(6\eta_{e_c}^{\text{pert}} y^3 + 18\eta_{e_c}^{\text{pert}} zy^2 + 18\eta_{e_c}^{\text{pert}} z^2y - 3y \\
& + 6\eta_{e_c}^{\text{pert}} z^3 - z)x + 6(y - z)z^2))\zeta_{e_c}^{\text{pert}2} + \dots))) / (1024\zeta_{e_c}^{\text{pert}2} \pi^6 (\zeta_{e_c}^{\text{pert}} + x)^2 (x \\
& (y + z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}}(x + y + z))^3)
\end{aligned} \tag{A.27}$$

$$\rho_{11}^{\text{pert},c}(s, s'; q^2) = \int_0^1 \int_0^x \int_0^y dx dy dz F_{11}^{\text{pert},e_c} \theta(\Delta_{e_c}^{\text{pert},e_c})$$

$$\begin{aligned}
F_{11}^{\text{pert},e_{u,s}} &= (9 \Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \eta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} yz(e_s + e_u)(yz(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + w) - \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}})(\delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}3} \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}}(Q^2 + s \\
& - 3s') + w(-Q^2 + s - 5s')) + \delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} (2\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (2\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (5s' - 3(Q^2 + s)) + \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w \\
& (Q^2 + s + 7s') + 2\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w(2Q^2 - 3s + 5s') + 4\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s') + \Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (9\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} + \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \\
& w - 2w^2)) - 2\delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (2\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (-3\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (Q^2 + s) + 4\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (-Q^2 - s + s') \\
& + 17\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s') + w(\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (5Q^2 + s + 13s') + 2\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} (Q^2 - 2s + 2s') + 2\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} s')) \\
& \Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (35\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} - 4\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w(\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} - 5\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}}) - w^2(3\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}}))) + 8\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \left(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (-2Q^2 \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} - 2s \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + 4\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s' + 6\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s') + \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w(Q^2 + s + 3s') \right. \\
& + 2\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w(Q^2 + 2s')) + 4\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (2\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (7\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + 6\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}}) + 3\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w(\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \\
& + 4\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}}) - \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w^2(\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}}))) / (1024\pi^6 \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} w(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + w + z)^2)
\end{aligned} \tag{A.28}$$

$$\rho_{11}^{\text{pert},u}(s, s'; q^2) + \rho_{11}^{\text{pert},s}(s, s'; q^2) = \int_0^1 \int_0^x \int_0^y \int_0^z dx dy dz dw F_{11}^{\text{pert},e_{u,s}} \theta \left(\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \right)$$

12) $p'_\alpha p_\beta p_\mu$ yapısına ait toplam kuralı

$$\begin{aligned}
F_{12}^{\text{pert},e_c} = & - \left((3e_c \Delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (-2\delta_{e_c}^{\text{pert}2} s' x^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 16\Delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} (x+z)^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 12\delta_{e_c}^{\text{pert}2} s' \right. \\
& (x+z)^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 32\kappa_{e_c}^{\text{pert}2} s' (x+z)^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 44\delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} s' (x+z)^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 12 \\
& \delta_{e_c}^{\text{pert}2} s (x+z)^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 12\delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} s (x+z)^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 12\delta_{e_c}^{\text{pert}2} (Q^2 + s' + s) (x \\
& + z)^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 16\kappa_{e_c}^{\text{pert}2} (Q^2 + s' + s) (x+z)^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 28\delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} (Q^2 + s' + s) \\
& (x+z)^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 48\delta_{e_c}^{\text{pert}} \Delta_{e_c}^{\text{pert}} x (x+z)^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 68\Delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x (x+z)^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} \\
& + 14\delta_{e_c}^{\text{pert}2} s' x (x+z)^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 32\kappa_{e_c}^{\text{pert}2} s' x (x+z)^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 56\delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} s' x (x+z)^2 \\
& \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 6\delta_{e_c}^{\text{pert}2} s x (x+z)^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 10\delta_{e_c}^{\text{pert}2} (Q^2 + s' + s) x (x+z)^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 12\delta_{e_c}^{\text{pert}} \\
& \kappa_{e_c}^{\text{pert}} (Q^2 + s' + s) x (x+z)^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 22\delta_{e_c}^{\text{pert}} \Delta_{e_c}^{\text{pert}} x^2 (x+z) \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 12\delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} s' \\
& x^2 (x+z) \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 2\delta_{e_c}^{\text{pert}2} (Q^2 + s' + s) x^2 (x+z) \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 48\Delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x z (x+z)^2 \\
& \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} - 36\delta_{e_c}^{\text{pert}2} s' x z (x+z)^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} - 96\kappa_{e_c}^{\text{pert}2} s' x z (x+z)^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} + 132\delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} s'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& xz(x+z)^2\zeta_{e_c}^{\text{pert}2} - 36\delta_{e_c}^{\text{pert}2} sxz(x+z)^2\zeta_{e_c}^{\text{pert}2} + 36\delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} sxz(x+z)^2\zeta_{e_c}^{\text{pert}2} \\
& + 36\delta_{e_c}^{\text{pert}2} (Q^2 + s' + s)xz(x+z)^2\zeta_{e_c}^{\text{pert}2} + 48\kappa_{e_c}^{\text{pert}2} (Q^2 + s' + s)xz(x+z)^2\zeta_{e_c}^{\text{pert}2} \\
& - 84\delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} (Q^2 + s' + s)xz(x+z)^2\zeta_{e_c}^{\text{pert}2} + 22\delta_{e_c}^{\text{pert}} \Delta_{e_c}^{\text{pert}} x^3 z \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} + 12\delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} s' \\
& x^3 z \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} + 2\delta_{e_c}^{\text{pert}2} (Q^2 + s' + s)x^3 z \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} + \dots) / (2048\zeta_{e_c}^{\text{pert}2} \pi^6 (\zeta_{e_c}^{\text{pert}} + x)^2 \\
& (x(y+z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x+y+z))^3)
\end{aligned} \tag{A.29}$$

$$\rho_{12}^{\text{pert},c}(s, s'; q^2) = \int_0^1 \int_0^x \int_0^y dx dy dz F_{12}^{\text{pert},e_c} \theta(\Delta_{e_c}^{\text{pert},e_c})$$

$$\begin{aligned}
F_{12}^{\text{pert},e_{u,s}} &= (9 \Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \eta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} yz(e_s + e_u)(yz(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + w) - \xi_{e_{u,s}}^{\text{pert}})(\delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}3} (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w(Q^2 + s) \\
& + w^2(-Q^2 + s - 3s') + \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} s') + \delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w(2\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}}(-4Q^2 - s + s') + 11 \\
& \Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + 4\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s') + w^2(2\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}}(Q^2 + s + 4s') + 2\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}}(2Q^2 - 3s + 5s') + 5\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}}) \\
& + 4\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}}(Q^2 + s - 2s')) + \delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (4\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}}(2\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}}(-Q^2 - s + s') + 3\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s') \\
& + 4\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w(2\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}}(Q^2 + s - 3s') + 3Q^2 \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}}) - 4w^2(\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}}(2Q^2 + s + 6s') \\
& + \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}2}(Q^2 - 2s + 2s') + \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} s') + 19\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} - 30\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w \\
& + 3\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w^2(\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} - 7\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}})) + 8\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w(2\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}}(-Q^2 - s + s') + \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s') \\
& + w^2(\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}}(Q^2 + 2s') + \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s') - 2\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s') - 8\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (3\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} - 2 \\
& \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w + w^2(\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} - 3\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}}))) / (1024\pi^6 \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \xi_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} w(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + w + z)^2)
\end{aligned}$$

$$\rho_{12}^{\text{pert},u}(s, s'; q^2) + \rho_{12}^{\text{pert},s}(s, s'; q^2) = \int_0^1 \int_0^x \int_0^y \int_0^z dx dy dz dw F_{12}^{\text{pert},e_u,s} \theta \left(\Delta_{e_u,s}^{\text{pert}} \right)$$

13) $p_\alpha p'_\beta p_\mu$ yapısına ait toplam kuralı

$$F_{13}^{\text{pert}, e_c} = - \left((3e_c \Delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} \left(-2\delta_{e_c}^{\text{pert}2} s' x^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 16\Delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} (x+z)^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 12\delta_{e_c}^{\text{pert}2} \right. \right.$$

$$s'(x+z)^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 32\kappa_{e_c}^{\text{pert}2} s'(x+z)^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 44\delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} s'(x+z)^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 12$$

$$\delta_{e_c}^{\text{pert}2} s(x+z)^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 12\delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} s(x+z)^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 12\delta_{e_c}^{\text{pert}2} (Q^2 + s' + s)(x$$

$$+z)^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 16\kappa_{e_c}^{\text{pert}2} (Q^2 + s' + s)(x+z)^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 28\delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} (Q^2 + s' + s)(x$$

$$+z)^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 48\delta_{e_c}^{\text{pert}} \Delta_{e_c}^{\text{pert}} x(x+z)^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 68\Delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x(x+z)^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 14\delta_{e_c}^{\text{pert}2}$$

$$s'x(x+z)^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 32\kappa_{e_c}^{\text{pert}2} s'x(x+z)^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 56\delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} s'x(x+z)^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3}$$

$$+ 6\delta_{e_c}^{\text{pert}2} sx(x+z)^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 10\delta_{e_c}^{\text{pert}2} (Q^2 + s' + s)x(x+z)^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 12\delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}}$$

$$(Q^2 + s' + s)x(x+z)^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 22\delta_{e_c}^{\text{pert}} \Delta_{e_c}^{\text{pert}} x^2(x+z) \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 12\delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} s'x^2(x$$

$$+z) \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 2\delta_{e_c}^{\text{pert}2} (Q^2 + s' + s)x^2(x+z) \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 48\Delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} xz(x+z)^2$$

$$\zeta_{e_c}^{\text{pert}2} - 36\delta_{e_c}^{\text{pert}2} s'xz(x+z)^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} - 96\kappa_{e_c}^{\text{pert}2} s'xz(x+z)^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} + 132\delta_{e_c}^{\text{pert}}$$

$$\kappa_{e_c}^{\text{pert}} s'xz(x+z)^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} - 36\delta_{e_c}^{\text{pert}2} sxz(x+z)^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} + 36\delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} sxz(x$$

$$+z)^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} + 36\delta_{e_c}^{\text{pert}2} (Q^2 + s' + s)xz(x+z)^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} + 48\kappa_{e_c}^{\text{pert}2} (Q^2 + s'$$

$$+s)xz(x+z)^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} - 84\delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} (Q^2 + s' + s)xz(x+z)^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} + 22$$

$$\delta_{e_c}^{\text{pert}} \Delta_{e_c}^{\text{pert}} x^3 z \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} + 12\delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} s'x^3 z \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} + 2\delta_{e_c}^{\text{pert}2} (Q^2 + s' + s)x^3 z$$

$$\zeta_{e_c}^{\text{pert}2} - 96\delta_{e_c}^{\text{pert}} \Delta_{e_c}^{\text{pert}} x^2 z(x+z) \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} + 136\Delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} x^2 z(x+z) \zeta_{e_c}^{\text{pert}2}$$

$$\begin{aligned}
& +28\delta_{e_c}^{\text{pert2}} s' x^2 z(x+z) \zeta_{e_c}^{\text{pert2}} + \dots)) / (2048 \zeta_{e_c}^{\text{pert2}} \pi^6 (\zeta_{e_c}^{\text{pert}} + x)^2 (x(y+z) \\
& + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x+y+z))^3)
\end{aligned}
\tag{A.31}$$

$$\rho_{13}^{\text{pert},c}(s, s'; q^2) = \int_0^1 \int_0^x \int_0^y dx dy dz F_{13}^{\text{pert},e_c} \theta(\Delta_{e_c}^{\text{pert},e_c})$$

$$\begin{aligned}
F_{13}^{\text{pert},e_{u,s}} = & (9\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \eta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} yz(e_s + e_u) \left(yz(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + w) - \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \right) (2\delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w (\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (-4 \\
& Q^2 - s + s') + 2\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}}) + w^2(2Q^2\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} - 3s\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} - \Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + 3\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s' + 5 \\
& \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s') + 2\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (Q^2 + s - 2s')) + \delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (4\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (2\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (-Q^2 \\
& -s + s') + 3\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s') + 4\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w(3\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (Q^2 + s) + 3Q^2\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} - 7\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \\
& s') - 4w^2(\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} (Q^2 - 2s + 2s') + \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (3Q^2 + 7s') + \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} s') + 19 \\
& \Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} - 30\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w + 3\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w^2(\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} - 7\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}})) + 8\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \\
& \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w(2\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (-Q^2 - s + s') + 3\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s') + w^2(\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (Q^2 + s + 2s') \\
& + \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (Q^2 + 2s')) - 2\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s') + \delta_{e_{u,s}}^{\text{pert3}} s'(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} + \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w - 2w^2) \\
& - 4\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (6\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} - 11\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w - w^2(5\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + 6\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}}))) / (1024 \\
& \pi^6 \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert2}} w(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + w + z)^2)
\end{aligned}
\tag{A.32}$$

$$\rho_{13}^{\text{pert},u}(s, s'; q^2) + \rho_{13}^{\text{pert},s}(s, s'; q^2) = \int_0^1 \int_0^x \int_0^y \int_0^z dx dy dz dw F_{13}^{\text{pert},e_{u,s}} \theta(\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}})$$

14) $p_\alpha p_\beta p_\mu$ yapısına ait toplam kuralı

$$\begin{aligned}
F_{14}^{\text{pert}, e_c} = & - \left((3 e_c \Delta_{e_c}^{\text{pert}} \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (4 \Delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} (x+z)^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 3 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} s'(x+z)^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 8 \right. \\
& \delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} s'(x+z)^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 3 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} s(x+z)^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 3 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} (Q^2 + s' + s) \\
& (x+z)^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 4 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} (Q^2 + s' + s) (x+z)^3 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 12 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \Delta_{e_c}^{\text{pert}} x \\
& (x+z)^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - 2 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} s' x (x+z)^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 8 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} s' x (x+z)^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} \\
& + \delta_{e_c}^{\text{pert}2} (Q^2 + s' + s) x (x+z)^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} - \delta_{e_c}^{\text{pert}2} s' x^2 (x+z) \zeta_{e_c}^{\text{pert}3} + 12 \Delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} \\
& x z (x+z)^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} + 9 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} s' x z (x+z)^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} - 24 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} s' x z (x+z)^2 \\
& \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} + 9 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} s x z (x+z)^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} - 9 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} (Q^2 + s' + s) x z (x+z)^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} \\
& + 12 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} (Q^2 + s' + s) x z (x+z)^2 \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} - \delta_{e_c}^{\text{pert}2} s' x^3 z \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} + 24 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \\
& \Delta_{e_c}^{\text{pert}} x^2 z (x+z) \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} - 4 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} s' x^2 z (x+z) \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} + 16 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} s' x^2 z (x+z) \\
& \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} + 2 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} (Q^2 + s' + s) x^2 z (x+z) \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} + \delta_{e_c}^{\text{pert}2} s' x^2 (x(y+z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} \\
& (x+y+z)) \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} - 6 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \Delta_{e_c}^{\text{pert}} (x+z)^2 (x(y+z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x+y+z)) \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} \\
& - 8 \Delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} (x+z)^2 (x(y+z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x+y+z)) \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} - 4 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} s' (x+z)^2 \\
& (x(y+z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x+y+z)) \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} + 12 \delta_{e_c}^{\text{pert}} \kappa_{e_c}^{\text{pert}} s' (x+z)^2 (x(y+z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} \\
& (x+y+z)) \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} - 6 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} s (x+z)^2 (x(y+z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x+y+z)) \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} \\
& + 5 \delta_{e_c}^{\text{pert}2} (Q^2 + s' + s) (x+z)^2 (x(y+z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x+y+z)) \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} + \dots \Big) \\
& / (512 \zeta_{e_c}^{\text{pert}2} \pi^6 (\zeta_{e_c}^{\text{pert}} + x)^2 (x(y+z) + \zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x+y+z))^3)
\end{aligned}$$

(A.33)

$$\rho_{14}^{\text{pert},c}(s, s'; q^2) = \int_0^1 \int_0^x \int_0^y dx dy dz F_{14}^{\text{pert},e_c} \theta(\Delta_{e_c}^{\text{pert},e_c})$$

$$\begin{aligned} F_{14}^{\text{pert},e_{u,s}} = & (9\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \eta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} yz(e_s + e_u)(yz(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + w) - \xi_{e_{u,s}}^{\text{pert}})(\delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}2}(4\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}}(Q^2 + s \\ & - 2s') - 2w(\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}}(Q^2 - 2s + 4s') + \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s') + 3\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w) + 2\delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}}(4\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \\ & (-Q^2 - s + s') + 2\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w(Q^2 + s + 2s') + 2\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w(Q^2 - 2s + 2s') + \Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (9\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \\ & + 2w) + 6\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s') - 4\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (2\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (w(Q^2 + s + s') + 2\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s') + \Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \\ & + 6\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w)) + \delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}3} s'(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + 2w(6\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} - \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} w))) / (512\pi^6 \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \xi_{e_{u,s}}^{\text{pert}2} \\ & w(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + w + z)^2) \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

$$\rho_{14}^{\text{pert},u}(s, s'; q^2) + \rho_{14}^{\text{pert},s}(s, s'; q^2) = \int_0^1 \int_0^x \int_0^y \int_0^z dx dy dz dw F_{14}^{\text{pert},e_{u,s}} \theta(\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}}) \quad (\text{A.35})$$

Burada,

$$\Delta_{e_c}^{\text{pert}} = \frac{1}{2} \delta_{e_c}^{\text{pert}} (Q^2 + s - s') + Q^2 (-\phi_{e_c}^{\text{pert}}) + \kappa_{e_c}^{\text{pert}} s' + \rho_{e_c}^{\text{pert}}; \quad (\text{A.36})$$

$$\rho_{e_c}^{\text{pert}} = -\frac{m_c^2 (\zeta_{e_c}^{\text{pert}} + x) (x + y + z)}{\zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x + y + z) + x(y + z)}; \quad (\text{A.37})$$

$$\delta_{e_c}^{\text{pert}} = \frac{2\zeta_{\text{pert}} xy (\zeta_{\text{pert}} + x)}{(\zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x + y + z) + x(y + z))^2}; \quad (\text{A.38})$$

$$\kappa_{e_c}^{\text{pert}} = \frac{\zeta_{e_c}^{\text{pert}} x (\zeta_{e_c}^{\text{pert}} + x) (y + z)}{(\zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x + y + z) + x(y + z))^2}; \quad (\text{A.39})$$

$$\phi_{e_c}^{\text{pert}} = \frac{y (\zeta_{e_c}^{\text{pert}} + x) (\zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x + z) + xz)}{(\zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x + y + z) + x(y + z))^2}; \quad (\text{A.40})$$

$$\zeta_{e_c}^{\text{pert}} = \frac{\zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x + y + z) + x(y + z)}{(\zeta_{e_c}^{\text{pert}} + x)^2}; \quad (\text{A.41})$$

$$\eta_{e_c}^{\text{pert}} = \frac{1}{\zeta_{e_c}^{\text{pert}} (x + y + z) + x(y + z)}; \quad (\text{A.42})$$

$$\zeta_{e_c}^{\text{pert}} = -x - y - z + 1; \quad (\text{A.43})$$

$$\Delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} = \frac{1}{2} \delta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (Q^2 + s - s') + Q^2 \left(-\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} \right) + \kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} s' + \rho_{e_{u,s}}^{\text{pert}}; \quad (\text{A.44})$$

$$\rho_{e_{u,s}}^{\text{pert}} = -\frac{m_c^2 (x + y) (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (y + z) + w(y + z) + yz)}{\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} x(y + z) + \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} yz + wx(y + z) + wyz + xyz}; \quad (\text{A.45})$$

$$\kappa_{e_{u,s}}^{\text{pert}} = \frac{xyz (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + w) (\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} (y + z) + w(y + z) + yz)}{(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} x(y + z) + \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} yz + wx(y + z) + wyz + xyz)^2}; \quad (\text{A.46})$$

$$\delta e_{u,s}^{\text{pert}} = \frac{2wxyz(z(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + w + y) + y(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + w))}{(yz(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + w + x) + xy(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + w) + xz(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + w))^2}; \quad (\text{A.47})$$

$$\phi_{e_{u,s}}^{\text{pert}} = \frac{w(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}}(y+z) + w(y+z) + yz)(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}}x(y+z) + \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}}yz + xyz)}{(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}}x(y+z) + \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}}yz + wx(y+z) + wyz + xyz)^2}; \quad (\text{A.48})$$

$$\eta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} = \frac{(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} + w + z)^2(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}}x(y+z) + \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}}yz + wx(y+z) + wyz + xyz)^2}{(\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}}(y+z) + w(y+z) + yz)^5}; \quad (\text{A.49})$$

$$\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} = \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}}x(y+z) + \zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}}yz + wx(y+z) + wyz + xyz; \quad (\text{A.50})$$

$$\zeta_{e_{u,s}}^{\text{pert}} = -w - x - y - z + 1; \quad (\text{A.51})$$

şeklinde tanımlıdır.